5.4 幅度与相位之间的关系

◆具有有理系统函数的系统的幅度与相位关系

频率响应的幅度特性和零极点个数	→	仅有有限种选择的相位特性
频率响应的相位特性和零极点个数	→	仅有有限种选择的幅度特性（除幅度加权因子外）

◆最小相位系统的幅度与相位关系

频率响应的幅度特性	→	唯一决定相位特性
频率响应的相位特性	→	确定的幅度特性（幅度加权因子除外）

由已知的幅度/相位特性，及由其获得的相应的相位/幅度特性，最终可获得完整的频率响应或系统函数。

5.4 幅度与相位之间的关系

◆ 由幅度响应获得系统函数

系统频率响应的幅度平方为 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right) = H(z)H^*\left(1/z^*\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

其中有理系统函数可表示为

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)\Big/\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)$$

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k^* z\right)\Big/\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k^* z\right)$$

令：

$$C(z) = H(z)H^*\left(1/z^*\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)\left(1-c_k^* z\right)\Big/\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)\left(1-d_k^* z\right)$$

则：系统频率响应的幅度平方可表示为函数 $C(z)$ 在单位圆上的求值

$H(z)$ 的每个零点 c_k 和极点 d_k 在 $C(z)$ 中分别存在：
零点共轭倒数对 $\left(c_k,\ (c_k^*)^{-1}\right)$ 和极点共轭倒数对 $\left(d_k,\ (d_k^*)^{-1}\right)$。

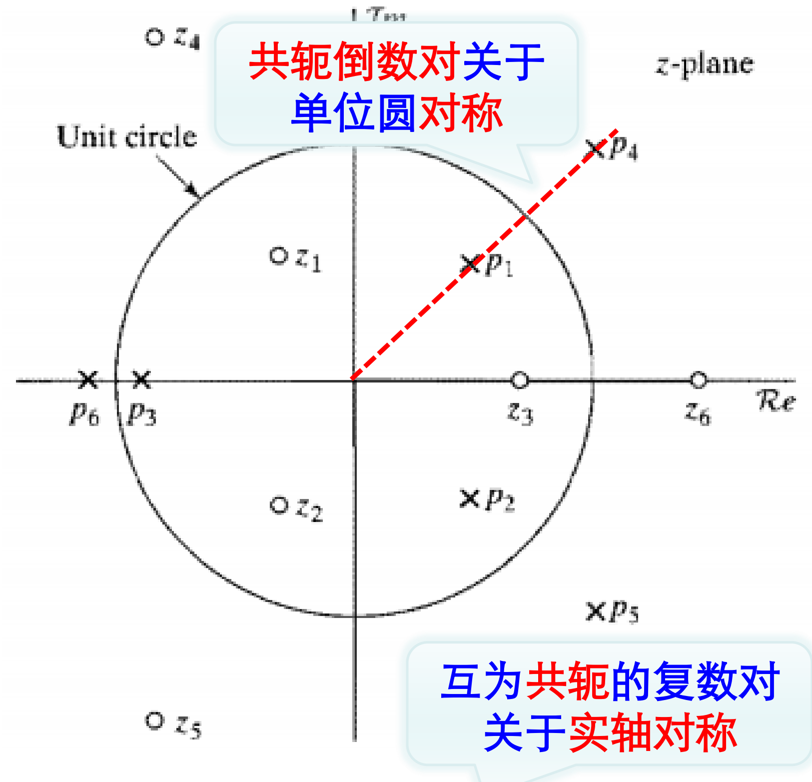
1）由已知 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ 以 z 代替 $e^{j\omega}$ 可构造 $C(z)$；
2）再由 $C(z)$ 获得全部可能形式的零、极点；
3）最后由稳定性、因果性等限定条件选择零、极点以构造所求的 $H(z)$。

