第八章：离散傅里叶变换

8.7 用离散傅里叶变换实现线性卷积

◆ 用DFT实现循环卷积方法：

1）分别计算有限长序列 $x_1[n]$和$x_2[n]$的DFT $X_1[k]$和 $X_2[k]$。

2）计算矢量乘积 $X_3[k]=X_1[k]X_2[k]$ 。

3）计算 $X_3[k]$的DFT反变换得到序列$x_3[n]=x_1[n]\,ⓝ\,x_2[n]$。

大多数的数字信号与系统处理采用线性卷积。

因此，需要找到采用循环卷积实现线性卷积的方法。

8.7.1 两个有限长序列的线性卷积

◆ 线性卷积

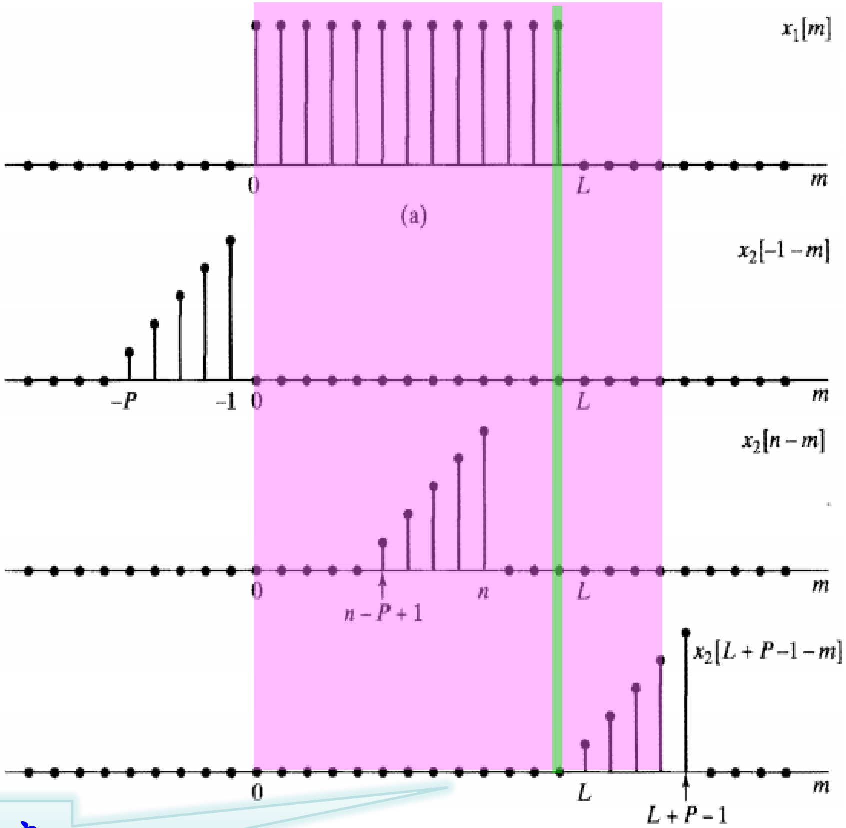
长度为L的序列$x_1[n]$ 和长度为P的序列 $x_2[n]$ 线性卷积

$$x_3[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[m]x_2[n-m]$$

对于右图定义的 $x_1[n]$和 $x_2[n]$，线性卷积输出为

$$x_3[n]=\sum_{m=0}^{L-1}x_1[m]x_2[n-m]$$

$$0\le n\le L+P-2$$



线性卷积输出序列长度为$L+P-1$

8.7.2循环卷积作为带混叠的线性卷积

◆ 循环卷积的混叠

如果对某一序列 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处采样，可得对应周期为N的周期序列

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

的DFS系数序列 $\tilde{X}[k]$。

由DFS与DFT的关系，$\tilde{x}[n]$ 的一个周期的序列的DFT可表示为

$$X[k] = \begin{cases} X\left(e^{j(2\pi k/N)}\right), & 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由 $X[k]$ 的IDFT，可得 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期的序列为

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

任何有限长序列的FT按 $2\pi k/N$ 采样的序列的IDFT序列为原序列按周期N拓展（叠加）后一个周期的序列值

若 $x[n]$ 的长度≤N，则 $x_p[n]$ 不会产生时间混叠，且 $x_p[n] = x[n]$

若 $x[n]$ 的长度>N，则对于一些或全部 n，存在 $x_p[n] \neq x[n]$

8.7.2循环卷积作为带混叠的线性卷积

◆ 从有限长序列的线性卷积到循环卷积

由长度分别为L和P的序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积

$$x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[m]x_2[n-m]$$

序列$x_3[n]$ 的长度为$L+P-1$

其傅里叶变换为 $X_3(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

则 $X_3(e^{j\omega})$在 $2\pi k/N$ 处的采样值，可作为某个长度为N的序列的DFT,

$$X_3^{'}[k]=X_3\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)=X_1\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)X_2\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)=X_1[k]X_2[k],\quad 0\le k\le N-1$$

将卷积输出 $x_3[n]$按周期N拓展，再截取一个周期的序列可表示为

当$N\geq L+P-1$，$x_{3p}[n]=x_3[n]$

$$X_3[k]=X_3^{'}[k]\xleftrightarrow{IDFT}x_{3p}[n]=\begin{cases}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_3[n-rN], & 0\le n\le N-1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

即 $X_3[k]=X_3^{'}[k]=X_1[k]X_2[k],\quad 0\le$

由DFT性质，$x_{3p}[n]$为有限长序列

$$x_3[n]=x_{3p}[n]=x_2[n]\,Ⓝ\,x_1[n]$$

结论：两个序列（长度L和P小于N）的N点循环卷积为其线性卷积输出序列以周期N拓展（叠加）后可得一个周期的序列值，（该周期拓展可能存在混叠）；仅当$N\geq L+P-1$，N点的循环卷积值等于线性卷积值

