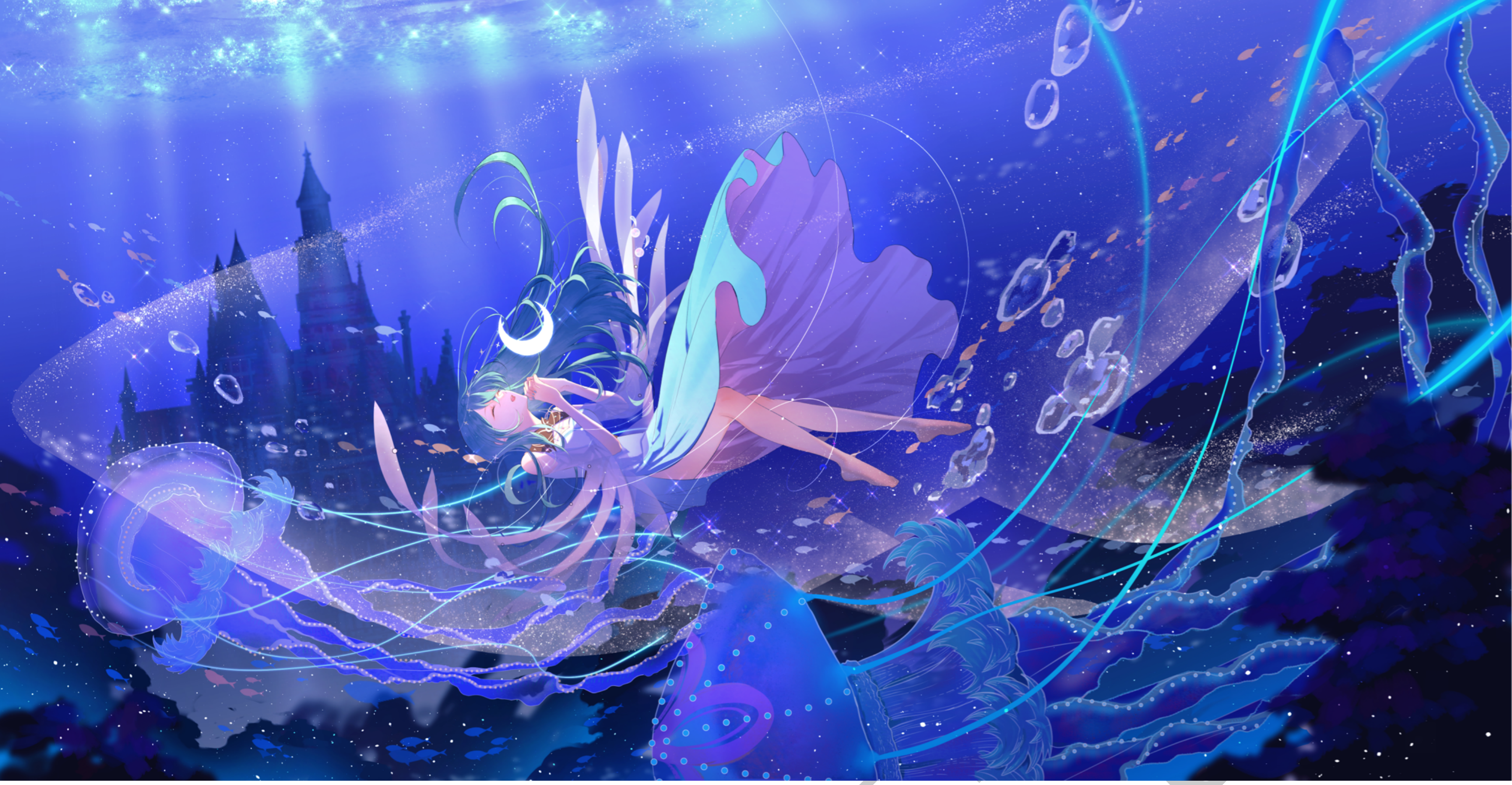


高等数学笔记及随想

作者：Guotao He

编译时间：2024-06-22

本文档在如下链接更新：https://ghe0000.github.io/Cloud/notes，可以随意私下传播[1]，但请勿上传至公共网络（尤其是百度文库等网站）.

本文档为个人的笔记和随想整理，虽然本文为了行文方便，同时加深自己的理解，本文假设了读者的存在，但这毕竟只是一个笔记，我不保证此文档完全正确. 如果发现了任何事实错误，或者发现行文难以理解的地方，希望能及时指出和反馈（邮箱：guotao.he.0000@outlook.com）. 同时，严谨性和易懂性永远是对立互补的，本文为了易懂，同时为了便于在实际中使用，难免会牺牲一定的严谨性，同时会略去一些证明和一般成立的条件，还请读者（尤其是数学系的读者）包容.

Not Published

[1] 当然，更好的方法是使用前文链接进行分享，从而确保获得最新的版本.

目录

Chapter 1 常用公式 **1**

1.1 常用因式分解 1

1.2 同角三角函数基本关系式 1

1.3 辅助角公式 2

1.4 积化和差和和差化积 2

1.5 三角函数和指数函数转化 2

1.6 其他常用结论 2

1.7 重要极限 3

1.8 常用导数公式 3

1.9 常用高阶导数公式 3

1.10 常用 Taylor 展开 4

1.11 常用新函数构造 4

1.12 常用不定积分表 5

1.13 常用定积分 6

1.14 常用微分方程的求解 6

1.15 常见非初等积分 6

Chapter 2 解题技巧 **8**

2.1 幂指函数求极限 8

2.2 求导技巧 8

2.2.1 对数求导法 8

2.2.2 高阶导数 9

2.3 构造新函数 10

2.4 不动点与递推数列极限 10

2.5 积分小技巧 12

2.5.1 符号函数与带绝对值积分 12

2.5.2 变量倒代换 13

2.5.3 指数构成的有理函数换元 13

2.5.4 三角函数积分有理化 13

2.5.5 分部积分技巧 14

2.6 分部积分表格法 16

2.7 有理函数积分 16

2.7.1 引入 16

2.7.2 四种部分分式的积分 18

2.7.3 其他函数转化为有理函数 20

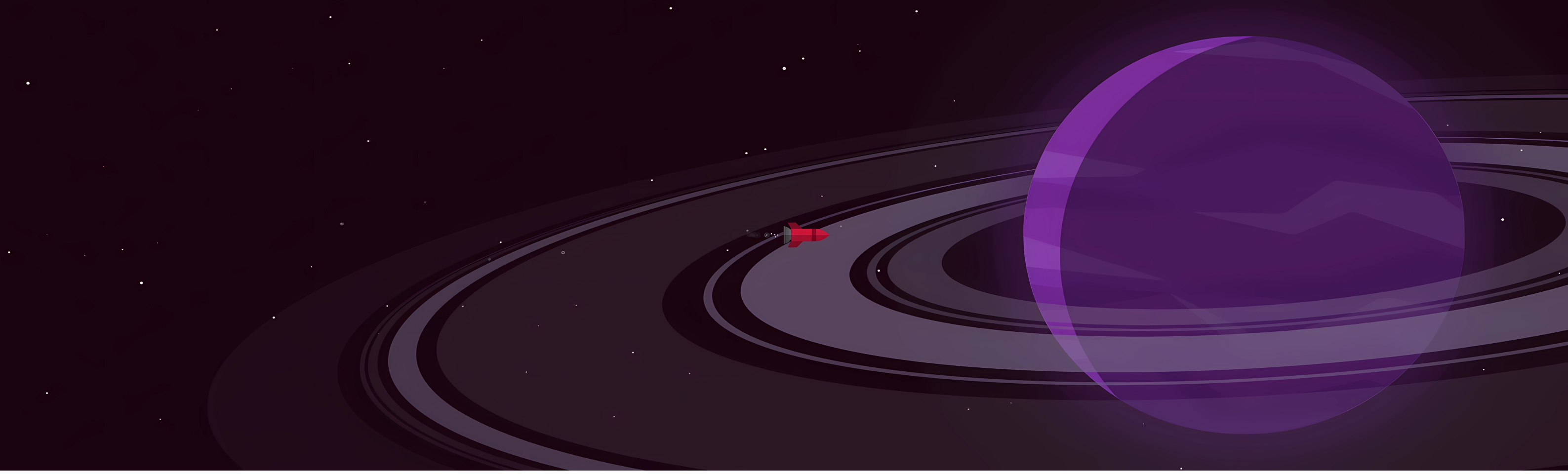
2.7.4 对于 $1/(x^n + 1)$ 的积分 21

2.8 留数法进行部分分式分解 23

2.8.1 分母为一次函数的幂 23
2.8.2 分母为二次函数的幂 25
2.9 对数法计算有理函数 26
2.10 模法进行部分分式分解 27
2.10.1 模运算简介 27
2.10.2 分母为单因式 28
2.10.3 分母为重因式 28
2.11 组合积分法 29
2.12 双元法 31
2.13 区间再现 34
2.14 Feynman 积分法 35
2.15 留数定理及求实函数积分 37
2.15.1 两个有用的引理 37
2.15.2 Laurent 展开和留数 38
2.15.3 留数定理及求实函数积分 41
2.16 微分算子法 43
2.16.1 算子与微分算子的引入 43
2.16.2 二阶常系数非齐次微分方程通解和特解 43
2.16.3 多项式微分算子的性质以及不同情况下求特解方法 44

Chapter 3 杂七杂八 51
3.1 Heine 定理 51
3.2 无穷多无穷小乘积 51
3.3 极限换序 53
3.4 等价无穷小相加减的讨论 54
3.5 高阶导数与极值点和拐点 55
3.6 有关 $1/x$ 的不定积分的讨论 56
3.7 Leibniz 积分法则 56
3.8 浅谈齐次 58
3.9 Pappus 定理 58
3.10 三角函数、双曲函数与 Osborn 法则 61
3.11 积分型余项的 Taylor 展开 61
3.12 Stolz 定理 62
3.13 极简外微分 62

Chapter 4 疯言疯语 66
4.1 从线性代数看 Taylor 展开 66
4.1.1 Dirac 函数的基本介绍 66
4.1.2 函数矢量与函数空间 67
4.1.3 从函数空间到 Taylor 展开 67
4.2 一种求 $\ln x$ 比值极限的方法 68
4.3 曲线序列极限的长度和曲线长度的序列极限 69
4.4 $y = y' + y'' + y''' + \cdots$ 70
4.5 浅谈微分方程和线性代数之间关系 71



Chapter 1

常用公式

1.1 常用因式分解

- $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$
- $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}\right)$
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n \quad \left(C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}\right)$

1.2 同角三角函数基本关系式

对于同角三角函数，有助记图如下图 1.2.1：

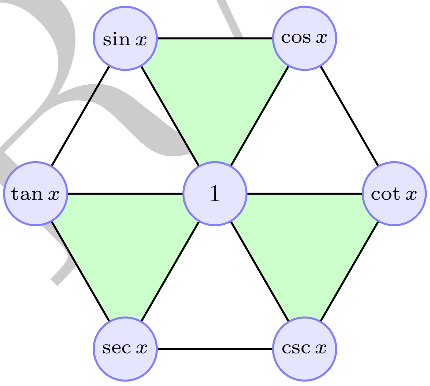


图 1.2.1: 同角三角函数助记图

1.倒数关系： 三条对角线的三角函数互为倒数，即：

$$\sin x \cdot \csc x = 1, \quad \cos x \cdot \sec x = 1, \quad \tan x \cdot \cot x = 1$$

2.平方关系： 三个绿色三角形的上面两顶点的平方和等于下面顶点的平方，即：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

3.乘积关系： 每个顶点都等于其相邻两个顶点的乘积，即：

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x, \quad \cos x = \sin x \cdot \cot x, \quad \cot x = \cos x \cdot \csc x$$

$$\csc x = \cot x \cdot \sec x, \quad \sec x = \csc x \cdot \tan x, \quad \tan x = \sin x \cdot \sec x$$

1.3 辅助角公式

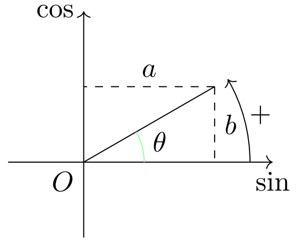


图 1.3.1: 辅助角公式助记图

辅助角公式有助记图 1.3.1 所示，注意图中正方向的标注.

$$
\begin{aligned}
a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\frac{b}{a}\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\arctan\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $\theta = \arctan\dfrac{b}{a} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{a}{b}$

1.4 积化和差和和差化积

有记忆口诀如下：S 相加 SC，S 相减 CS，CC 相加正 CC，CC相减负 S.

积化和差

- $\sin a\cos b = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
- $\cos a\sin b = \dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
- $\cos a\cos b = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$
- $-\sin a\sin b = \dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}$

和差化积

- $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a + \cos b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

1.5 三角函数和指数函数转化

$$
\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \tan x = \frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}
$$

- $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

- $\operatorname{arsinh} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
- $\operatorname{arcosh} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
- $\operatorname{artanh} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

1.6 其他常用结论

- $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2-4ac$

1.7 重要极限

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

1.8 常用导数公式

- $(C)'=0 \quad (C=\text{Constant})$
- $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
- $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\tan x)'=\sec^2 x$
- $(\cot x)'=-\csc^2 x$
- $(\sec x)'=\sec x\tan x$
- $(\csc x)'=-\csc x\cot x$
- $(x^a)'=ax^{a-1}$
- $(a^x)'=a^x\ln a$
- $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$
- $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

- $(\sinh x)'=\cosh x$
- $(\cosh x)'=\sinh x$
- $(\tanh x)'=\operatorname{sech}^2 x$
- $(\coth x)'=-\operatorname{csch}^2 x$
- $(\operatorname{arsinh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{artanh} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$

1.9 常用高阶导数公式

- $(x^a)^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n} \quad (a\geq n)$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{(n+1)}}$
- $(\ln(x))^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\dfrac{(n-1)!}{x^n}, \quad (\ln(x))^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n-1)}$
- $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
- $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

在求高阶导数时，常常使用如下公式

Theorem 1.9.1 (Leibniz 公式)**.**

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

其中

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

对于求多项式 $u(x)$ 乘一般函数 $v(x)$ 的函数的高阶导数时，常采用 Leibniz 公式进行展开，由于多项式 $u(x)$ 在求到多项式次数的导数后其为常数，再求一次导数则为 0 ，故包含此类高阶导数

的项恒为 0，从而简化计算.

1.10 常用 Taylor 展开

在求极限或求高阶导数时，常常用到 Taylor 展开（带 Peano 余项）

Theorem 1.10.1 (Taylor 展开)**.**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0))^2 \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left[(x - x_0)^n\right]$$

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $sinx = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$
- $cosx = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$
- $ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)} + o(x^{2m})$
- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$
- $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$

1.11 常用新函数构造

在使用 Rolle 定理，Lagrange 中值定理证明某些结论时，常常会用到如下新函数（辅助函数）的构造方法[1].

- 对于 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$，构造 $F(x) = f(x)g(x)$.
- 对于 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$，构造 $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
- 对于 $xf'(x) + f(x)$，构造 $F(x) = xf(x)$.
- 对于 $xf'(x) - f(x)$，构造 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
- 对于 $x^n f'(x) + nx^{n-1}f(x)$，构造 $F(x) = x^n f(x)$.
- 对于 $x^n f'(x) - nx^{n-1}f(x)$，构造 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$.
- 对于 $f'(x) + f(x)$，构造 $F(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.
- 对于 $f'(x) - f(x)$，构造 $F(x) = \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$.

[1] 更通用的构造方法见 §2.3.

1.12 常用不定积分表

- $\displaystyle\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
- $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0)$

- $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\displaystyle\int \tan x \sec x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$
- $\displaystyle\int \cot x \csc x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$
- $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
- $\displaystyle\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
- $\displaystyle\int \sec x \,\mathrm{d}x = \operatorname{artanh} \sin x + C$

  注：$\operatorname{artanh} \sin x = \ln|\tan x + \sec x| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$
- $\displaystyle\int \csc x \,\mathrm{d}x = -\operatorname{artanh} \cos x + C$

  注：$-\operatorname{artanh} \cos x = -\ln|\cot x + \csc x| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn} x \operatorname{arcosh}|x| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

除了上面这些基本的积分外，还有如下常用的积分：

记 $Y = ax^2 + bx + c$，$\Delta = b^2 - 4ac$，$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{Y} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \dfrac{Y'}{\sqrt{-\Delta}} + C & \text{if } \Delta < 0 \\ \dfrac{-2}{Y'} + C & \text{if } \Delta = 0 \\ \dfrac{1}{a(x_1 - x_2)} \ln\left|\dfrac{x - x_1}{x - x_2}\right| + C & \text{if } \Delta > 0 \end{cases}$$

记 $Y = ax^2 + bx + c$，$\Delta = b^2 - 4ac$，$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{Y}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|Y' + 2\sqrt{aY}\right| + C & \text{if } a > 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \dfrac{Y'}{\sqrt{\Delta}} + C & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

记 $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$，则由分部积分法有：

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} J_{n-1}$$

其中 $J_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$.

1.13 常用定积分

记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$ ，其中 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$，有

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\frac{0}{1} = \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{if } n \text{ 为奇数} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \text{if } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

上式即常用的 **Wallis 公式**.

1.14 常用微分方程的求解

对于一阶线性微分方程 $y'' + p(x)y = q(x)$，记

$$P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x, \quad Q(x) = \int q(x) \cdot \mathrm{e}^{P(x)}\,\mathrm{d}x$$

上述方程有通解（其中 $C = \text{Constant}$）：

$$y = \mathrm{e}^{-P(x)}(Q(x) + C)$$

对于 $y'' = f(y', x)$，做换元 $p = y'$，则 $y'' = p'$.

对于 $y'' = f(y, y')$，做换元 $p = y'$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

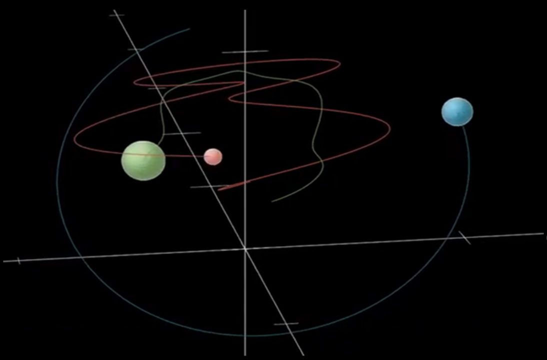
对于高阶常系数齐次微分方程 $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$，有特征方程 $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$，其会有 n 个复根（包含重根），根据特征方程的根，可以得到其对应的微分方程的解的部分如下：

特征方程的根	对应的微分方程的解中对应的项
单实根 λ	$C\mathrm{e}^{\lambda x}$
一对单复根 $\alpha \pm \beta\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
k 重实根 λ	$\mathrm{e}^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}\right)$
k 对复根 $\alpha + \beta\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}\right)\cos\beta x + \left(D_1 + D_2 x + \cdots + \mathrm{D}_k x^{k-1}\right)\sin\beta x\right]$

1.15 常见非初等积分

如果在做题中算了半天化出了下面的积分的形式且看不到使用分部积分进一步处理的可能性的话，那可能是题目的问题（有时在钓鱼题中遇到）.

- $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Si}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Ci}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Shi}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Chi}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Ei}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \mathrm{li}(x) + C$
- $\displaystyle\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{S}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) + C$
- $\displaystyle\int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{C}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) + C$
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erfi}(x) + C$
- $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\sin\varphi, k)$
- $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = F(x, k)$
- $\displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = E(\varphi, k)$
- $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = E(x, k)$
- $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{1}{1-n\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-(\sin\theta\sin\alpha)^2}} = \Pi(n, \varphi|\alpha)$
- $\displaystyle\int_0^{\sin\varphi} \frac{1}{1-nt^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-mt^2)(1-t^2)}} = \Pi(n, \varphi|m)$
- $\displaystyle\int_0^{x} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \mathrm{B}(x, p, q)$



"Since Newton, mankind has come to realize that the laws of physics are always expressed in the language of differential equations."

——Steven Strogatz

Chapter 2

解题技巧

2.1 幂指函数求极限

幂指函数指的是指数和底数都是变量的函数，即形如：

$$F(x)=u(x)^{v(x)}$$

其既有指数函数的特征，也有幂函数的特征. 在某一取极限过程中（x 趋于定值或趋于正负无穷），即：

$$\lim F(x)=\lim u(x)^{v(x)}$$

这里函数 $F(x)$ 的指数和底数可能包含有 x，不方便计算极限，因此我们可以做如下变形：

$$\lim F(x)=\lim u(x)^{v(x)}=\lim \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln u(x)}$$

若这里的 $u(x)\neq 1$ 且 $u(x)>0$，同时有 $\lim u(x)=a>0$、$\lim v(x)=b$，则由函数 e^x 的连续性，有（其中 $\exp(x)=\mathrm{e}^x$）：

$$\lim F(x)=\exp(\lim v(x)\cdot\ln u(x))$$

在由 $\ln x$ 的连续性，有：

$$\lim F(x)=\exp(\lim v(x)\cdot\ln(\lim u(x)))=\exp(b\cdot\ln a)=a^b$$

综上，我们有如下定理：

Theorem 2.1.1. 若函数 $u(x)\neq 1$ 且 $u(x)>0$，同时在某一取极限过程中有 $\lim u(x)=a>0$、$\lim v(x)=b$，则有：

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$$

2.2 求导技巧

2.2.1 对数求导法

对于乘积较多的函数，常用对数求导法化简计算，例如，有如下函数

$$F(x)=A(x)^a\,B(x)^b\cdots$$

可以在两侧同时取对数，于是有（这里简写略去函数的自变量，注意大写字母为关于 x 的函数，小写字母为常数）

$$\ln F = a\ln A + b\ln B + \cdots$$

两端求导数，于是有

$$F' = F\cdot\left(\frac{a}{A}A' + \frac{b}{B}B' + \cdots\right)$$

由于一般而言 A', B' 等较容易求，因此运用对数求导法，可以避免乘积求导的 Leibniz 律，从而简化计算.

另外，对数求导法还常常用在幂指函数的导数的计算，例如，有如下函数

$$F(x) = A(x)^{B(x)}$$

要求其导数，可以对其两端取对数后求导数，于是有

$$F' = F\cdot\left(B'\ln A + \frac{B}{A}A'\right)$$

2.2.2 高阶导数

对于求高阶导数的题目，主要有以下几种方法

- 逐阶求导法
- 转化法：将代求高阶导数的式子转化成 §1.9 中的形式，从而求解高阶导数
- Leibniz 展开法：若待求高阶导数的函数为多项式乘其他函数的形式，则一般使用 Theorem 1.9.1来简化计算
- Taylor 展开法：若待求高阶导数的函数易于 Taylor 展开（Theorem 1.10.1），则可以通过该函数的 Taylor 展开和标准的 Taylor 展开进行对比得到待求的高阶导数.
- 归纳法：对于有些证明题，可以通过归纳法进行证明.
- 奇偶性和周期性：通过奇偶性和周期性快速计算出高阶导数（一般是 0），奇（偶）函数的导数是偶（奇）函数.具有周期 T 的函数其导函数也有周期为 T 的周期性.

