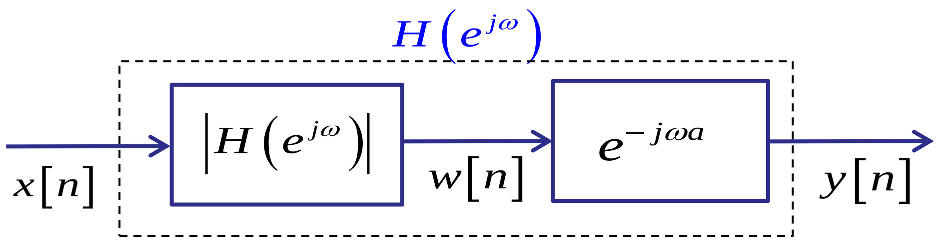
第五章：连续时不变系统的变换分析

5.7.1 线性相位系统

一个线性相位系统具有频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{-j\omega\alpha},\quad |\omega|<\pi$$

α 为实数，$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 为零相位系统

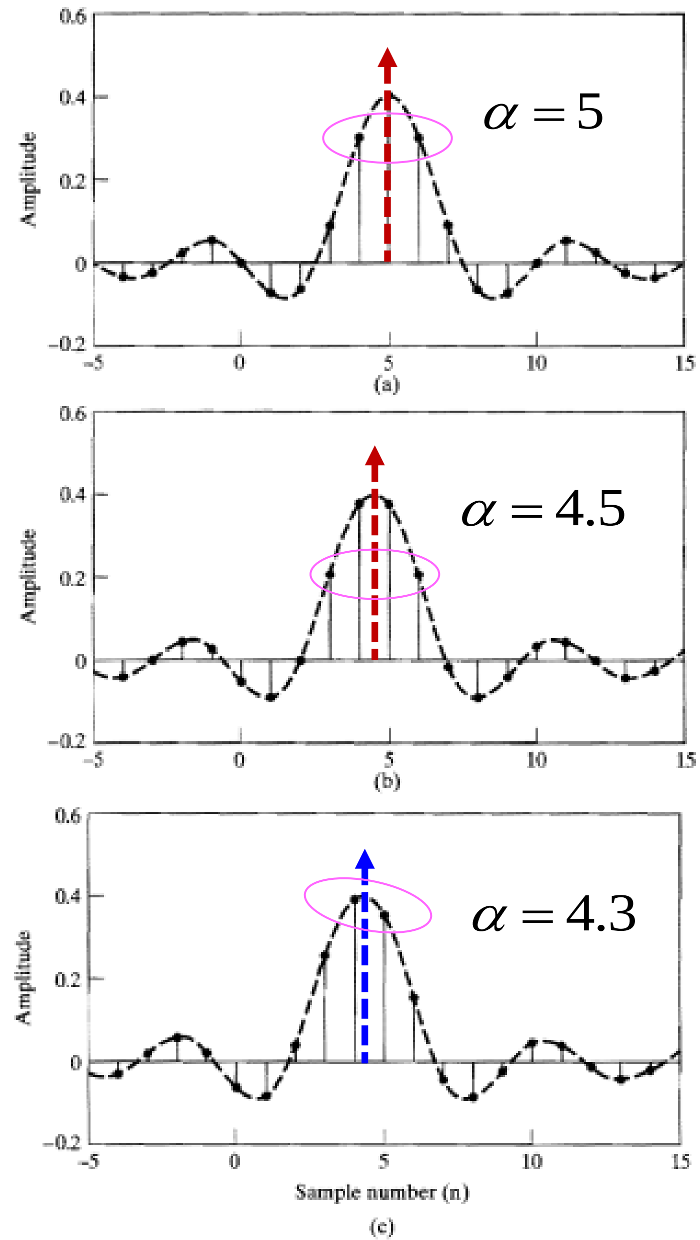


线性相位系统的相位和群延迟分别为

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=-\omega\alpha \quad \text{和} \quad \mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\alpha$$

线性相位系统具有恒定群延迟！

如果 2α 为整数，理想LP的单位脉冲响应关于 α 是偶对称的，即 $h[2\alpha-n]=h[n]$；否则，$h[n]$（采样点）不具备对称性。



5.7.2 广义线性相位

◆ 滑动平均系统的频率响应

滑动平均系统的**单位脉冲响应**

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{M+1}, & 0\le n\le M\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

