

# 数学物理方法笔记

Guotao He

2025-09-22

# 目录

---

<b>Part I 复分析</b>	<b>3</b>
<b>Chapter 1 复变函数</b>	<b>4</b>
1.1 复变函数的导数和微分 . . . . .	4
1.2 解析函数和多值函数 . . . . .	5
<b>Chapter 2 复变积分</b>	<b>7</b>
2.1 定义 . . . . .	7
2.2 Cauchy 定理 . . . . .	9
2.3 Cauchy 积分公式 . . . . .	9
<b>Chapter 3 复变级数</b>	<b>11</b>
3.1 级数 . . . . .	11
3.2 幂级数 . . . . .	12
3.3 Taylor 展开 . . . . .	12
3.4 Laurent 展开 . . . . .	13
3.5 奇点的分类 . . . . .	13
<b>Chapter 4 留数定理</b>	<b>14</b>
4.1 留数和留数定理 . . . . .	14
4.2 留数法因式分解 . . . . .	15
4.3 有理三角函数积分 . . . . .	15
4.4 无穷积分 . . . . .	16
4.5 含三角函数的无穷积分 . . . . .	16
4.6 实轴上有奇点的积分 . . . . .	17
4.7 多值函数的积分 . . . . .	17
<b>Part II 积分变换</b>	<b>18</b>
<b>Part III 数学物理方程</b>	<b>19</b>
<b>Part IV 杂七杂八</b>	<b>20</b>
<b>Chapter 5 Lamé 系数与任意正交坐标系下算符</b>	<b>21</b>
5.1 Lamé 系数介绍 . . . . .	21
5.2 几何理解 . . . . .	22
5.3 使用微分形式推导 . . . . .	22
5.3.1 梯度 . . . . .	23
5.3.2 旋度 . . . . .	23

目录	2
5.3.3 散度 . . . . .	24
5.3.4 Laplace 算子 . . . . .	25
Chapter 6 Feynman 积分法	26
Chapter 7 Glasser 主定理	27
Chapter 8 Lobachevsky 积分法	28

DRAFT

**Part I**  
**复分析**

## Chapter 1

# 复变函数

## 1.1 复变函数的导数和微分

**Definition 1.1.1** (导数). 设函数  $f(z)$  是区域  $G$  上定义的单值函数, 若在点  $z$  处存在极限:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

且与  $\Delta z \rightarrow 0$  的方式无关, 则称函数  $f(z)$  在  $z$  点的导数存在.

**Definition 1.1.2** (可微). 若函数  $w = f(z)$  在  $z$  处的改变量  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$  可以写为:

$$\Delta w = A(z) \Delta z + \rho(\Delta), \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\rho(\Delta)}{\Delta z} = 0$$

则函数  $f(z)$  在  $z$  处可微, 其线性部分被称为函数的微分.

可以证明, 函数在  $z$  处可导和可微互为充要条件, 因此  $df(z) = f'(z) dz$ .

上述式中我们可以得到复变函数的导数的几何意义: 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  处可导, 则在  $z_0$  处的小邻域经过函数  $f(z)$  的变换相当于乘上一个固定的复数  $f'(z_0)$ . 又因为乘上一个固定的复数相当于进行了拉伸和旋转两步, 其不会经历剪切过程, 因此此变换是一个保角变换<sup>1</sup>.

**Theorem 1.1.1** (Cauchy - Riemann 条件). 设复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  可导, 则其一个必要不充分条件是函数  $f(z)$  满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

若在极坐标下, 则满足:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

C-R 条件其实可以借助几何直观的推出. 若函数在  $z_0$  可导, 则该函数在  $z_0$  处的小邻域内是保角变换, 因此, 其实轴的基矢的位移与虚轴的基矢的位移模长相等, 方向正交. 也就是:

$$dv = i \cdot du$$

例如, 在直角坐标下, 我们先写出  $u, v$  的全微分:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

同时, 我们知道直角坐标下  $dx$  和  $dy$  的关系:  $dy = i \cdot dx$ . 因此:

<sup>1</sup>当然, 这要求  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $f(z) = 0$  的保角性需要额外讨论.

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx = \left( -\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = i du$$

故:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

即直角坐标下 C-R 条件. 同理, 在极坐标下:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \end{aligned}$$

同时, 在极坐标下  $dr$  和  $d\theta$  的关系:  $r d\theta = i dr$ , 因此:

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr = i du$$

故:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

如果一个函数  $f(z)$  在  $z_0$  处满足 C-R 条件, 仍不能说明  $f(z)$  在  $z_0$  处可导, C-R 条件只是可导的必要条件并不是充分条件, C-R 条件只保证了  $\Delta z$  以平行于实轴和虚轴这两种特殊方式趋近于 0 时, 极限逼近与同一个值.

