第八章：离散傅里叶变换

8.1周期序列的表示：离散傅里叶级数

一个周期为 N 的周期序列，对于任一整数 n 和 r，有

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+rN],\quad -\infty<n<\infty$$

该周期序列可以表示为成谐波关系的复指数序列的加权和，且各复指数序列的频率为周期序列基频（$2\pi/N$）的整数倍，即

$$e_k[n]=e^{j(2\pi/N)kn}=e_k[n+rN]$$

等效为第k个谐波序列

式中 k 为整数。

因此，周期序列的傅里叶级数表示为

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}$$

等效为多个谐波序列加权和

由于频率相差N倍基频的复指数序列相同，即

$$e_{k+lN}[n]=e^{j(2\pi/N)(k+lN)n}=e^{j(2\pi/N)kn}e^{j2\pi ln}=e^{j(2\pi/N)kn}=e_k[n]$$

这样，一个周期序列的傅里叶级数表示只需包含N个复指数，即

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}$$

在一个频率周期内求和

8.1周期序列的表示：离散傅里叶级数

◆ 复序列的内积运算

$$\langle x[n],\quad y[n]\rangle=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[n]y^{*}[n]$$

◆ 利用复指数序列的正交性

$$\langle e_k[n],\quad e_r[n]\rangle=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)(k-r)n}=\begin{cases}1, & k-r=mN\text{，}\quad m\text{为整数}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

将周期序列傅里叶级数表示式的两边与复指数序列 $e_r[n]$ 作内积

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}e^{-j(2\pi/N)rn}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)kn}e^{-j(2\pi/N)rn}=\tilde{X}[r]$$

这样，一个周期序列的傅里叶级数的系数可表示为

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

8.1周期序列的表示：离散傅里叶级数

傅里叶级数的系数是周期为N的周期序列，即对任意 k 有

$$\tilde{X}[k+N]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)(k+N)n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)kn}e^{-j2\pi n}=\tilde{X}[k]$$

定义复数量 $W_N=e^{-j2\pi/N}$

一个周期序列的离散傅里叶级数（DFS）分析/综合对可表示为

分析式： $\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$

周期序列的傅里叶级数是两个无限长周期序列之间的变换

综合式： $\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}$

离散傅里叶级数分析/综合对关系可简化表示为

$$\tilde{x}[n]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}\tilde{X}[k]$$

该简化表示中：时域序列在左边，傅里叶级数的系数在右边

8.1周期序列的表示：离散傅里叶级数

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$$

◆ 示例8.1：周期脉冲串的离散傅里叶级数

考虑一个周期脉冲串

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]=\begin{cases}1, & n=rN,\quad r\text{为任意整数}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于 $0\le n\le N-1$，$\tilde{x}[n]=\delta[n]$，可得DFS系数为

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]W_N^{kn}=W_N^0=1$$

将周期脉冲串的DFS系数代入DFS综合式可得

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)kn}$$

上式给出一种采用复指数(序列)和形式的周期脉冲串表示方法。
可以理解：当n取值为N的整数倍时，复指数序列和为1，否则为0。

8.1周期序列的表示：离散傅里叶级数

◆ 示例8.2：离散傅里叶级数的对偶性

设DFS系数为一个周期脉冲串

$$\tilde{Y}[k]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} N\delta[k-rN]$$

将该DFS系数代入DFS综合式可得

$$\tilde{y}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k]W_N^{-kn}=W_N^{-0}=1$$

