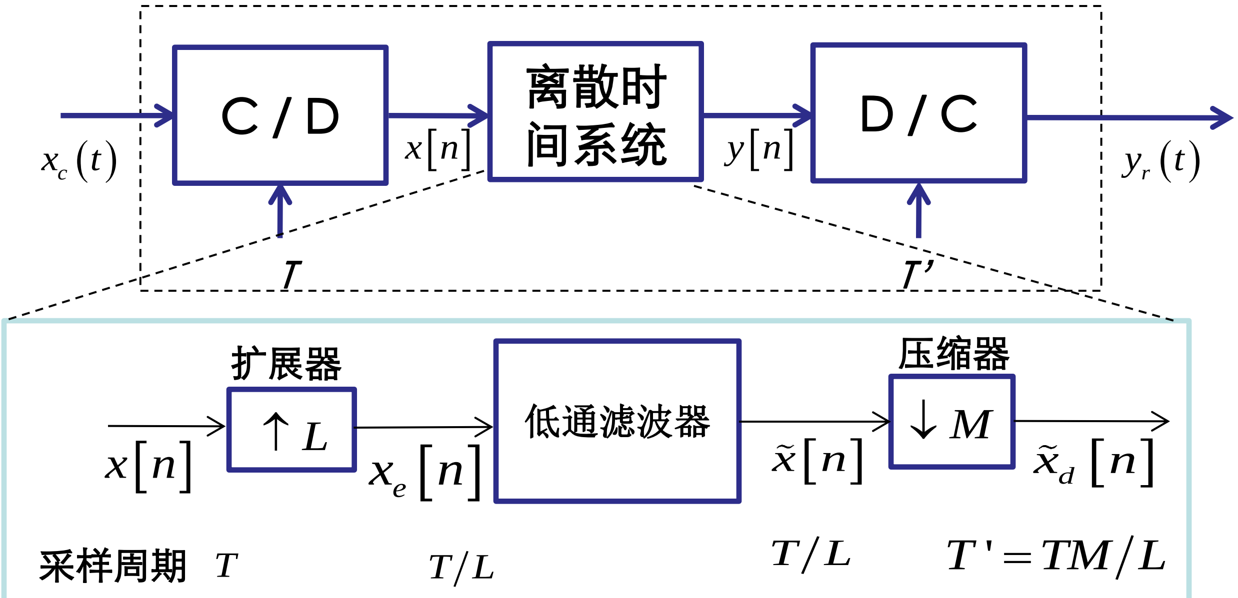
第四章：连续时间信号的采样

- 4.1 周期采样
- 4.2 采样的频域表示
- 4.3 由样本重构带限信号
- 4.4 连续时间信号的离散时间处理
- 4.5 离散时间信号的连续时间处理
- 4.6 利用离散时间处理改变采样率
- 4.7 多采样率信号处理
- 4.8 模拟信号的数字处理
- 4.9 在A/D和D/A转换中的过采样和噪声成形

考虑一个变采样率系统



例A：在原按周期T采样的序列基础上，若拟获得按周期T'（=1.01T）采样的序列，则需：

1）L=100倍内插；2）M=101倍抽样

输出每个样值所需的处理复杂度极大，亟需高效实现方法。

◆降采样恒等系统

$$x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow M} \xrightarrow{x_a[n]} \boxed{H(z)} \rightarrow y[n]$$

(a)

$$x[n] \rightarrow \boxed{H(z^M)} \xrightarrow{x_b[n]} \boxed{\downarrow M} \rightarrow y[n]$$

(b)

证明：由图（b）

$$X_b\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega M}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X_b\left(e^{j\left((\omega-2\pi i)/M\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X\left(e^{j\left((\omega-2\pi i)/M\right)}\right)H\left(e^{j\left((\omega-2\pi i)/M\right)M}\right)$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X\left(e^{j\left((\omega-2\pi i)/M\right)}\right)H\left(e^{j(\omega-2\pi i)}\right)$$

$$=X_a\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

先下采样再过系统等效于先过升采样（扩展器）的系统再过下采样

与图（a）的系统响应相同

◆升采样恒等系统

证明：由图（a）

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X_a\left(e^{j\omega L}\right)$$

$$=X\left(e^{j\omega L}\right)H\left(e^{j\omega L}\right)$$

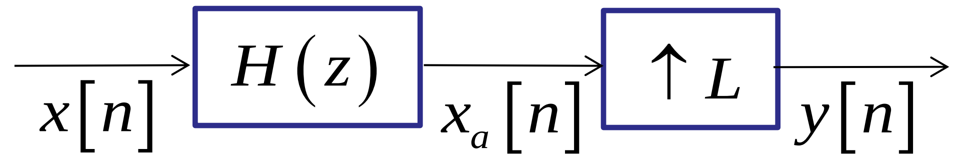
由图（b）

$$X_b\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega L}\right)$$

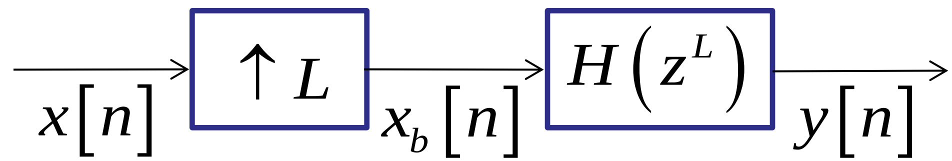
$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X_b\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega L}\right)$$

$$=X\left(e^{j\omega L}\right)H\left(e^{j\omega L}\right)$$

与图（a）的系统响应相同



(a)



(b)

先过系统再过升采样（扩展器）等效于先过升采样（扩展器）再过升采样的系统

降/升采样恒等系统仅涉及原系统与其升采样系统之间的关系（不会产生混叠问题）

4.7.2 多相分解

◆序列的多相分解

首先：将一个序列表示成M个子序列的延迟叠加，其中每个子序列都由该序列依次超前（左移）后每隔M点抽取的样本值及M-1个零组成。

例如：某单位脉冲响应 $h[n]$，可将其分解成M个子序列 $h_k[n]$ 如下：

$$h_k[n]=\begin{cases} h[n+k], & n=M\text{的整数倍} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$k=0,\cdots,M-1$$

$h_k[n]$为$h[n]$先左移k个样值，再M倍降采样，后M倍扩展的序列

将M个子序列 $h_k[n]$ 依次延迟叠加即可恢复该单位脉冲响应

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k]$$

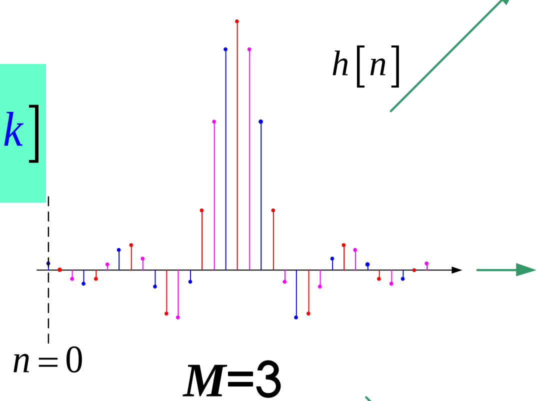
◆序列的多相分解（续）

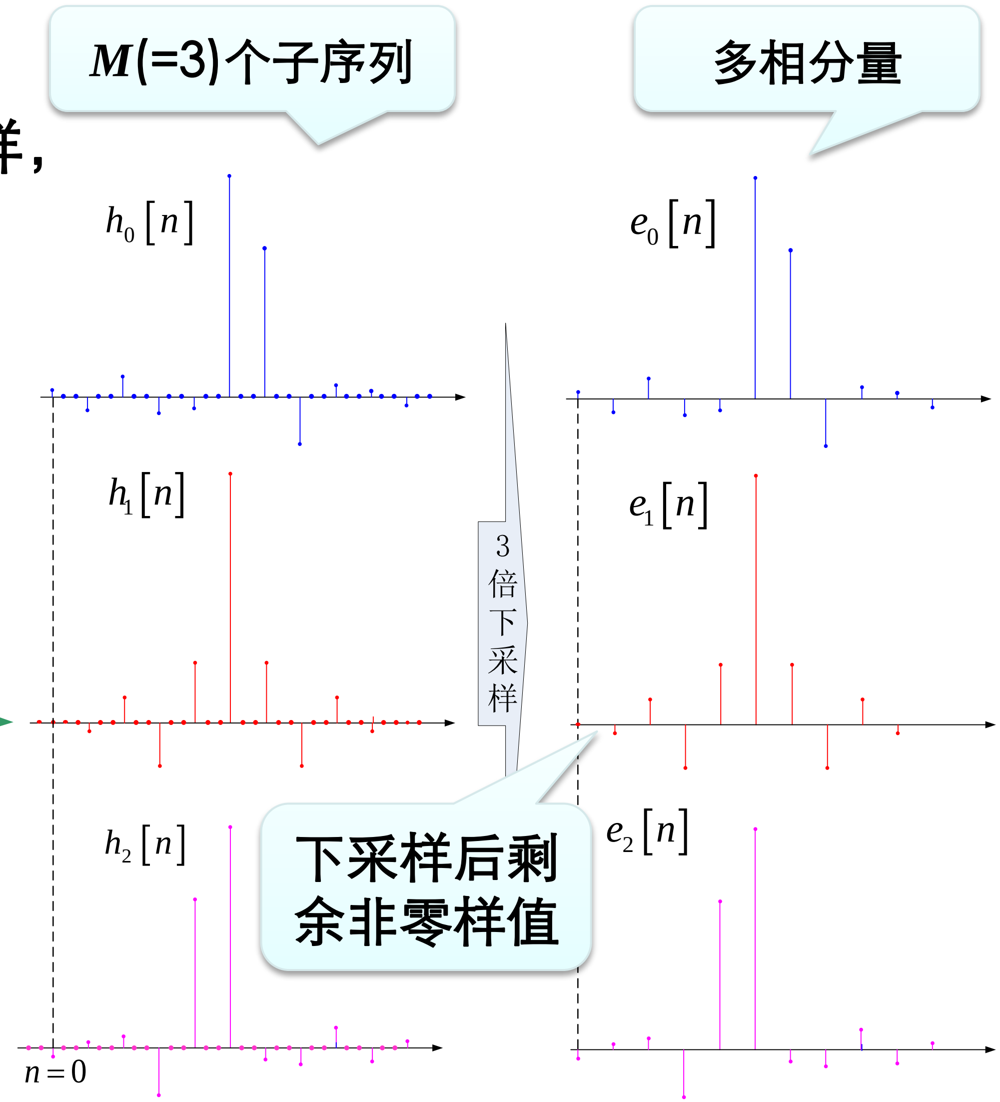
然后：对 $h_k[n]$进行$\boldsymbol{M}$倍下采样，可得$\boldsymbol{M}$个多相分量

