1. a) $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2-2x-3)$
$= 3(x-3)(x+1)$

$y'=0 \Rightarrow x=3$ 或 $x=-1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↑	极大值	↓	极小值	↑

$\Rightarrow$ 单增区间 $(-\infty,-1)$, $(3,+\infty)$
单减区间 $(-1,3)$

b) $y^3 = (2x-a)(x^2-2ax+a^2) = 2x^3 - 5ax^2 + 4a^2x - a^3$
$\Rightarrow 3y^2y' = 6x^2 - 10ax + 4a^2 = 2(x-a)(3x-2a)$
$\Rightarrow y' = \frac{2}{3}(2x-a)^{-\frac{2}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}}(3x-2a)$

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{a}{2}$ 或 $x=a$ 或 $x=\frac{2}{3}a$.

① $a=0$. $y=\sqrt[3]{2}x$. 单增区间: $(-\infty,+\infty)$, 无单减

② $a>0$

x	$(-\infty,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},\frac{2}{3}a)$	$\frac{2}{3}a$	$(\frac{2}{3}a,a)$	a	$(a,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↑		↑	极大值	↓	极小值	↑

$\Rightarrow$ 单增区间 $(-\infty,\frac{2}{3}a)$, $(a,+\infty)$ 单减区间 $(\frac{2}{3}a,a)$

③ $a<0$

x	$(-\infty,a)$	a	$(a,\frac{2}{3}a)$	$\frac{2}{3}a$	$(\frac{2}{3}a,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↑	极大值	↓	极小值	↑		↑

$\Rightarrow$ 单增区间 $(-\infty,a)$, $(\frac{2}{3}a,+\infty)$ 单减: $(a,\frac{2}{3}a)$

2. a) 定义域 $(0,+\infty)$

$y' = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$ 令 $y'=0$ 得 $x=1$ 或 e^2

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↓	极小值	↑	极大值	↓

$\Rightarrow$ 极大值: $y|_{x=e^2} = \frac{4}{e^2}$ 极小值: $y|_{x=1}=0$

b) $y = x^4 - 2ax^3 + a^2x^2$ $y' = 4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x = 2x(2x-a)(x-a)$ 令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\frac{a}{2}$ 或 a

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},a)$	a	$(a,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↓	极小值	↑	极大值	↓	极小值	↑

$\Rightarrow$ 极大值是 $y|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{a^4}{16}$ 极小值 $y|_{x=0} = 0$, $y|_{x=a} = 0$

3. a) $y' = e^{-x}(1-x)$ $y'' = (x-2)e^{-x}$

令 $y'=0$ 得 $x=1$. 此时 $y''|_{x=1} = -\frac{1}{e} < 0$

$\Rightarrow$ 极大值是 $y|_{x=1} = \frac{1}{e}$ 无极小值

b) $y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}$

$y'' = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$ 令 $y'=0$ 得 $x=1$.

$y''|_{x=1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ 有极大值.

$\Rightarrow$ 极大值是 $y|_{x=1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ 无极小值

4. $y' + 2x^2yy' + 2xy^2 = 0 \Rightarrow y'' + 2(xy'+y)^2 + 2xy(xy''+2y') = 0$

$\Rightarrow$ 令 $y'=0$. 得 $2xy^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$. 代入含 y'' 的式子. 得 $y''+2=0 \Rightarrow y''=-2<0$

$\Rightarrow$ 极大值是 $y=1$

~~(或直接等价无穷小 $1-e^{-x^2} \sim -(-x^2) \sim x^2$)~~

5. ~~$1-e^{-x^2} = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$~~ ~~$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-e^{-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)} = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + o(x^2)$~~

~~$\Rightarrow f'(0)=0$, $f''(0)=2>0$~~

~~$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处取到最小值.~~ 极 不严谨

$1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-e^{-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2xe^{-x^2}}$ $2xe^{-x^2}\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow f'(0)=0$

$1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2(-2x^2+1)e^{-x^2}} \Rightarrow f''(0) = 2(0+1)e^0 = 2 > 0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值

6. a) 令 $f(x)=e^x-(x+1)$.

