作业　三

1. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，且 $\{y_n\}$ 满足：$\exists\delta>0, \exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n\geq N$，有 $|y_n|\geq\delta$，则 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

2. 给定数列 $\{a_n\}$，$\forall m\in\mathbb{N}$，记 $S_m:=\sum_{k=1}^m a_k$，即 $S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，$S_3=a_1+a_2+a_3\quad\cdots$

   证明：如果 $\{S_m\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是无穷小量. 并举例说明，$\{a_n\}$ 是无穷小并不能保证 $\{S_n\}$ 的收敛.

3. $\forall\alpha>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=?$ 证明你的论断.

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^3+2n^2+1}+\frac{2^2}{3n^3+2n^2+1}+\cdots+\frac{n^2}{3n^3+2n^2+1}\right)$

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

6. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$

7. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}$

8. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$

9. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$

10. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right]$

11. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

12. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$

13. 利用夹逼定理计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ (其中 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1$；$(2n)!!=(2n)(2(n-1))\cdots4\cdot2$)

14. 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}(a_i>0,\ i=1,2,\cdots,m)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$$

15. 利用单调有界数列极限存在定理，证明先烈数列极限的存在性.

(a) $a_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$

16. 证明下列递归数列收敛，并求其极限.

(a) $a_1 > 0$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)(n = 1, 2, \cdots)$

(b) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$

(c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$