第五章：线性时不变系统的变换分析

5.0 引言

一个LTI系统由单位脉冲响应 $h[n]$表征，给定输入 $x[n]$，其输出 $y[n]$ 的时域、频域、z变换域表示为

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n]h[n-k]$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

其中

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$

系统频率响应

$$H(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

系统(传递)函数

当复变量 z 代以复变量 $e^{j\omega}$，则z变换退化为傅里叶变换

傅里叶变换是在一个线性频率轴（z平面的单位圆）上对信号分解

z变换是更为广泛信号的傅里叶变换的推广形式。

5.1 LTI系统的频率响应

一个频率响应为 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 的LTI系统输入和输出的傅里叶变换关系为

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

系统的**输入与输出**的幅度和相位存在如下关系

$$\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cdot\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

$$\angle Y\left(e^{j\omega}\right)=\angle H\left(e^{j\omega}\right)+\angle X\left(e^{j\omega}\right)$$

其中， $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 为系统的**幅度响应**或**增益**

$\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ 为系统的**相位响应**或**相移**

若系统的**幅度/相位响应**导致信号以**不期望的方式**变化，则该情况下系统对信号的影响称为**幅度/相位失真**。

5.1.1 理想频率选择性滤波器

系统幅度响应 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 体现了系统对输入的频率分量抑制特性，系统对不同频率分量的抑制特性即为频率选择性。

理想低通滤波器的频率响应和单位脉冲响应为

$$H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases} \quad \text{和} \quad h_{LP}[n]=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty<n<\infty$$

抑制高频分量!

理想高通滤波器的频率响应和单位脉冲响应为

$$H_{HP}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}0, & |\omega|<\omega_c \\ 1, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases} \quad \text{和} \quad h_{LP}[n]=\delta[n]-\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty<n<\infty$$

抑制低频分量!

5.1.2 相位失真及延时

◆线性相位系统的相位响应特性

具有线性相位的理想低通滤波器的单位脉冲响应和频率响应分别为

$$h_{LP}[n]=\frac{\sin\omega_c(n-n_d)}{\pi(n-n_d)},\quad -\infty<n<\infty$$

和

$$H_{LP}(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega n_d}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

对于线性相位系统，单位脉冲响应的时移（n_d）导致频率响应中的相位响应随频率ω线性变化。

5.1.2 相位失真及延时

◆系统对窄带信号的相位响应特性

例：频响为 $H(e^{j\omega})$ 的系统对窄带信号 $x[n]=s[n]\cos(\omega_0 n)$ 的输出

假设 $X(e^{j\omega})$ 仅在 $\omega=\omega_0$ 附近为非零，则系统在 $\omega=\omega_0$ 窄带范围内对信号相位的影响（系统相位响应）可近似表示为

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_d$$

群时延为n_d

对于窄带信号，该系统近似为线性相位系统!

群延迟表征系统相位非线性程度或对不同频率分量的相位影响

频谱(能量) 集中在 $\omega=\omega_0$ 附近的窄带信号 $x[n]$的包络 $s[n]$ 的群延迟由系统相位响应 $\angle H(e^{j\omega})$ 在$\omega=\omega_0$ 处的斜率的负值给出。

