ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγικές έννοιες στις στατιστικές θεωρίες των πιθανοτήτων και των στοχαστικών διεργασιών.

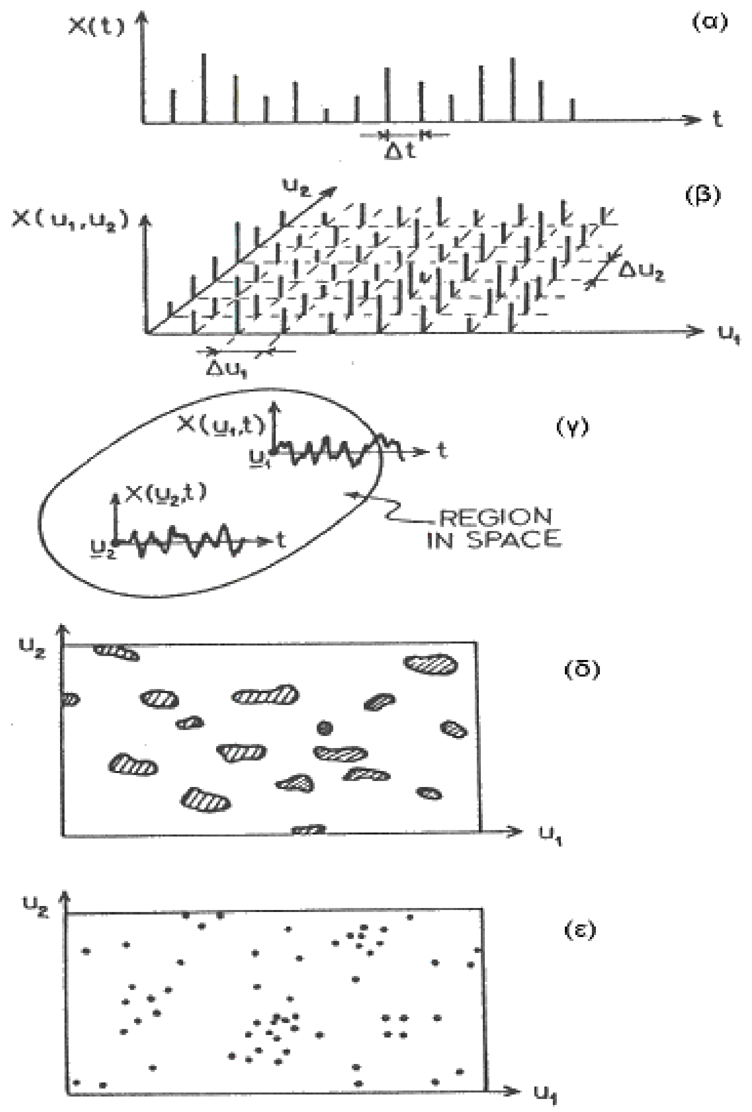
2.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται οι βασικές ιδέες και αρχές της θεωρίας πιθανοτήτων και στοχαστικών διεργασιών, που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των εφαρμογών της παρούσας διατριβής. Αν και υπάρχουν πολλά βιβλία στα προαναφερόμενα πεδία [30, 31, 32, 33, 34], εδώ επιχειρείται μία συλλογή των βασικών ιδεών και αρχών με ένα απλοποιημένο τρόπο και χωρίς πολλές μαθηματικές λεπτομέρειες, χωρίς αυτό να γίνεται εις βάρος της σαφήνειας της θεωρίας, με σκοπό την ευκολότερη κατανόηση και από τους αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτά τα πεδία.

Έστω ιδεατό πείραμα, όπου με μία συγκεκριμένη πράξη μέτρησης συλλέγεται η τιμή μιας συγκεκριμένης μεταβλητής x. Η μεταβλητή x ονομάζεται τυχαία εάν η τιμή της σε κάθε μέτρηση δεν μπορεί να προβλεφθεί (π.χ. εξαιτίας της απροσδιοριστίας των αρχικών συνθηκών ή κάποιων αγνώστων παραγόντων). Επαναλαμβάνοντας το πείραμα Ν φορές σε πανομοιότυπα συστήματα προκύπτουν Ν τιμές της x, έστω

