



电动力学笔记

Guotao He

2026-02-12

DEMENT

And God said,
 $dF = 0$
 $\delta F = J$

and there was light.

目录

Chapter 1 Maxwell 方程组	1
1.1 真空中的 Maxwell 方程组	1
1.2 介质中的 Maxwell 方程组	1
1.3 边界条件	2
1.4 Maxwell 方程组的守恒律	3
1.4.1 电荷守恒	3
1.4.2 能量守恒	3
* 1.4.3 动量守恒	4
* 1.5 从零开始的 Maxwell 方程组	5
* 1.5.1 静电场	5
* 1.5.2 Lorentz 协变, 磁场	5
* 1.5.3 完整 Maxwell 方程组的导出	6
* 1.6 Maxwell 方程组的唯一性	8
* 1.7 磁单极子	9
* 1.7.1 修改 Maxwell 方程组	9
* 1.7.2 电磁对偶性	11
* 1.7.3 磁单极子的宇称守恒问题	11
Chapter 2 静电学	12
2.1 静电势	12
2.1.1 静电势的定义	12
2.1.2 边界条件	12
2.1.3 静电场能量	12
2.2 唯一性定理, 电像法	13
2.2.1 唯一性定理	13
2.2.2 电像法	14
2.3 分离变量法	15
2.3.1 直角坐标系	15
2.3.2 柱坐标系	15
2.3.3 球坐标系	16
2.4 Green 函数法	16
2.4.1 Green 函数定义	16
2.4.2 常见 Green 函数	17
2.5 多极矩展开	17
2.5.1 球谐函数加法定理	18
2.5.2 电多极矩	18
2.5.3 利用张量推导电多极矩	20
2.5.4 电多极矩在外场中的能量	21

Appendix A 矢量分析	22
A.1 矢量分析	22
A.1.1 Einstein 求和约定	22
A.1.2 ∇ 算符	23
A.1.3 矢量的定义	24
A.2 矢量计算技巧	24
A.2.1 复合向量运算	25
A.2.2 下标法	25
A.2.3 指标法	26
A.3 Lame 系数与任意正交坐标系下算符	27
A.4 矢量场的积分	28
A.4.1 三大定理	28
A.4.2 Green 恒等式	29
A.4.3 其他常用变体	29
Appendix B 张量分析	32
* B.1 符号约定	32
* B.2 对偶空间, 内积	32
* B.2.1 对偶矢量	33
* B.2.2 内积	33
* B.3 张量	33
* B.3.1 张量积	34
* B.3.2 张量的分量	34
* B.3.3 并矢	34
* B.4 常见张量	34
* B.4.1 度规张量	35
* B.4.2 Levi-Civita “张量”	35
* B.5 基的变换	36
* B.6 张量场的微分算符	36
* B.7 一般正交曲线系中的矢量分析算符	37
* B.8 张量场的积分	38
* B.8.1 三维积分公式	39
* B.8.2 四维积分公式	39
Appendix C 微分形式简介	41
* C.1 外微分, 楔积, 微分形式	41
* C.2 Hodge 对偶, 余微分	42
* C.3 外微分与矢量分析算符	43
* C.4 微分形式的积分, 广义 Stokes 定理	43
Appendix D 经典电动力学中的特殊函数	45
D.1 Legendre 多项式	45
D.2 球函数	45
D.3 Bessel 函数	46

Chapter 1

Maxwell 方程组

1.1 真空中的 Maxwell 方程组

真空中的 Maxwell 方程组在国际单位制中可以写为:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

Maxwell 方程组回答了电磁场本身满足的物理规律. 如果一个带电粒子处在外加电磁场 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 中, 其会受到电磁场对它的作用, 作用力的大小由 Lorentz 力给出. 我们假定空间中存在电荷和电流分布 (ρ, \mathbf{J}) , 则单位体积的力密度为:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Maxwell 方程组与 Lorentz 力构成了经典电动力学的基础.

1.2 介质中的 Maxwell 方程组

如果空间中存在介质, 那么其中电磁现象则会更复杂. 如果在亚原子尺度考虑问题, 所谓介质, 无非是大量的、不断运动的微观粒子的集合. 这些微观粒子一般带有电荷和磁矩, 因此, 介质中的电磁场是外加电磁场和介质微观粒子所产生的电磁场的平均的叠加. 从微观第一性原理出发得到介质中的电磁现象将是量子力学和统计力学的课题. 在经典电动力学中, 我们将仅仅处理经典的、唯象的电磁场.

下面我们考虑线性的、各向同性的、均匀的介质. 当存在电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 时, 介质会被极化(电极化和磁化). 我们称介质单位体积中平均电偶极矩称为介质的电极化强度 \mathbf{P} . 介质内某个小封闭曲面的束缚电荷 Q_p 为:

$$Q_p = \int d^3x \rho_p = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

由封闭曲面的随意性, 有:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

其中 ρ_p 是介质内某点的束缚电荷密度. 类似地, 在介质界面上的束缚电荷面密度 σ_p 为:

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$

其中, \mathbf{n} 为单位面积矢量, 从介质 1 指向介质 2.

如果束缚电荷 ρ_p 分布随时间变化, 则产生极化电流分布 \mathbf{J}_p :

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Ampere 考虑到分子内带电微观粒子是在运动的，因此引入分子电流密度 \mathbf{J}_m . 其也会产生磁场，当介质被外加磁场磁化时，介质单位体积中的平均磁偶极矩称为介质的磁化强度，记为 \mathbf{M} . 对某个小闭合回路构成面积元有：

$$\int \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{M} \cdot dl$$

故磁化电流分布 \mathbf{J}_m :

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

真空中 Maxwell 方程可以改写为（对于无源两个方程，没有区别，这里不再列出）：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) / \epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)\end{aligned}$$

上式中 ρ 和 \mathbf{J} 为自由电荷和自由电流密度. 定义：

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}\end{aligned}$$

从而介质中的 Maxwell 方程可以写为：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

在一般的情况下， \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 与 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 的关系可能是非常复杂的，可能是非线性的甚至是非局部的. 我们记 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 与 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 的关系为本构关系：

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} [\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H} [\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

对于线性介质，我们取：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

对于导电介质，有 Ohm 定律： $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. 其中 σ 是导体电导率（请注意和前面的电荷面密度区分，两者都习惯用 σ 表示）.

1.3 边界条件

介质交界处的边界条件满足：

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \alpha\end{aligned}$$

其中 σ 是界面自由电荷面密度， α 是界面自由电流面密度.

1.4 Maxwell 方程组的守恒律

1.4.1 电荷守恒

从真空中 Maxwell 方程组出发, 有:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

两端取散度, 有:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t}$$

由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, 有:

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

即电荷满足连续性方程. 故电荷守恒.

我们也可以从介质中 Maxwell 方程组推导, 由:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

两端取散度, 有:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

即自由电荷满足连续性方程. 故自由电荷守恒.

这里需要注意, 从真空中的 Maxwell 方程组给出的是全部电荷的电荷守恒, 而从介质中 Maxwell 方程组给出的是自由电荷的守恒. 由于连续性方程是线性的, 因此束缚电荷显然也是守恒的. 我们也可以给出证明, 由束缚电荷电流取散度, 有:

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) = \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{P}}{\partial t} + 0 = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m) = 0$$

1.4.2 能量守恒

考虑带电粒子 q 以速度 \mathbf{v} 在电磁场中运动, 电场对其做功 $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$. 假设带电粒子运动产生的电流分布为 \mathbf{J} (对于单粒子, $\mathbf{J} = q\mathbf{v}$). 则电磁场做功:

$$W = \int_V d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3x \mathbf{E} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

注意到:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

因此:

$$W = - \int_V d^3x \left(\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

不难注意到等式右侧是连续性方程的形式. 定义电磁场能量密度 w :

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

和能流密度 \mathbf{S} (称为 Poynting 矢量):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

因此上式改写为:

$$W = - \int_V d^3x \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

其物理意义非常明显, 单位时间内, 任意体积的电磁场对外做功, 等于电磁场能量下降 $-\partial_t w$ 以及流入的能流 $-\nabla \cdot \mathbf{S}$. 可见, 电磁场以及带电粒子整体能量守恒.

* 1.4.3 动量守恒

考虑空间 V 中的带电粒子的总动量为 \mathbf{P}_{src} , 由 Lorentz 力公式, 有:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{src}}}{dt} = \int_V d^3x (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

利用 Maxwell 方程组替换 ρ 和 \mathbf{J} , 有:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{src}}}{dt} = \int_V d^3x \left(\epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right)$$

这里我们希望凑出全微分的形式, 因此需要对 $\partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 进行处理, 利用:

$$\partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{B} = \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

有:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{src}}}{dt} = \int_V d^3x \left[\epsilon_0 (\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \underbrace{\mathbf{S}}_{\mu_0 \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}} \right]$$

为了令式子关于 \mathbf{E} , \mathbf{B} 对称, 我们引入 $\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B})$ ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), 有:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbf{P}_{\text{src}}}{dt} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V d^3x \mathbf{S} \\ &= \int_V d^3x \left[\epsilon_0 (\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) \right] \end{aligned}$$

利用矢量恒等式:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_k &= A_k \partial_i A_i - \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnj} A_i \partial_m A_n \\ &= A_k \partial_i A_i - (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) A_i \partial_m A_n \\ &= A_k \partial_i A_i - A_i \partial_k A_i + A_i \partial_i A_k \\ &= \partial_i \left(A_i A_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathbf{A}^2 \right) \end{aligned}$$

定义:

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$$

因此:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{src}}}{dt} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V d^3x \mathbf{S} = \int_V d^3x \partial_i T_{ij} = \oint_{\partial V} dS_i T_{ij}$$

这里, 等式的右边是对边界的积分, 代表场对外界的动量的流动. 因此, 我们可以定义:

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

是场的动量密度. 而 T_{ij} 称为 Maxwell 应力张量.

这里我们注意到, 场的动量密度 \mathbf{g} 与能流 \mathbf{S} 有简单的关系: $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$. 在后面狭义相对论的电动力学中我们可以看到, 这不是偶然的, 实际上, 两者与电磁场的能量密度与 Maxwell 应力张量一起, 构成了电磁场的四维的能动张量.

* 1.5 从零开始的 Maxwell 方程组

这一章节尝试通过借助外微分形式, 从一定的假设出发自然地“推导”得到 Maxwell 方程组. 在本章节中, 我们记 \mathbb{R}^3 为三维欧式空间, \mathbb{M}^4 为四维闵式时空, 度规取 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. 记 Ω^p 为 p -形式空间. 其余符号约定等参考后面的附录部分. 这里我们记 A^\flat 是矢量 A 对应的微分形式.

推导中我们忽略静电常量等常数, 可以认为是选取了一种特殊的单位制使得常数全为 1.

* 1.5.1 静电场

简单回顾一下微分形式的内容. 在微分形式中, 我们有三种运算: 外微分 d , 余微分 δ , Laplace - de Rham 算子 Δ . 其中, 外微分 d 能将 p -形式变成 $(p+1)$ -形式, 可以认为是某种“升维”微分. 而余微分 δ 则将 p -形式变成 $(p-1)$ -形式, 是某种“降维”微分. 而 Laplace - de Rham 算子 Δ 将 p -形式变成 p -形式, 是某种“保维”微分.

我们假设三维空间中存在一个最简单的场, 也就是标量场 ϕ . 其本身也是 0-形式. 对于一个 0-形式, 显然不能进行“降维”微分 δ . 可以进行“升维”微分 d 和“保维”微分 Δ . 因此, 我们可以定义 E^\flat 和 ρ :

$$E^\flat = -d\phi, \quad \rho = -\Delta\phi$$

其中负号是为了遵循物理习惯, 为了让场是势能的梯度的反方向, 其实不影响任何物理实际.

这里 $E^\flat \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ 是 1-形式, 分别被 d 和 δ 作用, 有:

$$dE^\flat = -dd\phi = 0, \quad \delta E^\flat = -\delta d\phi = \Delta\phi = -\rho$$

将微分形式利用音乐同构化为矢量形式, 有:

$$\begin{aligned} dE^\flat = 0 &\implies \nabla \times \mathbf{E} = (*dE^\flat)^\sharp = 0 \implies \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\delta E^\flat = \rho \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \end{aligned}$$

综上我们得到了完整的静电场方程. 另外, 我们也可以得到 ϕ 满足的方程:

$$\Delta\phi = -\rho \implies \nabla^2\phi = -\rho$$

* 1.5.2 Lorentz 协变, 磁场

狭义相对论告诉我们任何理论都应该满足 Lorentz 协变性. 但我们的静电场理论显然不满足. 首先对于 Laplace 算符 ∇^2 , 其只包含了空间部分导数, 在 Lorentz 变换下, 空间坐标 x^i 会与时间坐标 x^0 混合. 同时, 对于源 ρ , 当在运动的参考系中, 由于“动尺收缩”, ρ 会变大, 而且还会有流, 而我们的理论没有考虑这些影响, 因此我们需要对理论进行修正.