可以证明，系统对$x[n]$的响应可近似为

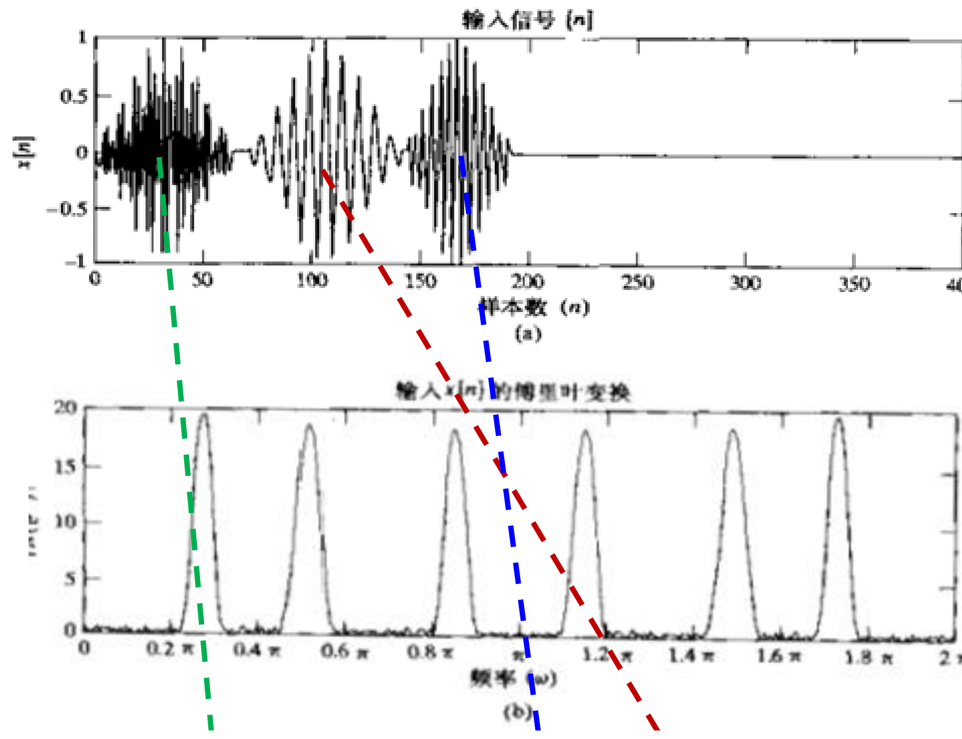
$$y[n] \approx \left|H(e^{j\omega_0})\right| s[n-n_d]\cos(\omega_0(n-n_d)-\phi_0)$$

5.1.2 相位失真及延时

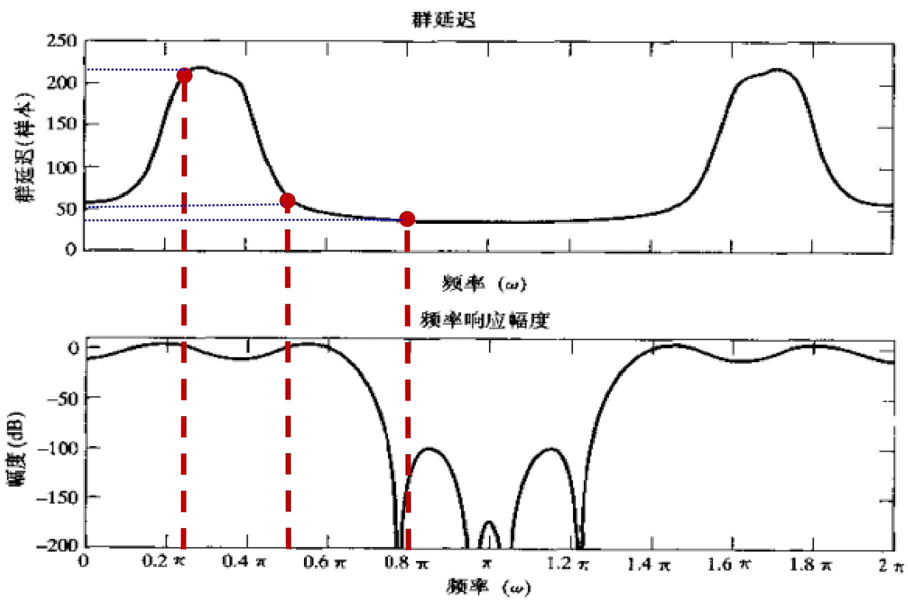
例5.1 衰减和群时延影响

假设：输入信号由三个顺序出现的窄带脉冲组成，频率分别为：

$\omega = 0.85\pi$ ，$\omega = 0.25\pi$ 和 $\omega = 0.5\pi$ 。



系统群时延与频响



5.2 用线性常系数差分方程表征系统的系统函数

系统的输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

等式两边进行z变换

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

系统函数表示为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

差分方程与系统函数存在关系：
差分方程左边/右边多项式系数与系统函数分母/分子系数相同

5.2.1 稳定性和因果性

◆系统的稳定性

对于稳定系统，其单位脉冲响应必须绝对可加，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

当 $|z|=1$ 时，根据稳定系统条件，可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}|$$

z变换收敛条件

即z变换域系统稳定性条件等效为 $H(z)$ 的ROC包括单位圆。

◆系统的因果性

对于因果系统，其单位脉冲响应 $h[n]$ 必须是一个右边序列。

由z变换ROC性质5，$H(z)$的ROC应位于最外面极点的外面。

5.2.2 逆系统

对于一个系统函数为 $H(z)$ 的LTI系统，其逆系统的系统函数 $H_i(z)$ 与 $H(z)$ 满足条件

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1$$

等效时域和频域条件为

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$H(e^{j\omega})H_i(e^{j\omega}) = 1$$