一个可导的充分条件是, 函数  $f(z) = u + iv$  的实部和虚部在  $z_0 = (x, y)$  处均可微, 也就是  $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$  四个偏导数存在且连续, 同时满足 C-R 条件, 则该函数在  $z_0$  可导.

## 1.2 解析函数和多值函数

**Definition 1.2.1** (解析函数). 若函数  $f(z)$  在区域  $G$  内处处可导, 则函数  $f(z)$  在  $G$  内解析.

- 解析函数的实部和虚部不是独立的, 知道了其中之一, 根据 C-R 条件就可以唯一地确定另外一个. (当然有可能相差一个常数)
- 不是任意的二元函数都可以作为解析函数的实部和虚部, 它们必须是调和函数, 即  $f(z) = u + iv$  的  $u$  和  $v$  需要满足 Laplace 方程.

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0$$

- 如果一个函数  $f(z)$  是解析函数, 则这一个函数必定是单值函数, 也就是对于定义域中任意一个自变量  $z$ , 有且只有一个对应的函数值  $f(z)$ . 这是因为如果函数是多值函数, 则当  $\Delta z$  从不同路径趋于 0 时,  $f(z + \Delta z)$  有可能会到不同的分支上, 从而使得极限依赖于  $\Delta z$  趋近于 0 的路径.

**Definition 1.2.2** (多值函数). 若在区域  $G$  内, 复数  $z \in G$  有多个复数  $w_0, \dots, w_n$  与之对应,  $w$  和  $z$  的映射关系记为  $f$ , 则  $f$  称为定义在  $G$  上的多值函数.

实际上, 我们所接触的多值函数就三种:  $\sqrt[n]{z}, \ln z, z^\alpha$ . 多值函数虽然名字中叫“函数”, 实际上根本不是函数. 函数要求是一个自变量被映射到唯一的另一个自变量, 显然多值函数不满足这一点.

多值函数的多值性来自于宗量相位的多值性. 因此多值函数中可以定义分支点.

**Definition 1.2.3** (分支点). 对于多值函数  $w = f(z)$ ,  $\exists r > 0$ , 当自变量  $z$  绕圆周  $|z - z_0| = r$  一周回到原处时, 因变量  $w$  值不还原, 且  $r \rightarrow 0$  时,  $w$  仍旧不还原, 则  $z_0$  就是一个分支点. 当  $z$  绕  $z_0$  点  $n$  周时  $w$  复原, 则称该点为多值函数的  $n-1$  阶分支点.

无穷远点也可以是分支点, 只需要作变换  $z = 1/t$ , 考察  $t = 0$  是否是分支点即可.

我们不难发现, 只要我们限制自变量不要在分支点上绕圈圈, 就不会产生多值现象. 同时, 多值函数之所以不是函数, 是因为其将一个点映射到多个点, 因此, 我们可以“稀释”一下定义域, 将定义域变成多个复平面, 从而使得定义域到值域变成是一一对应的, 这样我们就可以用解析函数的各种性质了.

因此, 我们人为在两个分支点之间连线 (不一定是直线), 从而得到割线, 并要求如果自变量  $z$  经过了割线, 就要变更复平面. 我们可以想象不同的复平面是不同的层, 割线就是不同层的“楼梯”, 经过割线就会升降层从而进入不同的复平面, 在可视化上就相当于将不同层的割线“粘”起来. 这样得到东西就是所谓的 Riemann 面.

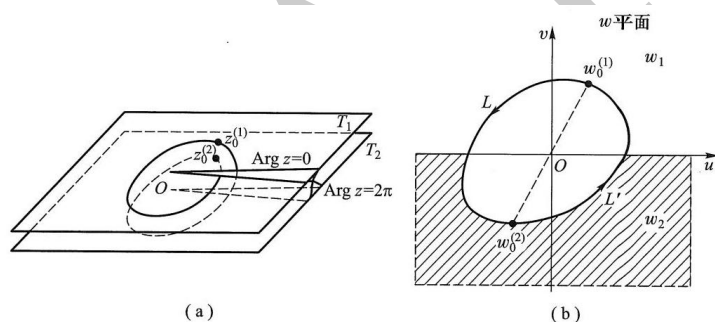


图 1.1:  $\sqrt{z}$  的 Riemann 面可视化

常见的多值函数的分支点和割线如下:

- 根式函数  $\sqrt[n]{z}$ : 分支点:  $0, \infty$ , 割线:  $\{z | \arg z = 0\}$
- 对数函数  $\ln z$ : 分支点:  $0, \infty$ , 割线:  $\{z | \arg z = 0\}$
- 幂函数  $z^\alpha$ : 分支点:  $0, \infty$ , 割线:  $\{z | \arg z = 0\}$

## Chapter 2

# 复变积分

## 2.1 定义

**Definition 2.1.1** (复变积分). 设  $C$  是分段光滑的曲线, 则复变积分可以定义为两个实变线积分的组合:

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy)\end{aligned}$$

一般说来, 复变积分的数值, 不仅依赖于被积函数和积分路径的端点, 而且还依赖于积分路径本身.

