



# 第七章：滤波器设计方法

## ◆ 7.0 引言

## ◆ 7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器

## ◆ 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

## ◆ 7.3 Kaiser窗函数法设计FIR滤波器

## ◆ 7.4 FIR滤波器的最佳逼近

## ◆ 7.5 FIR滤波器等波纹逼近示例

## ◆ 7.6 IIR和FIR滤波器设计考虑



# 7.1.3 双线性变换法

## ◆ 巴特沃斯、切比雪夫、椭圆滤波器性能比较

拟设计离散时间滤波器技术指标为

$$\begin{cases} 0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, & 0 \leq \omega \leq 0.4\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.001, & 0.6\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

由容限图可知  $\delta_1 = 0.01$ ,  $\delta_2 = 0.001$ ,  $\omega_p = 0.4\pi$  以及  $\omega_s = 0.6\pi$ 。

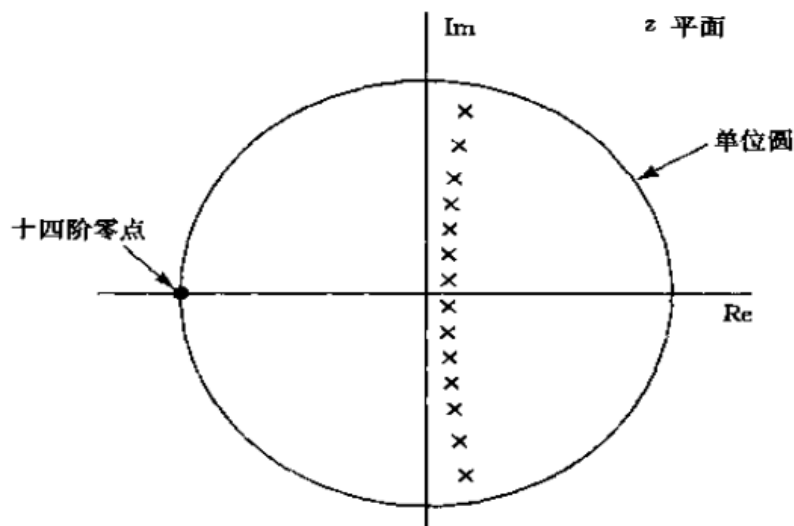
各类滤波器达到技术指标所需阶数为

滤波器类型	巴特沃斯	切比雪夫I型	切比雪夫II型	椭圆
阶数	14	8	8	6

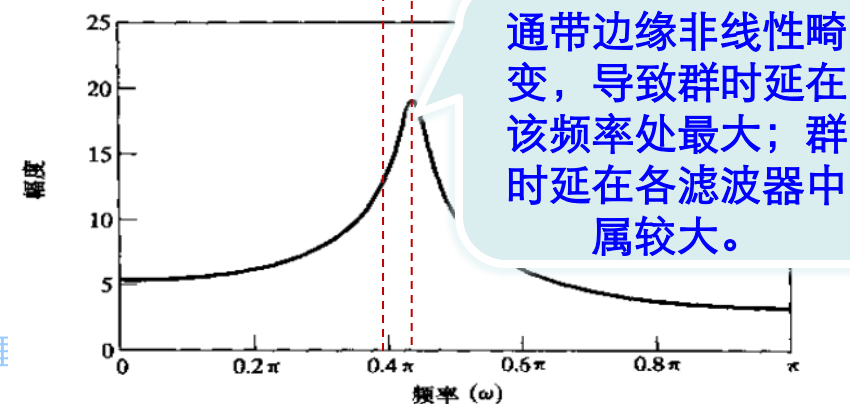
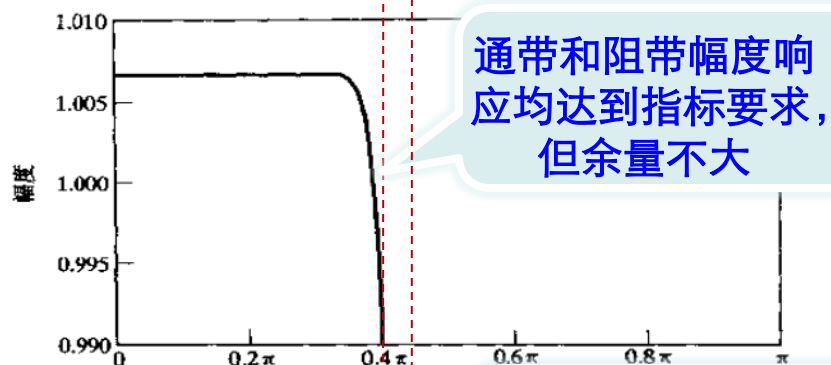
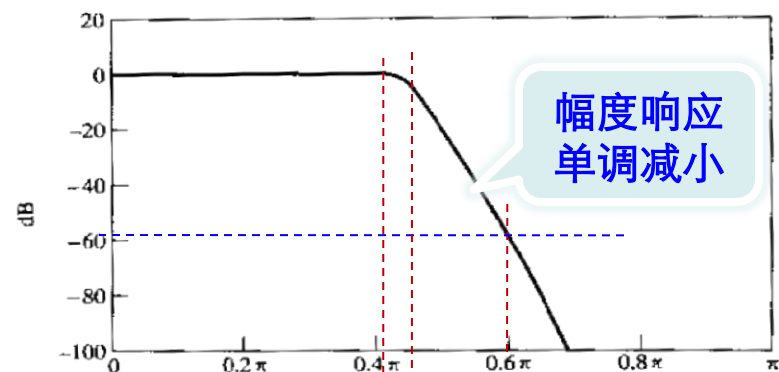
# 7.1.3 双线性变换法

## ◆ 巴特沃斯滤波器性能

### 14阶滤波器



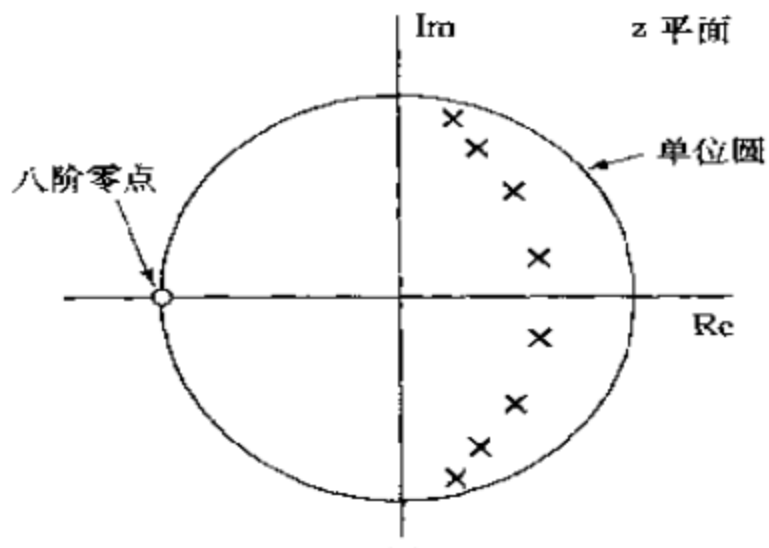
- 有14个零点全位于 $z = -1$ 处，阻带**单调衰减**。
- 极点距单位圆较远，通带选择性较弱，**较平坦**；过渡带未加强抑制，**幅度衰减较慢**。



