

高数反例集

Guotao He

2024-10-20

目录

1	极限与连续	2
1.1	无穷多无穷小之积不一定为无穷小	2
1.2	不存在与任何无穷小相比都是低（高）阶的无穷小	3
1.3	能用公式法且仅由一个式子表示的函数也不一定是初等函数	3
1.4	无穷多个在某点连续的函数之和在该点不一定连续	4
1.5	无穷多个在某点连续的函数之积在该点不一定连续	4
2	导数与微分	4
2.1	某一点可导 \nRightarrow 这一点邻域内连续	5

1 极限与连续

1.1 无穷多无穷小之积不一定为无穷小

构造出如下数列 $\{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\}, \dots, \{x_n^{(m)}\}, \dots$:

$$\begin{aligned}\{x_n^{(1)}\}: & 1^0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \dots \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m+1} \\ \{x_n^{(2)}\}: & 1 \quad 2^1 \quad \frac{1}{3} \quad \dots \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m+1} \\ \{x_n^{(3)}\}: & 1 \quad 1 \quad 3^2 \quad \dots \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m+1} \\ & \vdots \\ \{x_n^{(m)}\}: & 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad m^{m+1} \quad \frac{1}{m+1} \\ & \vdots\end{aligned}$$

更具体而言, 对于数列 $\{x_n^{(m)}\}$, 满足:

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{if } m < n \\ m^{m+1} & \text{if } m = n \\ \frac{1}{n} & \text{if } m > n \end{cases}$$

此时, 注意到对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m x_n^{(i)} = 1$$

这个整体可以看成是一个关于 n 的数列, 此时在对这个数列取极限, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m x_n^{(i)} = 1 \quad (1.1-1)$$

因此无穷多无穷小相乘不一定为无穷小.

Mark: 这里我们可以自然地提出一个问题: 式 (1.1-1) 中交换求极限的顺序是否仍旧等于 1? 为什么我们选取的是这个求极限的顺序? 首先, 我们解答第一个问题: 交换求极限的顺序后, 有:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m x_n^{(i)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m 0 = 0 \neq 1$$

可见交换求极限的循序后的值与原先不同. 现在我们解答为何在上文中是先求 $m \rightarrow \infty$ 的极限再求 $n \rightarrow \infty$ 的极限: 我们先暂且讨论一下没有“无穷多个”的情况: 若 a_n, b_n 是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 那么 $c_n = a_n \cdot b_n$ 也是 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 此时即“有限个无穷小与无穷小之积也是无穷小”. 这里我们可以注意到, 两个无穷小相乘之后的 c_n 一定是关于自变量 n 的数列, 然后我们再取 $n \rightarrow \infty$ 验证是否 c_n 为无穷小. 因此, 对于前文的情况而言, 我们一定是先求 $m \rightarrow \infty$ 的极限, 此时得到的仍是关于自变量 n 的数列, 再求 $n \rightarrow \infty$ 验证是否为无穷小, 因此, 对于此问题, 只能是按照式 (1.1-1) 的求极限顺序.

上面给了一个数列的例子, 对于函数而言同理 (最简单的构造就是使用取整函数), 下面给出一个特殊的例子: 在满足无穷多无穷小之积不一定为无穷小的前提下, 每一个无穷小都是连续的.

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{if } 0 < x < \frac{1}{n} \\ nx \left(\frac{1}{n!x^n}\right)^{(n-1)nx-(n-1)} & \text{if } \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1} \\ \left(\frac{1}{(n-1)!x^{n-1}}\right)^{(n-1)-(n-1)(n-2)x} & \text{if } \frac{1}{n-1} \leq x < \frac{1}{n-2} \\ 1 & \text{if } \frac{1}{n-2} \leq x \end{cases} \quad (n \geq 3, n \in \mathbb{N})$$

另外, 有:

$$f_1(x) = \min(x, 1)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2x \left(\frac{1}{2x^2}\right)^{2x-1} & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq x \end{cases}$$

不难验证 $f_n(x)$ 均为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 同时 $f_n(x)$ 均为连续函数. 注意到当 $\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}$ 时:

$$f_n(x)f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!x^{n-1}}$$

因此, 对于 $\forall x > 0$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n f_i(x) = 1$$

故:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n f_i(x) = 1$$

1.2 不存在与任何无穷小相比都是低 (高) 阶的无穷小

首先, 我们先讨论与任何无穷小相比都是低阶的无穷小: 取 $f(x) = 0$, 显然 $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$)

1.3 能用公式法且仅由一个式子表示的函数也不一定是初等函数

Dirichlet 函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

也可以写成下面一个表达式:

$$D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Mark: Dirichlet 函数是常见的病态函数, 经常用来构造很多命题的反例. 另外一个常用的病态函数是 Riemann 函数:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{if } x \in \mathbb{Q} \text{ 且 } x = \frac{p}{q} \text{ 为既约真分数} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1.4 无穷多个在某点连续的函数之和在该点不一定连续

构造如下函数:

$$f_n(x) = nx^2 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

显然, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $f_n(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 记

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m f_n(x)$$

则在 $x=0$ 时:

$$F(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m 0 = 0$$

但当 $x \neq 0$ 时, $F(x)$ 不存在, 故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

1.5 无穷多个在某点连续的函数之积在该点不一定连续

构造如下函数:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = \frac{1}{n} \\ 1 & \text{if } x \neq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (1.5-2)$$

显然, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $f_n(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 记

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = \frac{1}{n} \\ 1 & \text{if } x \neq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (1.5-3)$$

取数列 $a_n = 1/n$, $b_n = \pi/n$, 显然 $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 且 $a_n \in \{1/n | n \in \mathbb{N}^+\}$, $b_n \notin \{1/n | n \in \mathbb{N}^+\}$, 因此 $F(a_n) \rightarrow 0$, $F(b_n) \rightarrow 1$, 由 Heine 定理知, $F(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 处的极限不存在. 故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

Mark: 这里需要注意, 式 (1.5-2) 和式 (1.5-3) 虽然形式上及其相像, 但其表示的意思截然不同. 对于式 (1.5-3), 这里的 n 是函数 $f_n(x)$ 的下标, 换句话说, $f_n(x)$ 仅仅在 $1/n$ 这一点上取值为 0, 在其余点取值均为 1. 而式 (1.5-2) 中的 n 是 $n \in \mathbb{N}^+$ 的 n , 换句话说, $F(x)$ 在 $1, 1/2, 1/3, \dots$ 这无穷多点上取值均为 0, 在其余点取值为 1.

2 导数与微分

2.1 某一点可导 \nRightarrow 这一点邻域内连续

构造函数 $f(x) = x^2 D(x)$, 其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数, 显然, 有 $f(0) = 0$, 根据导数的定义, 有:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0$$

因此, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处导数存在且导数为 0. 但显然在任意 $x = 0$ 的邻域内 $f(x)$ 不连续.

更一般的, 若我们要构造出一个函数, 其仅在点 a_1, a_2, \dots, a_n 可导而在其他地方不连续, 则构造

$$f(x) = D(x) \cdot \prod_{i=1}^n (x - a_i)^2$$

证明同前文可知.