**Definition 2.1.2** (不定积分). 设  $f(z)$  及  $\Phi(z)$  是区域  $G$  内的连续函数, 如果在  $G$  中恒有  $\Phi'(z) = f(z)$ , 则称  $\Phi(z)$  为  $f(z)$  在区域  $G$  内的一个不定积分或原函数.

- $\Phi(z)$  显然为  $G$  内的解析函数
- 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的.

**Theorem 2.1.1** (微积分基本定理). 设  $C$  的端点  $a, b$ ,  $f(z)$  的某个原函数为  $\Phi(z)$ , 则:

$$\int_C f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a)$$

**Theorem 2.1.2.** 在区域  $G$  内, 下列命题等价:

- 复变积分与路径无关

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

- 围道积分恒为 0

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

- 函数的原函数存在

$$f(z) = \Phi'(z)$$

一个经常用到的结论如下:

**Example 2.1.1.** 计算

$$\oint_C z^n dz$$



其中  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C$  为一逆时针方向的简单闭合围道.

**Solution.** 设  $f(z) = z^n$ , 不难得到原函数为:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

$n \geq 0$  时,  $\Phi(z)$  是  $\mathbb{C}$  上的解析函数, 因此:

$$\oint_C z^n dz = 0, \quad n \geq 0$$

$n < -1$  时,  $\Phi(z)$  是  $\mathbb{C} \setminus \{z=0\}$  上的解析函数, 因此对于任意不经过原点的围道, 有:

$$\oint_C z^n dz = 0, \quad n < -1$$

$n = -1$  时,  $\Phi(z)$  为多值函数, 其分支点为原点和无穷远点, 因此围道可以分成两种情况:

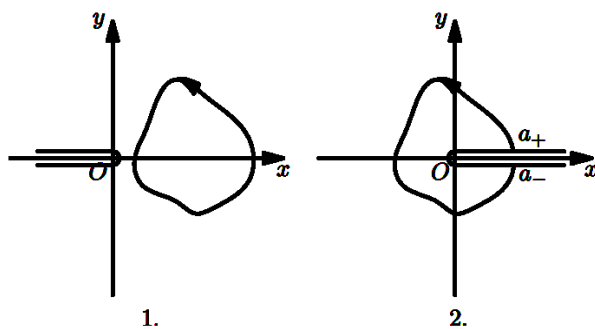


图 2.1:  $n = -1$  时的两种情况

- 围道不包围原点, 则总可以做割线连接原点和无穷远点, 使得围道仍在解析区域内, 则:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 0$$

- 围道包围原点, 则围道一定与割线相交, 因此, 我们可以从割线的一端出发到另一端, 于是有:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_{a_+}^{a_-} \frac{dz}{z} = \ln a_- - \ln a_+$$

规定  $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ , 因此:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = (\ln a + 2\pi i) - \ln a = 2\pi i$$

综上:

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \text{ 且 } C \text{ 包围 } z=0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

□

## 2.2 Cauchy 定理

下面我们将某个包含奇点（如果有奇点的话）的单连通区域记为  $G$ （没有加上方的横线），用小围道去除奇点后的复连通区域记为  $\bar{G}$ （在上方加上一条横线）。

**Theorem 2.2.1** ((单连通区域的)Cauchy 定理). 如果函数  $f(z)$  在单连通区域  $G$  中解析, 则沿  $G$  中任何一个简单闭围道  $C$ , 有:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

上述定理用 Green 公式 + C-R 条件可以很容易地证明, 在此不再叙述.

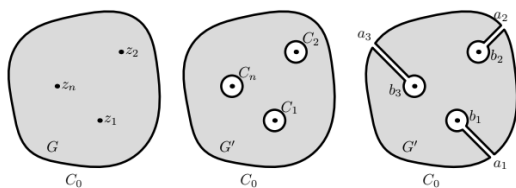


图 2.2: 复连通区域 Cauchy 定理围道示意图

若区域  $G$  中不是处处解析的, 而是存在一些奇点, 于是我们可以用一系列小围道  $C_1, \dots, C_n$  将奇点绕开, 从而得到一个在上面解析的复连通区域  $\bar{G}$ , 在上面作适当割线将其转化为单连通区域  $G'$ , 因此, 根据单连通区域的 Cauchy 定理, 有:

**Theorem 2.2.2** ((复连通区域的)Cauchy 定理). 如果  $f(z)$  是复连通区域  $\bar{G}$  中的解析函数, 则:

$$\oint_{C_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 0$$

其中  $C_0$  是外部的最大的围道,  $C_1, \dots, C_n$  是内部的小围道. 所有围道取正向.

