姓名：

学号：

学院和年级：

上海科技大学

2022-2023 学年第一学期本科生期中考试卷

开课单位：

授课教师：陈浩，李铮，赵俐俐，朱佐农

考试科目：《高等数学 I》

课程代码：

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

一、　选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若当 $x\to 0$ 时，$(\cos x-1)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin^n x$ 高阶的无穷小，且 $x\sin^n x$ 是比 $3^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 的值为（　　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

2. 已知平面曲线的极坐标方程为 $r=\cos\theta+\sin\theta$，则该曲线在对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程为（　　）

(A) $y=x$.　　(B) $y=-x$.　　(C) $y=x-2$.　　(D) $y=-x+2$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2n}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right)=$（　　）

(A) $\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\dfrac{1}{3}$.　　(C) $\dfrac{1}{6}$.　　(D) 1 .

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，满足：$f(a)f(b)<0$，且 $f'(x)>-f(x)$，$x\in(a,b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点个数为（　　）

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

5. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$ 内可导，则对于下列论断：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\infty$，则 $f'(x_0)$ 不存在；

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在且等于常数 A，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 也存在且等于 A；

(3) 若 $f'(x_0)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在.

正确论断的个数是（　　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

二、 填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

6. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}=$ ________________.

7. 函数 $f(x)=\frac{x^3+4x+5}{x^2-1}$ 的第一类间断点是： x=-1 ________________.

8. 函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x(t)=1+t, \\ y(t)=2t+3t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\mathrm{d}f\big|_{x=2}=$ ________________.

9. 已知 $f(a)=2$， $f'(a)=3$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$ ________________.

10. 设函数 $f(x)=(1+x)^x$，则 $f(x)$ 带皮亚诺余项的二阶麦克劳林展开式为 ________________.

三、 极限定义证明题（本题 8 分）

11. 用极限定义证明： $\lim\limits_{x\to 3}\left(1-\frac{3}{x}\right)=0$.

四、极限计算（每小题 8 分，共 16 分）

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)}$.

13. 已知函数 $f(x)$ 满足：$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

五、导数计算（每小题 9 分，共 18 分）

14. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ ， $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

15. 设函数 $f(x)=(x+1)^2\sin x+\ln x$，求 $f^{(2022)}(\pi)$.

$\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$

$\ln^{(n)} x = (-1)^n x^n$

六、解答题（本题 8 分）

16. 设 $-\frac{3}{2}<x_0<3$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$，$n\in\mathbf{N}$．证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

七、证明题（本题 10 分，其中第(1)题 4 分，第(2)题 6 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=M>0$．证明：(1) 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$；(2) 对于大于1的任意正整数 n，存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{n}{M}$.