



# 数学物理方法笔记

---

作者：Guotao He  
编译时间：2026-02-5

# 目录

---

<b>Part I 复分析</b>	<b>1</b>
<b>Chapter 1 复变函数</b>	<b>2</b>
1.1 复变函数的导数和微分 . . . . .	2
1.2 解析函数和多值函数 . . . . .	3
<b>Chapter 2 复变积分</b>	<b>5</b>
2.1 定义 . . . . .	5
2.2 Cauchy 定理 . . . . .	7
2.3 Cauchy 积分公式 . . . . .	7
<b>Chapter 3 复变级数</b>	<b>9</b>
3.1 级数 . . . . .	9
3.2 幂级数 . . . . .	10
3.3 Taylor 展开 . . . . .	10
3.4 Laurent 展开 . . . . .	11
3.5 奇点的分类 . . . . .	11
<b>Chapter 4 留数定理</b>	<b>12</b>
4.1 留数和留数定理 . . . . .	12
4.2 留数法部分分式分解 . . . . .	14
4.3 有理三角函数积分 . . . . .	15
4.4 无穷积分 . . . . .	15
4.5 含三角函数的无穷积分 . . . . .	16
4.6 实轴上有奇点的积分 . . . . .	17
<b>Part II 积分变换</b>	<b>19</b>
<b>Chapter 5 函数空间</b>	<b>20</b>
5.1 Dirac 函数, Heaviside 单位阶跃函数 . . . . .	20
5.2 函数空间, 基, 内积 . . . . .	21
5.3 按正交基底的展开 . . . . .	22
5.4 Sturm-Liouville 特征值问题 . . . . .	23
<b>Chapter 6 Fourier 变换</b>	<b>25</b>
6.1 Fourier 级数 . . . . .	25
6.2 Fourier 变换 . . . . .	25
6.3 Fourier 变换的性质 . . . . .	26

<b>Chapter 7 Laplace 变换</b>	<b>28</b>
7.1 Laplace 变换	28
7.2 Laplace 变换的性质	28
 <b>Part III 数学物理方程</b>	 <b>30</b>
<b>Chapter 8 数学物理方程和定解条件</b>	<b>31</b>
8.1 数学物理方程的分类	31
8.2 定解条件	31
<b>Chapter 9 积分变换法</b>	<b>32</b>
9.1 Fourier 变换法	32
9.2 Laplace 变换法	32
<b>Chapter 10 分离变量法</b>	<b>34</b>
10.1 齐次方程分离变量法	34
10.2 非齐次方程齐次化	35
<b>Chapter 11 球函数</b>	<b>37</b>
11.1 三维球坐标 Laplace 方程分离变量	37
11.2 Lerendre 方程	38
11.3 球面调和函数	38
<b>Chapter 12 柱函数</b>	<b>40</b>
12.1 Bessel 函数	40
<b>Chapter 13 常见方程通解</b>	<b>41</b>
13.1 Laplace 方程	41
13.2 Helmholtz 方程	41
 <b>Part IV 杂七杂八</b>	 <b>42</b>
<b>Chapter 14 Lamé 系数与任意正交坐标系下算符</b>	<b>43</b>
14.1 Lamé 系数介绍	43
14.2 几何理解	44
14.3 使用微分形式推导	44
14.3.1 梯度	45
14.3.2 旋度	45
14.3.3 散度	46
<b>Chapter 15 Euler 微分方程</b>	<b>47</b>
<b>Chapter 16 Feynman 积分法</b>	<b>48</b>
16.1 Feynman 积分法的基本原理	48
16.2 确定参数位置	49
16.3 收敛因子	49

16.4 微分方程构型 . . . . .	50
<b>Chapter 17 Glasser 主定理</b>	<b>51</b>
17.1 Glasser 主定理介绍 . . . . .	51
17.2 Glasser 主定理应用 . . . . .	52
<b>Chapter 18 Lobachevsky 积分法</b>	<b>54</b>
18.1 Lobachevsky 积分法介绍 . . . . .	54
18.2 Lobachevsky 积分法应用 . . . . .	55

DRAFT

# Part I

## 复分析

## Chapter 1

# 复变函数

## 1.1 复变函数的导数和微分

**Definition 1.1.1** (导数). 设函数  $f(z)$  是区域  $G$  上定义的单值函数, 若在点  $z$  处存在极限:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

且与  $\Delta z \rightarrow 0$  的方式无关, 则称函数  $f(z)$  在  $z$  点的导数存在.

**Definition 1.1.2** (可微). 若函数  $w = f(z)$  在  $z$  处的改变量  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$  可以写为:

$$\Delta w = A(z) \Delta z + \rho(\Delta), \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\rho(\Delta)}{\Delta z} = 0$$

则函数  $f(z)$  在  $z$  处可微, 其线性部分被称为函数的微分.

可以证明, 函数在  $z$  处可导和可微互为充要条件, 因此  $df(z) = f'(z) dz$ .

上述式子中我们可以得到复变函数的导数的几何意义: 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  处可导, 则在  $z_0$  处的小邻域经过函数  $f(z)$  的变换相当于乘上一个固定的复数  $f'(z_0)$ . 又因为乘上一个固定的复数相当于进行了拉伸和旋转两步, 其不会经历剪切过程, 因此此变换是一个保角变换<sup>1</sup>.

**Theorem 1.1.1** (Cauchy - Riemann 条件). 设复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  可导, 则其一个必要不充分条件是函数  $f(z)$  满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

若在极坐标下, 则满足:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

C-R 条件其实可以借助几何直观的推出. 若函数在  $z_0$  可导, 则该函数在  $z_0$  处的小邻域内是保角变换, 因此, 其实轴的基矢的位移与虚轴的基矢的位移模长相等, 方向正交. 也就是:

$$dv = i \cdot du$$

例如, 在直角坐标下, 我们先写出  $u, v$  的全微分:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

同时, 我们知道直角坐标下  $dx$  和  $dy$  的关系:  $dy = i \cdot dx$ . 因此:

<sup>1</sup>当然, 这要求  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $f(z) = 0$  的保角性需要额外讨论.

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx = \left( -\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = i du$$

故:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

即直角坐标下 C-R 条件. 同理, 在极坐标下:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \end{aligned}$$

同时, 在极坐标下  $dr$  和  $d\theta$  的关系:  $r d\theta = i dr$ , 因此:

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr = i du$$

故:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

如果一个函数  $f(z)$  在  $z_0$  处满足 C-R 条件, 仍不能说明  $f(z)$  在  $z_0$  处可导, C-R 条件只是可导的必要条件并不是充分条件, C-R 条件只保证了  $\Delta z$  以平行于实轴和虚轴这两种特殊方式趋近于 0 时, 极限逼近与同一个值.

一个可导的充分条件是, 函数  $f(z) = u + iv$  的实部和虚部在  $z_0 = (x, y)$  处均可微, 也就是  $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$  四个偏导数存在且连续, 同时满足 C-R 条件, 则该函数在  $z_0$  可导.

## 1.2 解析函数和多值函数

**Definition 1.2.1** (解析函数). 若函数  $f(z)$  在区域  $G$  内处处可导, 则函数  $f(z)$  在  $G$  内解析.

- 解析函数的实部和虚部不是独立的, 知道了其中之一, 根据 C-R 条件就可以唯一地确定另外一个. (当然有可能相差一个常数)
- 不是任意的二元函数都可以作为解析函数的实部和虚部, 它们必须是调和函数, 即  $f(z) = u + iv$  的  $u$  和  $v$  需要满足 Laplace 方程.

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0$$

- 如果一个函数  $f(z)$  是解析函数, 则这一个函数必定是单值函数, 也就是对于定义域中任意一个自变量  $z$ , 有且只有一个对应的函数值  $f(z)$ . 这是因为如果函数是多值函数, 则当  $\Delta z$  从不同路径趋于 0 时,  $f(z + \Delta z)$  有可能会到不同的分支上, 从而使得极限依赖于  $\Delta z$  趋近于 0 的路径.

**Definition 1.2.2** (多值函数). 若在区域  $G$  内, 复数  $z \in G$  有多个复数  $w_0, \dots, w_n$  与之对应,  $w$  和  $z$  的映射关系记为  $f$ , 则  $f$  称为定义在  $G$  上的多值函数.

实际上, 我们所接触的多值函数就三种:  $\sqrt[n]{z}, \ln z, z^\alpha$ . 多值函数虽然名字中叫“函数”, 实际上根本不是函数. 函数要求是一个自变量被映射到唯一的另一个自变量, 显然多值函数不满足这一点.

多值函数的多值性来自于宗量相位的多值性. 因此多值函数中可以定义分支点.

**Definition 1.2.3** (分支点). 对于多值函数  $w = f(z)$ ,  $\exists r > 0$ , 当自变量  $z$  绕圆周  $|z - z_0| = r$  一周回到原处时, 因变量  $w$  值不还原, 且  $r \rightarrow 0$  时,  $w$  仍旧不还原, 则  $z_0$  就是一个分支点. 当  $z$  绕  $z_0$  点  $n$  周时  $w$  复原, 则称该点为多值函数的  $n-1$  阶分支点.

无穷远点也可以是分支点, 只需要作变换  $z = 1/t$ , 考察  $t = 0$  是否是分支点即可.

我们不难发现, 只要我们限制自变量不要在分支点上绕圈圈, 就不会产生多值现象. 同时, 多值函数之所以不是函数, 是因为其将一个点映射到多个点, 因此, 我们可以“稀释”一下定义域, 将定义域变成多个复平面, 从而使得定义域到值域变成是一一对应的, 这样我们就可以用解析函数的各种性质了.

因此, 我们人为在两个分支点之间连线 (不一定是直线), 从而得到割线, 并要求如果自变量  $z$  经过了割线, 就要变更复平面. 我们可以想象不同的复平面是不同的层, 割线就是不同层的“楼梯”, 经过割线就会升降层从而进入不同的复平面, 在可视化上就相当于将不同层的割线“粘”起来. 这样得到东西就是所谓的 Riemann 面.

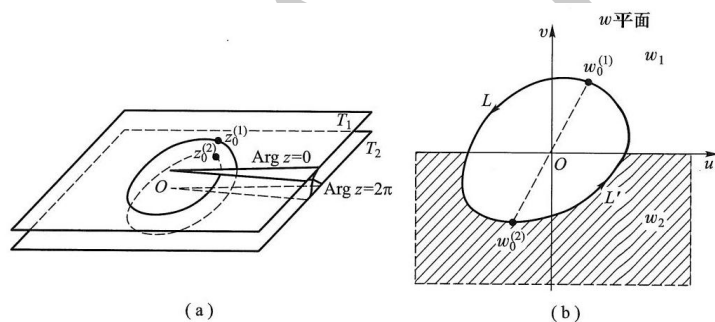


图 1.1:  $\sqrt{z}$  的 Riemann 面可视化

常见的多值函数的分支点和割线如下:

- 根式函数  $\sqrt[n]{z}$ : 分支点:  $0, \infty$ , 割线:  $\{z | \arg z = 0\}$
- 对数函数  $\ln z$ : 分支点:  $0, \infty$ , 割线:  $\{z | \arg z = 0\}$
- 幂函数  $z^\alpha$ : 分支点:  $0, \infty$ , 割线:  $\{z | \arg z = 0\}$



## Chapter 2

# 复变积分

## 2.1 定义

**Definition 2.1.1** (复变积分). 设  $C$  是分段光滑的曲线, 则复变积分可以定义为两个实变线积分的组合:

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)\end{aligned}$$

一般说来, 复变积分的数值, 不仅依赖于被积函数和积分路径的端点, 而且还依赖于积分路径本身.