1）周期脉冲串序列的DFS为常数1序列

2）常数1序列的DFS为N倍幅度周期脉冲串序列

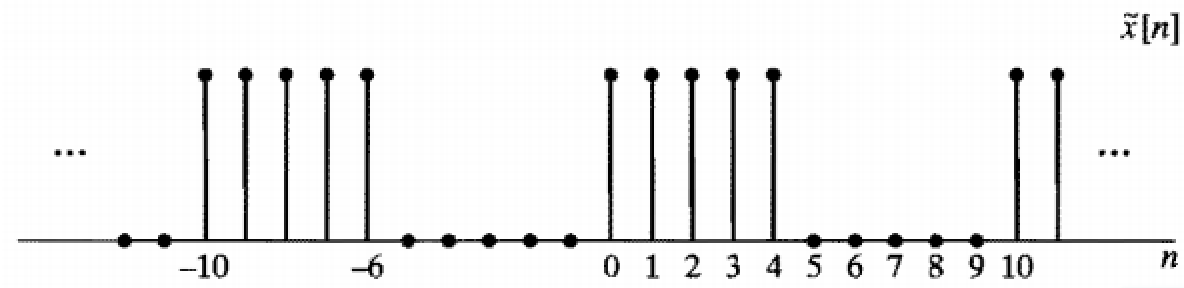
3）即周期脉冲串序列经过2次DFS变换后为原序列乘N

令 $\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]$，则其DFS系数 $\tilde{X}[k]=1$，可得关系式

$$\begin{cases}\tilde{Y}[k]=N\tilde{x}[k]\\ \tilde{y}[n]=\tilde{X}[n]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{x}[n]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}\tilde{X}[k]\\ \tilde{y}[n]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}\tilde{Y}[k]\end{cases}$$

该结论仅适用于周期脉冲串序列

◆ 示例8.3：周期矩形脉冲串的离散傅里叶级数



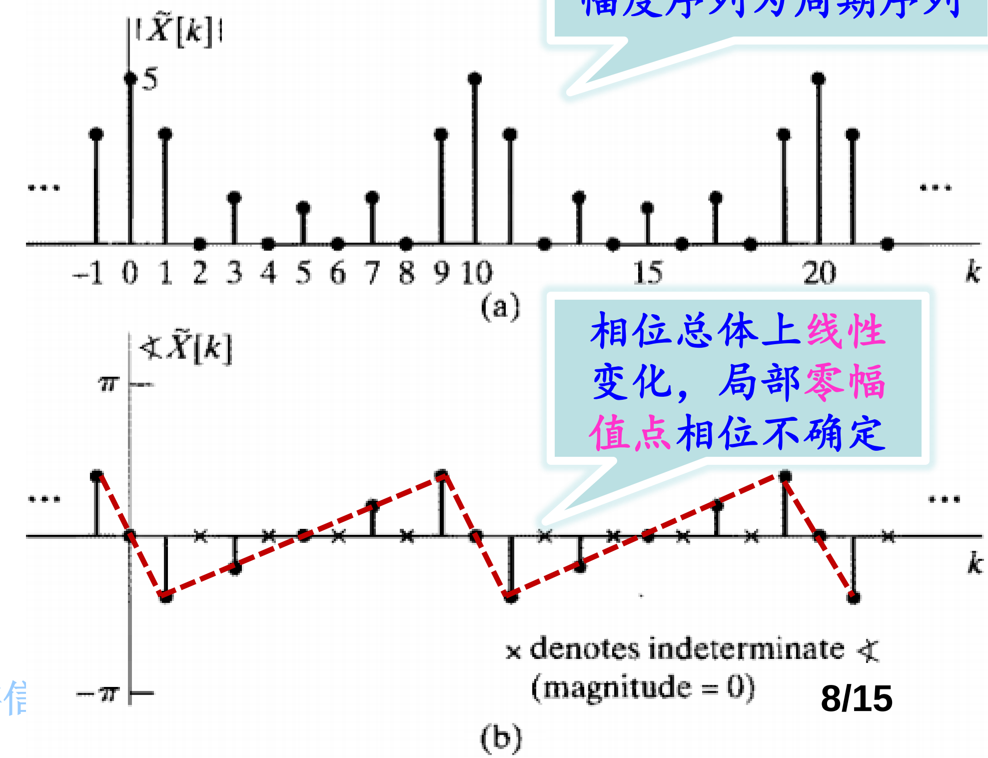
周期为N=10的周期矩形脉冲串，其DFS系数为

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{4}W_{10}^{kn}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j(2\pi/10)kn}$$