$$x_1, x_2, x_3, ...x_N . \qquad (2.2.1)$$

Οι αριθμοί x_N μπορούν να έχουν είτε διακριτό είτε συνεχές φάσμα. Στην Εικόνα 2.1.1 που ακολουθεί, φαίνονται μερικά παραδείγματα παρατήρησης τυχαίων μεταβλητών στο χρόνο και στο χώρο που παρουσιάζουν διακριτό ή συνεχές φάσμα. Τα αντίστοιχα τυχαία πεδία (όπως ονομάζονται τα σύνολα τιμών που προκύπτουν από το πείραμα) διακρίνονται σε (Εικ. 2.1.1) α) τυχαίες χρονοσειρές, όταν η παρατήρηση γίνεται στο χρόνο β) τυχαίες διεργασίες πλέγματος, όταν η παρατήρηση γίνεται πάνω στους κόμβους ενός πλέγματος γ) συνεχείς τυχαίες συναρτήσεις, όταν η παρατήρηση γίνεται σε όλα τα σημεία ενός ή περισσοτέρων αξόνων και/ή στο χρόνο δ) τυχαία διαμέριση του χώρου, όταν η παρατήρηση γίνεται σε κάθε σημείο του χώρου και ε) τυχαία διεργασία σημείου, όταν η παρατήρηση αναφέρεται σε μορφογένεση σημειακών συστημάτων στο χώρο.



Εικόνα 1.2.1. Παραδείγματα παρατήρησης τυχαίων μεταβλητών: α) τυχαίες χρονοσειρές, β) τυχαίες διεργασίες πλέγματος, γ) συνεχείς τυχαίες συναρτήσεις, δ) τυχαία διαμέριση του χώρου και ε) τυχαία διεργασία σημείου.

2.2. Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων

Η βασική αρχή της θεωρίας των πιθανοτήτων είναι ότι αν και η πρόβλεψη μιας συγκεκριμένης τιμής του x δεν είναι δυνατή, ωστόσο υπάρχουν κάποιοι μέση όροι για τα N συστήματα (ensemble averages), οι οποίοι μπορούν να προβλεφθούν.

- *Εργοδικότητα*

Έστω $N \to \infty$ πειράματα όχι διαδοχικά σε $N \to \infty$ ολόιδια συστήματα αλλά σε ένα μόνο από αυτά. Είναι προφανές ότι με αυτές τις μετρήσεις μπορούν και πάλι να υπολογιστούν μέση όροι για το μέγεθος x. Υπάρχει μία μεγάλη κλάση συστημάτων για την οποία οι παραπάνω μέση όροι όπως υπολογίζονται για N ολόιδια συστήματα είναι ακριβώς οι ίδιοι με τους μέσους όρους που βρέθηκαν, με πειράματα μόνο σε ένα σύστημα. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται εργοδικά. Με άλλα λόγια, η στατιστική συμπεριφορά μιας κλάσης ομοίων συστημάτων μπορεί να είναι γνωστή, κάνοντας πειράματα μόνο σε ένα από αυτά.

- *Πυκνότητα πιθανότητας και στατιστικές ροπές*

Ο απλούστερος μέσος όρος είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής x,

$$\langle x \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_N)\,. \qquad (2.2.2)$$

Ο ορισμός γενικεύεται για μία οποιαδήποτε συνάρτηση f(x) της τυχαίας μεταβλητής x,

$$\langle f(x) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(f(x)_1 + f(x_2) + f(x_3) + \dots\dots + f(x_N))\,. \qquad (2.2.3)$$

Στην έκφραση (2.2.2), είναι πολύ πιθανόν μία συγκεκριμένη τιμή x_i να εμφανιστεί περισσότερες από μία φορές, έστω p_i φορές. Στη γενικότερη περίπτωση η (2.2.2) αναδιατάσσεται ως εξής (έστω i οι διαφορετικές τιμές της x),

$$\langle x \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + ...+ x_N) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ...+ p_ix_i). \quad (2.2.4)$$