$$e_k[n] = h_k[nM] = h[nM + k]$$

$$k = 0, \cdots, M-1$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k]$$

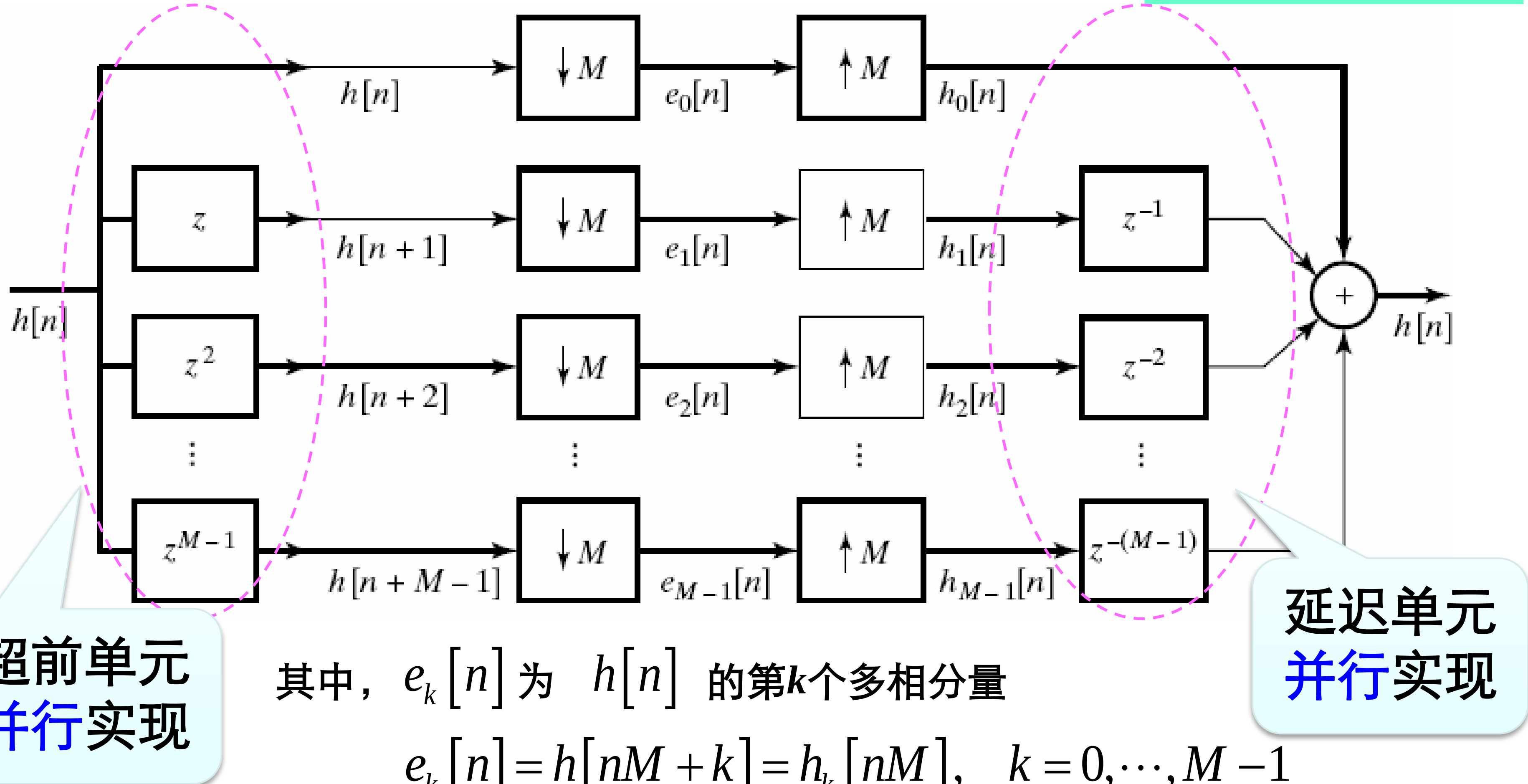




把一个序列分解为多个多相分量的过程称为多相分解。

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k]$$

◆多相分解/综合实现结构

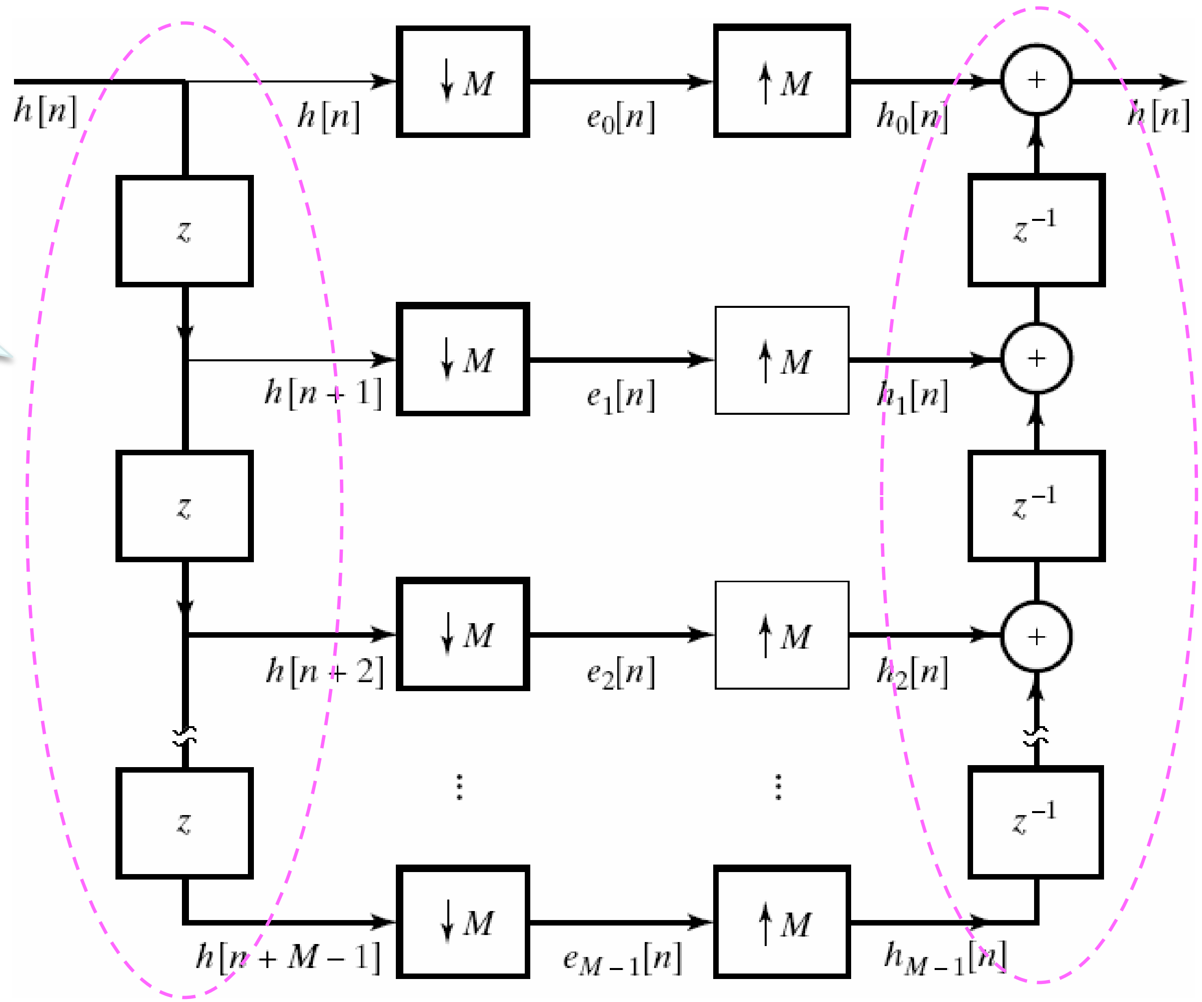


其中，$e_k[n]$ 为 $h[n]$ 的第**k**个多相分量

$$e_k[n]=h[nM+k]=h_k[nM],\quad k=0,\cdots,M-1$$

◆利用多相分量$e_k[n]$和延迟链的滤波器$h[n]$的多相分解实现

超前、延迟单元的串行实现



◆基于多相分解的实现结构

由

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M-1}h_k[n-k]$$

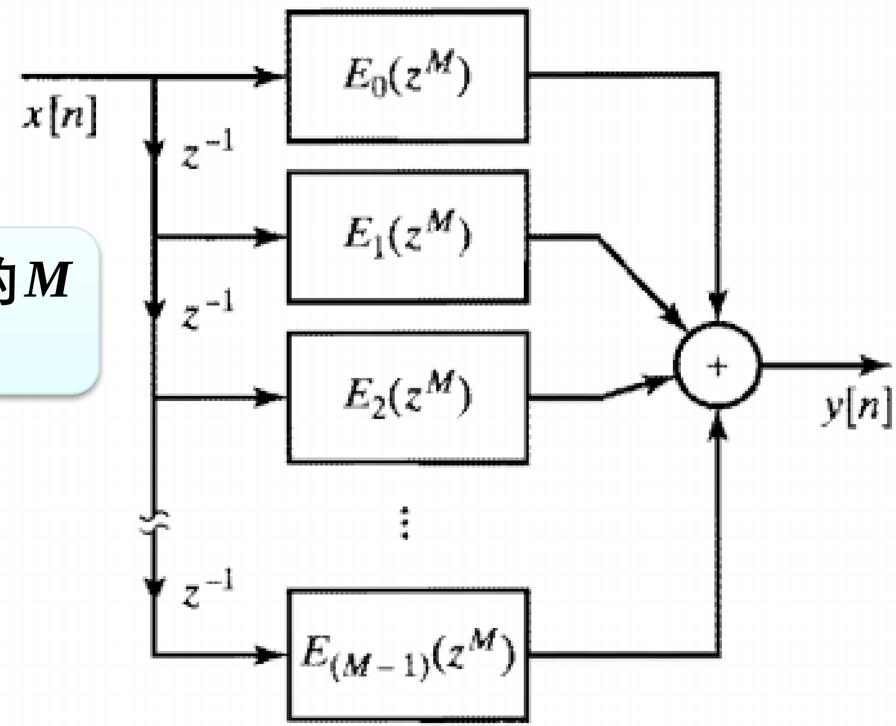
$$e_k[n]=h_k[nM]$$

$e_k[n]$ 为 $h_k[n]$ 的 M 倍下采样系统

可得 $h[n]$ 的z变换域多相表示

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)z^{-k}$$

