公式表

Laplace 算符

$$\nabla^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2} & \text{球坐标系} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} & \text{柱坐标系} \end{cases}$$

其中，球坐标系中我们可以记

$$\nabla_\Lambda^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

为角向 Laplace 算符.

Legendre 多项式

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

当 $m=0$ 时在 $[-1,1]$ 上有限解为 Legendre 多项式 $P_l\left(x\right)$. 当 $m\neq 0$ 时为连带 Legendre 多项式 $P_l^m\left(x\right)$.

微分表示

$$P_l\left(x\right)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

$$P_l^m\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\left(x\right)$$

正交关系

$$\int_{-1}^{+1}P_l\left(x\right)P_n\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{ln}$$

$$\int_{-1}^{+1}P_l^m\left(x\right)P_n^m\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ln}$$

递推关系

$$(2l+1)\,P_l\left(x\right)=(l+1)\,P_{l+1}\left(x\right)+lP_{l-1}\left(x\right)$$

生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l\left(\cos\theta\right) & r<R\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{R^l}{r^{l+1}}P_l\left(\cos\theta\right) & r>R\end{cases}$$

球函数

$$Y_l^m(\theta,\phi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}$$

正交关系

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\phi)\,Y_n^m(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}\delta_{ln}$$

正交归一化球函数

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{2l+1}{4\pi}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$\iint_S Y_{lm}(\theta,\phi)\,Y_{nm}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\delta_{ln}$$

Bessel 函数

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-m^2\right)y=0\Longrightarrow y=C_1J_m(x)+C_2N_m(x)$$

$$x^2y''+xy'-\left(x^2+m^2\right)y=0\Longrightarrow y=C_1I_m(x)+C_2K_m(x)$$

$$x^2y''+2xy'+\left[k^2r^2-l(l+1)\right]y=0\Longrightarrow y=C_1j_m(x)+C_2n_m(x)$$

其中方程一为 Bessel 方程，方程二为虚宗量 Bessel 方程，方程三为球 Bessel 方程（解也可以用球 Hankel 函数表示）.

递推关系　记 $Z_m(x)$ 代表 m 阶的 Bessel 函数，Neumann 函数，Hankel 函数. 则有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-m}Z_m(x)\right]=-x^{-m}Z_{m+1}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{m}Z_m(x)\right]=x^{m}Z_{m-1}(x)$$

渐进行为　当 $x\to 0$ 时，有:

$$J_0(x)\to 1,\quad J_m(x)\to 0,\quad N_0(x)\to-\infty,\quad N_m(x)\to\pm\infty$$

正交关系　假设 $k_n\rho_0=x_n^{(m)}$（$x_n^{(m)}$ 是 $J_m(x)$ 的第 n 个零点）或者 $k_n\rho_0=x'^{(m)}_n$（$x'^{(m)}_n$ 是 $J'_m(x)$ 的第 n 个零点）. 则:

$$\int_0^{\rho}J_m(k_n\rho)\,J_m(k_l\rho)\,\rho\mathrm{d}\rho=\delta_{nl}\left[N_n^{(m)}\right]^2$$

$$\left[N_n^{(m)}\right]^2=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{k_n^2}\right)\left[J_m(k_n\rho_0)\right]^2+\frac{1}{2}\rho_0^2\left[J'_m(k_n\rho_0)\right]^2$$