Στην περίπτωση που οι αριθμοί έχουν συνεχές φάσμα η προηγούμενη σχέση γενικεύεται:

$$\langle x \rangle = \int xp(x)dx, \qquad \int p(x)dx = 1. \quad (2.2.5)$$

Η συνάρτηση p(x) ονομάζεται συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας ή συνάρτηση κατανομής και εξ' ορισμού είναι το μέτρο της πιθανότητας να βρεθεί η τυχαία μεταβλητή x στο διάστημα (x, x+dx) κατά την πραγματοποίηση ενός μοναδικού πειράματος.
Τα παραπάνω γενικεύονται για τον υπολογισμό μέσων όρων ανώτερης τάξης (ή ανώτερων στατιστικών ροπών),

$$\langle x^n \rangle = \int x^n p(x)dx, \quad (2.2.6)$$

ενώ για οποιαδήποτε συνάρτηση f(x) μπορεί να γραφεί,

$$\langle f^n(x) \rangle = \int f^n(x)p(x)dx. \quad (2.2.7)$$

- *Διακύμανση (Variance), τυπική απόκλιση και συντελεστής μεταβολής*

Εάν στην παραπάνω σχέση γίνει η αντικατάσταση, $f(x) = (x - \langle x \rangle)$, τότε προκύπτουν οι κεντρικές στατιστικές ροπές (central moments). Η κεντρική ροπή πρώτης τάξης είναι μηδέν ενώ η δεύτερης τάξης είναι εξ' ορισμού η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής x,

$$\mathrm{Var}[x] = \int (x - \langle x \rangle)^2 p(x)dx. \quad (2.2.8)$$

Η τυπική απόκλιση σ^2 της τυχαίας μεταβλητής x ορίζεται από την σχέση,

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[x]. \tag{2.2.9}$$

Όταν $\langle x \rangle \equiv m \neq 0$, μπορεί να οριστεί ο συντελεστής μεταβολής (coefficient of variation),

$$V \equiv \frac{\sigma}{m}, \tag{2.2.10}$$

ο οποίος είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας της τυχαίας μεταβλητής x.

- *Συντελεστές ασυμμετρότητας και κυρτότητας*

Για την πληρότητα της παρούσης σύντομης εισαγωγής αναφέρονται και οι συντελεστές ασυμμετρότητας γ_1 και κυρτότητας γ_2 (coefficient of skewness, coefficient of kurtosis) οι οποίοι ορίζονται από την τρίτης και τετάρτης τάξης κεντρικές ροπές αντίστοιχα,

$$\gamma_1 = \frac{\langle (x-m)^3 \rangle}{\sigma^3}, \quad \gamma_2 = \frac{\langle (x-m)^4 \rangle}{\sigma^4}. \tag{2.2.11}$$

- *Ομογένεια*

Έστω συνεχές φάσμα τιμών της τυχαίας μεταβλητής x, x = x(t). Όπως φαίνεται από τους παραπάνω ορισμούς οι στατιστικές ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής x = x(t) στη γενικότερη περίπτωση εξαρτώνται από τη θέση t,

$$\langle x \rangle = m(t), \qquad \mathrm{Var}[x] = \langle (x-m)^2 \rangle = \sigma^2(t). \tag{2.2.12}$$

Εξ’ ορισμού, όταν οι στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας μεταβλητής x δεν εξαρτώνται από την θέση t, η τυχαία μεταβλητή x ονομάζεται ομογενής. Δηλαδή,

$$\langle x \rangle = m, \qquad \mathrm{Var}[x] = \langle (x-m)^2 \rangle = \sigma^2. \tag{2.2.13}$$

- *Συναρτήσεις συσχέτισης (Correlation functions)*

Στη γενικότερη περίπτωση, όπου οι τιμές $x_1, x_2, x_3, ...x_N$ λαμβάνονται σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές $t_1, t_2, t_3, ...t_N$, η τιμή της x_i επηρεάζεται από την τιμή της x_j όπου π.χ. $t_i > t_j$. Δηλαδή, υπάρχει επίδραση των τιμών προηγούμενων πραγματοποιήσεων, στις τιμές των επόμενων. Μέτρο της παραπάνω πληροφορίας είναι η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης (autocovariance) $C(t_i, t_j)$,

$$C(t_i, t_j) = \left\langle (x_i - \langle x_i \rangle) \cdot (x_j - \langle x_j \rangle) \right\rangle. \qquad (2.2.14)$$