求高阶导数时，切记不可以认为有如下复合函数公式

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}g(x),\quad u = g(x)$$

对于复合函数的高阶导数，其有如下公式

Theorem 2.2.1 (Faà di Bruno 公式).

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}g(f(t)) = \sum\frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_m!}g^{(k)}(f(t))\left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m}$$

其中 $\sum$ 表示将所有满足 $1\cdot b_1 + 2\cdot b_2 + 3\cdot b_3 + \cdots + m\cdot b_m = m$ 的非负整数带入式子中求和，$k = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m$

可以看出复合函数的 n 阶导数的展开较为复杂，因此我们一般不在求高阶导数中使用复合函数（也就是换元法）. 但对于 $u=ax+b$ 的换元，其根据上述定理可以得到一个较为简单的表达式，具体如下

$$(f\left(ax+b\right))^{(n)}=a^n f^{(n)}\left(ax+b\right)$$

运用上述结论，对于一些高阶导数题目，可以通过转化法求解.

2.3 构造新函数

在使用 Rolle 定理、Lagrange 中值定理证明一些结论时，常常需要构造新函数，使得新函数的导数包含题目所给的函数关系式.

在构造新函数时，除了使用 §1.11 中介绍的常用构造公式，还可以使用如下的通式[1]（其实 §1.11 中给出的常用构造公式都可以用统一成此通式）：

对于 $f'(x)+p(x)\cdot f(x)$，构造 $F(x)=f(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，此时有

$$\begin{aligned}
F'(x)&=f'(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}+f(x)\left(\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)'\\
&=f'(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}+f(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot p(x)\\
&=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}[f'(x)+p(x)f(x)]
\end{aligned}$$

对于更复杂的 $f'(x)+p(x)f(x)+q(x)$，类比上式，尝试

$$F'(x)=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}[f'(x)+p(x)f(x)+q(x)]$$

因此有

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}[f'(x)+p(x)f(x)+q(x)]\\
&=\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}[f'(x)+p(x)f(x)]+\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\\
&=f(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}+\int q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即对于 $f'(x)+p(x)f(x)+q(x)$，构造 $F(x)=f(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}+\int q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ (可以看到这与非齐次一阶线性微分方程的通解很相像).

除了上述方法，还可以尝试通过**解微分方程**的方法来构造新函数. 在微分方程的解中会出现未定常数 C，将 C 替换为 $F(x)$，并解出 $F(x)$，即可得到所需要构造的新函数[2].

2.4 不动点与递推数列极限

对于某一函数 $f(x)$，其不动点 x_0 定义如下：

Definition 2.4.1 (不动点)**.** *对于函数 $f(x)$，若存在 x_0，使得 $x_0=f(x_0)$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的（一阶）不动点. 在图形上，$y=f(x)$ 和 $y=x$ 的交点的横坐标即为 $f(x)$ 的一阶不动点.*

[1]不过在实际中貌似使用此通式较少，一般直接使用 §1.11 中的式子即可.

[2]这里介绍比较简略，之后再补充. 另外从此也可以看出解微分方程和中值定理构造新函数中存在一定关系，因此前文函数构造和一阶线性微分方程的通解很相像也并不是巧合.

同理，若 $x_0 = f(f(x_0))$，则称 x_0 是函数 $f(x_0)$ 的二阶不动点. 显然，一阶不动点必然是二阶不动点.

下文中所讨论的不动点默认为一阶不动点. 假设某一递推数列为 $x_{n+1} = f(x_n)$，数列的第一项为 x_1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 若 $f(x)$ 连续，那么对递推式两端求极限，有：

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(a)$$

显然该递推数列的极限值为 $f(x)$ 的不动点[3]. 同时，**若 $f(x)$ 在待证明区间上单调**[4]，那么可以证明 x_n 单调，同时可以通过数学归纳法来快速证明有界，具体步骤如下（这里仅以有上界为例子，若为有下界只需要简单地改变不等号方向即可，其他步骤相同）：

1. 假设 $x_n \le a$（这里 a 是递推关系 $f(x)$ 的不动点）
2. 由于 $f(x)$ 单调（假设在待证区间单调递增），那么有 $f(x_n) \le f(a)$
3. 注意到 $x_{n+1} = f(x_n) \le f(a) = a$（$f(a) = a$ 由不动点定义显然可得）
4. 验证 $x_1 \le a$
5. 综上，$x_n \le a$ 恒成立，x_n 有上界

因此，通过不动点，我们可以快速求出递推数列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的极限.

上述方法对于常见的题目而言已经够用，但仍可以进行进一步的推广. 在数值分析中有如下条件更弱的定理:

Theorem 2.4.1 (Banach 不动点定理). 设映射 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数，且满足：

- 封闭性：对 $\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) \in [a,b]$
- 压缩性：$\exists L \in (0,1)$，使得对 $\forall x \in [a,b]$，有 $\mid f'(x) \mid \le L$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一不动点 x_0，满足 $x_0 = f(x_0)$，同时对任意满足 $x_1 \in [a,b]$，$x_{n+1} = f(x_n)$ 的递推数列，其都收敛于 x_0.

假设存在递推数列满足不动点定理但不满足 $f(x)$ 在待证区间上单调，那么可以尝试用一定的放缩来证明[5]. 例如[6]

Example 2.4.1. 设 $x_1 = 1$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Solution. 先求出不动点：

$$a = \frac{1}{1+a} \to a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

由于显然有 x_n 恒为正，因此舍去负根，$a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 注意到：

$$\mid x_n - a \mid = \left| \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+a} \right| = \frac{\mid a - x_{n-1} \mid}{(1+x_{n-1})(1+a)} \le \frac{\mid x_{n-1} - a \mid}{(1+a)} \le \cdots \le \frac{\mid x_1 - a \mid}{(1+a)^n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid x_1 - a \mid}{(1+a)^n} = 0$$

[3]这里其实有一个几何解释的，之后再补上.

[4]这里我不知道应该如何描述，大致意思是在 x_n 的所在区间内单调.

[5]毕竟不能直接用 Banach 不动点定理来说明，一般而言这属于超纲内容.

[6]下面解答中由于初始值直接舍去了 $x < 0$ 的不动点，那么能否去掉这一条件？有关此问题，3Blue1Brown 有一个很好的视频（同时也提到了导数的一个新的理解方式），见 https://www.bilibili.com/video/BV1XW411P75q

由夹逼定理可知：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

□

同时，对于不动点，有许多种类型，不一定所有的不动点都为此类数列的极限[7]. 不动点大致可以分为：(1) 吸引不动点、(2) 排斥不动点、(3) 左吸右排不动点（左排右吸不动点）、(4) 其他更特殊的不动点.

另外，不动点的概念还可以扩展到拓扑学，从而有如下著名且非常重要的 Brouwer 不动点定理：

Theorem 2.4.2 (Brouwer 不动点定理)**.** *记 $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 以及 $\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. 对于任意连续映射 $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$，$\exists p \in \overline{B^n}$ 使得 $f(p) = p$.*

此定理在微积分中使用极少，在此不做过多说明.

2.5 积分小技巧

这一章节记录的是在求积分中的一些好用但不是很系统的小技巧.

2.5.1 符号函数与带绝对值积分

在进行积分运算时常常会出现带绝对值的情形（如开偶次根式）. 对于这类含绝对值的积分，我们可以引入如下符号函数 $\operatorname{sgn} x$：

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

此时有：$\sqrt{x^2} = |x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$.

通过符号函数，我们可以统一变量. 同时，在不定积分中，符号函数可以被视为常数，提到积分号外，从而避免或减少分类讨论的麻烦. 如下面例题：

Example 2.5.1. 求 $\int \sqrt[4]{x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution.

$$\begin{aligned}\int \sqrt[4]{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{sgn} x \int |x|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}|x| \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot \frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{|x|} + C\end{aligned}$$

□

[7]但对于做题而言，在题目没有错误的情况下，总是满足的.

2.5.2 变量倒代换

当分母中出现一个一次多重因式（形如 $(ax+b)^k$）且次数明显高于其他因式时可以使用倒代换的方法将其变到分子上从而降低运算量. 如下面例题：

Example 2.5.2. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x+1)}$

Solution. 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x+1)} &= \int \frac{t^3}{1+\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}\frac{1}{t}\\ &= -\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int\left(-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|+C\\ &= -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+C\end{aligned}$$

□

在有理函数积分中，出现在分子上的东西往往比出现在分母上好处理，这是因为分子可以进行加减拼凑，而分母并不能随意加减.

2.5.3 指数构成的有理函数换元

如果被积函数是由 e^x 所构成的有理函数，那么只需要换元 $u=\mathrm{e}^x$，此时 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$，从而将原来的积分转化成关于 u 的有理函数积分. 如下面例题：

Example 2.5.3. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$

Solution. 令 $u=\mathrm{e}^x$，因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u}-\int\frac{\mathrm{d}u}{u+1}\\ &= \ln|u|-\ln|u+1|+C\\ &= x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C\end{aligned}$$

□

2.5.4 三角函数积分有理化

若被积函数是关于 $\sin x$ 的奇函数（当将 $\sin x$ 替换成 $-\sin x$ 时整个函数取反），则凑微分 $\mathrm{d}\cos x$，并将被积函数化成关于 $\cos x$ 的有理函数. 同理，若被积函数是关于 $\cos x$ 的奇函数（将 $\cos x$ 替换成 $-\cos x$ 后整个函数取反），则凑微分 $\mathrm{d}\sin x$ 并将被积函数化成关于 $\sin x$ 的有理函数.

若被积函数中 $\sin x$、$\cos x$ 同时换成 $-\sin x$、$-\cos x$ 后仍不变，则凑微分 $\mathrm{d}\tan x$ 并将被积函数化成关于 $\tan x$ 的有理函数.

这里可以通过代数学定理来说明. 如果有理函数 $R(x,y)$ 满足 $R(-x,y)=-R(x,y)$，那么这个函数可以改写成 $R'(x^2,y)x$ 的形式；如果有理函数 $R(x,y)$ 满足 $R(-x,y)=R(x,y)$，那么这个函数可以改写成 $R'(x^2,y)$ 的形式[8]（其中 R' 是不同于 R 的有理函数）.

那么，如果三角有理式 $R(\sin x,\cos x)$ 满足 $R(\sin x,\cos x)=-R(-\sin x,\cos x)$，则总可以改写成 $R'(\sin^2 x,\cos x)\sin x$. 因此原有理函数的积分可以改写成：

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R'(\sin^2 x,\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x=-\int R'(1-\cos^2 x,\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$$

从而将式子化成了有理函数. 另一个换元类似，在此不做更多说明.

若 $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$，由于 $\sin x=\cos x\tan x$，因此我们总可以将 $R(\sin x,\cos x)$ 改写成 $R_1(\cos x,\tan x)$. 因此：

$$R(-\sin x,-\cos x)=R_1(-\cos x,\tan x)=R_1(\cos x,\tan x)=R_1(\sin x,\cos x)$$

因此按照前文的代数学定理，有：

$$R_1(\cos x,\tan x)=R_1'(\cos^2 x,\tan x)$$

而 $\cos^2 x=\dfrac{1}{\tan^2+1}$，因此我们可以将 $R(\sin x,\cos x)$ 化成关于 $\tan x$ 的有理函数. 又因为 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2+1}$，从而可以将 $R(\sin x,\cos x)$ 的积分化成有理函数的积分.

Example 2.5.4. 求 $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Solution.

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x&=-\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}\cos x\\&=\int\frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u\quad(u=\cos x)\\&=\int\mathrm{d}u-\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}\\&=\cos x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C\end{aligned}$$

□

2.5.5 分部积分技巧

我们可以将常见的函数分成下面四类：

- I：对求导不敏感. 这类函数的导数是同类型的函数，如 e^x、$\sin x$ 等. 这类函数除了对求导不敏感，对凑微分（或者说积分）也不敏感.

- II：对求导略敏感. 这类函数的导数虽然也是同类型的导数，但求导一次就降一级，一般是正整数次的幂函数 x^n $(n\in\mathbb{N}^+)$. 这类函数对凑微分也是略微敏感.

- III：对求导敏感，且求导后化成更简单的函数，如 $\ln x$、$\arcsin x$、$\arctan x$ 等. 这类函数求导很简单，但凑微分非常复杂.

[8]此定理的证明略，可参考一些代数学的书籍.

- IV：对求导非常敏感，且形式变复杂，如 $\dfrac{1}{x^n}$ $(n>0)$、$\tan x$、$\sec x$ 等. 这类函数凑微分有多种可能，但相比求导会化简成更简单的形式.

对于不同情况，有不同的积分思路：

- I 类和 II 类混合：I 凑 II 导
- II 类和 III 类混合：II 凑 III 导
- 包含 IV 类：IV 凑
- I 类混合：多次分部积分，解方程

上述又可以总结为："对反幂三指"，即"对数函数-反三角函数-幂函数-三角函数-指数函数"，其中在前的导，在后的凑.

比如下面一个比较简单的例子：

Example 2.5.5. 求 $\displaystyle\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$

Solution. 这里 x^3 为第 II 类函数，$\sin x$ 为第 I 类函数，因此选择用 $\sin x$ 凑微分，x^3 求导.

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x &= -\int x^3 \,\mathrm{d}\cos x = -x^3\cos x + \int \cos \mathrm{d}x^3 \\ &= -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是我们就简化了原来的积分. 以此类推，有[9]：

$$\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x + C$$

□

另外，分部积分还有如下功能：

- 降幂：降低 II 类幂函数的次数（用 II 类求导）
- 消分母：降低分母的次数（用 IV 类凑微分）
- 循环：求解时给出循环，解方程给出积分（I 类混合）
- 递推：通过分部积分给出递推式
- 抵消：$\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u = uv + C$

对于最后一个"抵消"的作用，在此给一个例子：

Example 2.5.6. 求 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2 \,\mathrm{d}x$

Solution.

$$\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2 \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}(\tan^2 x + 2\tan x + 1)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2}(\sec^2 x + 2\tan x)$$

这里 $\sec^2 x \,\mathrm{d}x$ 正好可以凑成 $\mathrm{d}\tan x$，因此：

$$\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2 \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}\tan x + \int \tan x \,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\tan x + C$$

可以说，用分部积分抵消的方法主要难在凑微分和恒等变换. □

[9] 当然这一题可以用表格法简化计算，在此只是作为一个例子.

2.6 分部积分表格法

分部积分最基本的公式是：

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

当然一般而言会写成下面的形式：

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x$$

重复使用分部积分法则，可以得到分部积分的推广公式. 假定 u、v 在计算区间上都有直到 $n+1$ 阶的连续导数，那么有：

$$\int uv^{(n+1)}\,\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,\mathrm{d}x$$

这里我们可以通过一种比较好的方法来快速计算上面的式子. 假设我们要计算 $\int uv^{(n+1)}\,\mathrm{d}x$，画一个两行的表格，将 u 和 $v^{(n+1)}$ 分别写在第一列，同时第一行不断求导，第二行不断积分：

u	u'	u''	u'''
$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$

之后对角相乘，即第一行第一列与第二行第二列相乘，第一行第二列与第二行第三列相乘，第一行第三列与第二行第四列相乘，以此类推，最后还需要第一行最后一列和第二行最后一列相乘并补上积分号. 需要注意的是，这里的相乘需要带上依次为“正负正负……”的符号. 对于上面例子，得到的式子如下：

$$\int uv^{(n+1)}\,\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\,\mathrm{d}x$$

从而得到推广的式子.

运用这种方法，便可以让分部积分推广的计算更加简便，从而减少出错.

2.7 有理函数积分

2.7.1 引入

对于有理分式函数：

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

这里 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是实系数的多项式. 那么我们总可以通过**多项式带余除法**[10]，将上面的式子化简成：

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

其中 $P_1(x)$ 的次数低于 $Q(x)$. 即我们总可以化简成一个多项式和一个既约真分数（$\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$）的和. 多项式 $P_0(x)$ 的积分非常的 Trivial，在此不过多赘述. 因此，下面我们只讨论 $R(x)$ 为既约真分式的情况.

[10] 也就是我们所常用的多项式竖式除法.

现在我们假设 $R(x)$ 为：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots}$$

我们总可以上下同除某个系数，使得**分母最高次系数为 1**，即（注意这里的 a_n 等系数同上式中的 a_n 不同，我懒得换一个符号了）：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots}{x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots}$$

对于分母 $Q(x)$，根据**代数基本定理**：任何复系数的一元 m 次多项式方程在复数域上有且只有 m 个根（包括重根）. 因此，我们可以将分母写成：

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_m)$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in\mathbb{C}$. 由于 $Q(x)$ 中所有系数均为实数，根据**虚根成对**原理[11]，我们总可以将 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中的复数根两两匹配，从而将分母 $Q(x)$ 写为：

$$Q(x)=(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\cdots(x^2+p_1x+q)^{r_1}\cdots$$

借助一个结论[12]，我们总可以将 $R(x)$ 拆成下面部分分式之和：

$$\begin{aligned}R(x)=&\left[\frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\cdots\frac{A_{1a_1}}{(x-x_1)^{a_1}}\right]+\left[\frac{A_{21}}{x-x_2}+\cdots\right]+\cdots\\&+\left[\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{M_{1r_1}x+N_{1r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}\right]+\left[\frac{M_{21}x+N_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\cdots\right]+\cdots\end{aligned}$$

因此，只要我们能求出上面待定的各项系数，那么，我们便可以**将任意的有理函数化成下面四种部分分式之和**：

$$\frac{A}{x-x_0},\quad\frac{A}{(x-x_0)^a},\quad\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$$

于是复杂的有理函数积分都可以转化成上面四类积分之和，只要我们解决了上面四类积分，便可以解决所有的有理函数积分.

这里给一些例子. 若 $R(x)=\dfrac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}$，根据上面的结论，我们可以直接假设：

$$R(x)=\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

这里 A、B、C 均为待定常数.

同理，若

$$R(x)=\frac{3x^6-10x^5+20x^4-30x^3+22x^2+11x-12}{(x-2)^2(x-1)\left(x^2+1\right)^2}$$

根据上面的结论，我们可以直接假设：

$$R(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}$$

其中 A_n、M_n、N_n 均为待定常数.

[11]这里给一个简短的证明. 对于实系数方程，若 x 为它的根，那么由于对方程两边取共轭方程不变，因此 x^* 也为它的根，即虚根成对，Q.E.D.

[12]这个结论的证明暂且略过，可参考一些高等代数教科书，这里只需要知道可以这么拆即可.

同样的，若（下面式子中 $P(x)$ 为多项式）：

$$R(x)=\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^2}$$

那么我们可以直接假设：

$$\begin{aligned}R(x)=&\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^2}\\=&\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{A_3}{(x-x_2)^2}\\&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+p_2x+q_2)^2}\end{aligned}\tag{2.7.1}$$

其中 A_n、M_n、N_n 均为待定常数.

一个最简单且最万能的求出上面各项待定常数的方法是**待定系数法**. 展开我们所假设的式子，和原来的式子对比系数并解线性方程组，我们便可以得到所有的待定常数[13]. 这种方法虽然简单，但计算量较大，容易出现计算错误，且若计算错误一个系数便会影响全部系数的计算，非常不方便，在此不做过多说明. 为了加快解题的速度，在之后的章节我们会介绍更方便的计算方法（如“留数法”、“模法”等）.

2.7.2 四种部分分式的积分

前文我们将任意的有理函数都拆成了多项式和下面四种部分分式之和：

$$\frac{A}{x-x_0},\quad\frac{A}{(x-x_0)^a},\quad\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$$

多项式积分是很简单的，在此略过. 上面 4 种部分分式的积分中前两种也是很容易求出的：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$$

因此我们着重关注后两种部分分式的积分.

对于 $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$，我们尝试**配凑成** $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\arctan x+C$. 因此有：

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$$

记 $t=x+\frac{p}{2}$、$a=q-\frac{p^2}{4}$，因此有：

$$\begin{aligned}&\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x\\=&\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\\=&\frac{M}{2}\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}\\=&\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\arctan\left(\frac{t}{a}\right)+C\end{aligned}$$

[13] 这也是同济的《高等数学》中给出的方法.

其中 $t = x + \frac{p}{2}$、$a = q - \frac{p^2}{4}$.

现在我们来计算 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$，我们总可以通过变量替换将这个积分再次拆成下面两种积分的和：

$$\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} \qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$$

这里第一个积分很容易通过换元计算（注意下面 $n \neq 1$）：

$$\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C$$

第二个积分较为难算. 设：

$$J_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$$

则：

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} \end{aligned}$$

这里第一项为 $\frac{J_{n-1}}{a^2}$，第二项尝试用分部积分将 $\frac{1}{(t^2+a^2)^n}$ 化成 $\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}$. 注意到：

$$\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]' = (1-n)\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$$

因此：

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{J_{n-1}}{a^2} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\int t \cdot \frac{(-n+1)\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} \\ &= \frac{J_{n-1}}{a^2} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right] \\ &= \frac{J_{n-1}}{a^2} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} - J_{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}J_{n-1} \end{aligned}$$

因此有递推公式：

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}J_{n-1}$$

并且有：

$$J_1 = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C$$

除了这种方法，我们还可以通过另外的技巧计算 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$. 经过上面的换元，可以将 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$ 化成 $\int \frac{At+B}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t$. 由前文可得，记

$$f(a) = \int \frac{At+B}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{B}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C$$

因此[14]：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int \frac{At+B}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{At+B}{t^2+a^2} \\ &= \int \mathrm{d}t\ (At+B)\cdot -\frac{2a}{2(t^2+a^2)} \\ &= -a\int \frac{At+B}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

反复运用上面的方法便可以得到任意 n 的表达式[15].

这里虽然直接求导比较麻烦，但在某些情况下其求导会较为简便，因此使用这种方法可以简化计算. 综上，我们完全解决了有理函数的积分问题. **任何有理函数的积分问题都可以通过上面的方法计算得出**.

2.7.3 其他函数转化为有理函数

对于一些函数的积分，我们可以通过换元的方法将其转化为有理函数的积分，从而通过上面的通用方法进行求解. 下面给出四种可以转化成有理函数积分的形式：

- $R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$
- $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$
- $x^\lambda(a+bx^\mu)^\nu\,\mathrm{d}x$ （其中 λ、μ、ν 需满足一定条件）

这里 $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$，其中 $P(u,v)$、$Q(u,v)$ 均为以 u、v 为自变量的多项式.

现在我们先考虑第一种形式：$R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$. 记 $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$，因此有：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

注意到 $x = 2\arctan u$，因此：

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

因此，我们可以把 $R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ 换成关于 u 的多项式积分.