滑动平均系统的**频率响应**

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M+1}\frac{\sin\left[\omega(M+1)/2\right]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2},\quad |\omega|<\pi$$

由于 $\sin\left[\omega(M+1)/2\right]/\sin(\omega/2)$ 不是在任何频率处都是**非负**的，因此，滑动平均系统**不是严格意义上线性相位系统**

在取负值的频率处，系统将在线性相位的基础上**附加相移** π 。

由于，具有上述频率响应的系统仍具备许多线性相位系统的优点，因此，有必要将线性相位系统的定义稍加推广，以便纳入上述系统。

5.7.2 广义线性相位

◆ 广义线性相位系统的频率响应

一个广义线性相位系统具有频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\alpha+j\beta} \qquad (*)$$

$A\left(e^{j\omega}\right)$ 为 ω 的实函数， α 和 β 为实常数

广义体现在两方面：

1）零相位系统 $A\left(e^{j\omega}\right)$ 不需一定取非负值，即在某些频率处可为负值

2）初始相位不需一定取零值，即可存在初始相位 β

广义线性相位系统的相位和群延迟分别为

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=\beta-\omega\alpha \quad \text{和} \quad \operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\alpha$$

忽略了由附加相位导致的相位响应连续性

5.7.2 广义线性相位

- 系统具有恒定群延迟的必要条件

具有恒定群延迟的广义线性相位系统的频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\alpha+j\beta}=A\left(e^{j\omega}\right)\cos\left(\beta-\omega\alpha\right)+jA\left(e^{j\omega}\right)\sin\left(\beta-\omega\alpha\right)$$

任意具有实值单位脉冲响应 $h[n]$ 的系统的频率响应可表示为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\cos\omega n-j\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\sin\omega n$$

由以上两种频响表达式，可得两者相位正切存在以下关系

$$\tan\left(\beta-\omega\alpha\right)=\frac{\sin\left(\beta-\omega\alpha\right)}{\cos\left(\beta-\omega\alpha\right)}$$

必要条件为设计具有线性相位的系统（如滤波器）提供了选择恰当参数的判断依据

再由三角关系可得恒定群延迟系统的单位脉冲响应 $h[n]$、常数 α 和 β 必然满足关系

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\sin\left(\omega\left(n-\alpha\right)-\beta\right)=0,\quad \text{对全部}\omega$$

5.7.2 广义线性相位

◆ 系统具有恒定群延迟的充分条件（1）

$$(1)\quad \begin{cases} \beta=0 \quad 或 \quad \pi \\ 2\alpha = M = 整数 \\ h[2\alpha-n]=h[n] \end{cases}$$

$h[n]$关于α对称

该条件满足线性相位必要条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\left(\omega(n-\alpha)-\beta\right)=0$$

令 $h[n]=h'[n-\alpha]$，则 $h'[n]$ 关于n=0对称，即 $h'[n]=h'[-n]$

由傅里叶变换的对称性， $h'[n]$ 的FT可表示为 $H'\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)$，并且 $A\left(e^{j\omega}\right)$ 为实函数（偶函数）

由FT性质（5）和（7），对称（偶）实序列的FT为实偶函数

因此， $h[n]$ 的傅里叶变换可表示为 $H\left(e^{j\omega}\right.$

由于 $e^{j\beta}=\begin{cases} 1, & \beta=0 \\ -1, & \beta=\pi \end{cases}$，所以对于正负不同 的 $h[n]$ 的FT亦可表示为

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\alpha+j\beta}}$$

由 $H\left(e^{j\omega}\right)$的相位响应可见，满足条件（1）的系统，必然具有恒定群时延

◆ 系统具有恒定群延迟的充分条件（2）

$$(2)\quad \begin{cases} \beta = \pi/2 \quad \text{或} \quad 3\pi/2 \\ 2\alpha = M = \text{整数} \\ h[2\alpha - n] = -h[n] \end{cases}$$

$h[n]$关于α反对称

与条件（1）同理可得，$h[n]$ 的傅里叶变换的表示形式为

$$H\left(e^{j\omega}\right) = jA\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\alpha}$$