对于具有如下有理系统函数的系统

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\prod_{k=1}^{M}\left(1 - c_k z^{-1}\right) \Big/ \prod_{k=1}^{N}\left(1 - d_k z^{-1}\right)$$

其逆系统的系统函数可表示为

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)\prod_{k=1}^{N}\left(1 - d_k z^{-1}\right) \Big/ \prod_{k=1}^{M}\left(1 - c_k z^{-1}\right)$$

1) $H_i(z)$ 的极点即为 $H(z)$ 的零点；

5.2.2 逆系统

$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

例5.5：在ROC内有一个零点的系统的逆系统

设系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^{-1}-0.5}{1-0.9z^{-1}},\quad |z|>0.9$

逆系统函数为 $H_i(z)=\dfrac{1-0.9z^{-1}}{z^{-1}-0.5}=\dfrac{-2+1.8z^{-1}}{1-2z^{-1}}$

该逆系统函数的单极点为 $z=2$，从而有2种可能的收敛域：$|z|>2$ 和 $|z|<2$，均与 $H(z)$ 的收敛域 $|z|>0.9$重叠。

因此，两种收敛域对应的 $H_i(z)$均为 $H(z)$ 的有效逆系统。

对应ROC $|z|>2$ 的逆系统单位脉冲响应为

$$h_{i1}[n]=-2(2)^n u[n]+1.8(2)^{n-1}u[n-1]$$

ROC为最外极点外、不含单位圆，因果、非稳定

对应ROC $|z|<2$ 的逆系统单位脉冲响应为

$$h_{i2}[n]=2(2)^n u[-n-1]-1.8(2)^{n-1}u[-n]$$

ROC为最外极点内、含单位圆，稳定、非因果

5.2.2 逆系统

◆最小相位系统

- 如果 $H(z)$ 是零点位于 c_k， $k=1,\cdots,M$ ，的一个因果系统，那么当且仅当其逆系统 $H_i(z)$ 的收敛域为

$$|z| > \max_k |c_k|$$

时，其逆系统（一定）是因果的。

- 如果要求逆系统是稳定的，那么 $H_i(z)$ 的收敛域必须包括单位圆，即必须

$$\max_k |c_k| < 1$$

- 当且仅当 $H(z)$ 的零点和极点都在单位圆内时，稳定因果的LTI系统也有一个稳定因果的逆系统。

零点和极点都在单位圆内的系统为最小相位系统。

5.2.3 有理系统函数的单位脉冲响应

有理系统函数的一般表示式为

$$H(z)=\left(\frac{b_0}{a_0}\right)\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)\Big/\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)$$

任何具有一阶极点的以 z^{-1} 为变量的有理函数都可以表示成

$$H(z)=\sum_{r=0}^{M-N}B_r z^{-r}+\sum_{k=1}^{N}A_k\Big/\left(1-d_k z^{-1}\right)$$

若系统是因果的，系统单位脉冲响应可表示为

$$h[n]=\sum_{r=0}^{M-N}B_r\delta[n-r]+\sum_{k=1}^{N}A_k d_k^n u[n]$$

若 $H(z)$ 至少有1个非零极点，则 $h[n]$ 至少有1项有 $A_k d_k^n u[n]$ 形式，则 $h[n]$ 为无限长响应，该类系统为无限脉冲响应（IIR）系统。

若 $H(z)$ 除 $z=0$ 外，没有任何极点，则 $h[n]$ 仅有 $B_r\delta[n-r]$ 形式，则 $h[n]$ 为有限长响应，该类系统为有限脉冲响应（ FIR）系统。

5.3 有理系统函数的频率响应

对于具有有理系统函数的稳定LTI系统，且其频率响应具有如下形式：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}$$

◆用零极点（因式）形式表示的系统频率响应

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{b_0}{a_0}\right)\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k e^{-j\omega}\right) \Big/ \prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k e^{-j\omega}\right)$$

◆系统的幅度响应

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\frac{b_0}{a_0}\right|\prod_{k=1}^{M}\left|1-c_k e^{-j\omega}\right| \Big/ \prod_{k=1}^{N}\left|1-d_k e^{-j\omega}\right|$$

