

线性代数笔记

Guotao He

2024-07-31

目录

1	向量空间	1
1.1	域	1
1.2	向量空间	2
1.3	子空间、子空间和与直和	3
1.4	向量组与张成空间	4
1.5	线性无关、基与维数	5
1.6	向量组的秩	6
2	矩阵	6
2.1	线性映射	6
2.2	矩阵乘法	6
2.3	分块矩阵	6
2.4	矩阵的秩	6
2.5	核空间、像空间	6
2.6	同构与商空间	6
3	行列式	7
3.1	行列式的公理化定义	7
3.2	行列式的性质	7
3.3	行列式的逆序数定义	7
3.4	行列式的唯一性	9
3.5	行列式的几何意义	9
3.6	代数余子式	10
3.7	Cramer 法则	11
3.8	特殊行列式计算	11

1 向量空间

1.1 域

首先的首先，我们先引入域：

Definition 1.1.1 (域): 一个域是一个集合 (记为 K), 辅以两个运算 (加法运算和乘法运算):

- $\times : K \times K \rightarrow K$ ($\times (a, b)$ 简记为 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 或 ab)

同时满足以下性质:

- 交换性: $\forall \alpha, \beta \in K$, 有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$.
- 结合性: $\forall \alpha, \beta, \lambda \in K$, 有 $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda), (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$.
- 单位元: $\exists 1, 0 \in K$, 满足 $\forall \lambda \in K$, 有 $\lambda + 0 = \lambda, \lambda 1 = \lambda$.
- 加法逆元: $\forall \alpha \in K$, 总 $\exists !\beta \in K$, 使得 $\alpha + \beta = 0$.
- 乘法逆元: $\forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$, 总 $\exists !\beta \in K$, 使得 $\alpha\beta = 1$.
- 分配性质: $\forall \lambda, \alpha, \beta \in K$, 有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$.

则称 $(K, +, \times)$ 为域. 当二元运算不重要时, 也可直接将 $(K, +, \times)$ 简记为 K .

Remark: 这里的 $+$, \times 均为抽象的运算, 不一定是我们熟悉的实数上的“加法”和“乘法”. 同时, 1 和 0 也不一定是我们所熟悉的实数的“1”和“0”, 而只代表 K 中的某两个满足定义的特殊元素.

上面的定义中的“交换性”, “结合性”, “单位元”, “加法逆元”, “乘法逆元”也可以用抽象代数的说法表示:

- $(K, +)$ 为交换群, 且其单位元为 0_K .
- $(K - \{0_K\}, \times)$ 为交换群.

我们常见的域的例子有有理数域 \mathbb{Q} , 实数域 \mathbb{R} , 复数域 \mathbb{C} . 当然还有一些我们不是很常见的域, 如有理数域, 代数函数域, 代数数域, p 进数域等, 但在本文中我们只讨论最常见的 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} .

Mark: 本文中默认以黑板粗体来表示域, 同时, 总是以记号 \mathbb{F} 表示 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} .

\mathbb{F} 中的元素被称为**标量**. 标量通常强调对象是一个数, 而不是向量 (向量的定义在之后给出).

1.2 向量空间

Definition 1.2.1 (向量空间): 一个向量空间是给定域 $(K, +, \times)$ 后的一个集合 V , 辅以两个运算:

- 向量加法 $\oplus : V \times V \rightarrow V$ ($\oplus (u, v)$ 简记为 $u \oplus v$, 没有歧义时也记作 $u + v$).
- 标量乘法 $\cdot : K \times V \rightarrow V$ ($\cdot (a, v)$ 又简记为 $a \cdot v$ 或 av).

同时满足如下性质:

- 交换性: $\forall u, v \in V$, 有 $u + v = v + u$.
- 结合性: $\forall u, v, w \in V, a, b \in K$, 有 $(u + v) + w = u + (v + w)$ 和 $(ab)v = a(bv)$.
- 加法单位元: $\exists 0 \in V$, 满足 $\forall v \in V$, 有 $v + 0 = v$.
- 加法逆元: $\forall v \in V$, 总 $\exists w \in V$, 使得 $v + w = 0$.