考虑方程 $\nabla^2\phi = -\rho$, 我们将算子改为四维协变的 d'Alembert 算子 $\square = -\partial_t^2 + \nabla^2$, 同时将右侧改为四维流 J . 记四维势为 A . 因此四维势满足的方程为:

$$\square A^\mu = -J^\mu$$

考虑 $\mu = 0$, 也就是 $\square A^0 = -J^0$, 展开有:

$$-\partial_t^2 A^0 + \nabla^2 A^0 = -J^0$$

类比 $\nabla^2 \phi = -\rho$, 有: $A^0 = \phi$, $J^0 = \rho$, ∂_t 保证当运动停止, 一切回归与静电场.

我们记 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, 其中 \mathbf{A} 为待定的矢势部分. 对偶分量 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (-\phi, A_i)$, 记对应的 1-形式 $A^\flat = A_\mu dx^\mu \in \Omega^1(\mathbb{M}^4)$.

对 A^\flat 做外微分, 记结果为 $F \in \Omega^2(\mathbb{M}^4)$.

$$F = dA^\flat = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

这里 F 是一个 $(0, 2)$ 型反对称张量, 对角元素都是 0, 且一共只有 6 个元素独立, $1/2$ 是为了避免重复计数. 我们拆成两部分 F_{time} 和 F_{space} , 其中前者是包含指标为 0 的部分 (含时部分), 后者则是空间部分. 也就是:

$$\begin{aligned} F_{\text{time}} &= F_{0i} dx^{0i} = (\partial_0 A_i + \partial_i \phi) dx^{0i} \\ F_{\text{space}} &= \frac{1}{2} F_{ij} dx^{ij} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^{ij} \end{aligned}$$

F_{time} 取三维部分, 由音乐同构:

$$F_{\text{time}}^\sharp = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$$

其中 $\partial_t \mathbf{A}$ 前多的负号是由于 g^{00} 是 -1 . 类比静电场的 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, 我们知道 F_{time}^\sharp 就是 \mathbf{E} . 因此:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$$

F_{space} 具有叉乘的形式, 因此我们往叉乘凑, 对 F_{space} 取三维部分再做三维的 Hodge 对偶, 并记结果为 B^\flat :

$$B^\flat = *F_{\text{space}} = \epsilon^{ij}_k \partial_i A_j dx^k$$

再由音乐同构:

$$\mathbf{B} = (B^\flat)^\sharp = \epsilon_j^{ki} \partial_i A^j e_k = \nabla \times \mathbf{A}$$

这里的 \mathbf{B} 就是我们所熟知的磁场. 从中我们可以得到, 磁场可以看成是电场的相对论效应, 或者更准确地说, 电场和磁场都是同一个场 (也就是电磁场) 的分量. 而 F 就是所谓的电磁场张量.

* 1.5.3 完整 Maxwell 方程组的导出

前面我们得到 $F \in \Omega^2(\mathbb{M}^4)$. 类似我们在静电场的处理, 同样对其进行外微分和余微分. 对于外微分:

$$dF = ddA^\flat = 0$$

也就是:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} dx^{\lambda\mu\nu} = 0$$

取 $(\lambda, \mu, \nu) = (0, i, j)$, 也就是取含时部分, 有:

$$(\partial_0 F_{ij} + \partial_i F_{j0} + \partial_j F_{0i}) dx^{0ij} = 0$$

取三维部分, 根据前文我们有 $F^{0i} = E^i$, 因此 $F_{0i} = g^{00} g^{ii} F_{0i} = -E_i$, $F_{ij} = \epsilon_{ij}^k B_k$, 代入有:

$$\underbrace{\partial_0 (\epsilon_{ij}^k B_k) dx^{ij}}_{\text{Part 1}} + \underbrace{(\partial_j E_i - \partial_i E_j) dx^{ij}}_{\text{Part 2}} = 0$$

两边进行 Hodge 对偶，其中：

$$\text{Part 1} = \partial_0 (\epsilon_{ij}^k B_k) \epsilon^{ij}_m dx^m = 2\partial_0 B_m dx^m$$

$$\text{Part 2} = (\partial_j E_i - \partial_i E_j) \epsilon^{ij}_m dx^m = 2\epsilon^{ij}_m \partial_j E_i dx^m$$

再由音乐同构：

$$(\text{Part 1})^\sharp = 2\partial_t \mathbf{B}$$

$$(\text{Part 2})^\sharp = 2\epsilon_i^{kj} \partial_j E^i e_k = 2\nabla \times \mathbf{E}$$

因此：

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

也就是 Faraday 电磁感应定律.

取 $(\lambda, \mu, \nu) = (i, j, k)$ 也就是取空间部分，有：

$$(\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij}) dx^{ijk} = 0$$

注意到：

$$*B^\flat = * (B_k dx^k) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k B_k dx^{ij} = \frac{1}{2} F_{ij} dx^{ij}$$

因此：

$$\begin{aligned} & (\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij}) dx^{ijk} = 0 \\ \Rightarrow & d(*B^\flat) = 0 \\ \Rightarrow & *d(*B^\flat) = 0 \\ \Rightarrow & \delta B^\flat = 0 \end{aligned}$$

再由音乐同构：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

也就是磁场无旋.

我们也可以对 F 进行余微分，这里我们取 Lorenz 规范 $(\delta A^\flat = 0)$ ，因此有：

$$\delta F = \delta d A^\flat + d \underbrace{\delta A^\flat}_{=0} = \Delta A^\flat = J$$

这里根据前文 $J^\mu = (\rho, j^i)$, $J_\mu = (-\rho, j_i)$ 其中 j^i 为 ρ 产生的流密度（也就是电流密度）. 对于 δF 展开有：

$$\begin{aligned} \delta F &= -* d * \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^{\mu\nu} \right) \\ &= -* d \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} dx^{\alpha\beta} \right) \\ &= -* \left(\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \partial_\rho F_{\mu\nu} dx^{\rho\alpha\beta} \right) \\ &= -\partial^\mu F_{\mu\sigma} dx^\sigma \end{aligned}$$

这里用到了四维闵氏时空的缩并恒等式 $\epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \epsilon^{\rho\alpha\beta}_\sigma = -2(\delta^\mu_\sigma g^{\nu\rho} - \delta^\nu_\sigma g^{\mu\rho})$. 同样分别考虑含时部分和空间部分. 对于含时部分 ($\sigma = 0$)，有：

$$-\partial^\mu F_{\mu 0} dx^0 = (\partial^0 \underbrace{F_{00}}_{\text{反对称}=0} + \partial^i \underbrace{F_{i0}}_{=E_i}) dx^0 = \partial^i E_i dx^0 = J_0 dx^0 = -\rho dx^0$$

由音乐同构有：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

也就是 Gauss 定理.

对于空间部分 ($\sigma = k$), 有:

$$-\underbrace{\partial^0 F_{0k} dx^k}_{\text{Part 1}} - \underbrace{\partial^j F_{jk} dx^k}_{\text{Part 2}} = J_k dx^k$$

其中:

$$\text{Part 1} = \partial^0 (-E_k) dx^k$$

$$\text{Part 2} = \epsilon_{jk}{}^l \partial^j B_l dx^k$$

由音乐同构:

$$(\text{Part 1})^\sharp = \partial_0 E^k e_k = \partial_t \mathbf{E}$$

$$(\text{Part 2})^\sharp = \epsilon_{jk}{}^l \partial^j B^l e_k = -\epsilon^j{}_{lk} \partial_j B_l e_k = -\nabla \times \mathbf{B}$$

$$(J_k dx^k)^\sharp = \mathbf{j}$$

因此有:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}$$

也就是 Ampere-Maxwell 定理.

综上, 我们得到了完整的 Maxwell 方程组:

$$dF = 0 \implies \begin{cases} \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\delta F = J \implies \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \end{cases}$$

可见整个 Maxwell 方程组可以简单地由 $dF = 0$ 和 $\delta F = J$ 给出, 其中前者来自几何恒等式, 而后者来自动力学方程 (与源有关). 同时 Lorentz 协变性在形式的语言中是自动保证的. 可以说, 使用微分形式表示的 Maxwell 方程组是 Maxwell 方程组最简洁最优美的形式.

* 1.6 Maxwell 方程组的唯一性

这里我们给出 Maxwell 方程组的唯一性定理. 唯一性定理说的是在给定的边界条件和初始条件下, 系统的演化完全由 Maxwell 方程组决定, 或者说 Maxwell 方程组在给定定解条件下有且只有一个解, 不会出现两个解.

我们使用反证法证明, 假设有两组不同的解 $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ 和 $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$. 由于 Maxwell 方程组是线性的, 因此构造:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$$

其满足:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = 0$$

且有如下定解条件:

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{E}|_{\partial V} = \mathbf{B}|_{\partial V} = 0$$

若我们能证明 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在整个空间中恒为 0, 则两组解相同, 也就是假设不成立, 原命题得证. 下面我们使用称为“能量估计”的方法证明 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在整个空间中恒为 0. 具体而言, 我们对系统的某种范数(一般而言在物理上和能量相关)计算随时间的变化.

我们构造¹:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$$

对时间求导, 有:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \int_V d^3x \frac{d}{dt} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$$

注意到:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) &= \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{=-\partial_t \mathbf{B}} - \mathbf{E} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{B})}_{=\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \partial_t \mathbf{B} + \epsilon_0 \mathbf{E} \partial_t \mathbf{E} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \partial_t \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= - \int_V d^3x \nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) \\ &= - \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) \end{aligned}$$

因为在边界处 $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$. 因此 $dU/dt = 0$. 又因为初始时 $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, 因此 $U|_{t=0} = 0$, 故任意时刻 $U = 0$. 又因为每个区域的能量密度都是非负的, 要使得任意时刻 $U = 0$, 只能 $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$. 综上, 原假设不成立, 证毕.

这个方法可以进行推广, 从而给出输运方程, 波动方程等数学物理方程的唯一性.

* 1.7 磁单极子

磁单极子是否应该存在? 电磁规律对应的电和磁效应是否应该具有对称性? 这是一个物理学中存在已久但至今仍未解决的问题. 人们比较相信磁单极子的存在, 这样电磁规律就存在完美的对称性, 而且电荷为什么是量子化的问题也就有了答案. 但就目前而言, 人们并没有找到过磁单极子, 现行的理论也不得不将磁单极子不存在作为客观事实依据.

本章节将尝试简略讨论若存在磁单极子, 电磁学会发生怎样的变化, 具有什么有趣的特性, 以及可能造成的问题.

* 1.7.1 修改 Maxwell 方程组

前文我们得到:

$$dF = 0 \implies \begin{cases} \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

¹构造不是唯一的, 这里我们直接取能量.

$$\delta F = J \implies \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \end{cases}$$

若存在磁单极子，则有 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$ ，其中 ρ_m 为磁荷密度。很显然我们需要从 $dF = 0$ 进行修改。这也意味着磁单极子的存在破坏了 $F = dA$ 的结构。也就意味着四维势的定义不是这么简单的了。同时，从数学一点的角度说，这也代表着出现了非恰当的闭形式，从而意味着 de-Rham 上同调群非平凡²。

在没有磁荷的情况下，上述微分形式 Maxwell 方程可以写为：

$$dF = 0$$

$$\delta F = J$$

如果存在磁荷，我们可以改为：

$$\delta(*F) = J_m$$

$$\delta F = J_e$$

写成张量形式也就是：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J_e^\nu$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = -J_m^\nu$$

其中 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, $J_m^\nu = (\rho_m, \mathbf{j}_m)$, \mathbf{j}_m 是磁荷流动产生的磁流。我们可以给出对应的矢量形式，对于 $d * F = * J_e$ ，和原始的 Maxwell 方程组相同，这里不再赘述。下面我们将 $dF = * J_m$ 写成矢量形式。由前文易得 $\tilde{F}^{0i} = B^i$, $\tilde{F}^{ij} = -\epsilon^{ij}{}_k E^k$ 。

对于张量形式的方程 $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = J_m^\nu$, 取 $\nu = 0$. 有：

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = -J_m^0 \implies -\partial_i B^i = -\rho_m \implies \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$$

取 $\nu = i$, 有：

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} = -J_m^i \implies \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = -J_m^i \implies \partial_0 B^i + \epsilon^{ij}{}_k \partial_j E^k = -j_m^i$$

写成矢量形式也就是：

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m$$

综上，若存在磁荷，则 Maxwell 方程的矢量形式为：

$$\delta(*F) = J_m \implies \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = -\mathbf{j}_m \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \end{cases}$$

$$\delta F = J_e \implies \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}_e \end{cases}$$

同样我们可以证明磁荷满足连续性方程，由于 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m - \partial_t \mathbf{B}$, 两边取散度：