**Definition 2.1.2** (不定积分). 设  $f(z)$  及  $\Phi(z)$  是区域  $G$  内的连续函数, 如果在  $G$  中恒有  $\Phi'(z) = f(z)$ , 则称  $\Phi(z)$  为  $f(z)$  在区域  $G$  内的一个不定积分或原函数.

- $\Phi(z)$  显然为  $G$  内的解析函数
- 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的.

**Theorem 2.1.1** (微积分基本定理). 设  $C$  的端点  $a, b$ ,  $f(z)$  的某个原函数为  $\Phi(z)$ , 则:

$$\int_C f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a)$$

**Theorem 2.1.2.** 在区域  $G$  内, 下列命题等价:

- 复变积分与路径无关

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

- 围道积分恒为 0

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

- 函数的原函数存在

$$f(z) = \Phi'(z)$$

一个经常用到的结论如下:

**Example 2.1.1.** 计算

$$\oint_C z^n dz$$

其中  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C$  为一逆时针方向的简单闭合围道.

**Solution.** 设  $f(z) = z^n$ , 不难得到原函数为:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

$n \geq 0$  时,  $\Phi(z)$  是  $\mathbb{C}$  上的解析函数, 因此:

$$\oint_C z^n dz = 0, \quad n \geq 0$$

$n < -1$  时,  $\Phi(z)$  是  $\mathbb{C} \setminus \{z=0\}$  上的解析函数, 因此对于任意不经过原点的围道, 有:

$$\oint_C z^n dz = 0, \quad n < -1$$

$n = -1$  时,  $\Phi(z)$  为多值函数, 其分支点为原点和无穷远点, 因此围道可以分成两种情况:

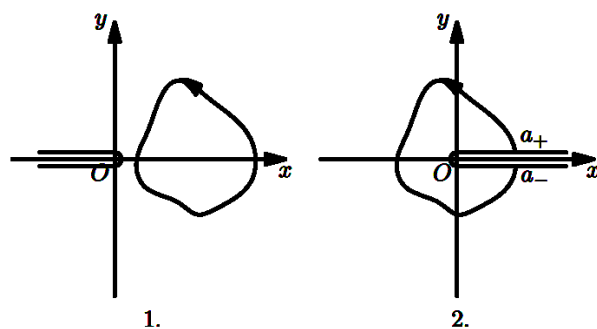


图 2.1:  $n = -1$  时的两种情况

- 围道不包围原点, 则总可以做割线连接原点和无穷远点, 使得围道仍在解析区域内, 则:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 0$$

- 围道包围原点, 则围道一定与割线相交, 因此, 我们可以从割线的一端出发到另一端, 于是有:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_{a_+}^{a_-} \frac{dz}{z} = \ln a_- - \ln a_+$$

规定  $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ , 因此:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = (\ln a + 2\pi i) - \ln a = 2\pi i$$

综上:

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \text{ 且 } C \text{ 包围 } z = 0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

□

## 2.2 Cauchy 定理

下面我们将某个包含奇点（如果有奇点的话）的单连通区域记为  $G$ （没有加上方的横线），用小围道去除奇点后的复连通区域记为  $\bar{G}$ （在上方加上一条横线）。

**Theorem 2.2.1** ((单连通区域的)Cauchy 定理). 如果函数  $f(z)$  在单连通区域  $G$  中解析, 则沿  $G$  中任何一个简单闭围道  $C$ , 有:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

上述定理用 Green 公式 + C-R 条件可以很容易地证明, 在此不再叙述.

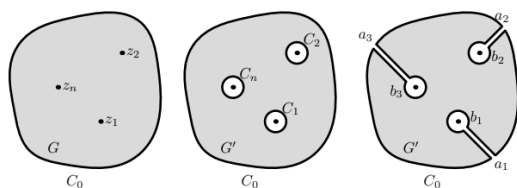


图 2.2: 复连通区域 Cauchy 定理围道示意图

若区域  $G$  中不是处处解析的, 而是存在一些奇点, 于是我们可以用一系列小围道  $C_1, \dots, C_n$  将奇点绕开, 从而得到一个在上面解析的复连通区域  $\bar{G}$ , 在上面作适当割线将其转化为单连通区域  $G'$ , 因此, 根据单连通区域的 Cauchy 定理, 有:

**Theorem 2.2.2** ((复连通区域的)Cauchy 定理). 如果  $f(z)$  是复连通区域  $\bar{G}$  中的解析函数, 则:

$$\oint_{C_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 0$$

其中  $C_0$  是外部的最大的围道,  $C_1, \dots, C_n$  是内部的小围道. 所有围道取正向.

注意这里围道正向指的是“左手在内”准则的正向, 也就是在围道上面多围道正向, 左手边是内部, 右手边是外部, 也就是对于外部, 正向是逆时针, 对于内部, 正向是顺时针. 有些书籍的 Cauchy 定理使用的是全逆时针的围道 (无论内外), 需要注意区分.

上面  $f(z)$  在闭区域  $\bar{G}$  中解析, 不仅要求  $f(z)$  在  $\bar{G}$  中无奇点, 还要求其在积分围道上也解析无奇点.

## 2.3 Cauchy 积分公式

复变函数的积分的另一个及其重要的关系式是 Cauchy 积分公式.

**Theorem 2.3.1** (Cauchy 积分公式). 设  $C$  为一简单的闭围道,  $G$  是其内部,  $\alpha$  为  $G$  内一点. 若  $f(z)$  是区域  $\bar{G}$  上的解析函数, 则:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

其中围道积分沿正向, 也就是逆时针方向.

实际上 Cauchy 积分公式是之后的留数定理的一种特殊情况, 可以视为留数定理的只有一个一阶极点的情况. Cauchy 积分公式的应用到之后留数定理再介绍.

Cauchy 积分公式中给出  $G$  内的任意一点的函数值  $f(z)$  可以用边界  $C$  上的积分表示, 而  $f'(z)$  也可以由边界  $C$  上的积分表示.

**Theorem 2.3.2** (解析函数的高阶导数). 设  $C$  为一简单的闭合围道,  $G$  是其内部,  $\alpha$  为  $G$  内一点. 若  $f(z)$  是区域  $\bar{G}$  上的解析函数, 则:

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

同样, 上述也是留数定理的只有一个高阶极点的情况.

**Corollary 2.3.3.** 设  $f(z)$  是区域  $G$  内的解析函数, 则在区域  $G$  内  $f(z)$  的任意阶导数都存在, 且也是  $G$  内的解析函数.

**Theorem 2.3.4** (Morera 定理). 设  $f(z)$  在区域  $G$  内连续, 若  $G$  中的任意闭合围道  $C$ , 都有:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

则  $f(z)$  在  $G$  内解析.

## Chapter 3

# 复变级数

### 3.1 级数

复变级数和高数中的实变级数的很多性质相似，我们不加证明地给出下面结论：

**Theorem 3.1.1** (比较判别法). 若  $|u_n| < v_n$  而  $\sum v_n$  收敛，则  $\sum |u_n|$  收敛. 若  $|u_n| > v_n$  而  $\sum v_n$  发散，则  $\sum |u_n|$  发散.

**Theorem 3.1.2** (比值判别法). 如果存在常数  $\rho$ ，满足：

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \rho < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若：

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

**Theorem 3.1.3** (根式判别法). 如果存在常数  $\rho$ ，满足：

$$|u_n|^{1/n} \leq \rho < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若：

$$|u_n|^{1/n} > 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

由于级数的前面有限项与整个级数的收敛性无关，则可以从  $n$  项开始，令  $n \rightarrow \infty$ ，可得：

**Theorem 3.1.4** (d'Alembert 判别法). 如果：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

**Theorem 3.1.5** (Cauchy 判别法). 如果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

## 3.2 幂级数

**Theorem 3.2.1** (Abel 第一定理). 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  在某点  $z_0$  收敛, 则在以  $n$  点为圆心,  $|z_0 - a|$  为半径的圆  $|z - a| < |z_0 - a|$  绝对收敛, 在  $|z - a| \leq r < |z_0 - a|$  的闭圆内一致收敛.

求幂级数的收敛半径一般遵循以下方法:

- 根据 Cauchy 判别法:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{1/n}$$

- 根据 d' Alembert 判别法:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

## 3.3 Taylor 展开

一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数. 相反地, 可以将一个解析函数表示成为幂级数.

**Theorem 3.3.1** (Taylor 展开). 设函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心的圆内  $|z - z_0| < R$  解析, 则对于圆内任何  $z$  点, 有  $f(z)$  可用 Taylor 展开为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

我们同样可以对无穷远点  $\infty$  进行 Taylor 展开, 只需要做变换  $z \rightarrow 1/z$  然后对  $z = 0$  的邻域展开即可.

这里 Taylor 展开的形式和实变函数中的 Taylor 公式相同, 但是条件不同.

- 在实变函数中,  $f(z)$  的任意阶导数存在, 还不能保证 Taylor 级数收敛, 还需要 Taylor 公式的余项  $\rightarrow 0$ .
- 在复变函数中, 解析的要求就足以保证 Taylor 级数收敛.

Taylor 展开是唯一的, 因此我们可以用各种其他方法来求解 Taylor 展开.

### 3.4 Laurent 展开

解析函数在解析点可展开成 Taylor 级数. 有时, 还需要将它在奇点附近展开成幂级数, 这时就得到 Laurent 展开.

**Theorem 3.4.1** (Laurent 展开). 设函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心的环域  $r < |z - z_0| < R$  中单值解析, 则对于环域内任何的  $z$  点,  $f(z)$  可以用包括负幂级数的展开为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$C$  是环域内绕内圆一周的任意一条曲线.

我们同样可以对无穷远点  $\infty$  进行 Laurent 展开, 只需要做变换  $z \rightarrow 1/z$  然后对  $z = 0$  的环域展开即可.

Laurent 展开与 Taylor 展开不同, 一方面其展开区域 (收敛区域) 不同, 另一方面, 即使是正幂项系数:

$$a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Taylor 展开是唯一的, 因此我们可以用各种其他方法来求解 Taylor 展开.

### 3.5 奇点的分类

**Definition 3.5.1** (孤立奇点). 设  $z_0$  为函数  $f(z)$  的一个奇点. 如果存在  $z_0$  的空心邻域, 在该邻域内  $0 < |z - z_0| < r$ ,  $f(z)$  解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点. 否则称为非孤立奇点.

如果  $z = z_0$  是函数  $f(z)$  的一个孤立奇点, 则存在一个环域  $r < |z - z_0| < R$ , 在环域内  $f(z)$  解析, 则可以展开成 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

可能出现三种情况:

- 级数展开式不含负幂项.  $\implies$  可去奇点.
- 级数展开式含有限负幂项.  $\implies$  极点.
- 级数展开式含无穷多个负幂项.  $\implies$  本性奇点.