5.4 幅度与相位之间的关系

例：由 $C(z)$ 的零极点确定稳定、因果系统 $H(z)$ 的零极点

给出C(z)的共轭倒数对的所有零极点为

$$\begin{cases} 零点对1: & (z_1, \quad z_4) \\ 零点对2: & (z_2, \quad z_5) \\ 零点对3: & (z_3, \quad z_6) \end{cases} \begin{cases} 极点对1: & (p_1, \quad p_4) \\ 极点对2: & (p_2, \quad p_5) \\ 极点对3: & (p_3, \quad p_6) \end{cases}$$



对于稳定因果系统，极点必须位于单位圆内，因此由极点对可得 $H(z)$的极点为 $p_1, \quad p_2, \quad p_3$

对于实系数有理系统函数，$H(z)$ 的零点要么是实数，要么是复数共轭对，因此由零点对可得与 $H(z)$ 有关的零点为 z_3 或 z_6 和$(z_1, \quad z_2)$ 或$(z_4, \quad z_5)$。

对于3极点3零点稳定因果系统，总共有4种具有相同幅度特性的不同的频率响应，4种零点组合为：(z_3, z_1, z_2), (z_6, z_1, z_2), (z_3, z_4, z_5), (z_6, z_4, z_5)。

第五章：连续时不变系统的变换分析

5.5 全通系统

全通系统零点与极点互为共轭倒数

具有如下一阶因子形式系统函数

$$H(z)=\left(z^{-1}-a^{*}\right)/\left(1-az^{-1}\right):$$

全通系统仅其幅度响应为1（或常数）

其频率响应的幅度 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 与 ω 无关，即

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\left(e^{-j\omega}-a^{*}\right)/\left(1-ae^{-j\omega}\right)\right|=\left|e^{-j\omega}\right|\left|1-a^{*}e^{j\omega}\right|/\left|1-ae^{-j\omega}\right|=1$$

此类以恒定的增益/衰减通过输入信号的全部频率分量的系统称为全通系统

全通系统的（有理）系统函数一般形式

$$H_{ap}(z)=A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{z^{-1}-d_k}{1-d_k z^{-1}}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{\left(z^{-1}-e_k^{*}\right)}{\left(1-e_k z^{-1}\right)}\times\frac{\left(z^{-1}-e_k\right)}{\left(1-e_k^{*}z^{-1}\right)}$$

式中 A 为正常数， d_k 和 e_k 分别为 $H_{ap}(z)$ 的实数和复数极点；
对于因果稳定系统，所以极点满足存在 $|d_k|<1$ 且 $|e_k|<1$ 。

