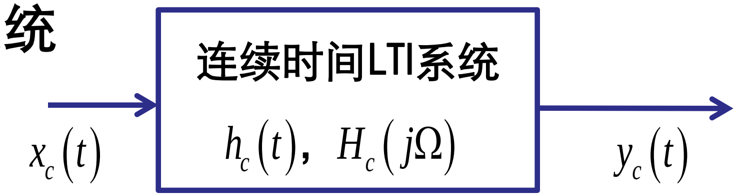
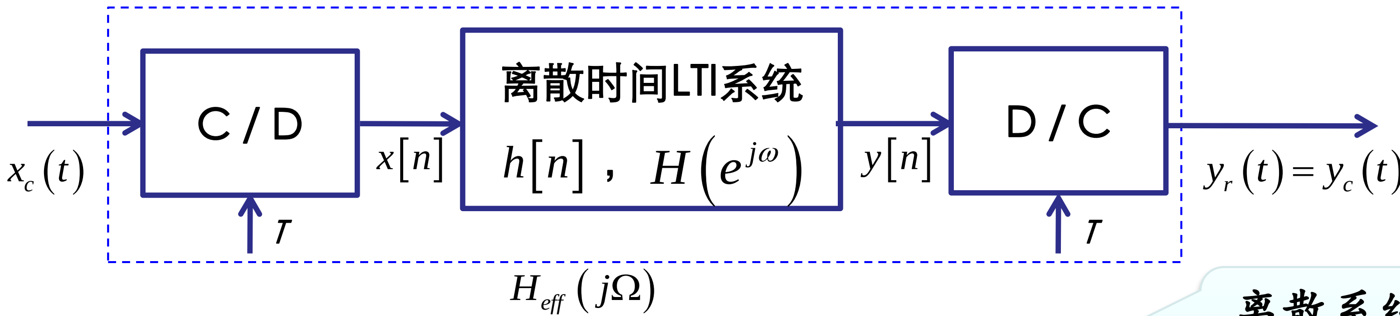
◆由连续时间系统响应获得离散时间系统响应

已知：连续时间LTI系统



相应的带限输入的离散时间处理等效（连续时间）系统



其中 $H_{eff}(j\Omega)=H_c(j\Omega)$；$H_c(j\Omega)=0,\quad |\Omega|\geq\pi/T$。

离散系统也是带限的

当存在 $h[n]=Th_c(nT)$ 时，
该离散时间系统是连续时间系统的脉冲响应不变形式。

注意：是离散系统为连续系统的不变形式

4.4.2 脉冲响应不变

◆由连续时间系统响应获得离散时间系统响应（续）

➢ 由于，离散处理等效系统与连续时间系统间存在关系

$$H_{eff}\left(j\Omega\right)=H_c\left(j\Omega\right)$$

➢ 另外，对于带限的LTI等效系统，其等效频率响应满足

$$H_{eff}\left(j\Omega\right)=\begin{cases}H\left(e^{j\Omega T}\right), & |\Omega|<\pi/T\\ 0, & |\Omega|\geq\pi/T\end{cases}$$

其中 $H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T}$ 为等效离散时间系统的尺度变换后频率响应

➢ 由此可得，离散时间系统与连续时间系统频率响应满足关系

$$H\left(e^{j\Omega T}\right)=H_c\left(j\Omega\right),\quad |\Omega|<\pi/T$$

最终，经尺度变换后可得离散时间系统的频率响应

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_c\left(j\,\omega/T\right),\quad |\omega|<\pi$$

结论1：脉冲响应不变的离散系统的带限范围内的频率响应可由相应连续系统的频率响应经尺度变换后直接获得（无需幅度加权）

4.4.2 脉冲响应不变

◆离散时间系统脉冲响应与连续时间系统冲激响应关系

当： $H\left(e^{j\omega}\right)=H_c\left(j\omega/T\right)$， $|\omega|<\pi$，且 $H_c\left(j\Omega\right)=0$， $|\Omega|\geq\pi/T$

则，离散时间系统脉冲响应与连续系统冲激响应的采样值存在关系式

$$h[n]=Th_c\left(nT\right)$$

证明：

当对连续系统冲击响应以周期 T 采样时，可得 $h'[n]=h_c\left(nT\right)$

该采样序列的频谱为 $H'\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_c\left(j\left(\omega-2\pi k\right)/T\right)$

由于 $H_c\left(j\omega/T\right)$ 带限，则 $H'\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}H_c\left(j\omega/T\right)$， $|\omega|<\pi$

由所给离散与连续系统频率响应之间的关系，可得 $H\left(e^{j\omega}\right)=TH'\left(e^{j\omega}\right)$

上式对于ω所有取值都成立

则由傅里叶反变换可得 $h[n]=Th'[n]=Th_c\left(nT\right)$

结论2：脉冲响应不变的离散系统的脉冲响应可由相应连续系统的冲击响应的采样（值）再乘尺度因子（T）获得

4.4.2 脉冲响应不变

例4.7 采用脉冲响应不变法，求离散时间低通滤波器

期望连续时间系统（理想低通滤波器）的频率响应为

$$H_c(j\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\Omega_c \\ 0, & |\Omega|\ge\Omega_c\end{cases}$$

求等效系统中离散时间系统的单位脉冲响应和频率响应

解：理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$h_c(t)=\sin(\Omega_c t)/\pi t$$