由FT性质（6）和（8），反对称（奇）实序列的FT为虚奇函数

其中 $A\left(e^{j\omega}\right)$ 亦为实函数（奇函数）。

由于 $e^{j\beta} = \begin{cases} j, & \beta = \pi/2 \\ -j, & \beta = 3\pi/2 \end{cases}$，所以对于正负不同 的 $h[n]$ 的FT也可表示为

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\alpha + j\beta}}$$

由 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 的相位响应可见，满足条件（2）的系统，亦必然具有恒定群时延

5.7.3 因果广义线性相位系统

因果FIR系统的单位脉冲响应若满足关系

$$h[n]=\begin{cases} h[M-n], & 0\le n\le M \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

则该系统具有广义线性相位，即系统频率响应可表示为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=A_e\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega M/2} \qquad (*)$$

$A_e\left(e^{j\omega}\right)$ 为 ω 的实、偶、周期函数

由FT性质（5）和（7），对称（偶）实序列的FT为实偶函数

因果FIR系统的单位脉冲响应若满足关系

$$h[n]=\begin{cases} -h[M-n], & 0\le n\le M \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

则该系统的频率响应可表示为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=jA_o\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega M/2}=A_o\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega M/2+j\pi/2} \qquad (**)$$

$A_o\left(e^{j\omega}\right)$ 为 ω 的实、奇、周期函数

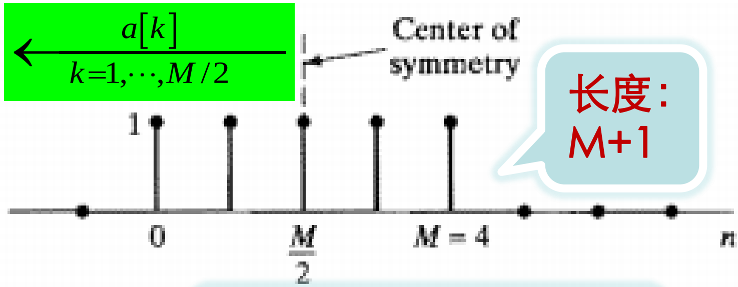
由FT性质（6）和（8），反对称（奇）实序列的FT为虚奇函数

5.7.3 因果广义线性相位系统

$$H\left(e^{j\omega}\right)=A_e\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega M/2}$$

◆ **I 类FIR线性相位系统（对称，奇长度）**

$$h[n]=h[M-n],\quad 0\le n\le M$$



长度：M+1

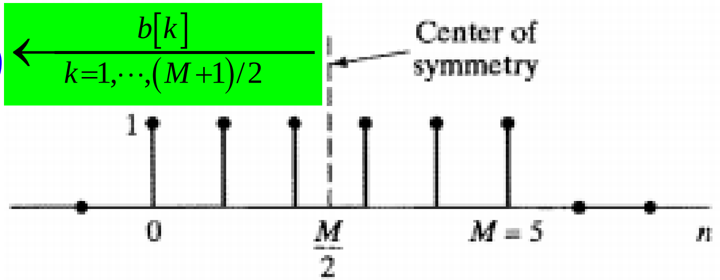
其中 M 为偶数，即延迟 $M/2$ 为整数，则其频率响应可表示为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{M}h[n]e^{-j\omega n}=\left\{\sum_{k=0}^{M/2}a[k]\cos\omega k\right\}e^{-j\omega M/2}$$

具有（*）式形式

其中 $a[0]=h[M/2]$ ， $a[k]=2h[(M/2)-k],\quad k=1,2,\cdots,M/2$

◆ **II 类FIR线性相位系统（对称，偶长度）**



$$h[n]=h[M-n],\quad 0\le n\le M$$

其中 M 为奇数，其频率响应可表示为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left\{\sum_{k=1}^{(M+1)/2}b[k]\cos\left[\omega(k-1/2)\right]\right\}e^{-j\omega M/2}$$

具有（*）式形式

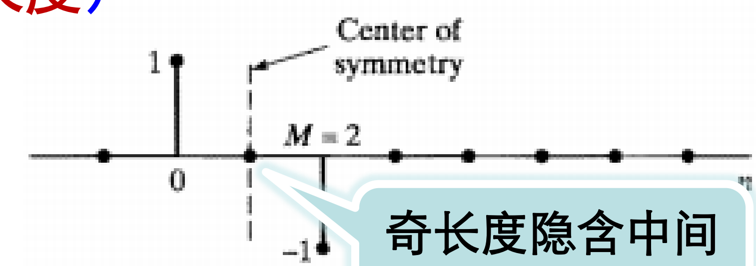
其中 $b[k]=2h[(M+1)/2-k],\quad k=1,2,\cdots,(M+1)/2$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=jA_o\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega M/2}$$