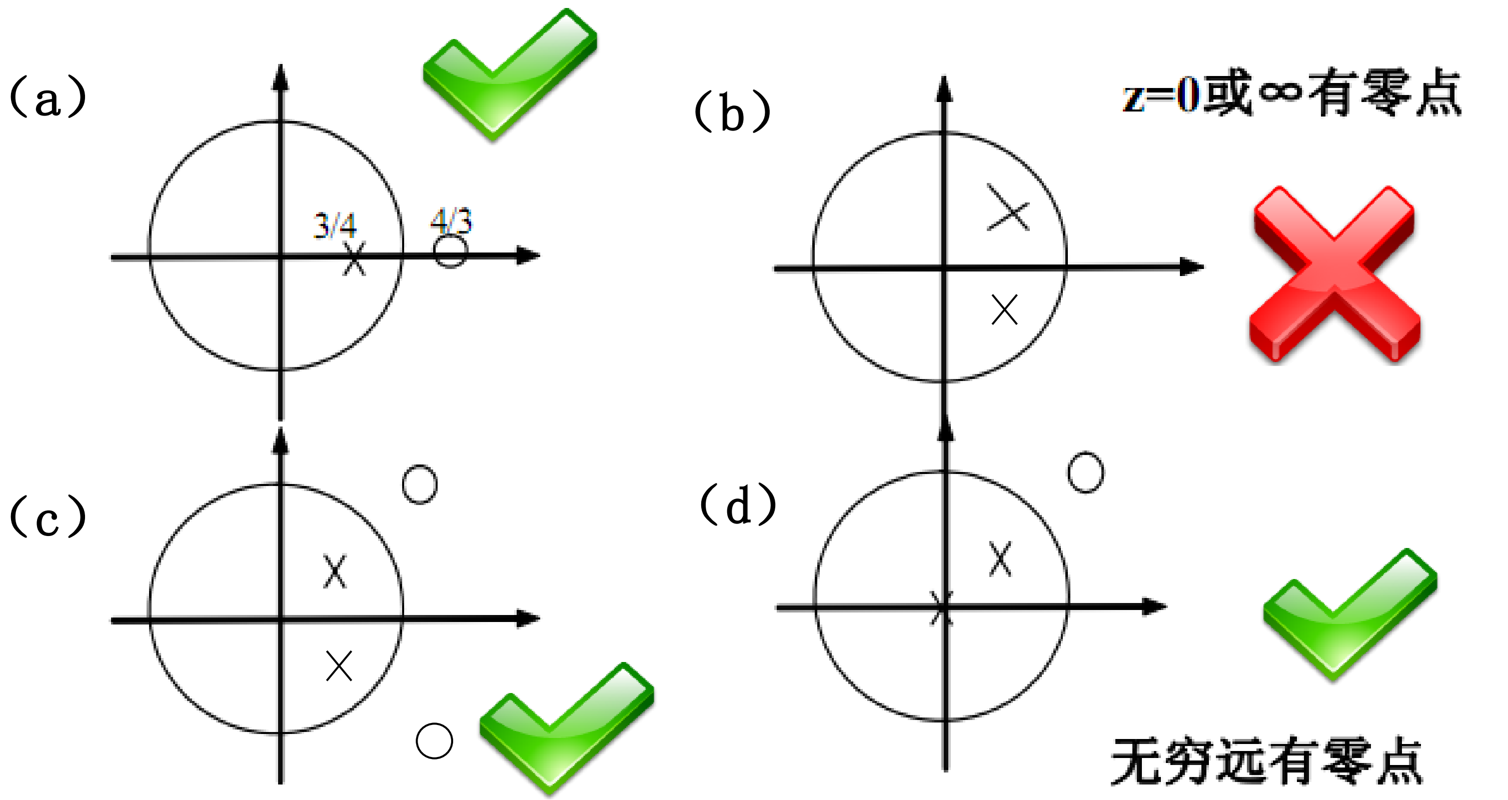
全通系统的系统函数由不同数量的一阶或二阶因式的乘积构成；

全通系统的系统函数有 $2M_c+M_r$ 个零点和极点 ；

全通系统极点和零点互为（共轭）倒数对，即 $\left(d_k,d_k^{-1}\right)$ 和 $\left(e_k,(e_k^{*})^{-1}\right)$。

5.5 全通系统

哪个系统为全通系统



互为共轭倒数的复数对关于单位圆对称

5.5 全通系统

◆一阶全通系统：频率响应

$$H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)=\left(z^{-1}-a^{*}\right)/\left(1-az^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\omega},a=re^{j\theta}}=\left(e^{-j\omega}-re^{-j\theta}\right)/\left(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right)$$

相位响应

$$\angle\left[\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right]=-\omega-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]$$

对于因果稳定的一阶全通系统连续相位为非正值

群时延

$$\operatorname{grd}\left[\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right]=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}=\frac{1-r^2}{\left|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|^2}$$

对于因果稳定的一阶全通系统群时延为正值

◆二阶全通系统：频率响应

$$H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)=\left(z^{-1}-a^{*}\right)\left(z^{-1}-a\right)/\left(1-az^{-1}\right)\left(1-a^{*}z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\omega},a=re^{j\theta}}$$