所以等效系统中离散低通滤波器的单位脉冲响应为

$$h[n]=Th_c(nT)=T\sin(\Omega_c nT)/\pi nT=\sin(\omega_c n)/\pi n$$

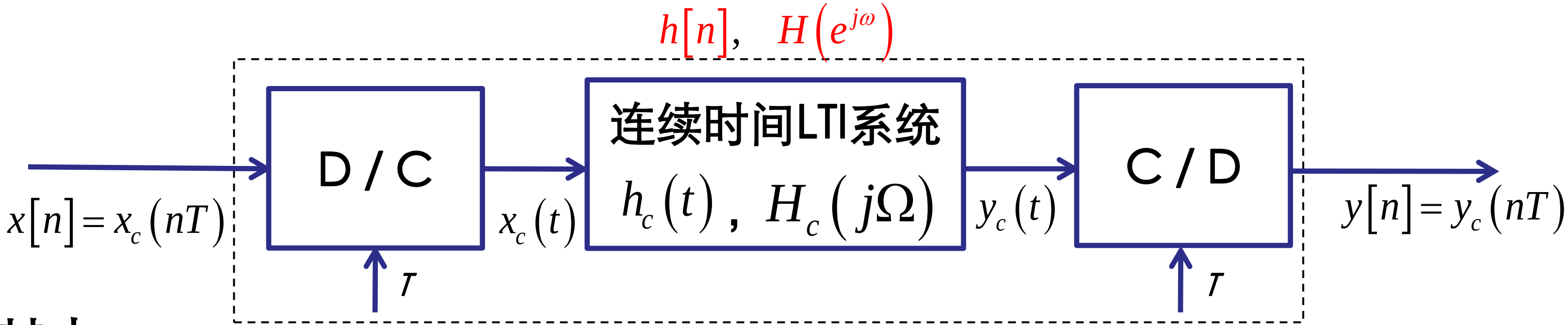
对于获得的离散系统的单位脉冲响应和频率响应，都必须进行尺度变换

相应的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$，其中 $\omega_c=\Omega_c T$

4.5 离散时间信号的连续时间处理

◆离散时间信号的连续时间处理模型



其中

$$x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\sin\left[\pi(t-nT)/T\right]}{\pi(t-nT)/T},\qquad X_c(j\Omega)=TX\left(e^{j\Omega T}\right),\quad |\Omega|\le\pi/T$$

$$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\frac{\sin\left[\pi(t-nT)/T\right]}{\pi(t-nT)/T},\qquad Y_c(j\Omega)=H_c(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

$$\begin{aligned}Y\left(e^{j\omega}\right)&=\frac{1}{T}Y_c(j\omega/T),\quad |\omega|<\pi\\&=\frac{1}{T}H_c(j\omega/T)TX\left(e^{j\omega}\right)\\&=H_c(j\omega/T)X\left(e^{j\omega}\right)\end{aligned}$$

■ 离散系统与连续系统频响关系

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_c(j\omega/T),\quad |\omega|<\pi$$

或由尺度变换可得

$$H_c(j\Omega)=H\left(e^{j\Omega T}\right),\quad |\Omega|<\pi/T$$

例4.9 非整数时延

$$x_c(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\frac{\sin\left[\pi(t-kT)/T\right]}{\pi(t-kT)/T},$$

离散时延系统频率响应

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega\Delta},|\omega|<\pi$$

其中 Δ 非整数。无法用采样点延迟来直接表示（离散）时域响应！

由离散系统与连续系统频率响应关系，可得连续系统频响为

$$H_c(j\Omega)=H\left(e^{j\Omega T}\right)=e^{-j\Omega\Delta T}$$

连续时间系统输出为

$$y_c(t)=x_c(t-\Delta T)$$

连续时间信延迟ΔT秒

则离散时间系统输出为

$$y[n]=y_c(nT)=x_c(nT-\Delta T)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\frac{\sin\left[\pi(t-\Delta T-kT)/T\right]}{\pi(t-\Delta T-kT)/T}\Bigg|_{t=nT}$$

离散时间系统输出**第n个样值**为连续时间系统输出信号在**$t=nT$时刻**的采样值

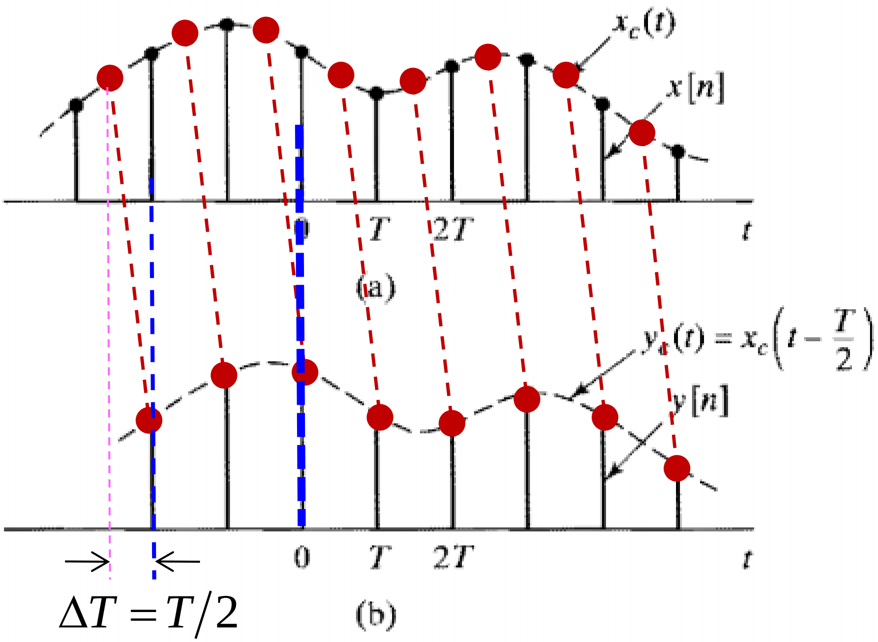
例4.9 非整数时延（续）

离散时间系统输出为

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\frac{\sin\pi(n-\Delta-k)}{\pi(n-\Delta-k)}$$