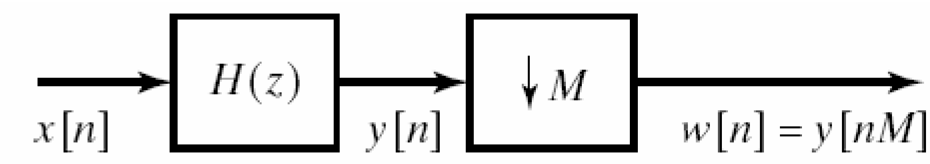
$$=\sum_{k=0}^{M-1}E_k\left(z^M\right)z^{-k}$$



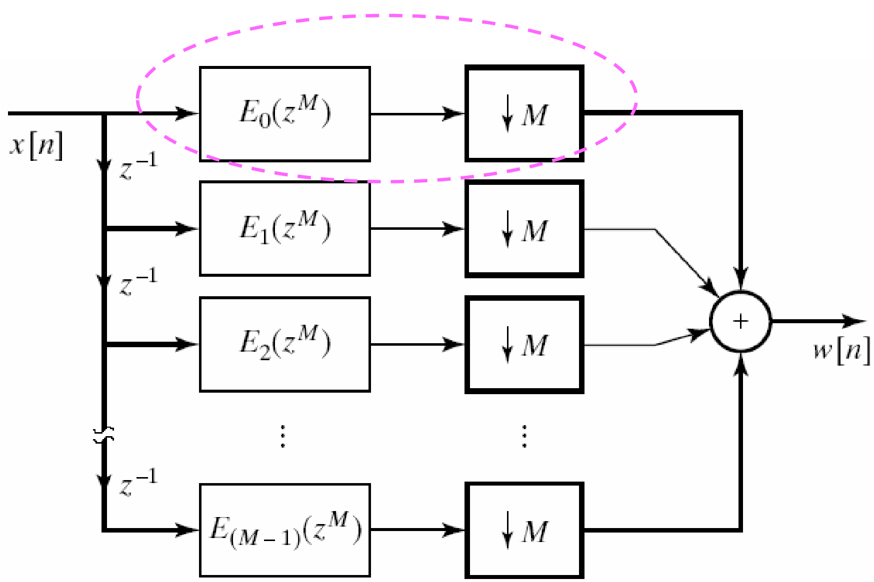
原滤波器可以表示为升采样（扩展）的多相滤波器的延迟和

$h_k[n]$为多相分量$e_k[n]$的M倍升采样（扩展）

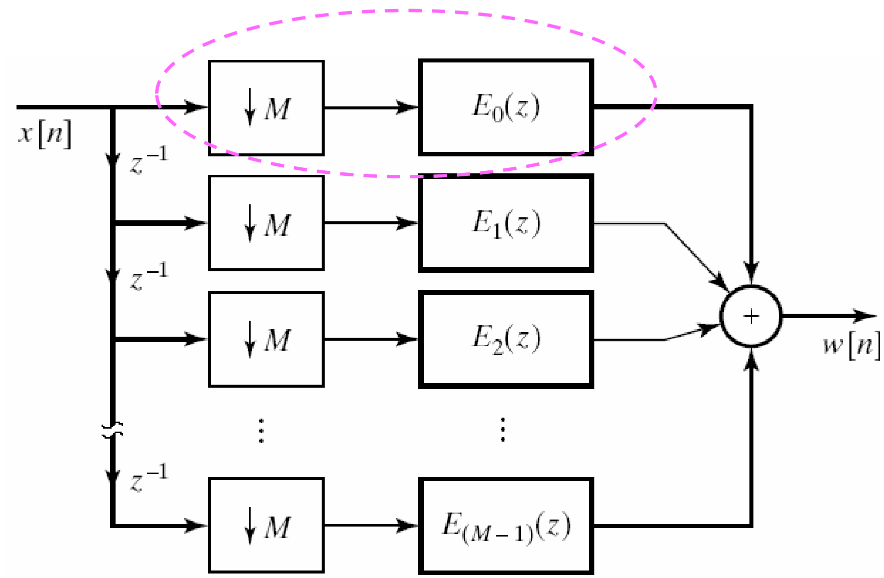
例：抽取滤波器的多相实现



$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}E_k\left(z^M\right)z^{-k}$$



多相分解的抽取滤波器的实现



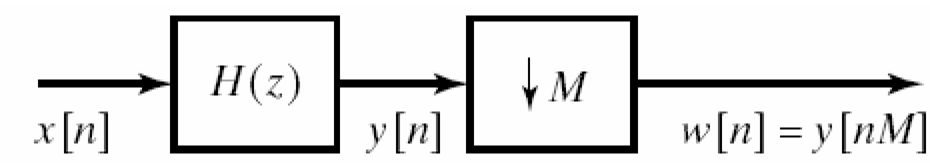
降采样恒等多相分解的抽取滤波器的实现

系统通过多相分解为多个多相分量的升采样子系统，以便利用降采样恒等简化

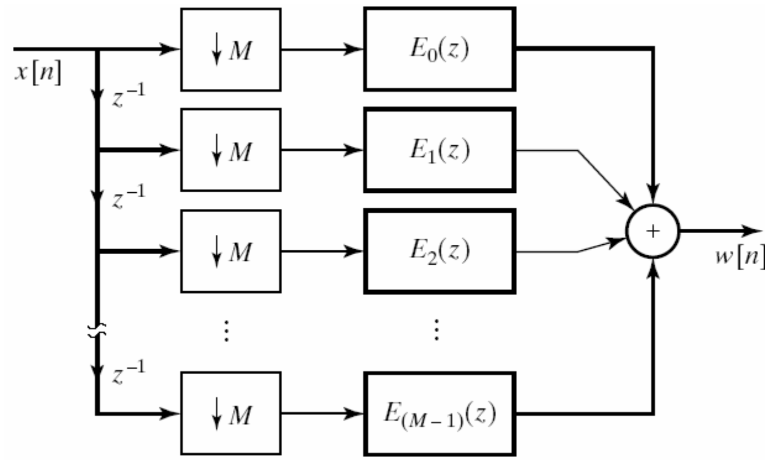
原抽取滤波器可以简化表示为：降采样与多相滤波器级联的延迟和

◆抽取滤波器实现复杂度比较

设 $H[z]$ 是长度为N的FIR滤波器



抽取滤波器直接实现



抽取滤波器多相（简化）实现

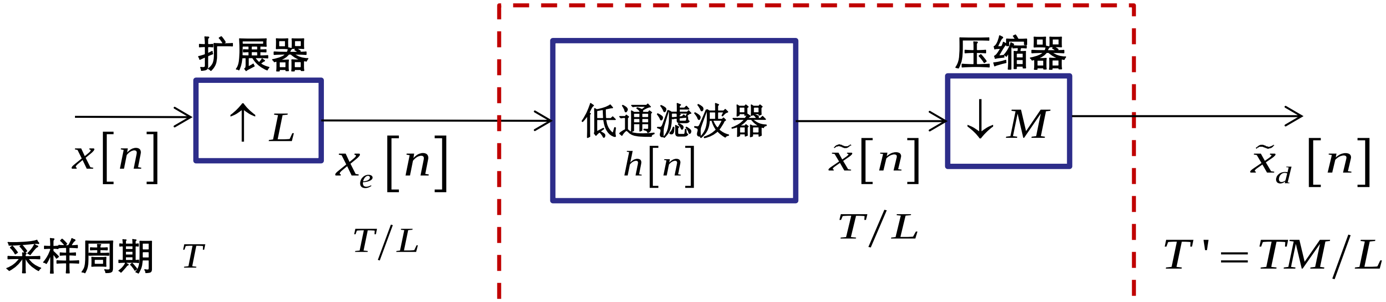
- 计算$w[n]$一个输出样值需计算M个$y[n]$值，即需
  - ✓ $M\times N$次乘法
  - ✓ $M\times(N\text{-}1)$ 次加法