$f'(x)=e^x-1$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

故 $f(x)\geq 0$ 取等当且仅当 $x=0$

故 $x\neq 0$ 时 $e^x>x+1$

b) 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$

$f'(x)=1+\ln(x+1)-\frac{1}{1+x^2}\geq 1+0-1=0$

故 $f(x)$ 单增. $f(0)=0$. $\Rightarrow x\geq 0$ 时, $f(x)\geq 0$

又 $\because 1+x>0$. 故 $\ln(1+x)-\frac{\arctan x}{1+x}=\frac{f(x)}{1+x}\geq 0$

7. $\varphi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

由 $f'(x)$ 单增知 $f''(x)\geq 0$

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$, $g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)\geq 0$

故 $g(x)\geq g(0)=0$ $\Rightarrow \varphi'(x)\geq 0$ $\Rightarrow \varphi(x)$ 单增

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{1-x}=-1$ 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

易知 $\frac{x\ln x}{1-x}$ 在 $(0,1)$, $(1,+\infty)$ 上是连续函数. 故 $f(x)$ 连续.

$(0,1)$ 内: $f'(x)=\frac{1-x+\ln x}{(1-x)^2}$ 令 $g(x)=1-x+\ln x$ $\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}-1$. $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)>0$. $g(1)=0$.

$g(x)$ 单增. $\Rightarrow (0,1)$ 上, $g(x)<g(1)=0$ 又 $\because (1-x)^2>0$

$\therefore x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$ $\Rightarrow (0,1)$ 内单减

在 $(0,1)$ $(1,+\infty)$ 上, $f'(x)=\frac{1-x+\ln x}{(1-x)^2}$ $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$

又 $\because f(x)$ 在 $U(1,1)$ 上连续, 在 $\mathring{U}(1,1)$ 上可导, 故由导函数性质知 (达布定理)

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$

9. $\because f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$

$\therefore$ 由罗尔定理, 知 $\exists\xi_1\in(1,2)$ $\exists\xi_2\in(2,3)$, $\exists\xi_3\in(3,4)$, 有

$f'(\xi_1)=0$, $f'(\xi_2)=0$, $f'(\xi_3)=0$

又由于 $f(x)$ 最高次项次数为4. 故 $f'(x)$ 最高次项次数是3.

故 $f'(x)=0$ 至多有3解. (由代数基本定理可知).

由所属区间易知 $\xi_1<\xi_2<\xi_3$ 不相同. 故 $f'(x)=0$ 有3实根 (即 ξ_1,ξ_2,ξ_3).

所属区间分别是 $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$

10. 令 $f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$ $\Rightarrow f(0)=0$, $f(1)=0$ $\Rightarrow f(1)=f(0)$

则 $f'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

罗尔定理. 知 $\exists\xi\in(0,1)$, $f'(\xi)=0$. 故知 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 上至少存在一根 (即 ξ)

11. 连续介值定理知 $\exists x_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$, $f(x_1)=0$, ~~且 x_1 是使 $\frac{a+b}{2}-x_1$ 最小的变号零点~~、
$\exists x_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$. $f(x_2)=0$, ~~且 x_2 是使 $x_2-\frac{a+b}{2}$ 最小的变号零点~~.

不好说清楚

~~故 $f'(x_1)$ 与 $f(\frac{a+b}{2})$ 同号, $f'(x_2)$ 与 $f(\frac{a+b}{2})$ 异号~~

~~令 $g(x)=f'(x)-f(x)$. 则 $g(x_1)=f'(x_1)$. $g(x_2)=f'(x_2)$~~

~~$\Rightarrow g(x_1)g(x_2)<0 \Rightarrow$ 由介值定理知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, $g(\xi)=0$~~

~~即 $f(\xi)=f'(\xi)$~~

令 $g(x)=e^{-x}f(x) \Rightarrow g(x_1)=g(x_2)=0$

由罗尔定理: $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

s.t. $g'(\xi)=0$.