上式为 $x[n]$ 与 $h[n]$ 的卷积

$$h[n]=\frac{\sin\pi(n-\Delta)}{\pi(n-\Delta)},\quad -\infty<n<\infty$$



实际上当 $\Delta=n_0$ 为整数时，易得

$$h[n]=\delta(n-n_0),\quad -\infty<n<\infty$$

理想整数时延系统的单位脉冲响应

课后阅读例4.10

第四章：连续时间信号的采样

4.6 利用离散时间处理改变采样率

已知连续时间信号 $x_c(t)$ 用如下样本序列

$$x[n]=x_c(nT)$$

组成的离散时间信号表示。

现拟获得以同一个连续时间信号为基础的新的离散时间序列

$$x'[n]=x_c(nT')$$

式中采样周期 $T'\neq T$ 。

➢ **由T采样序列 $x[n]$ 获得T′采样序列 $x'[n]$ 的方法 ：**

由 $x[n]$ 重构连续信号 $x_c(t)$ → 以采样率 T' 对 $x_c(t)$ 采样得 $x'[n]$

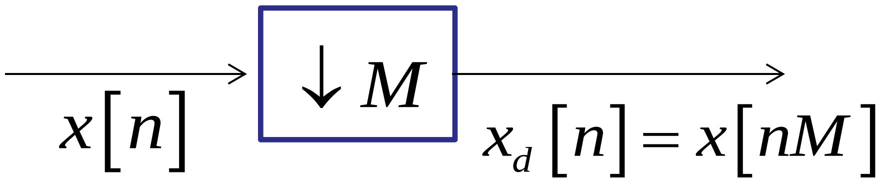
实际系统中由于无法获得理想重构滤波器、DAC和ADC，上述方法不实用，有必要考虑仅涉及离散时间运算的变速率方法

4.6.1 采样率按整数因子减小

通过“**采样**”一个序列可以降低一个序列的采样率，即定义一个新序列

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$$

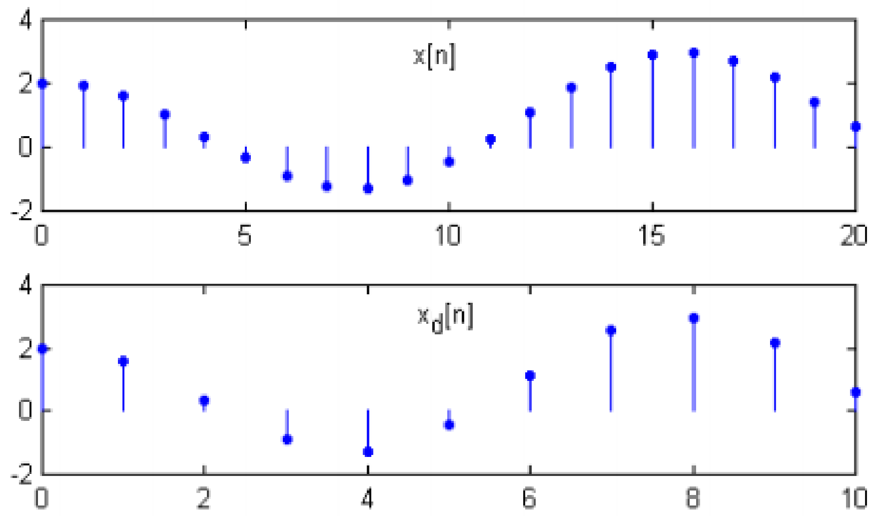
采样率压缩器（降采样）



采样周期T　　　采样周期$T' = MT$

***M*倍降采样**——每M个样值抽取一个样值

如果原序列采样率至少是**M倍的奈奎斯特率**，那么**采样率减为$1/M$倍**而不会引起**混叠**。



4.6.1 采样率按整数因子减小

◆ 降采样信号频谱

离散序列 $x[n]=x_c(nT),\ X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j(\omega-2\pi k)/T\right)$

M倍降采样，即 $T'=MT$

降采样输出 $x_d[n]=x_c(nT'),\ X_d(e^{j\omega})=\dfrac{1}{T'}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_c\left(j(\omega-2\pi r)/T'\right)$

$$=\frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_c\left(j(\omega-2\pi r)/MT\right)$$

令 $\begin{cases} r=i+kM; \\ 0\le i\le M-1 \\ -\infty\le k\le\infty \end{cases}$, $X_d(e^{j\omega})=\dfrac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left\{\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left((\omega-2\pi i)/M-2\pi k\right)/T\right)\right\}$