Τα παραπάνω γενικεύονται και για την περίπτωση συσχέτισης δύο διαφορετικών τυχαίων μεταβλητών x, x'. Μέτρο αυτής της πληροφορίας είναι η συνάρτηση συνδιακύμανσης (covariance)

$$C(t_i, t_j) = \left\langle (x_i - \langle x_i \rangle) \cdot (x'_j - \langle x'_j \rangle) \right\rangle. \qquad (2.2.15)$$

Κατά αναλογία η συνάρτηση,

$$C(t_i, t_j) = \langle x_i \cdot x_j \rangle, \qquad (2.2.16)$$

ονομάζεται συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) και η

$$C(t_i, t_j) = \langle x_i \cdot x'_j \rangle, \qquad (2.2.17)$$

ονομάζεται συνάρτηση συσχέτισης (correlation function). Με βάση τα παραπάνω ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης (coefficient of correlation)

$$\rho(t_i, t_j) = \frac{\left\langle (x_i - \langle x_i \rangle) \cdot (x'_j - \langle x'_j \rangle) \right\rangle}{\sigma\sigma'}. \qquad (2.2.18)$$

Από τον ορισμό παρατηρείται ότι $|\rho(t_i, t_j)| \le 1$. Οι δύο τυχαίες μεταβλητές x, x' ονομάζονται τέλεια ασυσχέτιστες εάν $\rho(t_i, t_j) = 0$ για κάθε t_i, t_j και τέλεια συσχετισμένες (θετικά ή αρνητικά) εάν $\rho(t_i, t_j) = \pm 1$.

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι μέτρο του βαθμού της γραμμικής εξάρτησης.

Πράγματι, θεωρώντας για τις τυχαίες μεταβλητές την εξάρτηση $x' = ax + b$, τότε με εφαρμογή των ορισμών,

$$\rho(x, x') = \begin{matrix} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{matrix}. \qquad (2.2.19)$$

Δηλαδή, εάν υπάρχει μία γραμμική σχέση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών, αυτές θα είναι τέλεια συσχετιζόμενες, είτε θετικά είτε αρνητικά.
Για ομογενείς (σύμφωνα με τον ορισμό) τυχαίες συναρτήσεις, ισχύει

$$C(t_i, t_j) = C(\tau), \qquad \tau = t_j - t_i. \qquad (2.2.20)$$

Οι τυχαίες συναρτήσεις που δεν είναι ομογενείς σύμφωνα με τον ορισμό αλλά για τις οποίες η (2.2.20) ισχύει, ονομάζονται ομογενείς με την ευρύτερη έννοια.

- *Παράγωγοι*

Η παραγώγιση μίας τυχαίας μεταβλητής x(t) είναι ένας γραμμικός τελεστής, το αποτέλεσμα του οποίου είναι η παράγωγος $x'(t)$ της τυχαίας μεταβλητής

$$L[x(t)] = x'(t). \qquad (2.2.21)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία των γραμμικών τελεστών για τυχαία πεδία,

$$C_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 C_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \qquad (2.2.22)$$

Για ομογενείς (και με την ευρύτερη έννοια) συναρτήσεις η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$C_{x'x'}(t_1, t_2) = C_{x'x'}(\tau) = -\frac{\partial^2 C_{xx}(\tau)}{\partial \tau}. \qquad (2.2.23)$$

- Ανάπτυγμα γύρω από τη μέση τιμή

Σύμφωνα με την (2.2.7), η μέση τιμή $\langle f(x) \rangle$ της συνάρτησης f(x) της τυχαίας μεταβλητής x μπορεί να υπολογισθεί όταν είναι γνωστή η συνάρτηση κατανομής p(x). Ωστόσο, εάν η τυχαία μεταβλητή x παίρνει τιμές (κυρίως) γύρω από τη μέση τιμή της, τότε η $\langle f(x) \rangle$ μπορεί να προσδιοριστεί σε πολύ καλή προσέγγιση μόνο με την βοήθεια των στατιστικών ροπών της x, χωρίς την ακριβή γνώση της p(x). Πράγματι, αναπτύσσοντας κατά Taylor,

$$f(x) \approx f(m) + f'(m)(x-m) + f''(m)\frac{(x-m)^2}{2} + ...+ f^{(n)}(m)\frac{(x-m)^n}{n!}, \quad (2.2.24)$$