- 乘法单位元: $\forall v \in V$, 有 $1v = v$.
 - 分配性质: $\forall a, b \in K, u, v \in V$, 有 $a(u + v) = au + av$ 和 $(a + b)v = av + bv$.
- 则称 V 是定义在域 K 上的向量空间.

另外, 我们做如下定义:

Definition 1.2.2 (实向量空间、复向量空间):

- \mathbb{R} 上的向量空间称为**实向量空间** (记为 \mathbb{R}^n).
- \mathbb{C} 上的向量空间称为**复向量空间** (记为 \mathbb{C}^n).

在定义了向量空间后, 我们可以定义向量:

Definition 1.2.3 (向量、点): 向量空间中的元素被称为**向量**或**点**.

1.3 子空间、子空间和与直和

Definition 1.3.1 (子空间): 如果向量空间 V 的子集 U 也是向量空间 (采用和 V 相同的加法和标量乘法), 则称 U 是 V 的子空间.

下面给出了判断向量空间的子集是否为子空间的最简单的方法:

Theorem 1.3.1 (子空间的条件): 向量空间 V 的子集 U 是 V 的子空间当且仅当 U 满足下面三个条件:

- 加法单位元: $0 \in U$.
- 加法封闭性: $\forall u, v \in U$, 有 $u + v \in U$.
- 标量乘法封闭性: $\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in U$, 有 $av \in U$.

Remark: $\{0\}$ 是 V 的最小子空间, V 是 V 的最大子空间. 空集不是 V 的子空间, 因为向量空间必须包含加法单位元, 因此空集不是向量空间, 自然不是 V 的子空间.

Mark: 子空间之间同样可以进行交和并操作, 但需要注意, 子空间的并一般而言并不是子空间, 因此, 我们通常考虑子空间的和, 而不考虑子空间的并

Definition 1.3.2 (子空间的和): 设 U_1, \dots, U_n 均为 V 的子空间, 则 U_1, \dots, U_n 的和定义为 U_1, \dots, U_n 中元素的所有可能的和所构成的集合, 记为 $U_1 + \dots + U_n$, 即:

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n : u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}$$

Mark: 子空间的和是包含这些子空间的最小子空间

Remark: 向量空间中子空间的和常常类比于集合论中的子集的并(但要注意子空间的和和子空间的并是不同的运算, 子空间的和仍旧是子空间, 但子空间的并一般而言并不是). 给定一个向量空间的两个子空间, 包含它们的最小子空间是它们的和; 类似地, 给定一个集合的两个子集, 包含它们的最小子集是它们的并集.

在子空间的和中, 有一种特殊情况非常重要, 以至于需要起一个单独的名字: 直和:

Definition 1.3.3 (直和): 设 U_1, \dots, U_n 均为 V 的子空间, 若 $U_1 + \dots + U_n$ 中的每一个元素都可以唯一地表示为 $u_1 + \dots + u_n$, 其中 $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$, 则我们称 $U_1 + \dots + U_n$ 为直和, 记为 $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, 其中符号 \oplus 表明这是一个直和.

Remark: 向量空间的直和是向量空间的和的特殊情况, 其意味着所有子空间任取一组基底, 所有子空间的基底集合能构成子空间的和中的一组基底. 因此对于两个有限维度的子空间, 其维度一定满足如下关系:

$$\dim U_1 + \dots + \dim U_n = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n)$$

而一般的子空间的和仅有如下关系:

$$\dim U_1 + \dots + \dim U_n \leq \dim(U_1 + \dots + U_n)$$

当且仅当子空间的和为直和时取等.

Theorem 1.3.2 (直和的条件): 设 U_1, \dots, U_n 均为 V 的子空间, 则“ $U_1 + \dots + U_n$ 是直和”当且仅当“0 能表示成 $u_1 + \dots + u_n$ (其中 $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$) 的唯一方式是每一个 $u_i = 0$ ”.

我们还可以用下面的更简单的方法来验证两个子空间的直和:

Theorem 1.3.3 (两个子空间的直和的条件): 设 U 和 W 都是 V 的子空间, 则“ $U + W$ 是直和”当且仅当“ $U \cap W = \{0\}$ ”.