降采样信号频谱为原信号频谱扩展M倍后，按 2π 的整数倍频移的M个复本的叠加

4.6.1 采样率按整数因子减小

◆无混叠降采样信号频谱

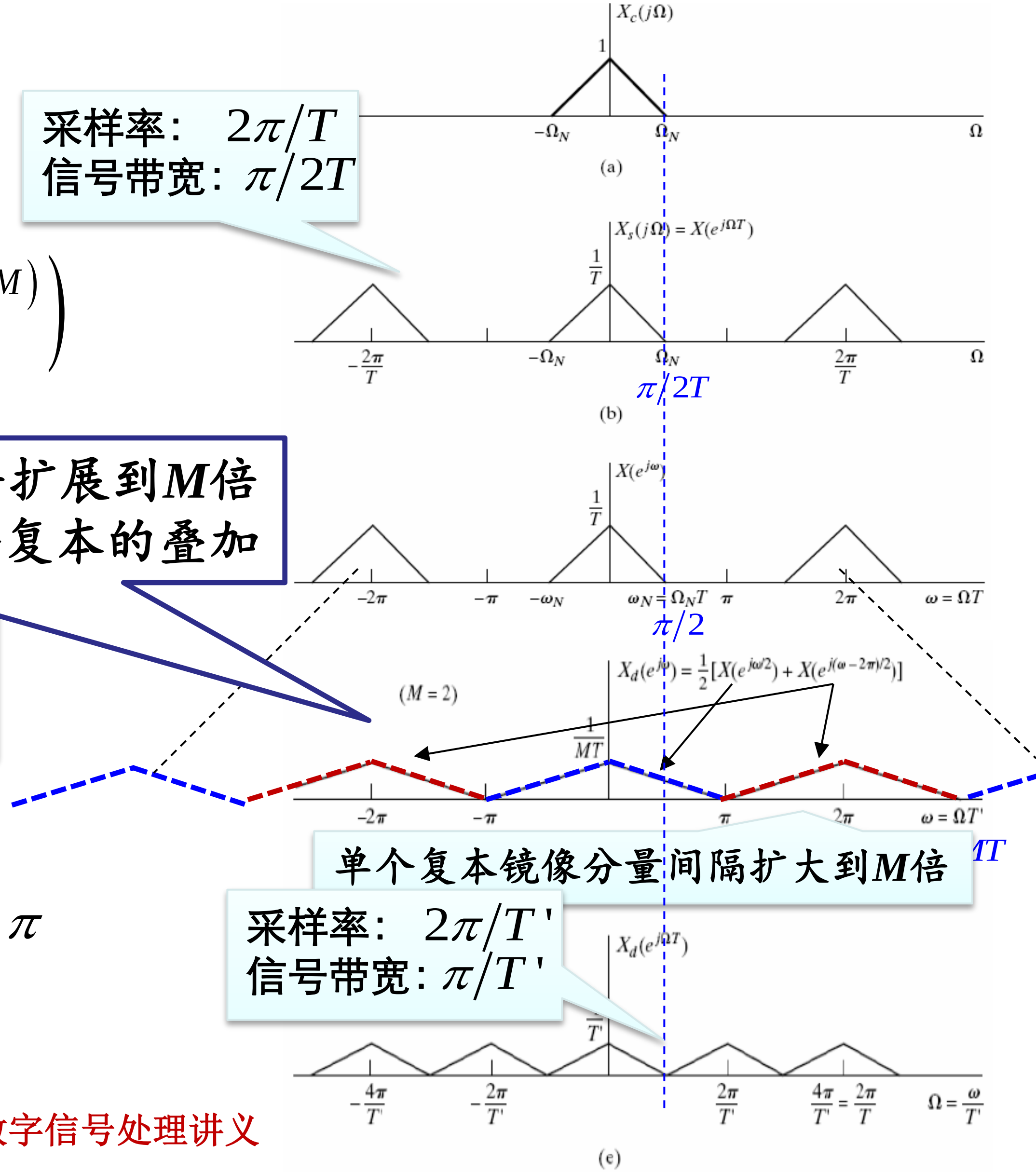
➢ 降采样序列的频谱

$$X_d\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X\left(e^{j\left((\omega-2\pi i)/M\right)}\right)$$

采样率：$2\pi/T$
信号带宽：$\pi/2T$

降采样信号频谱为原信号频谱扩展到*M*倍后，按 2π 整数倍频移的*M*个复本的叠加

离散域时-频对偶性：
时域压缩↔频域扩展



单个复本镜像分量间隔扩大到*M*倍

采样率：$2\pi/T'$
信号带宽：π/T'

