矩阵光学中各个元件对应矩阵推导

2025-09-22

1 符号约定

2 经过面的变换

2.1 正置分界面

由 Snell 定律，$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$，线性化后有 $\theta_2 = (n_1/n_2)\,\theta_1$，又因为正向界面不会改变横向位移，因此其光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

2.2 斜置分界面

对于斜置的分界面，情况比较复杂，我们需要分成子午面（光轴入射面）和弧矢面（垂直光轴入射面）两部分分别给出光学矩阵.

对于子午面，定义在介质 n_2 中的的光轴方向为沿着光轴入射并经过折射后的方向. 设沿光轴入射的光线的入射角为 α_1，折射角为 α_2，因此，由 Snell 定律，有：$n_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1) = n_2 \sin(\theta_2 + \alpha_2)$. 对 $n \sin(\theta + \alpha)$ 在 $\theta = 0$ 处 Taylor 展开：

$$n \sin(\theta + \alpha) = n \sin(\alpha) + n \cos(\alpha)\,\theta + \ldots$$

故：

$$n_1 \sin\alpha_1 + n_1 \cos\alpha_1 \cdot \theta_1 = n_2 \sin\alpha_2 + n_2 \cos\alpha_2 \cdot \theta_2 \Longrightarrow \theta_2 = \frac{n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2}\theta_1 \quad (n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2)$$

而对于斜分界面，其横向位移会发生改变，根据几何关系得到：

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2}{\cos\alpha_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} x_1$$

综上，得到子午面的光学矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \frac{n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2} \end{pmatrix}$$

对于弧矢面

2.3 正置薄透镜

如图所示，取小角近似，$\theta_1 = \tan(x/u) = x/u$，$\theta_2 = -\tan(x/v) = -x/v$（负号为正方向规定导致）．又由于：

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

推出：

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{x}{f} \Longrightarrow \theta_2 = \theta_1 - \frac{1}{f}x$$

又因为正向界面不会改变横向位移，因此得到光学矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 正置分界球面

如图所示，取傍轴近似和小角近似，有角度关系：$\alpha_1 + \theta_1 = \alpha_2 + \theta_2 = x/R$（注意 θ_2 的正方向问题），又由 Snell 定律：$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$．因此：

$$n_1 \sin\left(\frac{x}{R} - \theta_1\right) = n_2 \sin\left(\frac{x}{R} - \theta_2\right)$$

这里 x/R 和 θ 都是小量，这里先取 $\theta = 0$ 的 Taylor 展开：

$$n \sin\left(\frac{x}{R} - \theta\right) = n \sin\left(\frac{x}{R}\right) - n \cos\left(\frac{x}{R}\right)\theta + \dots$$

再取 $x/R = 0$ 的 Taylor 展开：

$$n \sin\left(\frac{x}{R} - \theta\right) = n\frac{x}{R} - n\theta + \dots$$

因此，在傍轴近似和小角近似下，有：

$$n_1\left(\frac{x}{R} - \theta_1\right) = n_2\left(\frac{x}{R} - \theta_2\right) \Longrightarrow \theta_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}x + \frac{n_1}{n_2}\theta_1$$

又因为正向界面不会改变横向位移，因此得到光学矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

2.5 斜置分界球面

3 经过空间的变换

3.1 自由空间

如图所示，经过自由空间角度不会发生变化，横向位移满足 $x_2 - x_1 = L\tan\theta_1$，即 $x_2 = x_1 + L\tan\theta_1 = x_1 + L\theta_1$（取小角近似），故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 正置经过折射率为 n 的空间

这里其本质是先经过 $n_1 \to n_2$ 的正置界面，再经过一段长为 L 的自由空间，再经过 $n_2 \to n_1$ 的正置界面，故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1}{n_2} L \\ & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 斜置经过折射率为 n 的空间

对于子午面，其本质是先经过 $n_1 \to n_2$ 的斜置界面，再经过一段长为 $L/\cos\alpha_2$ 的自由空间，再经过 $n_2 \to n_1$ 的斜置界面，注意这里的两次斜置界面的光轴与法线夹角的变化关系，第一次是 $\alpha_1 \to \alpha_2$，第二次是 $\alpha_2 \to \alpha_1$，故光学矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{n_1\cos\alpha_1}{n_2\cos\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{\cos\alpha_2} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} & \\ & \dfrac{n_1\cos\alpha_1}{n_2\cos\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n_1\cos^2\alpha_1}{n_2\cos^2\alpha_2} L \\ & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 主截面内三棱镜