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\mathbf{j}_m + \partial_t \mathbf{B}) = -\partial_t \rho_m - \nabla \cdot \mathbf{j}_m$$

也就是：

$$\partial_t \rho_m + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0$$

即磁荷连续性方程。也因此对于修改的 Maxwell 方程组磁荷守恒。

²也因此前面的“推导中”我们直接得到了正常的 Maxwell 方程组，这是因为我们假设的势和推广都是最简单最平凡的形式。

* 1.7.2 电磁对偶性

电磁对偶性是指 Maxwell 方程组在电磁场和源项进行某种特定的“旋转”变换下的不变性。考虑在“电荷-磁荷”空间中进行一个旋转变换，旋转角记为 θ 且是与时空位置无关的常数。对偶变换为：

$$\begin{pmatrix} F'^{\mu\nu} \\ \tilde{F}'^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ \tilde{F}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J'_e^\nu \\ \tilde{J}'_m^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_e^\nu \\ J_m^\nu \end{pmatrix}$$

在如上旋转变换下，我们有：

$$\begin{aligned} \partial_\mu F'^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(F^{\mu\nu} \cos\theta + \tilde{F}^{\mu\nu} \sin\theta \right) = J_e^\nu \cos\theta - J_m^\nu \sin\theta = J'_e^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(-F^{\mu\nu} \sin\theta + \tilde{F}^{\mu\nu} \cos\theta \right) = -\sin\theta J_e^\nu - \cos\theta J_m^\nu = -J'_m^\nu \end{aligned}$$

可见，经过如上变化的场 $F'^{\mu\nu}$ 和源 J'_e^ν, J'_m^ν 满足完全相同形式的 Maxwell 方程组。换句话说，一旦引入磁单极子，所谓的“电荷”和“磁荷”仅仅是我们在对偶空间中选择的一个观测角度。如果我们发现宇宙中所有的荷都具有相同的 q_m/q_e 比值，我们总可以通过特定的角度为 θ 的旋转变换使得 $J_m^\nu = 0$ 。

特殊地，如果我们取 $\theta = \pi/2$ ，则就是 Hodge 对偶对应的变换。对应的变换为：

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \rho_e \rightarrow \rho_m, \quad \mathbf{j}_e \rightarrow \mathbf{j}_m, \quad \rho_m \rightarrow -\rho_e, \quad \mathbf{j}_m \rightarrow -\mathbf{j}_e$$

* 1.7.3 磁单极子的宇称守恒问题

在引入磁单极子后，宇称（Parity）的对称性问题变得非常微妙且有趣。我们现在考虑宇称变换（记为 P ），也就是空间反演，即进行如下变换：

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z$$

目前电磁规律的宇称不变性已经被大量的实验所证实。在经典的电磁学中，我们一般认为宇称守恒。下面我们分析引入磁荷后的电磁规律的宇称性质。

对于电场和磁场，我们知道，电场是极矢量，在宇称变换下变号： $P\mathbf{E} = -\mathbf{E}$ 。磁场是轴矢量³，在宇称变换下不变号： $P\mathbf{B} = \mathbf{B}$ 。现在我们考虑在宇称变换下的 Maxwell 方程。

对于 ρ_e 和 \mathbf{j}_e ，有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &\xrightarrow{P} (-\nabla) \cdot (-\mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &\xrightarrow{P} (-\nabla) \times \mathbf{B} - \partial_t (-\mathbf{E}) = -(\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E}) = -\mathbf{j}_e \end{aligned}$$

也就是电荷密度 ρ_e 在宇称变换下不变，符合我们对标量的认识（标量没有方向性）。而电荷流 \mathbf{j}_e 是一个极矢量，也符合我们的一般认识。

现在我们考虑 ρ_m 和 \mathbf{j}_m ，进行宇称变换，有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &\xrightarrow{P} (-\nabla) \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot \mathbf{B} = -\rho_m \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &\xrightarrow{P} (-\nabla) \times (-\mathbf{E}) + \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = -\mathbf{j}_m \end{aligned}$$

也就是磁荷流 \mathbf{j}_m 在宇称变换下不变，是一个轴矢量。但麻烦的是 ρ_m ，本身是标量却在宇称变换下变号。如果假设磁单极子是标量，那么包含磁单极子的电磁规律将破坏宇称守恒这一结论。我们只能认为磁荷是某一种“赝标量”，以维护宇称的对称性。这也带来了奇特的物理现象：对于一个磁荷，在宇称变换下（或者用更“科普”的说法，在镜子中观察磁荷），其磁荷符号是相反的。

³前面我们知道，磁场其实是一个二形式，然后经过 Hodge 对偶得到的一形式，从而得到向量，因此是一个轴矢量。

Chapter 2

静电学

2.1 静电势

2.1.1 静电势的定义

在各向同性的线性介质中，设静电常数为 ϵ ，对于静电场，由 Maxwell 方程有：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

上式第二个方程表明静电场是一个无旋场，由于“梯度无旋”，因此我们可以引入一个静电势 ϕ ，使得 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. 利用 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, 上式化为：

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon$$

也就是说 ϕ 满足 Poisson 方程. 如果所考虑的区域自由空间电荷 $\rho = 0$, 则 ϕ 满足 Laplace 方程. 这样我们就可以将 \mathbf{E} 的求解转化为 ϕ 的求解，从而变成数学物理方程中能够处理的形式.

需要指出的是， ϕ 的选取不是唯一的，不难注意到，若有另一个标量场 Λ ，则对 ϕ 进行 $\phi \rightarrow \phi - \partial_t \Lambda$ 的变换对 \mathbf{E} 是没有影响的. 因此 ϕ 的具体取值没有太大物理意义，其差值才有意义. 一般而言，我们人为定义无穷远处的 $\phi = 0$ ，这样，空间中的 ϕ 就能唯一确定.

2.1.2 边界条件

要求解 ϕ ，除了需要方程，还需要边界条件. 具体的边界条件由具体问题给出，这里我们关心不同区域的连接条件. 由 Maxwell 方程组在介质边界的条件：

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 有：

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma, \quad \phi_2 = \phi_1$$

其中 $\partial_n \phi$ 代表 ϕ 在法线方向的导数.

2.1.3 静电场能量

在没有磁场时，电磁场的能量密度为：

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

因此系统的能量为上式在空间中积分：

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

利用 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 和 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ 有：

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int_V d^3x (\nabla\phi)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\epsilon}{2} \int_V d^3x [\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - \phi \nabla^2 \phi] \\
&= \underbrace{\frac{\epsilon}{2} \int_V d^3x \nabla \cdot (\phi \nabla \phi)}_{\text{Part 1}} - \underbrace{\frac{\epsilon}{2} \int_V d^3x \phi \nabla^2 \phi}_{\text{Part 2}}
\end{aligned}$$

其中 Part 1 由散度定理:

$$\text{Part 1} = \frac{\epsilon}{2} \oint_{\partial V} \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S}$$

对于一个孤立电荷系统, 我们通常取 V 为全空间, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\phi \sim 1/r$, $\nabla \phi \sim 1/r^2$, $S \sim r^2$, 因此 $\phi \nabla \phi S \sim 1/r \rightarrow 0$. 因此 Part 1 为 0.

对于 Part 2, 由 ϕ 满足的 Possion 方程:

$$U = -\frac{\epsilon}{2} \int_V d^3x \phi \nabla^2 \phi = -\frac{\epsilon}{2} \int_V d^3x \phi \left(-\frac{\rho}{\epsilon}\right) = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho \phi$$

对于导体, 其自由电荷全部分布在表面且表面电势相同, 因此, 对于空间中的多个导体, 系统的总能量为:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i Q_i$$

其中 Q_i 为导体的带电量, ϕ_i 为导体的电势.

2.2 唯一性定理, 电像法

2.2.1 唯一性定理

设某个空间 V 的边界为 S , 则在 V 中满足 Possion 方程在 S 中满足第一类或第二类边界条件的 ϕ 是唯一的 (或者差一个常数). 这就是所谓的唯一性定理. 下面我们给出唯一性定理的证明.

设 ϕ_1 和 ϕ_2 是满足条件的两个解, 那么由 Possion 方程的线性性质有 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ 在区域 V 中满足 Laplace 方程 $\nabla^2 \psi = 0$, 且边界条件要么为 0 (第一类边界条件), 要么法向导数为 0 (第二类边界条件). 由于:

$$(\nabla \psi)^2 = \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) - \psi \underbrace{\nabla^2 \psi}_{\nabla^2 \psi = 0} = \nabla \cdot (\psi \nabla \psi)$$

两边积分:

$$\int_V d^3x (\nabla \psi)^2 = \int_V d^3x \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) = \oint_S \psi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \psi (\nabla \psi \cdot \mathbf{n}) dS$$

其中对于第一类边界条件, 在边界处 $\psi = 0$, 第二类边界条件在边界处 $\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0$, 因此, 无论哪种情况, 有:

$$\int_V d^3x (\nabla \psi)^2 = 0$$

即 $\nabla \psi = 0$, 也就是 $\psi = \text{Constant}$. 唯一性定理得证.

唯一性定理告诉我们, 只要边界条件唯一确定, 则解唯一. 因此假设我们能直接“猜”出一个满足方程和边界条件的解, 则“猜”出的解就是实际问题的解. 利用这里想法, 我们介绍电像法.

2.2.2 电像法

所谓电像法，就是在求解区域外引入一定的电荷，使得加上这些电荷后，能替代边界条件，从而将复杂的 PDE 问题转化为点电荷的叠加问题。

电像法引入的镜像电荷之所以只需要满足边界条件即可，是因为点电荷的叠加的静电势自动满足 Laplace 方程。同时电像法只能在求解区域外引入电荷，否则会在求解区域内引入源，使得方程发生改变。

如何加入镜像电荷，使得能替代边界条件是一个比较有技巧性的过程，很多时候都是根据某些对称性“猜”出来的，很多时候只能在某些比较简单和特殊的情况下才能使用。下面我们给出常见的电像法：

Example 2.2.1. 接地无限大金属板的上方有一个点电荷 Q ，求上半空间的电势分布。

Solution. 取坐标系，使得金属板在 $z = 0$ 平面，点电荷在 $(0, 0, z_0)$ 处。对于接地无限大金属板，有 $\phi(z = 0) = 0$ 。为了保持金属板的电势分布，根据对称性，我们可以在 $(0, 0, -z_0)$ 处放置 $-Q$ 的电荷，容易验证得满足原边界条件要求。因此上半空间的电势分布简化为两个点电荷的电势分布，因此：

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right)$$

□

Example 2.2.2. 接地金属球壳半径为 a ，距离球壳中心 $R (R > a)$ 处有一电荷 Q 。求整个空间的电势分布。

Solution. 这里边界 $r = a$ 将求解区域分成内外两部分，边界条件为 $\phi(r = a) = 0$ ，这两部分我们需要分别求解。

我们先求解球外区域的电势。我们希望在球内区域引入电荷 Q' 替代边界条件，根据对称性，易得 Q, Q' ，球心三点共线，我们记 Q' 距离球心为 R' 。取球面距离 Q 最近和最远的两点列出方程，有：

$$\frac{Q}{R-a} + \frac{Q'}{a-R'} = 0, \quad \frac{Q}{R+a} + \frac{Q'}{R'+a} = 0$$

解得：

$$R' = \frac{a^2}{R}, \quad Q' = -Q \frac{a}{R}$$

注意现在我们只是取特殊情况“猜”出了电荷，我们还需要验证其满足边界条件。通过相似三角形容易得到引入的像电荷满足边界条件。因此球外的电势分布为（取原点到 Q 为极轴）：

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}} - \frac{Qa/R}{\sqrt{r^2 + R'^2 - 2rR' \cos\theta}} \right)$$

对于球内区域，注意球内区域没有电荷，且边界为 $\phi = 0$ ，易得球内区域 $\phi = 0$ 。注意这里不需要引入镜像电荷，如果引入则镜像电荷出现在求解区域内，不符合原方程。□

求解出电势分布后，我们就可以通过前文的各种公式求解出我们想要的物理量。下面给出举例：

Example 2.2.3. 求解 Example 2.2.2 的导体壳的感应电荷分布.

Solution. 在导体表面取一个小圆柱形 Gauss 面，一半在内，一半在外，由 Gauss 定理：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

其中圆柱侧面由于 \mathbf{E} 垂直于圆柱侧表明，因此通量为 0，底面由于在导体内，通量为 0. 顶面通量为 $E \cdot \Delta S$, ΔS 为 Gauss 面底面积. 包围电荷为 $\sigma \cdot \Delta S$. 因此：

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

其中 $\partial_n \phi$ 代表 ϕ 在法线方向的导数.