当 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 带限，即

$$X\left(e^{j\omega}\right)=0,\quad \omega_N\le|\omega|\le\pi$$

且 $\omega_N\le\pi/M$，

则：*M*倍抽样可避免混叠

◆有混叠降采样信号频谱

设连续时间信号采样频率为2倍奈奎斯特率，即

$$\Omega_s = 2\pi / T = 4\Omega_N$$

则离散时间**信号截止频率**

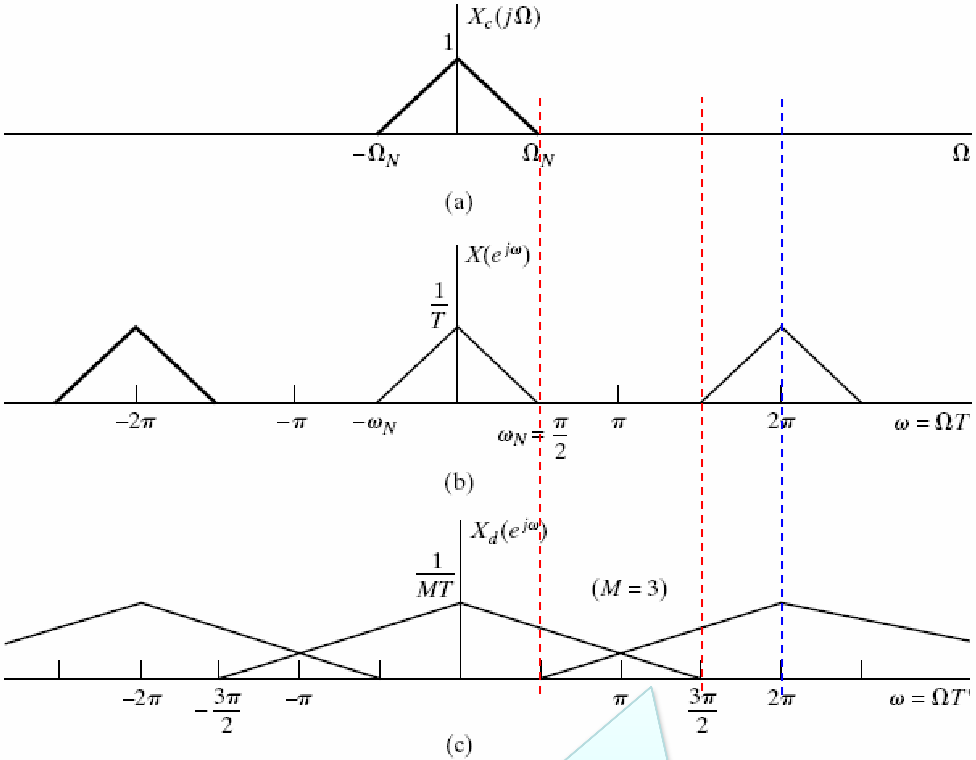
$$\omega_N = \Omega_N T = \pi / 2$$

若降采样率 $M = 3$

则降采样后**复本截止频率**

$$\tilde{\omega}_N = M\omega_N = 3\pi / 2$$

且**复本周期**仍为 2π

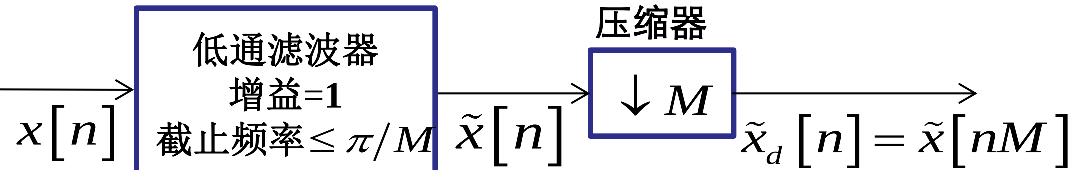


由于 $2\tilde{\omega}_N > 2\pi$，降采样后离散信号频谱产生**混叠**

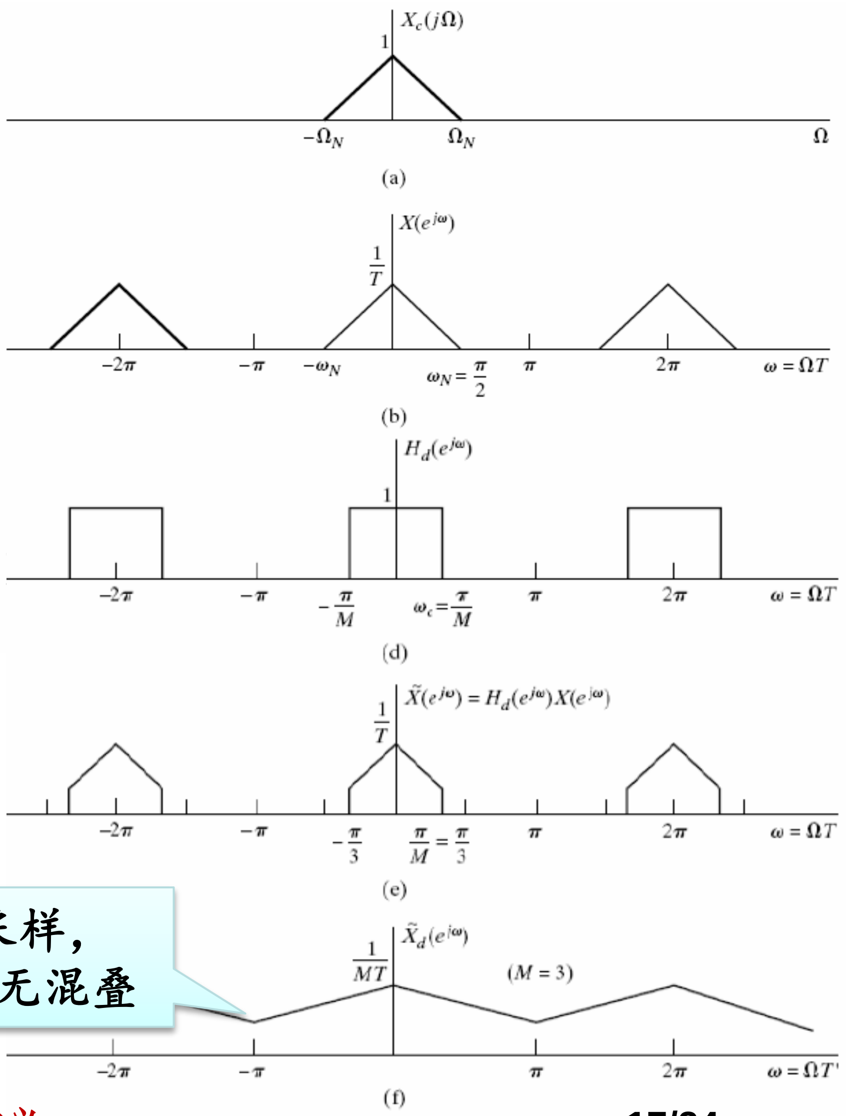
◆降采样系统通用实现方法

对于M倍降采样，为了避免混叠，拟降采样序列截止频率必须满足

$$\omega_N \le \pi / M$$



采样周期T　　采样周期$T'=MT$



例：已知信号及降采样率

$x[n]$截止频率：　$\omega_N \le \pi / 2$

降采样率：　$M = 3$

求：免混叠LPF和降采样序列的截止频率

LPF截止频率：　$\omega_{H_d} \le \pi / 3$

$\tilde{x}[n]$ 截止频率：　$\tilde{\omega}_N \le \pi / 3$

$\tilde{x}_d[n]$ 截止频率：　$\bar{\omega}_N \le \pi$

LPF后降采样，
离散信号无混叠

4.6.2 采样率按整数因子增加

由连续时间信号 $x_c(t)$ 按采样间隔 T 获得的离散时间信号 $x[n]$， $x[n]=x_c(nT)$

若要将其采样率**增加L倍**，获取样本序列 $x_i[n]$，

$$x_i[n]=x_c(nT')$$

式中，$T'=T/L$ 。上述过程称为**升采样**。

升采样存在关系

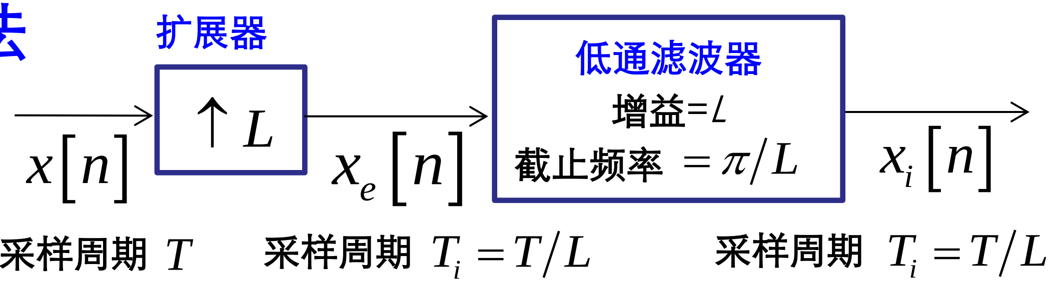
$$x_i[n]=x[n/L]=x_c(nT/L),\quad n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots$$