1.4 向量组与张成空间

向量组, 顾名思义, 就是一组向量, 这里我们要求这一组向量在同一个向量空间(一般而言, 这要求向量的“长度”相同). 在表示向量组时通常并不会使用括号括起来.

将向量组中的向量做标量乘法后相加, 即可得到该向量组的一个线性组合, 定义如下:

Definition 1.4.1 (线性组合): V 中的一组向量 v_1, \dots, v_n 的线性组合是指形如:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

的向量, 其中 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 称为系数.

Definition 1.4.2 (线性表出): V 中的一组向量 v_1, \dots, v_n , 对于 $u \in V$, 若存在一组数 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, 满足:

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

则称 u 可以由向量组 v_1, \dots, v_n 线性表出.

Definition 1.4.3 (张成空间): V 中的一组向量 v_1, \dots, v_n 的所有线性组合所构成的集合称为向量组 v_1, \dots, v_n 的张成空间, 记为 $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$, 即

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

另外, 我们规定空向量组的张成空间定义为 $\{0\}$.

Theorem 1.4.1: V 中的一组向量的张成空间是包含这组向量的最小子空间.

1.5 线性无关、基与维数

Definition 1.5.1 (线性相关与线性无关): V 中的一组向量 v_1, \dots, v_n 被称为是线性相关的, 若有 \mathbb{F} 中不全为 0 的数 a_1, \dots, a_n , 使得

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

反之则被称为线性无关.

Remark: 线性无关意味着若向量组线性组合为 0, 则所有的系数都只能为 0. 我们还可以这么表述: 线性无关意味着每一个向量都不能由其他向量线性表示得出. 这里需要注意, 线性相关并不意味着每一个向量都能由其他的向量线性表示出, 只需要有一个向量能由其他向量线性表示得出则这一组向量就是线性相关的. 在 Definition 1.5.1 中则意味着向量前的系数 a_i 可以为 0.

现在我们将线性无关和张成这两个概念结合在一起.

Definition 1.5.2 (基): 若 V 中的一个向量组既线性无关又张成 V , 则被称为 V 的基.

Theorem 1.5.1: 在向量空间中, 每一个张成组都可以化简成一组基.

1.6 向量组的秩

Definition 1.6.1 (极大线性无关组): 向量组的一个部分被称为极大线性无关组, 如果这个部分组本身是线性无关的, 但从这个向量其余向量 (如果还有的话) 中任意添一个进去, 得到的新的部分组都线性相关.

Definition 1.6.2 (向量组等价): 如果向量组 v_1, \dots, v_n 与向量组 u_1, \dots, u_n 可以互相线性表出 (即其中一个向量组中的任意一个向量都能由另一个向量组线性表出), 则称这两个向量组等价, 记作:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \cong \{u_1, \dots, u_n\}$$

不难证明, 这种关系具有反身性、对称性、传递性, 即是等价关系.

Remark: 对矩阵作初等行变换, 变换前后的行向量组等价, 但不能保证列向量组等价.

Definition 1.6.3 (向量组的秩): 向量组 v_1, \dots, v_n 的极大线性无关组所含向量的个数被称为这个向量组的秩, 记作:

$$\text{rank}\{v_1, \dots, v_n\}$$

2 矩阵

2.1 线性映射

2.2 矩阵乘法

2.3 分块矩阵

2.4 矩阵的秩

2.5 核空间、像空间

2.6 同构与商空间

Definition 2.6.1 (同构): 设 \mathbb{F} 上的线性空间 V 与 V' . 若存在双射 $\sigma: V \rightarrow V'$ 且保持线性, 即对于 $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$, 有:

$$\sigma(u + v) = \sigma(u) + \sigma(v), \sigma(kv) = k\sigma(v)$$

那么称 σ 是 V 到 V' 的一个同构映射. 此时称 V 与 V' 同构, 记为 $V \cong V'$.

Theorem 2.6.1: 域 \mathbb{F} 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维度相等.