## Chapter 4

# 留数定理

### 4.1 留数和留数定理

**Definition 4.1.1** (留数). 若点  $z_0$  为函数  $f(z)$  的孤立奇点. 定义函数  $f(z)$  在孤立奇点  $z_0$  的留数等于  $(z)$  在  $z_0$  的空心邻域内 *Laurent* 展开式中  $(z - z_0)^{-1}$  幂的系数  $a_{-1}$ , 记作  $\text{res}f(z_0)$  或者  $\text{res}[f(z), z_0]$ .

$$a_{-1} = \text{res}f(z_0) = \text{res}[f(z), z_0]$$

**Theorem 4.1.1** (留数定理). 设  $C$  为一简单闭围道,  $G$  为  $C$  的内区域, 若  $G$  中除了有限个孤立奇点  $b_k, k = 1, 2, \dots, n$  外, 函数在  $\bar{G}$  内解析, 则:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(b_k)$$

**Proof.** 证明其实也是复联通区域的 Cauchy 定理的直接应用. 作小圆  $\gamma_k, k = 1, \dots, n$  将每一个奇点包围 (全部取逆时针方向), 则:

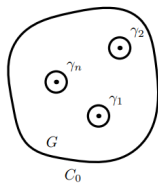


图 4.1: 留数定理证明示意图

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(b_k)$$

□

对于  $m$  阶极点, 有如下求留数的方法:

$$\text{res}f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0) f(z)] \Big|_{z=z_0}$$

特别的, 对于  $m = 1$ , 有:

$$\text{res}f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

若  $f(z) = P(z)/Q(z)$ , 其中  $P, Q$  均为多项式,  $z_0$  为  $f(z)$  的一阶极点, 则  $f(z)$  的留数有一个方便的求法:



**Corollary 4.1.2** (有理分式一阶极点的留数).

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

**Proof.** 上述证明也很简单:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z) - (z - z_0) P'(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

L' Hopital 法则

□

我们同样可以对无穷远点求留数. 若函数  $f(z)$  在无穷远点  $z = \infty$  的领域内解析, 其 Laurent 展开为:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k = \cdots + c_{-1} z^{-1} + c_0 + c_1 z^1 + \cdots$$

其中,  $\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}$ , 负号是因为围住无穷远点的围道是顺时针的.  
无穷原点留数有如下推论:

**Corollary 4.1.3** (无穷原点留数推论 1).

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\operatorname{res} \left[ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right]$$

**Proof.** 我们选取一个足够大的圆形围道  $C$ , 以逆时针为正方向, 则由留数定理:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

这里的负号是因为包围无穷远点的围道方向为顺时针, 这里取逆时针. 因此多一个负号.  
换元  $z = 1/w$ ,  $dz = -1/w^2 \cdot dw$ , 注意变换后要保持围道的方向, 因此多一个负号, 故:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(1/w)}{w^2} dw = -\operatorname{res} \left[ \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0 \right]$$

证毕.

□

**Corollary 4.1.4** (无穷原点留数推论 2). 若  $z \rightarrow \infty$  有  $f(z) \rightarrow 0$ , 则:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

**Proof.** 若  $z \rightarrow \infty$  有  $f(z) \rightarrow 0$ , 则  $f(z)$  的展开:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k = \cdots + c_{-1} z^{-1} + c_0 + c_1 z^1 + \cdots$$

其中  $c_0 = 0$ , 因此  $z \rightarrow \infty$  时,  $z f(z) \rightarrow c_{-1}$ , 根据无穷远点留数性质, 证毕.

□

**Corollary 4.1.5** (全平面留数和).

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{\text{除无穷远外奇点}} \operatorname{res} f(z) = 0$$

**Proof.** 我们选取一个足够大的圆形围道  $C$ ，以逆时针为正方向，则由留数定理：

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{除无穷远外奇点}} \operatorname{res} f(z)$$

这个围道的逆方向又可以看成是包围了无穷远点，因此，由留数定理：

$$-\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res} f(\infty)$$

上面两式相加，证毕. □

## 4.2 留数法部分分式分解

留数的一个非常好用的功能就是对有理函数进行部分分式分解. 相关的方法在我的另一本笔记中有相关介绍<sup>1</sup>，但没有使用留数来说明，现在使用留数重新进行介绍.

这个过程其实非常简单，这里直接通过例子说明：

**Example 4.2.1.** 将有理函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)^2}$$

进行部分分式分解.

**Solution.** 所谓部分分式分解，就是要将函数写成类似下面的形式：

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} + \frac{D}{(z-3)^2}$$

其中  $A, B, C, D$  是待定系数. 显然，分解出的每一项的分母等于 0 的方程的解都是原函数的奇点. 我们总可以在奇点附近进行 Laurent 展开，而待定系数就是展开的  $-1$  项系数，也就是留数，因此：

$$A = \operatorname{res}[f(z), 1] = -\frac{1}{4}$$

$$B = \operatorname{res}[f(z), 2] = 1$$

$$C = \operatorname{res}[f(z), 3] = -\frac{3}{4}$$

对于高阶极点也很容易进行处理：

$$D = \operatorname{res}[(z-3)f(z), 3] = \frac{1}{2}$$

综上，原函数的部分分式分解为：

$$f(z) = -\frac{1}{4(z-1)} + \frac{1}{z-2} - \frac{3}{4(z-3)} + \frac{1}{2(z-3)^2}$$

□

利用这种方法，我们可以很方便地对有理函数进行部分分式分解.

<sup>1</sup>我的微积分笔记，链接：<https://ghe0000.pp.ua/files/Calculus.pdf>

### 4.3 有理三角函数积分

考虑积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

其中  $R$  是  $\sin \theta, \cos \theta$  的有理函数.

做变换:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ d\theta &= \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

积分路径变换为  $z$  平面上单位圆  $|z| = 1$ , 于是:

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{iz}$$

### 4.4 无穷积分

考虑积分:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

为了应用留数定理, 必须先构造适当的围道. 我们补上以原点为圆心,  $R$  为半径的上半圆  $C_R$ , 再令  $R \rightarrow \infty$ .

为了求出补充的圆弧的积分, 这里给出非常常用的大圆弧引理.

**Lemma 4.4.1** (大圆弧引理). 若函数  $f(z)$  在  $z = \infty$  的邻域连续, 且当  $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2, |z| \rightarrow \infty$  时,  $zf(z)$  一致地趋向  $K$ , 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1)$$

其中  $C_R$  是以原点为圆心,  $R$  为半径, 夹角为  $\theta_2 - \theta_1$  的圆弧, 即:

$$C_R = \{|z| = R, \theta_1 \leq \arg(z - a) \leq \theta_2\}$$

与大圆弧引理对应的是小圆弧引理, 这里一并给出:

**Lemma 4.4.2** (小圆弧引理). 若函数  $f(z)$  在  $z = a$  的空心邻域内连续, 且当  $\theta_1 \leq \arg(z - a) \leq \theta_2, |z - a| \rightarrow 0$  时,  $(z - a)f(z)$  一致地趋向  $k$ , 则:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1)$$

其中  $C_R$  是以  $a$  为圆心,  $R$  为半径, 夹角为  $\theta_2 - \theta_1$  的圆弧, 即:

$$C_R = \{|z - a| = R \& \theta_1 \leq \arg(z - a) \leq \theta_2\}$$

对于积分:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

我们构造一个围绕上半平面的围道  $L$ , 新增的半圆形围道为  $C_R$ , 因此:

$$\oint_L R(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} R(z) dz + \int_{C_R} R(z) dz$$

由大圆弧引理, 若  $R(z)$  满足当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $zR(z) \rightarrow 0$ , 则:

$$\int_{C_R} R(z) dz = 0$$

因此, 我们将原积分转为一个围绕上半平面的围道积分. (要求实轴上没有奇点).

## 4.5 含三角函数的无穷积分

对于形如:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cos(px) dx, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \sin(px) dx$$

我们构造:

$$\oint_L P(z) e^{ipz} dz$$

其中  $L$  是包围上半平面的围道. 对于多引入的半圆形围道  $C_R$ , 我们有如下引理:

**Lemma 4.5.1** (Jordan 引理). 设  $0 \leq \arg z \leq \pi$ , 当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $P(z)$  一致趋向于 0, 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} P(z) e^{ipz} dz = 0$$

其中  $p > 0$ ,  $C_R$  是以原点为圆心,  $R$  为半径的上半圆.

由 Jordan 引理, 若  $P(z)$  满足当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $P(z) \rightarrow 0$ , 则:

$$\begin{aligned} \oint_L P(z) e^{ipz} dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) e^{ipz} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) \cos(pz) dz + i \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) \sin(pz) dz \end{aligned}$$

- 若  $P(z)$  为奇函数,  $P(z) \cos(pz)$  为奇函数, 故:

$$\oint_L P(z) e^{ipz} dz = i \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) \sin(pz) dz$$

- 若  $P(z)$  为偶函数,  $P(z)\sin(pz)$  为奇函数, 故:

$$\oint_L P(z) e^{ipz} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) \cos(pz) dz$$

由此我们将含三角函数的无穷积分化为上半平面的围道积分.

当然, 一般而言, 我们不能假定  $P(z)$  的性质如上这么好, 因此, 我们可以建立一个新的引理, 姑且称之为“补充引理”, 其是 Jordan 引理和留数定理结合的产物.

**Lemma 4.5.2** (Jordan 引理补充引理). 设  $P(z)$  只在下半平面的范围内有有限个奇点, 且当  $|z| \rightarrow \infty$  时  $P(z)$  一致地趋向于 0, 则:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} P(z) e^{-ipz} dz &= 2\pi i \sum_{\text{全平面}} \text{res}(P(z) e^{-ipz}) \\ &= -2\pi i \text{res}[P(z) e^{-ipz}, \infty] \end{aligned}$$

其中  $p > 0$ ,  $C_R$  为上半圆弧.

Jordan 引理和其补充引理说明, 当路径与指数项匹配时, 大圆弧上的积分为 0. 反之若不匹配, 则不为 0.

## 4.6 实轴上有奇点的积分

设被积函数在实轴上有奇点, 则积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

为瑕积分, 假设瑕点是  $c$ , 则瑕积分定义为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^{+\infty} f(x) dx$$

当然, 很可能上述两个极限都不存在, 但是:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^{+\infty} f(x) dx \right]$$

存在, 则定义瑕积分的主值为:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^{+\infty} f(x) dx \right]$$

如无特殊情况, 本章节所有瑕积分的值均是取主值意义下的值. 因为实轴上  $c$  是被积函数的奇点, 因此围道必须绕开奇点. 一般选取如下围道:

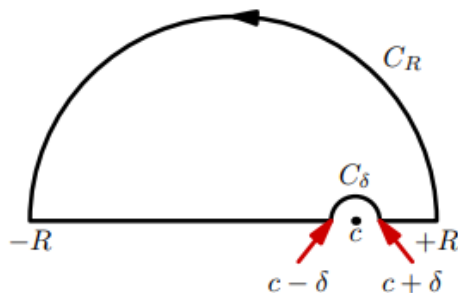


图 4.2: 实轴有奇点的积分围道

因此:

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_\delta} f(z) dz + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$$

对于大圆弧, 我们可以使用大圆弧引理或 Jordan 引理, 对于小圆弧, 我们可以使用小圆弧引理.

**Remark 4.6.1** (不同围道对结果的影响). 上面的围道我们选取从上方绕过了奇点, 这里我们考虑另一个围道, 从下方绕过, 那么是否会对结果产生影响? 其实是不会的. 考虑小圆弧引理, 记从上方绕过为  $C_{\delta 1}$ , 从下方绕过为  $C_{\delta 2}$ , 由小圆弧引理, 若  $z \rightarrow 0$  有  $(z-c)f(z) \rightarrow k$ , 则:

$$\begin{aligned} \int_{C_{\delta 1}} f(z) dz &= ik(0 - \pi) = -ik\pi \\ \int_{C_{\delta 2}} f(z) dz &= ik(2\pi - \pi) = ik\pi \end{aligned}$$

而如如果使用  $C_{\delta 2}$ , 则会多包围一个奇点, 因此围道积分会多  $\text{res}f(c) = 2\pi ik$ , 可以发现正好弥补了上面两种路径的结果的差. 因此选取不同围道对结果不会产生影响.