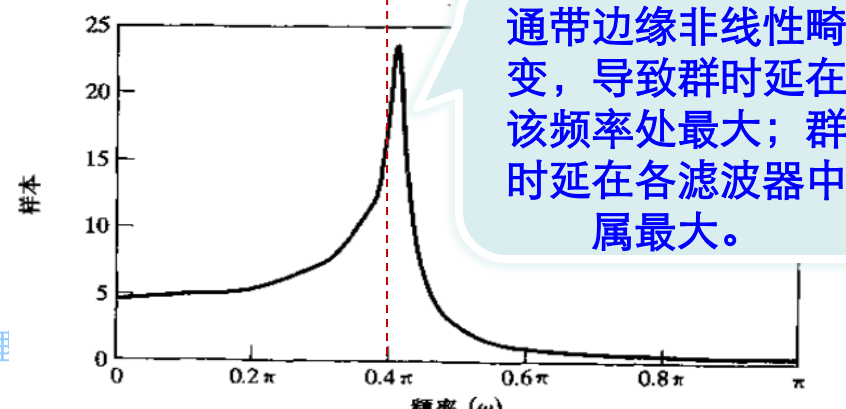
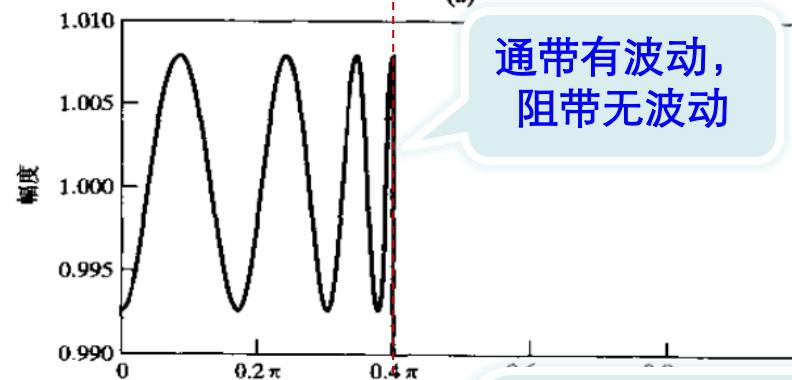
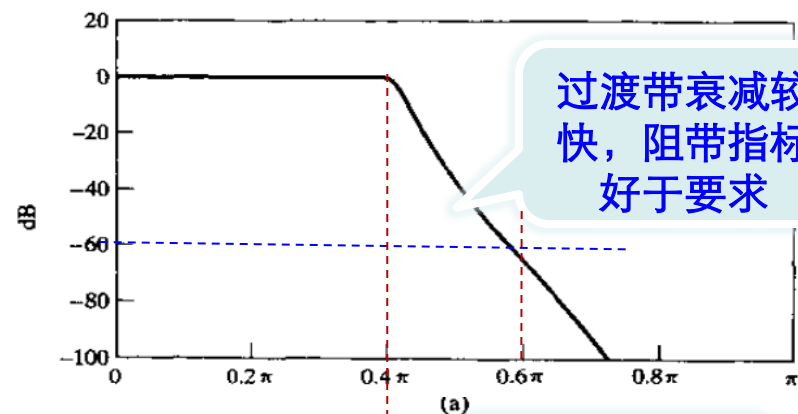
# 7.1.3 双线性变换法

## ◆ 切比雪夫I型滤波器性能

### 8阶滤波器



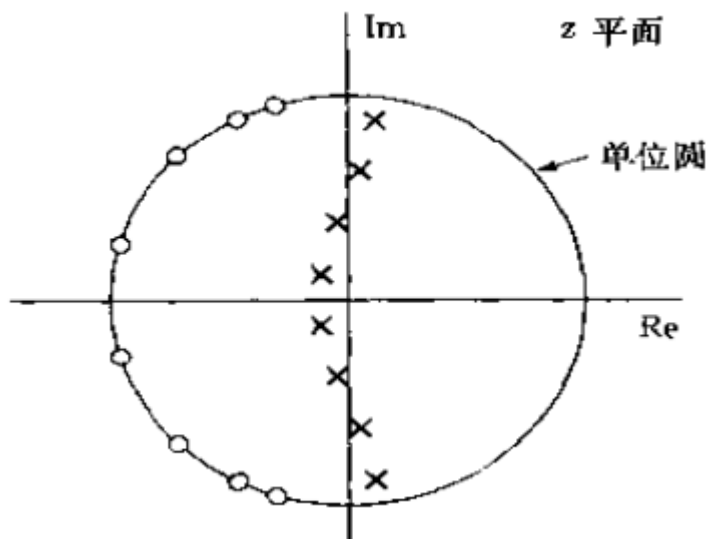
- 有8个零点全位于 $z = -1$ 处，阻带单调衰减。
- 极点距单位圆较近，通带选择性较巴特沃斯强，波动增加，但对过渡带抑制加强，幅度衰减较快。



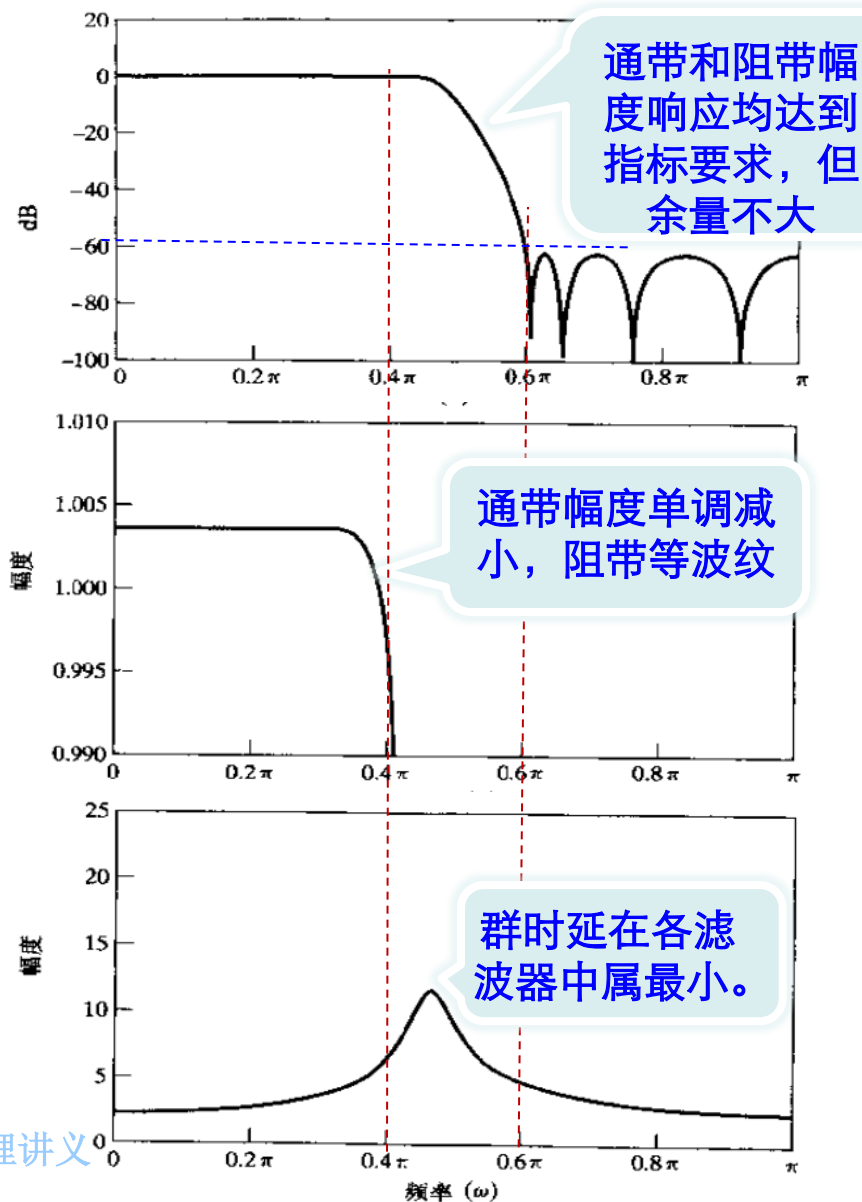
# 7.1.3 双线性变换法

## ◆ 切比雪夫II型滤波器性能

8阶滤波器



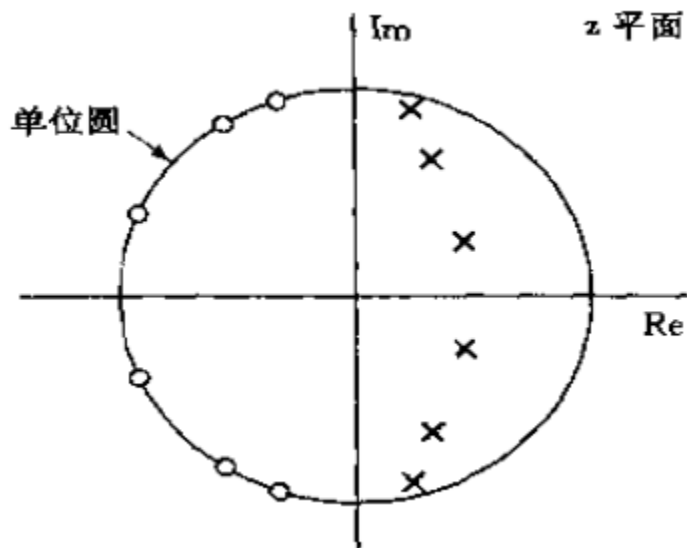
- 有8个零点离散分布单位圆左边，阻带等波纹波动。
- 极点距单位圆较远，通带选择性较弱，较平坦；过渡带幅度衰减较快。



