

# 第七章：滤波器设计方法

## ◆ 7.0 引言

- ◆ 7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器
- ◆ 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器
- ◆ 7.3 Kaiser窗函数法设计FIR滤波器
- ◆ 7.4 FIR滤波器的最佳逼近
- ◆ 7.5 FIR滤波器等波纹逼近示例
- ◆ 7.6 IIR和FIR滤波器设计考虑



# 7.0 引言——拉普拉斯变换简介

## ◆ 双边拉氏变换的定义

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

称为  $x(t)$  的**双边拉氏变换**，其中  $s = \sigma + j\Omega$ 。

即 
$$X(j\Omega)|_{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma} e^{-j\Omega t} dt$$

若  $\sigma = 0$ ， $s = j\Omega$ ，则：
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

则拉氏变换退化为  $x(t)$  的傅里叶变换。

因此：**连续时间傅里叶变换是双边拉普拉斯变换在  $\sigma = 0$  或是在  $j\Omega$  轴上的特例。**



# 7.0 引言——拉普拉斯变换简介 (2)

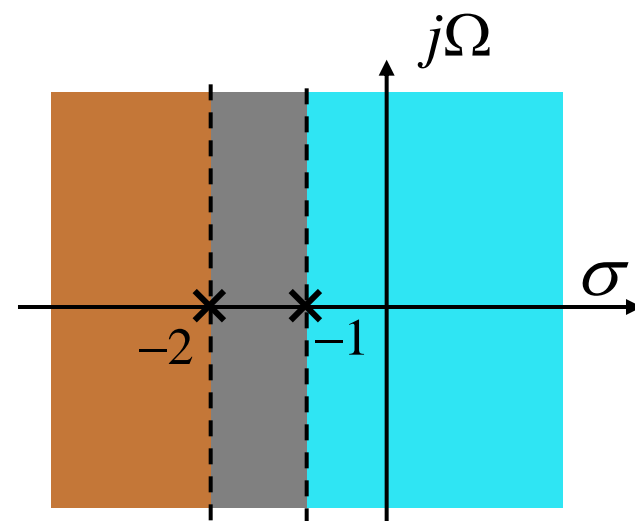
## ◆拉氏变换的收敛域 (ROC)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma} e^{-j\Omega t} dt$$

使拉氏变换积分收敛的那些复数  $s$  的集合，称为拉氏变换的**收敛域**

### □ 拉氏变换ROC的性质：

1. ROC是  $s$  平面上平行于  $j\Omega$  轴的**带形**区域，且其内无极点。
2. 右边信号的ROC位于  $s$  平面内一条**平行于  $j\Omega$  轴的直线的右边**。
3. 对于**稳定**系统，其系统函数（单位冲击响应  $h(t)$  的拉氏变换） $H(s)$  的**ROC必然包括  $j\Omega$  轴**。
4. **因果稳定**系统的  $H(s)$ ，其全部极点必须**位于  $s$  平面的左半边**。



# 7.0 引言

## ◆ 数字滤波器设计步骤

幅度响应（频率响应）  
或其限定条件

### 1) 给出拟设计离散时间系统的**技术指标**

- a) 由离散时间系统设计需求直接给出；
- b) 通过连续时间系统的技术指标推导给出。

### 2) 用因果离散时间系统**逼近**所给技术指标

- a) 由给出的技术指标确定离散时间系统的系统函数；
- b) 采用函数逼近法使系统幅度响应落在容限之内；  
IIR滤波器用有理函数逼近，FIR滤波器用多项式逼近。

### 3) 实现或**验证**设计的数字滤波器

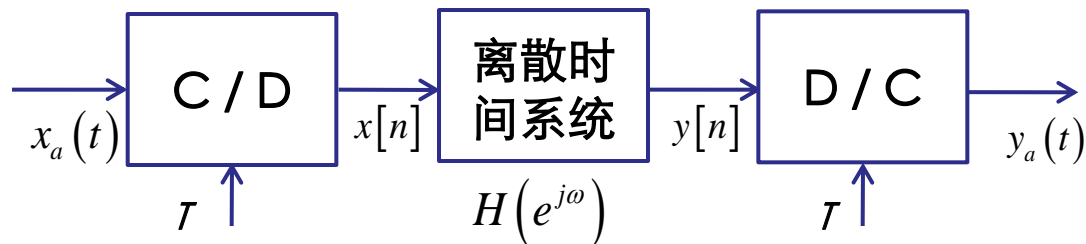


# 7.0 引言

## ◆离散时间处理系统频率响应的获取

基于右图实现的频选滤波器，其等效连续时间系统的期望频率响应可表示为

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$



连续时间信号离散时间处理系统

则通过尺度变换关系式  $\omega = \Omega T$ ，可获得对应的一个周期内离散时间滤波器频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi$$

