矩阵光学

Guotao He

2025-10-8

> “代数是魔鬼给数学家的开价”

目录

1 符号约定

2 经过面的变换

2.1 正置分界面

由 Snell 定律，$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$，线性化后有 $\theta_2 = (n_1/n_2)\,\theta_1$，又因为正向界面不会改变横向位移，因此其光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

2.2 斜置分界面

对于斜置的分界面，情况比较复杂，我们需要分成子午面（光轴入射面）和弧矢面（垂直光轴入射面）两部分分别给出光学矩阵.

对于子午面，定义在介质 n_2 中的的光轴方向为沿着光轴入射并经过折射后的方向. 设沿光轴入射的光线的入射角为 α_1，折射角为 α_2，因此，由 Snell 定律，有：$n_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1) = n_2 \sin(\theta_2 + \alpha_2)$. 对 $n \sin(\theta + \alpha)$ 在 $\theta = 0$ 处 Taylor 展开：

$$n \sin(\theta + \alpha) = n \sin(\alpha) + n \cos(\alpha)\,\theta + \dots$$

故：

$$n_1 \sin\alpha_1 + n_1 \cos\alpha_1 \cdot \theta_1 = n_2 \sin\alpha_2 + n_2 \cos\alpha_2 \cdot \theta_2 \Longrightarrow \theta_2 = \frac{n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2}\theta_1 \quad (n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2)$$

而对于斜分界面，其横向位移会发生改变，根据几何关系得到：

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2}{\cos\alpha_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} x_1$$

综上，得到子午面的光学矩阵：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2} \end{pmatrix}$$

对于弧矢面，显然弧矢面的光线并不会发生聚集或发散，因此其本质上就是经过了一个正置分界面：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

综上：

$$M_M = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

2.3 正置薄透镜

如图所示，取小角近似，$\theta_1 = \tan(x/u) = x/u$，$\theta_2 = -\tan(x/v) = -x/v$（负号为正方向规定导致）. 又由于：

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

推出：

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{x}{f} \Longrightarrow \theta_2 = \theta_1 - \frac{1}{f}x$$

又因为正向界面不会改变横向位移，因此得到光学矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 正置分界球面

如图所示，取傍轴近似和小角近似，有角度关系：$\alpha_1 + \theta_1 = \alpha_2 + \theta_2 = x/R$（注意 θ_2 的正方向问题），又由 Snell 定律：$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$. 因此：

$$n_1 \sin\left(\frac{x}{R} - \theta_1\right) = n_2 \sin\left(\frac{x}{R} - \theta_2\right)$$

这里 x/R 和 θ 都是小量，这里先取 $\theta = 0$ 的 Taylor 展开：

$$n \sin\left(\frac{x}{R} - \theta\right) = n \sin\left(\frac{x}{R}\right) - n \cos\left(\frac{x}{R}\right)\theta + \dots$$

再取 $x/R = 0$ 的 Taylor 展开：

$$n \sin\left(\frac{x}{R} - \theta\right) = n\frac{x}{R} - n\theta + \dots$$

因此，在傍轴近似和小角近似下，有：

$$n_1\left(\frac{x}{R} - \theta_1\right) = n_2\left(\frac{x}{R} - \theta_2\right) \Longrightarrow \theta_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}x + \frac{n_1}{n_2}\theta_1$$

又因为正向界面不会改变横向位移，因此得到光学矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

3 经过空间的变换

3.1 自由空间

如图所示，经过自由空间角度不会发生变化，横向位移满足 $x_2 - x_1 = L\tan\theta_1$，即 $x_2 = x_1 + L\tan\theta_1 = x_1 + L\theta_1$（取小角近似），故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 正置经过折射率为 n 的空间

这里其本质是先经过 $n_1 \to n_2$ 的正置界面，再经过一段长为 L 的自由空间，再经过 $n_2 \to n_1$ 的正置界面，故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1}{n_2} L \\ & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 斜置经过折射率为 n 的空间

对于子午面，其本质是先经过 $n_1 \to n_2$ 的斜置界面，再经过一段长为 $L/\cos\alpha_2$ 的自由空间，再经过 $n_2 \to n_1$ 的斜置界面，注意这里的两次斜置界面的光轴与法线夹角的变化关系，第一次是 $\alpha_1 \to \alpha_2$，第二次是 $\alpha_2 \to \alpha_1$，故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{n_1\cos\alpha_1}{n_2\cos\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{\cos\alpha_2} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{n_1\cos\alpha_1}{n_2\cos\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1\cos^2\alpha_1}{n_2\cos^2\alpha_2} L \\ & 1 \end{pmatrix}$$

对于弧矢面，有：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{\cos\alpha_2} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{L}{\cos\alpha_2} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

综上：

$$M_M = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1\cos^2\alpha_1}{n_2\cos^2\alpha_2} L \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{L}{\cos\alpha_2} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 主截面内三棱镜

对于子午面，其本质是先经过 $1 \to n$（角度 $\alpha_1 \to \alpha_2$）的斜置界面，再经过一段长为 L 的自由空间，再经过 $n \to 1$（角度 $\alpha_3 \to \alpha_4$）的斜置界面. 故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_4} & \\ & \dfrac{n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{\cos\alpha_1}{n\cos\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1\cos\alpha_4} & \dfrac{L}{n}\dfrac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{\cos\alpha_2\cos\alpha_4} \\ & \dfrac{\cos\alpha_1\cos\alpha_4}{\cos\alpha_2\cos\alpha_3} \end{pmatrix}$$

4 经过反射面

4.1 正放置反射镜

按照正方向的定义，显然正置反射镜的光学矩阵为单位阵 I，即：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

上述通过几何直接证明的方法很简单，在此不再叙述. 这里我们采用另外一种更有启发性和推广性的方法. 考虑折射矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

根据如图所示几何关系，我们可以得到，要使得折射矩阵变成反射矩阵，则相当于取 $n_2 = -n_1$ 再将角度取反（$C \to -C, D \to -D$）.

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \underbrace{\Longrightarrow}_{n_2=-n_1} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{C \to -C \\ D \to -D}} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

可见和通过几何方式直接推导的相同. 这个性质暂时称为“折射-反射对应”在之后的推导中仍然可以使用.

4.2 正置球面镜

前面我们推导了正置分界球面的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\dfrac{n_1-n_2}{n_2R} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

经过“折射-反射对应”，有：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\dfrac{n_1-n_2}{n_2R} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \underbrace{\Longrightarrow}_{n_2=-n_1} \begin{pmatrix} 1 & \\ \dfrac{2}{R} & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{C \to -C \\ D \to -D}} \begin{pmatrix} 1 & \\ -\dfrac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

即正置球面镜的光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\dfrac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

5 常用推导

5.1 物方焦距

5.2 像方焦距

5.3 成像条件

6 随想

6.1 反射分界面和斜置分界面的区别

在推导反射的元器件时，我们可以通过对正置的原件取特殊值并组合反射矩阵来得到最终元件的光学矩阵，那么一个非常自然的问题是对于斜置分界面，我们能否仿照构造一个旋转矩阵，将光轴旋转为正入射，从而使用正置的元件的光学矩阵，最后再通过一个旋转矩阵的逆矩阵转成在目标光轴方向的表示？实际上是不行的，比如某个光线经过旋转矩阵转换到另一个光轴表示时，其在另一个光轴并不满足小角近似，因此在转换到另一个光轴后不能继续使用基于小角近似和傍轴近似的光学矩阵.