注意这里围道正向指的是“左手在内”准则的正向, 也就是在围道上面多围道正向, 左手边是内部, 右手边是外部, 也就是对于外部, 正向是逆时针, 对于内部, 正向是顺时针. 有些书籍的 Cauchy 定理使用的是全逆时针的围道 (无论内外), 需要注意区分.

上面  $f(z)$  在闭区域  $\bar{G}$  中解析, 不仅要求  $f(z)$  在  $\bar{G}$  中无奇点, 还要求其在积分围道上也解析无奇点.

## 2.3 Cauchy 积分公式

复变函数的积分的另一个及其重要的关系式是 Cauchy 积分公式.

**Theorem 2.3.1** (Cauchy 积分公式). 设  $C$  为一简单的闭围道,  $G$  是其内部,  $\alpha$  为  $G$  内一点. 若  $f(z)$  是区域  $\bar{G}$  上的解析函数, 则:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

其中围道积分沿正向, 也就是逆时针方向.

实际上 Cauchy 积分公式是之后的留数定理的一种特殊情况, 可以视为留数定理的只有一个一阶极点的情况. Cauchy 积分公式的应用到之后留数定理再介绍.

Cauchy 积分公式中给出  $G$  内的任意一点的函数值  $f(z)$  可以用边界  $C$  上的积分表示, 而  $f'(z)$  也可以由边界  $C$  上的积分表示.

**Theorem 2.3.2** (解析函数的高阶导数). 设  $C$  为一简单的闭合围道,  $G$  是其内部,  $\alpha$  为  $G$  内一点. 若  $f(z)$  是区域  $\bar{G}$  上的解析函数, 则:

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

同样, 上述也是留数定理的只有一个高阶极点的情况.

**Corollary 2.3.3.** 设  $f(z)$  是区域  $G$  内的解析函数, 则在区域  $G$  内  $f(z)$  的任意阶导数都存在, 且也是  $G$  内的解析函数.

**Theorem 2.3.4** (Morera 定理). 设  $f(z)$  在区域  $G$  内连续, 若  $G$  中的任意闭合围道  $C$ , 都有:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

则  $f(z)$  在  $G$  内解析.

## Chapter 3

# 复变级数

### 3.1 级数

复变级数和高数中的实变级数的很多性质相似，我们不加证明地给出下面结论：

**Theorem 3.1.1** (比较判别法). 若  $|u_n| < v_n$  而  $\sum v_n$  收敛，则  $\sum |u_n|$  收敛. 若  $|u_n| > v_n$  而  $\sum v_n$  发散，则  $\sum |u_n|$  发散.

**Theorem 3.1.2** (比值判别法). 如果存在常数  $\rho$ ，满足：

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \rho < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若：

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

**Theorem 3.1.3** (根式判别法). 如果存在常数  $\rho$ ，满足：

$$|u_n|^{1/n} \leq \rho < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若：

$$|u_n|^{1/n} > 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

由于级数的前面有限项与整个级数的收敛性无关，则可以从  $n$  项开始，令  $n \rightarrow \infty$ ，可得：

**Theorem 3.1.4** (d'Alembert 判别法). 如果：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

**Theorem 3.1.5** (Cauchy 判别法). 如果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1$$

则级数  $\sum |u_n|$  收敛. 若:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

## 3.2 幂级数

**Theorem 3.2.1** (Abel 第一定理). 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  在某点  $z_0$  收敛, 则在以  $z_0$  为圆心,  $|z_0 - a|$  为半径的圆  $|z - a| < |z_0 - a|$  绝对收敛, 在  $|z - a| \leq r < |z_0 - a|$  的闭圆内一致收敛.

求幂级数的收敛半径一般遵循以下方法:

- 根据 Cauchy 判别法:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{1/n}$$

- 根据 d' Alembert 判别法:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

## 3.3 Taylor 展开

一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数. 相反地, 可以将一个解析函数表示成为幂级数.

**Theorem 3.3.1** (Taylor 展开). 设函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心的圆内  $|z - z_0| < R$  解析, 则对于圆内任何  $z$  点, 有  $f(z)$  可用 Taylor 展开为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

我们同样可以对无穷远点  $\infty$  进行 Taylor 展开, 只需要做变换  $z \rightarrow 1/z$  然后对  $z = 0$  的邻域展开即可.

这里 Taylor 展开的形式和实变函数中的 Taylor 公式相同, 但是条件不同.

- 在实变函数中,  $f(z)$  的任意阶导数存在, 还不能保证 Taylor 级数收敛, 还需要 Taylor 公式的余项  $\rightarrow 0$ .