και αντικαθιστώντας στην (2.2.7), προκύπτει η κατά Taylor ανάπτυξη της τυχαίας συνάρτησης f(x) γύρω από τη μέση τιμή της,

$$f(x) \approx f(m) + f'(m)\langle (x-m) \rangle + f''(m)\frac{\langle (x-m)^2 \rangle}{2} + ...+ f^{(n)}(m)\frac{\langle (x-m)^n \rangle}{n!}, \quad (2.2.25)$$

ή (σε καλή προσέγγιση για ομαλές τυχαίες συναρτήσεις)

$$f(x) \approx f(m) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}[x]f''(m). \quad (2.2.26)$$

2.3 *Στοιχεία στοχαστικών διεργασιών*

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται οι βασικές φυσικές αρχές των στοχαστικών διεργασιών καθώς και το μαθηματικό υπόβαθρο με το οποίο μπορούν αυτές να μελετηθούν. Έστω ένα μακροσκοπικό σύστημα η εξέλιξη του οποίου μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία εξίσωση της μορφής

$$\dot{x}(r,t) = f_\lambda\left(x(r,t)\right), \tag{2.3.1}$$

όπου x είναι μία καταστατική μεταβλητή που καθορίζει την κατάσταση του συστήματος, η παράμετρος λ (παράμετρος ελέγχου) αντιπροσωπεύει μία εξωτερική παράμετρο η οποία συνυπολογίζει την αλληλεπίδραση του συστήματος με τον περιβάλλον του και $f_\lambda\left(x(r,t)\right)$ μία συναρτησιακή σχέση που εκφράζει την τοπική εξέλιξη της x στο χρόνο t και στο χώρο r.

- *Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις*

Στη ντετερμινιστική περίπτωση, και για μία μεγάλη κλάση φυσικών συστημάτων για τα οποία η επίδραση του περιβάλλοντος εμφανίζεται γραμμικά, η $f_\lambda\left(x(r,t)\right)$, γράφεται

$$f_\lambda(x) = h(x) + \lambda g(x). \tag{2.3.2}$$

Στην πραγματικότητα ωστόσο, όλα τα φυσικά συστήματα παρουσιάζουν μια συνεχή και τυχαία αλληλεπίδραση με το περιβάλλον τους. Στην περίπτωση αυτή, η παράμετρος ελέγχου λ_t που μοντελοποιεί την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον πρέπει να θεωρηθεί σαν τυχαία μεταβλητή. Γενικά,

$$\lambda_t = \lambda + \delta\lambda. \tag{2.3.3}$$

Αντικαθιστώντας στην συνήθη διαφορική εξίσωση (2.3.1) προκύπτει

$$dx / dt = [h(x) + \lambda g(x)] + g(x)\delta\lambda. \tag{2.3.4}$$

Ενώ το πρώτο μέρος στο δεξιό μέλος της (2.3.4) μπορεί να ολοκληρωθεί με το συνήθη τρόπο, το δεύτερο μέρος είναι μία ισχυρά ανώμαλη συνάρτηση και δεν μπορεί να ολοκληρωθεί με τον συνήθη τρόπο. Η εξίσωση (2.3.4) αποτελεί μία στοχαστική διαφορική εξίσωση και η καταστατική μεταβλητή x είναι μία τυχαία μεταβλητή.

- *Προσέγγιση λευκού θορύβου*

Στις πρακτικές εφαρμογές γίνονται συγκεκριμένες υποθέσεις σχετικά με το τυχαία διακυμαινόμενο μέρος δλ της παραμέτρου ελέγχου λ,

$$\langle \delta\lambda \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \delta\lambda(0) \cdot \delta\lambda(t) \rangle = \delta(t) . \qquad (2.3.5)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί αποτελούν την προσέγγιση λευκού θορύβου αφού υπό αυτή τη μορφή η διακύμανση δλ εμπεριέχει εξίσου όλες τις συχνότητες στο φάσμα της. Πράγματι, η φασματική πυκνότητα S(ω) της διεργασίας που περιγράφεται από την (2.3.5) είναι (παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης)

$$S(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\sigma\delta(t)dt = 2\sigma , \qquad (2.3.6)$$

είναι δηλαδή ανεξάρτητη από την συχνότητα ω. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβολές δλ(t) δεν έχουν προτιμητέα τάση, ή ισοδύναμα οτι το σύστημα δεν έχει καθόλου μνήμη. Εάν στη γενικότερη περίπτωση η φασματική πυκνότητα εξαρτάται από την συχνότητα ω, τότε ο θόρυβος του συστήματος ονομάζεται έγχρωμος (colored).