因此，对于导体壳的感应电荷分布，有：

$$\sigma(\theta) = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{r=a} = -\frac{Q}{4\pi a} \frac{R^2 - a^2}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}}$$

□

2.3 分离变量法

前文提到的镜像法实际上是一种比较特殊的方法，只能运用到一些特殊的情况下. 更一般的方法就是直接求解 Possion 方程或 Laplace 方程，具体步骤在数学物理方法中已经有了详细介绍，这里仅简略说明.

2.3.1 直角坐标系

在直角坐标系中，Laplace 方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 的解可以简单地利用分离变量法写为 $\phi = X(x)Y(y)Z(z)$. 其中：

$$X \propto \exp(k_x x), \quad Y \propto \exp(k_y y), \quad Z \propto \exp(k_z z), \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

其中 k_x, k_y, k_z 由边界条件决定. 一般情况下，若某个方向的范围有限，则形成驻波，对应的 k 是虚数形式，也就是对应本征函数是三角函数. 反之如果某个方向是无穷区间，则一般 k 可取连续的值.

2.3.2 柱坐标系

在柱坐标系中，Laplace 方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 的解可以分离变量为 $\phi = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$. 其中：

$$Z \propto \exp(\pm kz), \quad \Theta \propto \exp(\pm im\theta), \quad R(r) \propto J_m(kr), N_m(kr)$$

其中 m 必须为整数（保证 ϕ 单值）. 一般而言 k 有两种取法：

- k 为实数，此时 Z 为指数函数的形式，径向函数 R 就是 Bessel 函数 $J_m(kr), N_m(kr)$ 的线性组合.
- k 为虚数，此时 Z 为三角函数的形式，镜像函数 R 就是虚宗量 Bessel 函数 $I_m(|k|r), K_m(|k|r)$ 的线性组合.

2.3.3 球坐标系

在柱坐标系中, Laplace 方程 $\nabla^2\phi = 0$ 的解可以分离变量为 $\phi = R(r)Y(\theta, \phi)$. 其中:

$$R \propto r^l, r^{-(l+1)}$$

而 Y 一般用归一化的球谐函数:

$$Y \propto Y_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) \exp(im\phi)$$

此时一般通解可以写为:

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

其中 (θ, ϕ) 实际上代表了一个单位长度的方向向量, 因此 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 有时也写为 $Y_{lm}(\mathbf{n})$, 其中 \mathbf{n} 为方向向量.

有时 Y_{lm} 的归一化系数比较烦, 因此我们也可以写为:

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos\theta) (C_{lm} \cos(m\phi) + D_{lm} \sin(m\phi))$$

2.4 Green 函数法

2.4.1 Green 函数定义

区域 V 中的一个处于 \mathbf{x}' 的点电荷的电势 ψ 若满足如下 PDE:

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \psi|_{\partial V} = 0$$

则称 ψ 是满足第一类边界条件的 Green 函数. 若满足:

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|_{\partial V} = -\frac{1}{\epsilon_0}S$$

则称 ψ 是满足第二类边界条件的 Green 函数. 我们统一将 Green 函数记为 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

假设我们能求解出区域 V 中的 Green 函数, 我们就可以给出空间中的电势的表达式. 下面给出从 Green 函数给出一般的边值问题的解.

利用 Green 公式:

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\phi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\phi) = \oint_{\partial V} dS \left(\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)$$

令 $\psi = G$, 有:

$$\begin{aligned} & \int_V d^3\mathbf{x}' \left[\phi(\mathbf{x}') \underbrace{\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}_{=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\epsilon_0} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \underbrace{\nabla^2\phi(\mathbf{x}')}_{=-\rho(\mathbf{x}')/\epsilon_0} \right] \\ &= \oint_{\partial V} dS' \left[\phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] \end{aligned}$$

整理有:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \epsilon_0 \oint_{\partial V} dS' \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right]$$

对于第一类边界条件，边界处有：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, (\mathbf{x} \in S')$$

因此：

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} dS' \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'}$$

对于第二类边界条件，边界处有：

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0 S'}, (\mathbf{x} \in S')$$

因此：

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \epsilon_0 \oint_{\partial V} dS' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} + \underbrace{\frac{1}{S'} \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{x}') dS'}_{=\langle \phi \rangle_{S'}}$$

其中最后一项是 ϕ 在 S' 的平均值.

2.4.2 常见 Green 函数

下面我们给出常见的 Green 函数. 常见的 Green 函数都是通过镜像法得到的.

无界空间的 Green 函数 对于无界空间的 Green 函数，直接由 Green 函数定义（空间中点电荷电势），直接有：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

上半空间的 Green 函数 这里的 Green 函数直接由接地无限大金属板的上方点电荷电势给出，也就是 Example 2.2.1，因此：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}} \right]$$

球外区域 Green 函数 由 Example 2.2.2，有：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\theta}} - \frac{a/r}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\theta}} \right]$$

2.5 多极矩展开

当我们在比较远的地方计算一个任意形状的电荷分布时，我们可以将其产生的电势写成一个级数，并根据需要截断高阶项，从而简化问题. 这种方法被称为静电势的多极矩展开.

下面我们使用两种方法给出电多极矩展开. 一种方法是使用球谐函数的加法定理，这种方法能给出一个紧凑的通项公式，且易于推广. 另一种方法是类似郭硕鸿的《电动力学》中的处理，借助 Taylor 展开推导，书上的方法由于没有使用 Einstein 求和约定使得计算较为繁琐，这里我们重新使用求和约定进行推导并推广.

2.5.1 球谐函数加法定理

Theorem 2.5.1 (球谐函数加法定理). 设球面有两个方向向量 \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' , 其球面坐标分别为 (θ, ϕ) 和 (θ', ϕ') . 设 γ 是 \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 的夹角, 则:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

Proof. 这里我们利用对称性和完备性证明. 由于 $\{Y_{lm}(\mathbf{n})\}$ 构成球面的一组完备正交基, 因此, 我们有:

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} C_{l'm}(\mathbf{n}') Y_{l'm}(\mathbf{n})$$

这里 $C_{l'm}$ 为待定系数, 且依赖 \mathbf{n}' . 由于不同 l 对应的子空间正交, 因此只有 $l' = l$ 的系数非 0. 上式可写为:

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l C_{lm}(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

由于 $\cos \gamma$ 是 \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 的夹角, 式子应该是关于 \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 完全对称的, 因此可以知道展开式的结构应该为:

$$P_l(\cos \gamma) = A_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

这里有一个 Y_{lm} 取共轭是因为等式左边是一个实数, 为了保证右侧也是一个实数, 故需要将一个 Y_{lm} 取共轭. 这里我们可以把 C_{lm} 变成 $A_l Y_{lm}^*$ 而不是 $A_{lm} Y_{lm}^*$, 也就是认为常数和 m 无关, 这是因为旋转对称性. 整个等式应该是和 z 轴取向无关的, 因此任何取向的“权重”都应该相同.

最后为了确定 A_l , 我们直接取特例: $\mathbf{n} = \mathbf{n}' = (0, \phi)$. 因此 $\gamma = 0$. 等式变为:

$$1 = P_l(1) = A_l \sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\mathbf{n})|^2 = A_l \cdot \frac{2l+1}{4\pi} \Rightarrow A_l = \frac{4\pi}{2l+1}$$

综上:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n})$$

□

2.5.2 电多极矩

记场点(观察点)的矢量为 \mathbf{x} , 源点(电荷位置)的矢量为 \mathbf{x}' . 设区域 V 中的电荷密度为 $\rho(\mathbf{x}')$. 在区域 V 外的电势为:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

由 Legendre 多项式的生成函数, 有:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$, $r' = |\mathbf{x}'|$, γ 为 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' 的夹角. 利用球谐函数的加法定理, 有:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \left(\int_V d^3x' Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') \right)$$

式中括号部分只与电荷的分布有关，与观察点位置 \mathbf{x} 无关。我们记：

$$q_{lm} = \int_V d^3\mathbf{x}' Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}')$$

为电荷分布的多极矩。因此，电势可以简单写为：

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}}$$

从中我们可以看到，对于单极矩项 ($l=0$)，势能正比于 $1/r$ 。偶极矩项 ($l=1$) 正比于 $1/r^2$ 。四极矩项 ($l=2$) 正比于 $1/r^3$ 。高阶项在距离较远时衰减很快，因此通常我们只需要前几项就能得到很好的近似。

下面我们分别讨论前几项，并给出物理意义：

单极子项 单极矩只有一个分量，为：

$$q_{00} = \int_V d^3\mathbf{x}' Y_{00}^*(\mathbf{n}') \rho(\mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

其中 Q 是系统的总电荷，因此：

$$\phi_0 = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

这是一个点电荷的电势，表明在远距离处，任意电荷分布产生的电场，最低阶近似都可以看作全部电荷集中在原点的一个点电荷产生的场。

偶极子项 当 $l=1$ 时，有三个分量 $m=-1, 0, 1$ 。带入定义：

$$\begin{aligned} q_{10} &= \int_V \rho(\mathbf{x}') r' \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' \right]^* d^3\mathbf{x}' \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underbrace{\int_V x'_3 \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}_{p_3} \quad (x'_3 = r' \cos \theta') \\ q_{11} &= \int_V \rho(\mathbf{x}') r' \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{i\phi'} \right]^* d^3\mathbf{x}' \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left[\underbrace{\int_V x'_1 \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}_{p_1} - i \underbrace{\int_V x'_2 \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}_{p_2} \right] \quad (x'_1 - ix'_2 = r' \sin \theta' e^{-i\phi'}) \end{aligned}$$

$q_{1,-1} = -q_{11}^*$ 。因此：

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}$$

四极子项 这里我们直接给出计算结果：

$$\begin{aligned} q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} D_{33}, \quad q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{8\pi}} (D_{13} - iD_{23}), \quad q_{2,-1} = -q_{21}^* \\ q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (D_{11} - 2iD_{12} - D_{22}), \quad q_{2,-2} = q_{22}^* \end{aligned}$$

其中:

$$D_{ij} = \int_V d^3\mathbf{x}' \left(3x'_i x'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\mathbf{x}')$$

对应的四极矩势能为:

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{D_{ij} x_i x_j}{2r^5}$$

2.5.3 利用张量推导电多极矩

下面我们使用三维笛卡尔坐标下的 Taylor 展开推导电多极矩。对于势能，有:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

对 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 在 $\mathbf{x} = 0$ 进行 Taylor 展开，这里我们认为 \mathbf{x}' 是小量，也就是积分区域 V 的线度相对于观察距离而言是小量。因此:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} - x'_i \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \right]$$

由于积分只对 \mathbf{x}' 进行，而微分算符 ∂_i 仅作用于场坐标 \mathbf{x} 。我们可以将其分离。下面我们讨论展开前几项:

单极子项 取第 0 阶项:

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}')}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

偶极子项 取第 1 阶项:

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\partial_i \left(\frac{1}{r} \right) \right] \underbrace{\int_V d^3\mathbf{x}' x'_i \rho(\mathbf{x}')}_P \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i p_i}{r^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \end{aligned}$$

四极子项 取第 2 阶项:

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left[\partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r} \right) \right] \int_V d^3\mathbf{x}' x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}')$$

其中:

$$\partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r} \right) = \partial_i \left(-\frac{x_j}{r^3} \right) = - \left[\frac{\partial_{ij}}{r^3} + x_j (-3r^{-4}) \frac{x_i}{r} \right] = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}$$

这里我们注意到上式是无迹的，也就是 $\delta_{ij} \partial_i \partial_j (1/r) = 0$ 。后面的积分项不是无迹的，为了符合四极矩的定义（一般要求是无迹的），我们可以减去其迹。这并不会影响结果，因为 $A_{ij} B_{ij} = A_{ij} (B_{ij} + k\delta_{ij})$ ，只需要 $A_{ij} \delta_{ij} = 0$ ，也就是 A_{ij} 无迹。

因此对于积分项，有:

$$\int_V d^3\mathbf{x}' x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') \rightarrow \frac{1}{3} \underbrace{\int_V d^3\mathbf{x}' \left(3x'_i x'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\mathbf{x}')}_D$$

因此:

$$\begin{aligned}\phi_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left(\frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \right) \left(\frac{1}{3} D_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \left(D_{ij} \frac{3x_i x_j}{r^5} - \underbrace{\frac{D_{ij} \delta_{ij}}{r^3}}_{=0} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{D_{ij} x_i x_j}{2r^5}\end{aligned}$$

2.5.4 电多极矩在外场中的能量

除了计算电荷分布产生的电势，另一个重要问题是该电荷分布 $\rho(\mathbf{x}')$ 处于外部电势 $\phi_{\text{ext}}(\mathbf{x})$ 中所具有的静电势能 U :

$$U = \int_V \rho(\mathbf{x}') \phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

假设电荷分布在电荷中心附近，且外部电势在分布区域内变化缓慢，我们同样可以将外电势 ϕ_{ext} 在中心点（不失一般性，设为原点）处进行 Taylor 展开:

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}') = \phi(0) + x'_i (\partial_i \phi)_0 + \frac{1}{2} x'_i x'_j (\partial_i \partial_j \phi)_0 + \dots$$