4 经过反射面

4.1 正放置反射镜

4.2 斜放置反射镜

4.3 正放置球面镜

5 随想

5.1 反射分界面和斜置分界面的区别

在推导反射的元器件时，我们可以通过对正置的原件取特殊值并组合反射矩阵来得到最终元件的光学矩阵，那么一个非常自然的问题是对于斜置分界面，我们能否仿照构造一个旋转矩阵，将光轴旋转为正入射，从而使用正置的元件的光学矩阵，最后再通过一个旋转矩阵的逆矩阵转成在目标光轴方向的表示？实际上是不行的，比如某个光线经过旋转矩阵转换到另一个光轴表示时，其在另一个光轴并不满足小角近似，因此在转换到另一个光轴后不能继续使用基于小角近似和傍轴近似的光学矩阵.

6 符号约定与基本矢量

为统一表示与推导，先给出符号及约定：

- 光轴沿 z 方向，光的正传播方向取为 $+z$（从左向右）。
- 光线在某截面处的高度（相对于光轴）用 y 表示，向上为正。
- 光线的入射角（与光轴的夹角，按小角近似）用 α 表示；在小角近似下 $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$。
- 折射率用 n 表示。穿越界面时折射率可由 n_1 变到 n_2。
- 半径为 R 的球面：我们约定当曲面弯向正传播方向（曲面的曲率中心位于 $+z$ 一侧）时记为 $R > 0$（这是常用的标记方法之一，文中会在各处明确）。
- **光线矢量表示（本稿采用的主表示）**：
$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} y \\ n\alpha \end{pmatrix},$$
即第二分量为 $n\alpha$。采用此表示的优点是：跨折射面时 Snell 线性化式能写成简单的线性关系（见下文推导）。
- 记号说明：矩阵作用规则为列向量左乘，若系统由多个元件顺序作用（从左到右沿光程），最终矩阵为：
$$\mathbf{r}_{\text{out}} = M_{\text{total}}\mathbf{r}_{\text{in}} = M_m M_{m-1} \cdots M_2 M_1 \mathbf{r}_{\text{in}},$$
其中 M_1 是最先作用的元件（靠近入射面）。
- 注意：若某变换包含与输入无关的常数偏移（例如斜面或倾斜镜产生的固定角度偏移、平行板的平移偏移），则用 2×2 线性矩阵无法完整描述，需用齐次坐标（3×3 增广矩阵）或在推导中显式写出常数项。文中在需要的地方会给出 3×3 增广矩阵表示。

所有推导都基于小角近似，并在需要时说明近似阶次与取舍。

7 经过面的变换（界面变换）

我们先从单个界面（面）出发，通过几何推导得到一般性的线性化公式，然后给出对应的矩阵形式。

7.1 一般性推导（球面界面）

考虑一个在 z 处的球面界面，曲率半径为 R，折射率由左侧 n_1 变为右侧 n_2。图形化描述：光线在高度 y 处与轴的角度为 α_1（在左侧媒质），折射后在右侧角度为 α_2。球面在该点的法线与光轴的夹角（小角）可近似为 $\dfrac{y}{R}$（这是小角近似，法线偏离轴角度与高度成正比）。

由 Snell 定律（线性化）：在小角下
$$n_1 i_1 = n_2 i_2,$$
其中 i_1 与 i_2 分别是入射角和折射角（相对于局部法线）。用几何关系写出
$$i_1 \approx \alpha_1 - \frac{y}{R}, \qquad i_2 \approx \alpha_2 - \frac{y}{R}.$$
代入 Snell 给出
$$n_1\Big(\alpha_1 - \frac{y}{R}\Big) = n_2\Big(\alpha_2 - \frac{y}{R}\Big).$$

整理得

$$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 + \frac{n_2 - n_1}{R}\,y.$$

高度 y 在通过（光线与面相交处）保持连续，因此 $y_2 = y_1 = y$。于是在矢量 $\mathbf{r} = (y, n\alpha)^{\mathrm{T}}$ 表示下，球面折射的线性矩阵为（从左媒质 n_1 到右媒质 n_2）：

$$\boxed{\begin{pmatrix} y \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\text{sphere interface}}} \begin{pmatrix} y \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.}$$