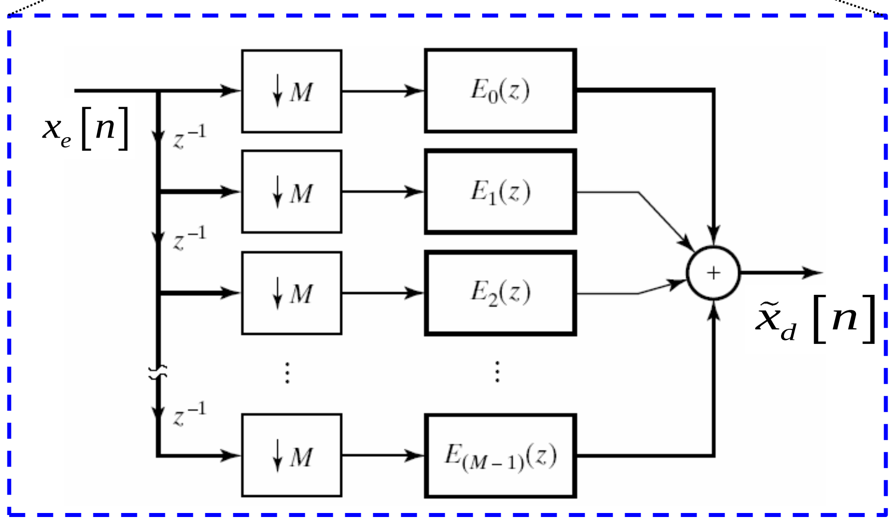
多相实现的计算复杂度约是直接实现的$1/M$

- 每个多相滤波器计算每个输出样值需
  - ✓ N/M次乘法和N/M -1次加法
- M个多相滤波器共需
  - ✓ N次乘法和N- M次加法
- 计算$w[n]$每个输出样值共需
  - ✓ N次乘法
  - ✓ $(N\text{-}M)+(M\text{-}1)=N\text{-}1$次加法

例：若拟在原按采样周期 T 的序列基础上获得按采样周期 $T'(=1.01T)$的序列，则需：

1）L=100倍内插；2）M=101倍抽样

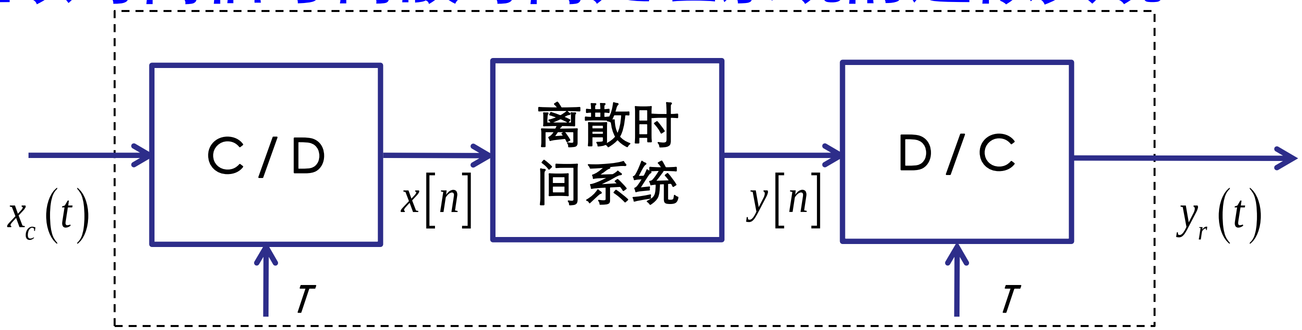




计算复杂度约是直接实现法的1/101

- 4.1 周期采样
- 4.2 采样的频域表示
- 4.3 由样本重构带限信号
- 4.4 连续时间信号的离散时间处理
- 4.5 离散时间信号的连续时间处理
- 4.6 利用离散时间处理改变采样率
- 4.7 多采样率信号处理
- 4.8 模拟信号的数字处理
- 4.9 在A/D和D/A转换中的过采样和噪声成形

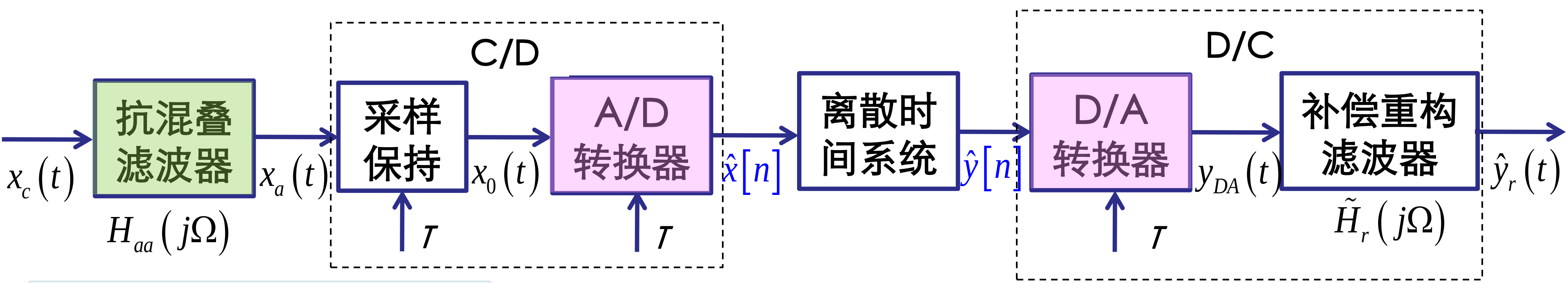
◆理想连续时间信号离散时间处理系统的近似实现



1）信号绝对带限

2）无限精度量化

（a）理想连续时间信号离散时间处理模型

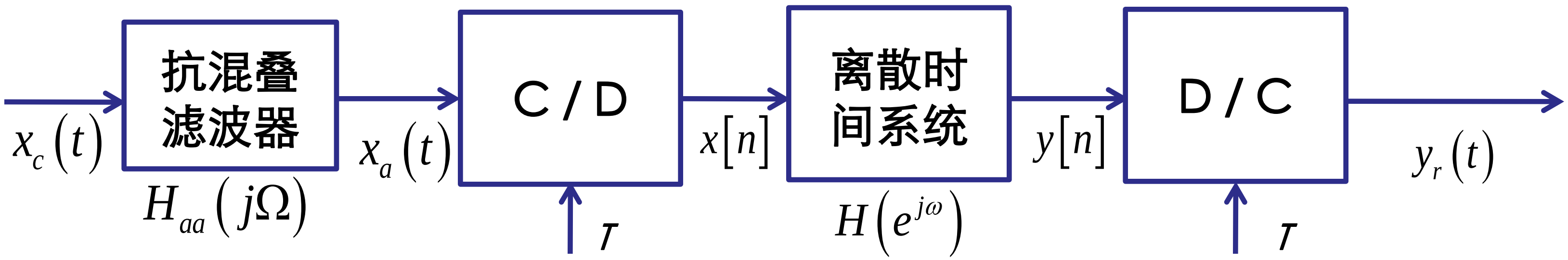


1）输入信号非绝对带限

2）各信号有限精度量化

（b）模拟信号的数字处理

◆抗混叠滤波作用：限制C/D输入信号带宽，避免采样混叠



理想情况下抗混叠滤波器的频率响应为

$$H_{aa}(j\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\Omega_c\le\pi/T\\ 0, & |\Omega|\ge\Omega_c\end{cases}$$

整个系统等效频率响应为

$$H_{eff}(j\Omega)=\begin{cases}H\left(e^{j\Omega T}\right), & |\Omega|<\Omega_c\\ 0, & |\Omega|\ge\Omega_c\end{cases}$$

