1. 证：$\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0$ 在 $x\to0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小量.

反证假设 有阶．$x\to0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 是k阶无穷小

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{k-1}}=C \quad C\text{为非零常数}$$

而 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数. 知 ① $k=1$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

② $k<1$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\,x^{1-k}=0$ 此时 C 无解

③ $k>1$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{k-1}}=\infty$ 此时 C 无解.

故这样的C不存在. 假设不成立！故 没有阶

2. (a) 证：① $y=ax+b$ 是曲线的渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$ ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow 0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a\right] \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a.$

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$. 故 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$. 同理可得

② $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)\end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)\end{cases}$

1) $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)-b=0 \Rightarrow ax+b$ 是 $f(x)$ 渐近线

2) $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)-b=0 \Rightarrow ax+b$ 是 $f(x)$ 渐近线

(b) 设 $f(x)=\sqrt{3x^2+4x+1}$ 则

① $x\to+\infty$ 时：$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{3}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{3}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{3x^2+4x+1}+\sqrt{3}x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ 渐近线 $y=ax+b$：$y=\sqrt{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $x\to-\infty$ 时：$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{3}$. $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

综上. 有两条渐近线：$y=\sqrt{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y=-\sqrt{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}(x^{\frac{1}{6}}-1)=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}$ 阶无穷小，主部：$-x^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow$ 3阶无穷小. 主部 $\frac{1}{2\sqrt{a}}x^3$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})x}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)=1.$

$\Rightarrow$ 1阶无穷小，主部是 x.

d) 令 $f(x)=(\cos x)^x$. $f(0)=1$ $f'(x)=(\ln\cos x-x\tan x)(\cos x)^x$, $f'(0)=0$

$f''(x)=(-2\tan x-x\sec^2 x)(\cos x)^x+(\ln\cos x-x\tan x)^2(\cos x)^x$ $f''(0)=0$

$f'''(x)=(-3\sec^2 x-2x\sec^2 x\tan x)(\cos x)^x+2(\ln\cos x-x\tan x)\times g(x)+f'(x)\cdot h(x)\Rightarrow f'''(0)=-3$

其中 $g(x)$, $h(x)$ 为相关表达式

泰勒展开：$f(x)=1-\frac{3}{3!}x^3+o(x^3)$

故 $(\cos x)^x-1=f(x)-1=-\frac{1}{2}x^3+o(x^3) \Rightarrow$ 3阶无穷小. 主部是 $-\frac{1}{2}x^3$

4. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\times\frac{3ax}{x-a}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{3ax}{x-a}} = 8$

$\Rightarrow e^{3a}=8 \quad \Rightarrow a=\ln 2$

(b) $x\to 0$时 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+ax^2}-1}{\cos x-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{-\sin^2 x}\times\frac{\cos x+1}{\sqrt[4]{1+ax^2}+1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{ax^2}{-\sin^2 x}\times\frac{\cos x+1}{(\sqrt[4]{1+ax^2}+1)(\sqrt{1+ax^2}+1)}$

$=-a\times\frac{2}{2\times2}=-\frac{a}{2}$

$\therefore a=-2$

(c) $0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1-a)x-(b+1)\right)$

$\Rightarrow a=1,\ b=-1.$

几何意义: $y=ax+b=x-1$ 是 $y=\frac{x^2+1}{x+1}$ 的渐近线

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2-bx+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2+bx-1}{3x+\sqrt{ax^2-bx+1}} = 2.$

$\Rightarrow a=9,\ b=2(3+\sqrt{a})=12$

几何意义: $y=3x-2$ 是 $y=\sqrt{9x^2-12x+1}$ 的渐近线.

5. (a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1} = -\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2} = -0\times2 = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{a^2x^2}{2}}{-\frac{b^2x^2}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x}{2}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{(2^x-1)+(3^x-1)}{2}} = e^{\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln2\times2^x}{e^x} = \ln2\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{e}\right)^x = \ln2.$ 同理 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\ln3$

故 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}(\ln2+\ln3)} = \sqrt{6}.$

6. $x\to0$时 $\sin2x\sim2x$. 故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin2x}=0.$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\ln3$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin2x}\right)}{3^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{(3^x-1)\sin2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x\cdot\ln3\cdot x} = \frac{1}{2\ln3}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$

故 $5=\frac{1}{2\ln3}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln3$

7. a) 定义域 $x\neq0,\ x\neq-1\ x\neq1$

$y=\frac{x-1}{x+1}$

间断点: $x=0$ 与 $x=1$: 可去间断点,

补充: $f(0)=-1,\ f(1)=0$

$x=-1$: 无穷间断点.

b) 间断点: $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

无穷间断点.

c) $y=\begin{cases}0, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$

间断点: $x=0$. 可去间断点.

修改: $f(0)=0$

d) $y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$

间断点: $x=1$. 可去间断点.

补充: $f(1)=0$.

$f(x)$在各段内连续.

8. a) 又 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{x}=a$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{b}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{b}{2}$

$\therefore a=1,\ \frac{b}{2}=1$.

$\Rightarrow a=1,\ b=2$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & |x|>1\\ \frac{1+a+b}{2}, & x=1\\ \frac{-1+a-b}{2}, & x=-1.\\ ax^2+bx, & |x|<1.\end{cases}$

$x=1$点: $a+b=\frac{1+a+b}{2}=1 \Rightarrow a+b=1$

$x=-1$点: $a-b=\frac{-1+a-b}{2}=-1 \Rightarrow a-b=-1$.