注意： $x_i[n]$ **仅当** $n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots$ **时，可从** $x[n]$ **中直接获得采样值，其余样值需通过插值获得。**

4.6.2 采样率按整数因子增加

◆升采样系统通用实现方法

例：L倍升采样



扩展器输出为

$$x_e[n]=\begin{cases} x[n/L], & n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots \\ 0, & others \end{cases}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]$$

实现相邻样值之间插入$L-1$个零样值

低通滤波器脉冲响应为

$$h_i[n]=\sin(\pi n/L)/(\pi n/L)$$

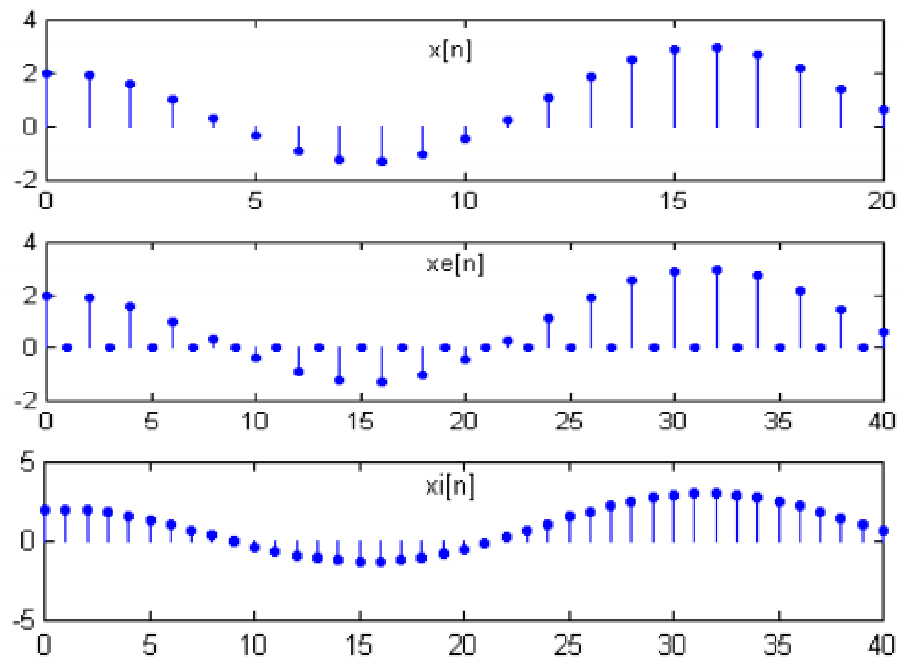
$$h_i[0]=1$$

$$h_i[n]=0,\quad n=\pm L,\pm 2L,\cdots$$

实现$L-1$个零样值的内插重构

升采样滤波输出为

$$x_i[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{\sin[\pi(n-kL)/L]}{\pi(n-kL)/L}$$



4.6.2 采样率按整数因子增加

◆扩展器输出信号 $x_e[n]$ 的频谱

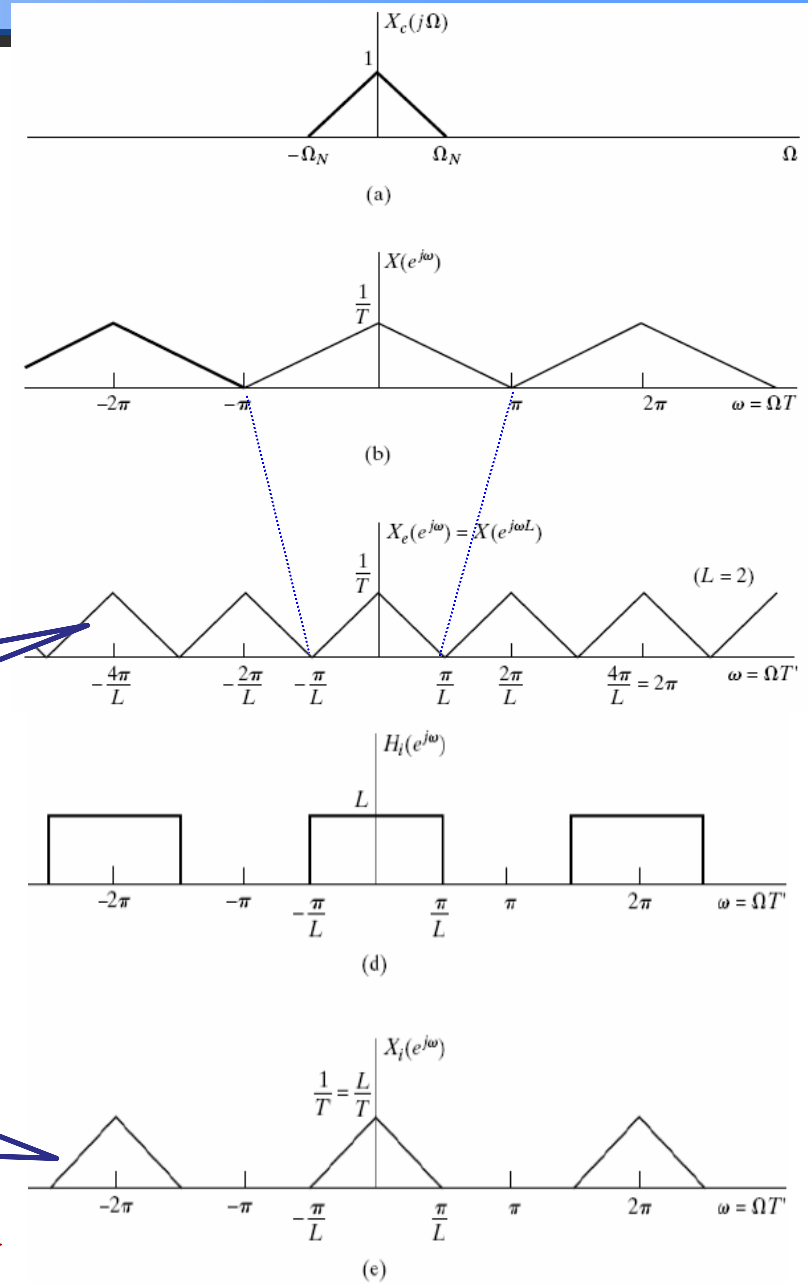
$$X_e\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-kL]\right)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j\omega Lk}=X\left(e^{j\omega L}\right)$$