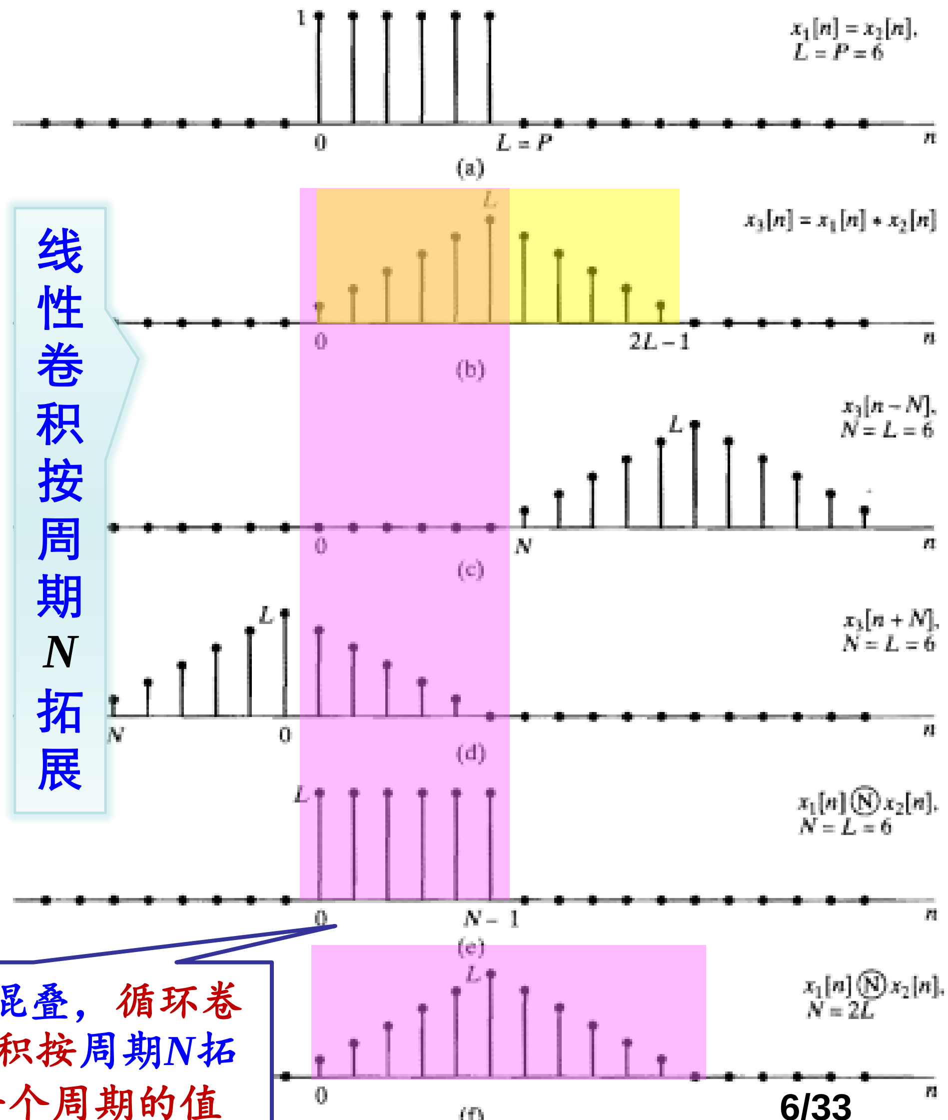
◆示例：循环卷积等效为带混叠的线性卷积（等长序列）

序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$长度为L=P=6
比较N点循环卷积与线性卷积

序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$线性卷积长度为L+P-1=2L-1=11

当N=L=6时，循环卷积的全部序列值与线性卷积完全不同。

当N≥L+P-1时，则可避免时间混叠，且循环卷积与线性卷积相同。

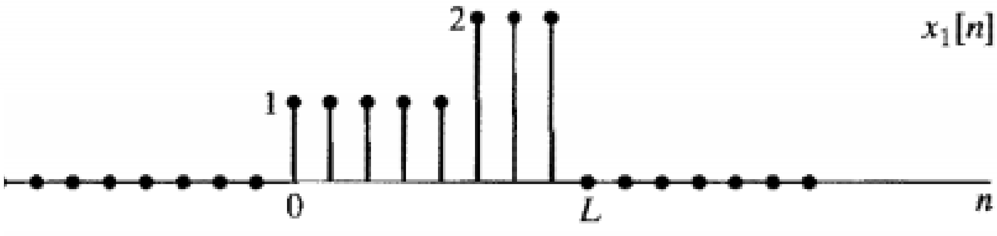


不管是否存在混叠，循环卷积均为线性卷积按周期N拓展（叠加）后一个周期的值

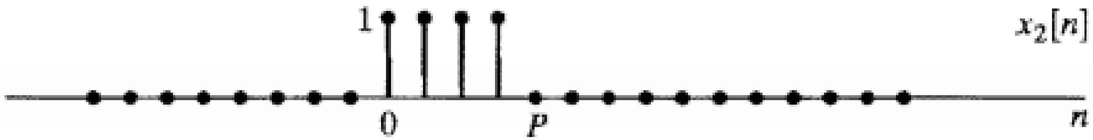
8.7.2 循环卷积作为带混叠的线性卷积

◆ 示例（线性卷积）：长度为*L* 的序列 $x_1[n]$ 与长度为*P* 的序列 $x_2[n]$ 的线性卷积，其中*P*<*L*。

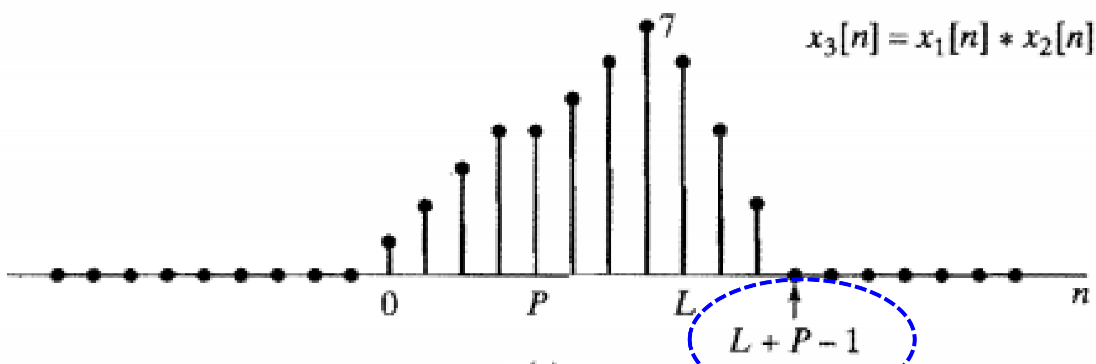
$$x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[m]x_2[n-m]$$



(a)



(b)



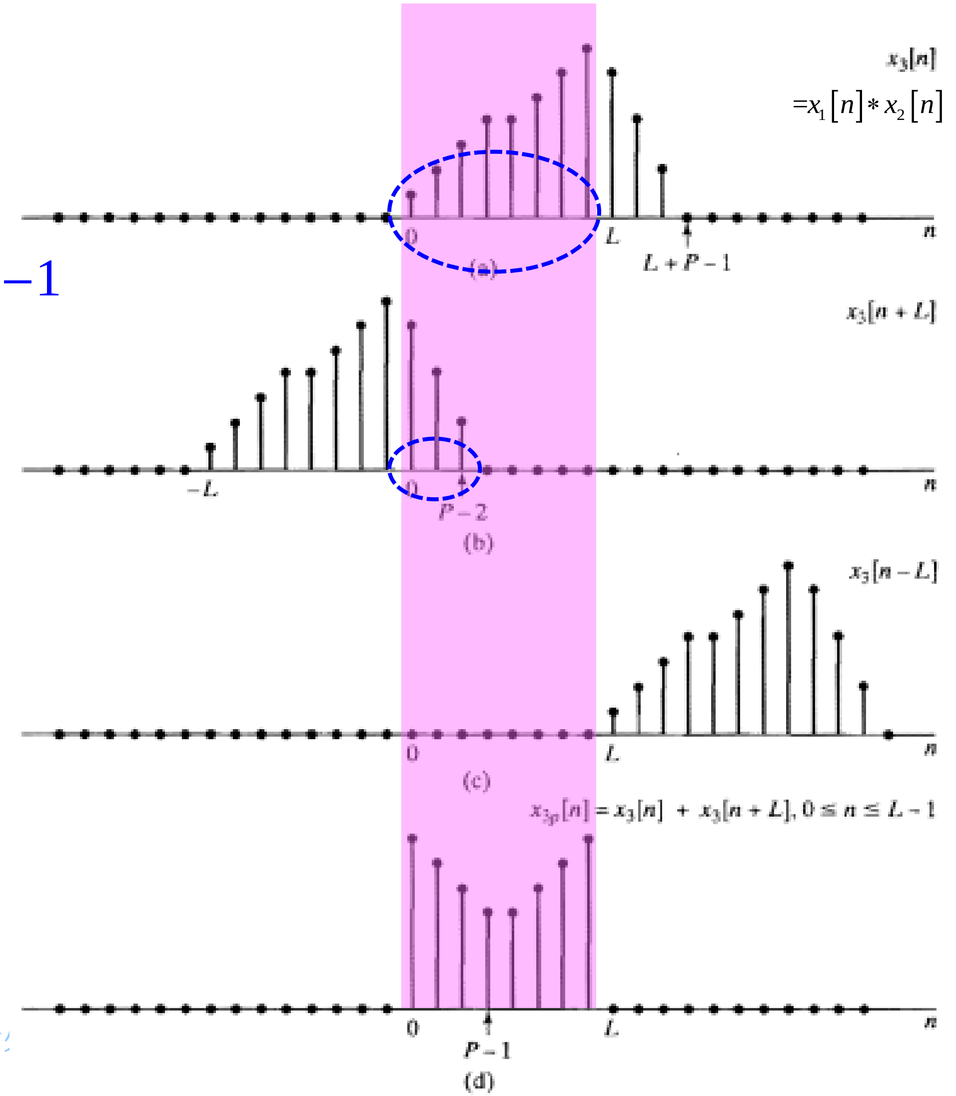
(c)

8.7.2 循环卷积作为带混叠的线性卷积

◆ 示例（循环卷积）： 长度为L 的序列 $x_1[n]$和长度为P 的序列 $x_2[n]$ L点循环卷积，其中$P<L$。

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \circledcirc_{L} x_2[n]$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rL], & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