- 在复变函数中, 解析的要求就足以保证 Taylor 级数收敛.

Taylor 展开是唯一的, 因此我们可以用各种其他方法来求解 Taylor 展开.

### 3.4 Laurent 展开

解析函数在解析点可展开成 Taylor 级数. 有时, 还需要将它在奇点附近展开成幂级数, 这时就得到 Laurent 展开.

**Theorem 3.4.1** (Laurent 展开). 设函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心的环域  $r < |z - z_0| < R$  中单值解析, 则对于环域内任何的  $z$  点,  $f(z)$  可以用包括负幂级数的展开为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$C$  是环域内绕内圆一周的任意一条曲线.

我们同样可以对无穷远点  $\infty$  进行 Laurent 展开, 只需要做变换  $z \rightarrow 1/z$  然后对  $z = 0$  的环域展开即可.

Laurent 展开与 Taylor 展开不同, 一方面其展开区域 (收敛区域) 不同, 另一方面, 即使是正幂项系数:

$$a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Taylor 展开是唯一的, 因此我们可以用各种其他方法来求解 Taylor 展开.

### 3.5 奇点的分类

**Definition 3.5.1** (孤立奇点). 设  $z_0$  为函数  $f(z)$  的一个奇点. 如果存在  $z_0$  的空心邻域, 在该邻域内  $0 < |z - z_0| < r$ ,  $f(z)$  解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点. 否则称为非孤立奇点.

如果  $z = z_0$  是函数  $f(z)$  的一个孤立奇点, 则存在一个环域  $r < |z - z_0| < R$ , 在环域内  $f(z)$  解析, 则可以展开成 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

可能出现三种情况:

- 级数展开式不含负幂项.  $\implies$  可去奇点.
- 级数展开式含有限负幂项.  $\implies$  极点.
- 级数展开式含无穷多个负幂项.  $\implies$  本性奇点.

## Chapter 4

# 留数定理

### 4.1 留数和留数定理

**Definition 4.1.1** (留数). 若点  $z_0$  为函数  $f(z)$  的孤立奇点. 定义函数  $f(z)$  在孤立奇点  $z_0$  的留数等于  $f(z)$  在  $z_0$  的空心邻域内 Laurent 展开式中  $(z - z_0)^{-1}$  幂的系数  $a_{-1}$ , 记作  $\text{res}f(z_0)$  或者  $\text{res}[f(z), z_0]$ .

$$a_{-1} = \text{res}f(z_0) = \text{res}[f(z), z_0]$$

**Theorem 4.1.1** (留数定理). 设  $C$  为一简单闭围道,  $G$  为  $C$  的内区域, 若  $G$  中除了有限个孤立奇点  $b_k, k = 1, 2, \dots, n$  外, 函数在  $\bar{G}$  内解析, 则:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(b_k)$$

**Proof.** 证明其实也是复联通区域的 Cauchy 定理的直接应用. 作小圆  $\gamma_k, k = 1, \dots, n$  将每一个奇点包围 (全部取逆时针方向), 则:

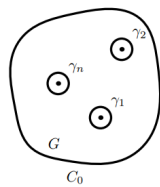


图 4.1: 留数定理证明示意图

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(b_k)$$

□

对于  $m$  阶极点, 有如下求留数的方法:

$$\text{res}f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0) f(z)] \Big|_{z=z_0}$$

特别的, 对于  $m = 1$ , 有:

$$\text{res}f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

若  $f(z) = P(z)/Q(z)$ , 其中  $P, Q$  均为多项式,  $z_0$  为  $f(z)$  的一阶极点, 则  $f(z)$  的留数有一个方便的求法:

**Corollary 4.1.2** (有理分式一阶极点的留数).

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

**Proof.** 上述证明也很简单:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\frac{P(z) - (z - z_0) P'(z)}{Q'(z)}}_{\text{L' Hopital 法则}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

□

我们同样可以对无穷远点求留数, 对于无穷远点的留数, 有如下推论:

**Corollary 4.1.3** (无穷原点留数推论 1).

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\operatorname{res} \left[ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right]$$

**Proof.** 我们选取一个足够大的圆形围道  $C$ , 以逆时针为正方向, 则由留数定理:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

这里的负号是因为包围无穷远点的围道方向为顺时针, 这里取逆时针. 因此多一个负号.

换元  $z = 1/w$ ,  $dz = -1/w^2 \cdot dw$ , 注意变换后要保持围道的方向, 因此多一个负号, 故:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(1/w)}{w^2} dw = -\operatorname{res} \left[ \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0 \right]$$

证毕.

□

**Corollary 4.1.4** (无穷原点留数推论 2).

**Corollary 4.1.5** (全平面留数和).

## 4.2 留数法因式分解

## 4.3 有理三角函数积分

考虑积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

其中  $R$  是  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  的有理函数.