其中 $(\partial_i \phi)_0$ 代表 ϕ 在原点处对 x_i 的偏导。我们可以对每一项进行积分，有:

单极子项 取第 0 阶项:

$$U_0 = \phi(0) \underbrace{\int_V \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'}_Q = \phi(0) Q$$

也就是将整个带电体视为集中在原点的点电荷 Q 所具有的势能。

偶极子项 取第 1 阶项:

$$U_1 = \underbrace{(\partial_i \phi)_0}_{-E_i(0)} \underbrace{\int_V x'_i \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'}_{p_i} = -p_i E_i(0) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0)$$

也就是电偶极子在外场中具有取向能，能量最低点对应于偶极矩与外电场同向。

四极子项 取第 2 阶项:

$$U_2 = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j \phi)_0 \int_V x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

其中:

$$\int_V x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = \frac{1}{3} D_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \int_V r^2 \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

注意由于外场的源电荷在 V 之外，因此外场在 V 内满足 Laplace 方程，也就是 $\delta_{ij} \partial_i \partial_j \phi = 0$ 。也就是场的梯度张量无迹，因此:

$$U_2 = \frac{1}{6} D_{ij} (\partial_i \partial_j \phi)_0 + \frac{1}{6} \int_V r^2 \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \underbrace{(\delta_{ij} \partial_i \partial_j \phi)}_{=0} = \frac{1}{6} D_{ij} (\partial_i \partial_j \phi)_0$$

利用 $E_i = -\partial_i \phi$ ，有:

$$U_2 = -\frac{1}{6} D_{ij} \partial_i E_j(0)$$

Appendix A

矢量分析

A.1 矢量分析

矢量通常被简单定义为有大小和方向的量. 例如位移, 速度等, 这种定义在 Newton 力学中简单易懂, 但并不适合推广到高维或者非欧式空间中. 下面我们给出另一种矢量的定义. 在物理学中, 物理量不应该依赖于坐标系的选取, 但物理量的分量会随着坐标系的变化. 因此, 矢量的核心在于, 它的分量在坐标变换中必须遵循某种特定的坐标变换法则.

当然, 就一般而言, 我们仍旧可以直接使用直观的矢量理解方式, 但在进行更深入的矢量分析时, 可能需要使用基于坐标变换的定义.

A.1.1 Einstein 求和约定

在给出矢量的定义和运算之前, 我们先介绍 Einstein 求和约定, 它可以大大方便矢量分析. 其核心在于省略求和符号, 例如对于两个矢量点乘:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i$$

我们规定, 若出现重复指标 i , 则表示求和. 这里重复指标 i 被称为“哑指标”. 另外, 我们有时还会遇到不重复的指标, 例如向量 \mathbf{A} 的第 i 个分量表示为 A_i . 这里的独立的 i 被称作“自由指标”. Einstein 求和约定需要遵循下面三条原则:

- 默认对哑指标求和, 除非特殊说明
- 一个运算式内, 不同项中应该包含相同的自由指标
- 在任意一项内, 同一个指标最多出现两次

借助 Einstein 求和约定, 向量 $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i$.

下面我们给出 Kronecker 符号 δ_{ij} 和 Levi-Civita 符号 ϵ_{ijk} . 首先我们定义 Kronecker 符号为:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

借助 Kronecker 符号, 我们可以给出两个基矢的点乘为:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

这里需要注意, 如无特殊说明, 我们所使用的基矢都是正交归一的. 在微分几何中, 这一性质不一定总是满足. 但就电动力学而言, 总是满足的.

Example A.1.1. 给出向量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 点乘的表达式.

Solution. 利用 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的定义, 我们有:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i \mathbf{e}_i \cdot B_j \mathbf{e}_j = A_i B_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

这里最后的哑指标是可以随便更换的, 也就是 $A_i B_i = A_j B_j$. 只要不违反求和约定中指标最多出现两次即可. \square

Kronecker 符号给出点乘, 而 Levi-Civita 符号给出的叉乘. 我们定义 Levi-Civita 符号 ϵ_{ijk} 为:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i, j, k \text{ 的轮换} \\ -1 & i, k, j \text{ 的轮换} \\ 0 & \text{其他情况, 有指标相同} \end{cases}$$

借助 Levi-Civita 符号, 我们有向量的叉乘为:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} A_i B_j \mathbf{e}_k$$

或者对于单位矢量, 有:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

Levi-Civita 符号有如下性质: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{ikj}$, $\epsilon_{iik} = 0$. 另一个重要的等式是:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

这个式子只需要记住先同位置 δ 相乘再减去非同位置 δ 相乘即可.

Example A.1.2. 利用 Einstein 求和约定推导:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

Solution. 由 Einstein 求和约定, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_m \mathbf{e}_m \times (\epsilon_{ijk} B_i C_j \mathbf{e}_k) \\ &= \epsilon_{ijk} A_m B_i C_j \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mkl} A_m B_i C_j \mathbf{e}_l \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_m B_i C_j \mathbf{e}_l \\ &= A_m C_m B_i \mathbf{e}_i - A_m B_m C_i \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \end{aligned}$$

\square

A.1.2 ∇ 算符

向量分析的一大难点在于 ∇ 算子的引入. ∇ 算子的定义为:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

其中等式最右边是使用 Einstein 求和约定后的写法. 为了方便下面我们使用 ∂_i 代表 $\partial/\partial x_i$ (默认只结合一个符号, 例如 $\partial_i A_j B_k$ 默认表示 $(\partial_i A_j) B_k$). 因此, ∇ 算符可以写为 $\nabla = \mathbf{e}_i \partial_i$. 借助前文的 Kronecker 符号和 Levi-Civita 符号我们有:

$$\nabla f = \mathbf{e}_i \partial_i f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \partial_i \cdot A_j \mathbf{e}_j = \partial_i A_i$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \partial_i \times A_j \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \mathbf{e}_k$$

$$\nabla^2 f = \mathbf{e}_i \partial_i f \cdot \mathbf{e}_j \partial_j f = \partial_i \partial_i f$$

需要注意的是，上述关于 ∇ 的表达式是针对直角坐标系的。在一般的曲线坐标系下，相应的式子会稍加复杂。可见后面 Lame 系数与任意正交坐标系下算符。

A.1.3 矢量的定义

前文我们引入了 Einstein 求和约定，并在此借助 Kronecker 和 Levi-Civita 重新表达了的我们所熟悉的矢量运算和微分。下面我们介绍新的矢量定义。

Definition A.1.1. 若某个量 $\mathbf{A} = (A_i, A_j, A_k)$ 在某个坐标变换 $x \rightarrow x'$ 其分量满足：

$$A'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j$$

则 \mathbf{A} 称为矢量（更准确地说是逆变矢量）。

这个定义保证了矢量作为一个几何对象，其“客观存在”不随坐标系变化而改变。虽然分量变了，但这种变化恰好抵消了坐标系变化的影响，使得矢量在空间中的实际指向和模长保持不变。

实际上，这个定义也揭示了矢量的本质来源：微元与链式法则。对于某个无穷小位移矢量 $d\mathbf{r}$ ，其分量为 dx_i ，因此：

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j$$

也就是矢量分量的变换法则，本质上就是微分（即切矢量）的变换法则。或者说，矢量的定义是从微分而来的，不难注意到微分实际上对应了基矢。具体细节可以参考微分几何相关书籍。这里仅作简单介绍。

这种定义方式很容易推广到更高阶的量，也就是后文所提到的“张量分析”的张量。矢量也可以被称为一阶张量。

A.2 矢量计算技巧

常见的矢量运算有：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

下面我们介绍一些技巧，使得能快速推导上面的矢量恒等式.

A.2.1 复合向量运算

首先最基础的是矢量三重标积：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

这个运算很容易给出，只需要循环顺移向量即可.

另一个类似的是矢量的三重叉积，我们只需要记住“先中间再外边”即可：

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\underbrace{\mathbf{B}}_{\text{中间}} \times \underbrace{\mathbf{C}}_{\text{外边}}) &= \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{中间}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \underbrace{\mathbf{C}}_{\text{外边}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \\ (\underbrace{\mathbf{B}}_{\text{外边}} \times \underbrace{\mathbf{C}}_{\text{中间}}) \times \mathbf{A} &= \underbrace{\mathbf{C}}_{\text{中间}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{外边}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

A.2.2 下标法

对于含有 ∇ 的运算，其主要的麻烦在于 ∇ 同时具有微分性和向量性，两种性质的混合使得我们的处理比较麻烦。一种方便的技巧是当遇到微分性时使用下标标记 ∇ 算子，然后再运算直到符合数学意义。

下面以 $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$ 作为例子。根据 ∇ 算子的微分性，有：

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) \rightarrow \nabla_f \cdot (f \mathbf{A}) + \nabla_{\mathbf{A}} \cdot (f \mathbf{A})$$

这里我们使用下标标记 ∇ 算子是对哪一个变量进行作用。我们进一步运用向量运算的性质化简。对于第一项 $\nabla_f \cdot (f \mathbf{A}) \rightarrow \nabla_f \cdot f \mathbf{A}$ 很显然不符合数学意义， $\nabla_f \cdot f$ 是有问题的。为了使得上面式子符合数学意义，我们改写一下顺序，得到 $\nabla_f f \cdot \mathbf{A}$ 。

同理，对于第二项

$$\nabla_{\mathbf{A}} \cdot (f \mathbf{A}) \rightarrow \nabla_{\mathbf{A}} \cdot f \mathbf{A} \rightarrow f \nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}$$

注意到此时如果去掉 ∇ 的下标，数学意义保持不变，因此，我们得到：

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = \nabla_f f \cdot \mathbf{A} + f \nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Example A.2.1. 推导 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

Solution. 下标法展开有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &\rightarrow \nabla_{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &\rightarrow \mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}) - \nabla_{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \\ &\rightarrow \mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

□

Example A.2.2. 推导

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

Solution. 下标法展开有:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \rightarrow \underbrace{\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{\text{Part 1}} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{\text{Part 2}}$$

对于 Part 1, 为了凑出 Part 1, 由 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$ 有:

$$\mathbf{B} \times (\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}) = \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{A}}) \mathbf{A}$$

因此:

$$\text{Part 1} \rightarrow \mathbf{B} \times (\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{A}}) \mathbf{A}$$

同理, 有:

$$\text{Part 2} \rightarrow \mathbf{A} \times (\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{B}}) \mathbf{B}$$

综上:

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \text{Part 1} + \text{Part 2} \\ &= \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} \cdot \nabla = A_i \partial_i$ 表示沿着矢量 \mathbf{A} 方向的变化率, $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ 表示矢量场 \mathbf{B} 沿着 \mathbf{A} 方向的变化率(可以当成是方向导数的一种推广). \square

A.2.3 指标法

所谓指标法, 就是使用 Einstein 求和约定直接推导. 需要注意使用 Kronecker 符号和 Levi-Civita 符号的性质, 运算过程中将 Kronecker 符号和 Levi-Civita 符号当成常数处理. 比较有技巧性的是把求和约定的形式改写成矢量式. 下面我们直接通过例子展示:

Example A.2.3. 利用指标法, 证明:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

Solution. 写成 Einstein 求和约定, 有:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\epsilon_{ijk} A_i B_j e_k) \\ &= \partial_k (\epsilon_{ijk} A_i B_j)\end{aligned}$$

这里我们把 ϵ_{ijk} 当成常数提出, 有:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \epsilon_{ijk} \partial_k (A_i B_j) \\ &= \epsilon_{ijk} (B_j \partial_k A_i + A_i \partial_k B_j) \\ &= \epsilon_{jki} B_j \partial_k A_i - \epsilon_{ikj} A_i \partial_k B_j \\ &= \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

\square

Example A.2.4. 利用指标法, 证明:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Solution. 写成 Einstein 求和约定, 有:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (\epsilon_{ijk} A_i B_j e_k) \\ &= \epsilon_{knm} \epsilon_{kij} \partial_m (A_i B_j) e_n \\ &= (\delta_{ni} \delta_{mj} - \delta_{nj} \delta_{mi}) (B_j \partial_m A_i + A_i \partial_m B_j) e_n\end{aligned}$$

上式展开有四项, 对于第一项, 有:

$$\begin{aligned}\text{Part 1} &= \delta_{ni} \delta_{mj} B_j \partial_m A_i e_n \\ &= B_m \partial_m A_i e_i \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}\end{aligned}$$

对于第二项, 有:

$$\begin{aligned}\text{Part 2} &= -\delta_{nj} \delta_{mi} B_j \partial_m A_i e_n \\ &= -B_j e_j \partial_m A_m \\ &= -\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

另外两项同理, 综上有:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

□

A.3 Lame 系数与任意正交坐标系下算符

我们知道三维直角坐标下的梯度、旋度、散度、Laplace 算符:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

我们希望能直接写出任意曲线坐标 (主要是球坐标、柱坐标) 的上述四个算符的形式. 这里我们对曲线坐标提出一些要求: 坐标中任意位置的基矢相互正交. 也就是要求坐标系是正交坐标系. 不难验证, 球坐标, 柱坐标都满足此要求.

