概率论与数理统计笔记

Guotao He

2025-01-26

目录

1 概率论的基本概念

1.1 基本概念

样本空间与样本点 对于一个随机的试验 E，其实验的所有可能的结构构成一个集合，此集合称为随机实验 E 的**样本空间**，记为 S，样本空间的每一个元素被称为一个**样本点**。

随机事件 随机试验 E 的样本空间 S 的子集 A 被称为 E 的一个**随机事件**。特别的，由一个样本点组成的单点集，称为 **基本事件**，样本空间 S 是自身的子集，且每次实验中必然发生，称 S 为 E 的**必然事件**，空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也为样本空间 S 的子集，其在每次实验中必然不发生，$\varnothing$ 称为 E 的**不可能事件**。

事件空间 在随机试验 E 中的所有随机事件构成一个集合 $\mathscr{F}$(集合的每一个元素也是集合)，此集合被称为**事件空间**

事件本质上是样本空间的一个子集,因此事件之间的运算自然按集合论中集合之间的运算处理。具体而言，有：

1. $A \subseteq B$ 表示事件 B 包含事件 A，若 A 发生则 B 一定也发生
2. $A = B$ 表示 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$
3. $A + B = A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$
4. $AB = A \cap B = \{x|x \in A \text{ and } x \in B\}$
5. $A - B = \{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$
6. $A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B **互斥**
7. $A \cup B = S, A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B 互为**逆事件**，互为**对立事件**
8. 记 A 的对立事件为 $\bar{A} = S - A$

摩根率（对偶率） $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

Definition 1.1.1 (概率): 设随机试验 E 的样本空间为 S，$\mathscr{F}$ 为 S 的某些子集组成的一个事件空间，如果对任一事件 $A \in \mathscr{F}$，定义在 F 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足如下性质：

1. **非负性**：$\forall A \in \mathscr{F}, P(A) \geq 0$
2. **规范性（归一性）**：$P(S) = 1$
3. **可列可加性**：$\forall A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, 且满足 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j, i, j \in \mathbb{R}$，有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则我们称 P 是 E 的**概率测度**，称 $P(A)$ 是 A 的**概率**。

Remark: 这里的“可列可加”实际上是由测度论带来的，这里的“可列”要求事件序列 A_i 是无穷长的，且是可数无穷。

当只有有限个事件序列时（比如只有 n 个）我们只需要简单地将 $A_i(i>n)$ 全部定义为空集即可,换句话说，对于有限个互不相容的事件序列 $A_1,...,A_n$，有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

实际上，上述性质被称为“有限可加性”，而“可列可加性”是其到无穷情况的推广，“可列可加性”可以推出“有限可加性”，但“有限可加性”不能推导得到“可列可加性”。因此，我们不可用“有限可加性”去替代“可列可加性”，即使我们大多数情况下只处理有限的情况。

换句话说，所谓概率，就是一个从事件空间 $\mathscr{F}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个映射，且满足上面三个条件。实际上，概率的公理化条件并不直接告诉我们在实际问题中如何计算 $P(A)$，其只告诉了我们什么是 $P(A)$（实际上很多数学上的公理化定义都如此），$P(A)$ 的具体计算要根据问题的条件和背景得到。

概率空间 所谓概率空间是一个三元组，包含样本空间 S，事件集合 $\mathscr{F}$ 和概率测度 P, 记为 $(S,\mathscr{F},P)$

Definition 1.1.2 (条件概率): 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**。

独立性 对于试验 E 中的两个事件 A,B，若事件 A 发生的概率对事件 B 发生的概率无影响，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，则我们称事件 A 与 B 互相**独立**。更一般地，若 $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$ 则我们称 $A_1,A_2,...,A_n$ 相互独立。

Mark: 这里需要区分 A,B 互相独立和 A,B 互相对立的区别。实际上，事件 A,B 的独立性和对立性不可能同时成立，若已知 A,B 对立，且 A 不成立，则我们可以马上得到 B 成立，显然这不符合 A,B 互相独立的定义。

另外，A,B 对立很容易在 Venn 图中表示，但 A,B 独立不然，究其原因是因为 Venn 图并无体现数量关系，故无法表示 A,B 独立这一数量关系。

1.2 概率公式的基本计算

Theorem 1.2.1 (加法公式（Jordan 公式）)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$ 若 $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_n \le n} P\left(A_{i_1} ... A_{i_k}\right)$$

Theorem 1.2.2 (减法公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $A, B \in \mathscr{F}$，则：

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

Theorem 1.2.3 (乘法公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，则：

$$P(A_1 ... A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i | A_1 ... A_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_n \le n} (-1)^{k-1} P\left(A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_k}\right)$$

Theorem 1.2.4 (全概率公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $B, A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，其中 A_i 是 S 的分割，则：

$$P(B) = \sum_j P(A_j) P(B | A_j)$$

Theorem 1.2.5 (Bayes 公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $B, A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，其中 A_i 是 S 的分割，则：

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_j P(A_j) P(B | A_j)}$$

1.3 古典概率模型

Definition 1.3.1 (古典概型)：

2 随机变量及其分布

2.1 离散型随机变量及其分布律

2.2 连续型随机变量及其分布律

3 多维随机变量

4 杂七杂八

5 测试章节

5.1 Test 01