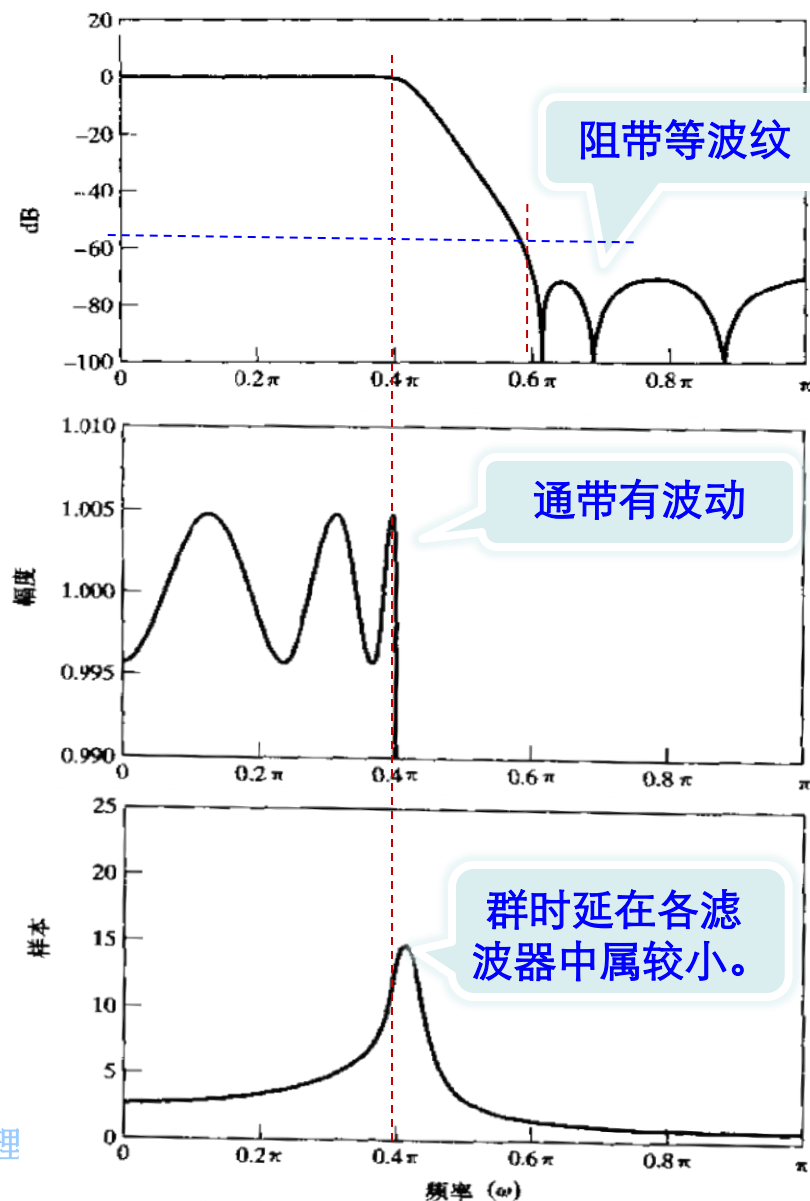
# 7.1.3 双线性变换法

## ◆ 椭圆滤波器性能

### 6阶滤波器



- 有6个零点离散分布单位圆左边，阻带等波纹波动。
- 极点距单位圆适中，通带选择性较一般，有较弱波动；过渡带幅度衰减较快。



# 7.1.3 双线性变换法

## ◆ 巴特沃斯、切比雪夫、椭圆滤波器性能比较总结

特性 \ 类型	巴特沃斯	切比雪夫I型	切比雪夫II型	椭圆
所需阶数	最高	适中	适中	最低
零极点分布	零点：全在 $z = -1$	零点：全在 $z = -1$	零点：分布单位圆左边；	零点：分布单位圆左边；
	极点：偏离单位圆较远	极点：偏离单位圆较近	极点：偏离单位圆较远	极点：偏离单位圆适中
阻带特性	单调下降	单调下降	等波纹，抑制尚可	等波纹，抑制较强
通带特性	平坦，单调下降	等波纹，波纹较大	平坦，单调下降	等波纹，波纹较小
相位畸变	适中	最大	最小	适中





# 第七章：滤波器设计方法

- ◆ 7.0 引言
- ◆ 7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器
- ◆ 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器
- ◆ 7.3 Kaiser窗函数法设计FIR滤波器
- ◆ 7.4 FIR滤波器的最佳逼近
- ◆ 7.5 FIR滤波器等波纹逼近示例
- ◆ 7.6 IIR和FIR滤波器设计考虑





## 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

FIR滤波器窗函数设计法基本原理是通过对期望滤波器脉冲响应时域加合适的窗函数来逼近期望滤波器的脉冲响应或频率响应。

(直接) 窗函数法FIR滤波器设计步骤:

1) 由离散时间滤波器的技术指标, 获得待求滤波器的期望(理想) 频率响应  $H_d(e^{j\omega})$ ;

2) 由待求滤波器的期望频率响应, 获得待求滤波器的期望单位脉冲响应  $h_d[n]$

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

3) 由过渡带和阻带衰减要求, 选择窗函数  $w[n]$  及其长度  $M$

$$w[n] = 0, \quad n < 0 \quad \text{和} \quad n > M$$



## 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

(直接) 窗函数法FIR滤波器设计步骤 (续) :

4) 由滤波器期望单位脉冲响应  $h_d[n]$  和窗函数  $w[n]$ , 计算所求滤波器的单位脉冲响应

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

5) 由4) 求得的滤波器的单位脉冲响应, 计算所求滤波器的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega n}$$

6) 验证步骤5) 所求滤波器的性能是否达到指标要求。若未达到, 增加窗长度或更改窗函数, 重复步骤3)、4)、5)。

直接窗函数法FIR滤波器设计的缺陷之一是需要多次迭代选择合适的窗函数, 设计较为繁琐。



## 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

### ◆加矩形窗函数及影响

矩形窗函数可表示为

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

期望脉冲响应加矩形窗后可表示为

$$h[n] = h_d[n]w[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由离散傅里叶**加窗定理**，其频率响应可表示为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

加窗后脉冲响应对应的频率响应  $H(e^{j\omega})$  为期望脉冲响应对应的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  与窗函数频率响应  $W(e^{j\omega})$  的**周期卷积**。



# 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

## ◆加矩形窗函数及影响（续1）

矩形窗函数的频率响应可表示为

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{j\omega(M+1)}}{1 - e^{j\omega}} = e^{-j\omega M/2} \cdot \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin[\omega/2]}$$