- 对数幅度响应（系统增益）为

$$20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=20\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right|+\sum_{k=1}^{M}20\log_{10}\left|1-c_k e^{-j\omega}\right|-\sum_{k=1}^{N}20\log_{10}\left|1-d_k e^{-j\omega}\right|$$

◆ 系统输入与输出之间的对数幅度关系可表示为

$$20\log_{10}\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|=20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|+20\log_{10}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

5.3 有理系统函数的频率响应

◆ 任何复数的相位不是唯一的，基于反正切获得的 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 的相位称为主值相位，为

$$ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\arctan\left[H_I\left(e^{j\omega}\right)/H_R\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

$$-\pi < ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]\le \pi$$

◆ 函数 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 的任意相角可用主值相位偏移表示

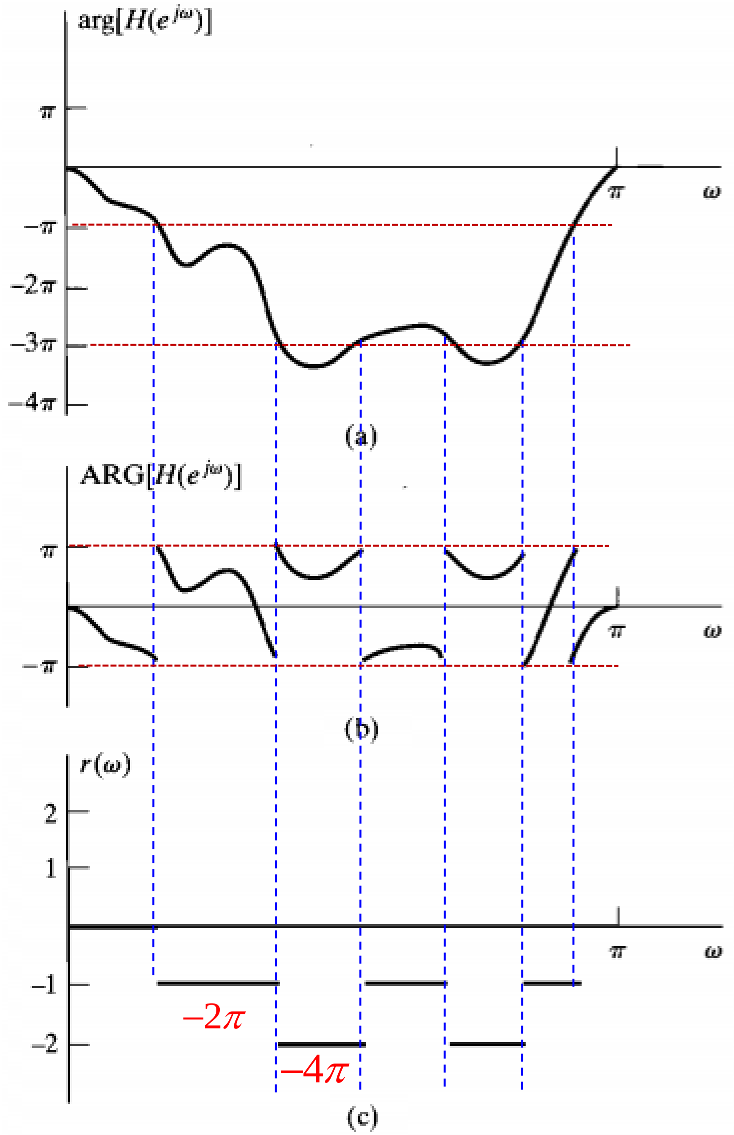
$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]+2\pi r(\omega)$$

其中 $r(\omega)$ 为 ω 的函数，取值为正/负整数

◆ 群时延定义为

$$\tau(\omega)=\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\frac{d}{d\omega}\left\{\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]\right\}$$

其中 $\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]$ 称为 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 的连续相位，可由主值相位增/减整数倍 2π 获得。



◆有理系统函数的相位响应

$$\angle\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\angle\left[\frac{b_0}{a_0}\right]+\sum_{k=1}^{M}\angle\left[1-c_k e^{-j\omega}\right]-\sum_{k=1}^{N}\angle\left[1-d_k e^{-j\omega}\right]$$