就复变积分而言, 积分路径上有奇点一般来说只能是一阶极点, 如果是二阶或者二阶以上的极点, 或者是本性极点, 则沿着小圆弧  $C_\delta$  的积分值可能不存在.

## Part II

### 积分变换

## Chapter 5

# 函数空间

### 5.1 Dirac 函数, Heaviside 单位阶跃函数

下面我们介绍两个后面经常使用的函数.

**Definition 5.1.1** (Dirac 函数). *Dirac* 函数 (记作  $\delta(x)$ ), 是一个广义函数<sup>a</sup>, 其满足:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

<sup>a</sup>其并不像普通函数一样对于定义域内每一个  $x$  都有一个复数值的输出.

**Definition 5.1.2** (Heaviside 单位阶跃函数). *Heaviside* 单位阶跃函数 (记作  $H(x)$ ), 其满足:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

其中  $x = 0$  的值在该函数的应用上不重要, 可以任意取. (这里取  $1/2$  是为了和符号函数  $\operatorname{sgn}(x)$  对应, 显然此时  $\operatorname{sgn}(x) = 2H(x) - 1$ )

Dirac 函数按对经典函数的理解是没有意义的, 因为它唯一“有意义”的点是它的唯一的奇点, 其“函数值”当且仅当在积分运算中才有所体现. 引入 Dirac 函数的初衷在于简化对函数序列进行微积分计算的过程.

Dirac 函数的一个非常重要 (可能是最重要) 的性质就是其挑选性, 也就是:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

下面我们不加证明地给出 Dirac 函数的性质, 这些性质都应该在积分的意义下去理解:

- $x\delta(x) = 0$  应理解为:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x\delta(x) dx = 0$
- $\delta(-x) = \delta(x)$  应理解为:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx$
- $\delta'(-x) = -\delta'(x)$  应理解为:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(-x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$  应理解为:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} f(x) \delta(x) dx$
- $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$  应理解为:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(0) \delta(x) dx$



同时, Dirac 函数还有如下性质:

- $H(x) = \int_0^x \delta(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$
- $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$

## 5.2 函数空间, 基, 内积

**Definition 5.2.1** (函数空间). 对于任意的  $C^\infty[a, b]$  函数 ( $C^\infty$  表示任意阶可导,  $[a, b]$  表示定义域), 显然,  $f, g \in C^\infty[a, b], a, b \in \mathbb{R}$ , 有:

$$af + bg \in C^\infty$$

因此  $C^\infty$  构成了一个线性空间. 其中的元素 (也就是函数) 是这个线性空间中的一个向量. 我们将这种由函数构成的线性空间称为函数空间.

**Remark 5.2.1.** 当然, 函数空间不一定是  $C^\infty$ , 除了  $C^\infty$  外我们还常用  $L^2$  (平方可积函数). 为了方便, 后文我们不区分是具体是哪一个函数空间, 直接默认是性质最好的  $C^\infty$ .

函数空间中可以选取一组函数  $e_1(x), \dots$ , 如果这一组函数相互之间线性无关, 则这组函数构成了函数空间的一组基. 如果函数空间中的任意函数都可以通过这组基底经过线性组合得到, 则称这组基底是完备的.

**Definition 5.2.2** (函数空间中的内积). 函数空间中可以定义内积  $\langle f, g \rangle$ , 数学上要求其满足如下条件:

- 对称性:  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$  (\* 表示复共轭)
- 线性:  $\langle af_1 + bf_2, g \rangle = a\langle f_1, g \rangle + b\langle f_2, g \rangle$
- 正定性:  $\langle f, f \rangle \geq 0, \langle f, f \rangle = 0$  当且仅当  $f$  为 0 元素

定义了内积的线性空间又被称为内积空间.

一般而言, 我们常用的内积的定义为 (如无特殊说明, 后文中内积的定义均如下):

$$\langle f, g \rangle = \int_L f(z) g^*(z) dz$$

当然, 有时我们也会用到不同的内积的定义, 一般而言满足如下形式:

$$\langle f, g \rangle = \int_L f(z) g^*(z) \rho(z) dz$$

其中  $\rho(z)$  为权函数.

如果内积空间是完备的 (也就是要求空间中没有一个“洞”, 严格来说, 空间中任意的一个 Cauchy 序列都会收敛到空间中的一个点) 则我们称这个内积空间为 **Hilbert 空间**. 后文中我们默认函数空间均是 Hilbert 空间.

物理中比较喜欢使用 Dirac 符号来表示内积, 向量等内容 (尤其是量子力学), 这里我们给出 Dirac 符号的简要介绍.

**Definition 5.2.3** (Dirac 符号). 定义符号如下:

- 内积:  $\langle f|g\rangle$
- 向量 (右矢):  $|f\rangle$
- 对偶向量 (左矢):  $\langle f|$

其中, 右矢  $|f\rangle$  对应一个函数  $f$ , 左矢对应一个线性泛函 (输入一个右矢输出一个标量):

$$\langle f| = \int_L \dots f^*(z) dz$$

其中  $\dots$  表示待结合的一个函数. 左矢右矢相结合得到内积:

$$\langle f|g\rangle = \int_L g(z) f^*(z) dz$$

**Remark 5.2.2.** 左矢  $\langle f|$  不是一个函数, 而是一个线性泛函, 但这个线性泛函是由函数  $\bar{f}$  唯一确定的. 因此给定一个右矢  $|f\rangle$  其可以唯一确定一个左矢, 这个过程在数学上被称为厄米共轭:

$$|f\rangle \Leftrightarrow f(z) \longleftrightarrow \langle f| \Leftrightarrow f^*(z)$$

因此, 有时我们也说右矢  $|f\rangle$  的复共轭  $\bar{f}$  是左矢  $\langle f|$  (但严格来说有区别, 复共轭是函数, 左矢是线性泛函).

### 5.3 按正交基底的展开

对于函数空间  $C$  我们可以选定一组基 (一般是无穷多个), 记为  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots$ . 如果这组基底满足:

$$\langle e_i|e_j\rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

则称这组基底是相互正交的.

对于任意一个向量 (也就是对于任意一个函数)  $|f\rangle$ , 我们希望使用可数无穷多的正交基底  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots$  进行展开, 即:

$$|f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |e_k\rangle$$

两边作用左矢  $\langle e_m|$ :

$$\langle e_m|f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle e_m|e_k\rangle = c_m \langle e_m|e_m\rangle$$

可见, 基底的正交性使得作用左矢  $\langle e_m|$  “挑选”出了我们想要的展开系数  $c_m$ , 故:

$$c_m = \frac{\langle e_m|f\rangle}{\langle e_m|e_m\rangle}$$

上面式子 “翻译” 成积分的形式如下:

$$c_m = \frac{\int_L f(z) e_m^*(z) dz}{\int_L e_m(z) e_m^*(z) dz}$$

如果我们希望使用不可数无穷多的正交基底  $|e_k\rangle$  ( $k \in \mathbb{R}$ ), 则展开的结果是一个积分形式:

$$|f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) |e_k\rangle dk$$

同样两边作用左矢  $\langle e_{k'}|$ :

$$\langle e_{k'}|f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) \langle e_{k'}|e_k\rangle dk$$

由于基底是正交的, 因此  $\langle e_{k'}|e_k\rangle = a\delta(k' - k)$ , 其中  $a$  为常数,  $\delta(x)$  为 Dirac 函数. 故:

$$\tilde{f}(k') = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) \cdot a\delta(k' - k) dk = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) \langle e_{k'}|e_k\rangle dk = \frac{1}{a} \langle e_{k'}|f\rangle$$

上面式子“翻译”成积分形式如下:

$$\tilde{f}(k) = \frac{\delta(k' - k)}{\langle e_{k'}|e_k\rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e_k^*(z) dz$$

如果我们希望函数  $f(z)$  在任意的正交基底进行展开, 则展开系数均可以使用此方法求解.

## 5.4 Sturm-Liouville 特征值问题

前面我们介绍了任何函数在正交基底的展开的方法, 但是对于一个实际的问题, 我们应该如何构造或者选取具体的正交基底? 这需要 Sturm-Liouville 特征值问题进行回答.

Sturm-Liouville 特征值问题 (简称 S-L 问题) 的标准形式如下:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda \omega(x)y = 0, \quad x \in [a, b]$$

其中:

- $y(x)$  是待定的函数,  $\lambda$  是待定的参数
- $p(x), q(x), \rho(x)$  是区间  $[a, b]$  上的实函数, 一般  $p(x) > 0$  且连续可导,  $q(x)$  连续,  $\omega(x) > 0$  且连续,  $\rho(x)$  被称为权函数.

上述方程在某一特定的边界条件下若存在非零解  $\lambda$  和  $y(x)$ , 则称  $\lambda$  为特征值,  $y(x)$  为对应  $\lambda$  的特征函数. 且不同特征值对应的特征函数  $y(x)$  是正交的, 即:

$$\int_L y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = 0, \quad (n \neq m)$$

**Remark 5.4.1.** 标准的 S-L 问题通常处理实函数, 此时内积的复共轭可以省略.

同时, 所有特征函数构成的集合  $\{y_1(x), \dots\}$  是完备的, 也就是说函数空间中的任何函数都可以用这些函数的线性组合进行表达, 因此这些函数构成了函数空间的一组基, 同时这组基是正交的, 我们可以用前文的方法将任意的函数展开到这组基上.

而之所以上述方程的解有如此良好的性质, 是因为 S-L 算符:

$$\hat{L} = \frac{1}{\rho(x)} \left( \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x) \right)$$

是厄米算符. 也就是算符  $\hat{L}$  满足:  $\langle \hat{L}f | g \rangle = \langle f | \hat{L}g \rangle$ . 类似于线性代数中的对称矩阵, 这保证了其特征值一定是实数.

$\hat{L}$  是厄米算符的证明比较简单, 带入内积的形式, 借助分部积分进行验证即可, 这里不再给出证明. 而  $\hat{L}$  对应的特征方程为:

$$\hat{L}|f\rangle = (-\lambda)|f\rangle$$

**Remark 5.4.2.** 这里  $\lambda$  前加上负号是为了和标准形式对比, 实际不改变本质.

上述式子展开后就变成了 S-L 问题的标准形式. 也因此我们称  $\lambda$  为特征值,  $y(x)$  为特征函数.

S-L 问题之所以重要, 是因为任意的二阶线性常微分算符都能写成 S-L 问题的形式. 考虑方程:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

其对应的算符  $\hat{L}_0 = A(x) \frac{d^2}{dx^2} + B(x) \frac{d}{dx} + C(x)$  一般不是厄米的. 但我们可以通过引入合适的积分因子  $I(x)$  将其化成 S-L 算符. 用  $I(x)$  乘上整个方程:

$$I(x)A(x)y'' + I(x)B(x)y' + I(x)C(x)y = 0$$

我们希望前两项能凑成  $(p(x)y')'$  的形式, 由于  $(p(x)y')' = py'' + p'y'$ , 故:

$$\frac{p'}{p} = \frac{B}{A} \implies p = \exp \left( \int \frac{B(x)}{A(x)} dx \right)$$

由此, 我们总能找到积分因子  $I(x) = p(x)/A(x)$ , 从而将任意的二阶线性常微分算符写成 S-L 算符的形式. 又由于其特征函数  $y(x)$  被 S-L 算符后作用及其简单 (乘上一个常数), 因此, 只要我们将任意的函数使用特征函数展开, 则任意函数经过 S-L 算符作用后的结果很容易写出, 从而得到任意函数经过我们想要的二阶线性常微分算符的结果, 从而可以用此方式求解二阶线性常微分方程.