做变换:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ d\theta &= \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$



积分路径变换为  $z$  平面上单位圆  $|z| = 1$ , 于是:

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) \frac{dz}{iz}$$

## 4.4 无穷积分

考虑积分:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

为了应用留数定理, 必须先构造适当的围道. 我们补上以原点为圆心,  $R$  为半径的上半圆  $C_R$ , 再令  $R \rightarrow \infty$ .

为了求出补充的圆弧的积分, 这里给出非常常用的大圆弧引理.

**Lemma 4.4.1** (大圆弧引理). 若函数  $f(z)$  在  $z = \infty$  的邻域连续, 且当  $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2, |z| \rightarrow \infty$  时,  $zf(z)$  一致地趋向  $K$ , 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1)$$

其中  $C_R$  是以原点为圆心,  $R$  为半径, 夹角为  $\theta_2 - \theta_1$  的圆弧, 即:

$$C_R = \{|z| = R \& \theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2\}$$

与大圆弧引理对应的是小圆弧引理, 这里一并给出:

**Lemma 4.4.2** (小圆弧引理). 若函数  $f(z)$  在  $z = a$  的空心邻域内连续, 且当  $\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2, |z-a| \rightarrow 0$  时,  $(z-a)f(z)$  一致地趋向  $k$ , 则:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1)$$

其中  $C_R$  是以  $a$  为圆心,  $R$  为半径, 夹角为  $\theta_2 - \theta_1$  的圆弧, 即:

$$C_R = \{|z-a| = R \& \theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2\}$$

## 4.5 含三角函数的无穷积分

对于形如:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cos(px) dx, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \sin(px) dx$$

我们构造:

$$I = \oint_L P(z) e^{ipz} dz$$

其中  $L$  是包围上半平面的围道. 对于多引入的半圆形围道  $C_R$ , 我们有如下引理:

**Lemma 4.5.1** (Jordan 引理). 设  $0 \leq \arg z \leq \pi$ , 当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $Q(z)$  一致趋向于 0, 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0$$

其中  $p > 0$ ,  $C_R$  是以原点为圆心,  $R$  为半径的上半圆.

## 4.6 实轴上有奇点的积分

## 4.7 多值函数的积分

**Part II**  
**积分变换**

**Part III**  
**数学物理方程**

**Part IV**  
**杂七杂八**

## Chapter 5

# Lame 系数与任意正交坐标系下算符

### 5.1 Lamé 系数介绍

作为开始, 我们知道三维直角坐标下的梯度、旋度、散度、Laplace 算符:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

我们希望能直接写出任意曲线坐标 (主要是球坐标、柱坐标) 的上述四个算符的形式. 这里我们对曲线坐标提出一些要求: **坐标中任意位置的基矢相互正交**. 也就是要求坐标系是正交坐标系. 不难验证, 球坐标, 柱坐标都满足此要求.

对于任意三维的正交坐标系, 我们总可以将某一位置邻域的线元写成如下形式 (这是由基矢相互正交的性质保证的):

$$ds = \sqrt{(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2}$$

其中,  $dq_i$  是沿着  $\mathbf{e}_i$  方向的小位移,  $h_i$  就是  $q_i$  对应的 Lamé 系数.

上述介绍比较抽象, 这里以常用的坐标系作为例子. 对于直角坐标, 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

因此  $x, y, z$  的 Lamé 系数分别是 1, 1, 1.

对于柱坐标, 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2}$$

因此  $r, \theta, z$  的 Lamé 系数分别是 1,  $r$ , 1.

同理, 对于球坐标 (这里遵循物理的习惯, 令  $\omega$  为天顶角), 其线元写成:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2}$$

因此  $r, \omega, \phi$  的 Lamé 系数分别是 1,  $r$ ,  $r \sin \omega$ .

我们可以证明, 一旦我们为某个正交坐标系  $(q_1, q_2, q_3)$  找到了其 Lamé 系数  $h_1, h_2, h_3$  则可以直接得到:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \\
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \\
\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]
\end{aligned}$$

下面我们给出一个几何上的直观理解, 并通过微分形式推导上述结论<sup>1</sup>.

