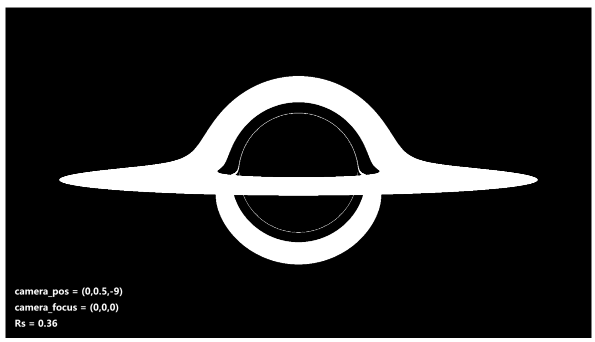
Render the Darkness

Schwarzschild 黑洞吸积盘图像渲染

Guotao He

2022 年 11 月 19 日



目录

1 Metric

在广义相对论中，弯曲的时空由度规（Metric）描述。对于一个不带电无自旋的黑洞，其周围的时空可用 Schwarzschild 度规描述，即：

$$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{c^2 r})dt^2 + (1-\frac{2GM}{c^2 r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

其中 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ 为球坐标下球面的度规

为方便，我们令 $c = 1$。由于 Schwarzschild 时空是球对称的，我们总可以取合适坐标系使得光线运动所在平面 $\varphi = \frac{\pi}{2}$，则

$$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{r})dt^2 + (1-\frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

可以看到，当 $r = R_s = 2GM$ 时，dt^2 前系数为 0，dr^2 前系数趋于无穷大。由于 $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12G^2M^2}{r^6}$，在 $r = R_s$ 时其不为 0，故该处不是真正的奇点，但由于此时 $g_{tt}|_{r\to R_s} \to 0$，故 $r = R_s$ 处光被无限红移，故无法被径向更远处的观测者观察到，即观测者无法观察到从 $r = R_s$ 内部发射的光子，**即 $r = R_s$ 为该黑洞的视界**。

2 Geodesic

在广义相对论中，不受力粒子以及光线在时空中沿着测地线（Geodesic）运动。测地线方程为

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

其中 $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ 为克氏符（Christoffel Symbol）

对于光线，由于 $ds = 0$，故不能像有质量粒子一样选取本征时 τ 作为仿射参量，这里选取 λ 作为仿射参量。需注意 λ 没有物理上的意义，只是数学上的处理而已。

根据上面公式，我们可以用 Mathematica 计算出 Schwarzschild 时空的克氏符：

$$\begin{pmatrix} \left\{0, -\frac{GM}{2GMr-r^2}, 0\right\} & \left\{-\frac{GM}{2GMr-r^2}, 0, 0\right\} & \{0,0,0\} \\ \left\{-\frac{GM(2GM-r)}{r^3}, 0, 0\right\} & \left\{0, \frac{GM}{2GMr-r^2}, 0\right\} & \{0, 0, 2GM-r\} \\ \{0,0,0\} & \{0, 0, \frac{1}{r}\} & \{0, \frac{1}{r}, 0\} \end{pmatrix}$$

根据克氏符，带入测地线方程，我们可以得到如下一组测地线方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{2GM}{r(r-2GM)}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{GM}{r^3}(r-2GM)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2-\frac{GM}{r(r-2GM)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\\
&-(r-2GM)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}=0
\end{aligned}$$

记 $u=\frac{1}{r}$，由上面测地线方程组，有

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}=\frac{3}{2}u^2-u$$

根据上式，我们便可迭代计算出光线的轨迹。

3 ISCO

现在我们来考虑广义相对论对黑洞吸积盘的限制

根据克氏符，我们可以写出有质量物体的单位质量径向势能

$$V(r)=\frac{1}{2}-\frac{GM}{r}+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{GML^2}{r^3}$$

其中 L 为单位质量角动量，对上式求导，求平衡位置，有

$$0=\frac{\partial V}{\partial r}=r^{-4}[GMr^2-L^2r+3GML^2]$$

$$\Rightarrow R_{\pm}=\frac{L^2\pm\sqrt{L^4-12L^2M^2G^2}}{2GM}$$

当 $r=R_{ISCO}=6GM=3R_s$ 时，我们只得到一个圆周轨道，可以证明他是最靠内的稳定圆轨道，被称为最内层稳定轨道（innermost stable circular orbit，简称 ISCO）。对于一个大质量黑洞外部的吸积盘，其中的物体由于碰撞或磁流体不稳定性等原因逐渐损失角动量，慢慢向内运动，当 $r<R_{ISCO}$ 时，其不在维持稳定轨道，而是以螺线快速向黑洞中心坠落。故吸积盘最内测半径应该大于 R_{ISCO}。

4 Ray Trace

现在我们把黑洞放在 (0,0,0) 处，摄像机放在 camera_pos 处，对准 camera_focus。现对到达摄像机的光线进行反向追踪，由于光路可逆，我们可以认为光线从相机射出，到达吸积盘。现在、黑洞、摄像机，光线矢量可以确定一个平面，光线的轨迹可以由前文给出的公式得到。

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{3}{2}u^2 - u$$

这里需要注意终止条件。当光线穿过吸积盘时，说明光线可以从吸积盘到达摄像机，标记白色。当光线进入视界或者距离中心距离过远或时间过长时，认为光线不可以从吸积盘到达摄像机，标记黑色。对图片每一个像素进行如上过程，得到最终吸积盘图像。

5 Camera

现在我们确定每一个像素对应的光线矢量，对于每一个像素点，可以如下图计算出其对应的光线矢量与相机朝向的夹角，故可确定光线矢量。

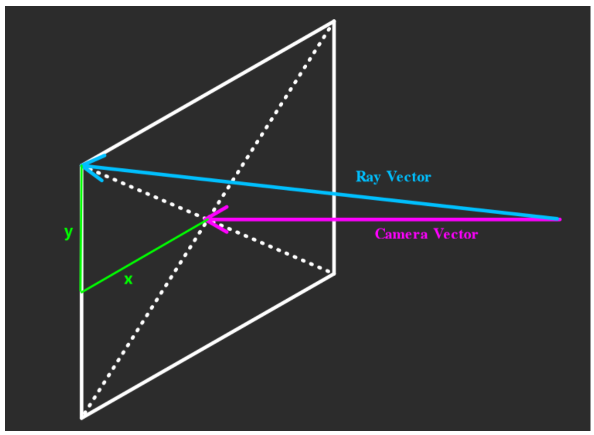


图 1: Camera