这是一个非常简洁且常用的结果（基于 $[y, n\alpha]$ 表示）。

7.2 2.1 正分界面（法向/平面分界面）

若界面为平面（等于曲率半径 $R \to \infty$），则 $\dfrac{n_2 - n_1}{R} \to 0$，上式退化为

$$\begin{pmatrix} y \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

即对于 $[y, n\alpha]$ 表示，平面分界面对应单位矩阵：第二分量 $n\alpha$ 在两侧相等（这是 Snell 的线性化形式在平面上的直接体现），但若用 $[y, \alpha]$ （不含 n）表示，则角度会按比例缩放：

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1.$$

因此要注意表示法的不同。

7.3 2.2 斜分界面（平面但倾斜）

若界面是平面但与光轴有一个固定倾角 φ（法线与光轴的夹角为 φ），则法线方向在所有高度处相同。按与上面类似的 Snell 线性化，记入射角相对于轴为 α_1，则相对于法线的入射角是 $i_1 = \alpha_1 - \varphi$，折射角相对于轴为 α_2，有 $i_2 = \alpha_2 - \varphi$。线性 Snell：

$$n_1(\alpha_1 - \varphi) = n_2(\alpha_2 - \varphi).$$

整理得到

$$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 + (n_2 - n_1)\varphi.$$

注意：右端多出一项 $(n_2 - n_1)\varphi$ 与高度 y 无关，是一个常数偏移项。因此用 2×2 的线性矩阵（仅作用在 $(y, n\alpha)$ 上）无法表达这个常数偏置，需要用 3×3 的增广齐次矩阵来描述平移/常数项。

把光线扩展为增广矢量

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} y \\ n\alpha \\ 1 \end{pmatrix},$$

则斜平面（从 n_1 到 n_2，法线倾角 φ）的 3×3 变换矩阵为

$$\boxed{\tilde{\mathbf{r}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (n_2 - n_1)\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{in}}.}$$

（这里第 2 行第 3 列给出了对第二分量的常数偏移量。）

如果只关心角度变化，也可写出标量关系：

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2}\varphi.$$

7.4 2.3 正放置薄透镜（Thin lens）

薄透镜可看作两块球面折射面的组合（入射曲率 R_1，出射曲率 R_2），中间材料的折射率为 n，两面之间的厚度 d。在薄透镜极限 $d \to 0$（或忽略厚度对光线高度的平移）时，两个界面的作用可以连乘得到一个简单的单矩阵。

以空气（折射率取 1）为周围媒质为例，先在第一个面（$1 \to n$，曲率 R_1）应用球面折射矩阵（参见上一节），再在第二个面（$n \to 1$，曲率 R_2）应用折射矩阵，并令中间传播长度趋于零，得到总的角度变化：

$$\alpha_{\text{out}} = \alpha_{\text{in}} - \Phi\, y,$$

其中

$$\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

称为薄透镜的 **光学度（power）**，单位为长度的倒数（例如 m^{-1}）。焦距定义为

$$f = \frac{1}{\Phi}.$$

用 $\mathbf{r} = (y, n\alpha)^{\mathrm{T}}$（此处 n 在入射、出射均为 1），薄透镜的矩阵为

$$\boxed{M_{\text{thin lens}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{薄透镜（在空气中）}\ \ (\Phi = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2))}$$

这是薄透镜矩阵的标准形式（注意：若使用 (y, α) 表示，则对应矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$，因两种表示在空气中等价；但跨媒质时请谨慎使用 $n\alpha$ 形式）。

厚透镜（简述） 若不能忽略厚度 d，需要按顺序乘以：第一个折射面矩阵 × 厚度传播矩阵 × 第二面折射矩阵。厚透镜的精确焦距（镜片制造学上的 lensmaker 公式）会包含 d 的修正项，典型形式为（在空气中）：

$$\Phi_{\text{thick}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right),$$

此处需注意符号约定与厚度测量方式，具体推导可按需要展开。

7.5 2.4 正放置分界球面（再次强调）

前面在“球面界面”推导已给出：

$$\boxed{\begin{pmatrix} y \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.}$$

这里再次强调签名约定与 R 的正负取法，并在具体应用时谨慎代入。

8 经过空间的变换（传播）

在媒质中沿直线传播一段距离时，光线的高度会改变但第二分量 $n\alpha$（在同一媒质中）保持不变。

8.1 3.1 自由空间（在折射率 $n=1$ 的空气中）

若在空气中传播距离 d，从位置 (y_1, α_1) 到 (y_2, α_2)，有

$$y_2 = y_1 + d\,\alpha_1, \qquad \alpha_2 = \alpha_1.$$

以 $\mathbf{r} = (y, n\alpha) = (y, \alpha)$（此处 $n=1$）表示，传播矩阵为

$$\boxed{M_{\text{free},d} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

8.2 3.2 经过折射率为 n 的空间

若在折射率为 n 的均匀媒质中传播距离 d，则

$$y_2 = y_1 + d\,\alpha_1, \qquad n\alpha_2 = n\alpha_1.$$

以 $\mathbf{r} = (y,\, n\alpha)$ 表示，传播矩阵写为

$$\boxed{M^{(n)}_{\text{prop},d} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix}.}$$