对于任意三维的正交坐标系, 我们总可以将某一位置邻域的线元写成如下形式 (这是由基矢相互正交的性质保证的):

$$ds = \sqrt{(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2}$$

其中, dq_i 是沿着 e_i 方向的小位移, h_i 就是 q_i 对应的 Lame 系数.

上述介绍比较抽象, 这里以常用的坐标系作为例子. 对于直角坐标, 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

因此 x, y, z 的 Lame 系数分别是 1, 1, 1.

对于柱坐标, 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (dz)^2}$$

因此 r, θ, z 的 Lame 系数分别是 1, r , 1.

同理, 对于球坐标 (这里遵循物理的习惯, 令 θ 为天顶角), 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2}$$

因此 r, θ, ϕ 的 Lame 系数分别是 1, r , $r \sin \phi$.

我们可以证明, 一旦我们为某个正交坐标系 (q_1, q_2, q_3) 找到了其 Lame 系数 h_1, h_2, h_3 则可以直接得到:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_2}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f_3}{\partial q_3} e_3 \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned}$$

A.4 矢量场的积分

在电磁学的推导中, 尤其是 Maxwell 方程组微分形式与积分形式的互换, 经常会出现各种矢量的积分. 下面给出常见的矢量积分.

A.4.1 三大定理

首先最基础的是 Gauss 散度定理, Stokes 定理, 梯度定理三个. 其余定理都是在其基础上得到的.

Gauss 散度定理 Gauss 散度定理用于将体积分转为闭合面积分:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

其物理含义为区域内源 (散度) 的总和等于流出边界的通量.

Stokes 定理 Stokes 定理用于将开放曲面的面积分转换为其边界曲线的线积分:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot dl$$

这里曲线 C 和曲面法向 $d\mathbf{S}$ 的方向遵循右手定则, 即右手四指沿曲线 C 的积分方向, 大拇指指向面积元 $d\mathbf{S}$ 的法线方向,

梯度定理 梯度定理则是线积分定理的 (一元函数 Newton-Leibniz 定理) 的推广:

$$\int_a^b \nabla f \cdot dl = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

A.4.2 Green 恒等式

下面我们介绍 Green 第一恒等式和第二恒等式. 这两个恒等式在处理边值问题 (如泊松方程、拉普拉斯方程) 和多极展开时非常重要. 它们本质上是散度定理应用在特定标量场组合上的结果.

Green 第一恒等式

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x = \oint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

Proof. 令 $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$, 由散度定理:

$$\int_V (\nabla \cdot (\phi \nabla \psi)) d^3x = \int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x = \oint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

□

Green 第二恒等式

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

Proof. 由 Green 第一恒等式:

$$\begin{aligned} \int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x &= \oint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} \\ \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) d^3x &= \oint_S (\psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

两式相减, 有:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

□

A.4.3 其他常用变体

下面我们给出可能会遇到的其他矢量积分, 下面积分的证明的一个重要的技巧是引入一个任意常矢量辅助证明. 我们记 \mathbf{c} 为一任意常矢量, 也就是 \mathbf{c} 不随空间变化.

梯度的体积分

$$\int_V \nabla \psi d^3x = \oint_S \psi dS$$

Proof. 令 $\mathbf{A} = \psi \mathbf{c}$, 由散度定理:

$$\int_V \nabla \cdot (\psi \mathbf{c}) d^3x = \oint_S (\psi \mathbf{c}) \cdot dS$$

其中:

$$\text{LHS} = \int_V \mathbf{c} \cdot \nabla \psi + \psi \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{c})}_{\nabla \cdot \mathbf{c}=0} d^3x = \mathbf{c} \cdot \int_V \nabla \psi d^3x$$

$$\text{RHS} = \oint_S \psi \mathbf{c} \cdot dS = \mathbf{c} \cdot \oint_S \psi dS$$

由于 \mathbf{c} 是任意的, 因此有:

$$\int_V \nabla \psi d^3x = \oint_S \psi dS$$

□

旋度的体积分

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) d^3x = - \oint_S \mathbf{A} \times dS$$

Proof. 令 $\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{c}$, 由散度定理:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{c}) d^3x = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{c}) \cdot dS$$

其中:

$$\text{LHS} = \int_V \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{c})}_{\nabla \times \mathbf{c}=0} d^3x = \mathbf{c} \cdot \int_V \nabla \times \mathbf{A} d^3x$$

$$\text{RHS} = \oint_S (dS \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \oint_S -\mathbf{A} \times dS$$

由于 \mathbf{c} 是任意的, 因此有:

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) d^3x = - \oint_S \mathbf{A} \times dS$$

□

矢量分部积分法

$$\oint_S \phi \mathbf{A} \cdot dS = \int_V \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x + \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \phi d^3x$$

这个式子经常在变分法和最小作用量中出现. 具体而言, 在变分法和最小作用量中, 有时会遇到类似形如 $\int (\nabla \phi) \cdot \delta \mathbf{A} d^3x$ 的形式, 从而需要提取出 $\delta \mathbf{A}$ 得到 Euler-Lagrange 方程. 这一过程往往需要使用此分部积分.

Proof. 由矢量恒等式:

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

两边在 V 上积分:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) d^3x = \int_V \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x + \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \phi d^3x$$

由散度定理:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) d^3x = \oint_S \phi \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

综上:

$$\oint_S \phi \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x + \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \phi d^3x$$

□

DRAFT

Appendix B

张量分析

* B.1 符号约定

类似前文矢量分析的 Einstein 求和约定，张量分析中我们也使用 Einstein 求和约定，并且张量分析中会引入上指标和下指标，上指标表示“逆变”，下指标表示“协变”，具体含义在之后进行介绍。同时额外要求，同一项中，指标最多出现两次，且必须一个是上指标，一个是下指标，不能两个都是上指标或下指标¹。

因此，Einstein 求和约定为：

- 默认对哑指标求和，除非特殊说明
- 一个运算式内，不同项中应该包含相同的自由指标
- 在任意一项内，同一个指标最多出现两次，且必须一上一下。

同时，如果使用拉丁字母 (i, j, k, \dots) 通常表示指标取值为 1, 2, 3，表示空间坐标。如果使用希腊字母 (μ, ν, ρ, \dots) 通常表示指标取值为 0, 1, 2, 3，表示时空坐标。当然如果行文没提到，则一般代表指标取值是任意的，一般的。

同时，类似矢量分析，我们也有 Kronecker 符号 δ_{ij} 和 Levi-Civita 符号 ϵ_{ijk} 。首先我们定义 Kronecker 符号为：

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civita 符号在之后介绍。

在场论中，对坐标的偏导数极为常见，我们记 $\partial_\mu T \equiv \partial T / \partial x^\mu$ 。更简便的写法是使用逗号表示偏导数，也就是 $T_{,\mu} \equiv \partial_\mu T$ 。这种记法可以极大地简化高阶张量导数的书写，使其在形式上依然保持张量的简洁感。

* B.2 对偶空间，内积

内积在物理中被广泛运用，比如在 Newton 力学中，力 \mathbf{F} 与位移 \mathbf{x} 点乘得到功： $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ 。这一过程我们通常将其几何化理解为：将两个箭头原点重合，内积即为两个矢量的模长相乘再乘以夹角的余弦值。这种直观理解存在一个问题：这两个矢量实际上并不属于同一个向量空间。例如在 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ 中，位移 \mathbf{x} 的量纲是 $[L]$ ，而力 \mathbf{F} 的量纲是 $[MLT^{-1}]$ 。明显这两个矢量并不属于同一个向量空间，将它们简单地视为“同一坐标系中的箭头”在概念上并不严谨。

另一方面，从线性代数角度看，矢量内积本质上是一个行矢量与列矢量之间的矩阵乘法，这隐含地使用了“转置”这一操作。但在一般坐标系（尤其是曲线坐标系）中，“转置”并不是一个自然定义的几何操作。因此，我们需要从更基本的结构出发重新理解内积。

¹实际上，矢量分析中我们之所以没有上下指标的要求是因为我们不区分协变和逆变，因此进行了简化。

* B.2.1 对偶矢量

首先我们引入对偶矢量的概念。在线性代数中，列矢量空间 V 和行矢量空间 V^* 均构成线性空间。之间存在某种一一映射：对于 $a^i e_i \in V$ ，总能在 V^* 中找到唯一一个元素 $a_i e^i$ 与之对应。就像转置操作使得任意一个列矢量都能唯一对应一个行矢量。我们称 V 和 V^* 互为对偶空间，其中 V^* 中的元素称为对偶矢量。

不难注意到，若 V^* 是 V 的对偶空间，则 V 也是 V^* 的对偶空间，即 $V \cong V^{**}$ ，其中 \cong 表示同构，也就是这两个空间的代数结构是相同的，存在一个一一又是满射映射，使得加法和数乘运算不变。指定哪一个为“原空间”、哪一个为“对偶空间”在数学上是完全随意的。

* B.2.2 内积

引入对偶矢量后，内积被定义为矢量与其对偶空间中元素的缩并运算，这里我们仍在欧式空间中讨论，欧式空间中的内积就是引入一个 δ^i_j 设 $v = b^j e_j \in V$, $\omega = a_i e^i \in V^*$, 则它们的内积定义为：

$$\omega(v) = a_i e^i \cdot b^j e_j = a_i b^j \delta^i_j = a_i b^i$$

从中我们可以看到，对偶矢量 $\omega \in V^*$ 实际上是一个从向量空间 V 到数域 K （之后我们默认取 \mathbb{R} ）的线性映射。

在引入了对偶矢量后，我们可以定义内积是矢量和其对偶空间中的某一对偶矢量的一种运算（注意这里并没有要求对偶空间的矢量是该矢量的对偶矢量）：

$$a_i e^i \cdot b^j e_j = \delta^i_j a_i b^j = a_i b^i, \quad a_i e^i \in V, \quad b^j e_j \in V^*$$

因此，我们可以得到，对偶矢量实际上是从向量空间 V 到数域 K 的映射（后面我们默认取 $K = \mathbb{R}$ ）。

由于 $V \cong V^{**}$ ，因此我们也可以认为矢量 $v \in V$ 是从对偶空间 V^* 到数域 K 的线性映射。这件事看起来比较反常，一个矢量在传统印象中就是一个箭头，怎么会是一个映射呢？这里我们需要联系微积分的有关知识。给定一个三维标量场 f ，则在某点的矢量为：

$$\mathbf{v} = v^i \partial_i = v^i e_i$$

这里基底为： $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ 。同时 f 在某点的全微分为：

$$df = \partial_i f dx^i = \partial_i f e^i$$

这里全微分 df 就是切矢量的对偶矢量，基底为 (dx_1, dx_2, dx_3) 。两者的内积为：

$$df(\mathbf{v}) = v^i e_i \cdot \partial_j f e^j = \partial_i f v^i$$

我们得到一个标量，也就是 \mathbf{v} 的方向导数。

* B.3 张量

本节简略介绍张量的定义及性质。这里的简略指的是很多需要证明的地方我们直接省略或仅仅给出类比来解释，但是如果把证明都补全的话能够达到数学上的严谨性。

对于一个向量空间 V ，其上的 (k, l) 型张量 T 是一个重线性映射：

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ 个}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l \text{ 个}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

其中 V^* 是 V 的对偶空间.

我们约定 $(0,0)$ 型张量就是实数, 它还有个名字叫做标量. $(1,0)$ 型张量称为矢量, 它将一个对偶矢量映射为实数. $(0,1)$ 型张量称为对偶矢量, 它将一个矢量映射为实数.

* B.3.1 张量积

低阶的张量可以通过张量积生成高阶的张量. 比如说给定一个 $(1,0)$ 型张量 T 和一个 $(0,1)$ 型张量 S , 它们的张量积是一个 $(1,1)$ 型张量 $T \otimes S$, 满足:

$$T \otimes S(\omega, v) = T(\omega)S(v) \quad \forall \omega \in V^*, v \in V$$

更一般的 (k,l) 型张量和 (m,n) 型张量的张量积同理可得. 注意, 一般而言 $T \otimes S \neq S \otimes T$, 也就是张量积并不满足交换律.

* B.3.2 张量的分量

类似于我们所熟悉的矢量, 张量也可以用基底展开, 写成分量的形式. 对于一个 n 维向量空间 V , 我们总是能取一组线性无关的基底: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 同时在对偶空间 V^* 中找到唯一的对偶基底 $\{e^1, \dots, e^n\}$, 满足 $e^i(e_j) = \delta_j^i$. 注意这里上标不再代表幂次, 而仅仅是一个指标. 若代表幂次则单独指出.