相位响应

$$\angle\left[\frac{\left(e^{-j\omega}-re^{-j\theta}\right)\left(e^{-j\omega}-re^{j\theta}\right)}{\left(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}\right)\left(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega}\right)}\right]=-2\omega-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]$$

$$-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}\right]$$

对于因果稳定的二阶全通系统连续相位也为非正值

5.5 全通系统

◆例：一阶全通系统

系统1：极点 $z=0.9$

系统2：极点 $z=-0.9$

◆例：二阶全通系统

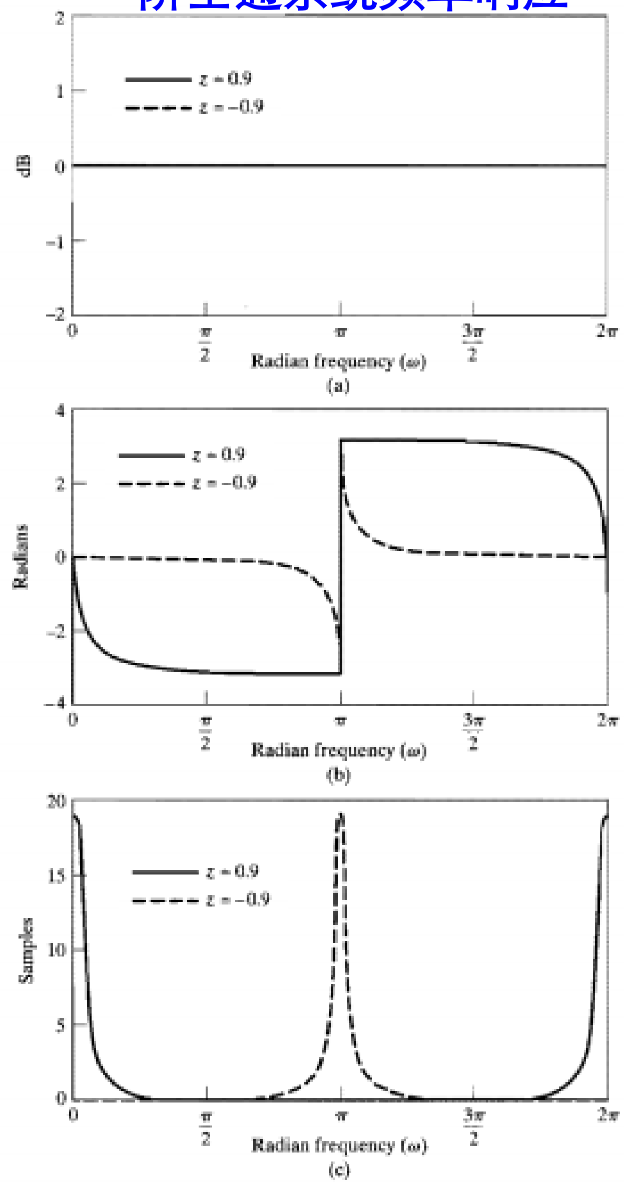
极点为 $z=0.9e^{\pm j\pi/4}$

两个重要特性

因果全通系统的连续相位在 $0<\omega<\pi$ 为非正（端点为0）

稳定因果全通系统群时延总为正。

一阶全通系统频率响应



5.5 全通系统

◆全通系统用途

1、补偿相位失真

$$H(z)H_{ap}(z)=H'(z),\quad \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|H'\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

有相位失真

补偿相位失真

无（线性）相位失真

补偿前后无幅度变化

2、作为目标函数求出最小相位系统以补偿幅度失真

$$H(z)H_{\min}(z)=H_{ap}(z),\quad \left|H\left(e^{j\omega}\right)H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$$

有幅度失真

补偿幅度失真

无幅度失真

补偿前后幅度为1

5.6 最小相位系统

具有有理系统函数的LTI系统，其频率响应的幅度（幅度响应）不能唯一表征该系统。

对于稳定因果系统，其系统函数的极点必须位于单位圆内，但对零点无限制。

若要求稳定因果系统的逆系统也是稳定因果的，则要求该稳定因果系统的零点也必须位于单位圆内。

系统函数的零点和极点均位于单位圆内的系统，称为最小相位系统。

最小相位系统可由其幅度响应唯一确定。

5.6.1 最小相位和全通分解

$H_{ap}(z)=\left(z^{-1}-a^{*}\right)/\left(1-az^{-1}\right)$

定论：任何有理系统函数都能表示成

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z) \qquad (*)$$

式中 $H_{\min}(z)$ 是最小相位系统，$H_{ap}(z)$ 是全通系统。

证明：

假设 $H(z)$ 仅有一个零点 $z=1/c^{*}$ 在单位圆外，即 $|c|<1$，其余的零点、极点都在单位圆内，则 $H(z)$ 可表示为：

$$H(z)=H_1(z)\left(-c^{*}\right)\left(1-(1/c^{*})z^{-1}\right)=H_1(z)\left(z^{-1}-c^{*}\right)$$