- *Wiener διεργασία*

Εξάλλου, η στοχαστική διεργασία w με τις ιδιότητες

$$\langle \dot{w} \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \dot{w}(0) \cdot \dot{w}(t) \rangle = \sigma\delta(t) , \qquad (2.3.7)$$

είναι γνωστή σαν Wiener διεργασία και μακροσκοπικά αντιστοιχεί στην καθαρή διάχυση χωρίς όρο μετατόπισης.

- *Εξισώσεις τύπου Langevin*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω η (2.3.4) γράφεται,

$$dx = [h(x) + \lambda g(x)]dt + \sigma g(x)dw\,. \qquad (2.3.8)$$

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής ονομάζονται εξισώσεις τύπου Langevin. Η ολοκλήρωση αυτής της στοχαστικής (τύπου Langevin) εξίσωσης που προκύπτει μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους: ολοκληρώνοντας κατά Ito ή ολοκληρώνοντας κατά Stratonovich.

- *Προσθετικός και Πολλαπλασιαστικός θόρυβος*

Ανάλογα με την συνάρτηση g(x) διακρίνονται δύο γενικές κλάσεις όρων θορύβου: όταν η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή, g(x)=ct, ο θόρυβος ονομάζεται προσθετικός (additive). Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται πολλαπλασιαστικός (multiplicative). Όπως πρόκειται να δειχτεί παρακάτω, συστήματα με προσθετικό θόρυβο είναι πιο εύκολα να μελετηθούν.

- *Εξίσωση Fokker-Planck*

Και στις δύο περιπτώσεις το τελικό αποτέλεσμα είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση, η οποία ονομάζεται εξίσωση Fokker-Planck. Αυτή η εξίσωση γράφεται για την εξέλιξη της πυκνότητας πιθανότητας P(x,t) και εξ ορισμού εκφράζει την πιθανότητα να βρεθεί η δυναμική μεταβλητή x στο διάστημα (x, x+dx) τη χρονική στιγμή t. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι (περιοριζόμαστε μόνο στον φορμαλισμό Stratonovich),

$$\partial_t P(x,t) = -\partial_X \left[f_\lambda(x) + \frac{\sigma^2}{2} g'(x) g(x) \right] P(x,t) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) P(x,t) . \quad (2.3.9)$$

Στην πραγματικότητα η εξίσωση Fokker-Planck γράφεται για την μεταβατική πυκνότητα πιθανότητας. Επειδή όμως στις εφαρμογές η αρχική συνάρτηση κατανομής είναι η συνάρτηση δέλτα, οι δύο συναρτήσεις είναι ισοδύναμες.

- *Μόνιμη κατάσταση*

Τις περισσότερες φορές είναι αρκετά δύσκολο να βρεθούν αναλυτικές χρονοεξαρτόμενες λύσεις των εξισώσεων Fokker-Planck για την πυκνότητα πιθανότητας. Αντίθετα, μπορούν να βρεθούν λύσεις για την μόνιμη κατάσταση, πληροφορία που στην πράξη είναι ιδιαίτερα σημαντική. Η λύση της εξίσωσης Fokker-Planck για την μόνιμη κατάσταση γράφεται

$$P_S(x) = \frac{N}{g(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f(u)}{g^2(u)} du \right), \quad (2.3.10)$$

όπου N είναι μία σταθερά κανονικοποίησης έτσι ώστε $\int P_S(x) du = 1$.

Σαν παραδείγματα εξισώσεων Fokker-Planck όπου μπορούν να βρεθούν αναλυτικά χρονοεξαρτώμενες λύσεις αναφέρονται παρακάτω δύο πολύ γνωστές διεργασίες, η διεργασία Wiener και η διεργασία Ornstein-Uhlenbeck.