# 7.0 引言

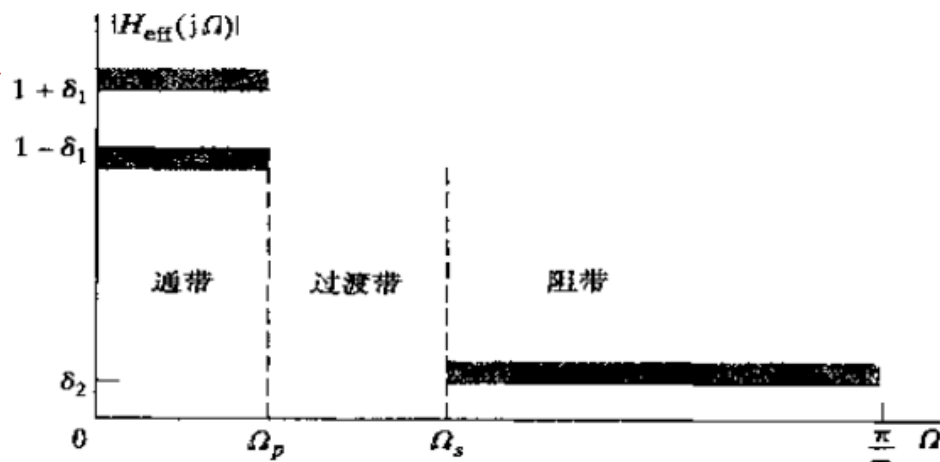
## ◆ 连续时间频选滤波器技术指标

通带误差极限:  $\delta_1$

通带截止频率:  $\Omega_p$

阻带误差极限:  $\delta_2$

阻带截止频率:  $\Omega_s$



连续时间（低通）滤波器技术指标

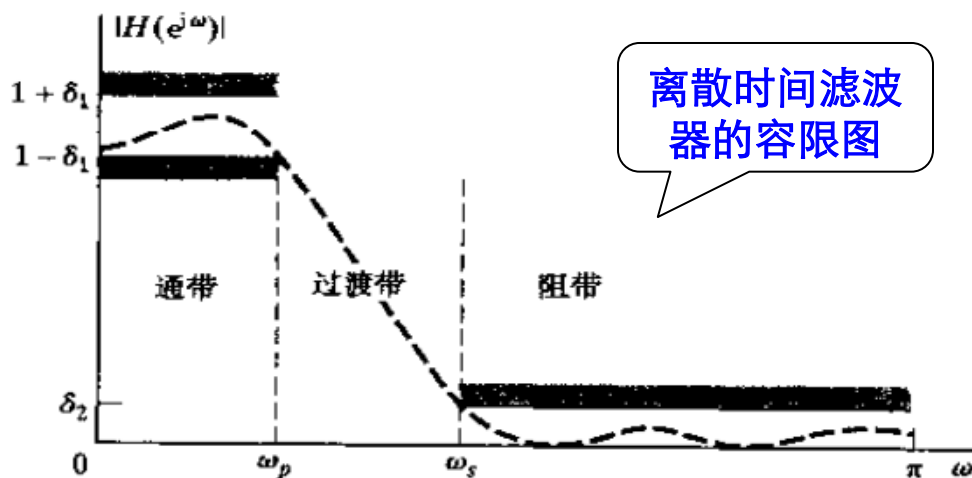
## □ 离散频选滤波器指标要求

通带幅度响应:

$$(1 - \delta_1) \leq |H(e^{j\omega})| \leq (1 + \delta_1), \quad |\omega| \leq \omega_p,$$
$$\omega_p = \Omega_p \cdot T$$

阻带幅度响应:

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi, \quad \omega_s = \Omega_s \cdot T$$



离散时间滤波器技术指标

# 7.0 引言

## ◆例：离散时间滤波器指标确定

系统采样频率为：  $10^4$  样值/s

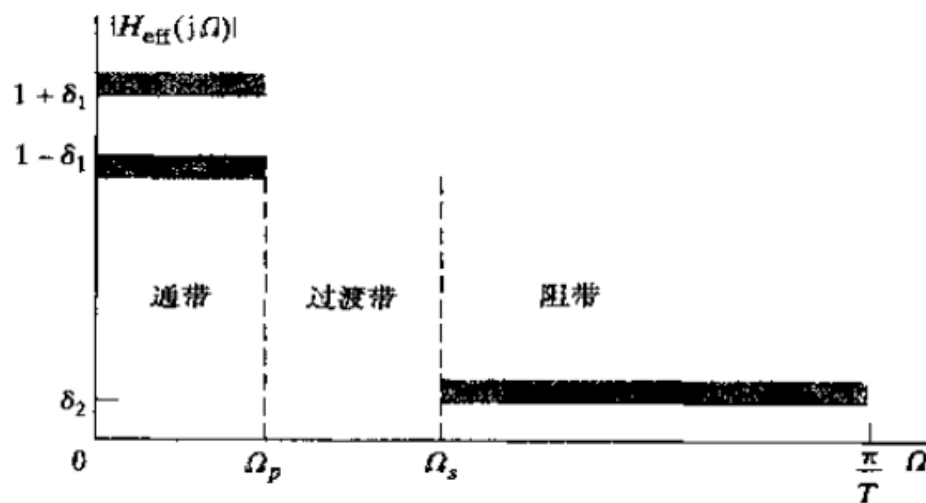
连续系统技术指标为：

通带误差极限：  $\delta_1 = 0.01$

通带截止频率：  $\Omega_p = 2\pi \cdot (2000)$

阻带误差极限：  $\delta_2 = 0.001$

阻带截止频率：  $\Omega_s = 2\pi \cdot (3000)$



连续时间滤波器技术指标

连续系统通带幅度响应要求：

$$(1 - 0.01) \leq |H_{eff}(j\Omega)| \leq (1 + 0.01), \quad |\Omega| \leq 2\pi \cdot (2000)$$