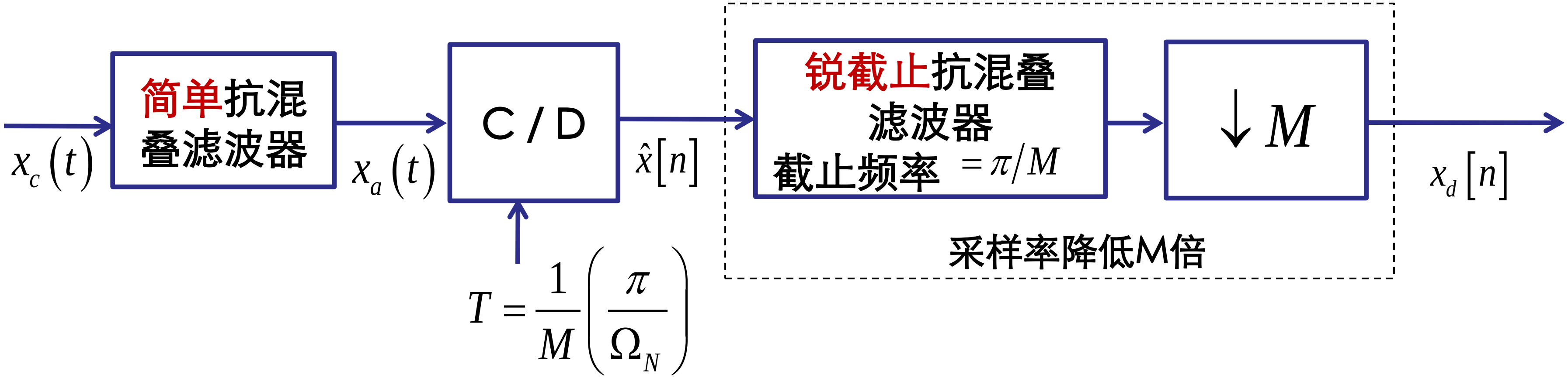
抗混叠滤波存在问题：
实现带外泄漏足够小的连续时间滤波器困难而昂贵！

实际带限抗混叠滤波器非理想，若 $H_{aa}(j\Omega)$在 $|\Omega|\ge\Omega_c$足够小，则

$$H_{eff}(j\Omega)\approx H_{aa}(j\Omega)H\left(e^{j\Omega T}\right)$$

4.8.1 消除混叠的预滤波

◆采用过采样A/D转换简化(降低)连续时间抗混叠滤波器(要求)



设 Ω_N 为抗混叠滤波之后保留的信号最高频率

连续时间简单抗混叠滤波器在频率 $M\Omega_N$ 处显著衰减但逐渐截止

- C/D转换的采样率 $\Omega_s=M\Omega_N$，比奈奎斯特率大得多

离散时间锐截止抗混叠滤波器在频率 π/M 处显著衰减

- M倍下采样以降低离散时间信号处理复杂度（计算量）

4.8.1 消除混叠的预滤波

信号占用频率 $|\Omega| < \Omega_N$

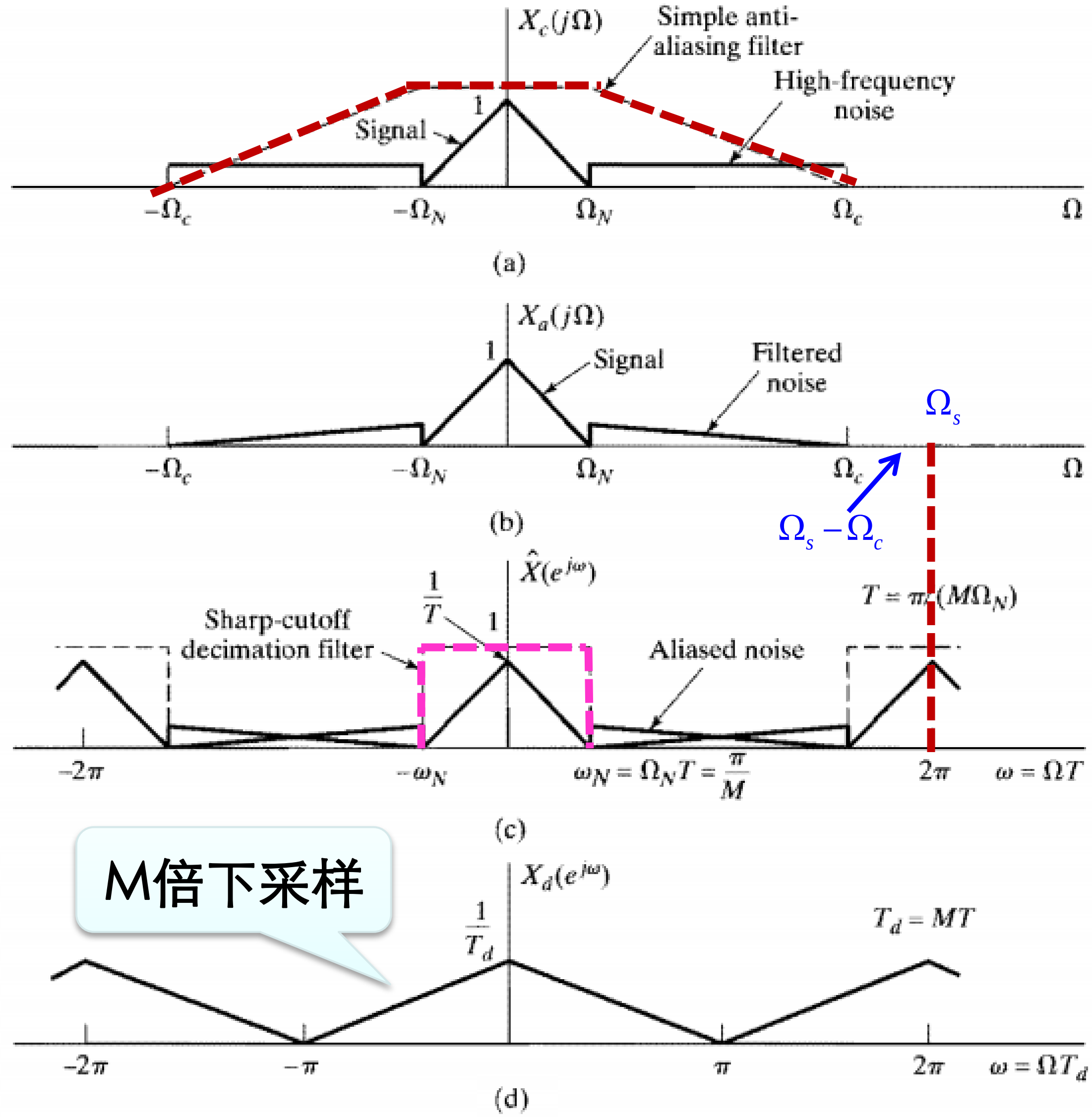
噪声最高频率分量 $\Omega_c > \Omega_N$

抗混叠滤波器

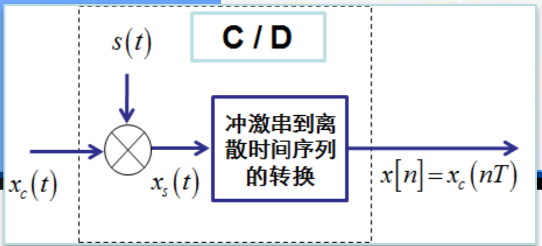
- 在频率 $|\Omega| < \Omega_N$ 内平坦
- 在频率$\Omega_N \le |\Omega| < \Omega_c$ 逐渐截止

采样率 $\Omega_s = 2\pi/T$ 足够高，使得 $\Omega_s - \Omega_c > \Omega_N$ ，因而噪声有混叠而信号没有

经离散时间锐截止抗混叠滤波后，再下采样，即可获得低采样率无混叠的离散信号

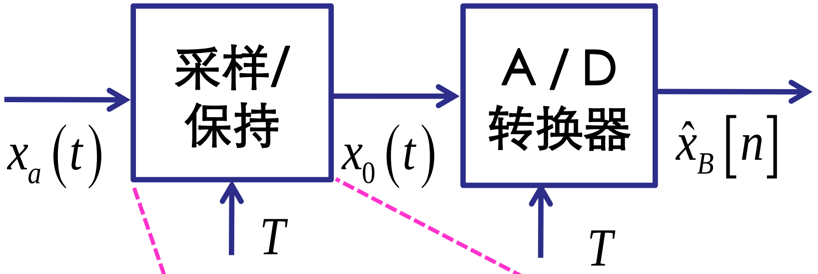


4.8.2 模拟到数字（A/D）转换



◆A/D转换与理想C/D转换差异

-- 工程上近似实现连续（模拟）信号到有限精度数字信号的转换



➤ 采样保持输出为

$$x_0(t)=h_0(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

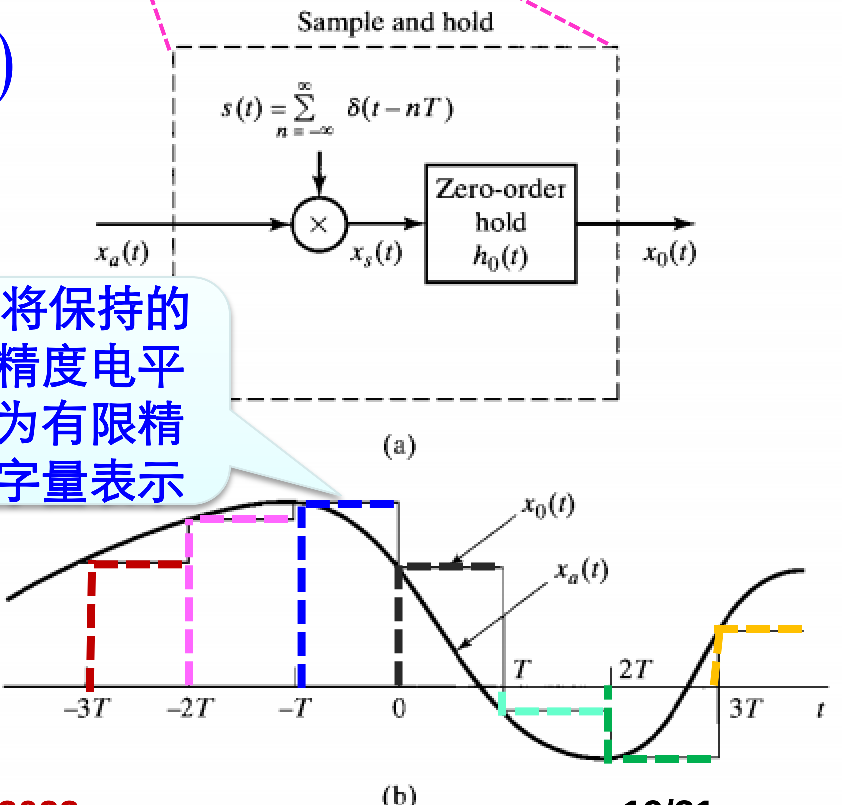
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)h_0(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h_0(t-nT)$$