在区间$0 \le n \le L-1$内，$x_{3p}[n]$只受 $x_3[n]$ 和 $x_3[n+L]$ 影响。

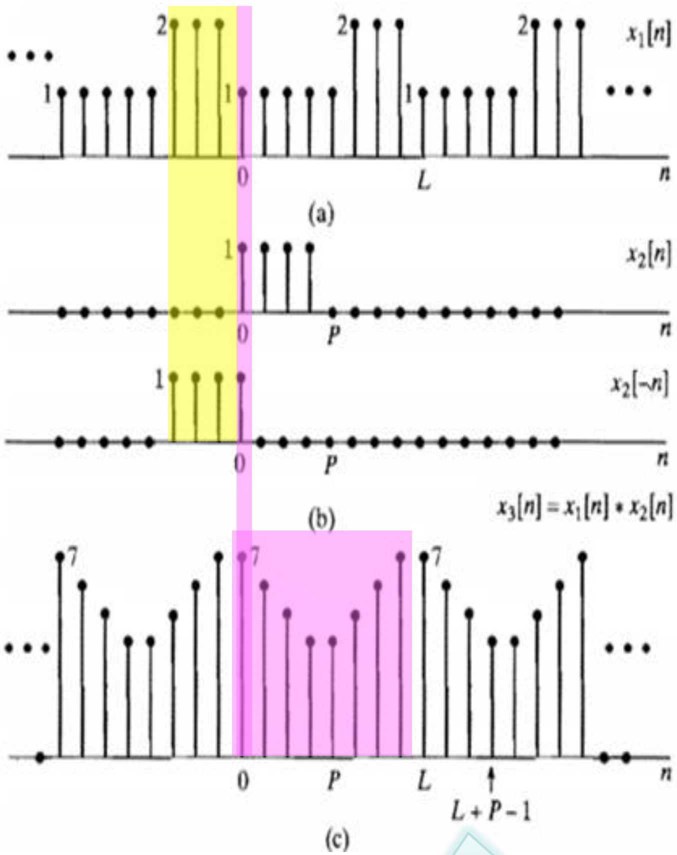
当 $P<L$ 时，$x_3[n]$的前L个点与$x_3[n+L]$的最后（P-1）个点共同作用（叠加），实现L点循环卷积。