$\because g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

$\therefore g'(\xi)=g(\xi)$

$\boxed{(n\to+\infty\text{的时候}, -\infty\text{同理})}$

12. 由 $f(x)\in D(a,b)$ 知 $f(\frac{a+b}{2})$ 存在且有限. 若 $f(\frac{a+b}{2})$ 是极值, 则易知成立.
若 $f(\frac{a+b}{2})$ 不是极值点, 则由题目条件知 $\exists x_1$, $f(x_1)<f(\frac{a+b}{2})$ 不妨设 $x_1<\frac{a+b}{2}$
则由介值定理知 $\exists x_2 \in (a, x_1)$, $f(x_2)=f(\frac{a+b}{2})$.
故知 $\exists \xi \in (x_2, \frac{a+b}{2})$, $f'(\xi)=0$

13. 令 $g(x)=f(x)-\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}} = f(x)-\ln(2x+1)+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{2}{2x+1}+\frac{1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ 其中 $\frac{1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})(\sqrt{1+x^2}-x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

故 $g'(x)=f'(x)-\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(2x+1)(\sqrt{1+x^2}-x)=0$ 由夹逼知 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\ln 1=0$. 由夹逼知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. 由广义罗尔定理. 知 $\exists \xi\in(0,+\infty)$, $g'(\xi)=0$

$\Rightarrow f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$

14. a) $0<a<b$. 即证 $na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$

令 $f(x)=x^n$. 当 $x>0$ 时. $f'(x)=nx^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$ 故 $f'(x)$ 单增

由拉格朗日中值定理, 知 $\exists \xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\frac{b^n-a^n}{b-a}$.

由 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的单调性. 知 $f'(a)<f'(\xi)<f'(b)$

即 $na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$. 证毕

b) 当 $x=y$ 时显然成立.

当 $x\neq y$ 时. 该不等式等价于 $\frac{|\sin x-\sin y|}{|x-y|}\leq 1$. 即 $\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\leq 1$.

令 $f(t)=\sin t$　用对称性,不妨设 $x>y$

由拉格朗日中值定理知 $\exists\xi\in(y,x)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$.

$\because f'(t)=\cos t \Rightarrow f'(\xi)=\cos\xi$　$|\cos\xi|\le 1 \Rightarrow |f'(\xi)|\le 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le 1$

故 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

15. 令 $g(x)=\ln x \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$

由柯西中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$, $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln\frac{b}{a}}$

$\Rightarrow \xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(b)-f(a)$

16. 在 $x=a$ 处泰勒 $f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2\ \cancel{+o((x-a)^2)}$　$\xi_1\in(a,x)$.

在 $x=b$ 处泰勒 $f(x)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\ \cancel{+o((x-b)^2)}$　$\xi_2\in(x,b)$.

对 $x=\frac{a+b}{2}$:　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\times\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\ \cancel{+o\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)}$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\times\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\ \cancel{+o\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)}$

$\Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2}\times(f(b)-f(a))=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\ \cancel{+o\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)}$

$\Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\le\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\le\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$

17. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$　$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

$\Rightarrow f(x)=\left(a+b-\frac{b}{2!}x^2+\frac{b}{4!}x^4+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)-x$

$=(a+b-1)x-\left(\frac{a+b}{3!}+\frac{b}{2!}\right)x^3+\left(\frac{a+b}{5!}+\frac{b}{2!\times 3!}+\frac{b}{4!}\right)x^5+o(x^5)$

依题意, $\begin{cases}a+b-1=0\\ \frac{a+b}{6}+\frac{b}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=-\frac{1}{3}\end{cases}$

18. 1) $y=\arcsin x$

$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$y''=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\times(-2x)=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$　$y'|_{x=0}=1$　$y''|_{x=0}=0$　$y'''|_{x=0}=1$

$y^{(3)}=3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$　$y^{(4)}=15x^3(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}+9x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{5}{8}(\theta x)^3[1-(\theta x)^2]^{-\frac{7}{2}}+\frac{3}{8}(\theta x)(1-(\theta x)^2)^{-\frac{5}{2}}\right)x^4$　$\theta\in(0,1)$

2) $y=\tan x$

$y'=\sec^2x$　$y''=2\sec^2x\tan x$　$y^{(3)}=2(2\sec^2x\tan^2x+\sec^4x)=2\sec^2x(2\tan^2x+\sec^2x)$.