给定一个 (k,l) 型张量 T , 我们可以从这两个空间中的基底中分别选取 k 个和 l 个, 用指标 $\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l$ 来指代, 将这些基矢量带入映射, 得到:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \equiv T(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_k}; e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_l})$$

根据惯例, 我们一般称分量指标在上的称为逆变 (contravariant) 指标, 分量指标在下的称为协变 (covariant) 指标, 这么叫的原因需要在基变换部分解释.

* B.3.3 并矢

对于一个 $(1,1)$ 型张量 T , 其分量为 $T^\mu{}_\nu = T(e^\mu; e_\nu)$. 不难得到两个一阶张量 e_μ, e^ν 的张量积 $e_\mu \otimes e^\nu$ 就是分量的基底. 因为 $e_\mu \otimes e^\nu (e^\alpha; e_\beta) = \delta_\mu^\alpha \delta^\nu_\beta$. 因此 $T = T^\mu{}_\nu e_\mu \otimes e^\nu$. 所谓并矢, 就是两个矢量 A, B 的张量积:

$$(A^\mu e_\mu) \otimes (B^\nu e_\nu) = A^\mu B^\nu e_\mu \otimes e_\nu$$

这就是所谓的把两个矢量放在一起而不相互作用. 这样, 任意的 (k,l) 型张量都可以分解到这样的标准基底上:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{\nu_l}$$

在取了标准基并按照该方式排列后常常忽略基底中的张量积符号, 甚至直接不写基底, 拿这一组数来指代张量.

* B.4 常见张量

前面我们引入的 Kronecker 符号不难验证其也是一个张量:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

这里不做过多介绍. 下面我们介绍重要且常见的一些张量.

* B.4.1 度规张量

这是一种 $(0, 2)$ 型张量. 它有着两个性质:

- 对称性: $g(v, u) = g(u, v) \quad \forall v, u \in V$
- 非退化: $g(v, u) = 0 \quad \forall u \in V \Rightarrow v = 0 \in V$

度规张量和我们在线代课里学到的欧式空间中的内积结构很相似, 但不完全一样: 对于不为 0 的向量 v , $g(v, v)$ 允许小于等于 0.

顾名思义, 度规是长度的度量, 它允许定义矢量的长度和夹角, 从而确定了空间的几何性质. 因此给定了度规, 就给定了这个向量空间中的几何学, 度规张量很快将成为之后经常出现的重要概念.

度规张量的分量定义为:

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu) \equiv e_\mu \cdot e_\nu$$

同时其逆 $g^{\mu\nu}$ 满足: $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$. 一般的矢量 a, b 之间的内积是由度规诱导的:

$$a \cdot b = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$$

注意这里内积并不要求是欧式空间, 或者说, 欧式空间的情况是 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 的特例. 此外, 利用度规可以将逆变指标转化为协变指标, 反之亦然:

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu, \quad a^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu$$

这解释了 Einstein 求和约定中“缩并必须在一上一下之间进行”的本质是内积.

* B.4.2 Levi-Civita “张量”

Levi-Civita 符号比较特殊, 它其实并不是一个真正的张量, 而是一个赝张量. 但是目前我们不必深究, 在正交归一基底下可视为张量处理.

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & i_1 \dots i_n 是 1 \dots n 的轮换 \\ -1 & i_1 \dots i_n 是 n \dots 1 的轮换 \\ 0 & 其他情形, 有指标相同 \end{cases}$$

我们这里只对三维的情况 $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ 感兴趣. 它的作用是在三维空间中描述矢量的叉乘:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{\mu\nu\rho}a^\mu b^\nu e^\rho$$

在之后往往遇到多个 Levi-Civita 符号. 遍历所有情况便可以证明, 存在一个普遍的公式:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\sigma\tau\eta} = \begin{vmatrix} \delta_\mu^\sigma & \delta_\mu^\tau & \delta_\mu^\eta \\ \delta_\nu^\sigma & \delta_\nu^\tau & \delta_\nu^\eta \\ \delta_\rho^\sigma & \delta_\rho^\tau & \delta_\rho^\eta \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\mu\sigma\tau} = \delta_\nu^\sigma \delta_\rho^\tau - \delta_\nu^\tau \delta_\rho^\sigma$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\sigma\nu\rho} = 2\delta_\mu^\sigma$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\mu\nu\rho} = 6$$

注意 $\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\sigma\nu\rho} = 2\delta_\mu^\sigma$ 和 $\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\mu\nu\rho} = 6$ 只在三维空间成立.

* B.5 基的变换

基的选择是人为的，物理定律应独立于基的选择，因此我们需要研究在基变换下张量分量变换行为。

设 V 有两组基底 $\{e_\mu\}$ 和 $\{e'_\mu\}$ ，它们之间通过过渡矩阵 S 联系：

$$e_\mu = e'_\nu S^\nu{}_\mu$$

对于任意矢量 a ，由 $a = a^\mu e_\mu = a^\mu S^\nu{}_\mu e'_\nu = a'^\nu e'_\nu$ ，可得逆变分量的变换法则：

$$a'^\nu = S^\nu{}_\mu a^\mu$$

对于对偶空间 V^* ，设其基底变换矩阵为 R ，即 $e^\nu = R^\nu{}_\mu e'^\mu$ 。由对偶基定义 $\delta_\mu^\nu = e^\nu(e_\mu)$ 可推导出 $R = S^{-1}$ 。因此，类似的，对偶矢量（协变分量）的变换法则为：

$$\omega'_\mu = \omega_\nu (S^{-1})^\nu{}_\mu$$

这刚好和 V 中基底的变换关系相同。这就是“协变”和“逆变”这两个名字的来源。在基变换下，和基底变换方式相同的就是协变的，与基底变换方式相反的就是逆变的。

这样我们就可以写出一般的 (k, l) 型张量的分量在基变换下的表达式：

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = S^{\mu'_1}{}_{\mu_1} \dots S^{\mu'_k}{}_{\mu_k} (S^{-1})^{\nu_1}{}_{\nu'_1} \dots (S^{-1})^{\nu_l}{}_{\nu'_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}$$

这就是大家更熟悉的“在基变换下满足某种性质的带很多指标的东西”这种对张量的定义。这种定义相当于用张量的分量来指代张量。很多时候我们实际上并不区分张量的分量和张量，而是统一称为张量。

* B.6 张量场的微分算符

在本节中，我们考虑的全都是正交标准基（即度规张量的特征值全部为 ± 1 ）下的特例。

在矢量分析中，我们定义了三维欧式空间中的梯度，散度和旋度，并且抽象出了一个具有矢量性质的微分算符 $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ 。类似地，我们可以定义一般空间中的微分算符： $\partial_\mu e^\mu$ ，它作用于一个张量场 T 以及被度规张量升降指标的规则是

$$\partial_\mu T = \frac{\partial T}{\partial x^\mu} \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial^\mu T = \frac{\partial T}{\partial x_\mu}$$

∂_μ 作用后的新张量场会比原来的张量场多一个协变分量，所以也称 ∂_μ 为协变导数。

下面介绍张量场的梯度，散度，旋度和 Laplace 算符。这里我们仅仅在最常见的三维欧式空间（度规 δ_{ij} ）和四维闵氏时空（度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ）中讨论，我们分别简称为三维空间和四维时空。不难注意到三维空间的度规 $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = I$ 其中 I 为单位矩阵，因此我们略去三维空间中用来升降指标的度规符号。

梯度 标量场的梯度为：

$$\partial_\mu f = e^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

三维空间中就是我们非常熟悉的 ∇f ，四维时空中则用 $(\partial_t f, \nabla f)$ 表示。

散度 矢量场 A^μ 的散度为:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$$

三维空间中就是我们熟悉的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$. 注意到 $\partial_\mu A^\mu$ 是一个标量, 因此 $\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu$.

旋度 旋度对于三维空间和四维时空有些区别. 具体而言, 矢量场 A^μ 的旋度在三维空间中被定义为一个矢量:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} \partial_i A^j e^k$$

在四维时空中被定义为一个反对称的二阶张量:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

实际上, 三维空间中得到的也应该是一个反对称的二阶张量, 但我们一般会使用 Hodge 对偶, 把一个二阶张量对偶成一个一阶张量表示. 比如三维空间中的一个面元实际需要两个矢量确定 (两条线确定一个面), 但我们可以用叉乘得到垂直面元的矢量并只用这一个矢量表示面元. 这就用了 Hodge 对偶. 这是三维空间的一个特殊性质, 不难注意到三维空间中二阶张量的基底数量和一阶张量的基底数量相同, 而其他维度 (比如四维时空) 就没有这个性质.

Laplace 算符 标量场 f 的 Laplace 算符为:

$$\Delta f = \partial_\mu \partial^\mu f$$

三维空间的 Laplace 算符为: $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. 而四维空间中的 Laplace 算符 (一般叫 d'Alembert 算符) 为 $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

* B.7 一般正交曲线系中的矢量分析算符

利用前面度规张量的概念, 可以快速地给出正交曲线系中算符的表达式, 甚至还能推广到 Minkowski 时空等更一般的情况. 首先我们需要解释什么是 n 维正交曲线坐标系, 所谓 n 维正交曲线系, 就是其度规张量是对角的. 也就是 $g_{\mu\nu}$ 为 $\text{diag}(\dots)$ 的形式. 设 \mathbf{A}, ϕ 为这个空间中的矢量、标量场, $G = \det(g_{ij})$, 那么常用的矢量分析算符表示如下:

- 梯度: $(\nabla f)^j = g^{ij} \partial_i f$
- 散度: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \partial_i (\sqrt{|G|} A^i)$
- 旋度: $(\nabla \times \mathbf{A})^i = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$
- Laplace 算符: $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \partial_i (\sqrt{|G|} g^{ij} \partial_j f)$

最常用的坐标系如下:

柱坐标系 对于柱坐标系:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$g_{ij} = \text{diag}(1, \rho^2, 1), \quad g^{ij} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{\rho^2}, 1\right), \quad \sqrt{|G|} = \rho$$

球坐标系 对于球坐标系:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta dz^2$$

$$g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad g^{ij} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right), \quad \sqrt{|G|} = r^2 \sin \theta$$

四维 Minkowski 时空 这个方法可以推广到度规非正定的情况, 以 Minkowski 时空中的标准基 (t, x, y, z) 为例:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad \sqrt{|G|} = 1$$

其 Laplace 算符为:

$$\Delta = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

这就是 d'Alembert 算符 $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

这个方法用于三维欧式空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$ 中的任意正交系 (x_1, x_2, x_3) 就是最常见的 Lame 系数法. 这时度规 $g_{ij} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2)$. $\sqrt{|G|} = h_1 h_2 h_3$ 就是体积元的系数: $dV = \sqrt{|G|} dx_1 dx_2 dx_3$. 从中我们就知道 Lame 系数就是基矢的归一化系数而已.

* B.8 张量场的积分

本节进一步讨论张量场的积分理论, 即这些微分算符在积分意义下所满足的基本定理. 严格而言, 这一部分最自然的数学语言是微分形式与外微分, 对应的定理是广义 Stokes 定理. 但为了避免引入过多的数学, 我们仍沿用前文的张量分析框架, 借鉴 Landau《场论》中常用的处理方式, 通过一组形式化的“替换规则”来表达积分定理的核心思想.

本节中我们始终在正交标准基下 (即度规张量的特征值为 ± 1) 讨论, 并默认坐标系是光滑的, 使得偏导数与积分运算可以自由交换.

* B.8.1 三维积分公式

在三维欧式空间中，我们熟悉的两个基本积分定理是 Gauss 定理和 Stokes 定理。比如三维欧式空间中的 Gauss 定理为：

$$\int_V d^3x \partial_i A^i = \int_{\partial V} dS_i A^i$$

其中 ∂V 表示体积 V 的边界曲面， dS_i 是有向面元，其方向取外法向。后者中面元的定向与 ∂S 定向一致。从张量的角度看，这是一般 Gauss 定理的一个特例。更一般地，若 $T_{...i...}$ 是一个张量场，其中某个指标 i 是协变指标，则有：

$$\int_V d^3x \partial_i T_{...i...} = \int_{\partial V} dS_i T_{...i...}$$

形象地说，相当于替换规则：

$$\int_V d^3x \partial_i \rightarrow \int_{\partial V} dS_i$$

也就是一个带散度的体积分可以转化为其边界上的通量积分。

三维欧式空间中的 Stokes 定理写为：

$$\int_S dS_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \oint_{\partial S} dl_k A_k$$

其中 ∂S 是曲面 S 的边界曲线， dl_k 是有向线元，其定向与 ∂S 的取向一致。

更一般地，对于张量场 T ，有：

$$\epsilon_{ijk} \int_S dS_i \partial_j T = \oint_{\partial S} dl_k T$$

对应的形式化替换规则为：

$$\int_S dS \times \nabla \rightarrow \oint_{\partial S} dl$$

也就是一个带旋度的曲面积分可以转化为其边界上的环量积分。

* B.8.2 四维积分公式

下面来看四维空间中的积分公式，首先需要明确各种有向积分微元的定义。有向线元可直接用一维曲线上的 dx^μ 来表示。

二维曲面上的有向面元由两条独立线元 dx^μ 和 dx'^μ 张成，其对应的反对称二阶张量为：

$$dS^{\mu\nu} = dx^\mu dx'^\nu - dx'^\mu dx^\nu$$

其 Hodge 对偶定义为：

$$d\tilde{S}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dS_{\rho\sigma}$$

三维超曲面上的有向超曲面元由三条独立线元张成，其对应的三阶反对称张量为：

$$dV^{\mu\nu\rho} = \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \\ dx^\rho & dx'^\rho & dx''^\rho \end{vmatrix}$$

其 Hodge 对偶定义为一阶张量：

$$d\tilde{V}^\mu = -\frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dV_{\nu\rho\sigma}$$

四维体元由四条独立线元张成, 记为 d^4x .