则式中 $H_1(z)$ 为最小相位系统，并且进一步 $H(z)$ 可等效表

$$H(z)=H_1(z)\left(1-cz^{-1}\right)\left(z^{-1}-c^{*}\right)/\left(1-cz^{-1}\right)$$

所乘因式的极点与原因式的零点为共轭倒数对

式中 $H_1(z)\left(1-cz^{-1}\right)$为最小相位系统，$\left(z^{-1}-c^{*}\right)/\left(1-cz^{-1}\right)$为全通因子

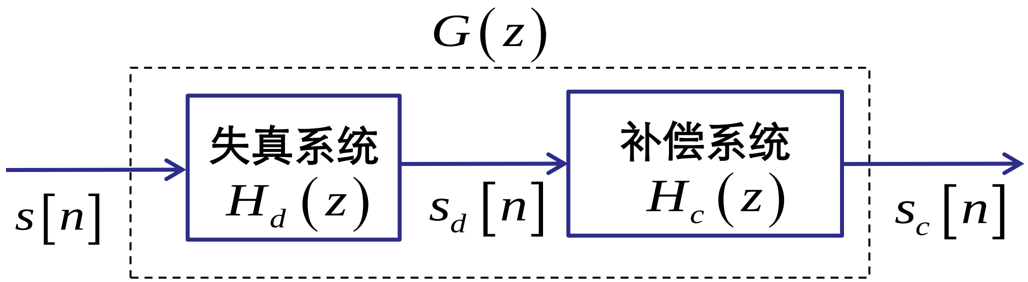
即对应$(*)$式中

$$H_{\min}(z)=H_1(z)\left(1-cz^{-1}\right),\quad H_{ap}=\left(z^{-1}-c^{*}\right)/\left(1-cz^{-1}\right)$$

对于有多个零极点在单位圆外的系统，可针对各个零点和极点分别构造全通因子，最终的全通系统为所有全通因子的乘积。

5.6.2 频率响应补偿

一个信号 $s[n]$ 被频率响应为 $H_d(z)$ 的LTI系统所失真，现需设计补偿系统 $H_c(z)$ 处理失真信号，使输出信号 $s_c[n]=s[n]$。



假定 $H_d(z)$ 已知或近似为一个有理系统函数，则可分解为一个最小相位系统和全通系统的乘积

$$H_d(z)=H_{d\min}(z)H_{ap}(z)$$

选取补偿滤波器为

$$H_c(z)=1/H_{d\min}(z)$$

联系 $s[n]$ 和 $s_c[n]$ 的总系统函数为

$$G(z)=H_d(z)H_c(z)=H_{ap}(z)$$

对于不存在因果稳定的逆系统的系统，通过最小相位系统和全通系统的分解，可补偿幅度失真

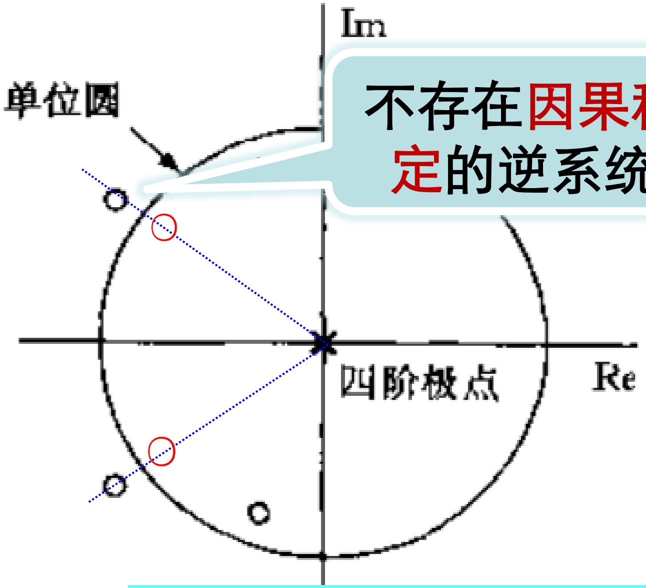
补偿系统完全补偿了失真信号的幅度，但其相位变化了 $\angle H_{ap}(e^{j\omega})$。