$W(e^{j\omega})$ 具有**广义线性相位**

**主瓣幅度（峰值）**为

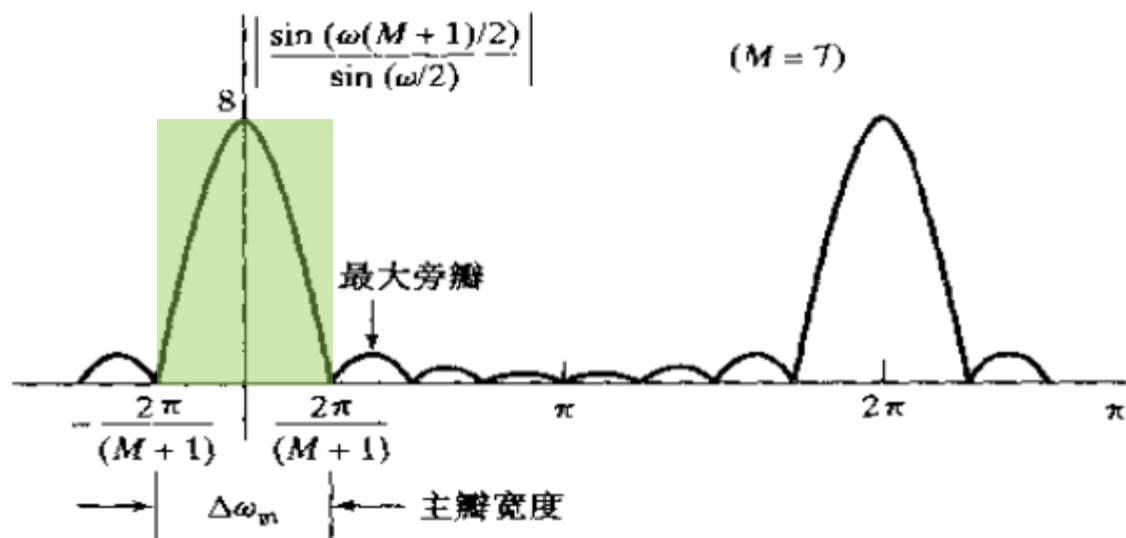
$$|W(e^{j0})| = M + 1$$

**主瓣宽度**为

$$\Delta\omega_m = 4\pi / (M + 1)$$

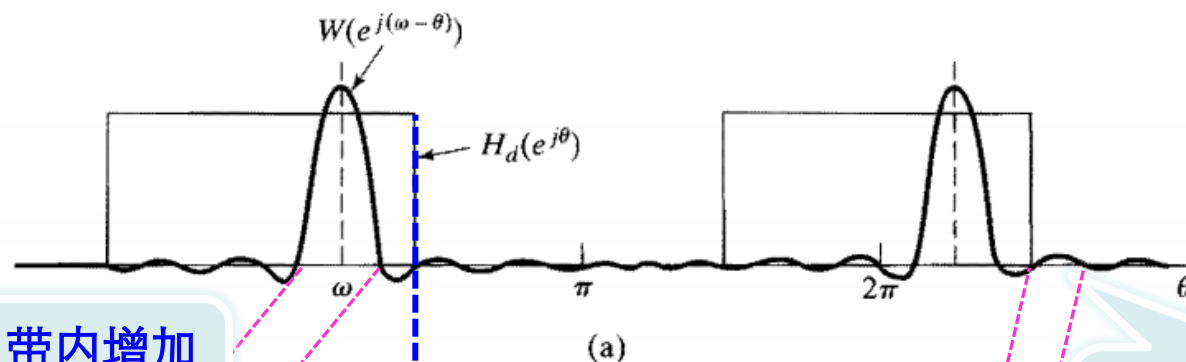
**随着M增大：**

- 主瓣**幅度**增加；
- 主瓣**宽度**减小；
- 每个瓣的**面积**不变



# 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

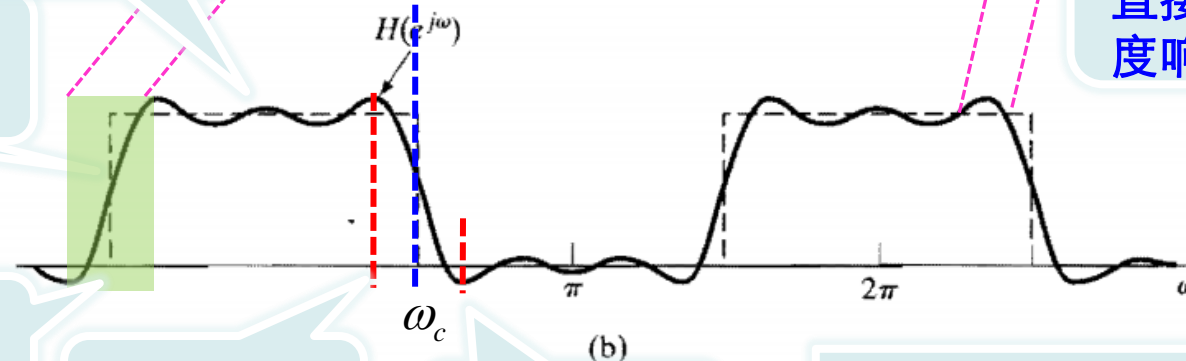
## ◆例：理想低通滤波器加矩形窗函数及影响



带内增加了波动

不连续点处加宽形成过渡带

窗函数旁瓣的宽度直接影响加窗后幅度响应震荡的快慢



过渡带宽度等于主瓣宽度

最大峰值在  $\omega_c - \Delta\omega_m/2$

最大负峰在  $\omega_c + \Delta\omega_m/2$

由加矩形窗引起的幅度响应的震荡称为吉布斯现象

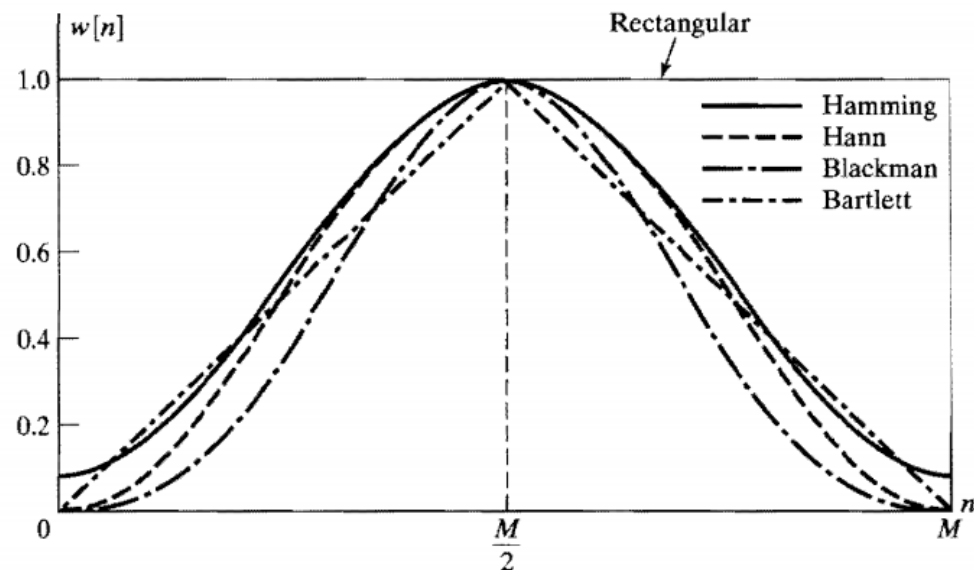
# 7.2.1 常用窗函数的性质

## ◆ 矩形窗

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

## ◆ Bartlett (三角) 窗

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



## ◆ Hanning窗 (升余弦窗)

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

## ◆ Hamming窗 (改进升余弦窗)

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

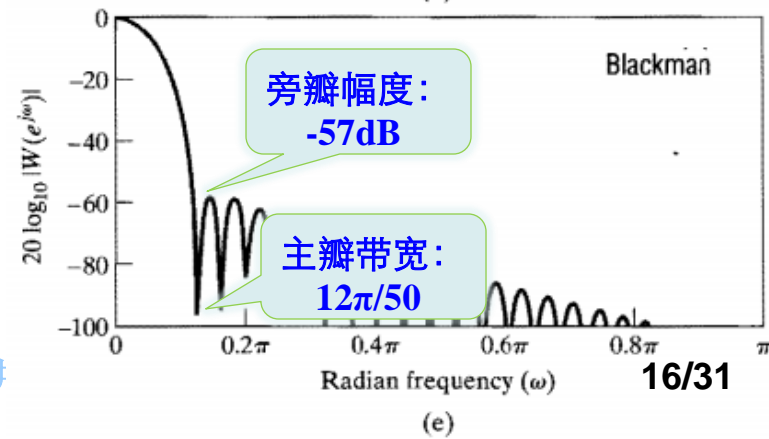
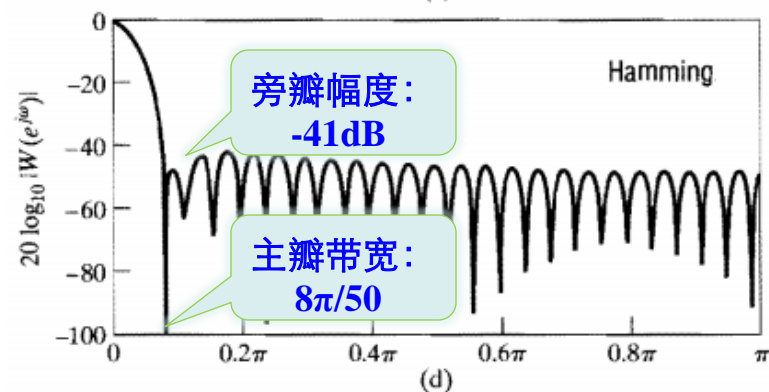
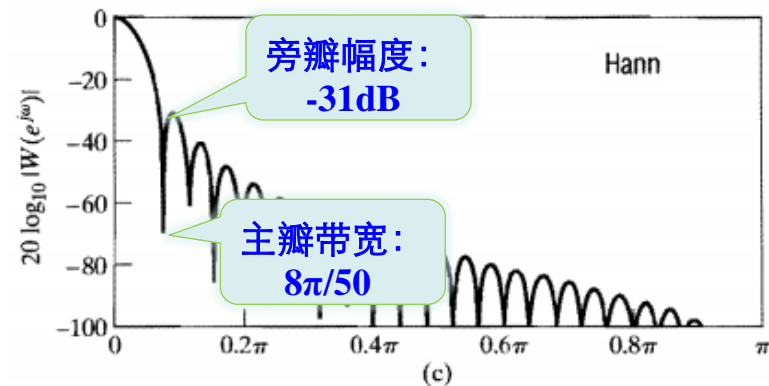
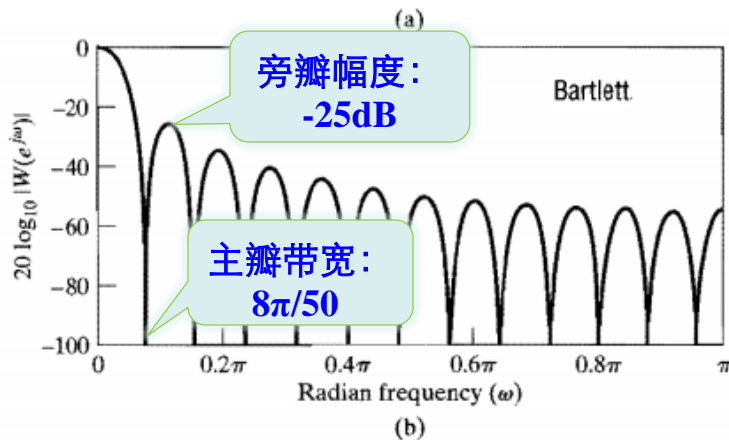
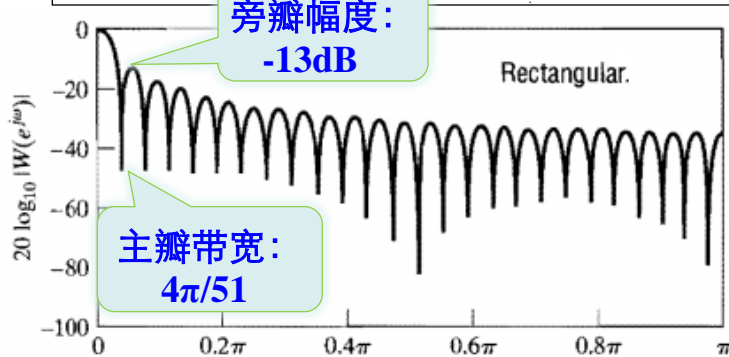
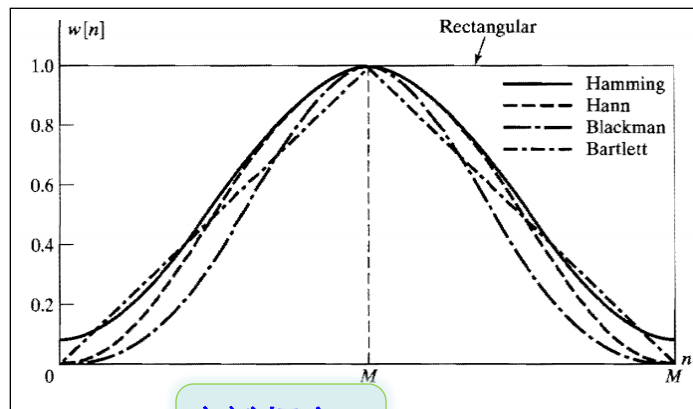
## ◆ Blackman窗 (二阶升余弦窗)