$\Rightarrow a=0,\ b=1$

9. 当$x<0$时, $f(x)=e^x+b$ 连续. 当$x>0$时, $f(x)=x^a\sin\frac{1}{x}$连续

当$x=0$时. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=1+b$.

当 $a\le 0$ 时, $x^a\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0^+$ 时不存在极限. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 不存在. 故$f(x)$不连续

当 $a>0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\sin\frac{1}{x}=0$

故 $1+b=0$, $b=-1$

故 $f(x)$连续 当且仅当 $a>0$且$b=-1$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(0)=\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(0)$

当 $x>0$时, $0\le|f(x)|\le|\varphi(x)|$ 故 $\lim\limits_{x\to 0^+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0^+}|\varphi(x)|=0$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

同理, 当$x<0$时 $0\le|f(x)|\le|\varphi(x)| \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0^-}|\varphi(x)|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$

11. (a) 设 $f(x)=\sin x-7\cos x$. 则 $f(0)=-7$, $f(\frac{\pi}{2})=1$. $f(0)f(\frac{\pi}{2})<0$

由零点定理知 $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$, $f(x_0)=0$. 故区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有根

(b) $f(0)f(1)=f(1)f(2)=f(2)f(3)=f(3)f(4)=-1<0$

故f在$(0,1)$, $(1,2)$ $(2,3)$ $(3,4)$ 上均至少有1根

故$f(x)$至少在$[0,4]$上有4个解, 且必有偶数个解.

12. 令 $f(x)=a\sin x+b-x$ $f(0)=b>0$. $f(a+b+1)=a(\sin x-1)-1<0$. $\Rightarrow f(a+b+1)f(0)<0$

又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续

故 $f(x)$ 在 $(0,a+b+1)$ 上一定有根

13. 令 $F(x)=f(x)-g(x)$. 则 $F(a)<0$, $F(b)>0 \Rightarrow F(a)F(b)<0$

又$F(x)$在$[a,b]$上连续.

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$, $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=g(\xi)$

14. ① 当 $f(1)=f(0)=f(2)$ 时, 易知 此时令 $y=1$, $x=0$ 时有 $f(x)=f(y)$

② 当 $f(1)\ne 0$ 时. 令 $F(x)=f(x+1)-f(x)$. 则 $F(x)\in C[0,1]$

$\Rightarrow F(1)=f(2)-f(1)=f(0)-f(1)=-F(0)\ne 0$.

$\Rightarrow F(1)\times F(0)<0$

$\therefore \exists \xi \in [0,1]$ $F(\xi)=0$. 即 $f(\xi+1)=f(\xi)$

令 $x=\xi$, $y=\xi+1$. 即知有 $f(x)=f(y)$, $y-x=1$. 满足.

15. $f(0)=a_{2n}<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 由保号性 知 $\begin{cases} \exists x_1\in(-\infty,0), f(x_1)>0 \\ \exists x_2\in(0,+\infty), f(x_2)>0 \end{cases}$

故由介值定理 $\exists \xi_1 \in (x_1,0)$, $f(\xi_1)=0$, $\exists \xi_2\in(0,x_2)$. $f(\xi_2)=0$ 易知 $\xi_1\neq\xi_2$

故至少有两根

16. 证: 取 $\varepsilon=1$. 知 $\exists \delta$. 当 $|x|>\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon=1$. 即 $A-1<f(x)<A+1$

由连续函数闭区间上有界. 设 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上的一个上界为 M_1, 下界为 M_0

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有: $\min\{A-1,M_0\}\le f(x)\le \max\{A+1,M_1\}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

17. $\forall n\in N_+$: 设 $F_n(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ $(x\in[0,\frac{n-1}{n}])$

由 $f(0)=f(1)$. 知 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} F_n(\frac{i}{n})=f(1)-f(0)=0$.

① 若 $\exists i\in\mathbb{N}$, $i\in[0,n-1]$ 使 $F_n(\frac{i}{n})=0$. 则令 $\xi_n=\frac{i}{n}$ 知 $f(\xi_n)=f(\xi_n+\frac{1}{n})$

② 若 $\forall i\in\mathbb{N}$. $i\in[0,n-1]$, $F_n(\frac{i}{n})\neq 0$. 则由 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} F_n(\frac{i}{n})=0$ 知

必 $\exists i_1, i_2\in\mathbb{N}$, $i_1,i_2\in[0,n-1]$, 使得 $F_n(\frac{i_1}{n})<0<F_n(\frac{i_2}{n})$

从而 $\exists \xi\in(\min\{\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n}\}, \max\{\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n}\})$, 使 $F_n(\xi_n)=0 \Rightarrow f(\xi_n)=f(\xi_n+\frac{1}{n})$

综上, $\exists \xi\in[0,1]$ 使 $f(\xi_n)=f(\xi_n+\frac{1}{n})$

18. 证:

反证法. 假设 $\exists x_0\in[0,1]$, $f(x_0)\neq 2$.

由无理数在实数上稠密, 知存在无理数 z. 满足 $\min\{f(x_0),2\}<z<\max\{f(x_0),2\}$

故而由介值定理, $\exists \xi\in(\min\{x_0,\frac{1}{2}\}, \max\{x_0,\frac{1}{2}\})$, $f(\xi)=z$.

这与 $f(x)$ 只取有理值矛盾!

假设不成立. 故 $f(x)=2$.