5.6.2 频率响应补偿

◆例5.15：FIR系统的补偿

失真系统的系统函数为

$$H_d(z)=\left(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}\right)$$
$$\times\left(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}\right)\left(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}\right)$$



不存在因果稳定的逆系统

可另表示为

$$H_d(z)=\left(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}\right)$$
$$\times(-1.25)^2\left(z^{-1}-0.8e^{-j0.8\pi}\right)\left(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi}\right)$$

$$H_{ap}=\left(z^{-1}-c^*\right)/\left(1-cz^{-1}\right)$$

将位于单位圆外的零点反射到单位圆内，可得最小相位系统为

$$H_{\min}(z)=(1.25)^2\left(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}\right)$$
$$\times\left(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}\right)$$

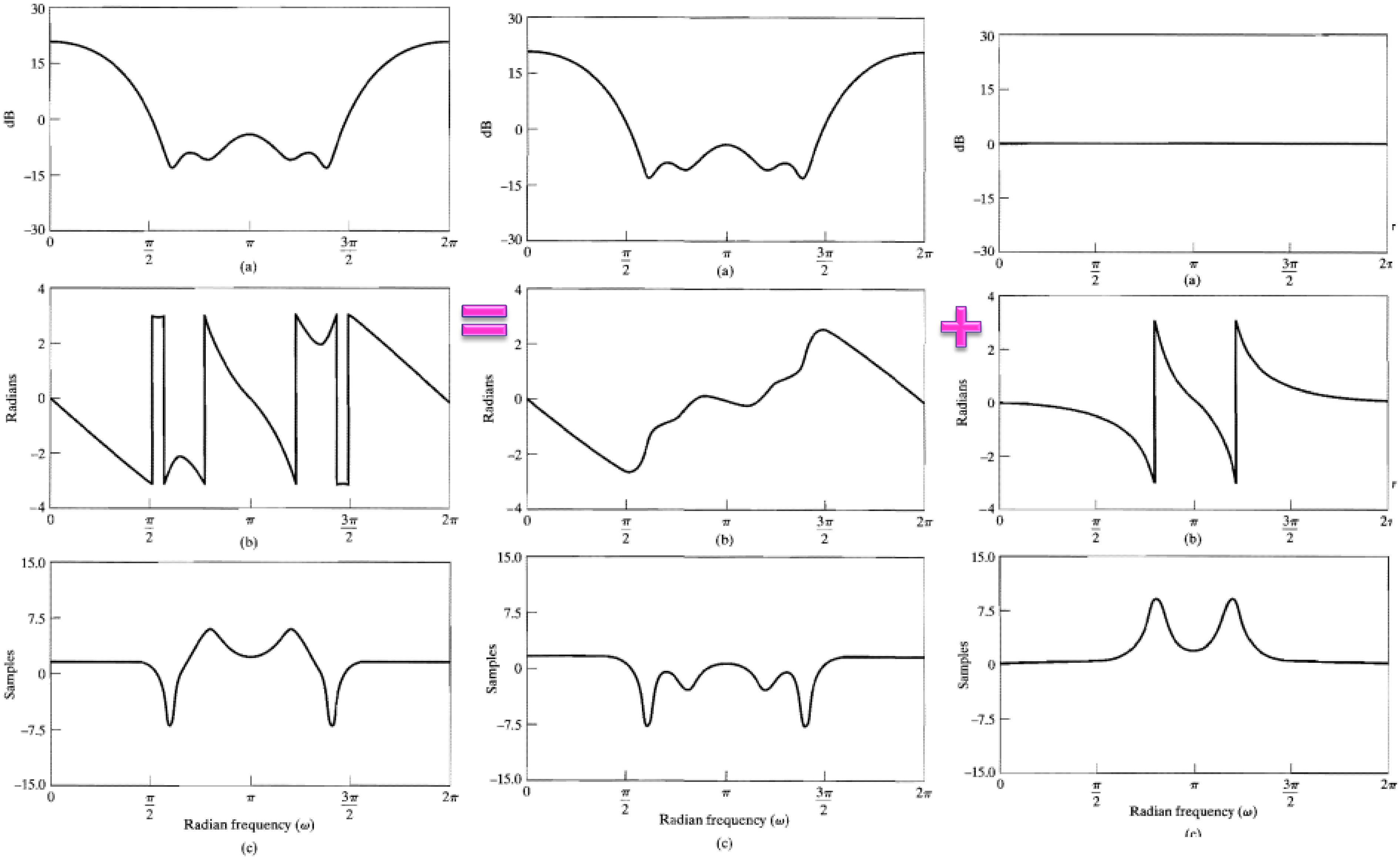
补偿系统为最小相位系统的倒数

由于 $H_d(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$，则补偿幅度失真后的全通系统为

$$H_{ap}(z)=\left(z^{-1}-0.8e^{-j0.8\pi}\right)\left(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi}\right)/\left(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}\right)\left(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}\right)$$

5.6.2 频率响应补偿

例5.15： FIR系统频率响应　　最小相位系统频率响应　　全通系统频率响应



5.6.3 最小相位系统的性质

◆最小相位滞后（相位绝对值最小）

任何非最小相位系统的连续相位可表示为

$$\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\arg\left[H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right]+\arg\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

由上节，全通系统的连续相位 $\arg\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]$ 在 $0\le\omega\le\pi$ 内为非正值。