- **III 类FIR线性相位系统（反对称，奇长度）**

$$h[n]=-h[M-n],\quad 0\le n\le M$$

其中 M 为偶整数，即延迟 $M/2$ 为整数，其频率响应可表示为



奇长度隐含中间一个样值为零

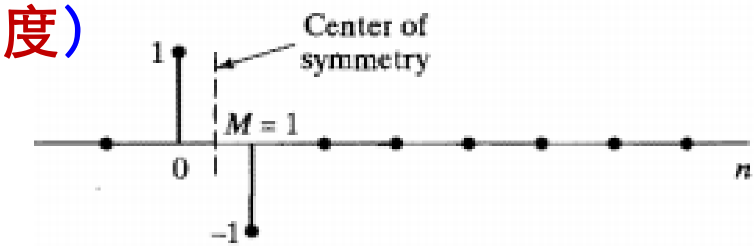
$$H\left(e^{j\omega}\right)=j\left\{\sum_{k=1}^{M/2}c[k]\sin\omega k\right\}e^{-j\omega M/2}$$

具有（**）式形式

其中 $c[k]=2h[(M/2)-k],\quad k=1,2,\cdots,M/2$

- **IV 类FIR线性相位系统（反对称，偶长度）**

$$h[n]=-h[M-n],\quad 0\le n\le M$$



其中 M 为奇整数，其频率响应可表示为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=j\left\{\sum_{k=1}^{(M+1)/2}d[k]\sin\left[\omega(k-1/2)\right]\right\}e^{-j\omega M/2}$$

具有（**）式形式

其中 $d[k]=2h[(M+1)/2-k],\quad k=1,2,\cdots,(M+1)/2$

◆FIR线性相位系统示例

□ I类FIR线性相位系统

$$h[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

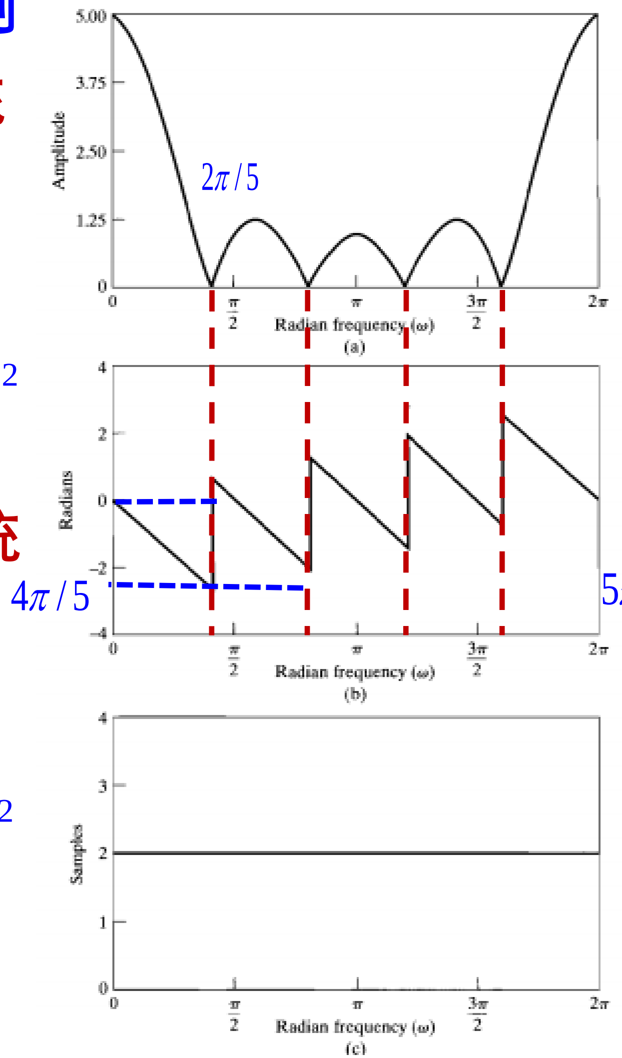
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sin\left(5\omega/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}e^{-j\omega 2}$$