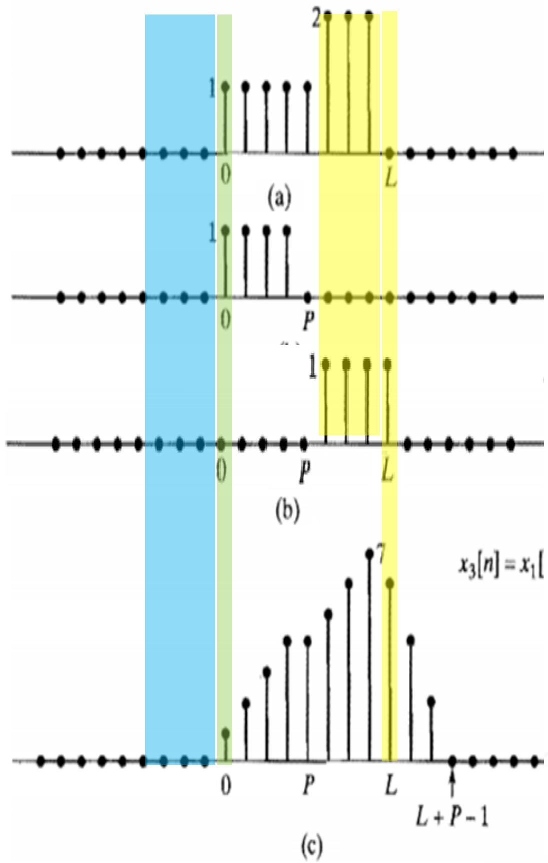
8.7.2 循环卷积作为带混叠的线性卷积

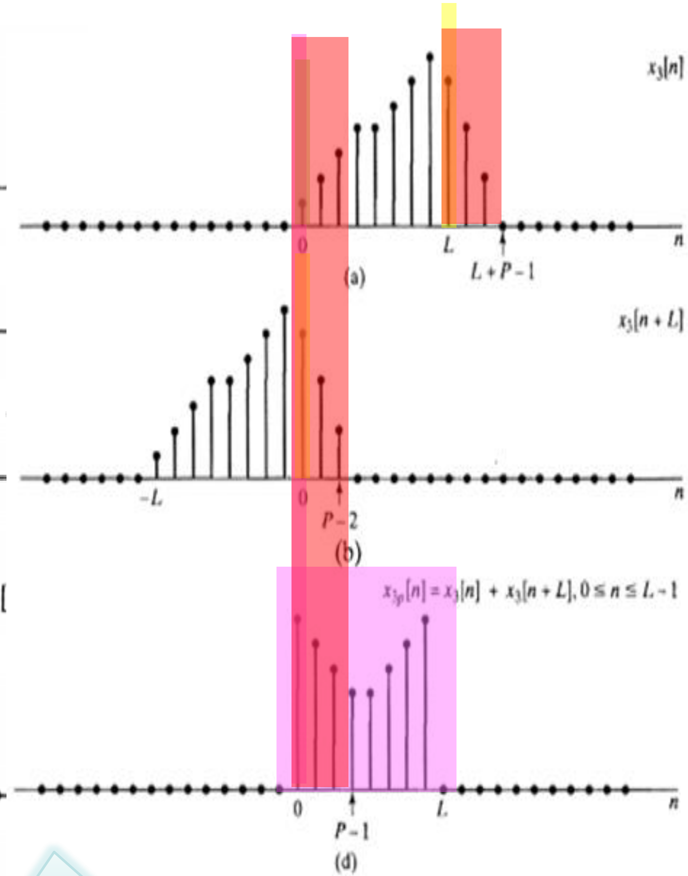
◆ 周期序列（周期L）与有限长序列的周期线性卷积

◆ 两个有限长序列的线性卷积（$L+P-1$）

◆ 两个有限长序列的循环卷积（L点）







输出序列无限长

输出序列有限长

8.7.2 循环卷积作为带混叠的线性卷积

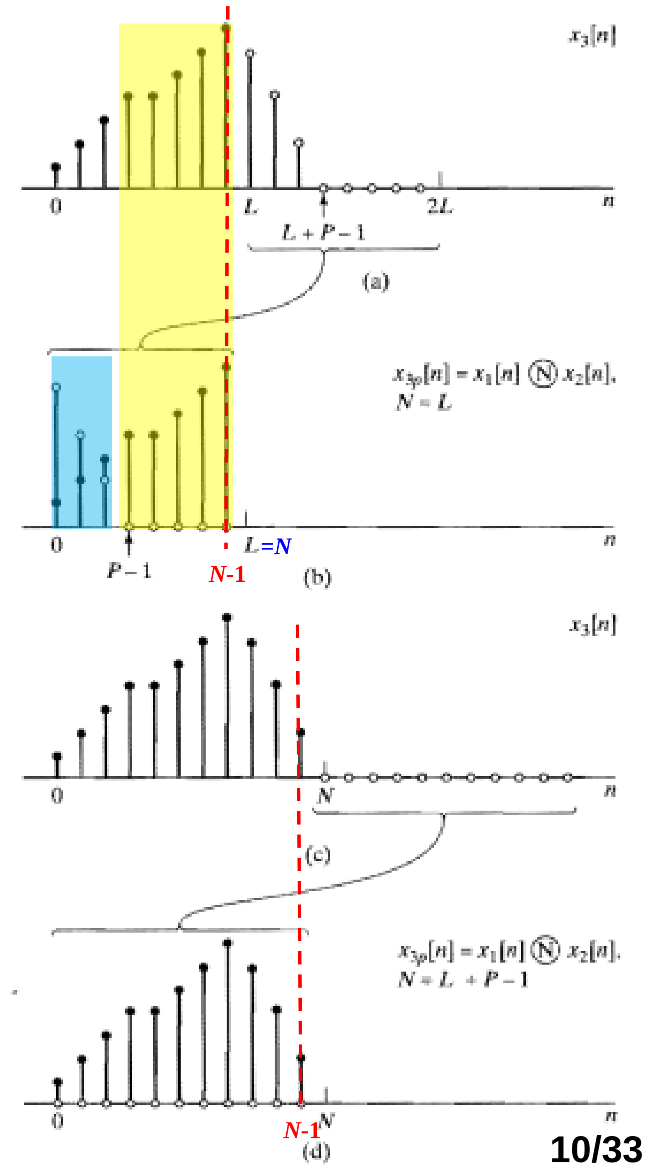
◆示例：循环卷积与线性卷积等效

序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$长度分别为 L=8，P=4。

当N=L>P时，N点循环卷积为线性卷积前L点与后L点（后P-1个非零值再添加L-P+1个零）的循环叠加；

并且，N点循环卷积的仅前P-1个点有时间混叠，但后L-P+1个点与线性卷积结果相同。

当N=L+P-1时，N点循环卷积为线性卷积前L+P-1点与后L+P-1个零的循环叠加，导致无时间混叠，此时，循环卷积与线性卷积完全相同。



8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

通过补足够长的零，可以用DFT实现两个有限长序列的**线性卷积**。

对于线性时不变系统，系统脉冲响应为**有限长序列**，而信号可以（近似）**无限长**。

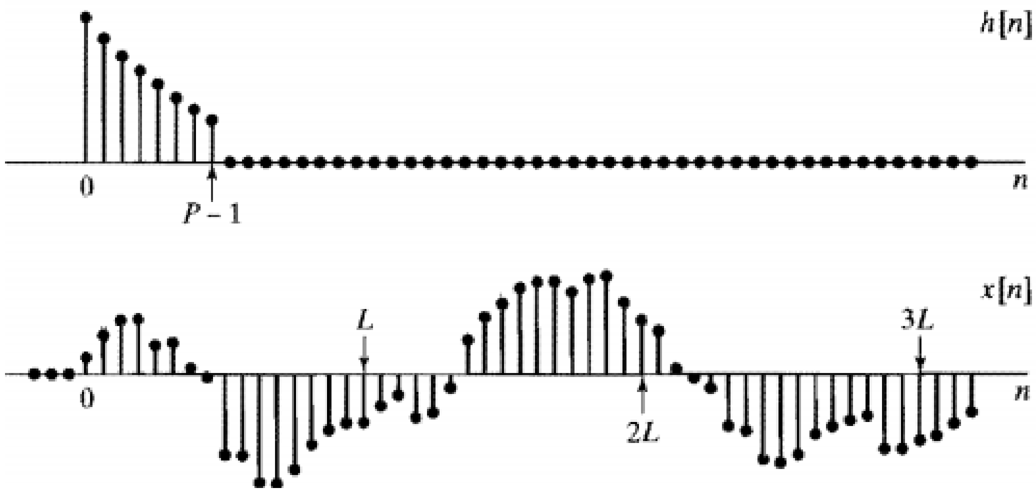
从实现复杂度和处理时延方面，**无法直接应用一次DFT实现线性时不变系统**。

为便于基于有限长序列的DFT工程实现，必须对输入的无限长序列进行**分段处理**

用DFT实现线性卷积（系统）的核心思想：**利用循环卷积实现线性卷积，再利用DFT实现循环卷积。**

8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

信号 $x[n]$ 经过系统 $h[n]$（脉冲响应长度为 $\boldsymbol{P}$），并且 $x[n]$ 的长度要比 $\boldsymbol{P}$ 大得多，而且 $x[n]=0,\quad n<0$。



为便于利用DFT实现卷积，须将无限长序列分段后，分别实现卷积。

块卷积： 将输入信号分割为固定长度的**序列段**，采用DFT方式，分别实现每段与脉冲响应**线性卷积**，再采用适当方法**衔接**各**卷积段**。

8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

◆ 块卷积方法一：重叠相加法（重叠针对块卷积输出序列）

1）将输入信号分割形成长度为L的序列段

2）分别实现各个序列段与（长度为P）脉冲响应进行线性卷积（与L+P-1点循环卷积相同，即可用L+P-1点DFT实现）

3）将相邻两段线性卷积输出中（长度为P-1）尾部与首部叠加后，再级联，形成无限长信号与有限长脉冲响应LTI系统的线性卷积

8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

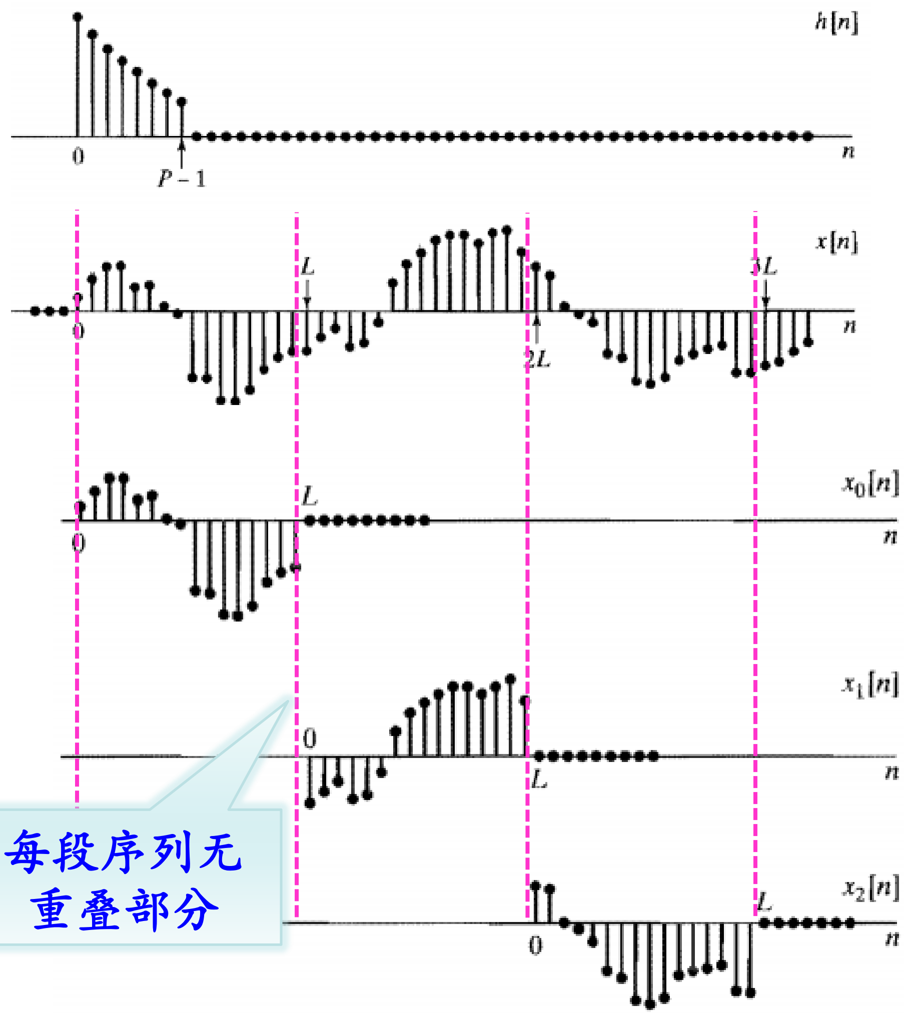
◆ 重叠相加法

序列 $x[n]$ 可表示成无穷多个长度为L的序列的**移位叠加**，即

$$x[n]=\sum_{r=0}^{\infty}x_r[n-rL]$$

式中

$$x_r[n]=\begin{cases}x[n+rL], & 0\le n\le L-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