- *Χρονοεξαρτώμενες λύσεις για την Wiener διεργασία*

Η εξίσωση Langevin της μορφής

$$dX = \sigma d\dot{W} , \quad (2.3.11)$$

αντιστοιχεί στην Wiener διεργασία. Η αντίστοιχη Fokker-Planck εξίσωση γράφεται

$$\partial_t P(x,t) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} P(x,t) . \quad (2.3.12)$$

Οι αναλυτικές χρονοεξαρτώμενες λύσεις είναι της μορφής,

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right]. \qquad (2.3.13)$$

- *Χρονοεξαρτώμενες λύσεις για την Ornstein-Uhlenbeck διεργασία*

Η εξίσωση Langevin της μορφής

$$dX = -x + \sigma d\dot{W}, \qquad (2.3.14)$$

αντιστοιχεί στην Ornstein-Uhlenbeck διεργασία. Η αντίστοιχη Fokker-Planck εξίσωση γράφεται

$$\partial_t P(x,t) = -\partial_x [xP(x,t)] + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx} P(x,t). \qquad (2.3.15)$$

Οι αναλυτικές χρονοεξαρτώμενες λύσεις είναι της μορφής,

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2(1-e^{2t})}} \exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2(1-e^{2t})}\right]. \qquad (2.3.16)$$

- *Αναγωγή του πολλαπλασιαστικού θορύβου σε προσθετικό*

Έστω η εξίσωση Langevin της μορφής,

$$\partial_t \rho = F(\rho) + Q_0 G(\rho)\dot{w}, \qquad (2.3.17)$$

όπου το πλάτος του θορύβου καθορίζεται και από την καταστατική μεταβλητή, δηλαδή ο θόρυβος του θορύβου είναι πολλαπλασιαστικός. Όπως ήδη τονίστηκε, υπό αυτή την μορφή είναι δύσκολη η εύρεση αναλυτικών χρονοεξαρτώμενων λύσεων. Αντίθετα, πραγματοποιώντας το μη γραμμικό μετασχηματισμό

$$u(\rho,\rho') = \int_{\rho'}^{\rho} [G(\tilde{\rho})]^{-1} d\tilde{\rho}, \qquad (2.3.18)$$

η (2.3.17) καθίσταται μία διαφορική εξίσωση τύπου Langevin όπου ο όρος θορύβου έχει αναχθεί σε προσθετικό θόρυβο, δηλαδή

$$\partial_t u = \left(F(u)/G(u)\right) + Q_0 \dot{w} . \qquad (2.3.19)$$

- *Απεικόνιση στις στοχαστικές διαδικασίες Wiener και Ornstein-Uhlenbeck*

Εξαιτίας των διαφορετικών τοπικών πραγματοποιήσεων της στοχαστικής διαδικασίας $\dot{w}$, η εξέλιξη της εσωτερικής μεταβλητής ρ, και συνεπώς και της u, λαμβάνει χώρα με διαφορετικό τρόπο σε διαφορετικούς στοιχειώδεις όγκους. Για τον υπολογισμό της πυκνότητας πιθανότητας $p(\rho, t)$ πρώτα θεωρείται η πυκνότητα πιθανότητας $p(u, t)$. Από την εξίσωση Langevin (2.3.19), η αντίστοιχη Fokker-Planck εξίσωση για την $p(u, t)$ γράφεται,

$$\partial_t p(u,t) = -\partial_u \left[\frac{F(u)}{G(u)} p(u,t) \right] c + \frac{Q_0^2}{2} \partial_{uu}^2 p(u,t) . \qquad (2.3.20)$$

Αυτή η εξίσωση έχει αναλυτικές χρονοεξαρτώμενες λύσεις για ακριβώς δύο περιπτώσεις: $F(u)/G(u) = 1$ ή $F(u)/G(u) = u$. (Σημειώνεται ότι οποιαδήποτε σταθερά αναλογίας μπορεί να συμπεριληφθεί στην έκφραση του Q_0^2). Οι δύο αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν στις γνωστές στοχαστικές διαδικασίες Wiener και Ornstein-Uhlenbeck.