其中 $x[n]=x_a(nT)$,

$$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0, & other\end{cases}$$

ADC将保持的无限精度电平转换为有限精度数字量表示



4.8.2 模拟到数字（A/D）转换

◆A/D转换中的量化

□ 量化输出表示

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

采样样本**连续值**被**近似**到最接近的**离散量化电平**上

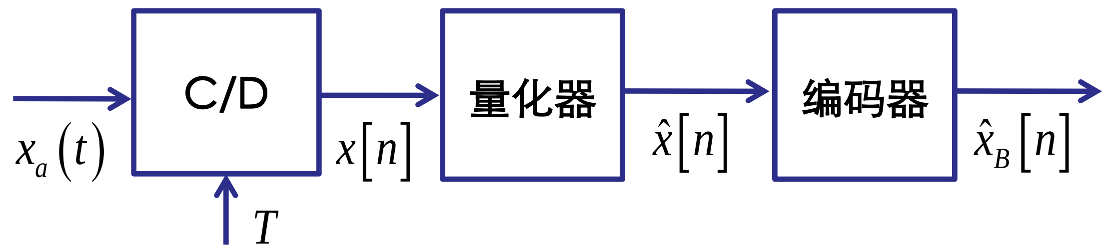
□量化阶 Δ 的选取

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

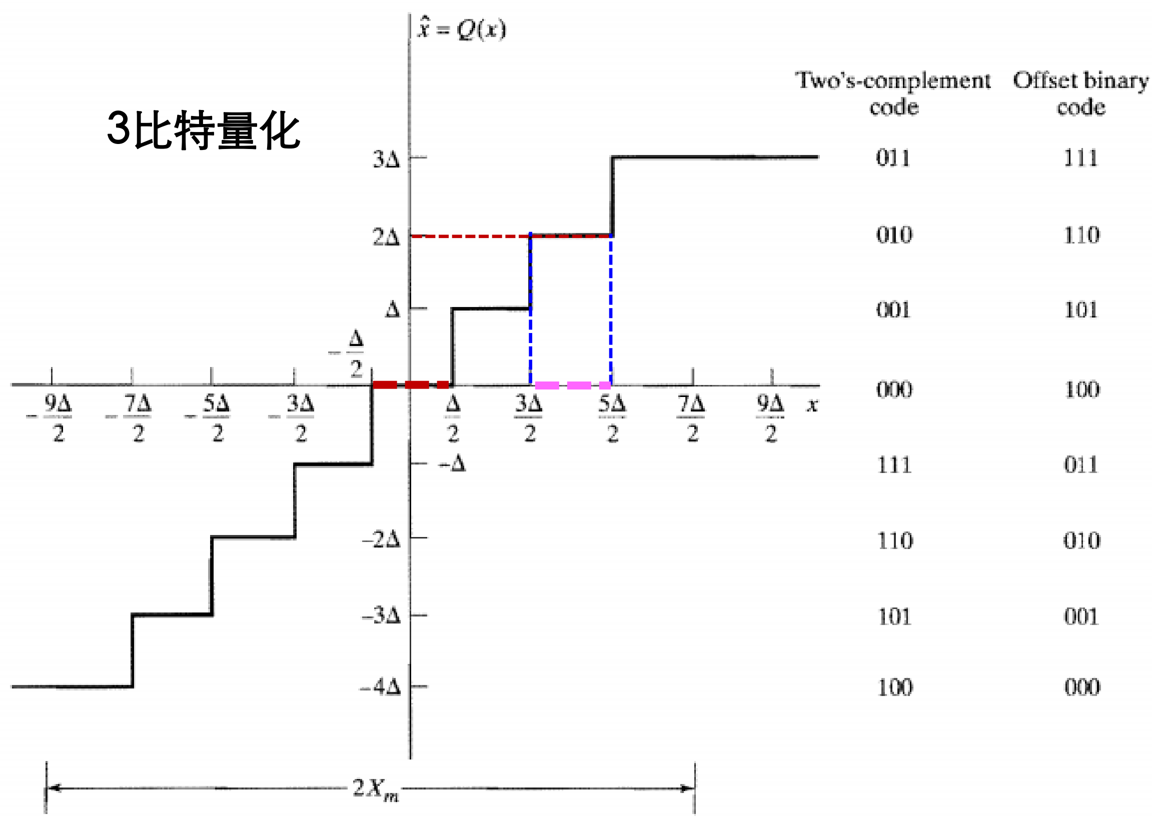
X_m 为A/D转换器的**满幅度值**

B+1为A/D转换器的**量化位数**

A/D转换概念表示



3比特量化



4.8.2 模拟到数字（A/D）转换

◆ A/D转换中的编码

□码字与量化样本间关系

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n]$$

$\hat{x}_B[n]$ 为浮点二进制数，
且 $-1 \le \hat{x}_B[n] < 1$

Binary symbol	Numeric value, $\hat{x}_B$
0◇1 1	3/4
0◇1 0	1/2
0◇0 1	1/4
0◇0 0	0
1◇1 1	−1/4
1◇1 0	−1/2
1◇0 1	−3/4
1◇0 0	−1

3比特量化

◆ B+1比特量化编码的2的补码分数表示

$a_{0\diamond}a_1a_2\cdots a_b\cdots a_B$，且 a_b取值为0或1

对应 $\hat{x}_B[n]$取值为

$$\hat{x}_B[n] = -a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} \cdots a_B 2^{-B}$$