3 行列式

3.1 行列式的公理化定义

首先我们给出行列式的公理化定义:

Definition 3.1.1 (行列式): 在矩阵空间 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 中存在函数 $\mathcal{D}: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$, 且具有如下性质:

- (正规化条件) $\mathcal{D}(I) = 1$ (I 为单位矩阵)
- (反对称性) $\mathcal{D}(A)$ 关于矩阵 A 是反对称的 (即交换 A 的任意两行, 则函数值变号)
- (多重线性) $\mathcal{D}(A)$ 对于矩阵 A 的各行是线性的

则函数 \mathcal{D} 是唯一确定的, 我们称函数 \mathcal{D} 为行列式, 记为 $\det A$.

其中, 函数 $\mathcal{D}(A)$ 关于矩阵的各行是线性的指: 记 $A_{(i)}$ 表示矩阵的第 i 行, $A^{(j)}$ 表示矩阵的第 j 列. 令 A, B, D 为三个矩阵, 且除去第 k 行外其他矩阵的元素相同. 进一步假设 $D_{(k)} = c_1 A_{(k)} + c_2 B_{(k)}$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$, 则 $\mathcal{D}(D) = c_1 \mathcal{D}(A) + c_2 \mathcal{D}(B)$.

3.2 行列式的性质

行列式的一个非常重要 (也许是最重要) 的性质是其与矩阵乘法的相容性:

Theorem 3.2.1 (行列式的乘法性质): 令 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则有 $\det(AB) = \det A \det B$

Theorem 3.2.2 (行列式的加法性质): 令 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则:

- 若矩阵 A' 是将矩阵 A 的第 i 行的 λ 倍加到矩阵的第 j 行 ($i \neq j$) 所得到的矩阵, 即 $A'_{(i)} = A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$, 则 $\det A' = \det A$.
- 若矩阵 A 中的某一行全为 0, 则 $\det A = 0$.
- 若矩阵 A' 是矩阵 A 将第 i 行乘上 λ 所得到的矩阵, 即 $A'_{(i)} = \lambda A_{(i)}$, 则 $\det A' = \lambda \det A$.

Corollary 3.2.1: 令 P 为第一类初等矩阵 (即将一行的倍数加到另一行所代表的矩阵), A 为任意的矩阵, 则 $\det(PA) = \det A$. 这告诉我们, 对一个矩阵做行约简后其行列式的值不变.

3.3 行列式的逆序数定义

3 行列式

在前文, 我们通过行列式的公理化定义得到了行列式的一些性质, 但我们仍未给出行列式的一个具体的计算表达式。下面我们将给出行列式的一个更为常见的定义: 逆序数定义。

虽然逆序数的定义看起来很抽象且不利于理解, 且一般我们也不使用逆序数的定义 (即使是计算机也不适用逆序数的方法来计算, 其总的时间复杂度较高), 但逆序数的定义是行列式的一个直接定义, 在一些有关行列式的定性计算时容易看清行列式的大概结构。

首先, 我们逐步引入逆序数的概念:

Definition 3.3.1 (排列): $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个全排列为一个 n 元排列。

例如: $1, 2, 3$ 形成的 3 元排列有 $123, 132, 213, 231, 321, 312$ 这 6 种, 更进一步地, 我们可以得到, n 元排列的总数为 $n!$ 。

Definition 3.3.2 (顺序和逆序): 顺序的定义为数字从小到大排列。具体而言, 对于 $a_1 a_2 \dots a_n$ 这一排列, 若取 $a_i, a_j (i < j)$, 有 $a_i < a_j$, 则称 (a_i, a_j) 这一对数构成了一个顺序 (对)。同理, 逆序的定义为数字从大到小的排列。对于 $a_1 a_2 \dots a_n$ 这一排列, 若取 $a_i, a_j (i > j)$, 有 $a_i < a_j$, 则称 (a_i, a_j) 这一对数构成了一个逆序 (对)。

Definition 3.3.3 (逆序数): 在一个排列中, 逆序对的总数称为这个排列的逆序数, 记作 τ 。其中, 记逆序数为偶数的排列为偶排列, 记逆序数为奇数的排列为奇排列。

例如, 排列 2413 的所有的逆序对为 $21, 43, 41, 31$, 因此, 此排列的逆序数为 4, 记为 $\tau(2413)$ 。

自然排列 $12 \dots n$ 的逆序数为 0, 其是一个偶排列。

Definition 3.3.4 (对换): 把一个排列中的某一对数互换位置, 其余数不动, 此操作被称为一个对换。

Mark: 对排列进行一次对换会改变排列的奇偶性。

在引入了逆序数后, 我们终于可以给出行列式的逆序数定义:

Theorem 3.3.1 (行列式的逆序数定义): n 阶矩阵 A 的行列式定义为:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i}\end{aligned}$$

这里其中求和号 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 元排列求和, 也就是列指标构成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 遍历 n 元排列. 换句话说, n 阶矩阵的行列式是一个 $n!$ 项和, 其中每一项由不同行、不同列的 n 个元素的乘积再乘上一个符号项构成. 当这 n 个元素按行指标自然排列排好位置时, 若列指标所构成的排列为偶排列, 则符号项为正号; 若列指标所构成的排列为奇排列时, 则符号项为负号.

3.4 行列式的唯一性

现在我们来证明我们常见的行列式逆序数定义和行列式的公理化定义等价. 要证明等价, 我们将其分成两步: 首先我们先证明满足行列式的公理化定义的行列式函数确实是唯一的, 然后我们再证明行列式逆序数定义是满足行列式的公理化定义的, 从而证明这两个定义等价.

Theorem 3.4.1 (行列式的唯一性): $\mathbb{F}^{n \times n}$ 上的行列式函数 \mathcal{D} 是唯一的.

Proof: 设 f 和 g 是 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 上的任意两个行列式函数, 则需要证明, 对于在定义域内的 $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 总有 $f(A) = g(A)$. 现在我们假设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则:

- 如果¹ $\text{rank}(A) < n$, 则根据行列式的性质, 有 $\mathcal{D}(A) = 0$, 即 $f(A) = g(A)$.
- 如果 $\text{rank}(A) = n$, 则 A 可以由单位矩阵 I 经有限次初等行变换而得到. 同时, 行列式的定义给出了每个初等变换后行列式的变化 (Theorem 3.2.1 和 Theorem 3.2.2). 又因为行列式函数要求 $\mathcal{D}(I) = 1$, 因此 $f(A) = g(A)$.

□

Remark: 这里我们并没有假设行列式函数 \mathcal{D} 的定义域是整个 $\mathbb{F}^{n \times n}$. 换句话说, 对于任意的 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 我们并不能保证其肯定会有一个函数值 $\mathcal{D}(A)$, 但我们能证明, 无论 \mathcal{D} 是如何构造出来的, 其 $\mathcal{D}(A)$ 一定是同一个值. 因此, 对于任意的行列式定义, 只要我们能证明其满足行列式的公理化定理, 那么我们就证明此行列式定义和其他行列式定义的等价性.

3.5 行列式的几何意义

行列式有如下常见的几何意义:

- 矩阵的行列式表示矩阵对应的线性变换对空间的伸缩率.

¹这里的 rank 是矩阵的秩, 在之后的章节中有所定义.

3 行列式

- 矩阵的行列式表示列向量张成的平行多面体的有向体积.

在这种几何解释下, 行列式的一些性质是很直观的. 如行列式的乘法性质 (Theorem 3.2.1). 矩阵 \mathbf{AB} 对应的线性变换表示先以 \mathbf{B} 作用, 再以 \mathbf{A} 作用. 显然对应的总的对空间的伸缩率是两个变换对空间的伸缩率的乘积, 即 $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

另外, 我们还可以很显然地得到下面的定理:

Theorem 3.5.1 (Hadamard 不等式): 对于 n 阶方阵 $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 有

$$|\det \mathbf{A}| \leq \|\alpha_1\| \|\alpha_2\| \cdots \|\alpha_n\|$$

成立.

Proof: 不等式的左边表示向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 互有夹角构成的平行多面体的体积. 不等式的右边表示这些向量在模长不变的情况下两两正交构成的平行多面体的体积. 后者显然大于前者, 且当且仅当原向量组两两正交时不等式取等. \square

3.6 代数余子式

定义余子式和代数余子式如下:

Definition 3.6.1 (余子式和代数余子式): n 阶行列式 $\det \mathbf{A}$ 中, 划去第 i 行和第 j 列, 剩下的元素按原来的次序组成的 $n-1$ 阶矩阵的行列式成为矩阵 \mathbf{A} 的 (i, j) 元的余子式, 记作 M_{ij} . 更进一步地, 令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为矩阵 \mathbf{A} 的 (i, j) 元的代数余子式.