□ II类FIR线性相位系统

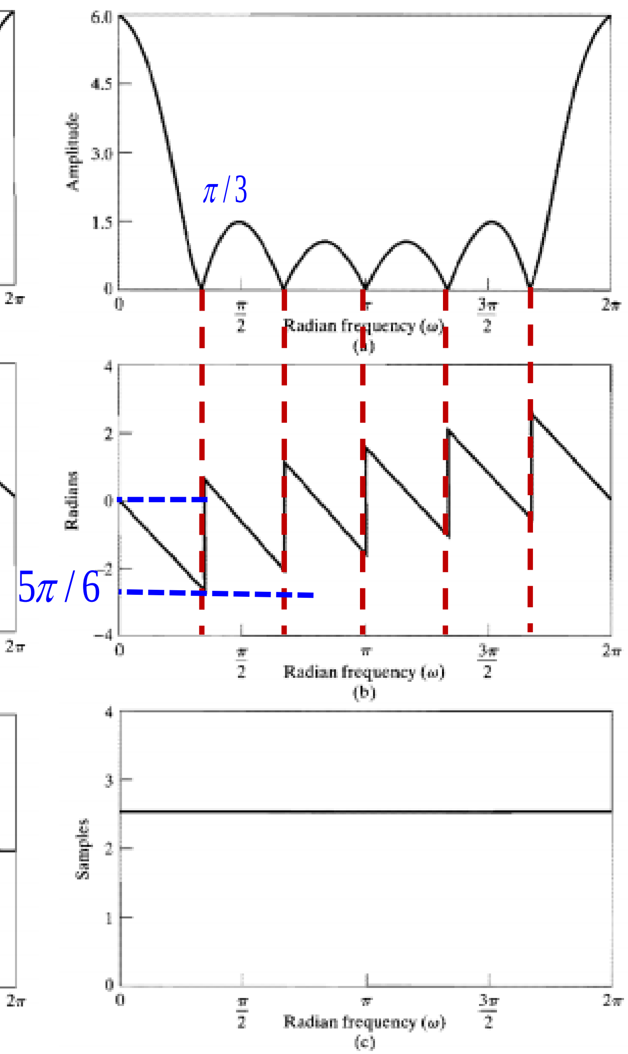
$$h[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 5\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sin\left(3\omega\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}e^{-j\omega 5/2}$$

I 类FIR线性相位系统响应



II类FIR线性相位系统响应



◆FIR线性相位系统示例

□ III类FIR线性相位系统

隐含$\delta[n\text{-}1]$=0

$$h[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$$

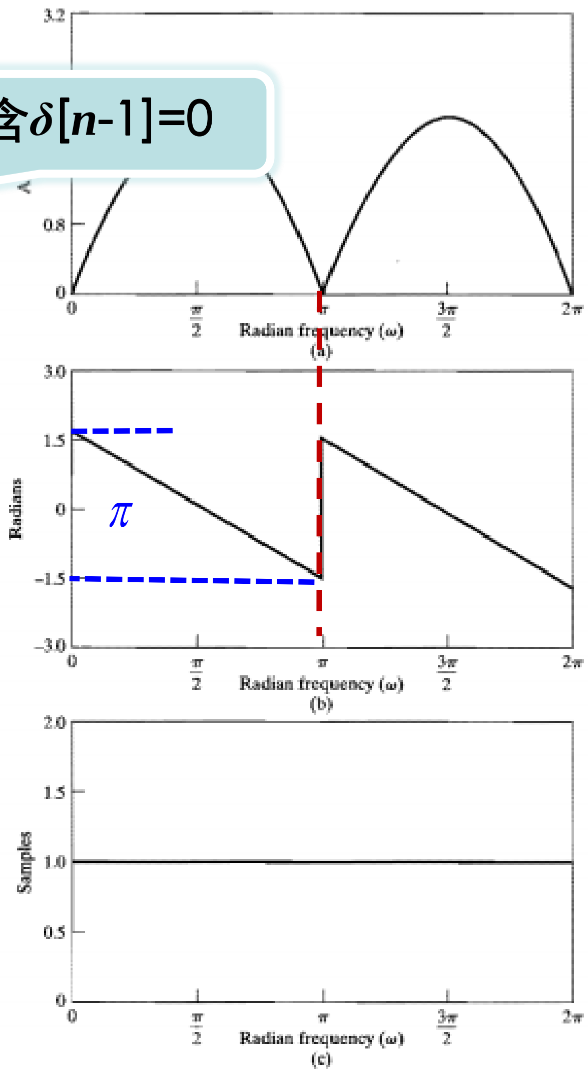
$$H\left(e^{j\omega}\right)=j2\sin(\omega)e^{-j\omega}$$