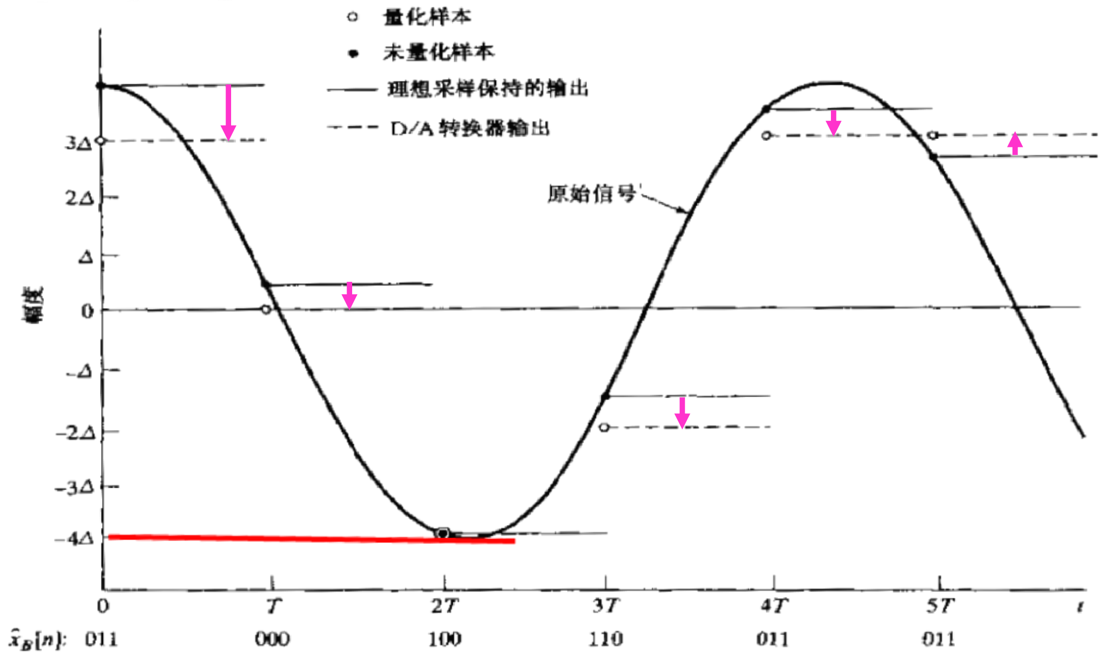


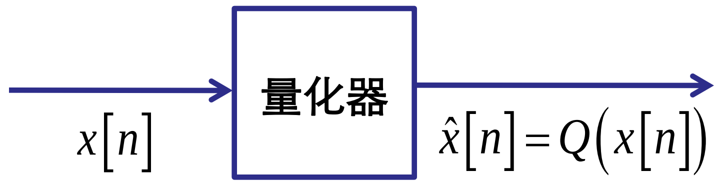
图 4.49 用 3 位量化器的采样、量化、编码和 D/A 转换

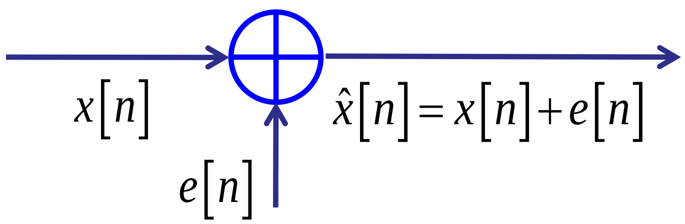
4.8.3 量化误差分析

◆量化器加性噪声模型

量化器的**量化误差**可表示为

$$e[n]=\hat{x}[n]-x[n]$$





只要**样本真值**处于以下范围

$$(-X_m-\Delta/2)<x[n]\le(X_m-\Delta/2)$$

则**量化误差**满足

$$-\Delta/2<e[n]\le\Delta/2$$

当**信号足够复杂**，其**量化阶足够小**，量化误差的统计表示可假设为

1、误差序列 $e[n]$是**平稳随机过程**的一个样本序列。

2、误差序列 $e[n]$与采样样本序列 $x[n]$ **不相关**。

3、误差过程的随机变量是不相关的，即误差为一个**白噪声**过程

4、误差过程的概率分布在量化误差范围内是**均匀分布**的。

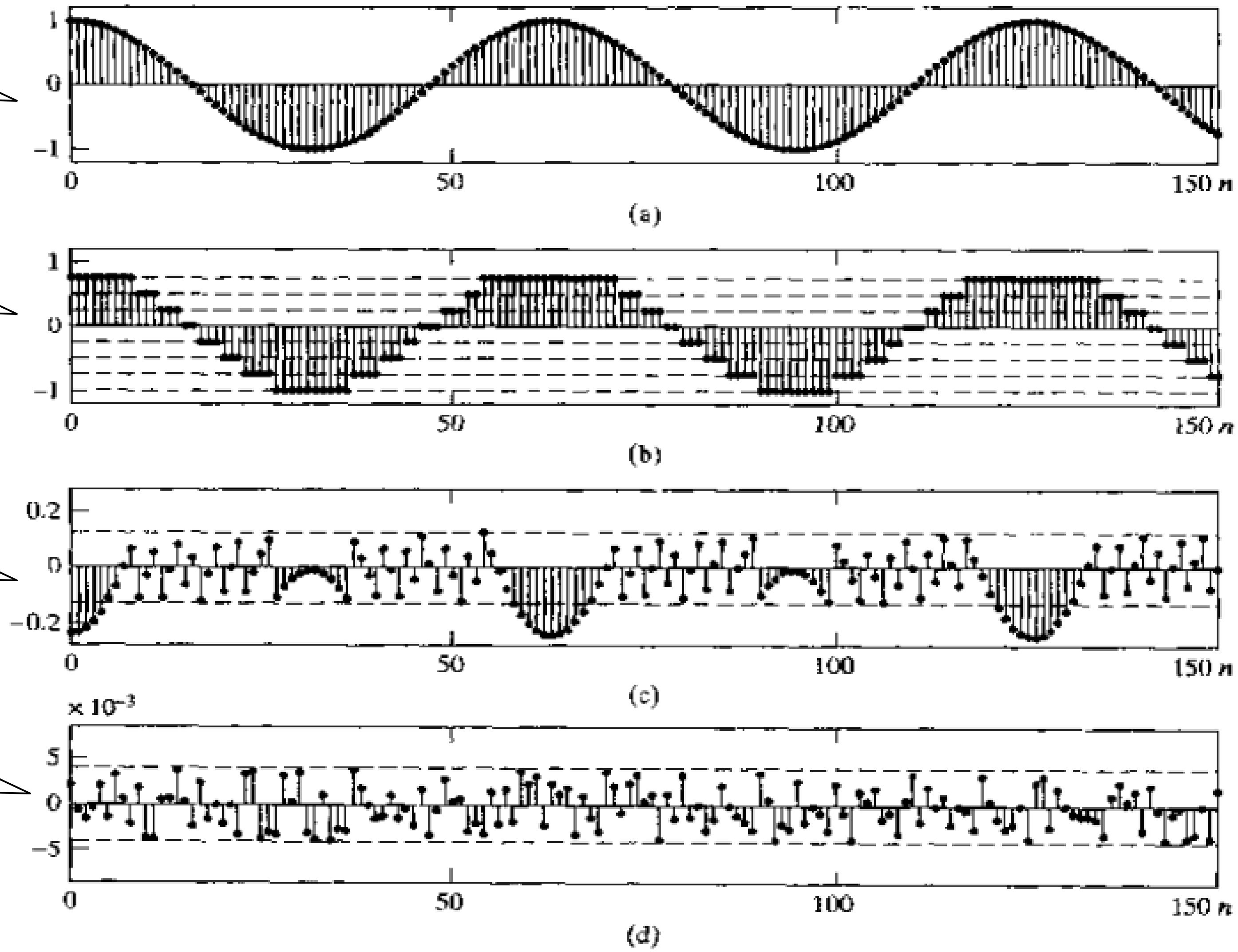
4.8.3 量化误差分析

采样样本序列

3位量化样本序列

3位量化误差序列

8位量化误差序列



量化误差呈现随机特性的本质是量化为非线性处理!

◆量化器信噪比

对于均匀分布的白噪声等效的量化噪声，**噪声方差**为

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}$$

对于满幅度值为 X_m 的（B+1）位量化器，**量化方差**为

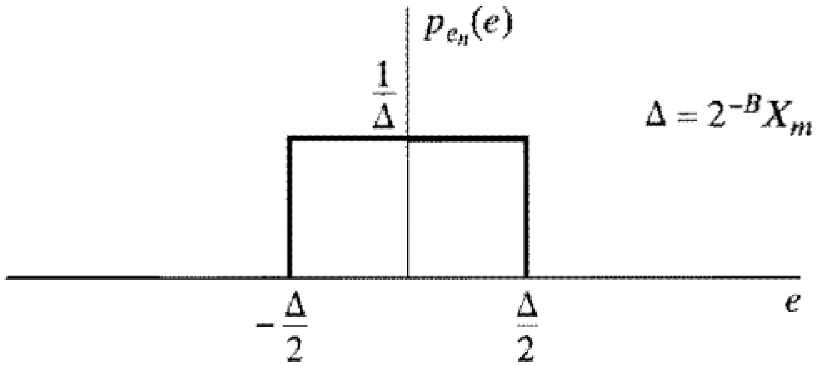
$$\sigma_e^2 = \left(X_m / 2^B\right)^2 / 12$$

则对功率为 σ_x^2 的信号，其**量化输出信噪比**为

$$SNR = 10\log_{10}\left(\sigma_x^2 / \sigma_e^2\right)$$

$$= 6.02B + 10.8 - 20\log_{10}\left(X_m / \sigma_x\right)$$

□量化噪声概率密度函数



✓量化位数每增加1位，量化信噪比增加约6dB；

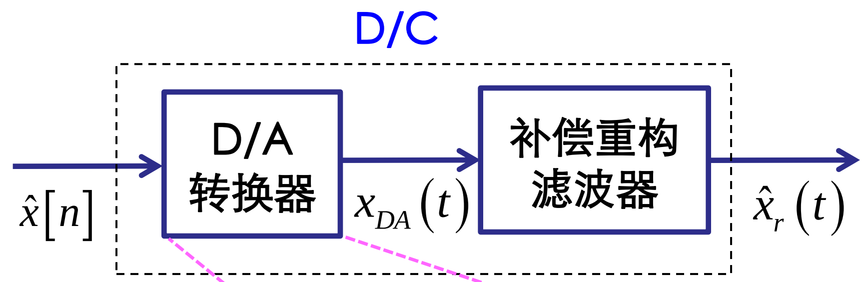
✓信号幅度均方根值 σ_x 的取值（通过AGC调整）直接影响量化信噪比；σ_x 越接近 X_m，SNR越大

✓当 $\sigma_x = X_m/4$，$SNR = 6.02B - 1.25\text{dB}$

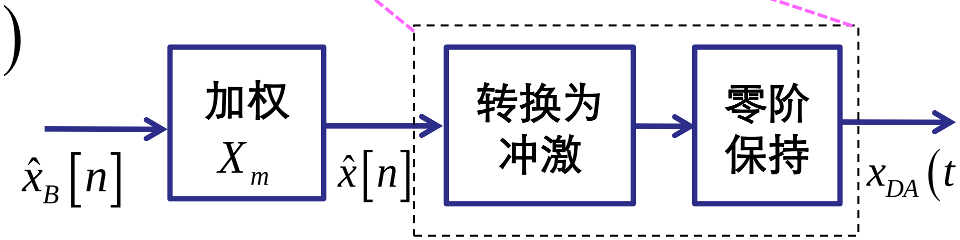
4.8.4 D/A转换

◆理想D/C转换的近似实现

——D/A转换器+低通滤波器



D/C转换器的D/A等效实现框图



D/A转换器实现框图

D/A转换器输出为

$$x_{DA}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t-nT)$$

$$=x_0(t)+e_0(t)$$

$$\hat{x}[n]=x[n]+e[n] \qquad x[n]=x_a(nT)$$

其中

$$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T \\ 0, & other\end{cases}$$