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



# 7.2.1 常用窗函数的性质

窗函数频谱特性 ( $M=50$ )







## 7.2.2 广义线性相位合并

窗函数一般都具有**对称性**

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

即窗函数对于点 $M/2$ 对称，且是实系数，其傅里叶变换是

$$W(e^{j\omega}) = W_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

其中  $W_e(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的**实偶函数**

如果期望脉冲响应也**对于点 $M/2$ 对称**，即  $h_d[n] = h_d[M-n]$ ，  
则**加窗后的脉冲响应**也具有对称性，且其频响具有**广义线性相位**

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

其中  $A_e(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的**实偶函数**

如果期望脉冲响应**对 $M/2$ 反对称**，即  $h_d[n] = -h_d[M-n]$ ，则加窗脉冲响应也具有反对称性，其频响具有  $\pi/2$  **相移的广义线性相位**

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

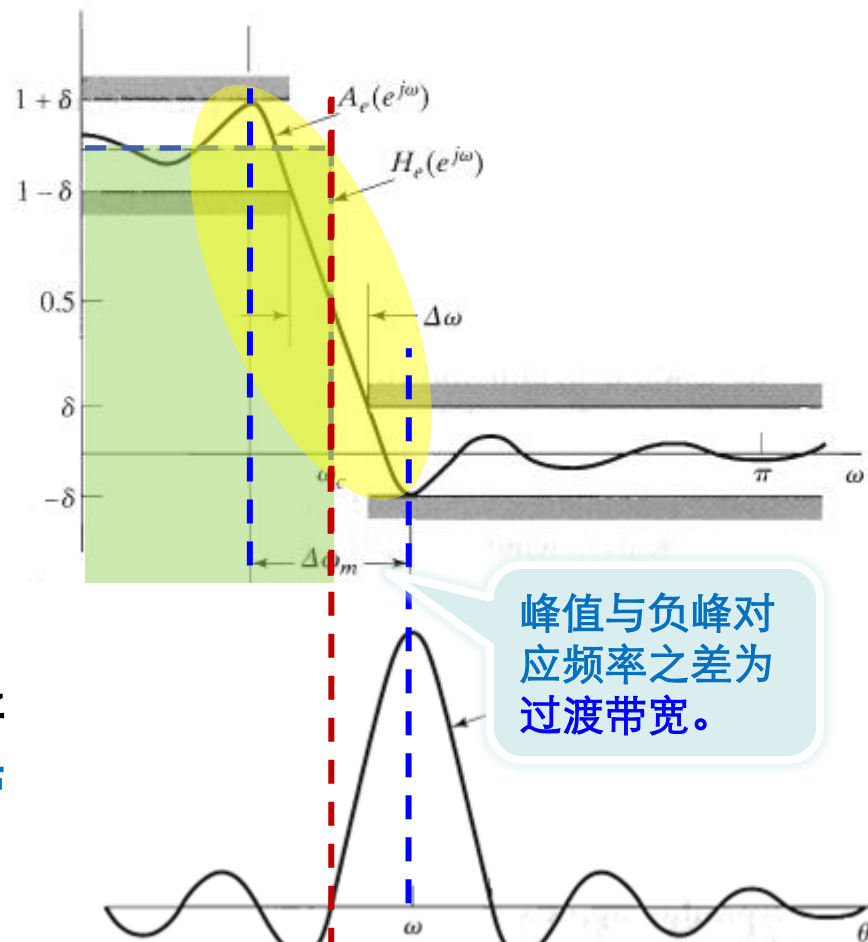
其中  $A_o(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的**实奇函数** 字信号处理讲义

# 7.2.2 广义线性相位合并

## ◆ 当期望脉冲响应关于M/2对称 加窗后的频率响应为

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \\ A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})W_e(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \end{cases}$$

- 当  $\omega = \omega_c$ ,  $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$  约有一半的面积在  $A_e(e^{j\omega})$  中起作用, 且  $A_e(e^{j\omega})$  在  $\omega = \omega_c$  附近呈现**奇对称性**。
- 当  $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$  **右边**第一个负瓣刚好位于  $\omega_c$  的右边时,  $A_e(e^{j\omega})$  在**通带**内 ( $\omega = \omega_c - \Delta\omega_m/2$ ) 出现**峰值**;
- 当  $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$  **左边**第一个负瓣正好位于  $\omega_c$  的左边**带**内 ( $\omega = \omega_c + \Delta\omega_m/2$ ) 出现**谷值**;



窗函数法FIR滤波器设计即是**选择具有合适频响的窗函数**, 使加窗后频响逼近期望滤波器频响。



# 第七章：滤波器设计方法

- ◆ 7.0 引言
- ◆ 7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器
- ◆ 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器
- ◆ 7.3 Kaiser窗函数法设计FIR滤波器
- ◆ 7.4 FIR滤波器的最佳逼近
- ◆ 7.5 FIR滤波器等波纹逼近示例
- ◆ 7.6 IIR和FIR滤波器设计考虑