借助代数余子式, 我们可以给出行列式的按行或按列展开, 即 Laplace 定理.

Theorem 3.6.1 (Laplace 定理): 对于 n 阶行列式 $\det \mathbf{A}$, 有:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

其中, 前者被称为行列式按行展开, 后者被称为行列式按列展开.

同时, 借助代数余子式, 我们也可以给出行列式的另一个定义:

Definition 3.6.2 (行列式的递归定义): 设矩阵 \mathbf{A} 是一个 n 阶矩阵, 用 \mathbf{A}_{ij} 表示矩阵 \mathbf{A} 中删去第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶子矩阵, 则:

$$\det \mathbf{A} = \sum_i (-1)^{i+1} a_{ij} A_{ij}$$

其中, 定义当 $n=1$ 时的矩阵的行列式等于其唯一的元素本身. 如矩阵 $\mathbf{A} = (a)$ 的行列式为: $\det \mathbf{A} = a$.

借助代数余子式, 我们可以快速求解下类行列式的值:

Exercise 3.I: 设:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

记 $\det A$ 的代数 (i, j) 元的代数余子式为 A_{ij} , 求:

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}$$

Solution: 这里我们可以使用行列式的展开来化简此计算, 具体而言, 原式相当于用 $1, 3, -2, 2$ 替换矩阵 A 的第三行的元素后所得的行列式, 即:

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 24$$

3.7 Cramer 法则

对于数域 \mathbb{F} 上 n 个方程所组成的 n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记其系数矩阵为 A , 增广矩阵为 \tilde{A} , 其中:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Theorem 3.7.1 (Cramer 法则): 方程组有唯一确定的解的充要条件是 $|A| \neq 0$. 定义 B_j 为矩阵 A 的第 j 列替换为 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 后得到的矩阵. 则此时解为:

$$x = \left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \dots, \frac{|B_n|}{|A|} \right)^T$$

3.8 特殊行列式计算

Exercise 3.II: 计算下面矩阵的行列式:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ & a_2 & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

Solution:

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n$$

Remark: 这里计算的是上三角矩阵, 对于下三角矩阵, 结果相同.

Exercise 3.III: 计算下面矩阵的行列式:

$$A = \begin{pmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{pmatrix}$$

Solution: 从第二列开始每一列加到第一列, 并提出公因式:

$$\det A = (x + (n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

从第二行开始分别减去第一行:

$$\det A = (x + (n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$$

Exercise 3.IV: 计算下面矩阵的行列式 (Vandermonde 行列式):

$$V = V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Solution:

$$\det V = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Remark: 这里我们可以从代数的角度来得到 *Vandermonde* 行列式的一些信息: 对于 $\forall i, j$, 当 $x_i = x_j$ 时, 显然有 $\det V = 0$; 而当 $x_i \neq x_j$ 时, 显然有 $\det V \neq 0$. 因此 $(x_i - x_j)$ 是 *Vandermonde* 行列式的一个因式.

Exercise 3.V: 计算下面矩阵的行列式:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & d_1 & & & \\ c & & d_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c & & & & d_n \end{pmatrix}$$

Solution: 从第二列开始, 将矩阵的第一列分别减去对应列的 c/d_k 倍, 从而消去每一行的第一个元素 (c), 用分量表示为: $a_{1j} \rightarrow a_{1j} - a_{kj} \cdot (c/d_{k-1})$, k 从 2 遍历到 $n+1$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a' & b & b & \dots & b \\ d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_n & \end{vmatrix} = a' d_1 d_2 \dots d_n = a' \cdot \prod_{i=1}^n d_i$$

其中

$$a' = a - cb \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} \right) = a - cb \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}$$

Exercise 3.VI: 证明奇数阶反对称矩阵 ($a_{ij} = -a_{ji}, a_{ii} = 0$) 的行列式为 0.

Proof: 假设矩阵 A 为 n 阶反对称矩阵 (n 为奇数), 则 $A^T = -A$. 两端求行列式, 有:

$$\det A = -\det A^T = -\det A$$

因此 $\det A = 0$. □