现在我们考虑第二种形式：$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$. 注意到：

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right) = \pm\left[\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 \pm \left[\sqrt{\left|c-\frac{b^2}{4a}\right|}\right]^2$$

记 $u = \sqrt{|a|}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$，因此，我们可以将 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 换成下面三种情况（根式内恒为正，为负的情况舍去）：

$$\sqrt{u^2+\lambda^2} \quad \sqrt{u^2-\lambda^2} \quad \sqrt{\lambda^2-u^2}$$

- 对于 $\sqrt{u^2+\lambda^2}$，作换元 $u = \lambda\tan t$，因此 $\sqrt{u^2+\lambda^2} = \lambda\sec t$.

[14] 这里求导和积分随意交换是不严谨的. 别问，问就是学物理学的.

[15] 通式计算比较复杂，会涉及到 Faà di Bruno 公式（见定理 2.2.1）.

- 对于 $\sqrt{u^2-\lambda^2}$，作换元 $u=\lambda\sec t$，因此 $\sqrt{u^2-\lambda^2}=\lambda\tan t$.
- 对于 $\sqrt{\lambda^2-u^2}$，作换元 $u=\lambda\sin t$，因此 $\sqrt{\lambda^2-u^2}=\lambda\cos t$.

综上，我们将第二种情况转化为了第一种情况. 从而可以转化成有理函数进行积分.

现在我们考虑第三种形式：$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 若 $ad=bc$，那么 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=\lambda$，其中 λ 为某一常数. 此情况是 Trivial 的，在此不做过多讨论. 下面我们关注 $ad\neq bc$ 的情况. 记 $u=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，因此：

$$x=\frac{b-du^n}{a-cu^n}$$

使用 Feynman 求导法[16]，有：

$$\mathrm{d}x=\left[\frac{b-du^n}{a-cu^n}\right]\cdot\left[\frac{ncu^{n-1}}{a-cu^n}-\frac{ndu^{n-1}}{b-du^n}\right]\mathrm{d}u$$

因此，通过此换元，我们可以将此情况转化成有理函数积分.

现在我们来考虑第四种形式：$x^\lambda(a+bx^\mu)^\nu\,\mathrm{d}x$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$、$\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{Q}$，且 $a,b,\lambda,\mu,\nu\neq 0$（否则就是很 Trivial 的情况）. 此时可能根号套根号的情况，因此我们尝试将其转化为只有一层根号的情况. 作换元 $u=x^\mu$，则：

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu}u^{\frac{1}{\mu}-1}\,\mathrm{d}u$$

$$x^\lambda(a+bx^\mu)^\nu=\frac{1}{\mu}u^{\frac{\lambda+1}{\mu}+\nu-1}\left(\frac{a+bu}{u}\right)^\nu$$

因此，**如果 $\dfrac{\lambda+1}{\mu}\in\mathbb{Z}$ 或 $\dfrac{\lambda+1}{\mu}+\nu\in\mathbb{Z}$ 或 $\nu\in\mathbb{Z}$，那么可以通过换元转化为前文第三种情况.** 如下：

- $\dfrac{\lambda+1}{\mu}\in\mathbb{Z}$，则令 $a+bx^\mu=t^N$，其中 N 为分数 ν 的分母.
- $\dfrac{\lambda+1}{\mu}+\nu\in\mathbb{Z}$，则令 $ax^{-\mu}+b=t^N$，其中 N 为分数 ν 的分母.
- $\nu\in\mathbb{Z}$，则令 $x=t^N$，其中 N 为 μ 和 ν 的公分母.

Chebyshev 证明[17]，**在上述情形的二项微分中除了上面三种情况外没有其他可积的情形.**

2.7.4 对于 $1/(x^n+1)$ 的积分

现在我们讨论一种特殊且常见（指常用来钓鱼）的情况：求

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}$$

这类问题属于有理函数积分，可以通过上面的方法给出其积分，但这样有时过于繁琐，尤其是当 n 较大时. 下面给出这类问题的一个较为通用的解法.

对于 $x^n+1=0$，显然有 n 个复根，记为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$. 根据 **Euler 定理**（$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$）这 n 个根可以表示为：

$$z_m=\cos\left(\frac{\pi+2m\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi+2m\pi}{n}\right)\quad m=1,2,\cdots,n$$

[16] 也就是“对数求导法”，见 §2.2.1.

[17] 证明过程可参考书籍 M. Bronstein, Symbolic integration.

这里我们不考虑复根成对，直接写成：

$$\frac{1}{x^n+1}=\sum_{m=1}^{n}\frac{A_m}{x-z_m}+C$$

因此：

$$A_m=\lim_{x\to z_m}\frac{x-z_m}{x^n-1}=\lim_{x\to z_m}\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{nz_m^{n-1}}$$

这里不加证明直接类比实函数积分，有：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=\sum_{m=1}^{n}A_m\ln(x-z_m)$$

这里涉及了 $\ln(z)$ 的在复数域的定义：

$$\ln(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$$

其中 $\arg z$ 为复数 z 的辐角（若 $z=x+y\mathrm{i}$，则一般与 $\arctan y/x$ 有关）.

这里看起来在求和中引入了复数，但由于复根成对，在求和后其虚部会消失.

下面我们用一个经典的常用于表情包的积分来作为例子：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+1}$$

其五个根为（这里使用复根成对来简化计算）：

$$z_1=-1,\quad z_2=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5},\quad z_3=\cos\frac{3\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5},\quad z_4=z_2^*,\quad z_5=z_3^*$$

因此：不难计算出（根据几何意义很显然可以计算出）：

$$A_1=-\frac{1}{5},\quad A_2=-\frac{z_2}{5},\quad ,A_3=-\frac{z_3}{5},\quad A_4=-\frac{z_2^*}{5},\quad A_5=-\frac{z_3^*}{5}$$

因此：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+1}=-\frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{5}[z_2\ln(x-z_2)+z_2^*\ln(x-z_2^*)+z_3\ln(x-z_3)+z_3^*\ln(x-z_3^*)]+C$$

注意到[18]（设 $z=a+b\mathrm{i}$，$z^*=a-b\mathrm{i}$）：

$$\begin{aligned}z\ln(x-z)+z^*\ln(x-z^*)&=a[\ln(x-z)+\ln(x-z^*)]+b\mathrm{i}[\ln(x-z)-\ln(x-z^*)]\\&=a\ln(x^2-2ax+|z|^2)+2b\arctan\frac{x+a}{b}\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+1}=&\frac{1}{5}\ln|x+1|\\&-\frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{5}\ln\left|x^2-2\cos\frac{\pi}{5}x+1\right|-\frac{2}{5}\sin\frac{\pi}{5}\arctan\frac{x+\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\\&-\frac{1}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\ln\left|x^2-2\cos\frac{3\pi}{5}x+1\right|-\frac{2}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\arctan\frac{x+\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}}\\&+C\end{aligned}$$

这里再结合三角函数公式求出 $\dfrac{\pi}{5}$ 和 $\dfrac{3\pi}{5}$ 的三角函数带入化简即可得到常见的形式.

[18]同样也是画个图根据几何意义就显然可得，由于画图较为麻烦，在此不做过多说明.

2.8 留数法进行部分分式分解

借助**留数**[19]（Residue）的思想，我们可以得到一个简便的部分分式分解的方法. 虽然“留数法”听起来比较可怕，感觉和复变函数什么的有很大关联，但实际上其思想非常简单，我更愿意称其为“移项代数法”，但网络上大多称其为“留数法”. Anyway，我们假设 $R(x)$ 可以写为（$P(x)$ 为任意的多项式）：

$$\begin{aligned}
R(x) =& \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^2} \\
=& \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{A_3}{(x-x_2)^2} \\
&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+p_2x+q_2)^2}
\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

2.8.1 分母为一次函数的幂

先从最简单的 A_1 开始. 假设我们要计算 A_1，那么我们可以将上式写成：

$$R(x)=\frac{A_1}{x-x_1}+F(x)$$

其中 $F(x)$ 为其他我们不关心且对结果无影响的函数[20]. 那么有：

$$A_1=(x-x_1)R(x)-(x-x_1)F(x)$$

由于 $R(x)$ 的分母中有且只有一项 $(x-x_1)$，在乘上 $(x-x_1)$ 后则被消掉，因此当带入 $x\to x_1$ 时第一项会给出一个非零值. 第二项由于分母中没有 $(x-x_1)$，则无法消去 $(x-x_1)$，因此当带入 $x\to x_1$ 时第二项为 0，因此更通用地写有[21]：

$$A_1=\lim_{x\to x_1}(x-x_1)R(x)$$

对于 A_2 和 A_3，同样将我们不关心且对结果无影响的函数记为 $F(x)$（这里的 $F(x)$ 和上面的 $F(x)$ 并不相同，这里同样懒得换一个记号了，后面的 $F(x)$ 同理），于是有：

$$R(x)=\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{A_3}{(x-x_2)^2}+F(x)$$

这里我们不能只乘上 $(x-x_2)$，这样无法求出 A_2、A_3 中的任意一个[22]. 因此，这里我们乘上 $(x-x_2)^2$，那么有：

$$A_3=(x-x_2)^2R(x)-(x-x_2)A_2-(x-x_2)^2F(x) \tag{2.8.2}$$

同上，当带入 $x\to x_2$ 时只有第一项会给出非 0 值. 因此有：

$$A_3=\lim_{x\to x_2}(x-x_2)^2R(x)$$

那么我们应如何求出 A_2 呢？改写式 (2.8.2)，有：

$$(x-x_2)^2R(x)=A_3+(x-x_2)A_2+(x-x_2)^2F(x)$$

[19]“留数”的更详细介绍见 §2.15.

[20]至于为什么不关心且无影响，读者可以将其全部写出后按照下面的操作进行处理，或者看后文给出的例子，自然会明白.

[21]虽然写成了极限的样子看的有些可怕，但正如前文所见，在乘上 $(x-x_1)$ 这一项后“置零因子”会被消去，从而直接带入数值即可.

[22]自己找一个例子尝试一下便知道为什么.

对**上式两端求导**，有：

$$\left[(x-x_2)^2R(x)\right]'=A_2+2(x-x_2)F(x)+(x-x_2)^2F'(x)$$

因此，有：

$$A_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x_2)^2R(x)\right]\bigg|_{x=x_2}$$

这里看似求导很麻烦，但注意由于待求导的式子均为多项式，我们可以很方便地通过**对数求导法**（§2.2.1）来快速计算.

进一步总结和推广，假设我们遇到了形如

$$\frac{A_1}{(x-x_0)}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-x_0)^m}$$

的部分，那么可以类似地通过多次求导的方法来得到对应项的待定系数.

$$A_n=\frac{1}{(m-n)!}\ \frac{\mathrm{d}^{m-n}}{\mathrm{d}x^{m-n}}[(x-x_0)^mR(x)]\bigg|_{x=x_0} \tag{2.8.3}$$

因此，对于形如 $\dfrac{A}{x-x_0}$ 和 $\dfrac{A}{(x-x_0)^n}$ 的项的待定系数全部可以通过上面的方法求出. 下面给出一个例子来更好地说明：

假设我们想把 $\dfrac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}$ 拆成部分分式之和，那么我们直接假设：

$$\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2} \tag{2.8.4}$$

现在我们先计算 A. 改写式 (2.8.4)，将我们不关心的部分记为 $F(x)$，有：

$$\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+F(x)$$

因此有：

$$A=(x-1)\cdot\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}-(x-1)F(x)$$

带入 $x\to 1$，有：

$$A=\frac{3x^2-7x+5}{(x-2)^2}\bigg|_{x=1}=1$$

现在我们来计算 B 和 C. 同样地，改写式 (2.8.4)，有：

$$\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+F(x)$$

那么有：

$$C=\frac{3x^2-7x+5}{x-1}-(x-2)B-(x-2)^2F(x)$$

因此：

$$C=\frac{3x^2-7x+5}{x-1}\bigg|_{x=2}=3$$

在算出 C 后我们来计算 B. 根据前文的讨论，可以通过求导的方法来计算出 B. 具体操作如下. 同上改写式 (2.8.4) 有：

$$\frac{3x^2-7x+5}{x-1}=(x-2)B+C+(x-2)^2F(x)$$

上式两端求导（使用对数求导法化简计算[23]）：

$$LHS = \left(\frac{3x^2-7x+5}{x-1}\right)' = \frac{3x^2-7x+5}{x-1}\left(\frac{6x-7}{3x^2-7x+5} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$RHS = B + 2(x-2)F(x) + (x-2)^2F'(x)$$

带入 $x \to 2$ 有：

$$B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{3x^2-7x+5}{x-1}\right)\bigg|_{x=2} = \frac{3x^2-7x+5}{x-1}\left(\frac{6x-7}{3x^2-7x+5} - \frac{1}{x-1}\right)\bigg|_{x=2} = 2$$

综上：

$$\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

2.8.2 分母为二次函数的幂

下面我们来讨论 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ 和 $\dfrac{Mx+N}{(x^2+p_x+q)^r}$ 的待定系数的求法[24]. 同样我们先从较为简单的 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ 讨论. 同样我们假设 $R(x)$ 可以写为：

$$\begin{aligned} R(x) =& \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^2} \\ =& \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{(x-x_2)^2} \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+p_2x+q_2)^2} \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

假设我们要计算上式中的 M_1 和 N_1，那么我们可以类似之前的方法改写：

$$R(x) = \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + F(x)$$

同样有：

$$M_1x+N_1 = (x^2+p_1x+q_1)R(x) - (x^2+p_1x+q_1)F(x)$$

这里我们希望能一次计算就得到 M_1 和 N_1 两个参数，同之前的想法，这里我们通过带入合适的 x 的值使得 $(x^2+p_1x+q_1)$ 为 0. 这里我们可以**带入复根**，复数的实部和虚部给出两个方程正好解出 M_1 和 N_1.

对于 M_2、N_2、M_3、N_3，同样可以通过类似上面的方法通过求导[25]再带入复根的方法得到. 但计算较为复杂. 这里可以在计算出 M_3 和 N_3 后将这一项移项后减去从而让分母这一项的次数减 1. 下面通过一个例子来更好地说明.

假设我们想把 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ 拆成部分分式之和，那么直接假设：

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} \tag{2.8.6}$$

[23]对数求导法见 §2.2.1

[24]这里有一个有意思的问题，为什么一定是类似于 $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$ 的形式？或者说为什么分子的最高次系数为 1？假设不为 1，那么总可以通过多项式带余除法进一步拆成一个多项式和 $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$ 的形式.

[25]注意，这里此时不是关于 x 求导，具体步骤比较繁琐，在此不做进一步说明.

因此有：

$$A=(x-2)\cdot\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\bigg|_{x=2}=\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2}\bigg|_{x=2}=1 \tag{2.8.7}$$

现在，我们计算 M 和 N 的值. 改写式 (2.8.6)，有：

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Mx+N}{(x^2+1)^2}+F(x)$$

因此有：

$$Mx+N=\frac{2x^2+2x+13}{x-2}+(x^2+1)(Bx+C)+(x^2+1)^2F(x)$$

带入 $x\to\mathrm{i}$（$x=\mathrm{i}$ 为 $x^2+1=0$ 的一个复根），得：

$$N+M\mathrm{i}=\frac{2x^2+2x+13}{x-2}\bigg|_{x=\mathrm{i}}=-4-3\mathrm{i}$$

因此得到：$M=-3$、$N=-4$.

现在我们计算 B 和 C 的值. 如前文所讨论，我们可以通过求导后带入特殊值来计算，但也可以通过移项后来简化计算. 带入 $M=-3$、$N=-4$ 到式 (2.8.6)，移项化简后得：

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}+F(x)=\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}+\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}=\frac{5}{(x-2)(x^2+1)}$$

类似之前的方法，有：

$$Bx+C+(x^2+1)F(x)=\frac{5}{x-2}$$

因此有：

$$C+B\mathrm{i}=\frac{5}{x-2}\bigg|_{x=\mathrm{i}}=-2-\mathrm{i}$$

因此 $B=-1$、$C=-2$. 综上：

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

综上所述，运用上述的方法，我们可以将任意的有理函数拆成多项式和部分分式之和. 这种方法相比待定系数法加快了计算速度，即使没加快多少也减少了计算量，避免了一个系数错全部系数错的情况，降低了求解复杂积分时的犯错概率.

2.9 对数法计算有理函数

对数法是一种比较特殊的计算有理函数积分的方法，能不不进行裂项，解决一些特殊类型的积分. 在一些有理函数的积分计算能简化计算过程. 先考虑如下积分：

$$\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4-1}$$

常规思路是通过各种裂项方法拆成多项式和部分分式之和，再对每一项分别积分. 这里我们可以用另外一种方法.

首先，在分子凑出分母的微分：

$$\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{x\,\mathrm{d}x^4}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x^4-1|$$

这里的 $\ln|x^4-1|$ 有非常好的性质，因式分解之后可以直接拆成各项之和，即：

$$\mathrm{d}\ln|x^4-1| = \mathrm{d}\ln|(x^2+1)(x+1)(x-1)| = \mathrm{d}\ln|x^2+1| + \mathrm{d}\ln|x+1| + \mathrm{d}\ln|x-1|$$

带入回积分，改写，有：

$$\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4-1} = \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x^2+1| + \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x-1|$$

还原回有理函数积分，进一步计算，有：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4-1} =& \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x^2+1| + \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x+1| \\ =& \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+1} \\ =& x - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

可以发现，在计算的过程中，我们通过对数函数的特殊性质完成了分项，而不是通过待定系数法等方法来计算.

如果积分为：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$$

那么我们同样可以通过变形，改写成：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} = \int \frac{1-x^4}{x^4-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4-1} = -x + \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}\ln|x^4-1|$$

从而继续使用对数法进行计算.

2.10 模法进行部分分式分解

2.10.1 模运算简介

注意这里讲的是“模法”而不是“魔法”. 虽然运用模法进行部分分式分解有时比较繁琐，相比较而言没有留数法便捷，但为了完整性还是在此提一下，并且有时模运算可以简化留数法的一些计算. 模运算类似于小学时计算除法的余数. 比如说：

$$10 \bmod 3 = 1,\ 15 \bmod 4 = 3,\ 98 \bmod 11 = 10$$

只需要做个除法，只取余数即可. 模运算还可以这么理解，若 $a \bmod b\ (a, b > 0)$，我们可以将其写为两个数之和：

$$a = kb + r\ (0 \le r \le b)$$

则 r 就是我们要求的 $a \bmod b$. 而 bk 的数值是多少并不影响求模的计算. 因此，若我们从 a 中分离一个 b 的系数并直接抛弃并不影响取模的结果.

因此，类比此方法，我们可以给出多项式的模运算：

$$(4x+5) \bmod x = 5$$

注意这里的 x 可以取任意的实数，因此对 x 取模时常数 5 是没有办法去除的.

简而言之，取模就是把模数的倍数舍弃掉（直接当成 0），剩下不能表达成模数的倍数的形式，便是模运算的结果. 比如说：

$$\begin{aligned}(x^2+3x+2) \bmod (x-1) =& \left[(x-1+1)^2+3(x-1+1)+2\right] \bmod (x-1)\\ =& [(0+1)^2+3(0+1)+1] \bmod (x-1)\\ =& 6 \bmod (x-1)=6\end{aligned}$$

简而言之，就是把关于 x 的表达式改写成关于 $x-1$ 的表达式，并将 $x-1$ 整体替换成 0. 再举个例子：

$$\frac{1}{x+1} \bmod (x-1) = \frac{1}{(x-1+1)^3+1} \bmod (x-1) = \frac{1}{2}$$

类似的，有：

$$\frac{1}{x+1} \bmod (x^2+1) = \frac{x-1}{x^2+1-2} \bmod (x^2+1) = \frac{x-1}{0-2} \bmod (x^2+1) = \frac{1-x}{2}$$

更多的例子、更详细的解释可以参考一些专业的数学书籍. 总之，一个多项式，通过模运算，我们总可以得到另一个多项式，且其次数低于作为模数的多项式的次数.

2.10.2 分母为单因式

假设我们要对下面的式子进行部分分式分解：

$$R(x) = \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}$$

按照任意的部分分式分解的“套路”，我们直接假设成：

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+1}$$

注意，这里的 A、B 均为关于 x 的多项式，而不只是某个待定常数.

接下来，按照和留数法（§2.8）类似的思路处理，只不过 $(x-a)R(x)|_{x\to a}$ 的写法改为 $(x-a)R(x) \bmod (x-a)$ 而已（分母为二次函数同理）.

简而言之，若 $R(x) = A/P(x) + \cdots$，则 $A = P(x)R(x) \bmod P(x)$，因此，对于例子，有：

$$A = (x-1)R(x) \bmod (x-1) = \frac{3[(x-1)+1]^2+(x-1)-1}{[(x-1)+1]^2+1} \bmod (x-1) = 1$$

$$B = (x^2+1)R(x) \bmod (x^2+1) = \frac{(3x+4)(x^2+1)-(4x+6)}{(x^2+1)-2} \bmod (x^2+1) = 2x+3$$

因此，原式分解部分分式后得：

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+1}$$

2.10.3 分母为重因式

当分母出现重因式时，模法和留数法（§2.8）有较大区别. 比如，给定有理分式：

$$R(x) = \frac{x^5-x^4+5x^3+5x^2+2x}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

留数法（或者待定系数法）能分解成：

$$R(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{P}{x^2+1}+\frac{Q}{(x^2+1)^2}$$

其中 A、B 为待定系数，P、Q 为待定多项式. 而模法只能分解出：

$$R(x)=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x^2+1)^2}$$

其中 A、B 为待定多项式. 进一步的分解仍旧需要留数法或待定系数法.

要求出待定多项式 A、B，和分母为单项式的情况类似，只需要对 $R(x)$ 乘上作为模数的多项式后再对其做模运算即可，即：

$$A=(x+1)^2R(x) \bmod (x+1)^2$$

$$B=(x^2+1)^2R(x) \bmod (x^2+1)^2$$

剩下的就是一些极其繁琐的求模运算（巨量的计算过程省略）：

$$A=\left[\frac{-x^3+2x-1}{x^4+2x^2+1}(1+x)^2+(1+2x)\right] \bmod (1+x)^2=1+2x$$

$$B=\left[\frac{2x+1}{x^2+2x+1}(1+x^2)^2+(-x^3+2x-1)\right] \bmod (1+x^2)^2=-x^3+2x+1$$

因此，原式分解成：

$$\frac{x^5-x^4+5x^3+5x^2+2x}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}+\frac{-x^3+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

此时，若要进行积分，还需要进一步分解. 因此，这种情况下，我们通常不会使用模法来进行部分分式分解，而是使用留数法等其他更方便的方法.

2.11 组合积分法

在遇到一些特殊形式的三角函数、指数函数、双曲函数时可以尝试使用**组合积分法**简化计算. 组合积分法适合于“可互导”或者“可自导”的函数.