连续系统阻带幅度响应要求：

$$|H_{eff}(j\Omega)| \leq 0.001, \quad |\Omega| \geq 2\pi \cdot (3000)$$

# 7.0 引言

## ◆例：离散时间滤波器指标确定(续)

### ➤离散系统技术指标为：

通带截止频率：  $\omega_p = 0.4\pi$

阻带截止频率：  $\omega_s = 0.6\pi$

理想通带增益(分贝)  $= 20\log_{10}(1) = 0\text{dB}$

最大通带增益(分贝)  $= 20\log_{10}(1.01) = 0.086\text{dB}$

最小通带增益(分贝)  $= 20\log_{10}(0.99) = -0.873\text{dB}$

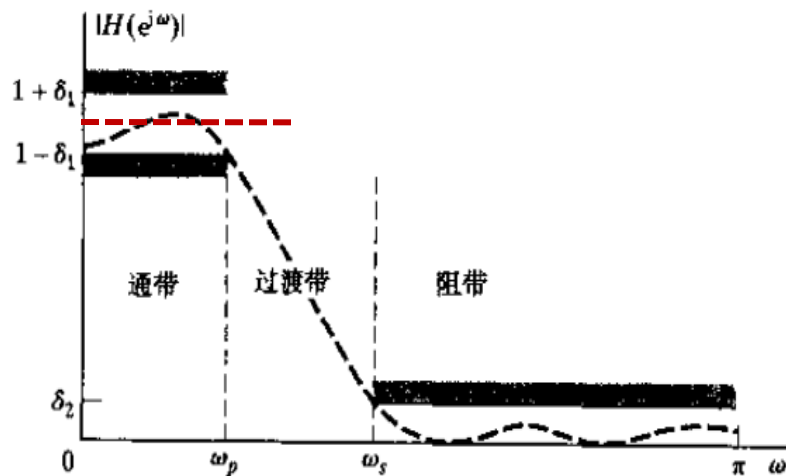
最大阻带增益(分贝)  $= 20\log_{10}(0.001) = -60\text{dB}$

### ➤离散系统通带幅度响应要求：

$$(1-0.01) \leq |H(e^{j\omega})| \leq (1+0.01), \quad |\omega| \leq 0.4\pi$$

### ➤离散系统阻带幅度响应要求：

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001, \quad 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi$$



离散时间滤波器技术指标



# 第七章：滤波器设计方法

## ◆ 7.0 引言

## ◆ 7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器

## ◆ 7.2 用窗函数法设计FIR滤波器

## ◆ 7.3 Kaiser窗函数法设计FIR滤波器

## ◆ 7.4 FIR滤波器的最佳逼近

## ◆ 7.5 FIR滤波器等波纹逼近示例

## ◆ 7.6 IIR和FIR滤波器设计考虑



# 7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器

## ◆由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器的原因

- 1) 连续时间IIR滤波器设计技术成熟
- 2) 大量连续时间IIR滤波器设计方法有简单完整设计公式

## ◆通过连续时间滤波器设计离散时间滤波器的要求

- 连续时间滤波器的技术指标是通过对给定的离散时间滤波器的技术指标尺度变换而得；
- 连续时间滤波器变换获得离散时间滤波器需满足条件：
  - 所得到的离散时间滤波器在频率响应中应保留连续时间频率响应的基本特性（因果性、线性性等）
  - 应当将一个稳定的连续时间滤波器变换成一个稳定的离散时间滤波器。

# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

当离散时间系统是用连续时间系统冲激响应的采样来定义时，该离散时间系统是连续时间系统的一个脉冲响应不变形式。

即连续时间滤波器冲击响应与离散时间滤波器的脉冲响应满足关系

$$h[n] = T_d h_c(nT_d)$$

式中  $T_d$  表示采样间隔。

## 脉冲响应不变法滤波器设计步骤：

- 1) 由离散时间滤波器的技术指标，（通过尺度变换）获得连续时间滤波器的技术指标；
- 2) 由连续时间滤波器的技术指标，（通过成熟设计方法）获得连续时间滤波器的系统函数和冲激响应（ $s$ 变换对）；
- 3) 由连续时间滤波器冲激响应或系统函数，（通过时域采样或变换域变量替换，分别获得离散时间滤波器单位脉冲响应或系统函数（ $z$ 变换对）。



# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

## 1) 由离散时间滤波器技术指标变换成连续时间滤波器技术指标

由于  $h[n] = T_d h_c(nT_d)$ ，连续系统离散时间滤波器的频率响应  $H(e^{j\omega})$  与连续时间滤波器的频率响应  $H_c(j\Omega)$  满足如下关系：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j\omega/T_d + j2\pi k/T_d)$$

由连续滤波器采样获得的离散滤波器的频率响应的加权

如果连续时间滤波器是带限的，则

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_d$$

由连续滤波器的频率响应尺度变换后按  $2\pi/T_d$  周期拓展

进而存在关系

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T_d), \quad |\omega| < \pi \quad (*)$$

若由  $H_c(j\Omega)$  到  $H(e^{j\omega})$  的变换时混叠影响可忽略，则可利用尺度变换  $\Omega = \omega/T_d$ ，由 (\*) 式，求出连续时间滤波器的技术指标

连续时间频率与离散时间频率之间的变换是线性的

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T_d}), \quad |\Omega| \geq \pi/T_d$$

# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

2) 由连续时间滤波器的技术指标，获得连续时间滤波器的系统函数和冲激响应（ $s$ 变换对）；

a) 由连续时间滤波器的技术指标（幅度响应），根据拟采用的滤波器类型，确定连续时间滤波器的幅度平方函数的形式

b) 确定满足技术指标的连续时间滤波器的幅度平方函数的参数

c) 由连续时间滤波器幅度平方函数，获得其系统函数，并对其采用部分分式展开，获得一阶因式形式连续时间滤波器的系统函数

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N A_k / (s - s_k)$$

d) 对系统函数 $s$ 反变换，可获得连续时间滤波器的单位冲激响应

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

时间变量的取值范围保证系统为因果系统



# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

3) 由连续时间滤波器的冲激响应或系统函数，获得离散时间滤波器的单位脉冲响应或系统函数（z变换对）。

a) 对幅度加权后的连续时间滤波器冲激响应采样，再用 $T_d$ 加权后，即可获得离散时间滤波器的单位脉冲响应

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] = \sum_{k=1}^N T_d A_k \left( e^{s_k T_d} \right)^n u[n]$$

b) 采用z变换可得离散系统的系统函数

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N A_k / (s - s_k)$$

s平面在  $s_k$  处的极点对应在z平面  $e^{s_k T_d}$  处的极点；

$$e^{\sigma_k T_d} e^{j\Omega_k T_d}$$

若连续时间滤波器是稳定的，即  $s_k$  的实部小于零，则  $|e^{s_k T_d}| < 1$ ，即离散系统极点位于单位圆内，从而离散时间滤波器也是稳定的。



# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

## ◆例7.2 用脉冲响应不变法设计巴特沃斯滤波器

离散时间滤波器技术指标为

$$\begin{cases} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, & 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, & 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

### 1) 由离散时间滤波器技术指标获得连续时间滤波器技术指标

选取  $T_d = 1$ ，则关系式  $\Omega = \omega/T_d$  蜕化为  $\Omega = \omega$ 。

假设混叠影响可以忽略，则连续时间巴特沃斯滤波器幅度函数满足

$$\begin{cases} 0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, & 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi \\ |H_c(j\Omega)| \leq 0.17783, & 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

由于连续时间（模拟）巴特沃斯滤波器的幅度函数是频率的单调函数，因此，上述技术指标可等效为

$$\begin{cases} |H_c(j0.2\pi)| \geq 0.89125 \\ |H_c(j0.3\pi)| \leq 0.17783 \end{cases}$$



# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

## 2) 由连续时间滤波器技术指标，获得其系统函数

模拟巴特沃斯滤波器的幅度平方函数具有以下形式

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

该函数中需确定  
参数 $\Omega_c$ 和 $N$

将拟设计滤波器技术指标要求代入幅度平方函数，可得方程

$$\begin{cases} 1 + (0.2\pi/\Omega_c)^{2N} = 1/(0.89125)^2 & (1) \\ 1 + (0.3\pi/\Omega_c)^{2N} = 1/(0.17783)^2 & (2) \end{cases}$$

$$1/\sqrt{1 + (0.2\pi/0.7032)^{12}} = 0.8912$$

$$1 + (0.3\pi/\Omega_c)^{2N} = 1/(0.17783)^2 \quad (2)$$

$$1/\sqrt{1 + (0.3\pi/0.7032)^{12}} = 0.17$$

方程解为  $N = 5.8858$  和  $\Omega_c = 0.70474$ 。由于滤波器阶数必须为整数，取  $N = 6$ ，代入等式(1)得  $\Omega_c = 0.7032$ ，并且该参数可满足技术指标要求。

利用连续时间傅里叶变换与s变换之间关系 ( $s = j\Omega$  或  $\Omega = s/j$ )，模拟巴特沃斯滤波器的幅度平方函数可表示为

$$|H_c(s)|^2 = H_c(s)H_c(-s) = 1/\left[1 + (s/j\Omega_c)^{2N}\right]$$

由其极点 (附录B)

$$s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)} = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k-1)} e^{j\pi/2}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$





# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

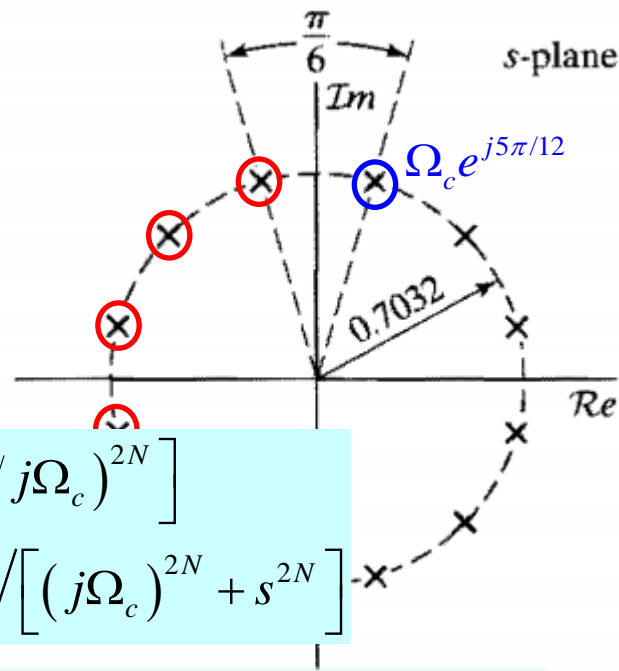
由极点  $s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\pi(N-1)/2N} e^{j2\pi k/2N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N-1$

可知：对于参数  $N=6$  和  $\Omega_c = 0.7032$ ，模拟巴特沃斯滤波器的幅度平方函数的12个极点均匀分布在s-平面的半径为 0.7032 圆上。

对于稳定的6阶模拟巴特沃斯滤波器， $H_c(s)$  的3对极点应位于s-平面左边，可选为

$$\begin{cases} s_1, s_2: & -0.182 \pm j(0.679) \\ s_3, s_4: & -0.497 \pm j(0.497) \\ s_5, s_6: & -0.679 \pm j(0.182) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |H_c(s)|^2 &= 1 / \left[ 1 + (s/j\Omega_c)^{2N} \right] \\ &= (j\Omega_c)^{2N} / \left[ (j\Omega_c)^{2N} + s^{2N} \right] \end{aligned}$$



由所选极点及幅度平方函数结构，模拟巴特沃斯滤波器的系统函数可表示为

$$H_c(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.3640s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)}$$



# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

3) 由连续时间滤波器的系统函数获得离散时间滤波器系统函数。

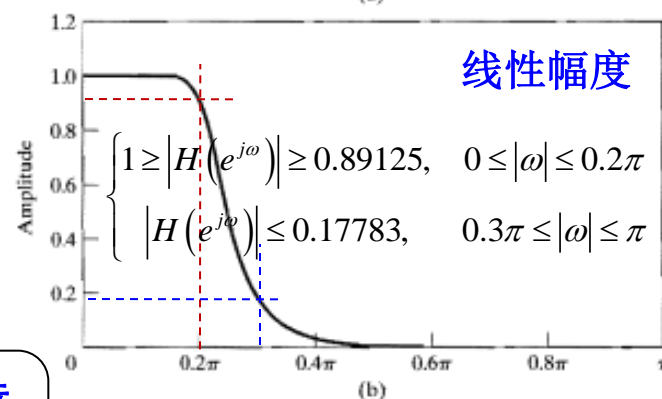
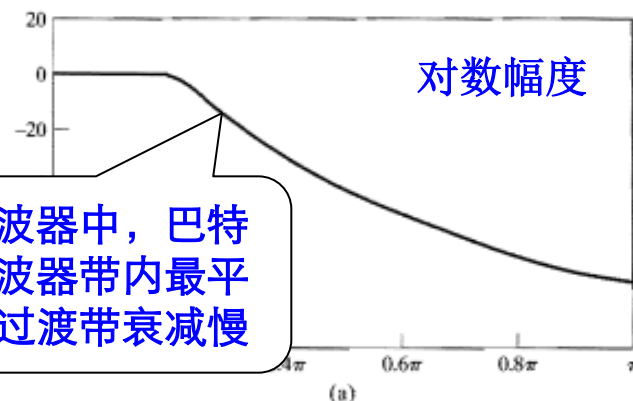
将模拟巴特沃斯滤波器的系统函数部分分式展开，并利用变换公式

$$\begin{cases} H_c(s) = \sum_{k=1}^N A_k / (s - s_k) \\ H(z) = \sum_{k=1}^N T_d A_k / (1 - e^{s_k T_d} z^{-1}) \end{cases}$$

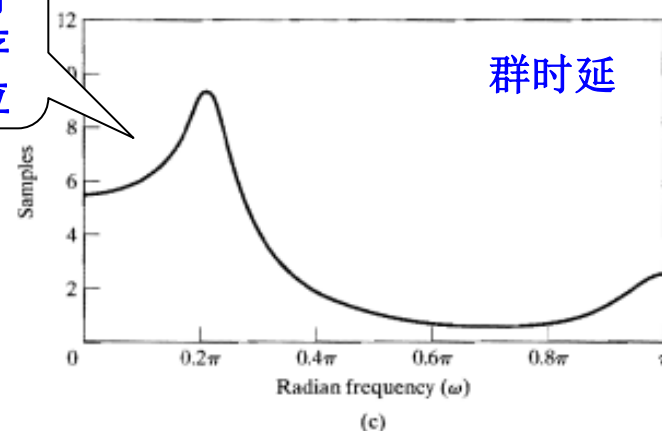
可得离散时间巴特沃斯滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$

同阶滤波器中，巴特沃斯滤波器带内最平坦，但过渡带衰减慢



所设计的巴特沃斯滤波器存在非线性相位



# 7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

## 脉冲响应不变法滤波器设计特性总结：

- 1) 方法基本思想：选取在幅度上与连续时间滤波器的单位冲击响应近似的离散时间滤波器的单位脉冲响应。
- 2) 在连续时间滤波器频率响应变换为离散时间滤波器频率响应时，连续时间频率与离散时间频率之间的变换是线性的。
- 3) 当连续时间滤波器是带限的，则获得的离散时间滤波器的频率响应将非常接近连续时间滤波器的频率响应。
- 4) 当连续时间滤波器频率响应非带限，则离散时间滤波器频率响应周期谱之间将产生混叠。
- 5) 该方法只适用于带限滤波器（低/带通）设计，若用于高通或带阻滤波器设计，必须对连续时间滤波器附加带限要求。



# 7.1.2 双线性变换法

## ◆双线性变换法

将 $s$ 平面 $j\Omega$ 轴映射到 $z$ 平面的单位圆上，建立了连续频率 $(-\infty \sim \infty)$ 与离散频率 $(-\pi \sim \pi)$ 间的对应关系，避免了脉冲响应不变法的混叠限制

□ 双线性变换法中 $s$ 平面与 $z$ 平面的关系可表示为

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (7.20)$$

□ 对 $z$ 求解上式，得

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (T_d/2)s} \quad (7.22)$$

$s$ 与 $z$ 为  
双线性  
变换

□ 将 $s = \sigma + j\Omega$ 代入(7.22)式，得

$$z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 - j\Omega T_d/2}$$

若 $\sigma < 0$ ，对于任意 $\Omega$ 值， $|z| < 1$ ；若 $\sigma > 0$ ，对所有 $\Omega$ 值， $|z| > 1$ 。

即若 $H_c(s)$ 的极点都在 $s$ 平面的左半部分，则 $H(z)$ 的极点在单位圆内；亦即满足因果稳定的模拟滤波器映射为因果稳定的离散时间滤波器。



## 7.1.2 双线性变换法

□ 若将  $s = j\Omega$  代入 (7.22) 式, 可得

$$z = (1 + j\Omega T_d/2) / (1 - j\Omega T_d/2)$$

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (T_d/2)s}$$

可见, 当  $\sigma = 0$ , 对于任意  $\Omega$  值,  $|z| = 1$ 。

即  $s$  平面  $j\Omega$  轴上所有取值, 映射到  $z$  平面的单位圆上, 从而有

$$e^{j\omega} = (1 + j\Omega T_d/2) / (1 - j\Omega T_d/2)$$

□ 将  $z = e^{j\omega}$  代入 (7.20) 式, 则

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right)$$

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

或等效为

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left[ \frac{2e^{-j\omega/2} (j \sin \omega/2)}{2e^{-j\omega/2} (\cos \omega/2)} \right] = j \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$$

