作业　八

1. 求下列函数的单调区间:

$$a)\ y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14, \qquad b)\ y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$$

2. 利用极值判别法 I 求下列函数的极值:

$$a)\ y = \frac{\ln^2 x}{x}, \qquad b)\ y = x^2(a-x)^2\ (a>0)$$

3. 利用极值判别法 II 求下列函数的极值:

$$a)\ y = xe^{-x}, \qquad b)\ y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y^2+y=1\ (y>0)$ 给出，求其极值.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-e^{-x^2}}=1$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值.

6. 利用单调性证明下不等式:

$$a)\ x\neq 0\text{ 时}, e^x > 1+x; \qquad b)\ x\geq 0\text{ 时 }\ln(1+x)\geq \frac{\arctan x}{1+x}$$

7. 设 $f(x)\in C[0,+\infty]$，$f(0)=0$，且 $f'(x)$ 单调增加，证明：$\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上也是单调增加的.

8. 证明函数 $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{x\ln x}{1-x}, & x>0, x\neq 1 \\ -1, & x=1 \end{cases}$ 在定义域内连续，在 $(0,1)$ 内单调减少，且 $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

9. 由代数基本定理知：n 次多项式至多有 n 个实根. 利用此结论及罗尔定理，不求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出根所在的区间.

10. 设 $a_0, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 都是实数，证明：若下条件满足

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$$

则 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

11. 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

12. 证明广义罗尔定理：设 $f(x)\in D(a,b)$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ (或 $-\infty$)，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

13. 设 $f(x)\in D[0,+\infty)$，且 $\forall x\in(0,+\infty)$，成立 $0\leq f(x)\leq \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$. 证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

提示：利用推广的罗尔定理，见课本 157 页例 4.5.

14. 利用拉格朗日中值定理，证明下面的不等式：

$$a)\ 0<a<b,\ n>1\ \text{时}:\ na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$$

$$b)\ |\sin x-\sin y|\leq|x-y|$$

15. 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ $(0<a<b)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

17. 设 $f(x)=(a+b\cos x)\sin x-x$ 当 $x\to0$ 时是 x 的五阶无穷小，求 a,b 的值.

18. 写出 $y = \arcsin x$ 和 $y = \tan x$ 的带拉格朗日余项的三阶马克劳林公式（须有计算过程）？

19. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某领域内 $n\,(\geq 3)$ 阶可导，且 $f^{(n)}(x)$ 在 $x = a$ 连续，又假设 $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$，且 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad 0 < \theta < 1,$ 证明:

$$\lim_{h \to 0} \theta = \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

20. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内具有 n 阶导数，且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$，利用柯西中值定理，证明

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \qquad 0 < \theta < 1$$

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得

$$2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$$

22. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(a) = f(b) = 1$，求证：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，使得

$$e^{\eta - \xi}\left[f(\eta) + f'(\eta)\right] = 1$$