所谓互导函数是指：

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x$$

这里 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是互导函数，它们互为对方的导数，同样 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 是互导函数.

所谓自导函数是指：

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$$

它的导数是它自己.

这些互导和自导的函数构成的某些形式可以进行“配对”做积分. 具体可见下面的例子.

求积分：

$$\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x$$

这个积分可以用前文的方法转化为有理函数积分从而进行求解. 但这样过于繁琐. 我们可以用组合积分法简化计算. 记：

$$I_1=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x$$

这里的 I_2 便是所配对的积分，此时有：

$$aI_1+bI_2=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x(+C) \tag{2.11.1}$$

$$aI_2-bI_1=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=\ln|a\sin x+b\cos x|(+C) \tag{2.11.2}$$

式 (2.11.1) 和 (2.11.2) 联立可以解出 I_1：

$$I_1=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln|a\sin x+b\cos x|]+C$$

这里求解方程的过程过于简单在此不做过多说明，并且后文中省略. 这里我们可以看到，运用组合积分法可以便于求解出此类型的积分. 一般而言，通过互导和自导函数的对应，我们可以得到配对的积分，**第一个积分一般将分子凑成分母，第二个积分将分子凑成分母的导数**. 从而快速求出积分，再通过求解方程组得到相应的积分.

求积分：

$$\int\frac{\sinh x}{a\sinh x+b\cosh x}\,\mathrm{d}x$$

记：

$$I_1=\int\frac{\sinh x}{a\sinh x+b\cosh x}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cosh x}{a\sinh x+b\cosh x}\,\mathrm{d}x$$

因此：

$$aI_1+bI_2=\int\frac{a\sinh x+b\cosh x}{a\sinh x+b\cosh x}\,\mathrm{d}x=x(+C) \tag{2.11.3}$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{b\sinh x+a\cosh x}{a\sinh x+b\cosh x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\sinh x+b\cosh x)}{a\sinh x+b\cosh x}=\ln|a\sinh x+b\cosh x|(+C) \tag{2.11.4}$$

同上，联立 (2.11.3) 和 (2.11.2) 便可以求解出 I_1.

求积分：

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

记：

$$I_1=\int\frac{\mathrm{e}^x}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

因此：

$$aI_1+bI_2=\int\frac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=x(+C) \tag{2.11.5}$$

$$aI_1-bI_2=\int\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}=\ln\left|a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}\right|(+C) \tag{2.11.6}$$

同上，联立 (2.11.5) 和 (2.11.6) 便可以求解出 I_1.

求积分：

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$$

记：

$$I_1=\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$$

因此：

$$(\mathrm{e}^{ax}\sin bx)'=a\mathrm{e}^{ax}\sin bx+b\mathrm{e}^{ax}\cos bx\Rightarrow \mathrm{e}^{ax}\sin bx=aI_1+bI_2 \tag{2.11.7}$$

$$(\mathrm{e}^{ax}\cos bx)'=a\mathrm{e}^{ax}\sin bx-b\mathrm{e}^{ax}\sin bx\Rightarrow \mathrm{e}^{ax}\cos bx=aI_1-bI_2 \tag{2.11.8}$$

同上，联立 (2.11.7) 和 (2.11.8) 便可以求解出 I_1.

这里的技巧与前文有些不同，但总体而言大同小异，在此不做过多叙述.

求积分：

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sinh bx\,\mathrm{d}x$$

记：

$$I_1=\int \mathrm{e}^{ax}\sinh bx\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int \mathrm{e}^{ax}\cosh bx\,\mathrm{d}x$$

因此：

$$(\mathrm{e}^{ax}\sinh bx)'=a\mathrm{e}^{ax}\sinh bx+b\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\Rightarrow \mathrm{e}^{ax}\sinh bx=aI_1+bI_2 \tag{2.11.9}$$

$$(\mathrm{e}^{a}x\cosh bx)'=a\mathrm{e}^{ax}\cosh bx+b\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\Rightarrow \mathrm{e}^{ax}\cosh bx=aI_2+bI_1 \tag{2.11.10}$$

同上，联立 (2.11.9) 和 (2.11.10) 便可以求解出 I_1.

2.12 双元法

“双元法”是由知乎用户@虚调子[26]发展的一种求不定积分的方法. 其可以看成是组合积分法的一种扩展，能简化一些通常使用三角换元进行计算的积分的求解.

在介绍双元法之前，先介绍并证明一个极其简单的定理，以防之后出现但注意不出来（引用一个数学笑话：“This is obvious, but the fact that this is obvious is not obvious.”）：

Theorem 2.12.1 (合分比定理). 若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\pm c}{b\pm d}$

Proof. 设 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，则 $a=kb$，$c=kd$，因此 $a+c=k(b+d)$，$a-c=k(b-d)$. 即

$$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$$

□

[26]https://www.zhihu.com/people/la-la-la-4-25-46

对于 x，y，若满足 $x^2+y^2=a^2$（a 为某一常数，下同），则称此情况为"实圆"；若满足 $y^2-x^2=a^2$，则称此情况为"虚圆". 这里的两个变量 x 和 y 就被称作"双元".

对于"实圆"的情况，由于 $x^2+y^2=a^2$，因此 $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$. 因此，$\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{y\,\mathrm{d}x}{y^2}=\dfrac{-x\,\mathrm{d}y}{x^2}=\dfrac{-\mathrm{d}y}{x}$，于是，由前文"合分比定理"，有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{-\mathrm{d}y}{x}=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}\frac{x}{y}=\mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}$$

同理，对于"虚圆"的情况，由于 $y^2-x^2=a^2$，因此 $x\,\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}y$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$. 因此，由前文的"合分比定理"，有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}=\mathrm{d}\ln|x+y|$$

以上即是"双元法"原理的核心. 由上可以得出三组常用的结论：

第一组： $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$. 对于"实圆"，有[27]：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y}=\int\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int\frac{y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\frac{x}{y}=\arctan\frac{x}{y}+C$$

对于"虚圆"，有：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y}=\int\frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}=\int\mathrm{d}\ln(x+y)=\ln(x+y)+C$$

第二组： $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^3}$. 对于"实圆"，有（注意 $x^2+y^2=a^2$ 为常数）：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\int\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{y}=\int\frac{1}{y^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{x}{y}+C$$

对于"虚圆"，有（注意 $y^2-x^2=a^2$ 为常数）：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\int\frac{1}{y^2}\frac{y\,\mathrm{d}x}{y^2}=\int\frac{1}{y^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2-x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{x}{y}+C$$

注意，中间的一步用了"合分比定理"：

$$\frac{y\,\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2}=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2-x^2}$$

第三组： $\displaystyle\int y\,\mathrm{d}x$. 对于"实圆"，有（注意 $x^2+y^2=a^2$ 为常数）：

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(xy)+\frac{a^2}{2}\int\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\=&\frac{1}{2}xy+\frac{a^2}{2}\arctan\frac{x}{y}+C\end{aligned}$$

[27] 其实就是上面结论的最直接的运用，在此再次推导而已.

对于”虚圆“，有（注意 $y^2-x^2=a^2$ 为常数）

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}x =& \frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y\\ =& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(xy) + \frac{a^2}{2}\int \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2-x^2}\\ =& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(xy) + \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{y}\\ =& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(xy) + \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}\\ =& \frac{1}{2}xy + \frac{a^2}{2}\ln(x+y) + C\end{aligned}$$

注意，中间一步同样运用了“合分比定理”：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y\,\mathrm{d}x}{y^2} = \frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2-x^2}$$

第三组结论又可以总结成如下形式[28]：

$$\int y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xy + \frac{y^2 \pm x^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

运用这三组结论，我们可以简化很多原本需要使用三角换元进行计算的积分.

Example 2.12.1. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Solution. 设 $y^2=x^2+a^2$，则：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} = \ln|x+y| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

□

Example 2.12.2. 求 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$

Solution. 设 $y^2=x^2+a^2$，则：

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}x =& \frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y\\ =& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(xy) + \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}\\ =& \frac{1}{2}xy + \frac{a^2}{2}\ln|x+y| + C\\ =& \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C\end{aligned}$$

□

Example 2.12.3. 求 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

[28]证明很简单，不写了.

Solution. 设 $y^2=a^2-x^2$，则：

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}(xy)+\frac{a^2}{2}\int\frac{y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\frac{x}{y}\\=&\frac{1}{2}xy+\frac{a^2}{2}\arctan\frac{x}{y}+C\\=&\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$

（注意 $\arctan\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}$） □

除了这三组结论外，还有一个常用的结论：若 $y^2\pm x^2=a^2$，则

$$(1+n)\int y^n\,\mathrm{d}x=xy^n+na^2\int y^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\int y^n\,\mathrm{d}x=&xy^n-n\int xy^{n-1}\,\mathrm{d}y\\=&xy^n\pm n\int x^2y^{n-2}\,\mathrm{d}x\\=&xy^n+na^2\int y^{n-2}\,\mathrm{d}x-n\int y^n\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此：$(1+n)\int y^n\,\mathrm{d}x=xy^n+na^2\int y^{n-2}\,\mathrm{d}x$，QED.

运用这个结论，我们可以将 $\int y^n\,\mathrm{d}x$（其中 $n\in\mathbb{Z}$）转化成 $n=1$ 或 $n=2$ 的形式. $n=1$ 时即前文第三组结论的情况，$n=2$ 时则可以用 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$ 或者 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\operatorname{artanh}x+C$ 进行求解.

更多的例题可参考@虚调子的知乎专栏[29].

2.13 区间再现

在求解定积分时，我们可以巧妙地利用函数的某些对称性来巧妙地简化问题. 其中，“区间再现”便是经常使用的利用对称性进行简化的方法.

Theorem 2.13.1 (区间再现)**.** *若* $f(x)\in C[a,b]$，*则*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

Proof. 设 $x=a+b-t$，则 $\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}(a+b-t)=-\int_b^a f(a+b-t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t$$

□

利用上面的定理，我们马上可以得到下面的几个推论：

[29]https://zhuanlan.zhihu.com/p/302349671

Corollary 2.13.2. 若 $f(x) \in C[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}\,\mathrm{d}x$$

Corollary 2.13.3. 若 $f(x) \in C[0,1]$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)+f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

注意到 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$.

Corollary 2.13.4. 若当 $x \in [a,b]$，有 $f(x) = f(a+b-x)$（即 $f(x)$ 关于 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 轴对称），$g(x)+g(a+b-x) = m$（即 $g(x)$ 关于 $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{m}{2}\right)$ 对称）,则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{g(x)+g(a+b-2)}{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{m}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注意到若 $g(x) = x$，$f(x) = f_1(\sin x)$，$a = 0$，$b = \pi$，则

$$\int_0^\pi x f_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f_1(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

即课本中的结论.

区间再现的几何意义也是非常直观的，对于 $f(x) \to f(a+b-x)$ 的变换，其可以看成是函数 $f(x)$ 绕 $y = \dfrac{a+b}{2}$ 进行了一次翻转后再进行积分，其积分值显然并不会发生变化。

当然，若读者了解过卷积的话，可以发现，整个变换其实际上可以看成是函数 $f(x)$ 和 $g(x) = 1$ 进行了一次卷积.

下面列举了一些常用的区间再现变换：

- $a+b = \dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin x \to \cos x$、$\cos x \to \sin x$、$\tan x \to \cot x$
- $a+b = \dfrac{\pi}{4}$，则 $\tan x \to \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$
- $a+b = 0$，则 $x \to -x$

另外，当上述变换出现在 ln 之中时，往往能利用 ln 的性质（函数内相乘等于函数外相加）进行处理从而大大化简计算。

总之，在遇到不知道应该如何进行不定积分的定积分时，使用区间再现常常能利用函数的某种特殊的对称性化简函数从而进行不定积分从而求解.

2.14 Feynman 积分法

Feynman 积分法是一种高级的积分技巧. **有些时候某些复杂的式子（或构造出的复杂的式子）求导后形式较为简单**，那么便可以尝试使用 Feynman 积分.

Feynman 积分法基于 Leibniz 积分法则，如下：

Theorem 2.14.1 (Leibniz 积分法则). 设

$$f(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

那么有：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\,\mathrm{d}t+g(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}-g(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}$$

有关 Leibniz 积分法则的证明和其他更详细的内容，见 §3.7. 在 Leibniz 积分法则中，若上下限为常数，即 $a(x)=a$，$b(x)=b$，注意到 $a'(x)=b'(x)=0$，那么有：

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b g(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

总结就是一句话：**先积再导，等于先导再积**[30].

这里用一个经典的例子来说明：

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

这个积分用常规的办法无法得出，这里可以用 Feynman 积分法求出. 设：

$$f(a)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

这里的函数构造是做了一个 Laplace 变换，总而言之是一定的套路. 上式求导，则：

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty-\sin x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

这个积分用分部积分法（或者什么所谓的“表格法”之类的）很容易得出. 分部积分法求法如下：设 $I=\displaystyle\int-\sin x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$，则：

$$I=\mathrm{e}^{-ax}\cos x+a\int\cos x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-ax}(a\sin x+\cos x)-a^2I$$

因此：

$$I=\int-\mathrm{e}^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{1+a^2}+C$$

因此：

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\int_0^\infty-\sin x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\mathrm{e}^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{1+a^2}\right|_0^\infty=-\frac{1}{1+a^2}$$

这里我们可以看见，$\partial_a f$ 是简单的多项式，原本复杂的式子在求导之后变成了简单的多项式，其积分是很简单的，因此：

$$f(a)=\int-\frac{\mathrm{d}a}{1+a^2}=-\arctan a+C$$

这里需要确定待定常数 C 的值. 令 $a\to\infty$，因此：

$$f(\infty)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-x\cdot\infty}\,\mathrm{d}x=0=-\frac{\pi}{2}+C\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

因此原来的积分有：

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)=\frac{\pi}{2}$$

[30]可能会有数学系的说不能乱交换求导和积分，要验证满足一定条件. 但这里懒得验证了，问就是学物理学的.

同理，我们还可以轻易得到：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = f(1) = \frac{\pi}{4}$$

总而言之，Feynman 积分法的基本步骤如下：对于 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，

- 引入参数 t，使得 $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- $F'(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x$，此时 $\dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ 相对好积分.
- 对 $F'(t)$ 积分得到 $F(x)$.
- $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，求出原积分.

使用 Feynman 积分法主要有如下场景：

- 去某一项：$\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \displaystyle\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $g(x)$ 可以消掉 $f(x)$ 中想要消掉的部分（比如例子中 e^{-tx} 去分母）.
- 增某一项：$\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t}$ 中包含 $f'(x)$.
- 函数转有理函数：在 ln、arctan、arcsin 等中塞入 t，求导后变换成有理积分.

2.15 留数定理及求实函数积分

留数定理是解决实积分的一个有力武器，但留数定理涉及到了复变函数，在此仅做简略介绍，部分细节不会做过多介绍，更详细的内容可参考吴崇试等的《数学物理方法》.

2.15.1 两个有用的引理

这里我们先引入两个有用的引理：

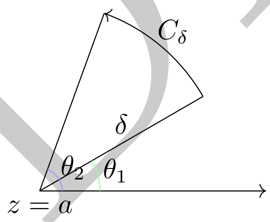


图 2.15.1: 小圆弧引理示意图

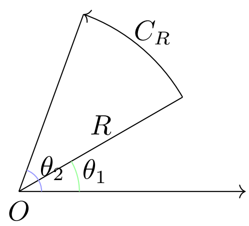


图 2.15.2: 大圆弧引理示意图

Lemma 2.15.1 (小圆弧引理). 如图 *2.15.1*，如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的空心邻域内连续，并且在 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$ 中，当 $|z-a| \to 0$ 时，$(z-a)f(a)$ 一致趋向于 k，则：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$

其中 C_δ 是以 $z=a$ 为圆心、δ 为半径、张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，$|z-a|=\delta$，$\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$.

小圆弧引理在实函数积分中运用较少，在此不做证明.

Lemma 2.15.2 (大圆弧引理). 如图 2.15.2，设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续，在 $\theta_1 \leq \arg z\theta_2$ 中，当 $|z| \to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致趋向于 K，则：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$

其中 C_R 是以原点为圆心、R 为半径，张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，$|z|=R$，$\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$.

证明过程如下：

Proof. 因为 $\displaystyle\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$，所以：

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_R}\left[f(z)-\frac{K}{z}\right]\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_R}|zf(z)-K|\cdot\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

由于当 $|z|\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致趋向于 K，因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M(\varepsilon)>0$（$M(\varepsilon)$ 与 $\arg z$ 无关），使得当 $|z|=R\to M$ 时 $|zf(z)-K<\varepsilon$，因此：

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| \leq \varepsilon(\theta_2-\theta_1)$$

即：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$

□

大圆弧引理有一个非常常用的推论，若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数，其中 $Q(z)$ 在实轴上无零点，且多项式 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 大 2 时，则：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

这个结论在求实积分时非常有用.

2.15.2 Laurent 展开和留数

在介绍 Laurent 展开前，我们所熟悉的是 Taylor 展开，它可以将收敛圆内将一个解析函数转化为一个幂级数，在复变函数上它与我们在实函数中的形式是一样的，$f(z)$ 在 a 点的 Taylor 展开为：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

其中：

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.15.1}$$

这里的 C 为在收敛域 $|z-a|<R$ 内取**逆时针方向**绕 a 点的任意一条闭合路径[31]（如图 2.15.3 所示）.

根据 **Taylor 展开的唯一性**. 无论我们用何方法，得到的 $f(z)$ 在同一个圆内的 Taylor 展开是唯一的，我们不一定要用式 (2.15.1) 来求 Taylor 展开系数[32].

[31] 根据惯例，若无特殊说明，默认为逆时针绕向.

[32] 虽然我们还是常用这个方法来求 Taylor 展开系数，但对于之后的 Laurent 展开，我们通常不用通式来计算其系数.

这里我们也可以讨论在无穷远处的 Taylor 展开. 如果 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析，则也可以在 $z=\infty$ 点做 Taylor 展开，此时只需要作变换 $z=\dfrac{1}{t}$ 后在 $t=0$ 处作 Taylor 展开[33].

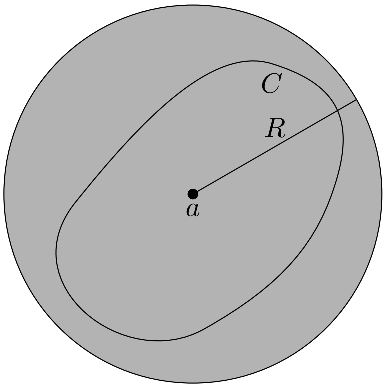


图 2.15.3: Taylor 展开示意图

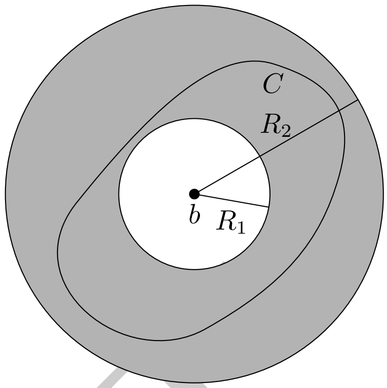


图 2.15.4: Laurent 展开示意图

Laurent 展开可以看成是 Taylor 展开的一种扩展. 我们不再要求 $f(z)$ 在某个圆内单值解析（如图 2.15.3），只要求 $f(z)$ 在某个圆环内单值解析（如图 2.15.4）. 此时我们仍旧可以将其展开成幂级数，此时有：

Theorem 2.15.3 (Laurent 展开). 设函数 $f(z)$ 在以 b 为圆心的环形区域 $R_1 \le |z-b| \le R_2$ 中单值解析，则对于环域内任意 z 点，$f(z)$ 可以用幂级数展开成：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n$$

其中：

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \tag{2.15.2}$$

其中 C 是在环域内绕 b 点一周的任意闭合曲线.

这里 Laurent 展开相比 Taylor 展开在形式上的区别是 Taylor 展开的 $n\in[0,+\infty)$ 而 Laurent 展开的 $n\in\mathbb{R}$. 因此 Taylor 展开可以看成 Laurent 展开的一部分.

同 Taylor 展开的唯一性，**Laurent 展开也是唯一的**. 同样意味着，我们不一定要用式 (2.15.2) 来计算 Laurent 展开系数（式 (2.15.2) 计算较为复杂，一般也不会用这个式子计算），包括引用 Taylor 展开中的结果.

与 Taylor 展开相同，我们同样可以讨论无穷远处的 Laurent 展开. 同样只需要作变换 $z=\dfrac{1}{t}$ 后在 $t=0$ 处作 Laurent 展开即可.

这里需要注意，一般而言，对于 Laurent 展开，即使是正幂项的系数：

$$a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)$$

下面给出求 Laurent 展开的一个例子. 求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 内的 Laurent 展开. 显然 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一个奇点. 因此我们可以通过部分分式得到：

$$f(z)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}$$

[33] 此时 Taylor 展开中只有常数项和负幂项，没有正幂项.

对第二项 Taylor 展开得：

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n, \quad 0 < |z| < 1$$

此即为 $f(z)$ 在 $0 < |z| < 1$ 的 Laurent 展开.

设 $f(z)$ 为单值函数（或多值函数的一个单值分支），如果 $f(x)$ 在 b 点不解析，但 $\exists r > 0$，$f(z)$ 在 b 点的空心邻域 $0 < |z-b| < r$ 内处处可导，则称 b 点为 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 反之被称其为**非孤立奇点**.

若 b 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，那么一定存在 $R > 0$，使得 $f(z)$ 在环域 $0 < |z-b| < R$ 内可以做 Laurent 展开：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \tag{2.15.3}$$

此时可能会出现下面三种情况：

- 展开式 (2.15.3) 中无负幂次项（和 Taylor 展开相同），则称 b 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.
- 展开式 (2.15.3) 中只含有有限负幂次项，则称 b 为 $f(z)$ 的**极点**.
- 展开式 (2.15.3) 中含有无穷多负幂次项，则称 b 为 $f(z)$ 为**本性奇点**.

对于极点，总可以 Laurent 展开成有限个幂次项（m 为正整数）：

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\ &= (z-b)^{-m}\phi(z), \quad 0 < |z-b| < R \end{aligned}$$

不难证明，$\phi(z)$ 在 $z = b$ 点的邻域内是解析的，而且 $a_{-m} \neq 0$. 我们称 b 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**.

在 $f(z)$ 在孤立奇点 b 的空心邻域的 Laurent 展开：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

我们称展开式中 $(z-b)^{-1}$ 的系数 a_{-1} 为 $f(z)$ 的在 b 处的**留数**（Residue），记为 $\operatorname{res} f(z)$.