（注意：若使用 (y, α) 表示，上式的 $(1,2)$ 元为 d 而非 d/n。）

8.3 3.3 斜放置玻璃片（倾斜的平行板）

考虑一块平行板（入、出表面平行），在光轴上相对轴的法线倾角为 φ，板在垂直方向的厚度沿轴向投影为 d（即两表面在光轴方向的间隔为 d，若有微小倾角这与板的几何厚度有关，但在小角展开中可近似视为给定的 d）。周围媒质为空气（$n_0 = 1$），板内折射率为 n。两表面的倾角相同（平行板），因此出射光与入射光方向在角度上相同（平行板不改变平行方向，只产生平移），但会产生高度偏移，且偏移中含常数项与入射角/倾角有关。

逐步推导（线性、小角）：

1. 入射到第一表面（倾角 φ）：按斜面推导，

$$n\alpha_{\text{in,inside}} = \alpha_{\text{in}} + (n-1)\varphi.$$

高度在接口处不变：$y_{\text{entry}} = y_{\text{in}}$。

2. 在介质内部传播距离 d（在同一折射率 n 中），由传播矩阵：

$$y_{\text{exit-just-before}} = y_{\text{entry}} + \frac{d}{n}\big(n\alpha_{\text{in,inside}}\big) = y_{\text{in}} + \frac{d}{n}\big(\alpha_{\text{in}} + (n-1)\varphi\big).$$

3. 出射（第二面 $n \to 1$，倾角仍为 φ）：按斜面出射关系

$$1 \cdot \alpha_{\text{out}} = n\alpha_{\text{in,inside}} + (1-n)\varphi = \alpha_{\text{in}}.$$

（角度恢复为入射角，平行板不改变传播方向）

因此总体得到（以增广矢量表示）：

$$\begin{pmatrix} y_{\text{out}} \\ 1 \cdot \alpha_{\text{out}} \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} & \frac{d}{n}(n-1)\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\text{tilted plate}}} \begin{pmatrix} y_{\text{in}} \\ 1 \cdot \alpha_{\text{in}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即在 $[y, n\alpha, 1]$ 的齐次表示下，倾斜平行板的核心效果是将高度增加一项与入射角（通过 d/n）以及一个常数偏移 $(d/n)(n-1)\varphi$ 相关。

若 $\varphi = 0$（平行板不倾斜），矩阵退化为常见的传播 $y_{\text{out}} = y_{\text{in}} + d\alpha_{\text{in}}$（注意 d 这里是轴向间隔，在 $[y, \alpha]$ 表示下）。

8.4 3.4 主截面内三棱镜（棱镜）

把棱镜视作两个倾斜平面（入、出面不是平行，相对倾角为顶角 A），材料折射率为 n。设入射面倾角为 φ_1，出射面倾角为 φ_2，则顶角 $A = \varphi_1 - \varphi_2$（符号依选取而定）。按与平行板类似的线性化推导：

入射面给出

$$n\alpha_{\text{inside}} = \alpha_{\text{in}} + (n-1)\varphi_1.$$

出射面给出（从 n 到空气）：

$$\alpha_{\text{out}} = n\alpha_{\text{inside}} + (1-n)\varphi_2.$$

代入可得

$$\alpha_{\text{out}} = \alpha_{\text{in}} + (n-1)(\varphi_1 - \varphi_2) = \alpha_{\text{in}} + (n-1)A.$$

因此棱镜的主要作用是在角度上施加一项 $(n-1)A$（即小角近似下的偏转），并伴随因厚度而带来的高度平移（和平行板类似，需要把传播距离 d 考虑进来以得到具体的 y 偏移量）。

若取对称入射（沿棱镜二面角平分线入射），常见的近似偏向角度（小角）：

$$\delta \approx (n-1)A.$$

用增广矩阵可写出完整的 3×3 描述(与倾斜平板类似,由于是两面不同倾角,常数项为 $(d/n)(n-1)\varphi_1$ 与 φ_2 的组合)，此处不再赘述符号详化，若你需要具体数式（给定 d, φ_1, φ_2）我可以展开代数并写出显式矩阵。