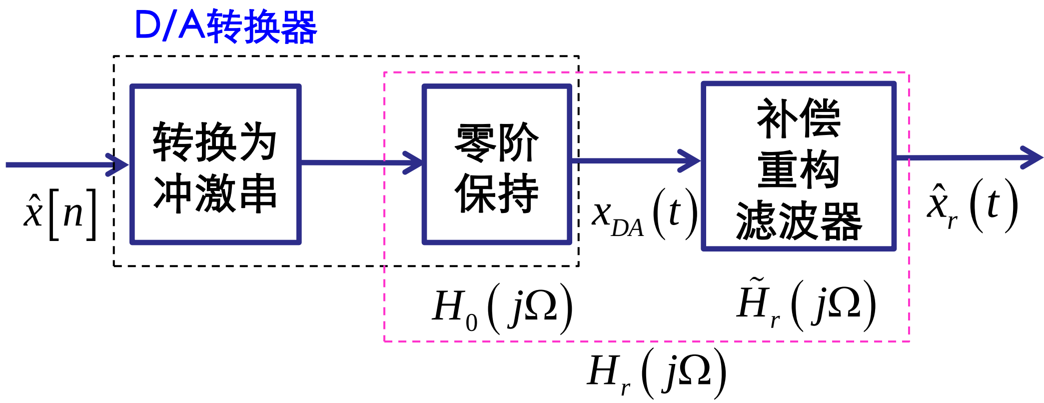
$$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t-nT)$$

D/A输出信号分量

$$e_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t-nT)$$

D/A输出误差分量

数



◆D/A转换分析

D/A输出 $x_{DA}(t)$ 中的**信号分量**

$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h_0(t-nT)$ 的频谱：

$$X_0(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega Tn}H_0(j\Omega)$$

$$=X\left(e^{j\Omega T}\right)H_0(j\Omega)=\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-j2\pi k/T)\right]H_0(j\Omega)$$

- **零阶保持滤波器**频响为

$$H_0(j\Omega)=\frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega}e^{-j\Omega T/2}$$

- 由拟实现的**理想重构滤波器**频响

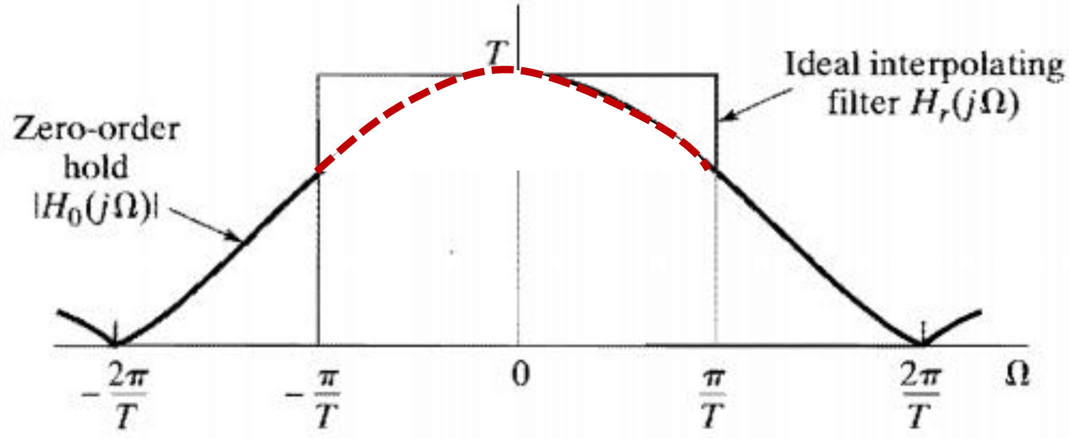
$$H_r(j\Omega)=\begin{cases}T, & |\Omega|<\pi/T\\ 0, & other\end{cases}$$

可得**补偿重构滤波器**频响为

$$\tilde{H}_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)/H_0(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}e^{j\Omega T/2}, & |\Omega|<\pi/T\\ 0, & |\Omega|\ge\pi/T\end{cases}$$

- 零阶保持滤波器频响

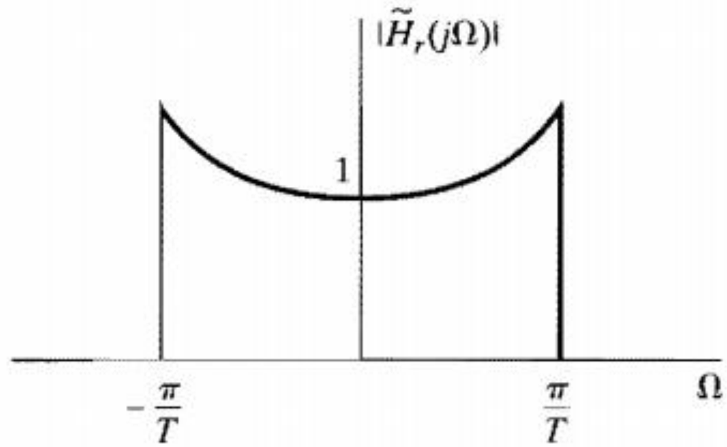
$$H_0(j\Omega)=\frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega}e^{-j\Omega T/2}$$



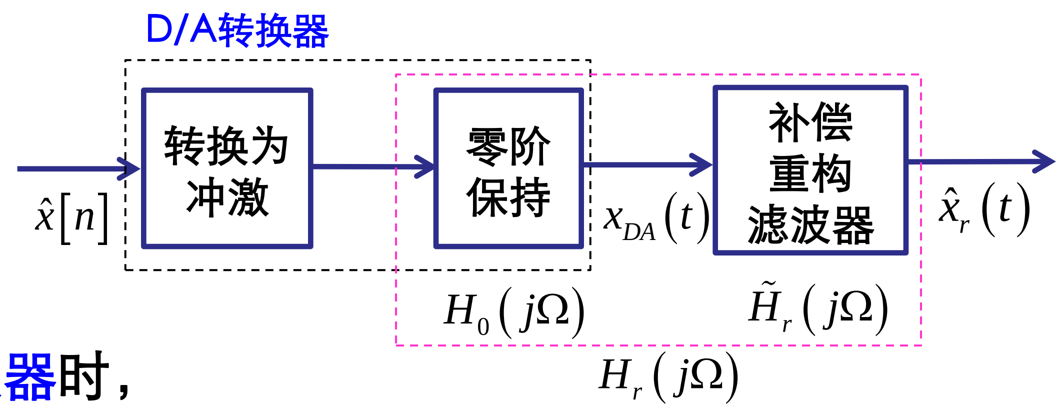
(a)

- 补偿重构滤波器频响为

$$\tilde{H}_r(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}e^{j\Omega T/2}, & |\Omega|<\pi/T\\ 0, & |\Omega|\ge\pi/T\end{cases}$$



(b)



◆D/A转换器后接理想重构滤波器输出

当 $\tilde{H}_r(j\Omega)$ 为理想补偿重构滤波器时，

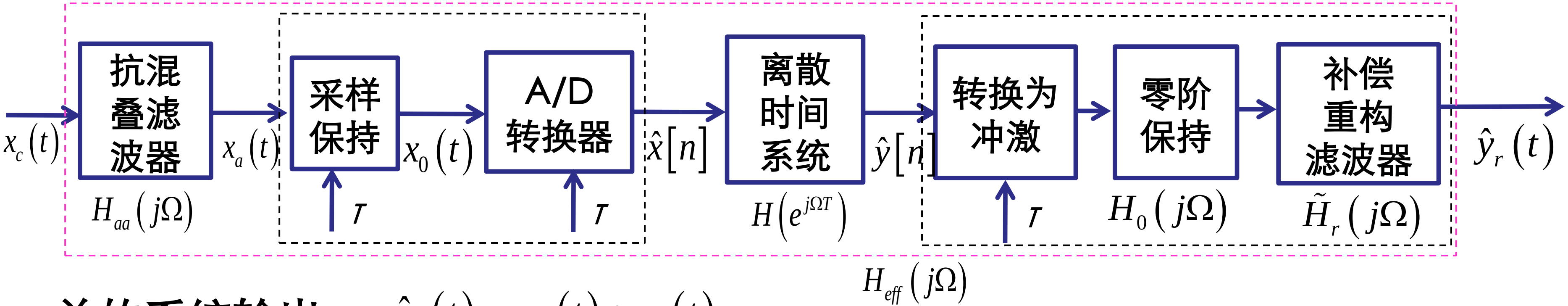
即 $H_r(j\Omega)$ 为理想低通滤波器时，则

$$\hat{x}_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{x}[n]\frac{\sin\left[\pi(t-nT)/T\right]}{\pi(t-nT)/T}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\sin\left[\pi(t-nT)/T\right]}{\pi(t-nT)/T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e[n]\frac{\sin\left[\pi(t-nT)/T\right]}{\pi(t-nT)/T}$$

$$=x_a(t)+e_a(t)$$

◆模拟信号数字处理系统



总的系统输出 $\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t)$

总系统输出中信号分量 $y_a(t)$ 的频谱为

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega) X_c(j\Omega)$$

总系统的有效频率响应

$$H_{eff}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega)$$

总系统输出的A/D量化噪声功率谱为

$$P_{e_a}(j\Omega) = \left|\tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T})\right|^2 \sigma_e^2$$