若我们要求 $f(z)$ 在 b 处的留数，且 b 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则可以通过求导很容易求得出来[34]：

$$\operatorname{res} f(b) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} (z-b)^m f(z) \right|_{z=b}$$

若 $z = b$ 为一阶极点，则：

$$\operatorname{res} f(b) = \lim_{z \to b} (z-b) f(z)$$

可见，$f(z)$ 在复平面内一阶极点 $z = b$ 处的留数一定不为 0.

一个更常见的情况是 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 b 点及其邻域内解析，且 $P(b) \neq 0$，$z = b$ 是 $Q(z)$ 的一阶零点，即 $Q(b) = 0$，$Q'(b) \neq 0$. 则：

$$\operatorname{res} f(b) = \lim_{z \to b} (z-b) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(b)}{Q'(b)}$$

同样，我们可以计算无穷远处的留数. 如果 ∞ 点不是 $f(z)$ 的非孤立奇点，那么其留数定义为：

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z$$

[34] 下面的式子在前文中曾提及过，见式 (2.8.3)

其中 C 为绕 ∞ 点顺时针一周的简单封闭曲线，在围道内除了 ∞ 点外其他点均解析. 需要注意 $\operatorname{res} f(\infty)$ 并不是 $f(z)$ 在 ∞ 点邻域内 Laurent 展开中 z^1 项的系数.

2.15.3 留数定理及求实函数积分

现在我们开始介绍留数定理.

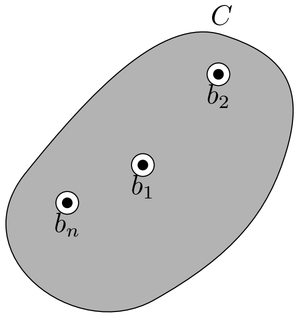


图 2.15.5: 留数定理

Theorem 2.15.4 (留数定理)**.** *如图 2.15.5，设有界区域 G 的边界 C 为分段光滑的简单闭合曲线，若除了有限个孤立奇点 b_k，$k=1,2,\cdots,n$ 外，$f(z)$ 在 G 内单值解析，在 $\overline{G}$ 中连续，并且 $f(z)$ 在边界 C 上连续，则沿区域 G 边界的正向（逆时针）积分为：*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k)$$

留数定理告诉我们，**要计算解析函数的围道积分值，只需要计算出函数在围道内孤立奇点处的留数值即可**. 只要我们能把某个定积分转化为某个函数的围道积分，我们便可能通过留数定理快速计算出这些定积分.

常用留数定理计算的定积分是无穷积分，如要求解下面的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$$

则考虑下面的复变积分，积分围道如图 2.15.6，则：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} + \int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3}$$

注意图中 $R\to\infty$，且 $z=\mathrm{i}$ 为 $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$ 在围道内的三阶极点. 由留数定理，上述复变积分有：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}\left.\frac{1}{(1+z^2)^3}\right|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left.\left[(z+\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{3\pi}{8}$$

根据大圆弧引理（Lemma 2.15.2），有：

$$\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3} = 0$$

因此，原积分为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

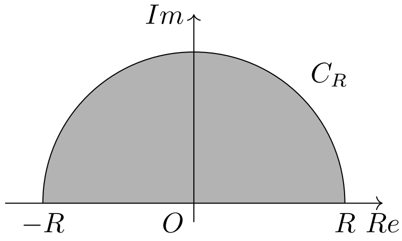


图 2.15.6: 无穷积分围道（1）

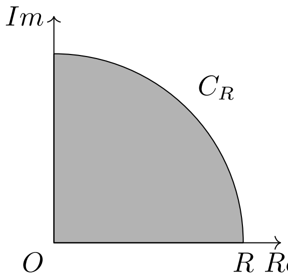


图 2.15.7: 无穷积分围道（2）

又如求下面的积分：

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

这里我们选择的围道如图 2.15.7，同样注意图中 $R\to\infty$，此时围道内只有一个奇点，由留数定理，有：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\ \frac{1}{1+z^4}\bigg|_{z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4}} = \frac{\pi}{2}\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

同时，注意到：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} + \int_\infty^0 \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}y}{1+(\mathrm{i}y)^4} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = (1-\mathrm{i})\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}$$

上面计算中第二项由于大圆弧引理（Lemma 2.15.2）为 0. 综上，原积分有：

$$\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

这里我们可以看到，**选取一个合适的围道对于求解积分而言是非常重要的**. 在上面的例子中我们同样可以选取图 2.15.6 的围道，但这样就需要计算两个奇点的留数，作为一个较为极端的例子，我们计算下面的积分：

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{100}}$$

这里我们选取夹角为 $\dfrac{\pi}{50}$ 的扇形围道（注意环路积分为逆时针方向），此时围道内只有一个孤立奇点. 此时有（这里同样使用了大圆弧引理（Lemma 2.15.2））：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{100}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{100}} + \int_\infty^0 \frac{\mathrm{d}z}{1+(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{50}}\cdot z)^{100}} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{100}} = \left[1-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{50}}\right]\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{100}}$$

由留数定理，有：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{100}} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}\ \frac{1}{1+z^{100}}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{100}}} = \frac{\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{99\mathrm{i}\pi}{100}}}{50}$$

因此：

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{100}} = \frac{\pi}{100}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\frac{99\pi}{100}\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{99\pi}{100}\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{100}\csc\frac{\pi}{100}$$

这里同样可以看见，留数定理在求一些定积分时能大幅度简化计算. 除了无穷积分外，留数定理在求有理三角函数积分、含三角函数无穷积分等积分时也能简化计算，具体计算细节可参考《数学物理方法》或其他有关书籍.

2.16 微分算子法

在求解二阶常系数非齐次线性微分方程时，我们可以使用微分算子法来快速得到其特解，从而加速求解时间.

2.16.1 算子与微分算子的引入

算子（又称**算符**）是一种从函数到函数的映射. 对于我们熟悉的函数，其将一个（或者一组）数映射成另一个（一组）数：

$$f: x \to y, \quad \text{记作 } y = f(x)$$

而对于算子，其将一个（一组）**函数**映射成另一个（一组）**函数**.

$$\mathrm{L}: x(t) \to y(t), \quad \text{记作 } y(t) = \mathrm{L}[x(t)]$$

显然，求导运算可以看成一种算子，其输入一个函数，输出另一个函数. 同理，不定积分[35]也可以看成一种算子. 总之，我们可以定义如下求导算子：

Definition 2.16.1. 记 $\mathrm{D} := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为**微分算子**，同时，简记 $\mathrm{D}y = \mathrm{D}[y] = y'$、$\mathrm{D}^2 y = y''$. 另外，记 $\mathrm{D}^{-1}y = \dfrac{1}{\mathrm{D}}y = \displaystyle\int y\,\mathrm{d}x$.

显然，根据微分算子的定义，我们知道其满足如下推论：

Corollary 2.16.1. 设 $f(x)$、$g(x)$ 为连续可微的函数，易知微分算子 D 满足 $\mathrm{D}[af(x)+bg(x)] = a\mathrm{D}f(x) + b\mathrm{D}g(x)$，其中 a、b 为常数. 即微分算符 D 是**线性**的.

2.16.2 二阶常系数非齐次微分方程通解和特解

对于任意一个二阶常系数线性微分方程，其都可以很容易改写成微分算子的形式，例如：

$$y'' + py' + q = f(x)$$

可以简单改写成：

$$(\mathrm{D}^2 + p\mathrm{D} + q)y = f(x)$$

这里，我们记算符 $\mathrm{L} = \mathrm{D}^2 + p\mathrm{D} + q$，即 $\mathrm{L}y = (\mathrm{D}^2 + p\mathrm{D} + q)y$，因此，对于一个一般的二阶常系数非齐次微分方程，其可以写成 $\mathrm{L}y = f(x)$. 对于二阶常系数齐次微分方程，则可以写为 $\mathrm{L}y = 0$.

于是，我们可以得到如下定理：

Theorem 2.16.2. 若 y_1、y_2 是方程 $\mathrm{L}y = f(x)$ 的两个解，那么 $y_1 - y_2$ 是方程 $\mathrm{L}y = 0$ 的一个解.

Proof. 已知 $\mathrm{L}y_1 = \mathrm{L}y_2 = f(x)$，根据微分算子的线性知，有 $\mathrm{L}y_1 - \mathrm{L}y_2 = \mathrm{L}[y_1 - y_2] = 0$，即 $y_1 - y_2$ 是方程 $\mathrm{L}y = 0$ 的解. □

类似的，我们可以得到下面我们所熟悉的定理：

[35] 这里的不定积分算子默认没有加未定常数 C.

Theorem 2.16.3. 若 y^* 为方程 $\mathrm{L}y=f(x)$ 的一个特解，设 y 为 $\mathrm{L}y=f(x)$ 的一个通解，则 y 可以写为：$y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$ 其中 $c_1y_1+c_2y_2$ 为方程 $\mathrm{L}y=0$ 的通解.

Proof. 记 y 为方程 $\mathrm{L}y=f(x)$ 的通解，则 $\mathrm{L}[y]=\mathrm{L}[y^*]=f(x)$，因此 $\mathrm{L}[y]-\mathrm{L}[y^*]=0$，由微分算子的线性知，$\mathrm{L}[y-y^*]=0$，由 y 的任意性知，$y-y^*=c_1y_1+c_2y_2$，其中 $c_1y_1+c_2+y_2$ 为 $\mathrm{L}y=0$ 的通解（即二阶常系数齐次微分方程的通解）. 故 $y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$. □

因此，我们将求解一个二阶常系数非齐次微分方程问题转化成找到该方程的一个特解的问题. 另外，从线性代数的角度说，特解 y^* 将解集平面从 $\mathrm{L}y=0$ 移到了 $\mathrm{L}y=f(x)$ 上.

2.16.3 多项式微分算子的性质以及不同情况下求特解方法

现在，我们考虑如下算子：$\mathrm{L}=P(\mathrm{D})=a_0+a_1\mathrm{D}+a_2\mathrm{D}^2+\cdots$，即 $P(\mathrm{D})$ 是关于微分算子 D 的一个多项式. 对于前文所讨论方程而言，$P(\mathrm{D})=\mathrm{D}^2+p\mathrm{D}+q$.

因此我们可以将一个高阶常系数微分方程写为 $P(\mathrm{D})y=f(x)$，下面我们会给出不同 $f(x)$ 下的 Proposition.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{kx}$

根据微分算子的定义，算子 $\mathrm{L}=P(\mathrm{D})$ 有如下性质：

Theorem 2.16.4. $P(\mathrm{D})\mathrm{e}^{kx}=P(k)\mathrm{e}^{kx}$

Proof. 直接展开，有：

$$P(\mathrm{D})\mathrm{e}^{kx}=(a_0+a_1\mathrm{D}+a_2\mathrm{D}^2+\cdots)\mathrm{e}^{kx}=(a_0+a_1k+a_2k^2+\cdots)\mathrm{e}^{kx}=P(k)\mathrm{e}^{kx}$$

□

因此，我们可以马上得到如下推论：

Corollary 2.16.5. 对于方程 $P(\mathrm{D})y=\mathrm{e}^{kx}$，若 $P(k)\neq 0$，则该方程的一个特解为 $y^*=\dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{P(k)}$

Proof. 由于 $P(\mathrm{D})y=\mathrm{e}^{kx}$，设 $y^*=\dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{P(k)}$，则：

$$P(\mathrm{D})y^*=P(\mathrm{D})\frac{\mathrm{e}^{kx}}{P(k)}=\frac{P(k)\mathrm{e}^{kx}}{P(k)}=\mathrm{e}^{kx}$$

因此 y^* 为方程 $P(\mathrm{D})y=\mathrm{e}^{kx}$ 的一个解. □

借助此推论，我们可以很快计算出如下方程的特解.

Example 2.16.1. 求 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解.

Solution. 由前文推论，有特解：

$$y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2-4\mathrm{D}+3}2\mathrm{e}^{2x}=2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2^2-4\times 2+3}=-2\mathrm{e}^{2x}$$

□

在运用此定理解题的过程中，如果遇到了 $P(k)=0$，则无法计算（此时会出现除 0 的问题）. 我们可以通过引入一些定理来解决（下面的证明过程较为繁琐，可选择阅读）：

Theorem 2.16.6. $P(\mathrm{D})[\mathrm{e}^{kx}u(x)] = \mathrm{e}^{kx}P(\mathrm{D}+k)[u(x)]$

Proof. 由于 $P(\mathrm{D}) = a_0 + a_1\mathrm{D} + \cdots$，$P(\mathrm{D}+k) = a_0 + a_1(\mathrm{D}+k) + \cdots$，由微分算子的线性知，要证原定理，只需证明 $\mathrm{D}^n\left[\mathrm{e}^{kx}u(x)\right] = \mathrm{e}^{kx}(\mathrm{D}+k)^n u(x)$. 这里我们采用归纳法来证明.

设 $\mathrm{D}^n\left[\mathrm{e}^{kx}u(x)\right] = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{D}^n u(x)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{n+1}[\mathrm{e}^{kx}+u(x)] =& \mathrm{D}\left[\mathrm{D}^n\left[\mathrm{e}^{kx}u(x)\right]\right] = \mathrm{D}\left[\mathrm{e}^{kx}(\mathrm{D}+k)^n u(x)\right]\\ =& \mathrm{e}^{kx}(\mathrm{D}+k)(\mathrm{D}+k)^n u(x) = \mathrm{e}^{kx}(\mathrm{D}+k)^{n+1}u(x)\end{aligned}$$

当 $n=0$ 时，易验证满足此关系，此情况非常 Trival. 当 $n=1$ 时：

$$\mathrm{D}\left[\mathrm{e}^{kx}u(x)\right] = u(x)\mathrm{D}\mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{kx}\mathrm{D}u(x) = \mathrm{e}^{kx}(\mathrm{D}+k)u(x)$$

由归纳法，$\mathrm{D}^n\left[\mathrm{e}^{kx}u(x)\right] = \mathrm{e}^{kx}(\mathrm{D}+k)^n u(x)$. 综上所述，原式得证. □

同时我们引入一个引理：

Lemma 2.16.7. 若 $P(k) = P'(k) = \cdots = P^{(n-1)}(k) = 0$ 且 $P^{(n)}(k) \neq 0$，则有 $P(\mathrm{D}+k)x^n = P^{(n)}(k)$

Proof. 设 $P(\mathrm{D})$ 为一个最高次项为 m 次的多项式（$m \geq n$）. 则：

$$\begin{aligned}P(\mathrm{D}+k)x^n =& \left[a_0 + a_1(\mathrm{D}+k) + a_2(\mathrm{D}+k)^2 + a_m(\mathrm{D}+k)^m\right]x^n\\ =& \left[a_0 + a_1(C_1^0k + C_1^1\mathrm{D}) + a_2(C_2^0k^2 + C_2^1k\mathrm{D} + C_2^2\mathrm{D}^2) + \cdots\right]x^n\\ &+ \left[a_0 + a_1C_1^0k + a_2C_2^0k^2 + \cdots + a_mC_m^0k^m\right]x^n \longrightarrow \frac{P(k)}{0!}x^n\\ &+ \left[a_1C_1^1 + a_2C_2^1k + a_3C_3^1k^2 + \cdots + a_mC_m^1k^{m-1}\right]\mathrm{D}x^n \longrightarrow \frac{P'(k)}{1!}\mathrm{D}x^n\\ &+ \left[a_2C_2^2 + a_3C_3^2k + a_4C_4^2k^2 + \cdots + a_mC_m^2k^{m-2}\right]\mathrm{D}^2x^n \longrightarrow \frac{P''(k)}{2!}\mathrm{D}^2x^n \quad \vdots\\ &+ a_mC_m^m\mathrm{D}^mx^n \longrightarrow \frac{P^{(m)}(k)}{m!}\mathrm{D}^mx^n\\ =& \sum_{l=0}^{m}\frac{P^{(l)}(k)}{l!}\mathrm{D}^lx^n\end{aligned}$$

注意在上述推导中，有 $C_m^nk^{m-n} = \dfrac{m!k^{m-n}}{n!(m-n)!} = \dfrac{\mathrm{D}^nk^m}{n!}$

当 $l > n$ 时，$\mathrm{D}^lx^n = 0$. 当 $l < n$ 时，$P^{(l)}(k) = 0$，因此：

$$P(\mathrm{D}+k)x^n = \frac{P^{(n)}(k)}{n!}\mathrm{D}^nx^n = P^{(n)}(k)$$

□

有了这个引理，我们可以证明如下定理：

Theorem 2.16.8. 对于方程 $P(\mathrm{D})y = \mathrm{e}^{kx}$，且 $P(k) = P'(k) = \cdots = P^{(n-1)}(k) = 0$、$P^{(n)}(k) \neq 0$，则该方程的一个特解为 $y^* = \dfrac{x^n\mathrm{e}^{kx}}{P^{(n)}(k)}$

Proof. 根据 Theorem 2.16.6 和 Lemma 2.16.7 有：

$$P(\mathrm{D})y^* = \frac{P(\mathrm{D})x^n \mathrm{e}^{kx}}{P^{(n)}(k)} = \frac{\mathrm{e}^{kx}P(\mathrm{D}+k)x^n}{P^{(n)}(k)} = \frac{\mathrm{e}^{kx}P^{(n)}(k)}{P^{(n)}(k)} = \mathrm{e}^{kx}$$

□

此定理非常重要，常用于处理 e^{kx}（或者通过 Euler 定理转化成指数函数形式的三角函数）与多项式函数混合时的情况.

因此，我们可以借助此定理快速求出下面方程的特解：

Example 2.16.2. 求 $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{-3x}$ 的一个特解

Solution. 由 Lemma 2.16.5，有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} - 3}\mathrm{e}^{-3x}$$

由于 $(-3)^2 + 2\cdot(-3) - 3 = 0$，因此，根据 Theorem 2.16.8，有：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} - 3}\mathrm{e}^{-3x} = x\frac{1}{2\mathrm{D}+2}\mathrm{e}^{-3x} = -\frac{x}{4}\mathrm{e}^{-3x}$$

□

综上，我们有如下方法论：

Proposition 2.16.9. *若要求方程 $P(\mathrm{D})y = \mathrm{e}^{kx}$ 的特解，则遵循以下步骤：*

1. *直接写出式子 $y^* = \dfrac{1}{P(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{kx}$*
2. *若 $P(k) \neq 0$，则得出特解 $y^* = \dfrac{1}{P(k)}\mathrm{e}^{kx}$，若 $P(k) = 0$，则改写式子成 $y^* = x\dfrac{1}{P'(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{kx}$*
3. *若 $P'(k) \neq 0$，则得出特解 $y^* = \dfrac{x}{P'(k)}\mathrm{e}^{kx}$，若 $P'(k) = 0$，则改写式子成 $y^* = x^2\dfrac{1}{P''(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{kx}$*
4. *若 $P''(k) \neq 0$，则得出特解 $y^* = \dfrac{x^2}{P''(k)}\mathrm{e}^{kx}$，若 $P''(k) = 0$，则改写式子成 $y^* = x^3\dfrac{1}{P'''(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{kx}$，以此类推*

2. $f(x) = \sin x$ 或 $f(x) = \cos x$

进一步的，借助 **Euler 定理**（$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$），我们可以将 $P(\mathrm{D})y = f(x)$ 中 $f(x) = \sin x$ 或 $f(x) = \cos x$ 的情况转化为 $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$ 的情况从而使用前文的方法. 一般而言，有如下方法论：

Proposition 2.16.10. *若要求方程 $P(\mathrm{D})y = \sin ax$ 或 $P(\mathrm{D})y = \cos ax$ 的特解，则遵循以下步骤（下文以 $\sin ax$ 为例，$\cos ax$ 类似）：*

1. *直接写出式子 $y^* = \dfrac{1}{P(\mathrm{D})}\sin ax$*
2. *将 $P(\mathrm{D})$ 中的 D^2 替换为 $-a^2$，同时改写/化简式子. 若遇到除 0 情况则用 Lemma 2.16.7 处理（提一个 x 并对 $P(\mathrm{D})$ 求一次导）*

下面给出一些计算的例子：

Example 2.16.3. 求 $y'' - y = \sin x$ 的一个特解

Solution. 由前文 Proposition 2.16.10 知，方程有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 1}\sin x = \frac{1}{-(1^2) - 1}\sin x = -\frac{1}{2}\sin x$$

□

Example 2.16.4. 求 $y'' + 4y = \cos 2x$ 的一个特解

Solution. 由前文 Proposition 2.16.10 知，方程有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 4}\cos 2x$$

这里我们发现 $-(2)^2 + 4 = 0$，遇到了除 0 情况，因此我们提一个 x 并对 $P(\mathrm{D})$ 求一次导，具体操作如下：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 4}\cos 2x = x\frac{1}{2\mathrm{D}}\cos 2x$$

其中 $2\mathrm{D}$ 为 $\mathrm{D}^2 + 4$ “求导”后的结果（把 D 看成一个正常的变量）因此，我们可以得到特解：

$$y^* = x\frac{1}{2\mathrm{D}}\cos 2x = \frac{x}{2}\frac{1}{\mathrm{D}}\cos 2x = \frac{x}{4}\sin 2x$$

其中 $\dfrac{1}{\mathrm{D}}\cos 2x = \displaystyle\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x.$ □

Example 2.16.5. 求 $y'' - 6y' + 9y = \cos x$ 的一个特解

Solution. 由前文 Proposition 2.16.10 知，方程有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 6\mathrm{D} + 9}\cos x = \frac{1}{8 - 6\mathrm{D}}\cos x = \frac{8 + 6\mathrm{D}}{64 - 36\mathrm{D}^2}\cos x = \frac{8 + 6\mathrm{D}}{100}\cos x = \frac{8\cos x - 6\sin x}{100}$$

□

3. $f(x) = Q_n(x)$ 其中 $Q_n(x)$ 是关于 x 的多项式

下面我们研究当 $P(\mathrm{D})y = Q_n(x)$ 时的情况（$Q_n(x)$ 为关于 x 的一个多项式），对于此情况，可以使用如下定理进行处理：

Theorem 2.16.11. 若 $P(\mathrm{D}) = \mathrm{D} - k$，则方程 $P(\mathrm{D})y = Q_n(x)$ 有特解 y^* 为

$$y^* = \left(-\frac{1}{k} - \frac{\mathrm{D}}{k^2} - \cdots \frac{\mathrm{D}^n}{k^{n+1}}\right)Q_n(x)$$

其中 $Q_n(x)$ 为关于 x 的一个 n 次多项式.

Proof. 显然，方程的特解可以写为 $y^* = \dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)$，则我们的目的就是找到 $\dfrac{1}{P(\mathrm{D})}$ 所对应的算符，记为 $F(\mathrm{D})$，即 $F(\mathrm{D}) \cdot P(\mathrm{D}) = 1$.

从第一项开始，不难注意到，$(-k + \mathrm{D})\left(-\dfrac{1}{k}\right) = 1 - \dfrac{\mathrm{D}}{k}$，这里多出来了 $-\dfrac{\mathrm{D}}{k}$ 这一项，因此我们需要添加第二项以去除.