- 有理系统函数的主值相位

$$ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=ARG\left[\frac{b_0}{a_0}\right]+\sum_{k=1}^{M}ARG\left[1-c_k e^{-j\omega}\right]-\sum_{k=1}^{N}ARG\left[1-d_k e^{-j\omega}\right]$$

◆ 有理系统函数的群时延

$$\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\left\{\sum_{k=1}^{M}\frac{d}{d\omega}\left(\arg\left[1-c_k e^{-j\omega}\right]\right)-\sum_{k=1}^{N}\frac{d}{d\omega}\left(\arg\left[1-d_k e^{-j\omega}\right]\right)\right\}$$

5.3.1 单个零点或极点的频率响应

◆单一因式 $\left(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right)$ 的频率响应

因式中 r 和 θ 分别为零/极点的幅值和相角

该因式的幅度平方为

$$\left|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|^2=\left(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right)\left(1-re^{-j\theta}e^{j\omega}\right)$$
$$=1+r^2-2r\cos\left(\omega-\theta\right)$$

该因式（分子/分母）的对数幅度为

$$\pm 20\log_{10}\left|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|$$
$$=\pm 10\log_{10}\left[1+r^2-2r\cos\left(\omega-\theta\right)\right]$$

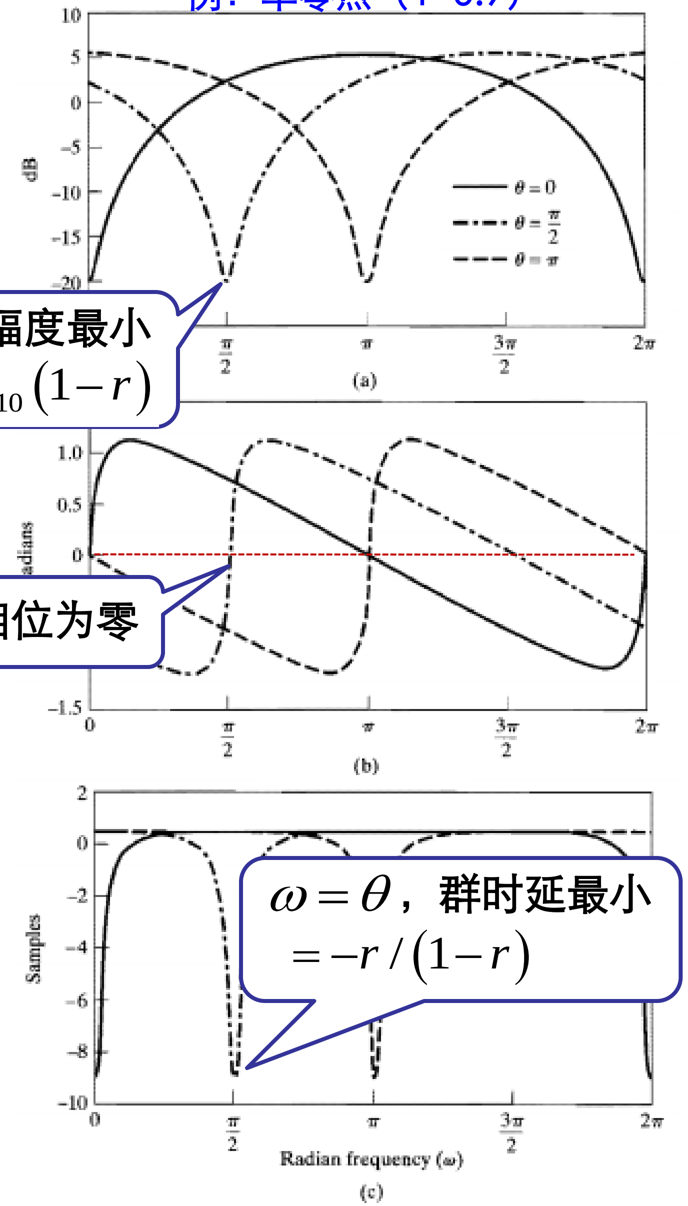
该因式的主值相位为

$$\pm ARG\left[1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right]=\pm\arctan\left[\frac{r\sin\left(\omega-\theta\right)}{1-r\cos\left(\omega-\theta\right)}\right]$$

该因式的群时延为

$$\pm\mathrm{grd}\left[1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right]=\pm\frac{r^2-r\cos\left(\omega-\theta\right)}{1+r^2-2r\cos\left(\omega-\theta\right)}$$