则当  $\sigma = 0$ , 存在关系  $\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$ , 或  $\omega = 2 \arctan(\Omega T_d/2)$ 。

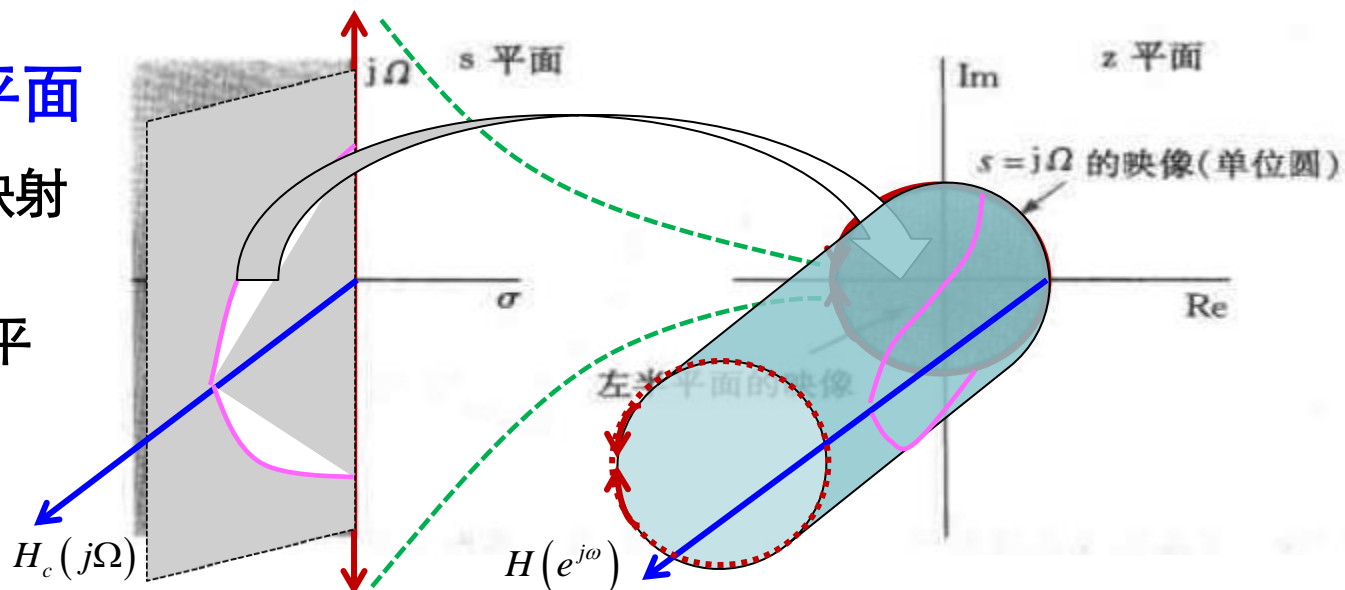
上式用于建立连续时间滤波器幅度响应频率轴与离散时间滤波器幅度响应频率轴之间的非线性关系。

# 7.1.2 双线性变换法

## ◆从s平面映射到z平面

✓s平面的左半部分映射到单位圆内 ( $\sigma < 0$ )

✓s平面j $\Omega$ 轴映射到z平面的单位圆上 ( $\sigma = 0$ )