第二项：不难注意到 $(-k + \mathrm{D})\left(-\dfrac{\mathrm{D}}{k^2}\right) = \dfrac{\mathrm{D}}{k} - \dfrac{\mathrm{D}^2}{k^2}$，这里多出来了 $-\dfrac{\mathrm{D}^2}{k^2}$ 这一项，因此我们需要添加第三项以去除……

综上，以此类推，有 $F(\mathrm{D}) = -\dfrac{1}{k} - \dfrac{\mathrm{D}}{k^2} - \cdots - \dfrac{\mathrm{D}^n}{k^{n+1}} - \cdots$ 注意到 $Q_n(x)$ 在求导次数大于 n 时为 0. 综上所述，原定理得证. □

借助此定理，我们可以总结出如下方法论（经过了一些推广，推广过程类似前文，在此省略）：

Proposition 2.16.12. *若要求方程 $P(\mathrm{D})y = Q_n(x)$ 的特解，其中 $Q_n(x)$ 是关于 x 的多项式，则遵循以下步骤：*

1. *直接写出式子 $y^* = \dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)$*
2. *改写式子，使其出现 $\dfrac{a}{1-q}$ 的形式（其中 q 包含有微分算子 D）*
3. *将 $\dfrac{a}{1-q}$ 替换成 $a + aq + aq^2 + \cdots$（只用保留前面几项，可以直接略去 D^m 算子，其中 $m > n$，n 为 $Q_n(x)$ 的次数）*

下面给出一些计算例子：

Example 2.16.6. 求 $y'' + y = -2x$ 的一个特解

Solution. 根据前文 Proposition 知，方程有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2+1}(-2x) = \frac{1}{1-(-\mathrm{D}^2)}(-2x) = (1-\mathrm{D}^2+\cdots)(-2x) = -2x$$

□

Example 2.16.7. 求 $y'' + y' = x^2$ 的一个特解

Solution. 根据前文 Proposition 知，方程有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}x^2 = \frac{1}{\mathrm{D}}\frac{1}{1-(-\mathrm{D})}x^2 = \frac{1}{\mathrm{D}}(1-\mathrm{D}+\mathrm{D}^2+\cdots)x^2 = \frac{1}{\mathrm{D}}(x^2-2x+2) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

□

Example 2.16.8. 求 $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$ 的一个特解

Solution. 根据前文 Proposition 知，方程有特解：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}+2}(x^2+1) = \frac{1}{\mathrm{D}+1}\frac{1}{\mathrm{D}+2}(x^2+1)$$

类似前面例子进行两次处理（一次 $1/(\mathrm{D}+2)$、一次 $1/(\mathrm{D}+1)$），即可得到：

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

另外我们还可以这么处理：

$$y^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}+2}(x^2+1) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}(\mathrm{D}^2+3\mathrm{D})}(x^2+1) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}) + \frac{1}{8}(\mathrm{D}^2+3\mathrm{D})^2 + \cdots\right](x^2+1)$$

展开计算后同样可以得到：

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

□

在前文中，我们分别就方程 $P(\mathrm{D})y=f(x)$ 中 $f(x)$ 等于 e^{kx}、$\sin ax$ 或 $\cos ax$、$Q_n(x)$ 的情况分别给出了求出特解的 Proposition，下面我们讨论当 $f(x)$ 是上述函数的混合时的情形.

4. $f(x)=\mathrm{e}^{kx}g(x)$

如果 $f(x)$ 是 e^{kx} 和 $g(x)$ 的积，其中 $g(x)$ 可以是 $\sin ax$ 或 $\cos ax$ 或 $Q_n(x)$，则可以使用 Theorem 2.16.6 进行处理，将 e^{kx} 提出来，转换为前面的三种情况.

下面给出一些计算例子：

Example 2.16.9. 求 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\cos x+2x\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解

Solution. 根据“套路”：

$$y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}(\mathrm{e}^{-x}\cos x+2x\mathrm{e}^{x})=\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}\mathrm{e}^{-x}\cos x+\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}2x\mathrm{e}^{x}$$

第一项，根据 Theorem 2.16.6，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}\mathrm{e}^{-x}\cos x=&\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{(\mathrm{D}-1)^2-3(\mathrm{D}-1)+2}\cos x\\=&\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{\mathrm{D}^2-5\mathrm{D}+6}\cos x\\=&\frac{\mathrm{e}^{-x}}{10}(\cos x-\sin x)\longrightarrow\text{（使用了 Proposition 2.16.10）}\end{aligned}$$

第二项，根据 Theorem 2.16.6，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}2x\mathrm{e}^{x}=&e^{x}\frac{1}{(\mathrm{D}+1)^2-3(\mathrm{D}+1)+2}2x\\=&\mathrm{e}^{x}\frac{1}{\mathrm{D}^2-\mathrm{D}}2x\\=&-\mathrm{e}^{x}(x^2+2x)\longrightarrow\text{(使用了 Proposition 2.16.12)}\end{aligned}$$

因此，原方程一个特解为：

$$y^*=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{10}(\cos x-\sin x)-\mathrm{e}^{x}(x^2+2x)$$

□

5. $f(x)=Q_n(x)\sin ax$ 或 $f(x)=Q_n(x)\cos ax$

如果 $f(x)$ 是多项式 $Q_n(x)$ 和正余弦函数 $\sin ax$ 或 $\cos ax$ 的乘积，则我们可以使用 **Euler 定理**（$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$）将其转化为前一种情况. 具体而言，我们有 $\cos x=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$，$\sin x=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ 这里 Re 为取复数的实部，Im 为取复数的虚部.

因此，我们可以总结出如下方法论：

Proposition 2.16.13. *若要求方程 $P(\mathrm{D})y=Q_n(x)\sin ax$ 或者 $P(\mathrm{D})y=Q_n(x)\cos ax$ 的特解，其中 $Q_n(x)$ 是关于 x 的多项式，则遵循以下步骤：*

1. *直接写出式子* $y^*=\dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)\sin ax$ *或* $y^*=\dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)\cos ax$
2. *将* $\sin x$、$\cos x$ *改写成* $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$、$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ *的形式：*
   $y^*=\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$ *或* $y^*=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$

> *3.* 用 *Theorem 2.16.6* 处理 $\dfrac{1}{P(\mathrm{D})}Q_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，并根据不同的类型进一步计算

下面给出一些计算例子：

Example 2.16.10. 求 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解

Solution. 根据前文 Proposition：

$$y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}(x\cos 2x)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)$$

这里我们记 $\widetilde{y^*}=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$，则 $y^*=\mathrm{Re}\,\widetilde{y^*}$. 由 Theorem 2.16.6，有：

$$\widetilde{y^*}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\frac{1}{(\mathrm{D}+2\mathrm{i})^2+(\mathrm{D}+2\mathrm{i})}x=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\frac{1}{(\mathrm{D}+2\mathrm{i})^2+1}x$$

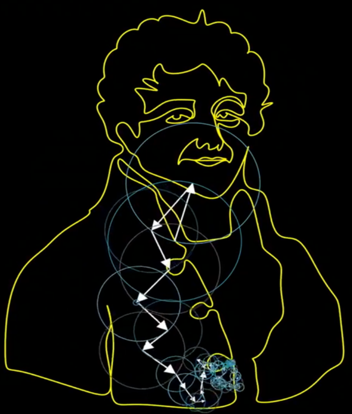
由 Proposition 2.16.12，有：

$$\widetilde{y^*}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(\mathrm{D}^2+4\mathrm{i}\mathrm{D})\right)x=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\left(-\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\mathrm{i}\right)$$

由 Euler 定理，$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x$，因此：

$$y^*=\mathrm{Re}\left[(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\mathrm{i}\right)\right]=\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

这里在计算的时候有一个小技巧，由于我们只要实部，因此我们只需要计算 $\cos 2x\cdot\left(-\dfrac{1}{3}x\right)$ 和 $-\mathrm{i}^2\sin 2x\cdot\dfrac{4}{9}$. 而另外项乘积则不需要计算. 反之，若需要取虚部，同样也只需要计算四个乘积之中的两项. □



"Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them."

——Joseph Fourier

Chapter 3

杂七杂八

3.1 Heine 定理

在证明某函数极限不存在时，常常使用 Heine 定理，定理内容如下

Theorem 3.1.1 (Heine 定理). 若 $x_n \neq x_0$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 (n \to \infty)$，恒有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

Heine 定理的证明如下

Proof. 证明过程分为两部分.

先证 $\Rightarrow$. 由极限定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，有当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$| f(x) - A | < \varepsilon$ 恒成立. 由数列极限定义，对于上述 δ，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，$| x_n - x_0 | < \delta$. 故 $| f(x_n) - A| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

再证 $\Leftarrow$. 利用反证法，假设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq A$，即 $\forall \delta > 0$，总 $\exists x' \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，使得 $| f(x') - A | > \varepsilon$. 因此，要证明命题成立，只需要证明在条件成立的情况下，上述结论不总是成立即可. 因此我们可以构造一个反例来证明上述结论不成立，从而证明命题成立. 由上述结论可知，总 $\exists x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 使得 $| f(x) - A | > \varepsilon$ 成立. 因此我们依次取

$$\delta = \delta', \frac{\delta'}{2}, \cdots, \frac{\delta'}{n}, \cdots$$

从而构成数列 $\{x_n\}$. 易知 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，由条件知 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$，故 $| f(x_n) - A | < \varepsilon$，与子结论矛盾，因此构造出的数列不满足上述子结论，因此假设不成立，原命题成立.

综上所述，Heine 定理得证. □

Heine 定理常常用来证明某函数极限不存在. 例如，要证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在时，我们可以构造出两个趋近于 x_0 的数列 $\{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\}$，证明 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n^{(1)}) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n^{(2)})$，即可证明该函数极限不存在.

3.2 无穷多无穷小乘积

（在本章节中，我们没有按照传统的写法严格区分函数（一般记为 $f(x)$ 之类的）和数列（一般记为 x_n 之类的）而统一写为 $f(x)$ 或 $f(n)$ 的形式.）

对于无穷多无穷小之和不一定是无穷小是显然的，我们可以轻易地构造出如下例子：数列 $1/n$ 是无穷小当 $n \to \infty$ 时的无穷小，但

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

显然不是无穷小. 更不用提之后学习的定积分更是一个常见的无穷多无穷小之和不是无穷小的例子.

但对于无穷多无穷小之积是否一定是无穷小就不是显然的了. 但我们还是可以给出一个无穷多无穷小之积不是无穷小的一个例子. 我们可以构造出如下数列 $\{x^{(1)}\}$、$\{x^{(2)}\}$、$\cdots$、$\{x^{(n)}\}$，满足：

$$\begin{array}{lccccccc}
\{x^{(1)}(k)\}: & 1^0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\
\{x^{(2)}(k)\}: & 1 & 2^1 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\
\{x^{(3)}(k)\}: & 1 & 1 & 3^2 & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\
\quad\vdots & & & & & & & \\
\{x^{(n)}(k)\}: & 1 & 1 & 1 & \cdots & n^{n+1} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\
\quad\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

更具体的说，对于数列 $x^{(n)}$，其第 k 项（记为 $x^{(n)}(k)$）满足：

$$x^{(n)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k < n \\ n^{n-1} & \text{if } k = n \\ \frac{1}{k} & \text{if } k > n \end{cases}$$

因此，当 $n \in \mathbb{N}$，总有 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(n)}(k) = 0$，即 $x^{(n)}(k)$ 是当 $k \to \infty$ 时的无穷小. 但由于：

$$\prod_{n=1}^{\infty} x^{(n)}(k) = 1 \tag{3.2.1}$$

因此得证“无穷多无穷小之积不一定为无穷小”.

在上述证明中，我们需要注意到，**“无穷小”是用来描述一个数列/函数的一个变化趋势**. 因此，虽然对于每一个数列 $x^{(n)}(k)$，都存在一项 n^{n-1} 且这一项在 $n \to \infty$ 时趋向于 ∞，但是在这一项之后又趋于 0，因此并不影响此数列是无穷小.

换而言之，我们可以认为上述数列的构造是先取了一个无穷小数列 $1/k$，然后用一些数值替换了小于等于 n 的项，**而任意替换数列的有限个值并不影响函数的收敛值**.

另外，我们可以将式 (3.2.1) 改写成如下形式：

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} x^{(n)}(k) = 1 \tag{3.2.2}$$

因此，我们可以自然地提出一个问题，交换上述求极限顺序是否仍旧等于 1?（由后文的 §3.3 可以知道极限换序后并不一定得到原来的结果）显然，交换求极限顺序后有：

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{m} x^{(n)}(k) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} 0 = 0 \neq 1$$

可见交换求极限顺序后的值与原来不同. 那么我们又可以自然地问出一个问题，为什么我们选取的第一种求极限的顺序而不是第二种求极限的顺序？

其实这个问题非常简单. 我们暂时讨论一下没有“无穷多个”的情况：若 $f(n)$、$g(n)$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小，那么 $F(n) = f(n) \cdot g(n)$ 也是当 $n \to \infty$ 时的无穷小（这个结论非常的显然，在此不做证明）. 注意到这里对于 $f(n) \cdot g(n)$ 后得到的 $F(n)$ 是关于 n 的数列，换而言之，当我们讨论“无穷多个无穷小相乘”时，**无穷多个无穷小相乘后得到的一定是一个关于原来无穷小的自变量的函数，然后我们再取自变量的极限**. 对于前文的式 (3.2.2) 而言，“无穷多个无穷小相乘”后得到的一定是一个关于 k 的数列，然后我们再求 k 的极限，因此对于“无穷多个无穷小相乘”这个问题，只能按照式 (3.2.2) 的求极限顺序.

3.3 极限换序

每当物理学生进行如积分求导换序（如 §2.14），积分换序等操作时，可能会有围观的数学学生问“你这个函数/广义积分是一致收敛的吗？”这时物理学生往往会回答“我们一直都是这么做的.”甚至“我们讨论的函数都是好函数.”等话语，使得数学学生骂骂咧咧的走开了.

Anyway，当函数、数列有多个自变量存在时，我们可能需要考虑多重极限（不要忘了定积分也是一个极限）. 比如一个二元函数 $f(x, y)$，我们要计算 $x \to 0$、$y \to 0$ 时 f 的极限，我们可以先对 x 求极限，此时 $f(x, y)$ 变成只关于 y 的函数；此时再对 y 求极限. 即：

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x, y)$$

当然，我们也可以先对 y 求极限，再对 x 求极限[1]，即：

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x, y)$$

这里我们要提出疑问，这两个极限是相等的吗？其实是不一定的，显然我们可以构造出如下的函数：$f(x, y) = x^y$，显然，我们有 $\lim\limits_{x\to0} f(x, y) = 0$、$\lim\limits_{y\to0} f(x, y) = 1$，因此：

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} x^y = 0 \neq 1 = \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} x^y$$

因此，对于 $f(x, y)$，极限不能随便换序.

自然的，我们想知道，当函数满足什么条件时极限可以换序. 对于可以换序的函数，其有一些良好的性质. 这里我们可以引入**一致收敛**的概念，与之相对的便是**逐点收敛**. 对于逐点收敛，其定义非常简单：

> **Definition 3.3.1** (逐点收敛)**.** 我们称函数列 f_n 逐点收敛到 f，当对于任意在定义域内的 x_0，有：
>
> $$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

而一致收敛是一个更强的条件，其定义为：

> **Definition 3.3.2** (一致收敛)**.** 我们称函数列 f_n 一致收敛到 f，当对于 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n \geq N$ 时，对定义域内任意 x_0 有：
>
> $$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

[1] 如果看过《高等数学》下册可以知道两个过程取极限的“路径”不同，甚至我们还可以构造出除了上面两种“路径”外其他的取极限的“路径”.

或者我们可以写为：

$$\lim_{n\to\infty} \max|f_n(x)-f(x)|=0$$

我们可以证明，一致收敛的函数列就有可以积分换序的良好的性质. 具体而言，有：

Theorem 3.3.1 (一致收敛的极限换序). 设在开区间 (a,b) 上，函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛. 如果对于每一个 n，右极限 $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$ 都存在，则：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to0^+} f_n(x)=\lim_{x\to0^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

具体证明过程略，可参考一些相关书籍.

3.4 等价无穷小相加减的讨论

一般而言，等价无穷小不能在加减之间使用，由于等价无穷小相当于最低阶的 Taylor 展开，在加减运算时可能会出现消去最低阶项而导致 Taylor 展开项数不够的情况[2]，因此等价无穷小代换在加减中一般不使用. 下面讨论加减中的使用条件，下面仅以减法举例，加法可简单通过换元来使用下面的讨论，在此不过多赘述. 对于某一自变量变化过程，假设有: $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$. 要使得可以在减法中使用等价无穷小代换，则需要：

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'}=1$$

对于 α 和 β 之间，一般而言有如下四种关系：

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0,\quad \lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty,\quad \lim\frac{\alpha}{\beta}=c\ (c\neq0,c\neq1),\quad \lim\frac{\alpha}{\beta}=1$$

下面对上述四种情况进行讨论.

1. $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$

由于 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=0$，因此有 $\alpha=o(\beta)$, $\alpha'=o(\beta')$，因此有：

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'}=\lim\frac{o(\beta)-\beta}{o(\beta')-\beta'}=\lim\frac{1-\frac{o(\beta)}{\beta}}{1-\frac{o(\beta')}{\beta'}}=1$$

2. $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$

这种情况和第一种情况类似. 由于 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，因此有 $\beta=o(\alpha)$， $\beta'=o(\alpha')$，因此有：

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'}=\lim\frac{\alpha-o(\alpha)}{\alpha'-o(\alpha')}$$

3. $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\ (c\neq0,c\neq1)$

由于 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=c\neq1$，因此有：

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'}=\lim\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{\left(1-\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}}=\lim\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{1-\frac{\beta'}{\alpha'}}=\lim\frac{1-c}{1-c}=1$$

[2]实际上在我目前看过的国外的微积分教材均没有引入所谓的“等价无穷小代换”，而是直接使用 L'Hopital 法则和 Taylor 展开来求极限.

4. $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$

类比第三种情况，只需要将第三种情况中的 c 替换成 1. 这里可以看到，在最后一步求极限的时候出现了 $\dfrac{0}{0}$ 未定式. 其无法进一步分析其极限的值. 更进一步的计算需要通过 Taylor 展开更高阶进行计算. 因此，这种情况不能使用等价无穷小代换.

当然，上面的讨论中均要求 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$ 存在或者为无穷大，但其实还存在一种情况，即 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$ 不存在且不为不穷大（类似于震荡间断点）. 无论那种情况，总有：

$$\lim\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'}-1\right)=\lim\frac{\alpha'}{\alpha'-\beta'}\left(\frac{\alpha}{\alpha'}-1\right)-\lim\frac{\beta'}{\alpha'-\beta'}\left(\frac{\beta}{\beta'}-1\right)$$

在上式中，显然有：

$$\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'}-1\right)=0,\quad \lim\left(\frac{\beta}{\beta'}-1\right)=0$$

因此，只要 $\dfrac{\alpha'}{\alpha'-\beta'}$ 和 $\dfrac{\beta'}{\alpha'-\beta'}$ 在自变量变化趋势的小领域内有界，则上述极限为 0，从而可以使用等价无穷小代换. 容易验证，之前所讨论的所有情况均适用于上面结论，且此结论并不要求 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$ 极限存在或为无穷大.

3.5 高阶导数与极值点和拐点

设 $f(x)$ 有 $k(\geq 3)$ 阶导数，满足：

$$f^{(m)}(x_0)=\begin{cases}0 & \text{if } m<k\\ a\neq 0 & \text{if } m=k\end{cases}$$

有如下结论：

- k 为偶数时，x_0 为极值点，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 为极大值. 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 为极小值.
- k 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 为函数的拐点.

上述结论的证明过程如下：

Proof. 证明过程分两部分：

我们先证明第一条结论. 由 Taylor 展开公式可得：

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^k)$$

在 x_0 的某个小邻域内，$f(x)-f(x_0)$ 的符号仅仅由第一项决定（第二项在 $x\to x_0$ 时为第一项的高阶无穷小，在某个足够小的邻域内，其对符号的影响远小于第一项）. 若 k 为偶数，则 $(x-x_0)^k$ 恒大于 0，第一项的符号仅仅由 $a=f^{(k)}(x_0)$ 决定. 由极值点定义，第一条结论显然成立.

现在我们来证明第二条结论. 对 $f''(x)$ 在 x_0 处进行 Taylor 展开可得：

$$f''(x)=f''(x)-f''(x_0)=\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}+o((x-x_0)^{k-2})$$

这里需要注意我们是对 $f''(x)$ 做 Taylor 展开，因此 $f^{(k)}(x_0)$ 项为第 $(k-2)$ 项. 类比第一条结论的证明，在 x_0 的某个足够小的领域内 $f''(x)$ 的正负号仅仅由第一项决定. 若 k 为奇数，则 $(x-x_0)^{k-2}$ 在 x_0 左侧为正，在 x_0 右侧为负. 又因为 $f^{(k)}(x_0)$ 不为 0，因此，$f''(x)$ 在 x_0 两侧易号，由函数凹凸性和拐点的定义，显然第二条结论成立.

综上所述，两条结论均成立. □

3.6 有关 $1/x$ 的不定积分的讨论

在高等数学教材中，我们知道：

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

尽管每个人都这样写这个公式，但这并不代表这个式子是完全正确的. 上面式子代表 $1/x$ 的不定积分为 $\ln|x|+C$. 虽然对于每个不同的常数 C，$\ln|x|+C$ 都是 $1/x$ 的一个不定积分，但实际上还有更多. 我们可以绘制出 $y=\ln|x|$ 的函数图像，如图 3.6.1 所示.

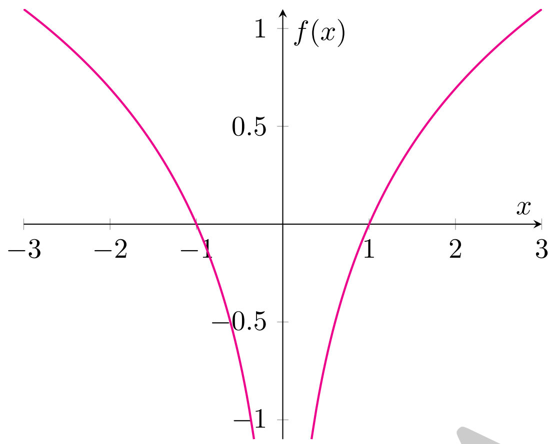


图 3.6.1: $y=\ln|x|$ 函数图像

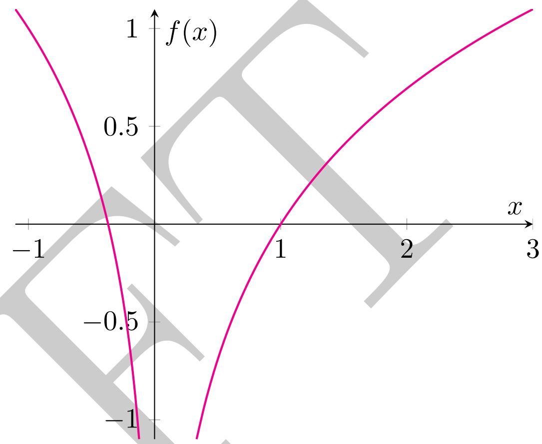


图 3.6.2: 平移后函数图像

这个图像有两部分，我们可以任意上下平移其中一部分（或者两部分上下平移不同距离），而得到一个新的函数. 例如，我们将 $y=\ln|x|$ 的负半轴部分向上平移一个单位，如图 3.6.2 所示.

