概率论与数理统计笔记

Guotao He

2025-01-28

目录

Chapter 1　概率论的基本概念

1.1　基本概念

样本空间与样本点 对于一个随机的试验 E，其实验的所有可能的结构构成一个集合，此集合称为随机实验 E 的**样本空间**，记为 S，样本空间的每一个元素被称为一个**样本点**。

随机事件 随机试验 E 的样本空间 S 的子集 A 被称为 E 的一个**随机事件**。特别的，由一个样本点组成的单点集，称为 **基本事件**，样本空间 S 是自身的子集，且每次实验中必然发生，称 S 为 E 的**必然事件**，空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也为样本空间 S 的子集，其在每次实验中必然不发生，$\varnothing$ 称为 E 的**不可能事件**。

事件空间 在随机试验 E 中的所有随机事件构成一个集合 $\mathscr{F}$（集合的每一个元素也是集合），此集合被称为**事件空间**

事件本质上是样本空间的一个子集,因此事件之间的运算自然按集合论中集合之间的运算处理。具体而言，有：

1. $A \subseteq B$ 表示事件 B 包含事件 A，若 A 发生则 B 一定也发生
2. $A = B$ 表示 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$
3. $A + B = A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$
4. $AB = A \cap B = \{x|x \in A \text{ and } x \in B\}$
5. $A - B = \{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$
6. $A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B **互斥**
7. $A \cup B = S, A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B 互为**逆事件**，互为**对立事件**
8. 记 A 的对立事件为 $\bar{A} = S - A$

摩根率（对偶率） $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

Definition 1.1.1 (概率): 设随机试验 E 的样本空间为 S，$\mathscr{F}$ 为 S 的某些子集组成的一个事件空间，如果对任一事件 $A \in \mathscr{F}$，定义在 F 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足如下性质：

1. **非负性**：$\forall A \in \mathscr{F}, P(A) \geq 0$
2. **规范性（归一性）**：$P(S) = 1$
3. **可列可加性**：$\forall A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, 且满足 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j \in \mathbb{R}$，有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则我们称 P 是 $\mathscr{F}$ 上的**概率测度**，称 $P(A)$ 是 A 的**概率**。

Remark：这里的“可列可加”实际上是由测度论带来的，这里的“可列”要求事件序列 A_i 是无穷长的，且是可数无穷。

当只有有限个事件序列时（比如只有 n 个）我们只需要简单地将 $A_i(i>n)$ 全部定义为空集即可,换句话说，对于有限个互不相容的事件序列 $A_1,...,A_n$，有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

实际上，上述性质被称为“有限可加性”，而“可列可加性”是其到无穷情况的推广，“可列可加性”可以推出“有限可加性”，但“有限可加性”不能推导得到“可列可加性”。因此，我们不可用“有限可加性”去替代“可列可加性”，即使我们大多数情况下只处理有限的情况。

换句话说，所谓概率，就是一个从事件空间 $\mathscr{F}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个映射，且满足上面三个条件。实际上，概率的公理化条件并不直接告诉我们在实际问题中如何计算 $P(A)$，其只告诉了我们什么是 $P(A)$（实际上很多数学上的公理化定义都如此），$P(A)$ 的具体计算要根据问题的条件和背景得到。

概率空间 所谓概率空间是一个三元组，包含样本空间 S，事件集合 $\mathscr{F}$ 和概率测度 P, 记为 $(S,\mathscr{F},P)$

Definition 1.1.2 (条件概率)：设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**。

独立性 对于试验 E 中的两个事件 A,B，若事件 A 发生的概率对事件 B 发生的概率无影响，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，则我们称事件 A 与 B 互相**独立**。更一般地，若 $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$ 则我们称 $A_1,A_2,...,A_n$ 相互独立。

Mark：这里需要区分 A,B 互相独立和 A,B 互相对立的区别。实际上，事件 A,B 的独立性和对立性不可能同时成立，若已知 A,B 对立，且 A 不成立，则我们可以马上得到 B 成立，显然这不符合 A,B 互相独立的定义。

另外，A,B 对立很容易在 Venn 图中表示，但 A,B 独立不然，究其原因是因为 Venn 图并无体现数量关系，故无法表示 A,B 独立这一数量关系。

1.2 概率公式的基本计算

Theorem 1.2.1 (加法公式（Jordan 公式）)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$ 若 $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_n \le n} P\left(A_{i_1} ... A_{i_k}\right)$$

Theorem 1.2.2 (减法公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $A, B \in \mathscr{F}$，则：

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

Theorem 1.2.3 (乘法公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，则：

$$P(A_1 ... A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i | A_1 ... A_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_n \le n} (-1)^{k-1} P\left(A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_k}\right)$$

Theorem 1.2.4 (全概率公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $B, A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，其中 A_i 是 S 的分割，则：

$$P(B) = \sum_j P\left(A_j\right) P\left(B | A_j\right)$$

Theorem 1.2.5 (Bayes 公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $B, A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，其中 A_i 是 S 的分割，则：

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_j P\left(A_j\right) P\left(B | A_j\right)}$$

1.3　古典概率模型

古典概型　若试验 E 满足两个条件：1. 样本空间 S 是有限的集合。2. S 中的每个样本点发生的可能性相同。则我们称这种试验为**等可能概型**，又称**古典概型**。