◆ **重叠相加法**

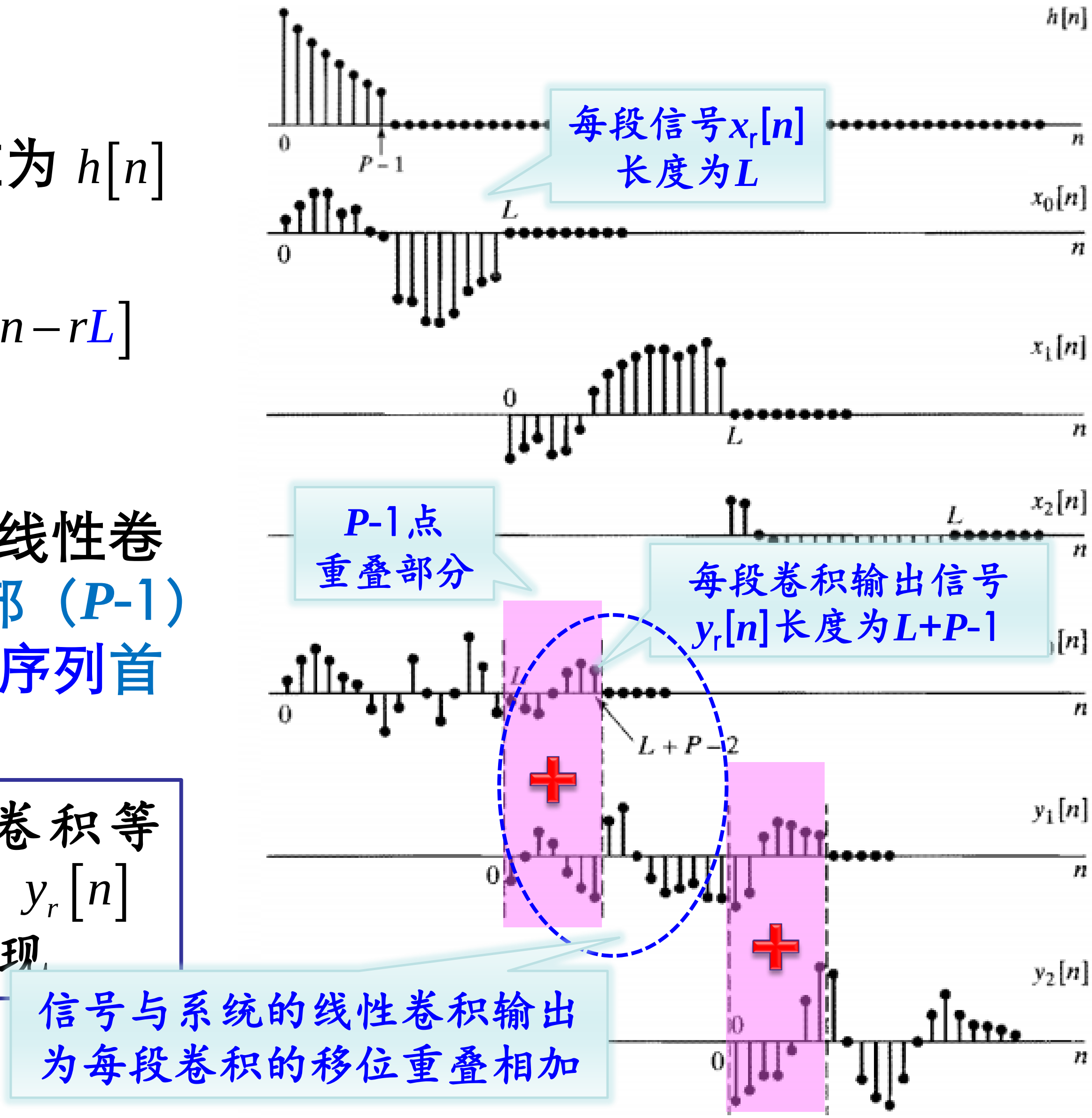
信号 $x[n]$ 通过脉冲响应为 $h[n]$ 的系统，输出可表示为

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{r=0}^{\infty}y_r[n-rL]$$

式中 $y_r[n]=x_r[n]*h[n]$

每段（长度为$L+P$-1）线性卷积输出序列 $y_r[n]$ 的尾部（P-1）个非零点将与其下一段序列首部（P-1）个点重叠

根据线性卷积与循环卷积等效关系，每段线性卷积 $y_r[n]$ 可由$N=L+P$-1点DFT实现



8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

◆ 块卷积方法二：重叠保留法（重叠针对输入序列段）

1）将输入信号分割形成长度为L的序列段

2）分别实现各个序列段与有限长脉冲响应进行L点循环卷积（可采用L点DFT实现）

3）删除每段循环卷积输出中首部混叠部分（长度P），获得对应于线性卷积的部分

4）将线性卷积部分级联（非叠加），形成无限长信号与有限长脉冲响应LTI系统的线性卷积

若重叠针对块卷积输出，应命名为重叠删除法。

8.7.3 用DFT实现线性时不变系统

◆ **重叠保留法**

长度为L的序列段定义为

$$x_r[n]=x\left[n+r(L-P+1)-P+1\right],\quad 0\le n\le L-1$$

➢ 每段序列 $x_r[n]$与脉冲响应为$h[n]$的系统进行L点循环卷积的输出为

$$y_{rp}[n]=x_r[n]\,Ⓛ\,h[n],$$

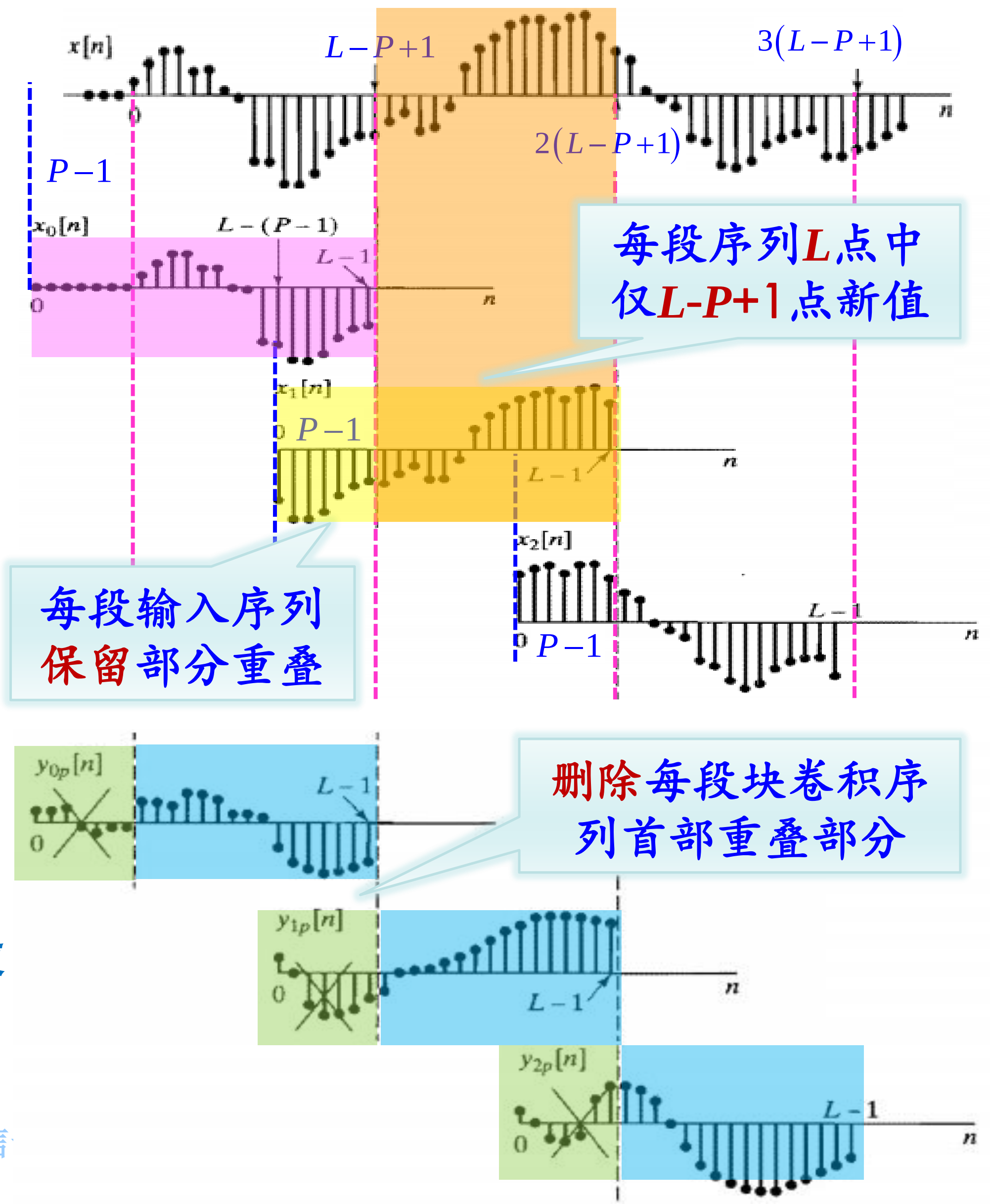
$$0\le n\le L-1$$

➢ 将各循环卷积输出序列中有时间混叠的前P-1个点用零代替，获得与线性卷积尾部相同的序列段

$$y_r[n]=\begin{cases}0, & 0\le n\le P-2\\ y_{rp}[n], & P-1\le n\le L-1\end{cases}$$

➢ 将获得的长度为L的块卷积序列段级联，可得LTI系统的输出为

$$y[n]=\sum_{r=0}^{\infty}y_r\left[n-r(L-P+1)+P-1\right]$$



第八章：离散傅里叶变换

- 8.1 周期序列的表示：离散傅里叶级数
- 8.2 离散傅里叶级数的性质
- 8.3 周期信号的傅里叶变换
- 8.4 傅里叶变换采样
- 8.5 有限长序列的傅里叶表示：离散傅里叶变换
- 8.6 离散傅里叶变换的性质
- 8.7 用离散傅里叶变换实现线性卷积
- 8.8 离散余弦变换（DCT）