*L*倍升采样信号频谱为原信号频谱压缩*L*倍

离散域时-频对偶性：
时域扩展↔频域压缩

经过带宽为π/L的理想低通滤波器重构插值，输出等效为原连续信号按周期$T'=T/L$采样的输出



4.6.2 采样率按整数因子增加

◆ 例：线性内插

线性内插滤波器的单位脉冲响应

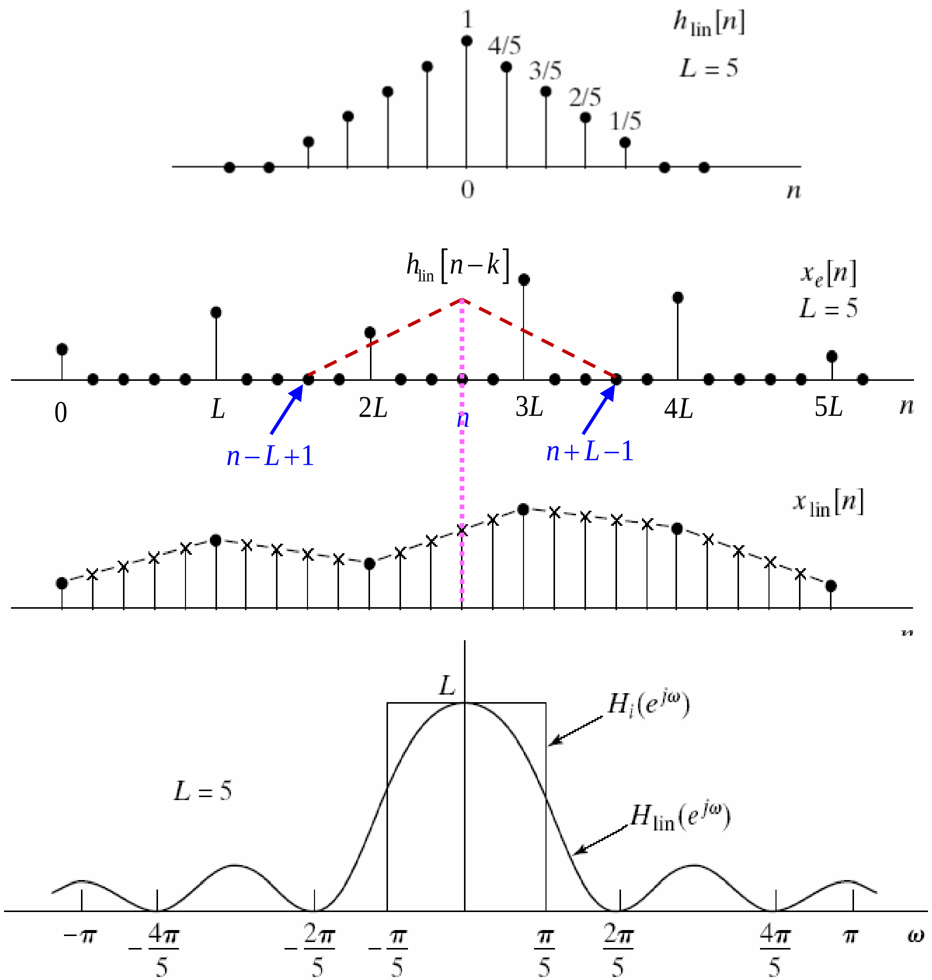
$$h_{\text{lin}}[n]=\begin{cases}1-|n|/L, & |n|\le L\\ 0, & others\end{cases}$$

内插输出为

$$x_{\text{lin}}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_e[k]h_{\text{lin}}[n-k]$$

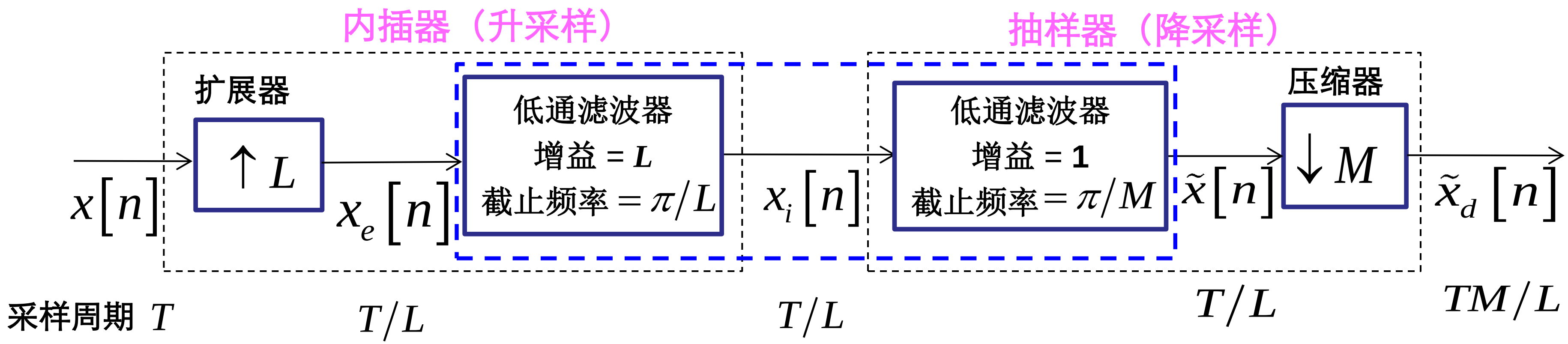
$$=\sum_{k=n-L+1}^{n+L-1}x_e[k]h_{\text{lin}}[n-k]$$