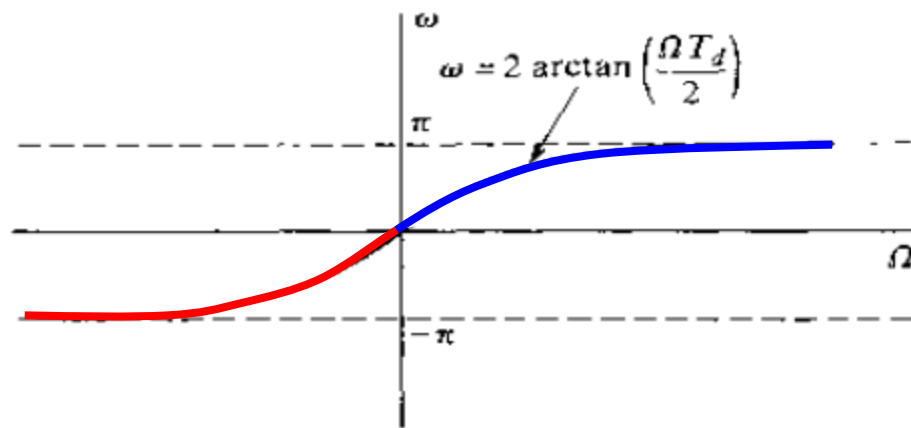
✓频率轴的映射实现了非线性压缩。

$0 \leq \Omega \leq \infty$  映射到

$0 \leq \omega \leq \pi$

$-\infty \leq \Omega \leq 0$  映射到

$-\pi \leq \omega \leq 0$



# 7.1.2 双线性变换法

## ◆ 离散时间滤波器技术指标到连续时间滤波器指标映射的预畸变

由于 $s$ 平面 $j\Omega$ 轴映射到 $z$ 平面的单位圆上，实现连续到离散频率轴的非线性压缩：

$$\omega = 2\arctan(\Omega T_d / 2)$$

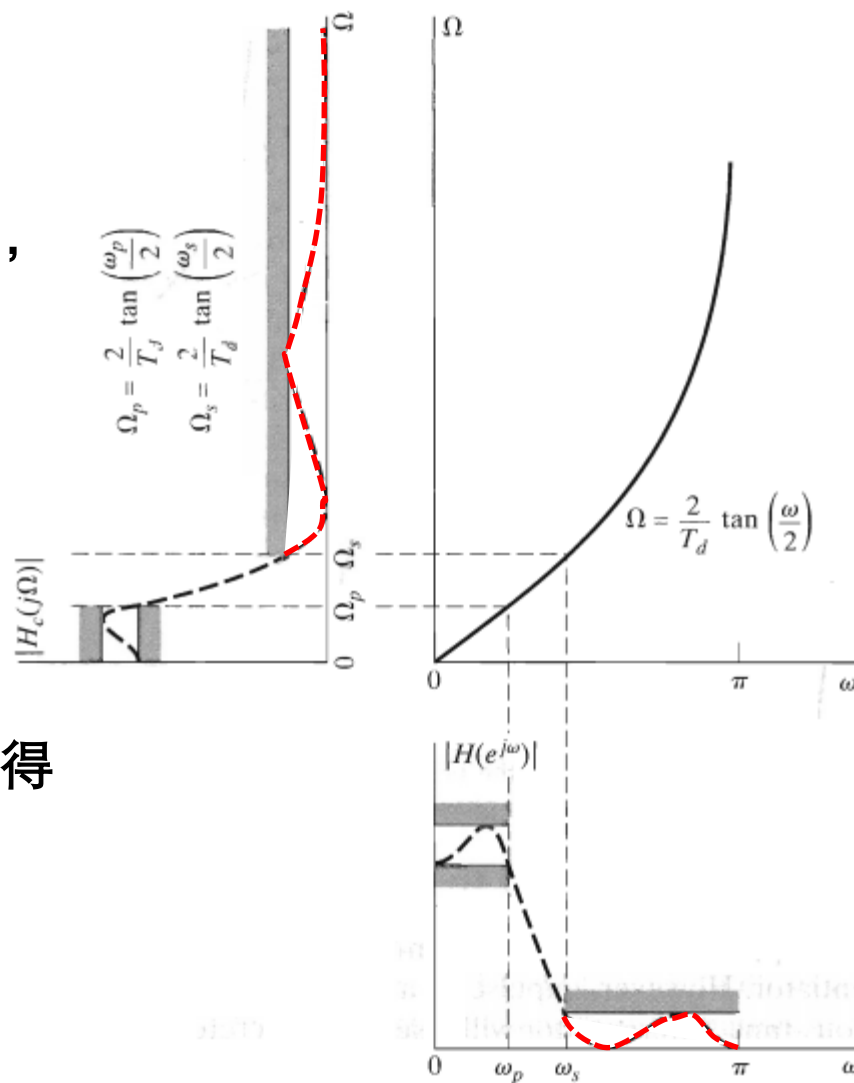
预畸变为上述非线性压缩的逆过程，实现离散到连续频率轴的非线性扩展：

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega / 2)$$

由离散时间滤波器技术指标  $\omega_p$  和  $\omega_s$  获得连续时间滤波器指标的预畸变映射为：

$$\Omega_p = \frac{2}{T_d} \tan(\omega_p / 2)$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan(\omega_s / 2)$$





## 7.1.2 双线性变换法

利用 $s$ 平面与 $z$ 平面的关系  $s = (2/T_d)(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$ ，双线性变换将连续时间系统函数  $H_c(s)$  变换获得离散时间系统函数

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(2/T_d)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} = H_c \left[ \frac{2}{T_d} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]$$

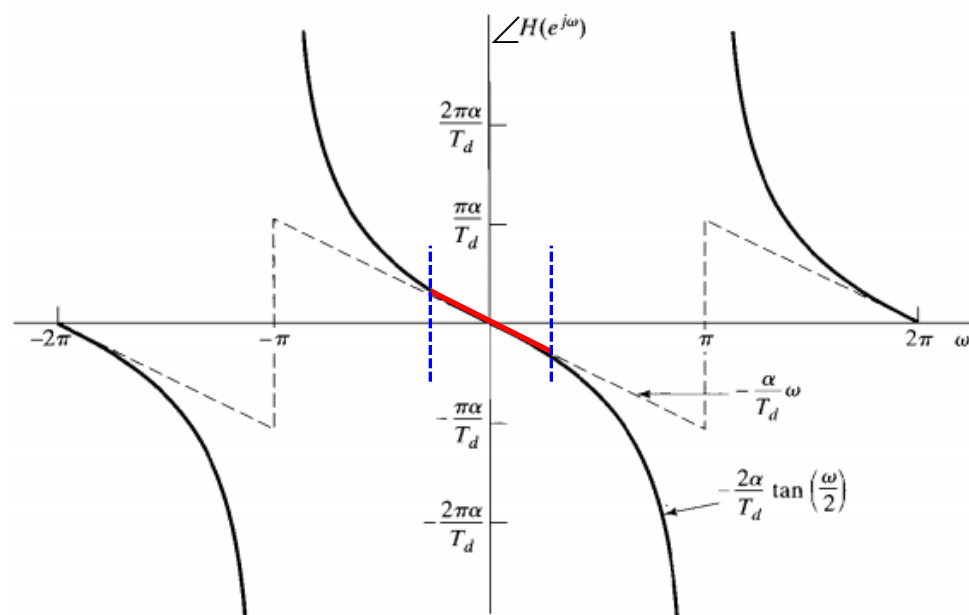
### ◆ 双线性变换对线性相位特性的影响

双线性变换实现 $s$ 平面到 $z$ 平面的频率轴的非线性压缩，将导致滤波器相位响应的畸变。

由 $s$ 平面线性相位因子  $e^{-s\alpha}$  以及关系式  $s = j(2/T_d)\tan(\omega/2)$ ，可得对应的 $z$ 平面因子的相位响应为：

$$\angle H(e^{j\omega}) = -(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$$