显然，该函数虽然不是 $\ln|x|+C$ 的形式，但是其导数显然仍旧是 $1/x$，即其也应该是 $1/x$ 的不定积分的结果. 因此，**严格来说，我们需要两个常数项，每一个常数项对应两个函数的一个**.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{if } x < 0 \\ \ln|x| + C_2 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

我们之所以通常只写一个常数而不是两个常数，是因为我们在一次计算中只会用到一个常数. 对于积分区间只在正区间或者负区间的积分显然只会涉及到一个常数，对于积分区间同时涉及到正区间或者负区间的积分，我们则会拆成负区间和正区间两部分分别进行反常积分. 但根据反常积分的计算，其不收敛.

综上，对于

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

这种情况的积分，当且仅当 a 和 b 同号时才有意义. 在此情况下，我们只需要使用其中一个分支，使用到一个常数，因此我们没有必要考虑两个常数同时存在的情况.

3.7 Leibniz 积分法则

Leibniz 积分法则可以看成高数教材中有关积分上限函数的补充和完善，其具体形式如下：

Theorem 3.7.1 (Leibniz 积分法则)**.** 设

$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t+f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}-f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}$$

Proof. 记 a、b、Δa、Δb 均为关于 x 的函数.

$$\begin{aligned}\Delta F(x)=&F(x+\Delta x)-F(x)\\ =&\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\\ =&\int_a^b f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t-f(x,t)\,\mathrm{d}t+\int_b^{b+\Delta b} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{a+\Delta a} f(x,x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对于第一项，有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^b f(x+\Delta x,t)-f(x,t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\int_a^b\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

对于第二项，由积分中值定理有：

$$\int_b^{b+\Delta b} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t=\Delta b\cdot f(x+\Delta x,\xi_1)$$

其中 $\xi_1\in(b,b+\Delta b)$，因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta b\to 0$，$\xi_1\to b$，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t}{\Delta b}\frac{\Delta b}{\Delta x}=f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}$$

同理，对于第三项，有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_b^{a+\Delta a} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t}{\Delta a}\frac{\Delta a}{\Delta x}=f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}$$

综上所述，有：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t+f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}-f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}$$

□

此定理可以很快得到下面推论：

Corollary 3.7.2. *若* $f(x,t)=f(t)$ *（即函数* f *和* x *无关），*$b(x)=x$*，*$a(x)=a=Constant$*，则*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(t)\,\mathrm{d}t+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

即我们熟悉的积分上界函数的求导.

这个定理很好地说明了为什么当被积函数不单纯是积分变量 t 的函数而包含了积分上下限 x 时不能直接去掉积分号并简单地将 t 替换为 x. 同时，在求解定积分时巧妙利用此定理，有时能简化计算，并求解出原本难以求解的反常积分(见 §2.14).

3.8 浅谈齐次

“齐次”在高等数学解微分方程中出现了两次，一次是在换元 $u=\dfrac{y}{x}$ 从而解微分方程时出现的**“齐次方程”**，另一次是在解线性微分方程时出现的**“齐次线性微分方程”**，表面上看，这两个“齐次”貌似没有什么关系，但在如下的定义，两个“齐次”可以关联起来：

Definition 3.8.1 (齐次函数). 称函数 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，若满足$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$

若方程 $y'=f(x,y)$ 中 $f(x,y)$ 为 0 次齐次函数，则做换元 $y=ux$，有：

$$u'x+u=f(x,ux)=f(1,u)$$

此时方程变成了可分离变量的方程（$f(1,u)$ 可以看成只是关于 u 的函数）. 因此，我们称方程 $y'=f(x,y)$ 为**“齐次方程”**.

对于方程 $\mathrm{L}y=f(x)$，其中 L 为线性算子[3]，我们可以进一步改写成 $F[y]=0$，其中 $F[y]=\mathrm{L}y-f(x)$. 当 $f(x)=0$ 时，$F[y]=\mathrm{L}y$，因此满足 $F[\lambda y]=\lambda F[y]$（注意 L 为线性算子，满足 $\mathrm{L}[\lambda y]=\lambda\mathrm{L}[y]$），因此 $F[y]$ 是**“齐次的”**. 反之，若 $f(x)\neq 0$，则不满足 $F[\lambda y]=\lambda F[y]$ 的条件，因此是**“非齐次的”**.

因此，对于齐次线性微分方程，其若有两解 y_1、y_2 则 $c_1y_1+c_2y_2$ 也是该齐次微分方程的解. 对于非齐次微分方程则不满足这个条件.

另外，对于解线性微分方程中的“齐次”，其可以看成是线性代数中引入的概念，在线性代数中，称 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为齐次方程，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为非齐次方程（$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$），并且，对于非齐次方程，其特解满足 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x_1}+c_2\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x}^*$ 的形式（更具体而言，齐次方程的解集平面经过原点但非齐次方程的解集平面不经过原点，而特解 $\boldsymbol{x}^*$ 相当于将解集平面平移至原点），这和线性微分方程中的解的形式类似[4].

3.9 Pappus 定理

Pappus 定理在求质心或者是求体积（尤其是旋成体的体积）时及其好用. 虽然一般而言不能在考试中直接使用 Pappus 定理，但仍旧可以使用 Pappus 定理快速计算数值结果或者验证答案的正确性（尤其是在求旋成体的体积时）.

Theorem 3.9.1 (Pappus 定理). 巴普斯定理有如下两种情况：

- 在平面上取任一闭合路径，设其面积为 S，若任意时刻该平面的运动矢量一直平行于法线方向（即垂直于其所在平面）并扫成一个立体图形，设其体积为 V，则这个立体图形的体积满足 $V=S\cdot r$，其中 r 是该闭合面积的质心.
- 在平面上取任一曲线段，设其长度为 L，若任意时刻该曲线段的运动矢量一直平行于法线方向（即垂直于其所在平面）并扫成一个曲面，设其面积为 S，则这个曲面的面积满足 $S=L\cdot r$，其中 r 是该曲线段的质心.

很显然，这两种情况是类似的，只是一个是用平面扫过形成立体图形，而另一个是曲线段扫过形成曲面.

这里需要对质心给出一个更一般的定义：

[3]有关微分算子的相关内容，见 §2.16.

[4]对于齐次线性微分方程和线性代数之间的更详细的关系，如果有时间，我之后补上.

Definition 3.9.1 (质心). 对于平面中的一个图形，其质心 (x_c, y_x) 满足：

$$x_c = \frac{\int_S x\,\mathrm{d}s}{\int_S \mathrm{d}s},\quad y_c = \frac{\int_S y\,\mathrm{d}s}{\int_S \mathrm{d}s}$$

若是平面中的曲线段，则：

$$x_c = \frac{\int_L x\,\mathrm{d}l}{\int_L \mathrm{d}l},\quad y_c = \frac{\int_L y\,\mathrm{d}l}{\int_L \mathrm{d}l}$$

当然我们一般情况下并不会使用定义去计算质心，而是使用对称性等技巧去计算质心，具体操作见之后的例题.

现在这里我们只证明 Pappus 定理的一个最常用的简化结论，这里我们仅让平面绕定轴旋转一周，并形成旋成体. 这也是在高等数学中最常用的情况.

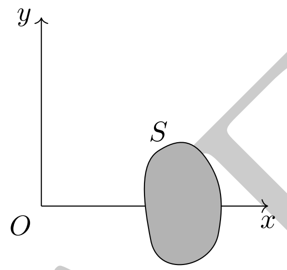


图 3.9.1: 示意图

如图 3.9.1 所示，在 xy 平面上存在某闭合路径所形成平面，其面积记为 S，质心的横座标记为 x_c，我们假设函数 $f(x)$ 是这个图形在横座标为 x 处的纵座标顶部和底部的差值. 同时，我们假设这个图形的横座标最小值为 a，横座标最大值为 b，因此，此图形的面积和质心横座标的表达式为：

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad x_c = \frac{1}{S}\cdot\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

现在，我们让此图形绕 y 轴旋转一周形成一个立体图形，则体积微元为（注意这里的体积微元的选取和同济的高数课本中的体积微元有所不同，不过这个微元取法很常见也挺简单，在此不做过多解释，有需要可以自行搜索“柱壳法”）.

$$\mathrm{d}V = 2\pi xf(x)\,\mathrm{d}x$$

两端积分，稍微处理，有：

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi x_c\cdot S$$

其中 $2\pi x_c$ 就是质心绕 y 轴旋转一周所走过的路径. Q.E.D.

借助此方法，我们可以及其快速地求解出类似旋成体体积. 具体见如下例题.

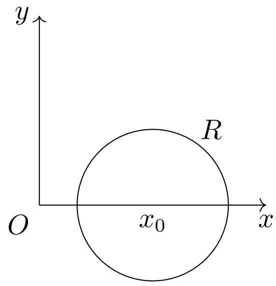


图 3.9.2: 示意图

Example 3.9.1. 如图 3.9.2 所示，在 $x = x_c$ 处有一个半径为 R（$R < x_c$）的圆盘，求该圆盘绕 y 轴旋转一周所形成的旋成体的体积.

Solution. 显然，该圆盘的质心位置为圆盘圆心，绕 y 轴一周的过程中质心所经过的路程为 $2\pi x_0$，因此，根据前文 Pappus 定理，旋成体体积为：

$$V = 2\pi x_0 \cdot R$$

□

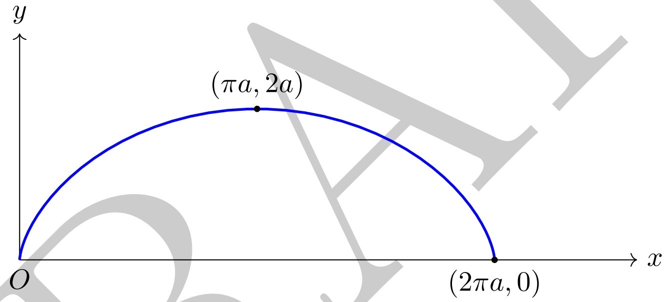


图 3.9.3: 示意图

Example 3.9.2. 如图 3.9.3 所示，试求摆线（$x = a(t - \sin t)$、$y = a(1 - \cos t)$）的一支（$t \in [0, 2\pi)$）与 x轴所形成的封闭图形绕 y 轴旋一周所形成的旋成体的体积.

Solution. 根据所形成的图形的对称性，显然此图形的质心的横座标为 πa，而由易知此图形的面积为 $3\pi a^2$，因此所形成的旋成体体积为：

$$V = 2\pi \cdot \pi a \cdot 3\pi a^2 = 6\pi^3 a^3$$

□

Remark 3.9.1. 这里有关摆线的一支与 x 所形成的面积为 $3\pi a^2$ 有一个故事：传闻阿基米德在研究摆线时想知道此面积是多少，但当时又没有微积分，因此他裁了一个此形状的铁皮称重并发现是圆的面积的三倍……

Pappus 定理和祖暅原理给我们求解一些形状的体积带来了很大方便：

Theorem 3.9.2 (祖暅原理)**.** “缘幂势既同，则积不容异”. 即两个同高的立体，若在任意等高的截面处截面积都相等，则两个立体图形的体积相等.

3.10 三角函数、双曲函数与 Osborn 法则

对于三角函数和双曲函数，我们可以将其全部转化为指数函数，有如下式子

$$\sin x=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2},\quad \cos x=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}$$
$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

根据上面式子，我们可以得到如下重要关系

$$\sin(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}\sinh x,\quad \cos(\mathrm{i}x)=\cosh x$$
$$\sinh x=-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x),\quad \cosh x=\cos(\mathrm{i}x)$$
$$\arcsin(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}\,\mathrm{arsinh}\,(x)$$

另外，在双曲函数公式推导中，有如下重要的法则

Theorem 3.10.1 (Osborn 法则). *对于三角函数恒等式，三角函数转成相应的双曲函数. 若存在两个 sinh 函数的积时，则转换正负号，即可得到相应的双曲函数恒等式.*

例如，在三角函数中，有如下恒等式

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

利用上述法则，则有如下恒等式

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$

这里只要出现两个 sinh 函数即可使用，与 sinh 函数自变量无关，例如 $\sinh x\cdot\sinh y$ 仍旧需要变号.（这与 $\sinh x=-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)$ 有关）

3.11 积分型余项的 Taylor 展开

对于一个函数 $f(x)$，假设 $(n+1)$ 阶可导，若函数某一点的值 $f(a)$ 已知，由 Newton-Leibniz 公式有：

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}(x-t)$$

对第二项使用分部积分（$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$），有：

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)-f'(t)(x-t)\big|_a^x+\int_a^x(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\,\mathrm{d}(x-t)^2\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\big|_a^x+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^3\,\mathrm{d}t\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(x)\,\mathrm{d}(x-t)^3\\
&\ \vdots\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

可见其为 Taylor 展开的形式，最后一项则是 Taylor 展开的**积分余项**. 这个积分是精确的、可把握的. 同时，我们可以通过积分中值定理转化成我们书上所讲的 Lagrange 余项，证明其等价，如下：

$$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中，ξ 在 a 到 x 之间. 显然，RHS 即为我们常见的 Lagrange 余项. 因此，积分余项与 Lagrange 余项等价.

3.12 Stolz 定理

Stolz 定理是数列极限中的 L'Hopital 法则，常用于计算分数型数列极限. 其有两种公式：

设有两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$

Theorem 3.12.1 (Stolz 第一定理). *若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：(1) $\{b_n\}$ 严格单调递增、(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，那么有：*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$$

其中 L 可以是有限数、$+\infty$、$-\infty$，但不可以是 ∞.

Theorem 3.12.2 (Stolz 第二定理). *若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：(1) $\{b_n\}$ 严格单调递减、(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$、(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，那么有：*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$$

其中 L 可以是有限数、$+\infty$、$-\infty$，但不可以是 ∞.

可以看见，类比 L'Hopital 法则，L'Hopital 法则是对分子分母分别求导，而 Stolz 定理则是对分子分母分别做差分. “差分”可以粗略地理解为某种意义上的“离散地求导”. Stolz 第一定理可以理解为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”，而 Stolz 第二定理则可以理解为“$\frac{0}{0}$”.

3.13 极简外微分

外微分和外微分形式的引入在一些教材[5]中是在介绍微分流形和微分几何之后的，要严格计算过于复杂. 在此提供了一种不严谨非常随意的方式介绍外微分和外微分形式，仅作为简略介绍.

在高等数学中，我们会见到下面几种积分（在三维空间中）：

- **线积分**：$\int_L (P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z)$
- **面积分**：$\iint_D (P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)$
- **体积分**：$\iint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

同时，我们学了如下积分关系定理：

[5] 此处参考梁灿彬《微分几何入门与广义相对论》

- **Newton-Leibniz 公式：**

$$f(x_2,y_2,z_2)-f(x_1,y_1,z_1)=\int_L\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)$$

- **Green 公式：**

$$\oint_L(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- **Stokes 公式：**

$$\oiint_\Sigma(P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

- **Gauss 公式：**

$$\begin{aligned}&\oint_L(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z)\\&\qquad=\iint_\Sigma\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

借助 Newton-Leibniz 公式，我们将函数和线积分相关联，通过 Green 公式和 Stokes 公式，我们将线积分和面积分相关联，通过 Gauss 公式，我们将面积分和体积分相关联. 这里，我们可以引入**外微分和外微分形式**将上面的所用公式用一个公式统一起来，并能很好地进一步推广高维情况.

在介绍之前，我们先介绍一下曲面的定向. 以二重积分为例，如果认为面元有向，应用换元公式，有：

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

注意，并不是所有曲面都是可定向的（这里的定向可以认为是法线从起点连续移动直到回到起点，根据法线的方向是否变化来判断曲面是否可定向），比如不可定向的曲面的一个最经典的例子就是 Mobius Strip（莫比乌斯带）.

在普通的二重积分中，我们直接选取了 Jacobian 行列式的绝对值，从而出现 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 或者 $\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$ 交换顺序不改变符号的结果. 但在现在的计算中，如果我们交换了 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的顺序，则会发现 Jacobian 行列式会相差一个负号，即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. 对于高维情况，上述结论显然也是成立的（交换后行列式相差一个负号）. 因此，我们可以认为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 直接存在一种运算，这种运算满足反交换性. 由反交换性，有：

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$$

即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x=0$. 我们可以很容易联想到向量的叉乘. 因此，我们可以仿照叉乘，定义如下运算法则：

Definition 3.13.1 (楔积运算). 我们在微分 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，$\cdots$ 之间定义外乘积（楔积）运算（$\wedge$），其满足如下运算法则：

- 线性：$(a\,\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}y=a(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，$a\in\mathbb{R}$
- 分配律：$\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$
- 反交换律：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$ （因此有：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$）

- 结合律：$\mathrm{d}x \wedge (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z$

由微分的外乘积和函数所组成的线性组合被称为**外微分形式**，若 P、Q、R、A、B、C、H 均为 x、y、z 的函数，则：

- 零次外微分形式：P、Q、R、A、B、C、H（就是一个单纯的函数）
- 一次外微分形式：$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$
- 二次外微分形式：$A\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$
- 三次外微分形式：$H\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

有了外微分形式，我们可以引入**外微分运算**，对外微分形式求一次外微分运算就是对每一项的函数求全微分，微分之间是外乘积：

- 零次外微分形式的外微分（也就是梯度）：

$$f(x,y,z) \Rightarrow \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

- 一次外微分形式的外微分（也就是旋度）：

$$\begin{aligned}\alpha &= P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\ &\Rightarrow \mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

- 二次外微分形式的外微分（也就是散度）：

$$\beta = A\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}\beta = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

- 三次外微分形式的外微分（恒为 0）：

$$\gamma = H\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \Rightarrow \mathrm{d}\gamma = 0$$

在此我们可以看出，在三维空间下，我们最多只能引入梯度、旋度、散度，而在二维空间下，我们最多只能引入梯度和旋度. 并且，借助 **Poincare 引理**，我们可以得到更多我们所熟悉的结论.

Lemma 3.13.1 (Poincare 引理). *若 ω 为一外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续的偏导数，则 $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$.*

根据 Poincare 引理，对于零次外微分形式的外微分（梯度），再求一次外微分运算，我们可以得到旋度，因此有**梯度无旋**. 同理，对于一次外微分形式的外微分（旋度），再求一次外微分运算，我们可以得到散度，因此有**旋度无散**.

Lemma 3.13.2 (Poincare 引理的逆定理). *若 ω 是一个 p 次外微分形式且 $\mathrm{d}\omega = 0$，则存在 $p-1$ 次外微分形式 α 使得 $\omega = \mathrm{d}\alpha$.*

根据 Poincare 引理的逆定理，若一个场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为 0，那么我们总可以引入一个标量势函数 φ，使得 $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$. 同理，若一个场 $\boldsymbol{F}$ 的散度为 0，那么我们总可以引入一个矢量势函数 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. 此结论在物理中尤其是电动力学中很常见（即电势能 φ 和磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的引入）.

有了外微分形式和外微分运算之后，我们便可以将本章最开始列举的所有的定理用下面定理统一起来：

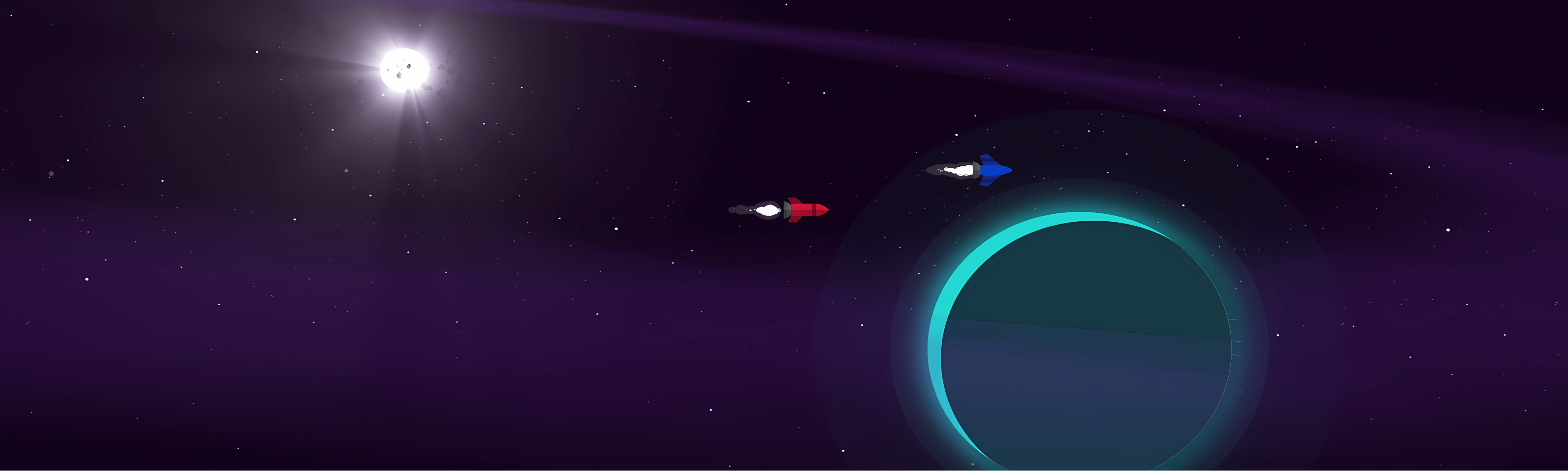
Theorem 3.13.3 (Stokes 公式)**.** 若 ω 为某外微分形式，Σ 为积分区间，$\partial\Sigma$ 为积分区域的边界，则：

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega$$

根据 Stokes 公式，我们有：

- $\omega_0|_a^b=\displaystyle\int \mathrm{d}\omega_0$（Newton-Leibniz 公式）
- $\displaystyle\oint\omega_1=\iint \mathrm{d}\omega_1$ （Green 公式、Stokes 公式）
- $\displaystyle\oiint\omega_2=\iiint \mathrm{d}\omega_2$（Gauss 公式）

可以看到，Stokes 公式将我们所学习的式子全部统一了起来，是高维空间中的微积分基本定理. 在部分书籍中由将 Stokes 公式称为 Newton-Leibniz-Green-Gauss-Ostrogradsky-Stokes-Poincare 定理，用所有涉及了此定理的数学家的名字命名以纪念为发现此定理的伟大努力. 这里的 Stokes 公式可以认为是微积分的顶峰，从理论上讲，这是微积分的终点，也是微积分从古典走向现代的入口. 同时也是数学上简洁美丽且深刻的定理之一.