□ IV类FIR线性相位系统

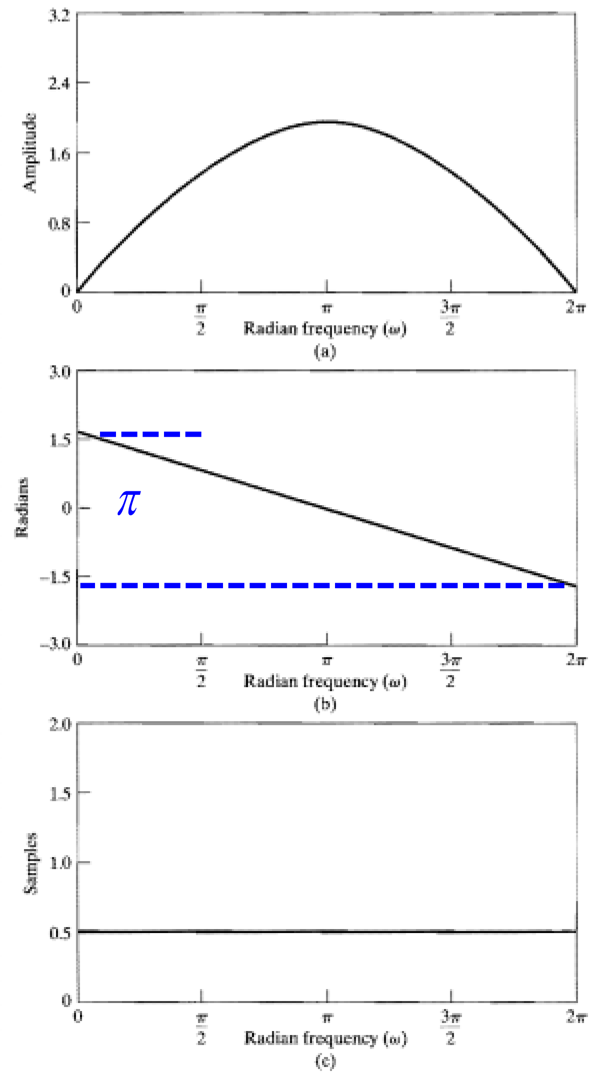
$$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=j2\sin(\omega/2)e^{-j\omega/2}$$

III 类FIR线性相位系统响应



IV 类FIR线性相位系统响应

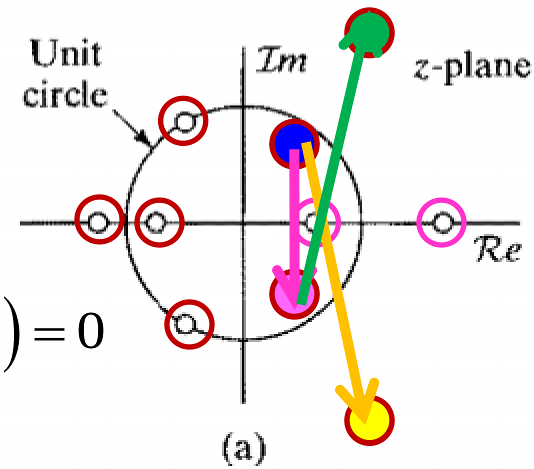


5.7.3 因果广义线性相位系统

◆FIR线性相位系统的零点位置(1)

□ I类和II类FIR线性相位系统

I 类FIR线性相位系统零点图



$$H(z)=\sum_{n=0}^{M}h[M-n]z^{-n}$$

若 $z_0=re^{j\theta}$ 为 $H(z)$ 的零点，即 $H(z_0)=z_0^{-M}H(z_0^{-1})=0$

则 $z_0^{-1}=r^{-1}e^{-j\theta}$ 亦为 $H(z)$ 的零点

即对于对称 $h[n]$，其 $H(z)$ 不在单位圆上的零点互为倒数

当 $h[n]$ 为实数，若 z_0 为复零点，则 $z_0^*=re^{-j\theta}$ 亦为 $H(z)$ 的零点，并且 $(z_0^*)^{-1}=r^{-1}e^{j\theta}$ 也一定为零点。