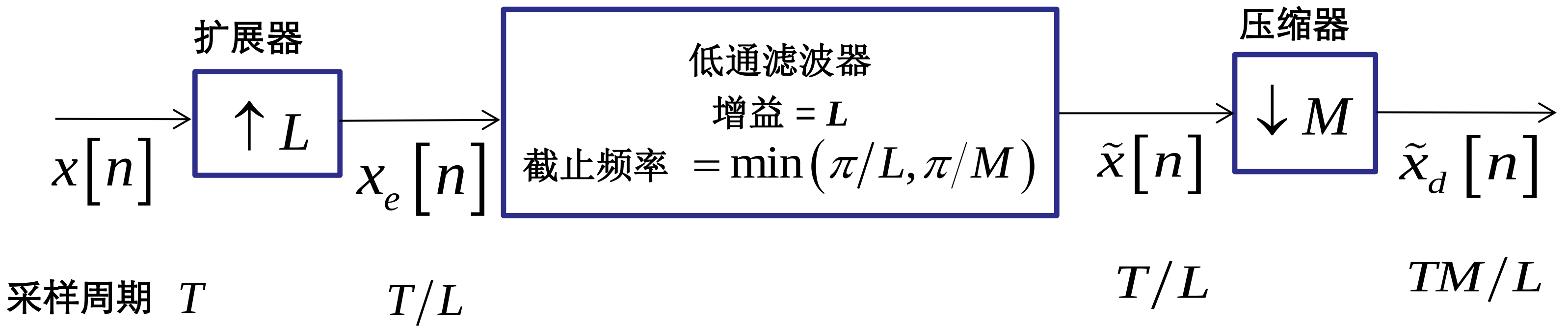
间隔为L的2个系数之和为1



◆采样率按非整数因子变化

实现方法：将降采样率的抽取与升采样率的插值结合





4.6.3 采样率按非整数因子变化

例：非整数采样率转化

带限信号 $X_c(j\Omega)$ 按奈奎斯特率采样，$\Omega_s = 2\pi/T = 2\Omega_N$，得其频谱为

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\omega - 2\pi k\right)/T\right)$$

现拟将采样周期变为 $T' = (3/2)T$

即实现1.5倍降采样

实现步骤：

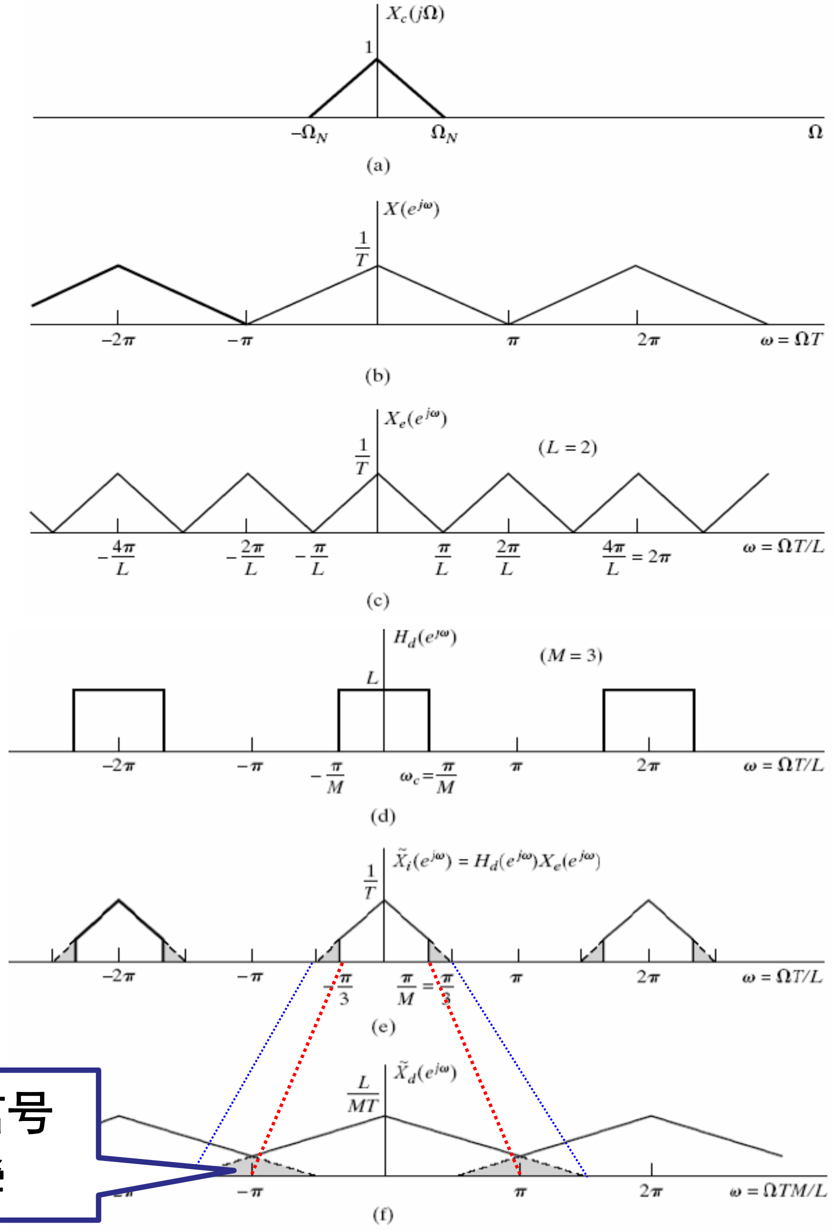
1）L=2倍扩展（内插）

2）低通滤

内插器滤波截止频率 $\le \pi/2$

抽样器滤波截止频率 $\le \pi/3$

3）M=3倍压缩（抽样）



采用π/2滤波，输出信号有混叠；π/3则无混叠