高数反例集

Guotao He

2024-10-22

目录

1 极限与连续

1.1 无穷多无穷小之积不一定为无穷小

构造出如下数列 $\left\{x_n^{(1)}\right\}, \left\{x_n^{(2)}\right\}, \cdots, \left\{x_n^{(m)}\right\}, \cdots$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left\{x_n^{(1)}\right\}: & 1^0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m+1} \\
\left\{x_n^{(2)}\right\}: & 1 & 2^1 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m+1} \\
\left\{x_n^{(3)}\right\}: & 1 & 1 & 3^2 & \cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m+1} \\
\vdots & & & & & & \\
\left\{x_n^{(m)}\right\}: & 1 & 1 & 1 & \cdots & m^{m+1} & \frac{1}{m+1} \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

更具体而言，对于数列 $\left\{x_n^{(m)}\right\}$，满足：

$$
x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{if } m < n \\ m^{m+1} & \text{if } m = n \\ \frac{1}{n} & \text{if } m > n \end{cases}
$$

此时，注意到对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，有:

$$
\lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} x_n^{(i)} = 1
$$

这个整体可以看成是一个关于 n 的数列，此时在对这个数列取极限，有：

$$
\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} x_n^{(i)} = 1 \tag{1.1-1}
$$

因此无穷多无穷小相乘不一定为无穷小.

Mark: 这里我们可以自然地提出一个问题：式 (1.1-1) 中交换求极限的顺序是否仍旧等于 1? 为什么我们选取的是这个求极限的顺序? 首先，我们解答第一个问题：交换求极限的顺序后，有：

$$
\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{m} x_n^{(i)} = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} 0 = 0 \neq 1
$$

可见交换求极限的循序后的值与原先不同. 现在我们解答为何在上文中是先求 $m \to \infty$ 的极限再求 $n \to \infty$ 的极限：我们先暂且讨论一下没有"无穷多个"的情况：若 a_n, b_n 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小，那么 $c_n = a_n \cdot b_n$ 也是 $n \to \infty$ 时的无穷小，此时即"有限个无穷小与无穷小之积也是无穷小". 这里我们可以注意到，**两个无穷小相乘之后的 c_n 一定是关于自变量 n 的数列**，然后我们再取 $n \to \infty$ 验证是否 c_n 为无穷小. 因此，对于前文的情况而言，我们一定是先求 $m \to \infty$ 的极限，此时得到的仍是关于自变量 n 的数列，再求 $n \to \infty$ 验证是否为无穷小，因此，对于此问题，只能是按照式 (1.1-1) 的求极限顺序.

上面给了一个数列的例子，对于函数而言同理（最简单的构造就是使用取整函数），下面给出一个特殊的例子：在满足无穷多无穷小之积不一定为无穷小的前提下，每一个无穷小都是连续的.

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{if } 0<x<\frac{1}{n} \\ nx\left(\frac{1}{n!x^n}\right)^{(n-1)nx-(n-1)} & \text{if } \frac{1}{n}\le x<\frac{1}{n-1} \\ \left(\frac{1}{(n-1)!x^{n-1}}\right)^{(n-1)-(n-1)(n-2)x} & \text{if } \frac{1}{n-1}\le x<\frac{1}{n-2} \\ 1 & \text{if } \frac{1}{n-2}\le x \end{cases}\quad (n\ge 3, n\in\mathbb{N})$$

另外，有：

$$f_1(x)=\min(x,1)$$

$$f_2(x)=\begin{cases} 2x & \text{if } 0<x<\frac{1}{2} \\ 2x\left(\frac{1}{2x^2}\right)^{2x-1} & \text{if } \frac{1}{2}\le x<1 \\ 1 & \text{if } 1\le x \end{cases}$$

不难验证 $f_n(x)$ 均为 $x\to 0$ 时的无穷小，同时 $f_n(x)$ 均为连续函数. 注意到当 $\frac{1}{n}<x\le\frac{1}{n-1}$ 时：

$$f_n(x)f_{n+1}(x)=\frac{1}{(n-1)!x^{n-1}}$$

因此，对于 $\forall x>0$，有：

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}f_i(x)=1$$

故：

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}f_i(x)=1$$

1.2 不存在与任何无穷小相比都是低（高）阶的无穷小

首先，我们先讨论与任何无穷小相比都是低阶的无穷小：取 $f(x)=0$，显然 $f(x)\to 0$（$x\to 0$）

1.3 能用公式法且仅由一个式子表示的函数也不一定是初等函数

Dirichlet 函数：

$$D(x)=\begin{cases} 1 \text{ if } x\in\mathbb{Q} \\ 0 \text{ if } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

也可以写成下面一个表达式：

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$$

Mark: Dirichlet 函数是常见的病态函数，经常用来构造很多命题的反例. 另外一个常用的病态函数是 Riemann 函数：

$$R(x)=\begin{cases} \frac{1}{q}\ \text{ if } x\in\mathbb{Q}\text{ 且 } x=\frac{p}{q}\text{ 为既约真分数} \\ 0 \text{ if } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

1.4 无穷多个在某点连续的函数之和在该点不一定连续

构造如下函数：

$$f_n(x) = nx^2 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

显然，$\forall n \in \mathbb{N}^+$，$f_n(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 记

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$$

则在 $x=0$ 时：

$$F(0) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{m} 0 = 0$$

但当 $x \neq 0$ 时，$F(x)$ 不存在，故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

1.5 无穷多个在某点连续的函数之积在该点不一定连续

构造如下函数：

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x = \frac{1}{n} \\ 1 \text{ if } x \neq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \tag{1.5-2}$$

显然，$\forall n \in \mathbb{N}^+$，$f_n(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 记

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x = \frac{1}{n} \\ 1 \text{ if } x \neq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \end{cases} \tag{1.5-3}$$

取数列 $a_n = 1/n$，$b_n = \pi/n$，显然 $a_n \to 0$，$b_n \to 0$（$n \to \infty$）,且 $a_n \in \{1/n | n \in \mathbb{N}^+\}$，$b_n \notin \{1/n | n \in \mathbb{N}^+\}$，因此 $F(a_n) \to 0$，$F(b_n) \to 1$，由 Heine 定理知，$F(x)$ 在 $x \to 0$ 处的极限不存在. 故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

> **Mark**: 这里需要注意，式 (1.5-2) 和式 (1.5-3) 虽然形式上及其相像，但其表示的意思截然不同. 对于式 (1.5-3) ，这里的 n 是函数 $f_n(x)$ 的下标，换句话说，$f_n(x)$ 仅仅在 $1/n$ 这一点上取值为 0，在其余点取值均为 1. 而式 (1.5-3) 中的 n 是 $n \in \mathbb{N}^+$ 的 n，换句话说，$F(x)$ 在 $1, 1/2, 1/3, \cdots$ 这无穷多点上取值均为 0，在其余点取值为 1.

2 导数与微分

2.1 某一点可导 $\nRightarrow$ 这一点邻域内连续

构造函数 $f(x) = x^2 D(x)$，其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数，显然，有 $f(0) = 0$，根据导数的定义，有：

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} xD(x) = 0$$

因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在且导数为 0. 但显然在任意 $x=0$ 的邻域内 $f(x)$ 不连续.

更一般的，若我们要构造出一个函数，其仅在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可导而在其他地方不连续，则构造

$$f(x) = D(x) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)^2$$

证明同前文可知.