例：单零点（r=0.9）



$\omega=\theta$，幅度最小 $=20\log_{10}\left(1-r\right)$

$\omega=\theta$，相位为零

$\omega=\theta$，群时延最小 $=-r/\left(1-r\right)$

◆单零点频率响应的几何图形表示

- 设一阶系统函数

$$H(z)=\left(1-re^{j\theta}z^{-1}\right)=\left(z-re^{-j\theta}\right)/z,\quad r<1$$

因式有极点 $z=0$ 和零点 $z=re^{j\theta}$。

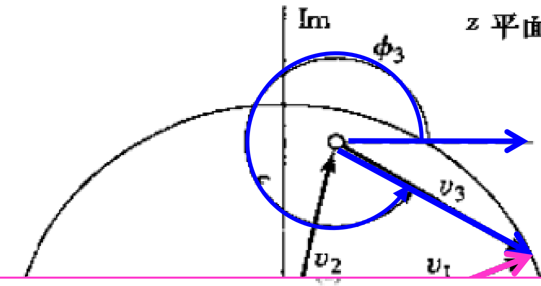
复数 $e^{j\omega}$ ，$re^{j\theta}$ 和 $\left(e^{j\omega}-re^{j\theta}\right)$分别用向量 v_1 ，v_2 和 $v_3=v_1-v_2$ 表示。

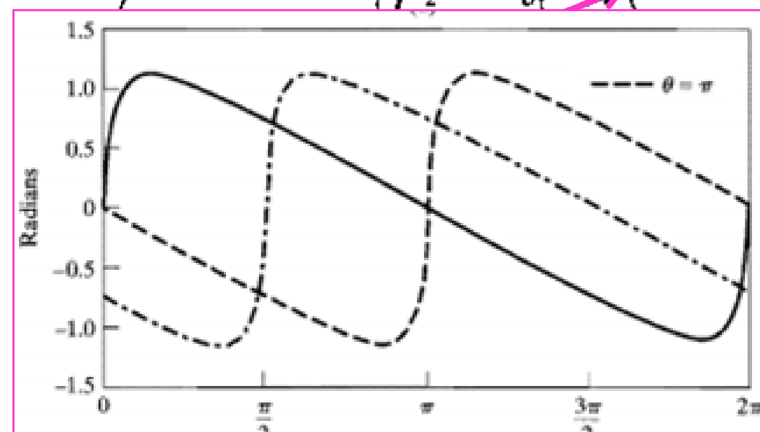
- 单零点系统幅度响应为

$$\left|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|=\left|\frac{e^{j\omega}-re^{j\theta}}{e^{j\omega}}\right|=\frac{|v_3|}{|v_1|}$$

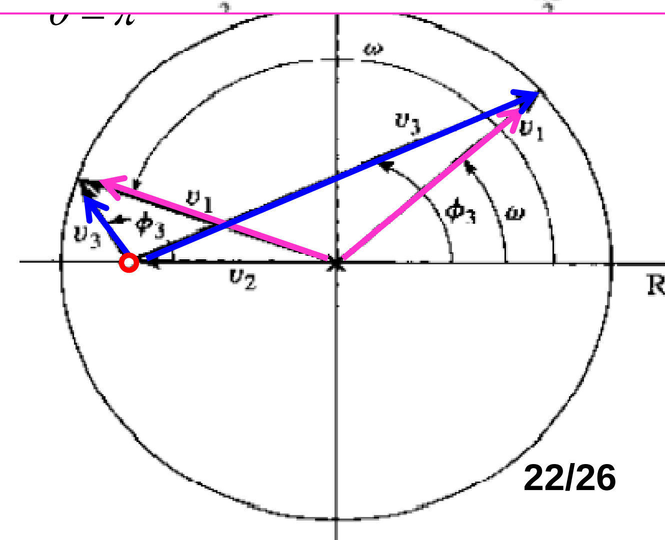
- 单零点系统相位响应为

$$\begin{aligned}\angle\left(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right)&=\angle\left(e^{j\omega}-re^{j\theta}\right)-\angle\left(e^{j\omega}\right)\\&=\angle\left(v_3\right)-\angle\left(v_1\right)\\&=\phi_3-\phi_1=\phi_3-\omega\end{aligned}$$





$\theta=\pi$



5.3.2 多个零点或极点的频率响应

◆二阶IIR系统的频率响应

- 设两阶系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-re^{j\theta}z^{-1}\right)\left(1-re^{-j\theta}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