下面我们直接给出四维空间中积分公式的替换规则:

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \longrightarrow \oint_{\partial\Omega} d\tilde{V}_{\mu}$$

$$\int_V (d\tilde{V}_{\mu} \partial_{\nu} - d\tilde{V}_{\nu} \partial_{\mu}) \longrightarrow \oint_S d\tilde{S}_{\mu\nu}$$

$$\int_S dS^{\mu\nu} \partial_{\nu} \longrightarrow \oint_{\partial S} dx^{\mu}$$

其中 Ω 、 V 、 S 分别表示由三维闭合超曲面、二维闭合曲面和一维闭合曲线围成的区域. 特别地, 在第一条公式中, 被作用的张量场必须携带一个逆变指标 μ , 它对应于四维时空中一般向量场的 Gauss 定理.

Appendix C

微分形式简介

这一章节，我们将简略介绍微分形式，并从微分形式的角度再次介绍正交曲面坐标系中的各种矢量分析算符的形式。这一方法的优点在于它的协变性，也就是可以脱离坐标系的具体定义，而给出最普遍的表达式。

从前文张量分析的角度而言，微分形式的相关内容就是对偶空间及其张量积之间的运算规则。一阶微分形式就是对偶空间中的元素。高阶微分形式就是就是一阶微分形式的张量积。

微分形式在物理学中的应用非常广泛，运用微分形式的 Maxwell 方程组也及其简洁。作为一个简介，我们略去所有的数学严格定义，只给出有关的运算法则。

* C.1 外微分，楔积，微分形式

我们都很熟悉全微分。对于一个多元函数 $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 其全微分为（同样使用 Einstein 求和约定）：

$$df = \partial_1 f dx^1 + \dots + \partial_n f dx^n = \partial_\mu f dx^\mu$$

这里的 d 我们可以认为是一个算符，称为外微分算符。它作用在函数 f 上，得到 df 称为一次微分形式。

$$d : f \mapsto df = \partial_\mu f dx^\mu$$

外微分算符 d 作用于一次微分形式 $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$ ，其中 α_μ 都是标量函数，则得到二次微分形式：

$$d\alpha = d(\alpha_\mu dx^\mu) = d\alpha_\mu dx^\mu = \partial_\mu \alpha_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

规定：

$$d(dx^\mu) = 0$$

其中运算 \wedge 称为楔积。其有如下运算法则：

运算法则 1

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$$

也就是楔积具有反交换性。因此易得 $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$ 。从中我们得到， n 维空间中最多有 n 次微分形式。对于 p 次微分形式，进行一次外微分运算，得到 $(p+1)$ 次微分形式。

运算法则 2 设 α 是 p 次微分形式， β 和 γ 是 q 次微分形式：

$$d(\beta + \gamma) = d\beta + d\gamma$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

$$d(d\alpha) = 0$$

由于每次写 $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$ 很麻烦，我们有时简写为 $dx^{\mu_1 \dots \mu_n}$ 。

* C.2 Hodge 对偶, 余微分

在三维空间中, 某一个面元实际上是一个 2 次微分形式, 例如 $dx \wedge dy$ 之类的. 但是我们却经常使用一个矢量 $dS = S_x dx + S_y dy + S_z dz$ 表示 (面的法向量), 这其实是一个 1 次微分形式, 也就是说我们实际上使用一个 1 次微分形式去代表了一个 2 次微分形式. 这是通过 Hodge 对偶来实现的.

具体而言, 三维空间中, 1 次微分形式有 3 个基底 (3 个中抽 1 个有 3 种), 2 次微分形式同样有 3 个基底 (3 个中抽 2 个有 3 种). 更一般的, 对于 n 维空间中的 p -形式和 $(n-p)$ -形式的基底数量相同, 因此可以在 p -形式和 $(n-p)$ -形式之间构造一个一一又是满射映射. 或者说, p -形式空间和 $(n-p)$ -形式空间是对偶的.

具体的运算是 Hodge 星算子 $*$, 其是一个线性算子, 把 p 次微分形式变为 $n-p$ 次微分形式:

$$*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = \frac{\sqrt{\det G}}{g_{i_1 i_1} g_{i_2 i_2} \cdots g_{i_p i_p}} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$$

其中 $(i_1, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_n)$ 是 $(1, \dots, n)$ 的轮换, g_{ii} 是度规的对角元素, $\det G$ 是度规矩阵的行列式的值. 对于 n 维空间中的一个 p -形式 α , 连续两次作用 Hodge 对偶得到:

$$**\alpha = s(-1)^{p(n-p)} \alpha$$

其中 $s = \text{sgn}(\det G)$ 为度规行列式的符号. 一般而言, 三维欧式空间为 +1, 四维闵式时空为 -1.

常用的 Hodge 对偶如下:

2 维欧式空间:

$*1 = dx \wedge dy$		$*(dx \wedge dy) = 1$
$*dx = dy$		$*dy = -dx$

3 维欧式空间:

$*1 = dx \wedge dy \wedge dz$	$*(dy \wedge dz) = dx$
$*dx = dy \wedge dz$	$*(dz \wedge dx) = dy$
$*dy = dz \wedge dx$	$*(dx \wedge dy) = dz$
$*dz = dx \wedge dy$	$*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$

¹ 度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

4 维度闵式空间 (度规号差为 2^1):

$$\begin{aligned}
 *1 &= dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz & * (dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz) &= -1 \\
 dt &= -dx \wedge dy \wedge dz & * (dx \wedge dy \wedge dz) &= -dt \\
 dx &= -dt \wedge dy \wedge dz & * (dt \wedge dy \wedge dz) &= -dx \\
 dy &= dt \wedge dx \wedge dz & * (dt \wedge dz \wedge dx) &= -dy \\
 dz &= -dt \wedge dx \wedge dy & * (dt \wedge dx \wedge dy) &= -dz \\
 (dt \wedge dx) &= -dy \wedge dz & * (dy \wedge dz) &= dt \wedge dx \\
 (dt \wedge dy) &= dx \wedge dz & * (dz \wedge dx) &= dt \wedge dy \\
 (dt \wedge dz) &= -dx \wedge dy & * (dx \wedge dy) &= dt \wedge dz
 \end{aligned}$$

在引入 Hodge 对偶后, 我们介绍余微分, 其定义为:

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} s * d *$$

其就是先进行 Hodge 对偶, 再外微分, 最后 Hodge 对偶回来. 余微分 δ 本质是外微分 d 的伴随算子, 也就是满足 $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$, 其中内积是在流行上积分定义的: $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta$.

借助外微分和余微分可以定义从 p -形式到 p -形式的运算算子, 记为 Δ , 称为 Laplace - de Rham 算子. 其定义为:

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$$

它是我们熟悉的 Laplace 算符在微分形式的对应和推广.

* C.3 外微分与矢量分析算符

在外微分的语言下, 经典的矢量分析算符 (梯度、旋度、散度) 实际上就是外微分算子 d 和余微分算子 δ 在不同阶的微分形式上的具体体现.

在最开始我们曾提到, 1 阶微分形式构成的空间是切向量空间的对偶空间, 因此 1 阶微分形式可以通过度规的升降指标转化为向量. 这个同构关系又称为“音乐同构”. 矢量变为 1 阶微分形式称为升号 \sharp , 反之从 1-形式到矢量称为降号 \flat .

在三维欧式空间中, 外微分和矢量分析算符对应关系如下:

- 梯度 (0-形式到 1-形式): $(\nabla f)^\flat = df$
- 旋度 (1-形式到 2-形式再对偶): $(\nabla \times \mathbf{A})^\flat = *d(A_i dx^i)$
- 散度 (1-形式到 0-形式): $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\delta(A_i dx^i)$
- 标量 Laplace 算符 (0-形式到 0-形式): $\nabla^2 f = \Delta f = -\delta df$

* C.4 微分形式的积分, 广义 Stokes 定理

在引入了微分形式和外微分后, 现在我们可以将所有的古典的微积分定理全部统一成一个: 广义 Stokes 定理:

Theorem C.4.1 (广义 Stokes 定理). 若 M 为紧致带边界的 k 维定向区域, $\omega \in \Omega^{k-1}$ 为 $(k-1)$ -形式, 则:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

其中 $d\omega$ 是 ω 的外微分, ∂M 为 M 的边界.

取特例, 我们有:

- **Newton-Leibniz 定理:** 1 维下的 0-形式 (区域为一条线段, 边界为两个端点):

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(x) |_a^b$$

- **Green 定理:** 2 维下的 1-形式 (区域为一个二维单联通平面, 边界为其闭合边界曲线):

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy$$

- **(狭义) Stokes 定理:** 3 维下的 1-形式 (区域为一个二维单联通平面, 边界为其闭合边界曲线):

$$\begin{aligned} & \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \oint_{\partial D} P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

- **Gauss 定理:** 3 维下的 2-形式 (区域为一个三维单联通体积, 边界为其闭合曲面):

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \iint_{\partial V} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

至此, 我们将古典微积分中所有的定理统一成一个定理, 且也可以很方便地拓展到更高维度和更一般的情况. 在部分书籍中将 Stokes 公式称为 Newton-Leibniz-Green-Gauss-Ostrogradsky-Stokes-Poincare 定理, 用所有涉及了此定理的数学家的名字命名以纪念为发现此定理的伟大努力. 这里的 Stokes 公式可以认为是微积分的顶峰, 从理论上讲, 这是微积分的终点, 也是微积分从古典走向现代的入口. 同时也是数学上简洁美丽且深刻的定理之一.

Appendix D

经典电动力学中的特殊函数

D.1 Legendre 多项式

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

当 $m = 0$ 时在 $[-1, 1]$ 上有限解为 Legendre 多项式 $P_l(x)$. 当 $m \neq 0$ 时为连带 Legendre 多项式 $P_l^m(x)$.

微分表示

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

正交关系

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ln}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_n^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ln}$$

递推关系

$$(2l+1) P_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x)$$

生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r > R \end{cases}$$

D.2 球函数

$$Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

正交关系

$$\iint_S Y_l^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2\pi}{2l+1} \delta_{ln}$$

正交归一化球函数

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \frac{2l+1}{4\pi} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$\iint_S Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{nm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ln}$$

D.3 Bessel 函数

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2) y = 0 \implies y = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x)$$

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2) y = 0 \implies y = C_1 I_m(x) + C_2 K_m(x)$$

$$x^2 y'' + 2xy' + [k^2 r^2 - l(l+1)] y = 0 \implies y = C_1 j_m(x) + C_2 n_m(x)$$

其中方程一为 Bessel 方程，方程二为虚宗量 Bessel 方程，方程三为球 Bessel 方程（解也可以用球 Hankel 函数表示）。

递推关系 记 $Z_m(x)$ 代表 m 阶的 Bessel 函数，Neumann 函数，Hankel 函数。则有：

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} Z_m(x)] = -x^{-m} Z_{m+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^m Z_m(x)] = x^m Z_{m-1}(x)$$

渐进行为 当 $x \rightarrow 0$ 时，有：

$$J_0(x) \rightarrow 1, \quad J_m(x) \rightarrow 0, \quad N_0(x) \rightarrow -\infty, \quad N_m(x) \rightarrow \pm\infty$$

正交关系 假设 $k_n \rho_0 = x_n^{(m)}$ ($x_n^{(m)}$ 是 $J_m(x)$ 的第 n 个零点) 或者 $k_n \rho_0 = x_n'^{(m)}$ ($x_n'^{(m)}$ 是 $J'_m(x)$ 的第 n 个零点)。则：

$$\int_0^\rho J_m(k_n \rho) J_m(k_l \rho) \rho d\rho = \delta_{nl} [N_n^{(m)}]^2$$

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2} \left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{k_n^2} \right) [J_m(k_n \rho_0)]^2 + \frac{1}{2} \rho_0^2 [J'_m(k_n \rho_0)]^2$$