## 5.2 几何理解

### 5.3 使用微分形式推导

我们考虑一个任意的正交坐标系  $(q^1, q^2, q^3)$ . 位置矢量  $\mathbf{r}$  可以表示为  $\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ . Lame 系数  $h_i$  (也称为尺度因子) 定义为切矢量基底的模长:

$$h_i = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}}$$

由此, 我们可以定义一组标准正交基  $\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i / h_i$ . 线元矢量为  $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_i dq^i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ . 弧长微元为:

$$ds^2 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) dq^i dq^j = (h_i dq^i)^2$$

此时度规张量  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  在这个正交基下是对角的:

$$g = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}, \quad g_{ii} = h_i^2$$

与切矢量基底  $\mathbf{e}_i$  对偶的 1-形式基底是  $dq^i$ . 我们引入一组归一化的 1-形式基底  $\omega^i = h_i dq^i$ . 这组基是正交归一的, 满足  $\langle \omega^i, \omega^j \rangle = \delta^{ij}$ . 其体积形式是:

$$\text{vol} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3$$

霍奇星算子  $\star$  是一个从  $k$ -形式到  $(n-k)$ -形式的映射. 在当前的三维正交坐标系下, 使用归一化的基底  $\omega^i$ , 其作用如下:

- $\star 1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \text{vol}$
- $\star \omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$
- $\star(\omega^1 \wedge \omega^2) = \omega^3$

<sup>1</sup>当然, 肯定有没那么“高级”的证明方法, 只是我比较喜欢通过微分形式来证明, 同时通过微分形式证明是比较本质的 (微分形式不依赖坐标系).

$$\bullet \star(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) = 1$$

一个重要的性质是  $\star\star\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$ . 在三维空间中 ( $n=3$ ), 对 1-形式 ( $k=1$ ) 和 2-形式 ( $k=2$ ), 我们有  $\star\star\omega = \omega$ .

通过度规, 我们可以建立矢量场和微分形式之间的对应关系, 这被称为**音乐同构 (Musical Isomorphism)**.

- **降号 (flat)  $\flat$** : 从矢量场  $V$  得到 1-形式  $V^\flat$ . 给定矢量场  $V = V^1\hat{e}_1 + V^2\hat{e}_2 + V^3\hat{e}_3$ , 其对应的 1-形式为:

$$V^\flat = V_1\omega^1 + V_2\omega^2 + V_3\omega^3$$

在正交坐标系中, 由于基底是正交的, 协变分量  $V_i$  和逆变分量  $V^i$  是相同的, 即  $V_i = V^i$ . 所以我们写作:

$$V^\flat = V_1h_1dq^1 + V_2h_2dq^2 + V_3h_3dq^3$$

其中  $V_i$  是矢量场  $V$  在标准正交基  $\hat{e}_i$  下的分量.

- **升号 (sharp)  $\sharp$** : 从 1-形式  $\omega$  得到矢量场  $\omega^\sharp$ .

### 5.3.1 梯度

梯度  $\nabla f$  是一个矢量场, 其定义来自于标量函数  $f$  (一个 0-形式) 的外微分  $df$  (一个 1-形式).

$$\nabla f \equiv (df)^\sharp$$

首先, 我们计算  $f$  的外微分:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial f}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial f}{\partial q^3}dq^3$$

为了将其转换为矢量场, 我们需要将其表示为  $\sum_i V_i\omega^i = \sum_i V_ih_idq^i$  的形式.

$$df = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q^1}(h_1dq^1) + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q^2}(h_2dq^2) + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q^3}(h_3dq^3)$$

$$df = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q^1}\right)\omega^1 + \left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q^2}\right)\omega^2 + \left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q^3}\right)\omega^3$$

这是一个 1-形式, 其在基底  $\omega^i$  下的分量为  $\frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}$ . 通过升号运算  $\sharp$ , 我们得到对应的矢量场, 其在标准正交基  $\hat{e}_i$  下的分量就是这些系数. 因此, 梯度为:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q^1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q^2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q^3}\hat{e}_3$$

### 5.3.2 旋度

旋度  $\nabla \times \mathbf{F}$  作用于一个矢量场  $\mathbf{F}$ , 产生另一个矢量场. 在微分形式中, 它通过以下两步定义:

1. 将矢量场  $\mathbf{F}$  转换为其对应的 1-形式  $F^\flat$ .
2. 对这个 1-形式取外微分, 得到一个 2-形式  $d(F^\flat)$ .
3. 将得到的 2-形式通过霍奇星算子  $\star$  转换为一个 1-形式, 再通过升号  $\sharp$  转换为矢量场.

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv (\star(d(F^\flat)))^\sharp$$

给定矢量场  $\mathbf{F} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$ .