不在单位圆上的复零点必为 $\left(z_0 \quad z_0^{-1} \quad z_0^* \quad (z_0^*)^{-1}\right)$ 4个共轭倒数零点之一

单位圆上的复零点其共轭也是零点 $\left(z_0 \quad z_0^*\right)$

不在单位圆上的实零点其倒数也是零点

以上结论适用于所有四种类型的FIR线性相位系统。

5.7.3 因果广义线性相位系统

◆FIR线性相位系统的零点位置(2)

□ I类和II类FIR线性相位系统（续）

$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

当 $z=-1$ ，则有

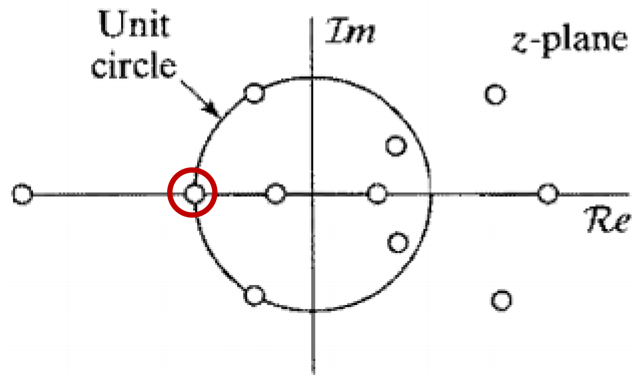
$$H(-1) = (-1)^M H(-1)$$

进一步，当 M 为**奇数**时，可得

$$H(-1) = -H(-1)$$

即 $H(-1) = 0$

II类FIR线性相位系统零点图



(b)

因此， $z=-1$ 必II类FIR线性相位系统的零点。

◆FIR线性相位系统的零点位置(3)

□ III类和IV类FIR线性相位系统

$$H(z) = -z^{-M} H\left(z^{-1}\right)$$

无论M为奇或偶数的系统函数满足

$$H(1) = -H(1)$$

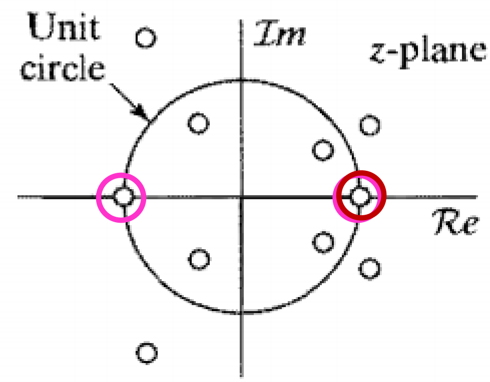
即 $z=1$ 必为III、IV类FIR线性相位系统的零点。

对于M为偶数的系统函数满足

$$H(-1) = -(-1)^{-M} H(-1) = -H(-1)$$

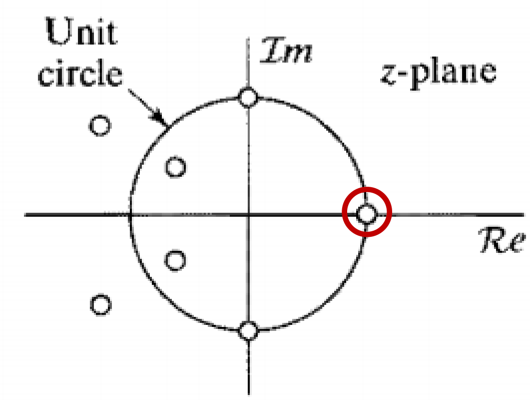
即 $z=-1$ 必为III类FIR线性相位系统的零点。

III 类FIR线性相位系统零点图



(c)

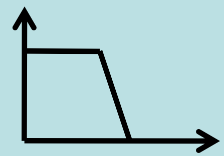
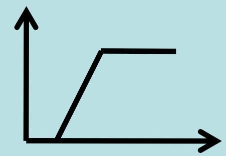
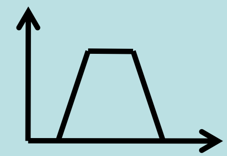
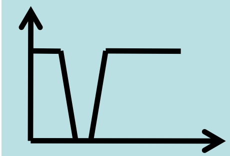
IV类FIR线性相位系统零点图