## Chapter 6

# Fourier 变换

### 6.1 Fourier 级数

Fourier 级数就是  $C[-l, l]$  中以  $e^{2\pi i x/T}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 为正交基底的展开, 也就是展开的基底的数量是可数无穷多个 (区别于后面的 Fourier 变换). 当然, 我们也可以将  $e^{2\pi i x/T}$  组合成  $\cos(2\pi kx/T), \sin(2\pi kx/T)$  的形式, 因此也可以说是以  $\cos(2\pi kx/T), \sin(2\pi kx/T)$  为正交基底的展开.

若以  $e^{2\pi i x/T}$  为基底, 由于:

$$\int_{-l}^{+l} e^{2\pi i x/T} e^{-2\pi i x/T} dx = T$$

则:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k x/T}$$
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-l}^{+l} f(x) e^{-2\pi i k x/T} dx$$

若以  $\cos(2\pi kx/T), \sin(2\pi kx/T)$  为基底, 由于:

$$\int_{-l}^{+l} 1 dx = T$$
$$\int_{-l}^{+l} \cos^2(2\pi kx/T) dx = \frac{T}{2}$$
$$\int_{-l}^{+l} \sin^2(2\pi kx/T) dx = \frac{T}{2}$$

则:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi kx/T) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi kx/T)$$
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-l}^{+l} f(x) dx$$
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos(2\pi kx/T) dx$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin(2\pi kx/T) dx$$

这里  $a_k, b_k$  系数前多的 2 是因为每个  $\cos$  和  $\sin$  中用了两个  $e^{2\pi i x/T}$ .

### 6.2 Fourier 变换

Fourier 变换就是 Fourier 级数的不可数无穷的推广. 也就是  $C[-\infty, +\infty]$  中以  $e^{ikx}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) 为正交基底的展开. 展开式子的系数为:

$$\frac{\delta(k' - k)}{\langle e_{k'} | e_k \rangle} = \frac{\delta(k' - k)}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-ik'x} dx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(k' - k)}{\delta(k' - k)} = \frac{1}{2\pi}$$

这个系数在不同情况下会按不同的方式分配到正变换和逆变换之中, 这里我们人为规定<sup>1</sup> 系数为  $(a, b)$  的 Fourier 变换指正变换前系数为  $a$ , 逆变换前系数为  $b$ , 只要  $ab = 1/2\pi$  就是合理的系数分配.

若以  $e^{ikx}$  为基底, 则:

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = b \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dx$$

一般而言, 我们取系数  $(a, b)$  为  $(1/2\pi, 1)$  或者  $(1/\sqrt{2\pi}, 1/\sqrt{2\pi})$ , 其中后者又被叫做对称形式的 Fourier 变换.

同理, 我们也可以将  $e^{ikx}$  组合成  $\cos(kx)$  和  $\sin(kx)$  的形式, 也就是以  $\cos(kx)$  和  $\sin(kx)$  为基底展开 ( $k > 0, k \in \mathbb{R}$ ), 此时展开式子的系数为:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(k' - k)}{\langle e_{k'} | e_k \rangle} &= \frac{\delta(k' - k)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(k'x) \cos(kx) dx} \\ &= \frac{\delta(k' - k)}{\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k'+k)x} + e^{i(k'-k)x} + e^{i(k-k')x} + e^{-i(k'+k)x} dx} \\ &= \frac{\delta(k' - k)}{\pi [\delta(k' - k) + \delta(k' + k)]} \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$\sin(kx)$  同理 (只是平移了  $\pi/2$ , 不改变结果). 因此, 系数  $(a, b)$  满足  $ab = 1/\pi$ , 系数前多的 2 是因为每个  $\cos$  和  $\sin$  中用了两个  $e^{2\pi i x/T}$ . 因此:

$$A(k) = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(kx) dx$$

$$B(k) = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

$$f(x) = b \int_0^{+\infty} A(k) \cos(kx) dx + b \int_0^{+\infty} B(k) \sin(kx) dx$$

一般而言, 我们取系数  $(a, b)$  为  $(1/\pi, 1)$  或者  $(1/\sqrt{\pi}, 1/\sqrt{\pi})$ .

### 6.3 Fourier 变换的性质

下面我们仅列举 Fourier 变换的性质, 不给出具体的证明. 记  $F(k) = \mathcal{F}[f(x)]$ :

<sup>1</sup>这个称呼是我自己定义的.

**Theorem 6.3.1** (线性定理). 设  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , 则:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] &= c_1 \mathcal{F}[f_1(x)] + c_2 \mathcal{F}[f_2(x)] \\ \mathcal{F}^{-1}[c_1 F_1(k) + c_2 F_2(k)] &= c_1 \mathcal{F}^{-1}[F_1(k)] + c_2 \mathcal{F}^{-1}[F_2(k)]\end{aligned}$$

**Theorem 6.3.2** (导数定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= ik \mathcal{F}[f(x)] \\ \mathcal{F}^{-1}[F'(k)] &= -ix \mathcal{F}^{-1}[F(k)]\end{aligned}$$

**Theorem 6.3.3** (积分定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int^{(x)} f(x) dx\right] &= \frac{1}{ik} \mathcal{F}[f(x)] \\ \mathcal{F}^{-1}\left[\int^{(k)} F(k) dk\right] &= -\frac{1}{ix} \mathcal{F}^{-1}[F(k)]\end{aligned}$$

**Theorem 6.3.4** (相似定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(ax)] &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right) \\ \mathcal{F}^{-1}[F(ak)] &= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

**Theorem 6.3.5** (延迟定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x - x_0)] &= e^{-ikx_0} \mathcal{F}[f(x)] \\ \mathcal{F}^{-1}[F(k - k_0)] &= e^{ik_0 x} \mathcal{F}^{-1}[F(k)]\end{aligned}$$

**Theorem 6.3.6** (位移定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{ik_0 x} f(x)] &= F(k - k_0) \\ \mathcal{F}^{-1}[e^{ik_0 x} F(k)] &= f(x + x_0)\end{aligned}$$

**Theorem 6.3.7** (卷积定理). 若 Fourier 变换的系数为  $(a, b)$ , 则:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1 * f_2] &= \frac{1}{a} \mathcal{F}[f_1(x)] \mathcal{F}[f_2(x)] \\ \mathcal{F}^{-1}[F_1 * F_2] &= \frac{1}{b} \mathcal{F}^{-1}[F_1(k)] \mathcal{F}^{-1}[F_2(k)]\end{aligned}$$

其中:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$$

称为  $f_1$  和  $f_2$  的卷积.

## Chapter 7

# Laplace 变换

## 7.1 Laplace 变换

前面的 Fourier 变换对  $f(x)$  的要求较高, 需要  $f(x)$  绝对可积. 也就是积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

存在. 这个条件有时过强, 此时我们会使用 and Fourier 变换类似的 Laplace 变换.

Laplace 实际上是将函数以  $e^{px}$  为基底展开, 其中  $p = \sigma + ki, k \in \mathbb{R}$ . 也可以理解为先将函数应用  $e^{-\sigma t}$  使其满足绝对可积后再进行 Fourier 变换.

同时, Laplace 变换常用于初始值问题, 因此函数  $f(t)$  总有  $f(t) = 0$  ( $t < 0$ ).

注意  $e^{\sigma+ki}$  并不是正交基底, 因此我们不能直接通过前面的方法展开, 但是我们可以转化成  $e^{-\sigma t} f(t)$  后再进行 Fourier 变换 (也就是第二种理解方式). 一般而言, 这里的 Fourier 变换系数为  $(1, 1/2\pi)$  (约定俗成), 因此, Laplace 变换和逆变换为:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp\end{aligned}$$

常用函数的 Laplace 变换如下:

- $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad (\text{Re } p > 0)$
- $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$
- $\mathcal{L}[t^n e^{st}] = \frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$

## 7.2 Laplace 变换的性质

类似 Fourier 变换, 下面我们仅列举 Laplace 变换的性质, 不给出具体的证明. 记  $\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t)]$

**Theorem 7.2.1** (线性定理). 设  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , 则:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \\ \mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)] &= c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(p)] + c_2 \mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]\end{aligned}$$



**Theorem 7.2.2** (导数定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= p\bar{f}(p) - f(0) \\ \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}'(p)] &= -t\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]\end{aligned}$$

对于高阶导数, 该定理可推广为:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

**Theorem 7.2.3** (积分定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] &= \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)] \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\int_0^p \bar{f}(p)dp\right] &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]\end{aligned}$$

**Theorem 7.2.4** (相似定理). 设  $a > 0$ , 则:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)] &= \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(ap)] &= \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\end{aligned}$$

**Theorem 7.2.5** (位移定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)] &= e^{-pt_0}\bar{f}(p) \\ \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p-p_0)H(p-p_0)] &= e^{p_0t}f(p)\end{aligned}$$

**Theorem 7.2.6** (延迟定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-p_0t}f(t)] &= \bar{f}(p+p_0) \\ \mathcal{L}^{-1}[e^{-pt_0}\bar{f}(p)] &= f(t-t_0)H(t-t_0)\end{aligned}$$

**Theorem 7.2.7** (卷积定理).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1 * f_2] &= \bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p) \\ \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_1 * \bar{f}_2] &= 2\pi i f_1(t)f_2(t)\end{aligned}$$

其中:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

**Part III**  
**数学物理方程**

## Chapter 8

# 数学物理方程和定解条件

## 8.1 数学物理方程的分类

对于物理学而言，我们常见到的数学物理方程有如下三种：

- 波动方程：波动方程对时间有二阶偏导，对空间有二阶偏导，其一般的形式为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = f$$

- 输运方程：输运方程对时间有一阶偏导，对空间有二阶偏导，其一般的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u = f$$

- 稳定场方程：稳定场方程则描述介质达到稳恒的物理状态，其不随时间变化，与时间无关，其一般形式为：

$$\nabla^2 u = f$$

上述方程中，如果  $f = 0$ ，则称为齐次方程；如果  $f \neq 0$ ，则称为非齐次方程。

## 8.2 定解条件

单给定微分方程，并不能求出场在任何时刻任何位置的大小。我们还需要初始条件（IC）和边界条件（BC）。其中 IC 给出场的初始状态。对于不同的方程，所需要的 IC 也不同。若方程关于  $t$  有  $n$  阶偏导，则需要  $n$  个 IC。这和我们的常微分方程的求解是类似的。

对于前文三种方程而言，波动方程需要两个 IC，即初始场在各位置的大小和各位置的速度： $u(t=0)$  和  $\partial_t u(t=0)$ 。对于输运方程，需要一个 IC，即场在各位置的大小： $u(t=0)$ 。对于稳定场方程则不需要 IC。

而边界条件（BC）的引入是因为我们的 PDE 只描述了场的内部的运动规律，但对于场的边界，其还会和外界相互作用，这一部分的规律我们需要给出，应另外推导，因此，我们还需要 BC 提供场与外界作用的规律。

边界条件和初始条件统称为定解条件。在处理实际的数学物理方程时，归结为在一定的定解条件下求解一定的偏微分方程。

定解问题必须是适当的，应使问题求解满足：解的存在性—问题一定有解；解的唯一性—问题的解是唯一的；以及解的稳定性。

如果在求解数理方程的过程中（假设方程是合理的），解不存在，则可能是定解条件过多。若解出几个解，则可能是定解条件太少。

## Chapter 9

# 积分变换法

### 9.1 Fourier 变换法

Fourier 变换法可用于求解系数与  $x$  无关的 PDE (常用于求解无界或半无界的边界条件的初值问题), Fourier 变换法常常对空间变量  $x$  做 Fourier 变换. 从而将原方程转换为只关于  $t$  的常微分方程, 从而可以求解出原方程解的 Fourier 变换. 最后再通过逆变换得到原始定解问题的解.