**第一步: 转换为 1-形式.**

$$F^b = F_1\omega^1 + F_2\omega^2 + F_3\omega^3 = (F_1h_1)dq^1 + (F_2h_2)dq^2 + (F_3h_3)dq^3$$

**第二步: 取外微分.**

$$d(F^b) = d(F_1h_1dq^1 + F_2h_2dq^2 + F_3h_3dq^3)$$

利用  $d(fg) = df \wedge g + f dg$  和  $d(dq^i) = 0$ , 我们得到:

$$d(F^b) = d(F_1h_1) \wedge dq^1 + d(F_2h_2) \wedge dq^2 + d(F_3h_3) \wedge dq^3$$

展开  $d(F_ih_i) = \sum_j \frac{\partial(F_ih_i)}{\partial q^j} dq^j$  并利用  $dq^j \wedge dq^i = -dq^i \wedge dq^j$  和  $dq^i \wedge dq^i = 0$ :

$$\begin{aligned} d(F^b) &= \left( \frac{\partial(F_3h_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q^3} \right) dq^2 \wedge dq^3 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(F_3h_3)}{\partial q^1} \right) dq^3 \wedge dq^1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q^2} \right) dq^1 \wedge dq^2 \end{aligned}$$

**第三步: 应用霍奇星算子并转换回矢量场.** 我们将上式用归一化的 2-形式基底  $\omega^i \wedge \omega^j = (h_ih_j)dq^i \wedge dq^j$  表示.

$$\begin{aligned} d(F^b) &= \frac{1}{h_2h_3} \left( \frac{\partial(F_3h_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q^3} \right) \omega^2 \wedge \omega^3 \\ &\quad + \frac{1}{h_3h_1} \left( \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(F_3h_3)}{\partial q^1} \right) \omega^3 \wedge \omega^1 \\ &\quad + \frac{1}{h_1h_2} \left( \frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q^2} \right) \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

现在应用霍奇星算子  $\star(\omega^2 \wedge \omega^3) = \omega^1$  等:

$$\begin{aligned} \star(d(F^b)) &= \frac{1}{h_2h_3} \left( \frac{\partial(F_3h_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q^3} \right) \omega^1 \\ &\quad + \frac{1}{h_3h_1} \left( \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(F_3h_3)}{\partial q^1} \right) \omega^2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1h_2} \left( \frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q^2} \right) \omega^3 \end{aligned}$$

这是一个 1-形式. 通过升号  $\sharp$  运算, 我们得到旋度矢量场的表达式:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{e}}_1 & h_2\hat{\mathbf{e}}_2 & h_3\hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ F_1h_1 & F_2h_2 & F_3h_3 \end{vmatrix}$$

### 5.3.3 散度

散度  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  作用于一个矢量场  $\mathbf{F}$ , 产生一个标量函数 (0-形式). 其定义如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \star d(\star(F^b))$$

给定矢量场  $\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{e}}_1 + F_2\hat{\mathbf{e}}_2 + F_3\hat{\mathbf{e}}_3$ .

第一步: 将  $F$  转换为 1-形式  $F^\flat$ .

$$F^\flat = F_1\omega^1 + F_2\omega^2 + F_3\omega^3$$

第二步: 对  $F^\flat$  应用霍奇星算子, 得到一个 2-形式.

$$\star(F^\flat) = F_1(\star\omega^1) + F_2(\star\omega^2) + F_3(\star\omega^3) = F_1(\omega^2 \wedge \omega^3) + F_2(\omega^3 \wedge \omega^1) + F_3(\omega^1 \wedge \omega^2)$$

用  $dq$  基底表示:

$$\star(F^\flat) = (F_1 h_2 h_3) dq^2 \wedge dq^3 + (F_2 h_3 h_1) dq^3 \wedge dq^1 + (F_3 h_1 h_2) dq^1 \wedge dq^2$$

第三步: 取外微分, 得到一个 3-形式.

$$d(\star(F^\flat)) = \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3 + \frac{\partial(F_2 h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2 \wedge dq^3 \wedge dq^1 + \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3 \wedge dq^1 \wedge dq^2$$

整理 wedge product 的顺序:

$$d(\star(F^\flat)) = \left( \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(F_2 h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial q^3} \right) dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3$$

第四步: 再次应用霍奇星算子, 将 3-形式转换为 0-形式 (标量). 我们知道  $dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \text{vol.}$  所以  $\star(dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \star(\text{vol}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}$ . 因此,

$$\star(d(\star(F^\flat))) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(F_2 h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial q^3} \right)$$

这就是散度的最终表达式:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left( F_i \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \right)$$

### 5.3.4 Laplace 算子

拉普拉斯算子  $\nabla^2 f$  作用于一个标量函数  $f$ . 它被定义为梯度的散度  $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f)$ . 在微分形式的语言中, 这可以表示为:

$$\nabla^2 f \equiv \star d \star df$$

我们已经推导了梯度和散度的表达式, 现在只需将它们结合起来. 令矢量场  $\mathbf{F} = \nabla f$ . 那么  $\mathbf{F}$  的分量是:

$$F_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

现在, 将这个  $F_i$  代入我们上面得到的散度公式中:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \right)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \right]$$

这就是在任意正交坐标系下, 拉普拉斯算子作用于标量函数  $f$  的最终表达式.

## Chapter 6

# Feynman 积分法

---

DRAFT

DRAFT

## Chapter 8

# Lobachevsky 积分法

---

DRAFT