在古典概型中，取样本空间 $S = \{e_1, ..., e_n\}$，其中 $e_1, ..., e_n$ 代表该随机试验的 N 个结果，事件域 $\mathscr{F}$ 取为 2^S（即 S 的所有子集都是事件），且每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = ... = P(\{e_n\})$$

若事件 A 包含 K 个基本事件，即 $A=\left\{e_{i_1}\right\}\cup...\cup\left\{e_{i_n}\right\}$，则给出概率测度 P 如下：

$$P(A)=\frac{K}{N}=\sum_{e\in A}\frac{1}{N}$$

由于古典概型的概率与计数直接相关，因此下文中简要介绍一些基本的组合计数方法：

乘法原理 设某个试验共包含 r 个依次执行的阶段，其中：1. 第一个阶段总共有 n_1 个可能的结果。2. 在完全前面的 $i-1$ 个阶段并得到一个相应的结果后，第 i 个阶段将总共有 n_i 个可能的结果。则该试验一共有 $n_1\cdot n_2\cdot...\cdot n_r$ 个可能的结果。

加法原理 设完成某个试验有 r 种不同的途径，且只能在这 r 种途径中选一种来完成该试验。若采取第 i 种途径时总共有 n_i 种可能的结果，则该试验一共有 $n_1+n_2+...+n_r$ 种可能的结果。

排列 假设有 n 个不同的个体，从中选出 n 个并将其排成一个序列，则总共有：

$$n(n-1)(n-2)...(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

个可能的组合方式。

组合 假设一个集合包含 n 个不同的元素，我们需要从中选出 m 个元素构成一个子集，则可能得到的子集总共有：

$$\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

个，上式给出的整数常常又被称为**二项式系数**，记作 $\binom{n}{m}$

多项式系数 给定一组自然数 $n_1,n_2,...,n_r$，以及 $n=n_1+...+n_r$，定义多项式系数为：

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Chapter 2 随机变量及其分布

2.1 随机变量

“随机变量”可以看成是将“底层”的概率空间 $(S,\mathscr{F},P)$ “包装”成分布函数，分布列，概率密度等方便使用微积分等分析工具的“接口”，从而为我们对概率进行建模提供了莫大的便利。

Definition 2.1.1 (随机变量)：设 $(S, \mathscr{F}, P)$ 为一概率空间，我们将定义在 S 上的实值函数 $X : S \to \mathbb{R}$ 称作一个**随机变量**，若对于任意 $\mathbb{R}$ 中的区间 I，均有：

$$\{e \in S | X(e) \in I\} \in \mathscr{F}$$

上述定义中，要求 $\{e \in S|X(e) \in I\} \in \mathscr{F}$，其保证了 $\{e \in S|X(e) \in I\}$ 的概率都是有定义的，也就是对任意区间 I，我们都可以谈论"随机变量的取值落在 I 中"这一事件的概率。

Remark：上述条件实际上是从可测性而来，即对于实数轴上的任意的"合理"的子集（*Borel* 集），其原像都必须是一个可测事件（即属于事件域）同时，上述要求的一个常见的等价描述如下："对于任意实数 x，集合 $\{e|X(e) \leq x\}$ 有确定的概率"。

另外，不满足上述条件的情况实际应用中极少出现，相关例子基本属于高等概率论的内容，其基本都是数学上卡 *BUG* 而来，一般可忽略不理。

对于给定的随机变量 X 以及关于实数 x 的命题 $\varphi(x)$，我们常用记号 $\{\varphi(X)\}$ 表示集合 $\{e \in S|\varphi(X(x))$ 成立$\}$，例如：

$$\{X > 2\} = \{e \in S \mid X(x) > 2\}$$

随机变量之间可以进行运算，具体而言，给定 n 个随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 以及函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们用 $f(X_1, ..., X_n)$ 表示将 $e \in S$ 映射为 $f(X_1(e), X_2(e), ..., X_n(e))$ 的函数。

2.2 离散型随机变量及其分布律

Definition 2.2.1 (离散型随机变量)：设 X 为一随机变量，若 X 只有可数多个可能的取值，则称 X 为**离散型随机变量**。

另外，对于离散型随机变量，我们定义分布列 $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ 为：

$$p_X(x) = P(X = x), \quad x \in \mathbb{R}$$

显然，分布列满足如下性质：

Theorem 2.2.1：设 X 为一离散型随机变量，p_X 为其分布列，则：
1. 对任意 $x \in \mathbb{R}$，均有 $p_X(x) \geq 0$
2. $\{x \in \mathbb{R}|p_X(x) > 0\}$ 为可数集
3. $\sum_x p_{X(x)} = 1$

此定理的逆定理同样成立。

2.3 常见离散型随机变量

2.3.1 Bernoulli 分布

2.3.2 二项分布

2.3.3 超几何分布

2.3.4 Poisson 分布

2.3.5 几何分布

2.3.6 帕斯卡分布

2.3.7 多项分布

2.4 连续型随机变量及其分布律

Chapter 3 多维随机变量

Chapter 4 杂七杂八

4.1 概率的连续性

4.2 测度论简介

Chapter 5 Typst 测试章节

5.1 Test Section

§5.1

5.2 Test Test Test 02