设 PDE 的形式为:

$$\begin{aligned}(\hat{L}_x + \hat{L}_t) u(x, t) &= f(x, t) \\ u(x, 0) &= u_0\end{aligned}$$

其中  $\hat{L}_x, \hat{L}_t$  分别是关于  $x, t$  的线性微分算子.

**第一步, 对  $x$  进行 Fourier 变换.** 对方程左右两边关于  $x$  作用 Fourier 变换  $\mathcal{F}$ , 记  $U = \mathcal{F}[u], F = \mathcal{F}[f]$ , 因此, 原方程变为:

$$\hat{L}_t U + AU = F$$

其中  $AU = \mathcal{F}[\hat{L}_x u]$ , 其中 Fourier 变换把微分算符  $\hat{L}_x$  变成代数乘子  $A$ . 这样我们将原先的 PDE 转为一个 ODE.

**第二步, 求解 ODE.** 我们将 IC 也进行 Fourier 变换, 得到:  $U(k, 0) = \mathcal{F}[u_0] = U_0$ , 因此, 原问题转化为一个 ODE 的定解问题:

$$\begin{aligned}\hat{L}_t U + AU &= F \\ U(k, 0) &= U_0\end{aligned}$$

上述 ODE 解得  $\Phi$ .

**第三步, 逆变换得到原问题解.** 下面举一个例子进行演示:

### 9.2 Laplace 变换法

Laplace 变换法可用于求解含时间的偏微分方程定解问题. 对于系数与  $t$  无关的 PDE (常用于求解定义在  $t > 0$  上的初值问题), 对变量  $t$  做 Laplace 变换后, 原方程可以转变为只关于  $x$  的常微分方程. 从而可以求解. 当然这样求解得到的是原始定解问题的像函数, 仍需要做逆变换才能得到原始问题的解.

现在我们将 Fourier 变换后得到的解进行逆变换, 得到原问题的解:

$$u = \mathcal{F}^{-1}[\Phi]$$

设 PDE 的形式为:

$$\left(\hat{L}_x + \hat{L}_t\right) u(x, t) = f(x, t)$$

$$u(x, 0) = u_0$$

$$u(x_1, t) = u_1, \quad u(x_2, t) = u_2$$

下面举一个例子进行演示:

DRAFT

## Chapter 10

# 分离变量法

### 10.1 齐次方程分离变量法

偏微分方程相比常微分方程的一个显著的区别是偏微分方程的未知函数具有多个自变量. 为了把我们不熟悉的偏微分方程转化为常微分方程, 我们假设偏微分方程的解是某种特别的形式:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

也就是由多个一元函数相乘得到. 原先的偏微分方程转为多个一元函数的常微分方程. 这样我们就把求解偏微分方程的问题转化为求解一元函数  $X$  和  $T$  的问题. 这种方法就是分离变量法.

对于任意一个带有齐次边界条件的齐次二元的偏微分方程, 我们可以写为:

$$(\hat{L}_x + \hat{L}_t)u = 0$$

同时带有初值条件和齐次边界条件 (或者周期边界条件). 分离变量法的求解步骤如下:

**第一步, 分离变量.** 设  $u = XT$ , 带入 PDE, 有:

$$(\hat{L}_x + \hat{L}_t)[XT] = T\hat{L}_x[X] + X\hat{L}_t[T] = 0$$

从而有:

$$\frac{\hat{L}_x[X]}{X} = -\frac{\hat{L}_t[T]}{T} = \lambda$$

其中  $\lambda$  是待定常数. ( $\lambda$  可以设成其他形式, 有时设为  $-\lambda$  或者其他形式能简化求解.)

**第二步, 求解本征值问题.** 上述过程我们得到了两个方程:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x[X] &= \lambda X \\ \hat{L}_t[T] &= -\lambda T\end{aligned}$$

我们现在要求解第一个方程, 这个方程加上齐次边界条件被称为常微分方程的本征值问题. 其中得到的函数  $X$  称为本征函数,  $\lambda$  称为本征值. 求解上述方程我们可以得到一组无穷多的解:  $X_1, \dots, X_n, \dots$ , 对应的本征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ .

由前面 §5.4 可以知道, 对于我们常见的方程, 上述实际构成一个 Sturm-Liouville 特征值问题. 其保证了我们的解是线性无关且完备的. 这组本征函数  $X_n$  构成一组完备正交的基底.

**第三步, 求特解, 并进一步求出一般解.** 我们将本征值  $\lambda_n$  带入第二个方程  $\hat{L}_t[T] = -\lambda T$ , 并求出相应的  $T_n$ . 此时我们可以验证, 对于:  $X_n T_n$  都是满足 PDE+BC 的解. 我们称之为特解. 特解的线性组合得到满足 PDE 和 BC 的一般解:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(t) X_n(x)$$

其中  $C_n$  是待定常数 (实际可能有多个常数, 如果是关于  $t$  有二阶偏导则有两个常数. 多个常数类似, 这里以单个常数举例). 上式即方程的一般解.

第四步, 利用本征函数正交性确定叠加系数 现在我们求解满足给定 IC 的解: 也就是, 我们要求:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(0) X_n(x)$$

其中  $u(x, 0)$  是给定的 IC. 这实际上变成了函数在正交基底的展开. 容易通过前面的 §5.3 给出.

综上, 分离变量法成功, 依赖于下面几个条件:

- 本征值问题有解
- 本征函数是完备的
- 本征函数正交

下面给出一个例子作为演示.

## 10.2 非齐次方程齐次化

现在我们来求解非齐次方程, 齐次边界条件的情况. 也就是方程为:

$$(\hat{L}_x + \hat{L}_t) u = f(x, t)$$

配上齐次 BC 的情况. 这里我们有两种处理方法.

**方程齐次化** 容易想到, 按照求解非齐次方程的一般方法, 假设我们能找到其中一个特解  $v$ , 满足原始的 PDE 以及齐次 BC, 则可以假设:

$$u = v + w$$

则  $w$  是相应齐次方程的解. 即  $w$  满足:

$$(\hat{L}_x + \hat{L}_t) w = 0$$

且满足齐次 BC, 同时使得  $u$  满足 IC. 这样我们就将原先的非齐次方程转变为一个齐次方程的定解问题.

**按相应齐次问题本征函数展开** 上述方法要求我们能找到一个特解  $v$  满足 PDE 和齐次 BC. 有时并不是这么容易找到的. 但方程的齐次化总是可以使用的, 因此我们有下面的本征函数展开法.

对于原始方程:

$$(\hat{L}_x + \hat{L}_t) u = f(x, t)$$

我们首先先求本征函数 (满足 BC):

$$\hat{L}_x [X] = \lambda X$$

得到本征函数  $X_n$ , 本征值  $\lambda_n$ . 从而得到解的形式为:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n$$

其中  $T_n$  为待定函数. 我们将非齐次项也是用本征函数展开:

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n$$

带入原始 PDE, 得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \lambda_n T_n + \hat{L}_t [T_n] \right) X_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n$$

同时, 对于 IC, 我们也用本征函数展开:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X_n$$

这样, 对于每一个  $X_n$ , 我们就得到一个 ODE 定解问题:

$$\begin{cases} \lambda_n T_n + \hat{L}_t [T_n] = f_n(t) \\ T_n(0) = u_n \end{cases}$$

求解这组 ODE, 得到  $T_n$ , 从而得到原 PDE 的解:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n$$



## Chapter 11

# 球函数

### 11.1 三维球坐标 Laplace 方程分离变量

考虑三维球坐标下的 Laplace 方程的定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta, \phi) = 0 \\ u(r_0, \theta, \phi) = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

球坐标下的 Laplace 算符为:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

分离变量, 有  $u = R(r) Y(\theta, \phi)$ , 从而有:

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)$$

这里  $-l(l+1)$  是本征值 ( $l = 0, 1, \dots$ ), 这么设是为了之后的求解方便. 我们从而得到如下两个独立的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - l(l+1) R &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + l(l+1) Y &= 0 \end{aligned}$$

其中第一个方程为 Euler 方程, 其通解为:

$$R_l = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

第二个方程为球函数方程. 我们进一步分离变量, 设  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ , 从而球函数方程可以化为:

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\Theta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \frac{1}{\Phi} = -l(l+1) \sin^2 \theta$$

我们假设:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \frac{1}{\Phi} = -m^2$$

从而得到两个方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi &= 0 \\ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta &= 0 \end{aligned}$$

其中第一个方程的通解很容易得到为:

$$\Phi_m = C_m \sin \phi + D_m \cos \phi$$

而第二个方程令  $x = \cos \theta$ , 得到:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

此方程称为  $l$  阶连带 Lerendre 方程. 若  $Y$  与  $\phi$  无关, 也就是  $m = 0$ , 即:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + l(l+1) \Theta = 0$$

此方程为  $l$  阶 Lerendre 方程. 这两个方程我们在后面的章节进行讨论.

## 11.2 Lerendre 方程

$$(1-x^2) y'' - 2xy' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

当  $m = 0$  时在  $[-1, 1]$  上有限解为 Legendre 多项式  $P_l(x)$ . 当  $m \neq 0$  时为连带 Legendre 多项式  $P_l^m(x)$ .

微分表示

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

正交关系

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ln}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_n^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ln}$$

递推关系

$$(2l+1) P_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x)$$

生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r > R \end{cases}$$

## 11.3 球面调和函数

$$Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{cases}$$

正交关系

$$\iint_S Y_l^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2\pi}{2l+1} \delta_{ln}$$

正交归一化球函数

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{2l+1}{4\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$\iint_S Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{nm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ln}$$

## Chapter 12

# 柱函数

### 12.1 Bessel 函数

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \implies y = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x)$$

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2)y = 0 \implies y = C_1 I_m(x) + C_2 K_m(x)$$

$$x^2 y'' + 2xy' + [k^2 r^2 - l(l+1)]y = 0 \implies y = C_1 j_l(x) + C_2 n_l(x)$$

其中方程一为 Bessel 方程, 方程二为虚宗量 Bessel 方程, 方程三为球 Bessel 方程 (解也可以用球 Hankel 函数表示)。

**递推关系** 记  $Z_m(x)$  代表  $m$  阶的 Bessel 函数, Neumann 函数, Hankel 函数. 则有:

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} Z_m(x)] = -x^{-m} Z_{m+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^m Z_m(x)] = x^m Z_{m-1}(x)$$

**渐进行为** 当  $x \rightarrow 0$  时, 有:

$$J_0(x) \rightarrow 1, \quad J_m(x) \rightarrow 0, \quad N_0(x) \rightarrow -\infty, \quad N_m(x) \rightarrow \pm\infty$$

**正交关系** 假设  $k_n \rho_0 = x_n^{(m)}$  ( $x_n^{(m)}$  是  $J_m(x)$  的第  $n$  个零点) 或者  $k_n \rho_0 = x_n^{\prime(m)}$  ( $x_n^{\prime(m)}$  是  $J_m'(x)$  的第  $n$  个零点). 则:

$$\int_0^{\rho} J_m(k_n \rho) J_m(k_l \rho) \rho d\rho = \delta_{nl} [N_n^{(m)}]^2$$