8.8 离散余弦变换（DCT）

一般类型的有限长变换表达式为

$$\begin{cases} A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\phi_k^*[n] \\ x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} A[k]\phi_k[n] \end{cases}$$

其中序列 $\phi_k[n]$ 称为基序列，具有正交性

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m=k \\ 0, & m\neq k \end{cases}$$

例如：在DFT中，基序列为复序列 $e^{j(2\pi/N)kn}$， $0\le k\le N-1$

对于DFT，即使输入为实序列，变换输出也为复序列。

通过采用实基序列，可实现从实序列到实序列的变换。

离散余弦变换（DCT）即是一种基于实基序列的变换。

8.8.1 DCT的定义

DCT的定义（式）取决于由有限长序列构造周期对称序列所采用的周期延拓的方式。

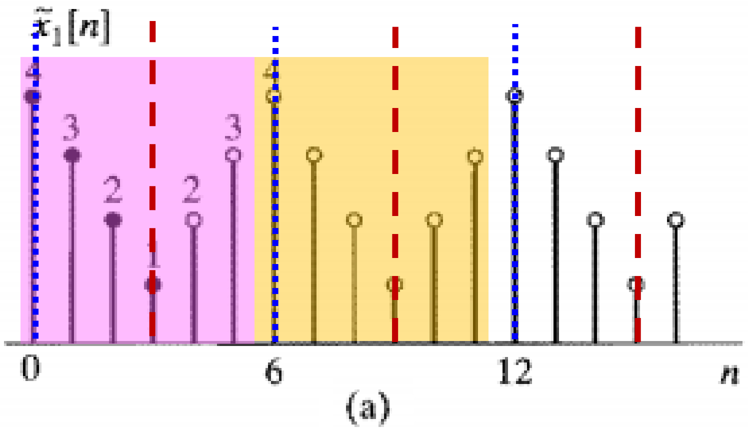
◆ 示例：4种周期延拓方式（对应4种DCT定义）

长度为N=4的有限长序列

1型（对称）周期拓展（DCT-1）：

$\tilde{x}_1[n]$的周期为：$2N-2=6$

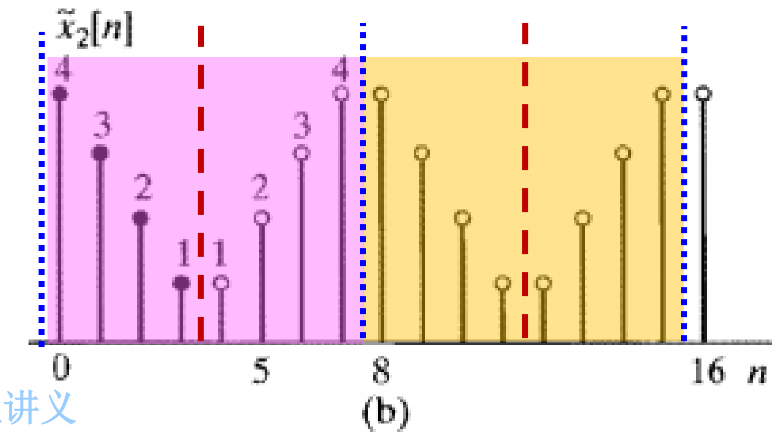
$\tilde{x}_1[n]$关于样点 $n=0,3$ 或 $n=r(N-1)$（r为整数）偶周期对称



2型（对称）周期拓展（DCT-2）：

$\tilde{x}_2[n]$的周期为：$2N=8$

$\tilde{x}_2[n]$关于半样点 $n=-1/2$ 和 $7/2$ 或 $n=rN-1/2$ 偶周期对称



8.8.1 DCT的定义

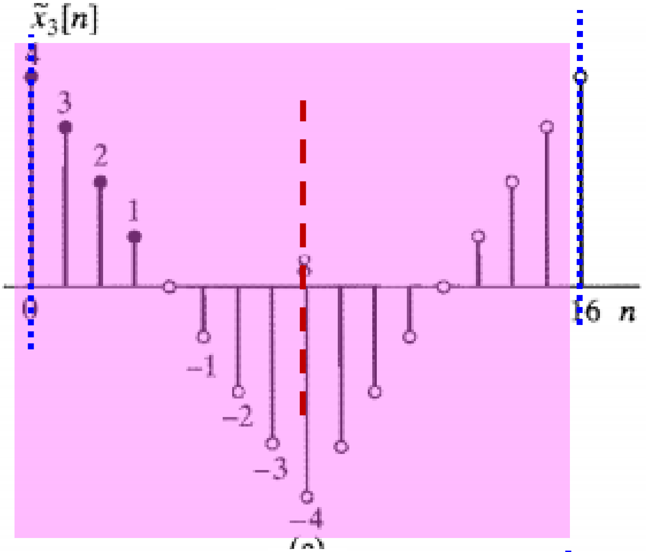
◆ 示例：4种周期延拓方式（对应4种DCT定义）（续）

3型（反对称）周期拓展（DCT-3）：

$\tilde{x}_3[n]$的周期为：$4N = 16$

$\tilde{x}_3[n]$关于样点 $n = 0$ 和 $n = 8$，

或 $n = r \cdot 2N$ 偶周期对称

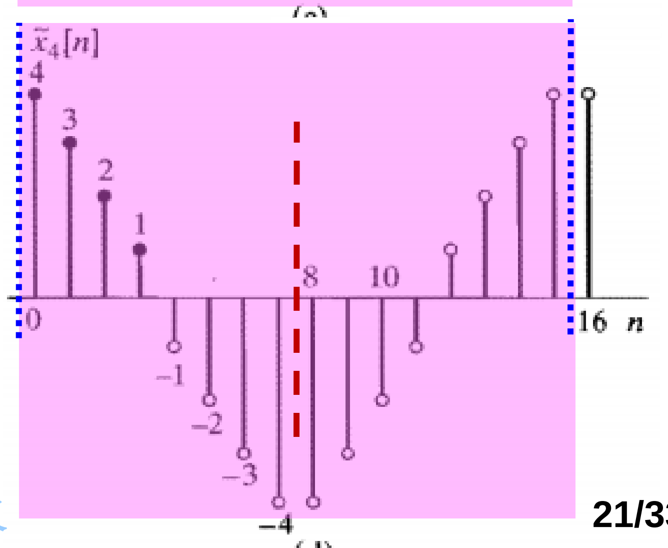


4型（反对称）周期拓展（DCT-4）：

$\tilde{x}_4[n]$的周期为：$4N = 16$

$\tilde{x}_4[n]$关于半样点 $n = -1/2$ 和 $15/2$，

或 $n = r \cdot 2N - 1/2$ 偶周期对称



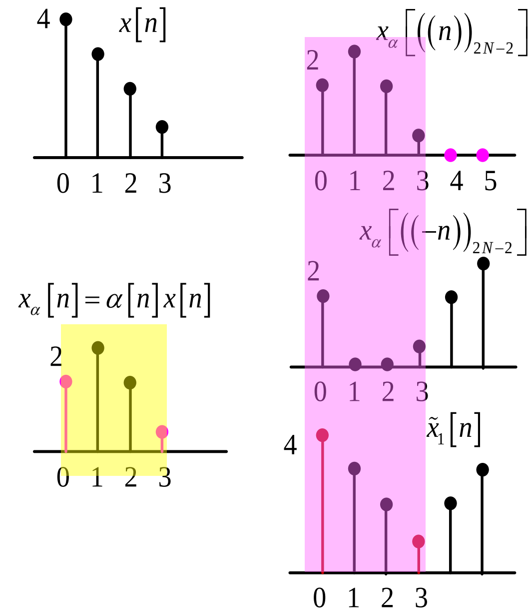
(d)

8.8.2 DCT-1和DCT-2定义

◆ DCT-1定义

对于DCT-1，N点序列$x[n]$先在端点处作改变，再以周期$2N-2$延拓，所得周期序列为

$$\tilde{x}_1[n]=x_\alpha\left[((n))_{2N-2}\right]+x_\alpha\left[((-n))_{2N-2}\right]$$



