作业　十三

1. 画出双扭线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$，并求其围成图形的面积.

2. 求双纽线 $r^2 = 4\cos 2\theta$ 位于第一象限部分上求一点 M，使得坐标原点 O 与点 M 的连线 OM 将双纽线所围成的位于第一象限部分的图形分为面积相等的两部分.

3. 求下列曲线所围成的图形的公共部分的面积:

$$r = 3\cos\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$$

4. 求由笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$ 所围图形的面积.

5. 求下列各立体的体积:

   (a) 以椭圆域 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 为底面，且垂直于长轴的截面都是等边三角形的立体;

   (b) 由曲面 $y^2 + z^2 = e^{-2x}$ 与平面 $x = 0, x = 1$ 所围成的立体.

6. 求下列各旋转体的体积:

   (a) 曲线 $y = \sin x$，$y = \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $x = \frac{\pi}{2}$，$x = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得到的旋转体;

   (b) 摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的第一拱（$0 \le t \le 2\pi$）与 x 轴所围成的图形绕直线 $y = 2a$ 旋转所得的旋转体.

   (c) 抛物线 $y = \sqrt{8x}$ 与它在点 $(2, 4)$ 处的法线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体.

7. 用“薄壳法”求下列各旋转体的体积:

   (a) 由曲线 $y = x(x-1)^2$ 与 x 轴所围绕的图形绕 y 轴旋转所得到的旋转体.

   (b) 由抛物线 $y = 2x - x^2$ 与直线 $y = x$ 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体.

8. 设抛物线 $y = ax^2$ $(a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 的交点为 A，过坐标原点 O 与点 A 的直线与抛物线 $y = ax^2$ 围成一平米图形. 问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体体积最大？并求此最大体积.

9. 求下列各旋转体的面积：

   (a) 立方抛物线 $y = x^3$ 介于 $x = 0$ 与 $x = 1$ 之间的一段弧绕 x 轴旋转所得到的旋转门.

   (b) 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面.

10. 求抛物线 $y = \sqrt{x-1}$ 与它的通过坐标原点的切线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的表面积.

11. 计算下列各弧长：

    (a) 曲线 $y = \ln(\cos x)$ 上从 $x = 0$ 到 $x = \frac{\pi}{4}$ 的一段弧长.

    (b) 曲线 $y = \int_{-\sqrt{3}}^{x} \sqrt{3 - t^2} dt$ 的全长.

    (c) 曲线 $x = \arctan t,\ y = \dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$ 相应于 $0 \leq t \leq 1$ 的一段弧.

    (d) 对数螺线 $r = e^{2\theta}$ 上从 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 的一段弧.

    (e) 曲线 $\theta = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ 相应于 $1 \leq r \leq 3$ 的一段弧.

12. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比. 在击第一次时，将铁钉击入木板 $1\,cm$. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问铁锤击第二次时，铁钉又被击入木板多少？

13. 边长为 a 和 b 的矩形薄片 $(a > b)$，与液面成 α 角斜沉于密度为 ρ 的液体内，长边平行于液面儿位于深 h 处. 试求薄板每面所受的压力.

14. 求一质量为 M，半径为 R 的均匀半圆弧对位于其中心的质量为 m 的质点的引力.

15. 设 $f \in C[0,1]$，当 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) > 0$，并且满足关系式

$$xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2 \ (a \text{ 为常数})$$

又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的图形 S 的面积为 2.

(a) 求函数 $f(x)$;

(b) 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积最小?

16. 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+2y'+3y=e^{3x}$ 满足初值条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{f(x)}$.（提示：不需求解，只需提取利用洛必达所需的条件）

17. 求下列微分方程的解:

$$a)\ x^2y'+y=0;\qquad b)\ x\sec y dx=(x+1)dy=0$$

$$c)\ (x^2+1)\frac{dy}{dx}=xy;\qquad d)\ yy'+e^{y^2+3x}=0$$

18. 求下列齐次微分方程的解:

$$a)\ x\frac{dy}{dx}=y+x\sec\frac{y}{x};\qquad b)\ xy'\sin\frac{y}{x}-y\sin\frac{y}{x}+x=0$$

19. 求下列微分方程的解:

$$a)\ y'=\left(\frac{2}{x+y}\right)^2;\qquad b)\ y'=\frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$$

$$c)\ y'=\frac{1}{(4x+y+1)(4x+y)};\qquad d)\ \frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y+x+5}$$

20. 求下列初值问题:

$$a)\ \frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x}{x^2+1},\ y\Big|_{x=2}=2;\qquad b)\ y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ y(1)=2$$

21. 求下列线性微分方程的解:

$$a)\ y'+4y=x;\qquad b)\ \frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$$

$$c)\ y'\cos x=y\sin x+\sin 2x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);\qquad d)\ dx+(x+y^2)dy=0$$

22. 求下列初值问题:

$$a)\ xy' - 3y = x^2,\ x > 0, y(1) = 0; \qquad b)\ t\frac{dx}{dt} = -x + \sin t,\ x(\pi) = 1$$

23. 求解下列伯努利方程:

$$a)\ x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{y^3}{x}; \qquad b)\ y' + \frac{1}{x}y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

24. 设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$，求 $f(x)$.

25. 函数 $y(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上定义且有连续导数，满足

$$2\int_0^x y(t)\sqrt{1 + y'^2(t)}dt = 2x + y^2(x)$$

求 $y(x)$.

26. 求解下列微分方程:

$$a)\ y'' = x + \cos x; \qquad b)\ yy'' - (y')^2 = 0$$

$$c)\ y'' = (y')^3 + y'; \qquad d)\ y''' = y''$$

$$e)\ yy' = (y')^2 - (y')^3,\ y(1) = 1, y'(1) = -1$$

$$f)\ xy'' + x(y')^2 - y' = 0,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1.$$