# 7.2.3 Kaiser窗滤波器设计法

## ◆Kaiser窗滤波器设计法

基于（经验）公式的简单窗函数波器设计法，避免了其它方法中窗函数形状和长度的反复选择尝试。

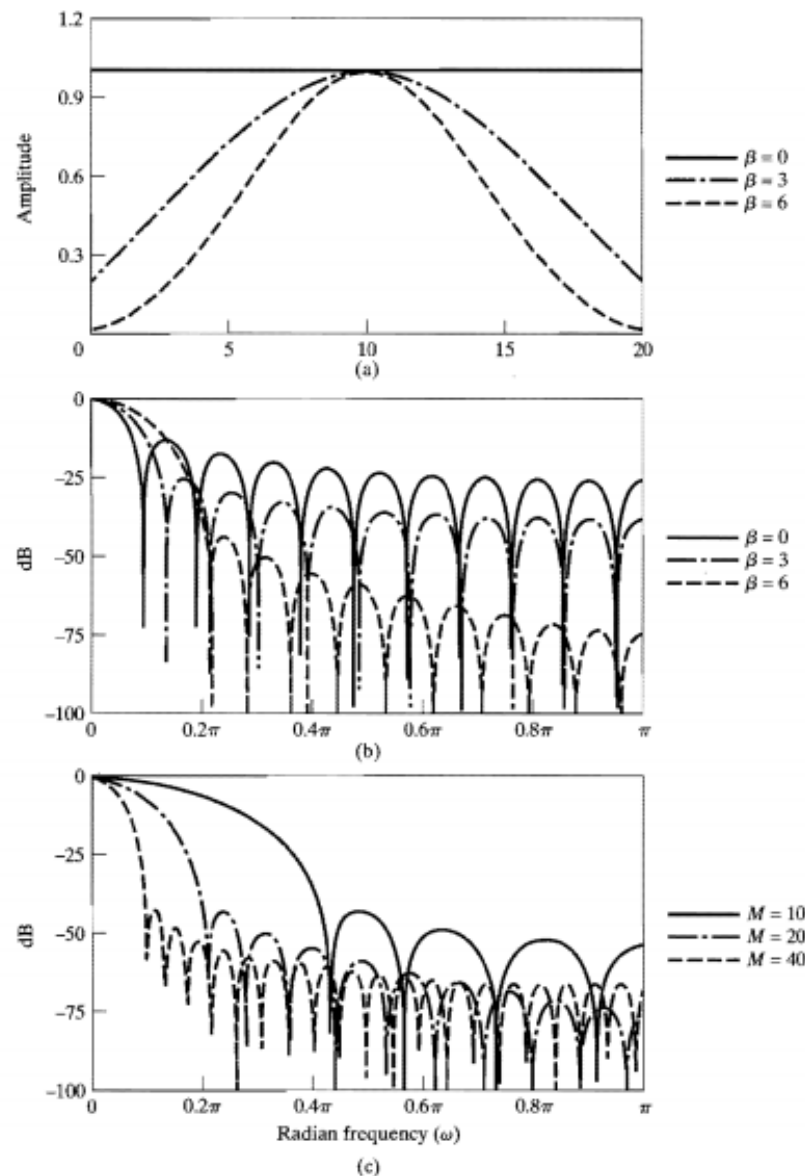
### Kaiser窗

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \beta \left( 1 - \left[ (n - \alpha) / \alpha \right]^2 \right)^{1/2} \right]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$I_0$  为第一类零阶修正Bessel函数，

$\alpha = M/2$  为长度参数

$\beta$  为形状参数



# 7.2.3 Kaiser窗滤波器设计法

## ◆ Kaiser窗低通滤波器设计参数选择

通带截止频率  $\omega_p$  :  $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$  时的最高频率

阻带截止频率  $\omega_s$  :  $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$  时的最低频率

过渡带宽度  $\Delta\omega$  :  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$

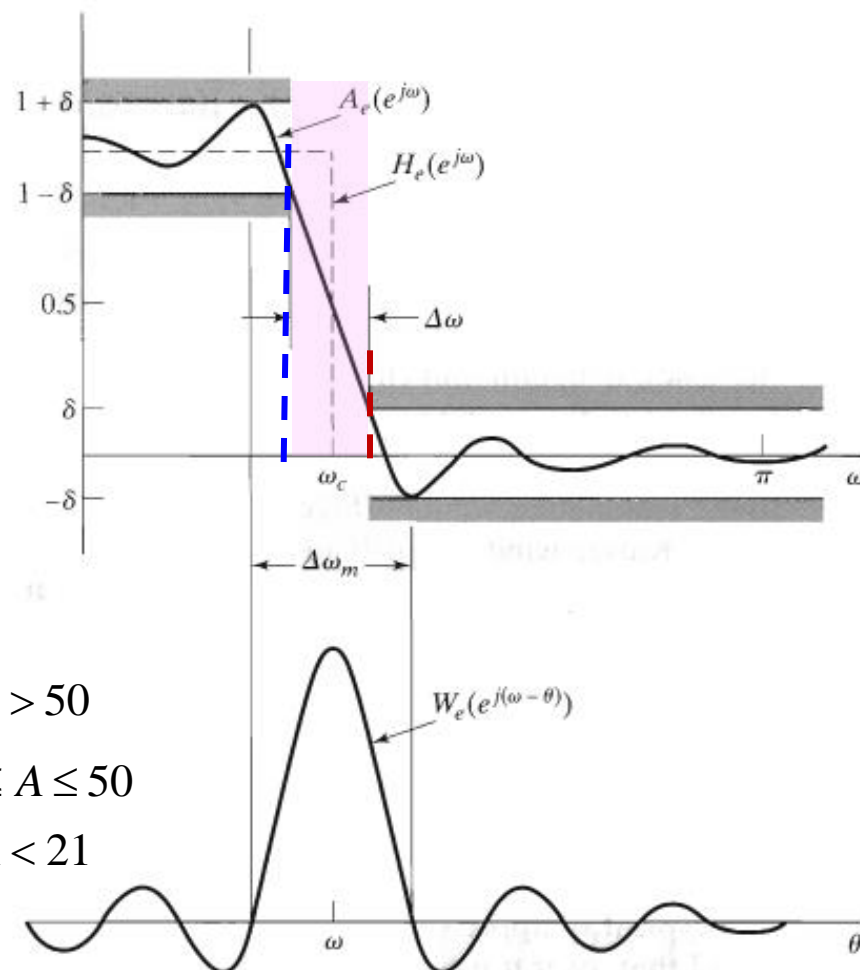
参数  $A$  :  $A = -20 \log_{10} \delta$

参数  $\beta$  :

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

参数  $A$ 、 $\Delta\omega$ 、和  $M$  满足关系:

$$M = (A - 8) / (2.285 \Delta\omega)$$





## 7.2.3 Kaiser窗滤波器设计法

### ◆ 例：用Kaiser窗设计低通滤波器

#### 1、给出拟设计滤波器技术指标：

$$\omega_p = 0.4\pi, \quad \omega_s = 0.6\pi, \quad \delta_1 = 0.01, \quad \delta_2 = 0.001$$

#### 2、计算期望滤波器截止频率：

$$\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.5\pi$$

#### 3、计算过渡带宽度和参数A：

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi, \quad A = -20\log_{10} \delta = 60\text{dB}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

#### 4、计算Kaiser窗参数：

$$M = (A-8)/(2.285\Delta\omega)$$

由等式(7.62),  $\beta = 5.653$ ; 由等式(7.63),  $M = 37$

#### 5、计算滤波器单位脉冲响应：

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c (n-\alpha)}{\pi (n-\alpha)} \frac{I_0 \left[ \beta \left( 1 - \left[ (n-\alpha)/\alpha \right]^2 \right)^{1/2} \right]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