DFS系数表示成闭合形式为

$$\tilde{X}[k]=\frac{1-W_{10}^{5k}}{1-W_{10}^{k}}$$

$$=e^{-j(4\pi/10)k}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$



幅度序列为周期序列

相位总体上线性变化，局部零幅值点相位不确定

8.2.1 线性性

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$$

考虑两个周期均为N的周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$ ，若

$$\tilde{x}_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_1[k]$$

$$\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_2[k]$$

则有

$$a\tilde{x}_1[n]+b\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} a\tilde{X}_1[k]+b\tilde{X}_1[k]$$

该性质可由离散序列DFS的求和表达式直接给出。

8.2.2 序列移位

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$$

若周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的DFS系数为 $\tilde{X}[k]$，
则 $\tilde{x}[n-m]$ 是 $\tilde{x}[n]$ 移位形式，且

$$\tilde{x}[n-m]\xleftrightarrow{DFS}W_N^{km}\tilde{X}[k]$$

时域位移-》频域相移

事实上，对于任意 m 值， $m=m_1+m_2N$， $0\le m_1\le N-1$，有

$$W_N^{km}=W_N^{k(m_1+m_2N)}=W_N^{km_1}W_N^{km_2N}=W_N^{km_1}$$

因此时域上具有相同模N位移（ $((m))_N$ ）的序列具有相同的DFS系数序列，即

$$\tilde{x}[n-m]\xleftrightarrow{DFS}W_N^{km}\tilde{X}[k]=W_N^{km_1}\tilde{X}[k]\xleftrightarrow{DFS}\tilde{x}[n-m_1]$$

相应地，对于周期序列DFS的周期系数序列，其整数 l 移位具有关系

$$W_N^{-nl}\tilde{x}[n]\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}[k-l]$$

时域相移-》频域位移

频域位移 -》时域相移

8.2.3 对偶性

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

对于周期序列与该序列DFS系数序列的DFS系数序列存在对偶性，即

若 $\tilde{x}[n]\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}[k]$

则 $\tilde{X}[n]\xleftrightarrow{DFS}N\tilde{x}[-k]$

证明:

由周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的DFS综合式

$$N\tilde{x}[-n]=N\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-k(-n)}=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{kn}$$

再交换序号 n 和 k，再由DFS分析式可得

$$N\tilde{x}[-k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]W_N^{kn}$$

对于周期脉冲串序列，经过2次DFS变换后为原序列乘N

即周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的DFS系数序列 $\tilde{X}[k]$ 的DFS系数序列为原周期序列乘上因子N并倒序（反褶）后的序列。

8.2.5 周期卷积

设 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$ 为两个周期均为N的周期序列，其DFS的系数序列分别为 $\tilde{X}_1[k]$ 和 $\tilde{X}_2[k]$。若将系数序列矢量乘可得

$$\tilde{X}_3[k]=\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

则以 $\tilde{X}_3[k]$ 为DFS系数的周期序列 $\tilde{x}_3[n]$ 可用周期卷积表示为

$$\tilde{x}_3[n]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[n-m]\tilde{x}_2[m]$$

周期卷积为两个周期序列在一个周期内的线性卷积

事实上，由周期卷积形式可获得 $\tilde{x}_3[n]$ 的DFS系数序列为

$$\mathcal{DFS}\{\tilde{x}_3[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]\right)W_N^{kn}=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2[n-m]W_N^{kn}\right)$$