(d)

5.7.3 因果广义线性相位系统

各类FIR线性相位系统适用限制

特性及应用 / 类型	零点位置限制	低通 	高通 	带通 	带阻 
I 类 FIR	无限制	Y	Y	Y	Y
II 类 FIR	z=-1	Y	N	Y	N
III 类 FIR	z=±1	N	N	Y	N
IV 类 FIR	z =1	N	Y	Y	N

5.7.4 FIR线性相位系统与最小相位系统

$H_{ap}(z)=(z^{-1}-a^*)/(1-az^{-1})$

◆FIR线性相位系统的系统函数分解

任意FIR线性相位系统的系统函数均可分解为最小相位项 $H_{\min}(z)$、最大相位项 $H_{\max}(z)$ 和包含单位圆上零点的项 $H_{uc}(z)$

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{uc}(z)H_{\max}(z)$$

$$H_{\min}(z)=(1-c_k z^{-1})$$

其中 $H_{\max}(z)=H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$

$$H_{\max}(z)=(1-c_k z)z^{-1}=(z^{-1}-c_k)=-c_k\left(1-\frac{1}{c_k}z^{-1}\right)$$

M_i 是 $H_{\min}(z)$ 零点的个数，即 $H_{\min}(z)$ 和 $H_{\max}(z)$ 分别有 M_i 个零点在单位圆内和单位圆外，且互为倒数。

若 $H_{uc}(z)$ 有 M_0 个零点在单位圆上，则 $H(z)$ 的阶数为 $2M_i+M_0$。

与任意系统可以分解为最小相位系统与全通系统的中的全通系统的区别

1）全通系统可为IIR系统，而分解的最大相位系统$H_{max}(z)$一定是FIR系统

2）全通系统包含原系统没有的零、极点，而$H_{max}(z)$仅包含原系统的零点

3）全通系统的幅度响应为恒定值，而$H_{max}(z)$的幅度响应一般不是恒定值

$$H_{\min}(z)=\left(1-c_k z^{-1}\right)$$

$$H_{\max}(z)=-c_k\left(1-\frac{1}{c_k}z^{-1}\right)$$

◆例5.21 线性相位系统的分解

已知：最小相位系统的系统函数为

$$H_{\min}(z)=(1.25)^2\left(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}\right)\times\left(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}\right)$$

由 $H_{\max}(z)=H_{\min}\left(z^{-1}\right)z^{-M_i}$ 其中 $M_i=4$

与全通系统中的最大相位因式不同，此处最大相位因式的零点是最小相位系统的倒数，而非共轭倒数。

则：相应最大相位系统的系统函数

$$H_{\max}(z)=(0.9)^2\left(1-(1/0.9)e^{-j0.6\pi}z^{-1}\right)\left(1-(1/0.9)e^{j0.6\pi}z^{-1}\right)\times\left(1-(1/0.8)e^{-j0.8\pi}z^{-1}\right)\left(1-(1/0.8)e^{j0.8\pi}z^{-1}\right)$$

将该最小相位系统与最大相位系统级联，可得具有线性相位的系统

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{\max}(z)$$

5.7.4 FIR线性相位系统与最小相位系统

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{\max}(z)$$

$$H_{\max}(z)=H'_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

◆ 分解系统的频率响应

总系统的幅度响应为

$$\begin{aligned}20\log10\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| &= 20\log10\left|H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right|+20\log10\left|H_{\max}\left(e^{j\omega}\right)\right| \\ &= 40\log10\left|H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right|\end{aligned}$$

总系统的相位响应为

$$H_{\max}(z)=H_{\min}\left(z^{-1}\right)z^{-M_i}$$

$$\begin{aligned}\angle H\left(e^{j\omega}\right) &= \angle H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)+\angle H_{\max}\left(e^{j\omega}\right) \\ &= \angle H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)+\left(-\angle H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)-\omega M_i\right) \\ &= -\omega M_i\end{aligned}$$

总系统的群延迟为

$$\operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=M_i$$

5.7.4 FIR线性相位系统与最小相位系统

最小相位系统频率响应 最大相位系统频响 最大/最小相位级联系统（线性相位系统）频响