式中  $\alpha = M/2 = 18.5$ 。

截止频率为 $\omega_c$ 的  
理想低通滤波器

Kaiser  
窗函数





# 7.2.3 Kaiser窗滤波器设计法

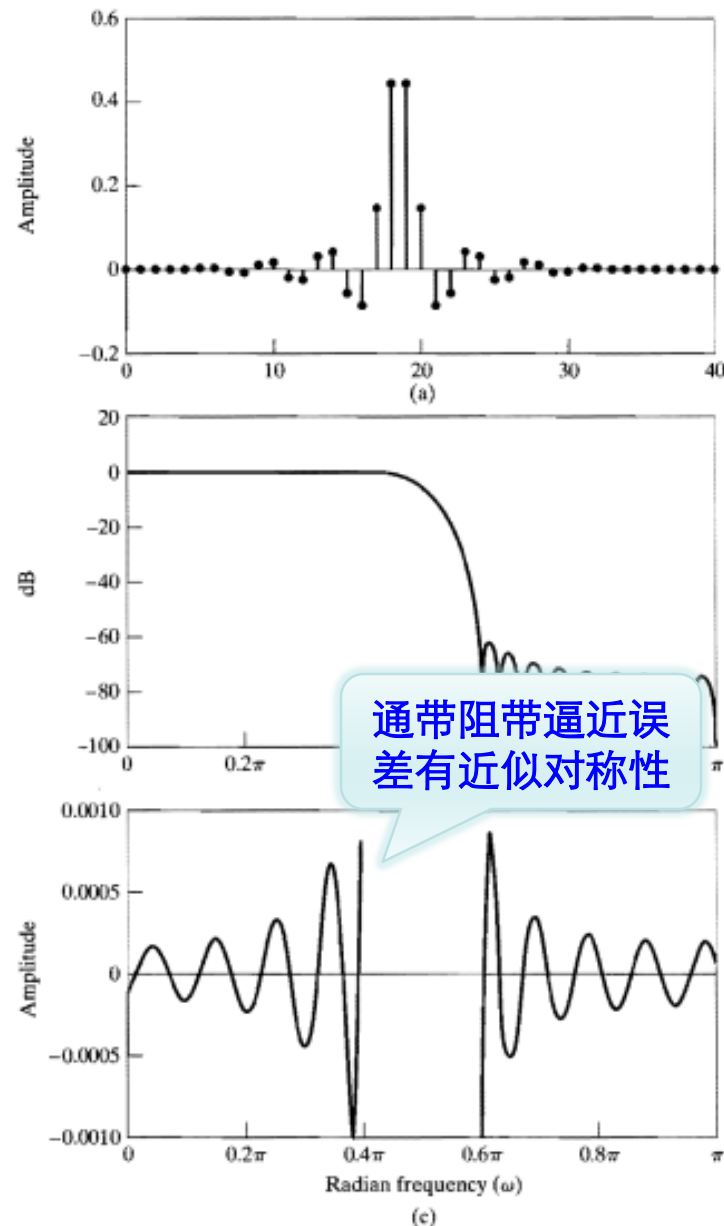
## ◆ 例：用Kaiser窗设计低通滤波器 (续)

- 1) 脉冲响应具有II型对称性  
( $M=37$ )
- 2) 频率响应在  $\omega=\pi$  处 (对应  $z=-1$  处) 有一个零点。

### 3) 通带和阻带逼近误差

$$E_A(\omega) = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

- 4) 具有线性相位，即固定群时延  
 $M/2=18.5$ 。





## 7.2.3 Kaiser窗滤波器设计法

### ◆ Kaiser窗与其他窗函数比较( $M=50$ )

表 7.1 常用窗函数的比较

窗的类型	最大旁瓣幅度 (相对值)	主瓣近似宽度	最大逼近误差 $20\log_{10}\delta(\text{dB})$	等效 Kaiser 窗 $\beta$	等效 Kaiser 窗的 过渡带宽度
矩形	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

- 1) 采用第5列参数值的Kaiser窗与对比窗的峰值逼近误差相同
- 2) 第6列表示的Kaiser窗过渡带宽度测算对比窗的更准确(更窄)。

# 7.2.3 Kaiser窗滤波器设计法

## ◆ Kaiser窗与其他窗函数比较（续）

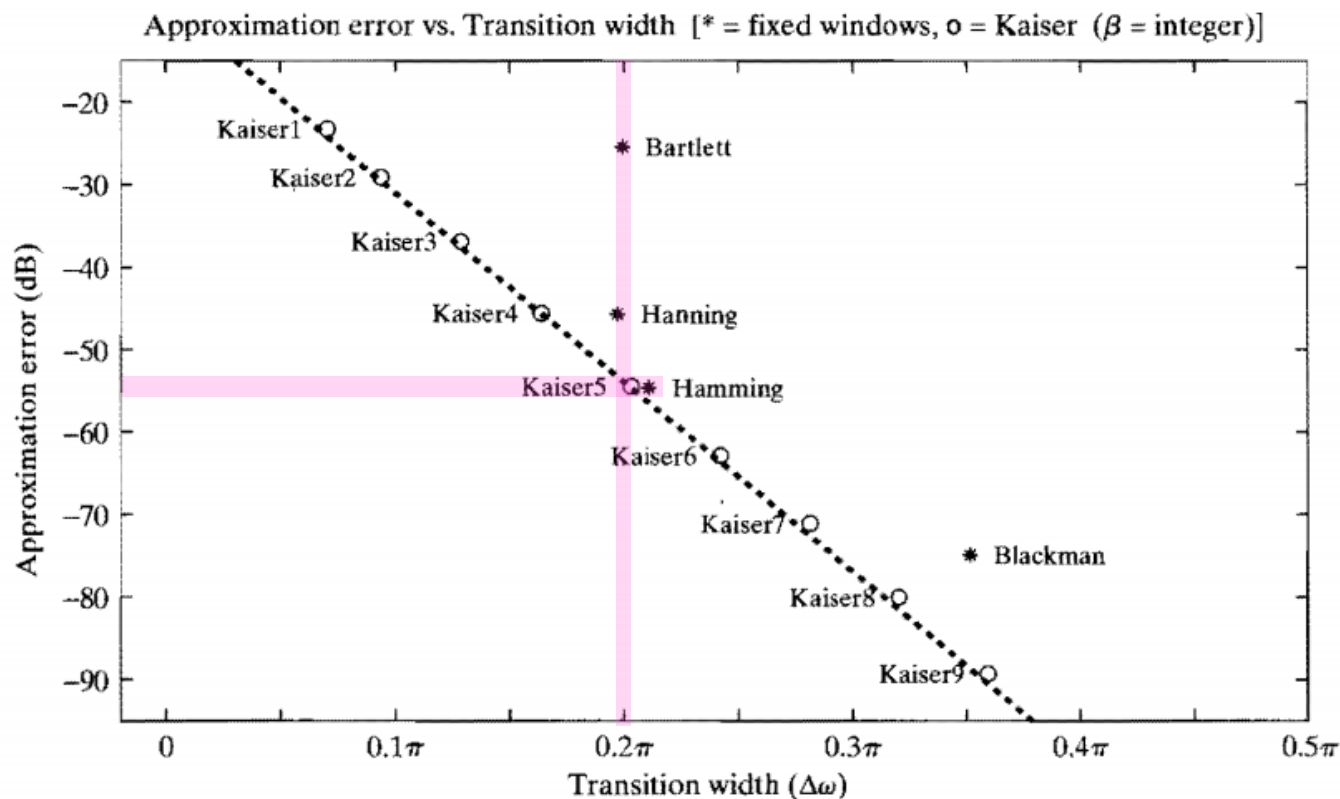
实现低通滤波器：

$$M = 32$$

$$\omega_c = \pi/2$$

1) 在相同的过渡带条件下，Kaiser窗具有最低的逼近误差。

2) 在相同的逼近误差条件下，Kaiser窗具有更窄的过渡带。



# 7.3.1 高通滤波器

## ◆ 高通滤波器频率响应与脉冲响应分析

具有广义线性相位的理想高通滤波器的频率响应为

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega M/2}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

由理想低通滤波器的频率响应，高通滤波器频率响应可表示为

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} - H_{lp}(e^{j\omega})$$

由傅里叶变换，理想高通滤波器脉冲响应可表示为

$$h_{hp}[n] = \frac{\sin \pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)} - \frac{\sin \omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}, \quad -\infty < n < \infty$$

截至频率为 $\pi$ 的  
低通滤波器

截至频率为 $\omega_c$ 的  
低通滤波器

# 7.3.1 高通滤波器

## ◆例：用Kaiser窗设计高通滤波器

拟设计高通滤波器技术指标为

$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, & |\omega| \leq \omega_s \\ 1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, & \omega_p \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

其中  $\omega_s = 0.35\pi$ ,  $\omega_p = 0.5\pi$  和  $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.021$  ,