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2} \left( \rho_0^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) [J_m(k_n \rho_0)]^2 + \frac{1}{2} \rho_0^2 [J_m'(k_n \rho_0)]^2$$

函数类型	符号	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow +\infty$
第一类贝塞尔	$J_m$	0 (当 $m = 0 \Rightarrow 1$ )	振荡
第二类贝塞尔 (诺伊曼)	$N_m$	发散	振荡
第一类修正贝塞尔	$I_m$	0 (当 $m = 0 \Rightarrow 1$ )	发散
第二类修正贝塞尔	$K_m$	发散	0
球贝塞尔	$j_l$	0 (当 $l = 0 \Rightarrow 1$ )	0
球诺伊曼	$n_l$	发散	0

## Chapter 13

# 常见方程通解

### 13.1 Laplace 方程

二维极坐标 注:  $m = 0$  时特解为  $\{1, \ln \rho\}\{1, \phi\}$ .

$$u(\rho, \phi) \sim \begin{Bmatrix} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

球坐标

$$u(r, \theta, \phi) \sim \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{Bmatrix} \{P_l^m(\cos \theta)\} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

柱坐标 (z 轴指数) 径向为普通贝塞尔函数, 轴向为指数函数.

$$u(\rho, \phi, z) \sim \begin{Bmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \exp(kz) \\ \exp(-kz) \end{Bmatrix}$$

柱坐标 (z 轴震荡) 径向为修正贝塞尔函数, 轴向为三角函数.

$$u(\rho, \phi, z) \sim \begin{Bmatrix} I_m(k\rho) \\ K_m(k\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos kz \\ \sin kz \end{Bmatrix}$$

### 13.2 Helmholtz 方程

二维极坐标 特征: 径向为贝塞尔函数, 变数为  $k_0\rho$ .

$$u(\rho, \phi) \sim \begin{Bmatrix} J_m(k_0\rho) \\ N_m(k_0\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

球坐标

$$u(r, \theta, \phi) \sim \begin{Bmatrix} j_l(k_0r) \\ n_l(k_0r) \end{Bmatrix} \{P_l^m(\cos \theta)\} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

柱坐标 (z 轴指数) 记  $k_\rho = \sqrt{k_0^2 + k_{nz}^2}$

$$u(\rho, \phi, z) \sim \begin{Bmatrix} J_m(k_\rho\rho) \\ N_m(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \exp(k_{nz}z) \\ \exp(-k_{nz}z) \end{Bmatrix}$$

柱坐标 (z 轴震荡) 记  $k_\rho = \sqrt{k_0^2 - k_{nz}^2}$

$$u(\rho, \phi, z) \sim \begin{Bmatrix} J_m(k_\rho\rho) \\ N_m(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k_{nz}z \\ \sin k_{nz}z \end{Bmatrix}$$

## Part IV

## 杂七杂八

## Chapter 14

# Lame 系数与任意正交坐标系下算符

### 14.1 Lamé 系数介绍

作为开始, 我们知道三维直角坐标下的梯度、旋度、散度、Laplace 算符:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

我们希望能直接写出任意曲线坐标 (主要是球坐标、柱坐标) 的上述四个算符的形式. 这里我们对曲线坐标提出一些要求: **坐标中任意位置的基矢相互正交**. 也就是要求坐标系是正交坐标系. 不难验证, 球坐标, 柱坐标都满足此要求.

对于任意三维的正交坐标系, 我们总可以将某一位置邻域的线元写成如下形式 (这是由基矢相互正交的性质保证的):

$$ds = \sqrt{(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2}$$

其中,  $dq_i$  是沿着  $\mathbf{e}_i$  方向的小位移,  $h_i$  就是  $q_i$  对应的 Lamé 系数.

上述介绍比较抽象, 这里以常用的坐标系作为例子. 对于直角坐标, 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

因此  $x, y, z$  的 Lamé 系数分别是 1, 1, 1.

对于柱坐标, 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2}$$

因此  $r, \theta, z$  的 Lamé 系数分别是 1,  $r$ , 1.

同理, 对于球坐标 (这里遵循物理的习惯, 令  $\theta$  为天顶角), 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2}$$

因此  $r, \theta, \phi$  的 Lamé 系数分别是 1,  $r$ ,  $r \sin \theta$ .

我们可以证明, 一旦我们为某个正交坐标系  $(q_1, q_2, q_3)$  找到了其 Lamé 系数  $h_1, h_2, h_3$  则可以直接得到:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]\end{aligned}$$

下面我们给出一个几何上的直观理解，并通过微分形式推导上述结论<sup>1</sup>。

## 14.2 几何理解

### 14.3 使用微分形式推导

我们考虑一个任意的正交坐标系  $(q^1, q^2, q^3)$ . 位置矢量  $\mathbf{r}$  表示为  $(q^1, q^2, q^3)$ . Lamé 系数  $h_i$  定义为切矢量基底的模长:

$$h_i = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}}$$

由此，我们可以定义一组标准正交基  $\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ . 从而得到线元矢量和弧长微元为:

$$d\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = h_i \mathbf{e}_i dq^i, \quad ds^2 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) dq^i dq^j = (h_i dq^i)^2$$

此时度规张量  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  在这个正交基下是对角的:

$$g = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}, \quad g_{ii} = h_i^2$$

与切矢量基底  $\mathbf{e}_i$  对偶的 1-形式基底是  $dq^i$ . 我们引入一组归一化的 1-形式基底

$$\omega^i = h_i dq^i$$

这组基是正交归一的，满足  $\langle \omega^i, \omega^j \rangle = \delta^{ij}$ . 其体积形式是

$$\text{vol} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3$$

下面我们介绍霍奇星算子. 霍奇星算子  $\star$  是一个从  $k$ -形式到  $(n-k)$ -形式的映射. 在当前的三维正交坐标系下，使用归一化的基底  $\omega^i$ ，其作用如下:

$$\star 1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \text{vol}$$

$$\star \omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$\star (\omega^1 \wedge \omega^2) = \omega^3$$

$$\star (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) = 1$$

<sup>1</sup>当然，肯定有不太“高级”的证明方法，只是我比较喜欢通过微分形式来证明，同时通过微分形式证明是比较本质的（微分形式不依赖坐标系）。



一个重要的性质是  $\star\star\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$ . 在三维空间中 ( $n = 3$ ), 对 1-形式 ( $k = 1$ ) 和 2-形式 ( $k = 2$ ), 我们有  $\star\star\omega = \omega$ .

最后, 通过度规, 我们可以建立矢量场和微分形式之间的对应关系, 这被称为音乐同构 (Musical Isomorphism).

- 降号 (flat)  $\flat$ : 从矢量场  $\mathbf{V}$  得到 1-形式  $\mathbf{V}^\flat$ . 给定矢量场  $\mathbf{V} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2 + V^3\mathbf{e}_3$ , 其对应的 1-形式为:

$$\mathbf{V}^\flat = V_1\omega^1 + V_2\omega^2 + V_3\omega^3 = V_1h_1dq^1 + V_2h_2dq^2 + V_3h_3dq^3$$

其中  $V_i$  是矢量场  $\mathbf{V}$  在正交基  $\mathbf{e}_i$  下的分量.

- 升号 (sharp)  $\sharp$ : 从 1-形式  $\omega$  得到矢量场  $\omega^\sharp$ .

### 14.3.1 梯度

梯度  $\nabla f$  是一个矢量场, 其定义来自于标量函数  $f$  (一个 0-形式) 的外微分  $df$  (一个 1-形式):

$$\nabla f \equiv (df)^\sharp$$

首先, 我们计算  $f$  的外微分:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial f}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial f}{\partial q^3}dq^3$$

为了将其转换为矢量场, 我们需要将其表示为  $\sum_i V_i\omega^i = \sum_i V_ih_idq^i$  的形式:

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \omega^i$$

这是一个 1-形式, 其在基底  $\omega^i$  下的分量为  $\frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q^i}$ . 通过升号运算  $\sharp$ , 我们得到对应的矢量场, 其在正交基  $\mathbf{e}_i$  下的分量就是这些系数. 因此,

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \mathbf{e}_3$$

### 14.3.2 旋度

旋度  $\nabla \times \mathbf{F}$  作用于一个矢量场  $\mathbf{F}$ , 产生另一个矢量场. 在微分形式中, 它通过以下步骤定义:

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv (\star(d(\mathbf{F}^\flat)))^\sharp$$

给定  $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$

第一步, 转换为 1-形式

$$\mathbf{F}^\flat = F_1\omega^1 + F_2\omega^2 + F_3\omega^3 = (F_1h_1) dq^1 + (F_2h_2) dq^2 + (F_3h_3) dq^3$$

第二步, 取外微分

$$d(\mathbf{F}^b) = d(F_1 h_1) \wedge dq^1 + d(F_2 h_2) \wedge dq^2 + d(F_3 h_3) \wedge dq^3$$

展开  $d(F_i h_i) = \sum_j \frac{\partial(F_i h_i)}{\partial q^j} dq^j$  并利用反对称性:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{F}^b) &= \left( \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial q^3} \right) dq^2 \wedge dq^3 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial q^1} \right) dq^3 \wedge dq^1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial q^2} \right) dq^1 \wedge dq^2 \end{aligned}$$

第三步, 应用霍奇星算子并转换回矢量场

$$\begin{aligned} \star(d(\mathbf{F}^b)) &= \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial q^3} \right) \omega^1 \\ &\quad + \frac{1}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial q^1} \right) \omega^2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial q^2} \right) \omega^3 \end{aligned}$$

通过升号  $\sharp$  运算, 我们得到旋度矢量场的表达式:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix}$$

### 14.3.3 散度

散度  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  作用于一个矢量场  $\mathbf{F}$ , 产生一个标量函数 (0-形式)。其定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \star d(\star(\mathbf{F}^b))$$

经过类似步骤, 最终得到:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left( F_i \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \right)$$

### 11.3.4 Laplace 算子

拉普拉斯算子  $\nabla^2 f$  作用于标量函数  $f$ , 定义为梯度的散度:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \star d \star df$$

代入上式可得:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \right]$$

这就是在任意正交坐标系下, 拉普拉斯算子作用于标量函数  $f$  的最终表达式。

## Chapter 15

# Euler 微分方程

Euler 微分方程, 是指如下形式的特殊的变系数线性微分方程:

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} x y' + P_n y = 0$$

其中  $P_1, \dots, P_n$  为常数. 解这一类方程的通用方法是令  $x = e^t$ . 记  $D \equiv \frac{d}{dt}$  为微分算子, 则:

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} D y \implies x y' = D y$$

同理有:

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= D(D-1)y \\ x^3 y''' &= D(D-1)(D-2)y \\ &\vdots \\ x^n y^{(n)} &= D(D-1)\cdots(D-n+1)y \end{aligned}$$

从而将原方程转化为一个关于  $t$  的常系数线性微分方程, 最后再用  $t = \ln x$  反代就能得到原方程的解.

对于方程:

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} x y' + P_n y = 0$$

通过上面代换有  $P(D)y = 0$ , 其中:

$$P(D) = \sum_{k=0}^n P_k D(D-1)\cdots(D-k+1)$$

其中  $P_0 = 0$ ,  $P_k$  为常数. 方程  $P(\lambda) = 0$  称为原方程的特征方程. 其根为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . 因此:

- 若  $\lambda_k$  为单实根, 其对应的线性独立解为:

$$y_k = x^{\lambda_k}$$

- 若  $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+m} = \lambda$  为重数为  $m$  的根, 则对应的线性独立解为:

$$y_k = x^\lambda, \quad y_{k+1} = x^\lambda \ln x, \dots, y_{k+m} = x^\lambda \ln^{m-1} x$$

- 若  $\lambda_k, \lambda_{k+1}$  为一对复根  $\alpha + \beta i$  (假设重数为 1), 则对应的线性独立解为:

$$y_k = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \quad y_{k+1} = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

若复根为重根则类似第二种情况, 还要乘上相应的  $\ln^m x$  项.