$y^{(4)}=2(\sec^2x(4\sec^2x\tan x+2\sec^2x\tan x)+2\sec^2x\tan x(2\tan^2x+\sec^2x))$

$=2(8\sec^4x\tan x+4\sec^2x\tan^3x)=8\sec^2x\tan x(2\sec^2x+\tan^2x)$

$\Rightarrow y'|_{x=0}=1$　$y''|_{x=0}=0$　$y'''|_{x=0}=2$　$y|_{x=0}=0$

$\Rightarrow \tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\sec^2(\theta x)\tan(\theta x)(2\sec^2(\theta x)+\tan^2(\theta x))x^4$　$\theta\in(0,1)$

19. $f(x)$ 在 $x=a$ 点展开：($n-1$ 阶拉格朗日余项)

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$. 其中 ξ 介于 x 与 a 之间

$\Rightarrow f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n$. $\xi\in(a,a+h)$

$\Rightarrow$ 对 h 求导 $f'(a+h)=f'(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}h^{n-1} \Rightarrow f'(a+\theta h)=f'(a)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}$ ($\eta\in(a,a+\theta h)$)

由题设得 $f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^n$. 再代入泰勒展开结果

$\Rightarrow f'(a)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n=f'(a)h+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^n \Rightarrow \theta=\left(\frac{f^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\eta)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\times\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

$\because a<\eta<\xi<a+h$. 故 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\eta)}=\frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}=1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to0}\theta=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

20. $\exists\xi_1\in(0,x)$, $\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}$

$\Rightarrow\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$, $\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{\xi_1^{n-1}-0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{(n-1)\xi_2^{n-2}}$

利用 n 次柯西中值，得 $\exists\xi_n\in(0,\xi_{n-1})$, $\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{\xi_{n-1}-0}=f^{(n)}(\xi_n)$

故知 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{1}{n(n-1)\cdots\times1}f^{(n)}(\xi_n)=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$ $\because 0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_1<x$.

故令 $\theta=\frac{\xi_n}{x}$ 有 $\theta\in(0,1)$. 此时 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ 故知存在

21. 令 $g(x)=x^2f'(x)$ $g'(x)=2xf'(x)+x^2f''(x)=x(2f'(x)+xf''(x))$

$\exists\xi_0\in(0,1)$, $f'(\xi_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$. $\Rightarrow g(\xi_0)=0$, 又 $g(0)=0$.

$\Rightarrow\exists\xi\in(0,\xi_0)$, $g'(\xi)=0 \Rightarrow \xi(2f'(\xi)+\xi f''(\xi))=0$. $\because\xi\neq0$

$\Rightarrow 2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$.

22. 令 $g(x)=e^xf(x)$ 则 $g(a)=e^a$ $g(b)=e^b$. $g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$

$\exists\eta\in(a,b)$ s.t. $\frac{g(a)-g(b)}{a-b}=g'(\eta)\Rightarrow e^\eta(f(\eta)+f'(\eta))=\frac{e^a-e^b}{a-b}$

令 $h(x)=e^x$. 则 $h(a)=e^a$ $h(b)=e^b$ $h'(x)=e^x$

$\exists\xi\in(a,b)$. s.t. $\frac{h(a)-h(b)}{a-b}=h'(\xi)\Rightarrow e^\xi=\frac{e^a-e^b}{a-b}$

$\Rightarrow e^\eta(f(\eta)+f'(\eta))=e^\xi$ 证毕.