# 作业　十二

1. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$，求 $f(x)$.

   **提示：** $f(x) = \int f'(x)dx + C$，所以先求出 $f'(x)$ 的表达式

2. 设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\displaystyle\int f(x)dx$.

   **提示：** 同上题提示

3. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{1 + x\sin x}$，求 $\displaystyle\int f(x)f'(x)dx$.

4. 曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(e, 1)$，且在任一点的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程. （最简单的建立微分方程然后求解的类型）

5. 设 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 分别满足下列条件，求 $f(x)$ 的表达式：

$$a)\ f(x) = \sin x + \int_0^{\pi} f(x)dx; \quad b)\ f(x) = 2\ln x = x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$$

   **提示：** 题目没说函数可导，所以两边求导不好使，但两边可以求积分啊

6. 计算 $\displaystyle\int_1^3 f(x-2)dx$，其中 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \le 0 \\ \frac{1}{e^x}, & x > 0 \end{cases}$

7. 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1 + \tan t^2}$

   **提示：** 直接尝试求出 $f(x)$ 的表达式是不利的，但 $f(x)$ 的导数立马可知，所以。。。

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有二阶连续导数，设 $f(0) = 2, f(\pi) = 1$，求 $\displaystyle\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx$

9. 设 $f(x)$ 连续，满足 $f(1) = 1$，且 $\displaystyle\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{\arctan x^2}{2}$，求 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

   **提示：** 用变量替换先将积分转化为两边可以对 $x$ 求导的形式

10. 设函数 $f(x)$ 在 $U(0)$ 可导,且 $f(0)=0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt}{x^{2n}}$ $(n\in \mathbb{N}_+)$

**提示：** 见上题的提示

11. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），记 $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$. 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**提示：** 同第 6 题的提示

12. 求不定积分 $I_1=\displaystyle\int\frac{\cos x dx}{\sin x+\cos x}$ 和 $I_2=\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}$

13. 求下列积分的递推表达式:

$$a)\ I_n=\int \tan^n x dx; \qquad b)\ I_n=\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

14. 设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}$. 证明当 $n\geq 2$ 时，有

$$a)\ I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}; \qquad b)\ \frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}; \qquad c)\ \lim_{n\to\infty}(nI_n)=\frac{1}{2}$$

15. 讨论下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值:

$$a)\ \int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}; \qquad b)\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$$

$$c)\ \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx; \qquad d)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

$$e)\ \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx; \qquad f)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$$

16. 讨论下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值:

$$a)\ \int_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}; \qquad b)\ \int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}; \qquad d)\ \int_{1/2}^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$$

17. 设 $k \in \mathbb{R}$，讨论 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性.

18. 求下列曲线所围成的图形的面积.

$$a)\ x = 2y - y^2 \text{ 与 直线 } y = 2 + x;$$

$$b)\ x^2 + 3y^2 = 6y \text{ 与直线 } y = x \text{ (两部分都要计算)}$$

$$c) \text{ 抛物线 } y^2 = 2px\ (p > 0) \text{ 及其在点 } \left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ 处的法线所围成的面积；}$$

$$d) \text{ 曲线 } y = e^x \text{ 与通过坐标原点的切线及 } y \text{ 轴所围成的图形.}$$

19. 用两种方法计算心脏线所围成图形的面积

$$a) \text{ 参数式：} \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases};\qquad b) \text{ 极坐标下：} r = 2a(1 - \cos\theta)\ (a > 0)$$

20. 求下列曲线所围成图形的公共部分的公共面积:

$$r = \sqrt{2}\sin\theta,\ r^2 = \cos 2\theta$$

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \geq 0\,(x \in [0,1])$，证明: $\int_0^1 f(x^2)dx \geq f\left(\frac{1}{3}\right)$.

22. 设 $f \in C^{(1)}[a,b]$，求证

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^b |f'(x)|\,dx$$