

作业 九

1. 设 $f(x) = (a + b \cos x) \sin x - x$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是 x 的五阶无穷小, 求常数 a 和 b .

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, 且 $f'(0)$ 存在, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$.

3. 求极限:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1 + 2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right]; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^{x+1} - 2^{x+1}}{x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) < 0$. 若 $f(0) > 0$, $f'(0) < 0$, 证明: $f(x) = 0$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有解.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且满足 $f(0) = f(1) = 0$, $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) \leq -16$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + f' \left(\frac{a+b}{2} \right) (b-a) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f'''(\xi)$$

7. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值:

$$a) y = |4x^3 - 18x + 27| \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上}; \quad b) y = |4x^3 - 18x + 27| \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上}.$$

8. 从圆上截下中心角为 α 的扇形卷成一圆锥, 问当 α 为何值时, 所得圆锥的体积最大?

9. 一商家销售某种商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$ (万元/吨), x 为销售量 (单位: 吨), 商品的成本函数是 $C = 3x + 1$ (万元).

(a) 若每销售一顿商品, 政府要征税 t (万元), 求该商家获最大利润的销售量;

(b) 当 t 为何值时, 政府税收总额最大.

10. 求下列函数图形的凹（下凸）凸区间及拐点：

$$a) y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50; \quad b) y = a^2 - \sqrt[3]{x-b}$$

11. 证明：曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点且位于同一条直线上.

12. 证明下列不等式：

(a) 设常数 $p > 1$, 则当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $x^p + (1-x)^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}$.

(b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ ($x \neq y$)

13. 求下列函数图形的渐近线：

$$a) y = \frac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)}; \quad b) y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$$

14. 全面讨论下列函数的性态, 并描绘出它们的图像：

$$a) y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}; \quad b) y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$$

15. 证明方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一的实根, 并用切线法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

16. 求方程 $\sin 2x - x = 0$ 的正实根 (精准到两位小数) .

17. 求下列曲线在指定点处的曲率及曲率半径：

(a) $y = \cosh x$ 在点 $(0, 1)$ 处；

(b) 曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($a > 0$) 在 t 处.

18. 设 $y = f(x)$ 为过原点的一条已知曲线, 已知 $f'(0) = 2, f''(0) = 1$. 又 $g(x)$ 是二次函数, 它的图像与曲线 $f(x)$ 在原点相切且有相同的曲率, 并在原点的领域内有相同的凹向, 求 $g(x)$.

19. 应选用直径多大的圆铣刀, 才能使加工后的工件近似于长半轴为 50 单位长, 短半轴为 40 单位长的椭圆上短轴一端附近的一段弧.