式中 $x_\alpha[n]=\alpha[n]x[n]$，其中

$$\alpha[n]=\begin{cases}1/2, & n=0,N-1\\ 1, & 1\le n\le N-2\end{cases}$$

容易证明：$x[n]=\tilde{x}_1[n],\quad n=0,\cdots,N-1$，并且 $\tilde{x}_1[n]$ 关于 $n=r(N-1)$，（r为整数）偶周期对称，即该对称性为1型周期对称

DCT-1变换对定义为

$$\begin{cases}X^{c1}[k]=2\sum_{n=0}^{N-1}\alpha[n]x[n]\cos\left(\dfrac{\pi kn}{N-1}\right), & 0\le k\le N-1\\ x[n]=\dfrac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha[n]X^{c1}[k]\cos\left(\dfrac{\pi kn}{N-1}\right), & 0\le n\le N-1\end{cases}$$

8.8.2 DCT-1和DCT-2定义

◆ DCT-2定义

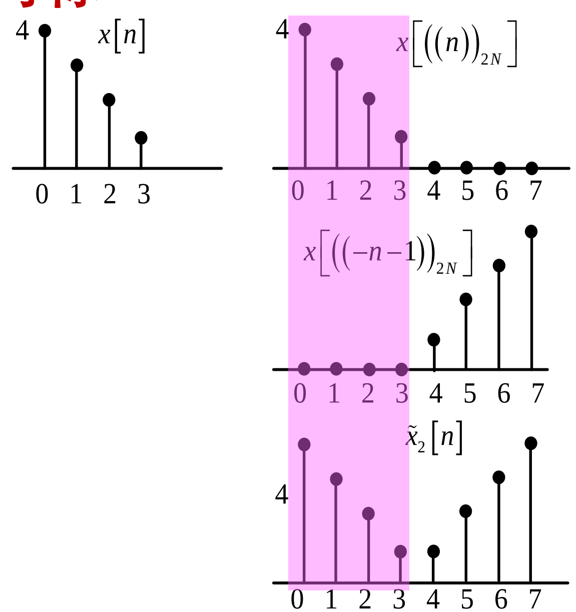
对于DCT-2，N点序列 $x[n]$进行周期为 $2N$ 的延拓，得周期序列为

$$\tilde{x}_2[n]=x\left[((n))_{2N}\right]+x\left[((-n-1))_{2N}\right]$$

由于不存在端点重叠，无需端点加权即可保证 $x[n]=\tilde{x}_2[n]$，$n=0,\cdots,N-1$，并且 $\tilde{x}_2[n]$关于半样点 $n=-1/2$，或 $n=rN-1/2$（r为整数）偶周期对称，即该对称为2型周期对称

DCT-2变换对定义为

$$\begin{cases} X^{c2}[k]=2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\dfrac{\pi k(2n-1)}{2N}\right), & 0\le k\le N-1 \\ x[n]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\beta[k]X^{c2}[k]\cos\left(\dfrac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$



式中DCT-2反变换加权函数为

$$\beta[k]=\begin{cases} 1/2, & k=0 \\ 1, & 1\le n\le N-1 \end{cases}$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

8.8.2 DCT-1和DCT-2定义

◆ DCT酉式变换对（能量归一化）

$$\begin{cases} X^{c1}[k]=2\sum_{n=0}^{N-1}\alpha[n]x[n]\cos\left(\dfrac{\pi kn}{N-1}\right), & 0\le k\le N-1 \\ x[n]=\dfrac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha[n]X^{c1}[k]\cos\left(\dfrac{\pi kn}{N-1}\right), & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

$$\alpha[n]=\begin{cases} 1/2, & n=0,N-1 \\ 1, & 1\le n\le N-2 \end{cases}$$

DCT-1酉式变换对定义为

$$\begin{cases} X^{c1}[k]=\sqrt{\dfrac{2}{N-1}}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{\alpha}[n]x[n]\cos\left(\dfrac{\pi kn}{N-1}\right), & 0\le k\le N-1 \\ x[n]=\sqrt{\dfrac{2}{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{\alpha}[n]X^{c1}[k]\cos\left(\dfrac{\pi kn}{N-1}\right), & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

加权函数为

$$\tilde{\alpha}[n]=\begin{cases} \sqrt{1/2}, & n=0,N-1 \\ 1, & 1\le n\le N-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^{c2}[k]=2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\dfrac{\pi k(2n-1)}{2N}\right), & 0\le k\le N-1 \\ x[n]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\beta[k]X^{c2}[k]\cos\left(\dfrac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

$$\beta[k]=\begin{cases} 1/2, & k=0 \\ 1, & 1\le n\le N-1 \end{cases}$$

DCT-2酉式变换对定义为

$$\begin{cases} X^{c2}[k]=\sqrt{\dfrac{2}{N}}\tilde{\beta}[k]\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\dfrac{\pi k(2n-1)}{2N}\right), & 0\le k\le N-1 \\ x[n]=\sqrt{\dfrac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{\beta}[k]X^{c2}[k]\cos\left(\dfrac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

式中加权函数为

$$\tilde{\beta}[k]=\begin{cases} \sqrt{1/2}, & k=0 \\ 1, & 1\le n\le N-1 \end{cases}$$