系统函数有一对极点， $z=re^{j\theta}$ 及其共轭 $z=re^{-j\theta}$；在 $z=0$ 有两阶零点。

由z变换可得系统单位脉冲响应为

$$h[n]=\left\{r^n\sin\left[\theta(\pi+1)\right]/\sin\theta\right\}u[n]$$

系统对数幅度响应为

$$20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=-10\log_{10}\left[1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)\right]-10\log_{10}\left[1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)\right]$$

系统相位响应为

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=-\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]-\arctan\left[\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}\right]$$

系统群时延为

$$\operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}-\frac{r^2-r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}$$

5.3.2 多个零点或极点的频率响应

◆例：二阶IIR系统频率

系统函数为 $H(z)=\frac{}{(1-r}$

其中 $r=0.9$，$\theta=\pi/4$

对数幅度响应 $-10\log_{10}\left[1+r^2-\right.$

$10\log_{10}\left[1+r^2-2\right.$

相位响应 $\angle H\left(e^{j\omega}\right)=-\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]$

群时延

$$\operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\frac{r^2-r\cos(\omega-\pi/4)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\pi/4)}-\frac{r^2-r\cos(\omega+\pi/4)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\pi/4)}$$

$\omega=\pi/4$幅度最大

$=-20\log_{10}(1-r)$

$-10\log_{10}(1+r^2)$

≈ 17.4

$\omega=0$，相位为零

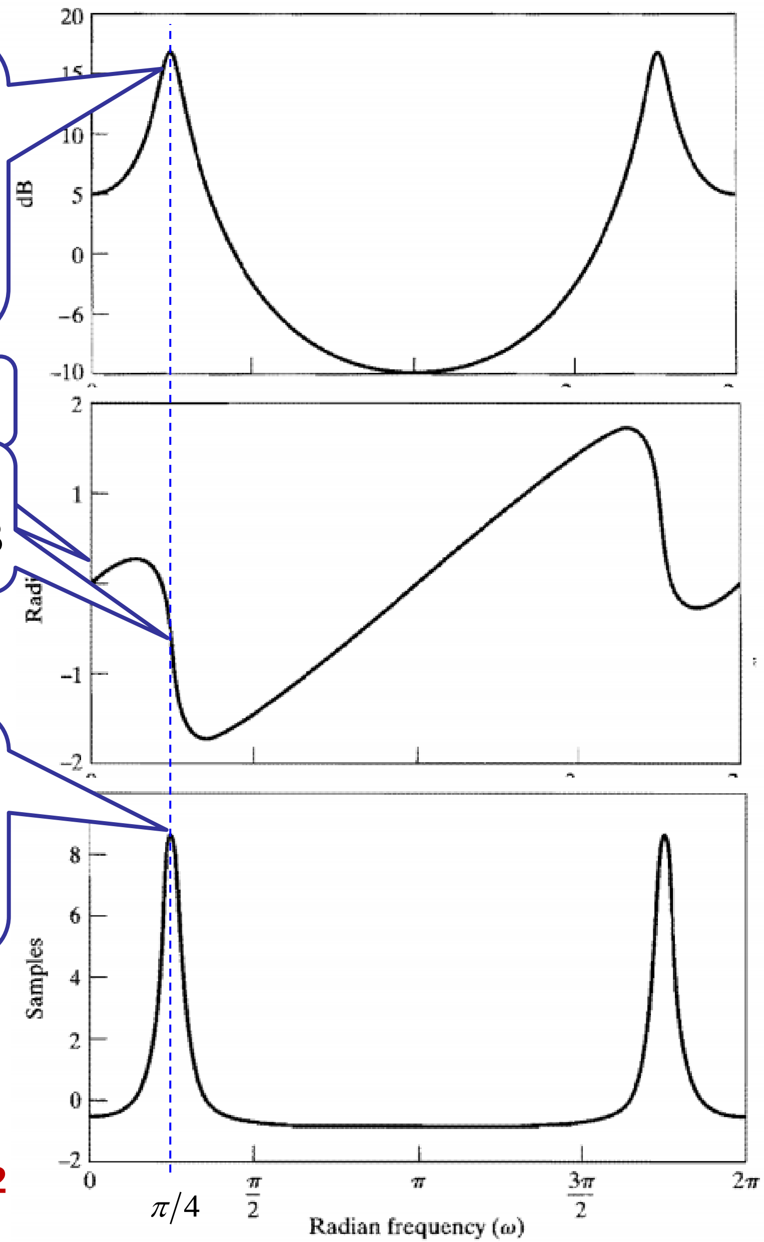
$\omega=\pi/4$，相位为

$=-\arctan(r)\approx -0.73$

$\omega=\pi/4$，群时延最大

$=r/(1-r)-r^2/(1+r^2)$

≈ 8.55

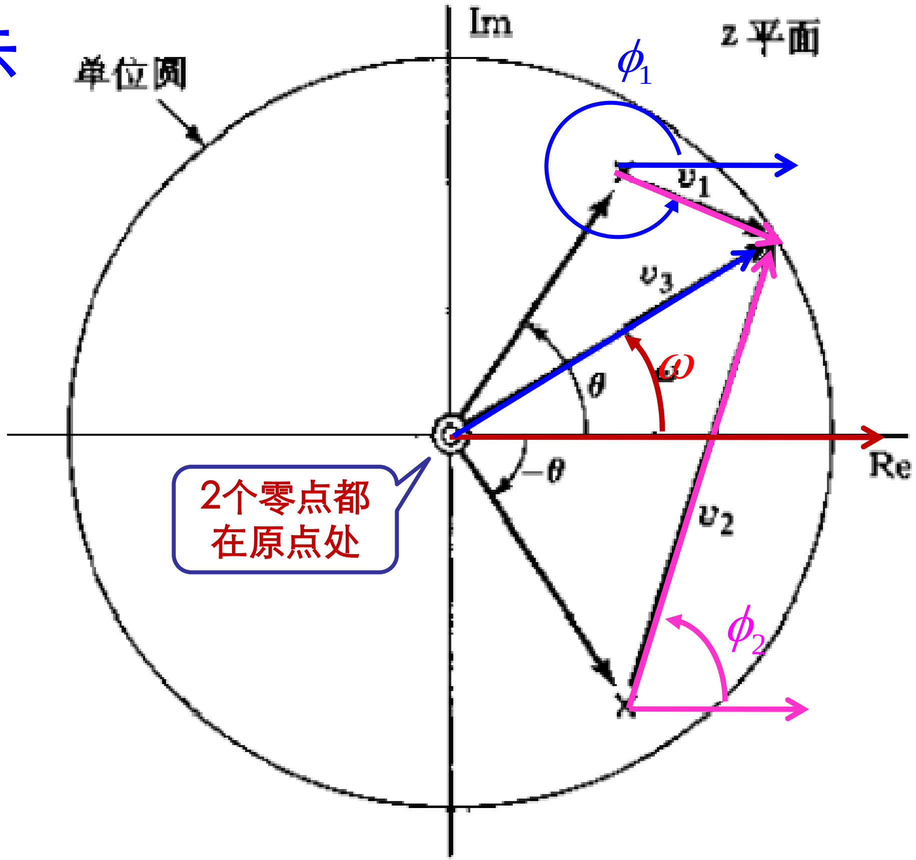


上
Sha

5.3.2 多个零点或极点的频率响应

◆两极点频率响应的几何图形表示

复数 $(e^{j\omega}-re^{j\theta})$，$(e^{j\omega}-re^{-j\theta})$ 和 $e^{j\omega}$ 分别用向量 v_1，v_2 和 v_3 表示。



- 两极点系统幅度响应为

$$\left|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|^{-1}\cdot\left|1-re^{-j\theta}e^{-j\omega}\right|^{-1}$$

$$=\left|\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-re^{j\theta}}\right|\cdot\left|\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-re^{-j\theta}}\right|=\frac{|v_3|}{|v_1|}\cdot\frac{|v_3|}{|v_2|}$$

$$=1/\left(|v_1||v_2|\right)$$

- 两极点系统相位响应为

$$\angle\left\{\left(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right)^{-1}\left(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega}\right)^{-1}\right\}$$

$$=\angle\left(e^{j\omega}\right)-\angle\left(e^{j\omega}-re^{j\theta}\right)+\angle\left(e^{j\omega}\right)-\angle\left(e^{j\omega}-re^{-j\theta}\right)$$

$$=2\angle(v_3)-\angle(v_1)-\angle(v_2)$$

$$=2\omega-\phi_1-\phi_2$$