滤波器截止频率:  $\omega_c = (0.35 + 0.5)/2 = 0.425\pi$

由等式 (7.62) 和 (7.63) , 可得Kaiser窗参数

$$\beta = 2.6 \quad \text{和} \quad M = 24$$

# 7.3.1 高通滤波器

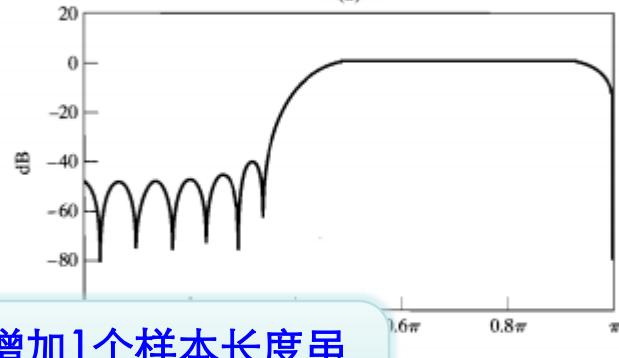
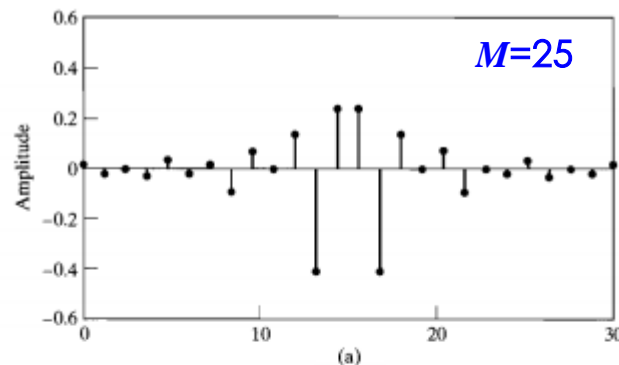
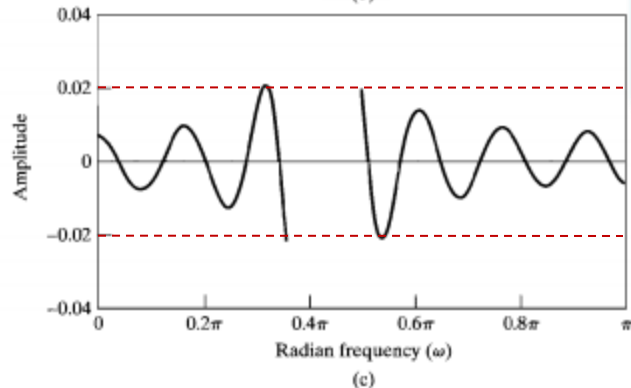
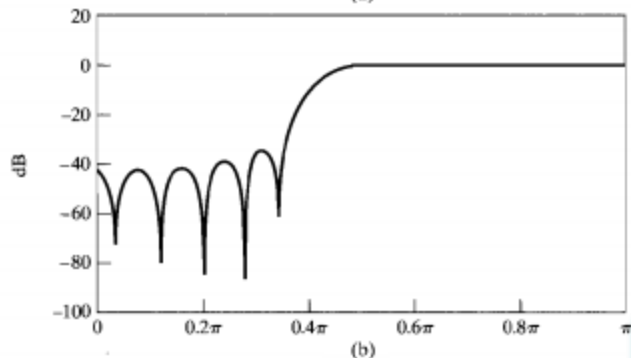
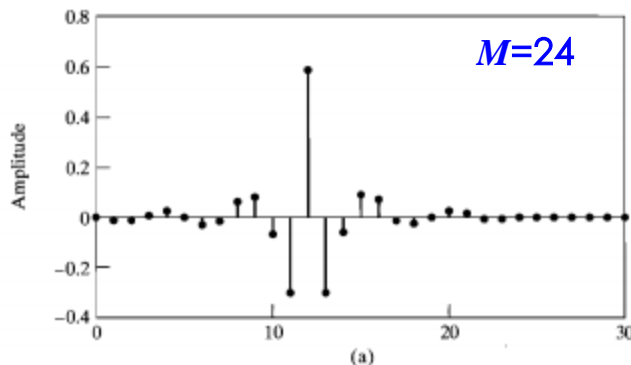
## ◆ 例：用Kaiser窗设计高通滤波器（续）

1)  $M=24$ ,  $h_{hp}[n]$  为I型FIR滤波器。

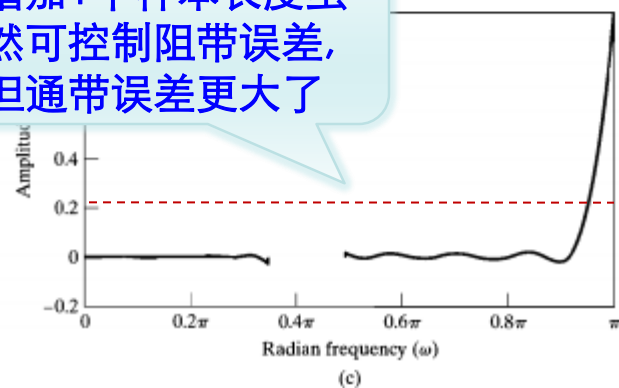
2)  $M=24$ , 峰值逼近误差 (0.0213) 略大于性能指标要求 (0.021)。

3)  $M=25$ ,  $h_{hp}[n]$  为II型FIR滤波器, 在 $z=-1$ 有一个零点。

4) 在  $\omega=\pi$  处的零点使通带逼近误差明显大于性能指标要求 (0.021)。



增加1个样本长度虽然可控制阻带误差, 但通带误差更大了



# 7.3.1 高通滤波器

## ◆ 多频带滤波器设计的推广

多频带滤波器**幅度响应**如右图。

对于线性相位多频带滤波器，  
其**频率响应**为**幅度响应**乘以**相位因子**  $e^{-j\omega M/2}$ 。

➤ **理想多频带滤波器脉冲响应**  
可表示为多个**LPF**的叠加

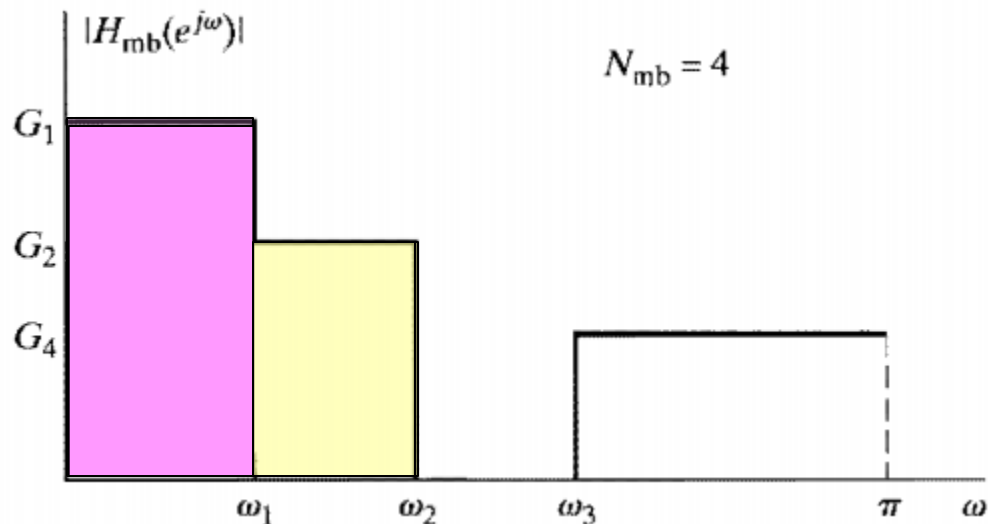
$$h_{mb}[n] = \sum_{k=1}^{N_{mb}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin \omega_k (n - M/2)}{\pi (n - M/2)}$$

其中  $N_{mb}$  为频带**数目**， $G_k$  和  $\omega_k$  为第  $k$  个频带的**增益**和**截止频率**，且  $G_{N_{mb}+1} = 0$ 。

➤ **理想多频带滤波器脉冲响应**可改写为多个**BPF**的叠加

$$h_{mb}[n] = G_1 f_1 + \sum_{k=2}^{N_{mb}} G_k (f_k - f_{k-1}), \quad f_k = \frac{\sin \omega_k (n - M/2)}{\pi (n - M/2)}$$

将**理想多频带滤波器脉冲响应**  $h_{mb}[n]$  乘以合适的**窗函数**，则可获得  
**所求多频带滤波器脉冲响应**。



## 7.3.2 离散时间微分器

### ◆ 离散时间微分器频率响应与脉冲响应分析

离散时间微分器输出序列为输入序列的导数，其频率响应为

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = j\omega/T, \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

具有线性相位的理想离散时间微分器的频率响应可表示为

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}, \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

其中，归一化采样周期  $T=1$ 。

由傅里叶逆变换，理想微分器的脉冲响应可表示为

$$h_{diff}[n] = \frac{\cos \pi(n-M/2)}{(n-M/2)} - \frac{\sin \pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)^2}, \quad -\infty < n < \infty$$

容易证明

$$h_{diff}[n] = -h_{diff}[M-n]$$

理想离散时间微分器为III型或IV型广义线性相位系统。



# 7.3.2 离散时间微分器

## ◆例：用Kaiser窗设计微分器

设计的Kaiser窗参数  
 $\beta = 2.4$

1)  $M=10$ , 微分器为**III型**广义线性相位, 具有 $\pi/2$ 固定相移和 $M/2=5$ 个样点延迟线性相移;  
 在 $z=\pm 1$ 都有零点。

2)  $M=5$ , 微分器为**IV型**广义线性相位具有 $\pi/2$ 固定相移和 $M/2=2.5$ 个样点延迟线性相移;  
 在 $z=1$ 有零点。