对于非齐次的情况, 也是类似, 通过变量替换  $x = e^t$  后转变为常系数非齐次线性微分方程求解.

## Chapter 16

# Feynman 积分法

### 16.1 Feynman 积分法的基本原理

简单来说,“费曼积分法”或者说“含参积分法”的重点就是对积分求导再积回去.上述说法比较抽象,这里使用一个简单的例题引入:

**Example 16.1.1.** 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

**Solution.** 显然,上述积分不方便求出原函数求解,这里我们设:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx$$

原积分就是  $I(1)$ . 我们有:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)} dx \\ &= -\frac{1}{a^2+1} \ln(a+1) + \frac{1}{a^2+1} \cdot \frac{\ln 2}{2} + \frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

又因为  $I(0) = 0$ , 因此:

$$\begin{aligned} I(1) &= I(1) - I(0) \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{a^2+1} \ln(a+1) + \frac{1}{a^2+1} \cdot \frac{\ln 2}{2} + \frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{\pi}{4} da \\ &= -I(1) + \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \ln 2 \\ \Rightarrow I(1) &= \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

□

这就是 Feynman 积分法的精髓,本质上就是先积后导或先导后积的过程.

使用 Feynman 积分法的过程中,参数位置的不恰当会导致设出的积分不收敛;而在无穷区间上,对含参积分的参数求导需要证明反常积分的一致收敛性,理论上来说是一定要说明一致收敛性的.但在实际上,我们基本上不会遇到不一致收敛的情况,因此我们一般也不进行一致收敛的判别.

## 16.2 确定参数位置

参数位置的选取是 Feynman 积分法绝对的关键, 有时不同的参数位置会导致天壤之别的计算量, 或无法进行有效计算. 虽说这是一个偏向于经验性的工作, 但我们还是能总结一些技巧:

- **可与分母抵消的结构:** 若被积函数出现  $f(g(x))/g(x)$  的形式, 我们可以引入参数如下:

$$I(a) = \int \frac{f(a \cdot g(x))}{g(x)} dx$$

- **正反方向推测含参结构:** Feynman 积分法是所求积分为含参积分的参数等于某定值时的结果, 也可以将所求积分看作其含参积分求导得到的. 如果是前者, 那么流程为先导后积. 如果是后者, 则先积后导. 我们可以考虑如下分类:
  - 如果被积函数中出现  $\ln x$ , 如同绪论中的求法, 则可以考虑含参在指数上的结构
  - 如果被积函数分母上出现整体的高次项 (假设为  $k$  次), 则可以考虑分母为  $k-1$  甚至  $k-n$  次的含参积分 (此时可能存在需要高阶导数的 Feynman 积分的情况)
  - 如果  $\ln x, \ln(1-x)$  或二者相乘与  $x^a(1-x)^b$  同时出现, 可以考虑 Beta 函数构型.

## 16.3 收敛因子

有些积分需要引入收敛因子来求解, 例如如下例题:

**Example 16.3.1.** 求解 Dirichlet 积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

**Solution.** 我们引入含参收敛因子  $e^{-ax}$ , 因此:

$$(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

所求即  $I(0)$ , 且  $I(+\infty) = 0$ . 因此:

$$\begin{aligned} I'(a) &= - \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-ax} dx = - \frac{1}{a^2 + 1} \\ \Rightarrow I(+\infty) - I(0) &= -I(0) = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{a^2 + 1} da = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

综上:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

□

这样一来我们就可以解决形如  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$  和  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$  等积分了.

## 16.4 微分方程构型

有些情况, 我们通过简单的求导或积分, 得不到能计算出具体值的结果, 但又可以发现求导之后的积分和原积分有联系, 所以构造出微分方程求解积分也是我们的一种方法.

**Example 16.4.1.** 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx$$

**Solution.** 构造:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx$$

所求即  $I(1)$ , 且  $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 因此:

$$\begin{aligned} I'(a) &= - \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \sin(2ax) dx \\ &= \left[ e^{-x^2} \cos(2ax) \right]_0^{+\infty} - 2a \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx \\ &= -2aI(a) \end{aligned}$$

$I'(a) + 2aI(a) = 0$  这是一阶常系数线性微分方程, 非常容易求得:  $I(a) = Ce^{-a^2}$ , 带入初值  $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 解得  $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ,  $\Rightarrow I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$ .

带入  $a = 1$ :

$$I(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}$$

□

此方法简单来说即能通过有限次求导, 重现出原积分的含参积分, 例如三角函数和双曲三角函数  $\sin(x)$ ,  $\sinh(x)$  等.

## Chapter 17

# Glasser 主定理

### 17.1 Glasser 主定理介绍

Glasser 主定理是在 Cauchy 积分主值意义下的积分化简方法.

**Theorem 17.1.1** (Glasser 主定理). 设  $\{a_n\} \in \mathbb{R}^+$ ,  $\{b_n\} \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , 则在 Cauchy 主值意义下, 有如下积分恒等式:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(u(x)) dx = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

其中

$$u(x) = c + x - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x - b_k}$$

**Proof.** 观察积分可知共有  $n$  个断点, 均为数列  $\{b_n\}$  的取值, 所以数列顺序并不影响间断点的事实, 因此不妨设数列  $\{b_k\}$  单调, 求导得

$$u'(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(x - b_k)^2} > 0$$

所以  $u(x)$  恒单调递增, 但是在由数列  $\{b_n\}$  分割的各个区间内单调递增, 从而在每个小区间上各存在连续、光滑的反函数, 依次记为  $x_1(u), \dots, x_{n+1}(u)$ , 分区间可得积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u(x)) dx = \int_{-\infty}^{b_1} f(u(x_1)) dx_1 + \int_{b_1}^{b_2} f(u(x_2)) dx_2 + \dots + \int_{b_n}^{\infty} f(u(x_{n+1})) dx_{n+1}$$

由反比例函数的性质, 上式各区间令  $u(x_k) = u$ , 则  $x_k = x_k(u)$ ,  $dx_k = \frac{dx_k(u)}{du} du$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{dx_1(u)}{du} du + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{dx_{n+1}(u)}{du} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \frac{dx_1(u)}{du} + \frac{dx_2(u)}{du} + \dots + \frac{dx_{n+1}(u)}{du} \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{d}{du} (x_1(u) + x_2(u) + \dots + x_{n+1}(u)) du \end{aligned}$$

将  $u(x)$  的表达式两边同乘  $(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , 并移项, 得:

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) (x - u + c) - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j \neq k} (x - b_j) = 0$$

即

$$x^{n+1} - \left( -cu + \sum_{k=1}^n b_k \right) x^n + \dots = 0$$

此方程的  $n+1$  个根就是各个区间上的反函数  $x_k(u)$ , 故可由高次 Vieta 定理:

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = -c + u + \sum_{k=1}^n b_k \Rightarrow \frac{d}{du} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) = 1$$

综上:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(c+x-\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x-b_k}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du$$

□

**Theorem 17.1.2** (Glasser 主定理推广). *Glasser* 主定理可进行如下推广:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x-b_k}\right) dx = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) du$

- 若  $f(x)$  是偶函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(2k)!(n-k)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} f(x) dx$$

- 若对  $n$  个分式的求和取极限, 则可考虑将函数按 *Mittag-Leffler* 展开

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x \frac{a+x}{b+x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx + (b-a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (a > b)$

## 17.2 Glasser 主定理应用

**Example 17.2.1.** 计算积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

**Solution.** 将该积分区间拆分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

倒带换:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} dx \end{aligned}$$

由 *Glasser* 主定理:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

□

**Example 17.2.2.** 已知  $\cot x$  的 *Mittag-Leffler* 展开为:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right)$$

计算:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \cot x + \csc^2 x} dx$$



**Solution.** 观察被积函数, 很像完全平方式的一部分, 所以解题方向为凑完全平方:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - \cot x)^2 + 1} dx$$

而  $\cot x$  的 Mittag-Leffler 展开为:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right)$$

符合 Glasser 主定理的使用条件, 故:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

□

## Chapter 18

# Lobachevsky 积分法

### 18.1 Lobachevsky 积分法介绍

Lobachevsky 积分法同样是在 Cauchy 积分主值意义下的积分化简方法, 是一种应对并化简  $\sin x/x$  这类结构积分的利器.

**Theorem 18.1.1** (Lobachevsky 积分法).

$$\int_0^\infty f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot g_n(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中,  $f(x)$  是以  $\pi$  为周期的偶函数, 函数  $g_n(x)$  定义为:

$$g_n(x) = \sin^n x \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \begin{cases} \csc x & n = 2k+1 \\ \cot x & n = 2k \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{N}^+)$$

注:

$$\begin{aligned} \csc x &= \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{-n^2\pi^2 + x^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right) \\ \cot x &= \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n^2\pi^2 + x^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right) \end{aligned}$$

**Proof.**

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \int_{k\pi}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+k\pi) \left( \frac{\sin(x+k\pi)}{x+k\pi} \right)^n dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x+k\pi) \left( \frac{\sin(x+k\pi)}{x+k\pi} \right)^n dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \left[ f(x) \left( \frac{1}{x^n} + \sum_{k=1}^N (-1)^{nk} \left( \frac{1}{(x+k\pi)^n} + \frac{1}{(x-k\pi)^n} \right) \right) \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin^n x \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{nk} \left( \frac{1}{x+k\pi} + \frac{1}{x-k\pi} \right) \right] dx \end{aligned}$$

当  $n$  是奇数时,  $(-1)^{nk} = (-1)^k$ , 根据所给级数定义, 方括号中的函数为:  $\csc x$ ; 当  $n$  是偶数时,  $(-1)^{nk} = 1$ , 方括号中的函数为:  $\cot x$ .

综上, 命题得证. □

**Remark 18.1.1.** 此公式最常用的是  $n = 1, 2$  的情况: 当  $f(x)$  满足  $T = \pi$ , 且是偶函数时, 公式为:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

除此之外, 我们再补充一个原理略有不同但也常用的定理:

**Theorem 18.1.2** (补充定理).

$$\int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$$

其中,  $f(x)$  是满足  $f(x \pm \pi) = -f(x)$  的偶函数.

## 18.2 Lobachevsky 积分法应用

**Example 18.2.1.** 计算积分:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\tan x)}{x^2} dx$$

**Solution.** 原积分有:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\tan x)}{\sin^2 x} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\tan x)}{\sin^2 x} \sin^2 x (-1) (\cot x)' dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\tan x)}{\sin^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du \\ &= \pi \end{aligned}$$

□

**Example 18.2.2.** 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln \cos^2 x}{x^2} dx$$

**Solution.** 原积分有:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln \cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos^2 x}{\sin^2 x} (-1) (\cot x)' dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos^2 x}{\sin^2 x} dx \\ &= -2 \cot x \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cot x) (-\tan x) dx \\ &= -\pi \end{aligned}$$

□

**Example 18.2.3.** 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin^2 2x}{x^3} dx$$

**Solution.** 原积分有:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^3 \cos^2 x dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \frac{(-1)^{3-1}}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{dx^{3-1}} (\csc x) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \left( \frac{\sin x}{\sin^2 x} + 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \right) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \\ &= \frac{7\pi}{8} \end{aligned}$$

□