即两个周期序列的周期卷积的DFS系数为两个序列DFS系数的乘积

$$\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

8.2.5 周期卷积

◆周期序列的周期卷积示例

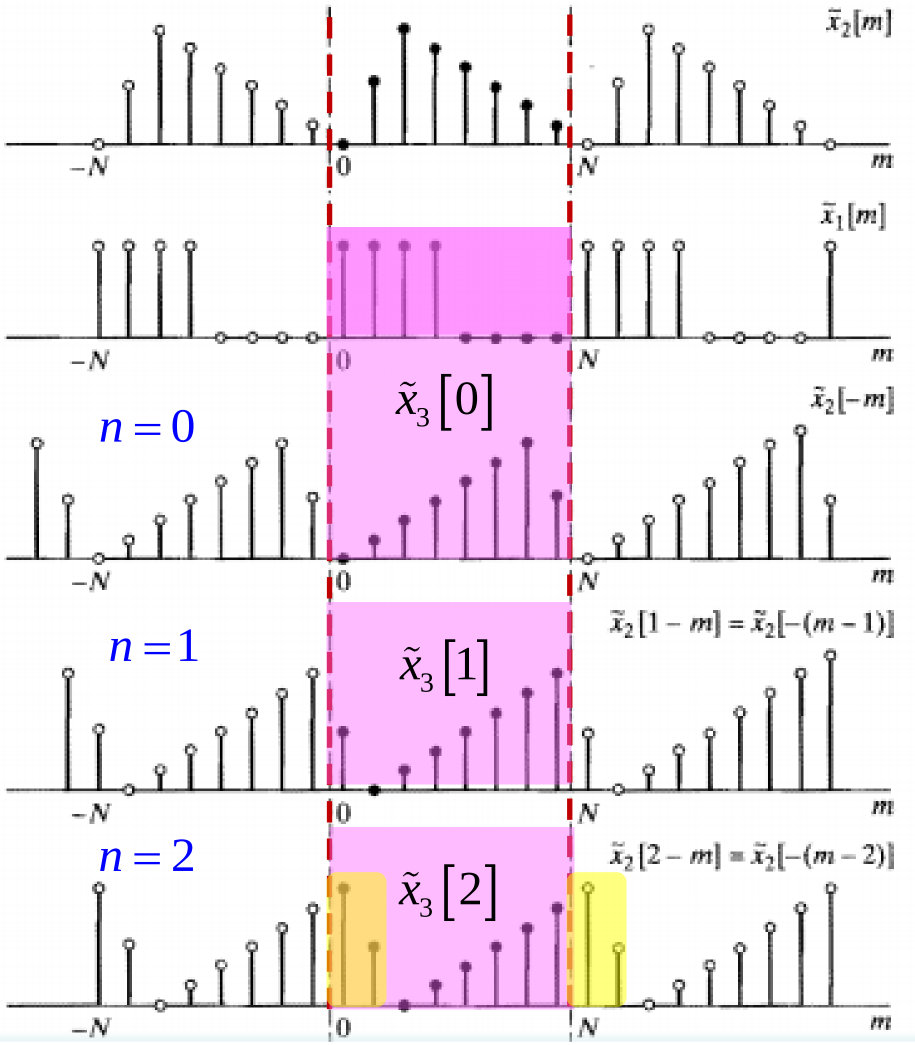
$$\tilde{x}_3[n]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$$

形式上与线性卷积相同

与线性卷积不同之处:

1）求和区间仅限一个周期内，即 $0\le m\le N-1$。

2）区间 $0\le m\le N-1$之内的 $\tilde{x}_2[n-m]$ 值与该区间之外的值周期重复。



周期序列的线性移位等效为在一个周期区间的循环移位

周期序列的周期卷积等效为两个有限长序列在一个周期区间的循环卷积

8.2.6 周期序列DFS表示的性质汇总

Periodic Sequence (Period N)	DFS Coefficients (Period N)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$ periodic with period N
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$ periodic with period N
3. $a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n-m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-\ell n}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k-\ell]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$ (periodic convolution)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell]$ (periodic convolution)
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\mathcal{R}e\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $j\mathcal{I}m\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j\mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties for $\tilde{x}[n]$ real.	$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\} = \mathcal{R}e\{\tilde{X}[-k]\} \\ \mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\} = -\mathcal{I}m\{\tilde{X}[-k]\} \\ \lvert\tilde{X}[k]\rvert = \lvert\tilde{X}[-k]\rvert \\ \angle\tilde{X}[k] = -\angle\tilde{X}[-k] \end{cases}$
16. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}$
17. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j\mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\}$

周期序列的DFS仍为周期序列

对偶性

时域位移（时移）导致DFS相移

时域相移导致DFS位（频）移

时域循环卷积导致DFS系数相乘

时域乘导致DFS循环卷积