Chapter 4

疯言疯语

本章节的内容都是笔者本人的一些有意思的想法或者看见的一些有意思的想法的摘录，并不能保证其严谨性和准确性.

4.1 从线性代数看 Taylor 展开

4.1.1 Dirac 函数的基本介绍

在物理学和数学中，常常会用到 Dirac 函数，其基本的定义如下：

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & \text{if } x=0\\ 0 & \text{if } x\neq 0\end{cases}$$

且 $\delta(x)$ 同时满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1$$

在物理上，Dirac 函数尝尝被用来描述质点、点电荷等理想模型. Dirac 函数并不是数学上一个严格意义上的函数[1]，而在泛函分析中被称为**广义函数**或者是**分布**. 由 Dirac 函数的定义，显然有如下性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=f(x_0)$$

设 Dirac 函数的 n 阶导数是 $\delta^{(n)}(x)$，由分部积分，我们可以得到如下式子：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\,\mathrm{d}x=\left[f(x)\delta^{(n-1)}(x-x_0)\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\delta^{(n-1)}(x-x_0)\,\mathrm{d}x$$

其中上式的第一项由于 $\delta(x)$ 在非 0 处恒为 0，其任意阶导数也为 0，因此，上式中的第一项为 0. 因此，由递推易得（假设 $f(x)$ 的 n 阶导数存在）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=(-1)^nf^{(n)}(x_0)$$

[1] 其并不像普通函数一样对于定义域内每一个 x 都有一个实数值的输出.

4.1.2 函数矢量与函数空间

函数可以被看成一种矢量，所有实函数构成一个矢量空间，其加法定义为两个函数相加，其数乘定义为实数与函数相乘，不难验证其满足矢量空间的所有条件. 更近一步，类比于我们常见矢量的内积的定义（向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的内积为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum a_ib_i$），可以定义在函数所构成的矢量空间中的内积为：

$$\langle g|f\rangle=\int_I g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

这里，我们使用了 **Dirac 符号**[2]，其中，记 $|x\rangle$ 为某一矢量（类似于我们常见的列向量），$\langle y|$ 为某一对偶矢量（类似于行向量），$\langle y|x\rangle$ 为矢量 $|x\rangle$ 和对偶矢量 $\langle y|$的内积.

对于上面的函数空间，其矢量为某一函数（$|f\rangle=f(x)$），其内积为在定义域 I 内某一积分

$$\langle g|f\rangle=\int_I g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

则其对偶矢量为如下算符

$$\langle g|=\int_I g(x)\ldots\mathrm{d}x$$

其中 $\ldots$ 代表某一个待与 $\langle g|$ 内积的函数.

4.1.3 从函数空间到 Taylor 展开

对于一个函数 $f(x)$，我们想将其展开成多项式的形式. 在函数空间中可以表述为**以幂函数为基底，表示出** $f(x)$. 我们选取 1，$(x-a)$，$(x-a)^2,\ldots,(x-a)^n,\ldots$ 为基底. 记这些基矢量分别为 $|1\rangle=1,\ |x\rangle=(x-a),\ldots,|x^n\rangle=(x-a)^n,\ldots$，容易验证

$$\langle x^m|x^n\rangle=\int_I x^m(x)x^n(x)\,\mathrm{d}x\neq\delta_{mn}$$

其中上式中 δ_{mn} 为 **Kronecker 符号**.（需要和 Dirac 函数进行区分，虽然都写作 δ） δ_{mn} 的定义为

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & \text{if } m=n\\ 0 & \text{if } m\neq n\end{cases}$$

因此，我们所选取的这一组基底并不正交，从而不能用投影的方式来计算展开系数. 要求出其展开系数，我们可以用对偶矢量来计算. 记对偶矢量 $\langle x_m|$，使得

$$\langle x_m|x^n\rangle=\int_I x_m(x)x^n(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

我们可以先从 $m=0$ 看起，则

$$\langle 1|x^n\rangle=\int_I x_0(x)(x-a)^n\,\mathrm{d}x=\delta_{0n}$$

即

$$\langle 1|1\rangle=\int_I x_0(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$\langle 1|x^n\rangle=\int_I x_0(x)(x-a)^n\,\mathrm{d}x=0\quad(n\neq 0)$$

[2]也称为“braket 符号”

可以发现，$x_0(x) = \delta(x-a)$ 满足上式要求. 类似的，有

$$\langle x_m|x^m\rangle = \int_I x_m(x)(x-a)^m \,\mathrm{d}x = 1$$

$$\langle x_m|x^n\rangle = \int_I x_m(x)(x-a)^n \,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$$

不难得出 x_m 正比于 $\delta^{(m)}(x-a)$，进一步有

$$x_m(x) = \frac{(-1)^m}{m!}\delta^{(m)}(x-a)$$

基底的对偶矢量同样构成一组对偶基底，有了对偶基底，便可以很方便地求出展开系数. 设

$$|f\rangle = \sum a_n|x^n\rangle$$

于是有

$$a_n = \langle x_n|f\rangle = \int_I \frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(x-a)f(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)$$

因此

$$f(x) = \sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)\cdot(x-a)^n$$

上式即为常见的 Taylor 展开公式.

4.2 一种求 $\ln x$ 比值极限的方法

对于如下形式的极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

由于 $\ln x$ 在 $x \to 0$ 的性质不算好[3]，因此无法使用展开的形式简化计算. 现在我们假设 $f(x)$、$g(x)$ 性质足够好，并对其做 Taylor 展开，从而将几乎任意的 $f(x)$、$g(x)$ 转化成多项式进行处理，于是有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + o(x^{n+1}))}{\ln(b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + o(x^{n+1}))}$$

这里由于当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋向于 0，因此其 Taylor 展开没有常数项. 我们假设其 $f(x)$ 在 $x \to 0$ 的 Taylor 展开中其最低项非 0 项次数为 m_1，$g(x)$ 在 $x \to 0$ 的 Taylor 展开中最低项为 m_2，也就是有：

$$a_n = 0 \ (n < m_1); \quad b_n = 0 \ (n < m_2)$$

于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_{m_1}x^{m_1} + o(x^{m_1}))}{\ln(b_{m_2}x^{m_2} + o(x^{m_2}))}$$

[3]无法使用 Taylor 展开、Laurent 展开、Pade 近似.

对上面式子使用 L'Hopital 法则，注意到：$(o(x^{n+1}))' = o(x^n)$[4]. 于是有：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_{m_1}x^{m_1}+o(x^{m_1}))}{\ln(b_{m_2}x^{m_2}+o(x^{m_2}))}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{b_{m_2}x^{m_2}+o(x^{m_2})}{a_{m_1}x^{m_1}+o(x^{m_1})}\cdot\frac{m_1a_{m_1}x^{m_1-1}+o(x^{m_1-1})}{m_2b_{m_2}x^{m_2-1}+o(x^{m_2-1})}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{m_1a_{m_1}b_{m_2}x^{m_1+m_2-1}+o(x^{m_1+m_2-1})}{m_2a_{m_1}b_{m_2}x^{m_1+m_2-1}+o(x^{m_1+m_2-1})}\\
=&\frac{m_1}{m_2}
\end{aligned}$$

可以看见，对于此形式的极限，**其只与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的在 $x\to 0$ 的 Taylor 展开的最低阶非 0 项次数有关**.

上述结论还可以用另外的方法来证明，同样假设 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 的 Taylor 展开的最低阶非 0 项为 m_1，$g(x)$ 在 $x\to 0$ 的 Taylor 展开的最低阶非 0 项为 m_2，因此有：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_{m_1}x^{m_1}+o(x^{m_1}))}{\ln(b_{m_2}x^{m_2}+o(x^{m_2}))}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_{m_1}x^{m_1})+\ln[1+o(x^{m_1})/(a_{m_1}x^{m_1})]}{\ln(b_{m_2}x^{m_2})+\ln[1+o(x^{m_2})/(b_{m_2}x^{m_2})]}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{m_1\ln x+\ln a_{m_1}+\ln(1+o(x))}{m_2\ln x+\ln b_{m_2}+\ln(1+o(x))}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{m_1+[\ln a_{m_1}+\ln(1+o(x))]/\ln x}{m_2+[\ln b_{m_2}+\ln(1+o(x))]/\ln x}
\end{aligned}$$

注意到 a_{m_1}、b_{m_2} 不为 0，在 $x\to 0$ 时 $\ln(1+o(x))\to 0$，$\ln x\to -\infty$，因此，有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_{m_1}x^{m_1}+o(x^{m_1}))}{\ln(b_{m_2}x^{m_2}+o(x^{m_2}))}=\frac{m_1}{m_2}$$

因此，结论得证.

运用此结论，可以快速求出此类型的极限. 如：

Example 4.2.1. 试求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x-\tan x)}{\ln x^5}$$

Solution. 由于

$$\sin x-\tan x=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x-\tan x)}{\ln x^5}=\frac{3}{5}$$

□

4.3 曲线序列极限的长度和曲线长度的序列极限

记 $\operatorname{len} c(x)$ 为函数 $c(x)$ 在某个区间内的曲线长度.

考虑下面曲线序列：

$$c_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$$

[4] 这里这一步并不严谨，但应该没错.

其中 $x \in [0, 2\pi]$，$n \in \mathbb{N}^+$

现在我们计算此曲线序列的极限：

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$$

即曲线序列的极限为常函数 $c_\infty(x) = 0$，因此此曲线序列的长度为：

$$\operatorname{len}\Big(\lim_{n\to\infty} c_n(x)\Big) = 2\pi$$

现在我们先计算曲线的长度，由于 $c_n'(x) = \cos(nx)$，因此：

$$\operatorname{len} c_n(x) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

可以发现，此时 $\operatorname{len} c_n(x)$ 已经和 n 无关. 进一步，求出此积分，易得：

$$\operatorname{len} c_n(x) = 4\sqrt{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 7.6403956$$

注意此积分没有初等解析式，其中的 $\mathrm{E}(x)$ 为第二类完全椭圆积分. 我们可以通过数值积分得到大概的数值.

由于 $\operatorname{len} c_n(x)$ 与 n 无关，因此：

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{len} c_n) \approx 7.6403955$$

综上，我们可以得到：

$$\operatorname{len}\Big(\lim_{n\to\infty} c_n\Big) \neq \lim_{n\to\infty} (\operatorname{len} c_n)$$

即**曲线序列的极限的长度不等于曲线长度的序列极限**.

更进一步的分析，我们可以发现，在求曲线长度时，重要的是曲线的导数 $c_n'(x)$ 而不是曲线本身（$c_n(x)$）. 而当 $n \to \infty$ 时，虽然 $c_n(x)$ 趋向于 $y = 0$，但其导数 $c_n'(x)$ 并没有趋向于 0，从而导致了曲线长度的不同. 另外，求曲线长度的过程也是一个求极限的过程，而极限并不能随便的交换，需要进行讨论和验证，因此交换后得出不同的结果也并不奇怪.

读者可能之前见过下面的错误证明：

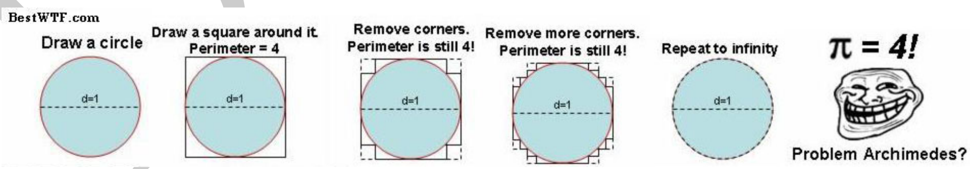


图 4.3.1: $\pi = 4$ 的错误证明

根据前面的讨论我们可以很容易看出问题所在. 这里的曲线可以看成输入是 $t \in [0, 1)$ 输出是 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的一个映射. 使用正方形逐步逼近圆形的曲线序列的极限确实是圆，但这并不代表其曲线的长度的序列极限就为圆的周长，这两者显然不同.

4.4 $y = y' + y'' + y''' + \cdots$

我们考虑下面的问题：

Question 4.4.1. 求下面常微分方程：

$$y = y' + y'' + y''' + \cdots$$

一个比较常规的方法如下：

Solution.

$$\begin{aligned} y =& y' + y'' + y''' + \cdots \\ =& y' + (y' + y'' + \cdots)' \\ =& 2y' \end{aligned}$$

进一步解得：$y = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ □

我们还可以用另外一种不是很常规的方法（微分算子法）:[5]

Solution.

$$\begin{aligned} y =& y' + y'' + y''' + \cdots \\ =& (\mathrm{D} + \mathrm{D}^2 + \mathrm{D}^3 + \cdots)y \\ =& \frac{\mathrm{D}}{1 - \mathrm{D}} y \end{aligned}$$

因此：$(1 - \mathrm{D})y = \mathrm{D}y$，即 $y = 2\mathrm{D}y$，即 $y = 2y'$，进一步解得：$y = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ □

4.5 浅谈微分方程和线性代数之间关系

此章节参考了@知乎中的此问题:[6]

当我们学习高等数学中的线性微分方程组的求解时，我们可能会有如下疑惑：

- 为解中经常会出现 e^x 的形式（当然， $\sin x$ 和 $\cos x$ 的形式本质上也是 e^x 的形式，只不过是在复数域上）
- 为什么非齐次的通解是齐次的通解加上非齐次的特解
- 特征方程是什么东西
- 为什么齐次方程的通解是齐次方程的线性无关的特解的线性组合
- 为什么当出现 n 重根时齐次方程的特解包含有 $x^n\mathrm{e}^x$ 的形式

以上问题在将线性微分方程和线性代数结合起来时能给出一些有启发性的解答.

在开始之前，笔者认为，数学“从抽象开始学习，越学越简单”. 若读者读过同济的线性代数的教材，可能会认为只有箭头之类的才算是“向量”，只有课本中那种有限维的矩阵才是“线性变换”. 但实际上真正的向量的定义是比较抽象的（在同济的线性代数的教材的最后一章中也稍微提到了一下，但这个章节是选学章节）. 总之，这里并不会从头开始介绍线性代数，但建议读者可以阅读一些从“线性空间”开始讲起的教材[7]而不是一般的从“行列式”开始讲起的教材.

首先，这里先给出线性空间的简略定义（完整定义请参考教材）：

[5]同样，不验证收敛，图一乐，问就是学物理学的.

[6]https://www.zhihu.com/question/307877050

[7]如 Michael Artin 的《代数》(Algebra)

Definition 4.5.1 (线性空间)**.** 线性空间是一个**集合**，这个集合满足下面两条性质：

- 集合中任意两个元素相加后的结果仍是集合中的元素
- 集合中任意一个元素和某个常数相乘后的结果仍是集合中的元素

线性空间中的一个元素被成为**向量**.

根据这个定义，我们可以发现，对于任意两个光滑函数 $f(x)$、$g(x)$，其相加后仍旧是光滑函数，并且和某个常数相乘后仍旧是光滑函数，因此我们可以得到，**全体光滑函数的集合构成一个线性空间 V，任意一个光滑函数则是 V 中的一个向量**. 这也是这个章节中最重要的观点，函数可以看成是一个向量.

下面我们给出线性变换的定义：

Definition 4.5.2 (线性变换)**.** 我们称线性空间 V 上的一个变换 A 为线性变换，当对于 V 中的任意的向量 α 和 β 以及任意常数 c，满足：

- $A(\alpha+\beta) = A(\alpha) + A(\beta)$
- $A(c\alpha) = cA(\alpha)$

对于**导数算符** D，显然对于 V 中的一个向量（也就是一个函数）f，显然有 $\mathrm{D}f \in V$，并且也满足上面两条性质，因此**导数算符是一种线性变换**.

通过上面的定义，我们已经将求导运算以及函数和线性代数联系起来，现在我们来看看这种联系可以带给我们什么.

这里我们记 $\mathrm{L} = \sum_n^m c_n \mathrm{D}^n$，容易验证这个算符也是一个线性运算，而 $\mathrm{L}y = 0$ 便是关于 y 的常系数齐次微分方程，由于 L 是线性的，若 $\mathrm{L}y_1 = 0$、$\mathrm{L}y_2 = 0$，有 $\mathrm{L}(y_1 + y_2) = 0$. 同样的，$\mathrm{L}y = f(x)$ 为关于 y 的常系数非齐次微分方程，由于 L 是线性的，若 $\mathrm{L}y_1 = f(x)$、$\mathrm{L}y_2 = f(x)$，则 $\mathrm{L}(y_1 - y_2) = 0$，这个结论在同济的高等数学中很常见.

现在，我们想找到 $\mathrm{L}y = 0$ 的全体解，全体解构成一个 V 中的解空间 V_{hom}，其又称为线性算符 L 的 Kernel. 总之，为了求出全体解，我们只需要找到解空间的一组完备的基. 现在，我们假设有这么一组向量，其经过线性变换后“方向”不变，即：$\mathrm{L}y = \lambda y$，即 y 为本征矢，λ 为对应的本征值. 则 V_{hom} 就是本征值 λ 等于 0 的本征子空间.

而 L 的本征向量非常特殊. 我们先考虑简单的情况 $\mathrm{D}y = \lambda y$，显然 $y = \lambda \mathrm{e}^x$，而对于 L，不难推出其满足 $\mathrm{L}\mathrm{e}^{\lambda x} = \sum_n^m c_n \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x}$，因此其本征矢为 $\mathrm{e}^{\lambda x}$，而对应的本征值为 $\sum_n^m c_n \lambda^n$，因此要求本征值为 0 的本征子空间，则要求 $\sum_n^m c_n \lambda^n = 0$，这就是**本征值方程**. 若此方程给出了 m 个解，其就对应了 m 个对应的本征向量（$\mathrm{e}^{\lambda x}$），这 m 个向量构成了解空间 V_{hom} 的一组完备的基，因此，全体解可以由这组基的线性组合得出.

对于 $\mathrm{L}y = f(x)$ 的解空间（V_{aff}），其可以看成是 $\mathrm{L}y = 0$ 的解空间 V_{hom} 平移了一个向量，即 $\mathrm{L}(y+g) = a$，其中 $\mathrm{L}y = 0$，g 为某一个特定的向量. 可以参考图 4.5.1，因此，$\mathrm{L}y = f(x)$ 的通解为 $\mathrm{L}y = 0$ 的通解加上一个特解（g），并且特解 g 并不属于 $\mathrm{L}y = 0$ 的解空间 V_{hom}.

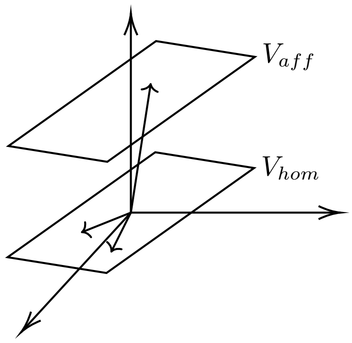


图 4.5.1: 解空间之间关系

当然，在前面的讨论中，我们要求本征值为 0 的方程（也就是特征方程）的解有 m 个不同的根，从而给出 m 个本征向量，从而组成解空间 V_{hom} 中的一组完备的基. 然而有时方程并不会给出 m 个不同的根，可能会有重根，为了处理这种情况，我们需要引入 Jordan 标准型[8].

Definition 4.5.3 (Jordan 标准型). *Jordan 标准型是如下形式的分块对角矩阵：*

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

其中：

$$J_{n_i}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

被称为 Jordan 块.

从定义中我们可以得到，当每个 Jordan 块都是 1 阶时就回到了对角矩阵，而至少 2 阶的 Jordan 块就对应者不可对角化的情况.

Jordan 标准型中的 m 个 Jordan 块对应了 m 个不变子空间的直和，其中每个 Jordan 块就对应这个子空间上进行的线性变换. 为了方便起见，我们单独考虑一个 Jordan 块. 令对应的不变子空间的基矢为 α_1 α_{n_i}，不难得知，使用 Jordan 块变换后的结果为：

$$\begin{aligned} J\alpha_1 &= \lambda\alpha \\ J\alpha_2 &= \lambda\alpha_2 + \alpha_1 \\ J\alpha_3 &= \lambda\alpha_3 + \alpha_2 \\ &\vdots \\ J\alpha_{n_i} &= \lambda\alpha_{n_i} + \alpha_{n_{i-1}} \end{aligned}$$

可以发现，有且只有基矢 α_1 是本征矢量，即一个 Jordan 块只对应一个本征矢量. 我们可以将

[8]在一般的线性代数教材（如同济的线性代数）中并没有介绍 Jordan 标准型，这里可以参考一些数学系的教材.

上面的形式进一步改写为每一个矢量 α_k 满足：

$$(J-\lambda I)^k\alpha_k=0,\quad (J-\lambda I)^{k-1}\alpha_k\neq 0$$

回到微分方程，我们现在想求出当特征方程有重根时解空间的一组完备的基，我们总可以将方程 $\mathrm{L}y=0$ 写成如下形式：

$$(\mathrm{D}-\lambda_1)^{n_1}(\mathrm{D}-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\mathrm{D}-\lambda_i)^{n_i}y=0$$

其中 $n_1+n_2+\cdots+n_i=m$，这对应了 n 个线性无关的向量，但由于 $n<m$，这组向量并不能构成解空间的一组完备的基.

但根据前文的讨论，满足 $(\mathrm{D}-\lambda_i)^{n_i}y=0$ 这个方程的，正是 λ_i 所对应的 Jordan 块的 n_i 个基底. 对于方程的每一部分都如此处理，我们便可以找到全部的 m 个线性无关的向量，从而构成解空间的一组完备的基底.

接下来我们求出这一部分所对应的 Jordan 块的 n_i 个基底. 第一个特解很简单，满足 $\mathrm{D}y_{i1}=\lambda_i y_{i1}$，解得 $y_{i1}=\mathrm{e}^{\lambda_i x}$，第二个解满足 $\mathrm{D}y_{i2}=\lambda_i y_{i2}+y_{i1}$，不难解得 $y_{i2}=x\mathrm{e}^{\lambda_i x}$，以此类推，有:

$$y_{im}=\frac{1}{(m-1)!}x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda_i x}$$

为了方便起见，我们会将前面的 $\dfrac{1}{(m-1)!}$ 的系数去掉（反正只是缩放了一下向量的长度，最后都会归到系数中）. 因此我们可以得到 n_i 个线性无关的向量. 对方程的每一部分都如此处理，我们便会得到 m 个线性无关的向量，而这 m 个向量构成了解空间的一组线性无关的基，解空间中的任意一个向量都可以由这 m 个基矢线性组合得到.