8.8.2 DCT-1和DCT-2定义

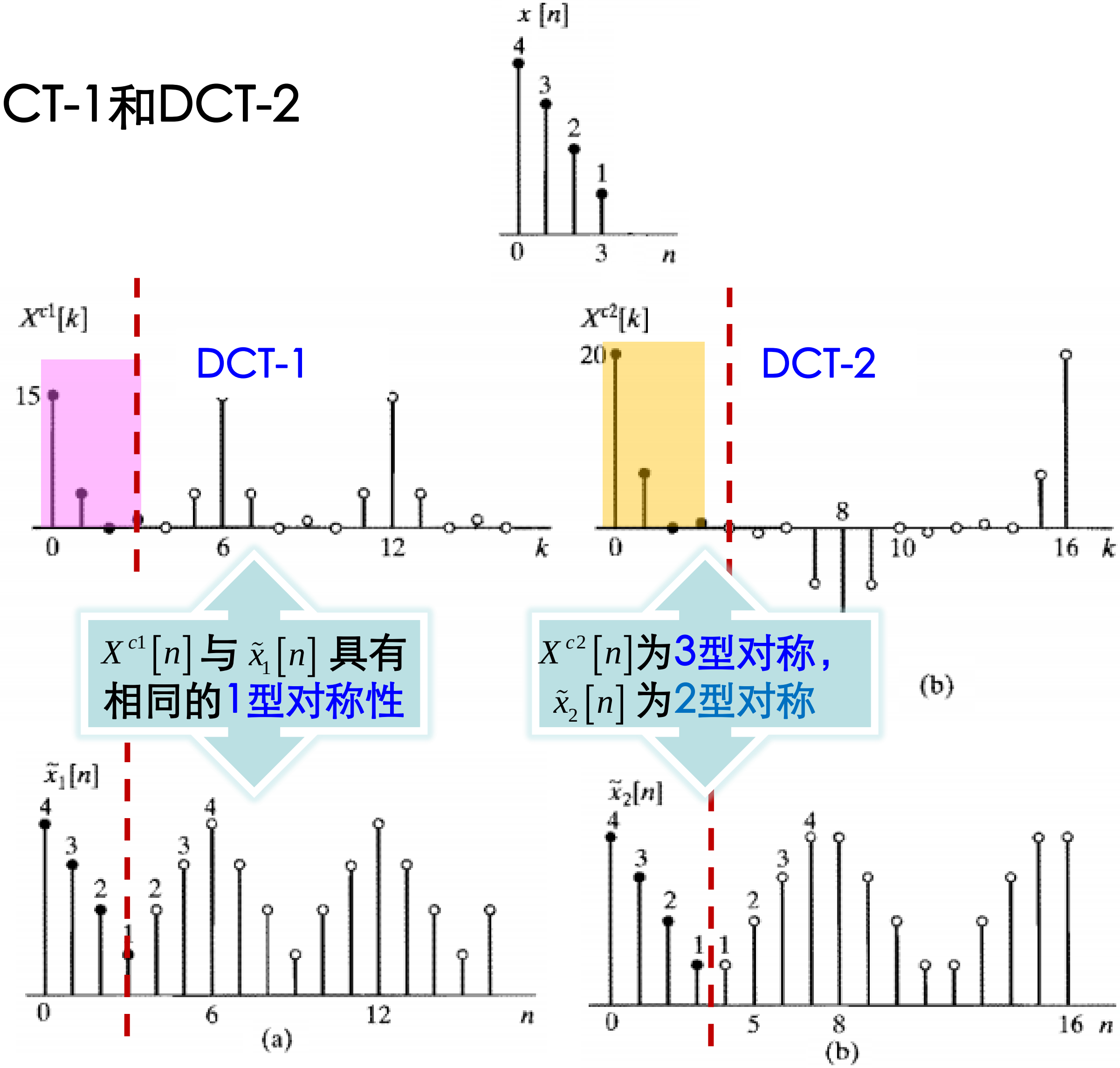
◆ DCT-1和DCT-2示例

长度N=4的序列 $x[n]$的DCT-1和DCT-2

1）DCT只定义在区间 $0 \le n,k \le N-1$， 区间外的值不作要求。

2）DCT具有周期性，定义区间外的值可由周期拓展导出。

3）DCT输出的对称性不一定与输入周期延拓序列一致。



8.8.3 DFT与DCT-1的关系

对于DCT-1， $\tilde{x}_1[n]$是由 $x_1[n]$按周期 $2N-2$ 进行延拓，一个周期定义的有限长序列为

$$x_1[n]=x_\alpha\left[((n))_{2N-2}\right]+x_\alpha\left[((-n))_{2N-2}\right]=\tilde{x}_1[n],\quad n=0,1,\cdots,2N-3$$

式中 $x_\alpha[n]=\alpha[n]x[n]$，是由 $x[n]$的两个端点除以2的N点实序列。

$x_1[n]$的(2N-2)点DFT为

通过构造对称序列，利用DFT的对称性，实现实数到实数的变换

$$X_1[k]=X_\alpha[k]+X_\alpha^*[k]=2\operatorname{Re}\{X_\alpha[k]\},\quad k=0,1,\cdots,2N-3$$

由于$X_\alpha[k]$为N点序列 $x_\alpha[n]$补零后进行(2N-2)点DFT，即有

$$X_\alpha[k]=\sum_{n=0}^{2N-3}\alpha[n]x[n]e^{-j2\pi kn/(2N-2)}=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha[n]x[n]e^{-j2\pi kn/(2N-2)},\quad k=0,\cdots,2N-3$$

则有 $$X_1[k]=2\operatorname{Re}\{X_\alpha[k]\}=2\sum_{n=0}^{N-1}\alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right)$$

结论：N点序列 $x[n]$ 的DCT-1 ($X^{c1}[k]$)与其样点对称延拓序列($x_1[n]$)的2N-2点DFT($X_1[k]$)的前N个样值相同；或与加权序列($x_\alpha[n]$)的2N-2点DFT($X_\alpha[k]$)的前N个样值的2倍实部相同。

8.8.4 DFT与DCT-2的关系

对于DCT-2，$\tilde{x}_2[n]$是由 $x[n]$ 按周期 $2N$进行延拓，一个周期定义的有限长序列为

$$x_2[n]=x\left[((n))_{2N}\right]+x\left[((-n-1))_{2N}\right]=\tilde{x}_2[n],\quad n=0,1,\cdots,2N-1$$

式中 $x[n]$ 为原N点实序列。

则，$x_2[n]$ 的$2N$点DFT为

$$X_2[k]=X[k]+X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)},\quad k=0,1,\cdots,2N-1$$

$$=e^{j\pi k/(2N)}2\,\mathrm{Re}\left\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\right\}$$

其中 $X[k]$为N点序列 $x[n]$ 补N个零后进行$2N$点DFT，即有

$$2\,\mathrm{Re}\left\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\right\}=2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\pi k(2n+1)/2N\right)$$

则有 $X_2[k]=e^{j\pi k/(2N)}X^{c2}[k],\quad or\quad X_2[k]e^{-j\pi k/(2N)}=X^{c2}[k],\quad k=0,1,\cdots,N-1$

结论：N点序列 $x[n]$的DCT-2（$X^{c2}[k]$）与其半样点对称延拓序列（$x_2[n]$）的$2N$点DFT（$X_2[k]$）的前N个样值乘上相位因子（$e^{-j\pi k/(2N)}$）后的序列相同。

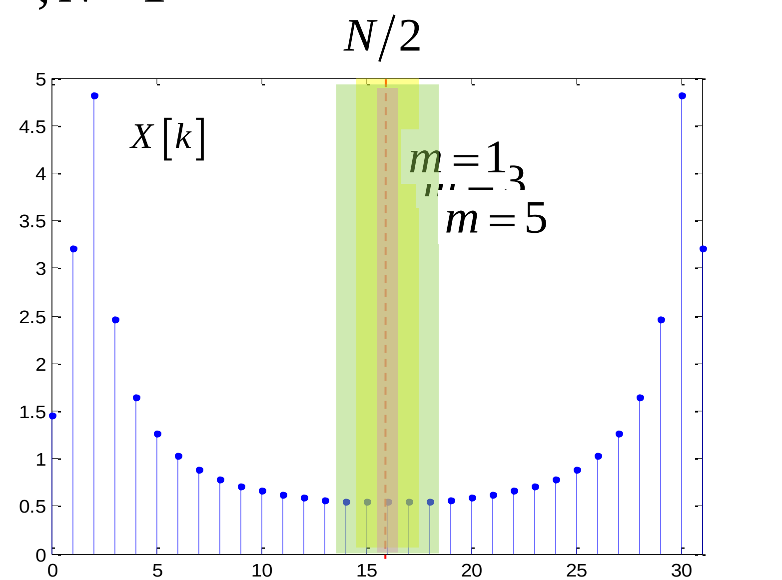
8.8.5 DCT-2的能量压缩性质

有限长序列的DCT-2的系数通常比DFT更多地集中在较低序号的部分，即变换域的**能量更集中**或**能量压缩**了。

DCT-2和DFT能量压缩性能可通过变换域**截短逼近误差**性能来评估。

◆ 定义序列 $x[n]$ 的 **DFT截短逼近序列**为

$$x_m^{dft}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}T_m[k]X[k]e^{j2\pi kn/N},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$



其中 $X[k]$ 为 $x[n]$ 的**N点 DFT**，并且

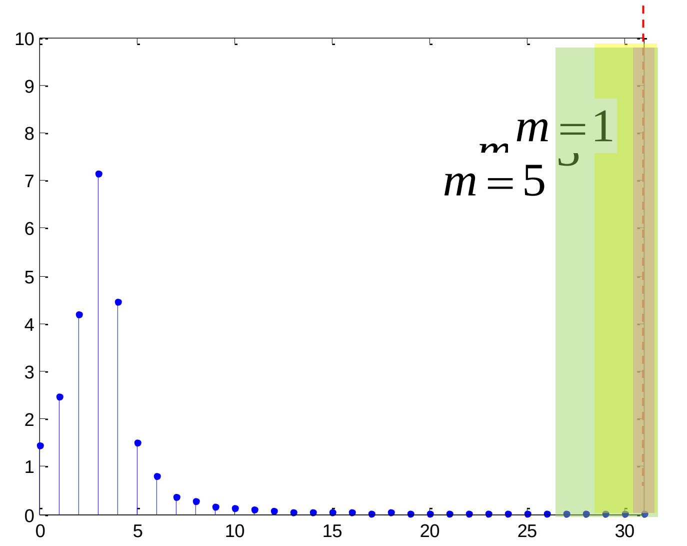
$$T_m[k]=\begin{cases}1, & 0\le k\le (N-1-m)/2\\ 0, & (N+1-m)/2\le k\le (N-1+m)/2\\ 1, & (N-1+m)/2\le k\le N-1\end{cases}$$

8.8.5 DCT-2的能量压缩性质

◆定义序列 $x[n]$ 的 DCT截短逼近序列为

$$x_m^{dct}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1-m}\beta[k]X^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right)$$

$$,\quad n=0,1,\cdots,N-1$$



◆DFT和DCT截短逼近误差分别为

$$E^{dft}[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]-x_m^{dft}[n]\right|^2$$

$$E^{dct}[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]-x_m^{dct}[n]\right|^2$$

◆ 示例8.13 DCT-2的能量压缩

输入测试序列为 $x[n]=a^n\cos(\omega_0 n+\phi),\quad n=0,1,\cdots,N-1$

其中 $a=0.9,\quad \omega_0=0.1\pi,\quad \phi=0,\quad N=32$