9 经过反射面

在反射时，折射率并未改变（仍在同一媒质内），但角度相对于法线发生翻转。用小角近似可以得出简单的线性关系。

9.1 4.1 正放置反射镜（平面且法线与光轴重合）

平面镜且法线与光轴重合（镜面与光轴垂直），入射角 α_1，反射后角度 α_2 满足 $\alpha_2 = -\alpha_1$（相对于轴的角变号）。高度 y 保持不变。于是矩阵表示（采用 $\mathbf{r} = (y, n\alpha)$，此处 n 不变）为

$$\boxed{M_{\text{plane mirror (normal)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

9.2 4.2 斜放置反射镜（倾斜平面镜）

若平面镜的法线相对于轴有倾角 φ，则反射定律在小角下给出

$$\alpha_2 = 2\varphi - \alpha_1.$$

乘以 n（媒质折射率）：

$$n\alpha_2 = -n\alpha_1 + 2n\varphi.$$

因此在增广齐次表示（含常数项）下：

$$\boxed{\tilde{\mathbf{r}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2n\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{in}}.}$$

即角度有反号并伴随常数偏移 $2n\varphi$。

9.3 4.3 正放置球面镜（球面反射镜）

对球面镜，法线在高度 y 处的夹角约为 y/R，由反射定律得

$$\alpha_2 = 2\frac{y}{R} - \alpha_1.$$

乘以 n：

$$n\alpha_2 = -n\alpha_1 + \frac{2n}{R}y.$$

因此在 $(y, n\alpha)$ 表示下球面镜的矩阵为

$$\boxed{M_{\text{spherical mirror}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}.}$$

可以把该矩阵看作：先把角度反号（平面镜行为），再额外加上一个与高度成正比的角度项（这就是球面聚焦的来源）。球面镜的焦距（对称入射、镜面在同一媒质中）满足熟知关系（薄镜近似）

$$f = \frac{R}{2}.$$

10 系统级组合与常用公式总结

在实际系统中，常用的组合形式包括传播-界面-传播-透镜等。记住矩阵乘法的顺序（最先作用的元件在最右侧）非常重要。下面把常用的矩阵列一个方便查阅的表格（均为 $[y, n\alpha]$ 表示，若要用 $[y, \alpha]$，把第二分量除以相应的 n 并相应调整传播项）：

常用 2×2 矩阵（$[y,\, n\alpha]$ 表示）：

传播（媒质 n，距离 d）	$\begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
球面折射（$n_1 \to n_2$，曲率 R）	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$
薄透镜（在空气中）	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = (n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$
平面镜（法向）	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
球面镜（半径 R）	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$

注意：斜面、倾斜平行板、倾斜镜、棱镜等常产生常数项，需用增广 3×3 齐次矩阵处理。

11 示例：薄透镜成像的 ABCD 分析（简单示例）

若光线从左到右先传播一段 d_1，遇到薄透镜（光学度 Φ），再传播一段 d_2 到像平面，总系统矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

用 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 表示系统矩阵，则成像条件（输入高度 y_1 映到像面 $y_2 = 0$，对任意 y_1）是 $A = 0$。把矩阵相乘并解出 $A = 0$ 可得薄透镜成像公式，最终恢复熟知的高斯成像公式

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \Phi = \frac{1}{f}.$$

12 结语与注意事项

- 上述所有矩阵和推导均基于 **抛物线小角近似**。在角度较大或高阶像差情况下，必须考虑更高阶项或直接用光线追迹数值计算。
- 矩阵的符号约定（R 的正负、y 的正向、角的正向）在不同资料中可能稍有差别。使用时请严格参照本文开头的符号约定，或在不同约定之间谨慎转换。
- 若你需要把上面矩阵转换为 (y, α) 表示或需要把增广 3×3 矩阵展开为显式 2×2 加常数项的形式，我可以按你指定的表示方法把所有矩阵逐一给出并验证若干数值例子。

- 若你希望我把这些推导配上示意图（几何图、光线图）或把文档改成 Beamer 演示稿/更专业的排版，我也可以继续完善。

如果你希望我把这个 LaTeX 文档转换为 PDF（我可以生成代码 / 直接给你可编译的 ‘.tex‘ 文件内容），或需要我把矩阵按你指定的 (y, α) 形式再给一次、或把每一小节做更细的图形说明与数值例子，请直接告诉我你想要的格式与优先级—我会把完整的 LaTeX 源文件继续补充 / 精化。