利用小角度近似  $\tan(\omega/2) \approx \omega/2$ ，可得周期性线性相位函数  $-\alpha\omega/T_d$ 。





# 7.1.3 双线性变换法设计示例

## ◆例7.3 用双线性变换法设计巴特沃斯滤波器

离散时间滤波器技术指标为

$$\begin{cases} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, & 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, & 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

### 1) 由离散时间滤波器技术指标获得连续时间滤波器技术指标

选取  $T_d = 1$ , 则关系式  $\Omega = (2/T_d) \tan(\omega/2)$  简化为  $\Omega = 2 \tan(\omega/2)$ 。

连续时间巴特沃斯滤波器幅度函数满足

$$\begin{cases} 0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, & 0 \leq \Omega \leq 2 \tan(0.2\pi/2) \\ |H_c(j\Omega)| \leq 0.17783, & 2 \tan(0.3\pi/2) \leq \Omega \leq \infty \end{cases}$$

频率轴预畸变

由于模拟（连续时间）巴特沃斯（低通）滤波器的幅度函数是频率的单调（递减）函数，则上述技术指标可等效为

$$\begin{cases} |H_c(j2 \tan(0.1\pi))| \geq 0.89125 \\ |H_c(j2 \tan(0.15\pi))| \leq 0.17783 \end{cases}$$

## 7.1.3 双线性变换法设计示例

2) 由连续时间滤波器的技术指标，获得其系统函数

模拟巴特沃斯滤波器的频响幅度平方函数可表示为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

$$\begin{cases} H_c(j2 \tan(0.1\pi)) \geq 0.89125 \\ H_c(j2 \tan(0.15\pi)) \leq 0.17783 \end{cases}$$

由拟设计滤波器技术指标要求和幅度平方函数，可得方程

$$\begin{cases} 1 + (2 \tan(0.1\pi)/\Omega_c)^{2N} = 1/(0.89125)^2 \\ 1 + (2 \tan(0.15\pi)/\Omega_c)^{2N} = 1/(0.17783)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{1 + (2 \tan(0.1\pi)/0.766)^{12}} = 0.937 \\ \sqrt{1 + (2 \tan(0.15\pi)/0.766)^{12}} = 0.1775 \end{cases}$$

方程的解为  $N = 5.305$ 。由于滤波器阶数必须为整数，取  $N = 6$ ，对应的  $\Omega_c = 0.766$ ，并且该参数可满足技术指标要求。

利用连续时间傅里叶变换与  $s$  变换之间关系  $s = j\Omega$ ，模拟巴特沃斯滤波器的系统函数幅度平方函数可表示为

$$|H_c(s)|^2 = H_c(s)H_c(-s) = 1 / \left[ 1 + (s/j\Omega_c)^{2N} \right]$$

其极点为 (附录B)

$$s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$



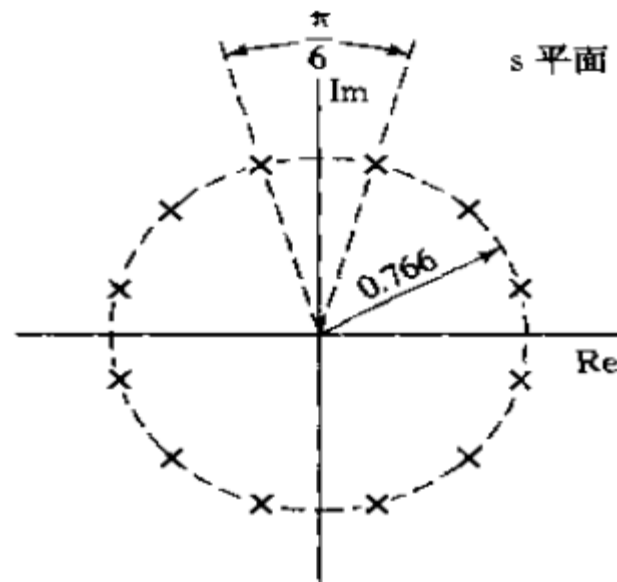
## 7.1.3 双线性变换法设计示例

由极点  $s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N-1$

可知：对于参数  $N=6$  和  $\Omega_c=0.766$ ，模拟巴特沃斯滤波器的幅度平方函数的12个极点均匀分布在s-平面半径为0.766的圆上。

对于因果稳定的6阶巴特沃斯滤波器， $H_c(s)$ 的3对极点应位于s-平面左边，可选为

$$\begin{cases} s_1, s_2: & -0.2 \pm j(0.74) \\ s_3, s_4: & -0.542 \pm j(0.542) \\ s_5, s_6: & -0.74 \pm j(0.2) \end{cases}$$



由所选极点，模拟巴特沃斯滤波器的系统函数可表示为

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

# 7.1.3 双线性变换法设计示例

3) 由连续时间滤波器系统函数获得离散时间滤波器系统函数。

将连续时间滤波器系统函数  $H_c(s)$  采用部份分式展开, 并利用  $s$  与  $z$  之间的关系式

$$s = (2/T_d)(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})$$

可得离散时间巴特沃斯滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{0.00073(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^2)} \\ \times \frac{1}{(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^2)} \\ \times \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^2)}$$