$H_{\min}(z)$ 的零点从单位圆内反演到单位圆外（其共轭倒数的位置上）总是使*反演所得系统*的连续相位比*原最小相位系统* $H_{\min}(z)$ 的相位(值)更小，或者是使得相位的负值（相位滞后）增加。

> 结论：具有相同幅度响应 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 的所有系统中，最小相位系统具有最小的相位滞后。

为确保零极点都在单位圆内的系统有最小相位滞后，有必要附加约束

$$H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]>0$$

$-h[n]$ 与 $h[n]$ 具有相同的零极点，但相位相差 π 。

5.6.3 最小相位系统的性质

◆最小群延迟

具有相同幅度响应系统的群延迟可表示为

$$\operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\operatorname{grd}\left[H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right]+\operatorname{grd}\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

把最小相位系统转化为非最小相位系统的全通系统具有正群延迟。

具有同一个幅度响应 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 的不同系统中，最小相位系统具有最小的群延迟。

5.6.3 最小相位系统的性质

◆最小能量延迟（单位脉冲响应能量最集中）

所有幅度响应等于 $\left|H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 的系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 都与最小相位系统的单位脉冲响应 $h_{\min}[n]$ 具有相同的**总能量**，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|h[n]\right|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left|h_{\min}[n]\right|^2$$

定义单位脉冲响应的**部分能量**为

$$E[n]=\sum_{m=0}^{n}\left|h[m]\right|^2$$

可以证明，所有幅度响应等于 $\left|H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 的系统的单位脉冲响应中，$h_{\min}[n]$ 具有最大的部分能量

$$\sum_{m=0}^{n}\left|h[m]\right|^2\le\sum_{m=0}^{n}\left|h_{\min}[m]\right|^2$$

即最小相位系统部分能量最集中在 $n=0$ 周围，亦即能量延迟最小；最小相位系统亦称为**最小能量延迟系统**。

5.6.3 最小相位系统的性质

◆最小能量延迟示例

具有相同幅度响应的四种因果FIR系统单位脉冲响应对应的零点和极点