

## 作业 四

1. 请写出  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在的严格定义.
2. 用定义严格证明  $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$  在  $x = 1$  处的左极限是  $-\infty$ .
3. 证明:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  ( $a > 1$ ).
4. 用定义证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ .
5. 用定义严格证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = 3$ .
6. 证明函数  $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在点  $x = 0$  的领域内无界, 但当  $x \rightarrow 0$  时, 并非无穷大.
7. 求下列函数在指定点的左、右极限, 并判断函数在该点处是否存在极限.
  - (a)  $f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$  在  $x_0 = 1$  处.
  - (b)  $f(x) = \frac{\frac{1}{2^x}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$  在  $x_0 = 0$  处.
8. 对函数  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . 并指出下面的计算错误在什么地方?

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$$

9. 计算下面极限

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}; & \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} \\ c) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}; & \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

10. 计算下面极限

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - 1}; & \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}; & \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \end{aligned}$$

11. 考虑极限  $x_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ .

12. 计算下列极限

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{x^2} + \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2-1} \right)^x; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

(a) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sin x}{x}$  (提示: 利用  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ )

(b) 证明 Vieta 公式:  $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$  (提示:  
利用  $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta}$  及  $\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ )