第二章：离散时间信号与系统

2.6 离散时间信号与系统的频域表示

2.6.1 线性时不变系统的特征函数与特征值

设LTI系统单位脉冲响应为 $h[n]$，输入为复指数序列 $x[n]=e^{j\omega n}$， $-\infty \le n \le \infty$ ，则输出为

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

若定义

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

系统单位脉冲响应在频率ω处的复幅值

等式为离散序列的傅立叶变换，ω为实数

则有

$$y[n]=H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

系统输出为**特定输入信号** $e^{j\omega n}$与**某个函数**$H\left(e^{j\omega}\right)$乘积

其中，输入信号 $e^{j\omega n}$ 为该系统的**特征函数**；

$H\left(e^{j\omega}\right)$为相应的**特征值**，亦称为系统的**频率响应**。

◆ 获得系统频率响应2种途径

1. 通过系统复指数序列响应中的特征值，获得系统频率响应

2. 通过系统单位脉冲响应的傅里叶变换，获得系统频率响应

例：理想延迟系统的频率响应

理想延迟系统 $y[n]=x[n-n_d]$，n_d 为常数，求系统频率响应

解：

方法一：设系统输入为 $x[n]=e^{j\omega n}$，则

$$y[n]=e^{j\omega(n-n_d)}=e^{j\omega n}e^{-j\omega n_d}$$

系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_d}$$

方法二：由理想延迟系统的单位脉冲响应 $h[n]=\delta[n-n_d]$，采用上页（*）式（傅里叶变换），直接得系统频率响应

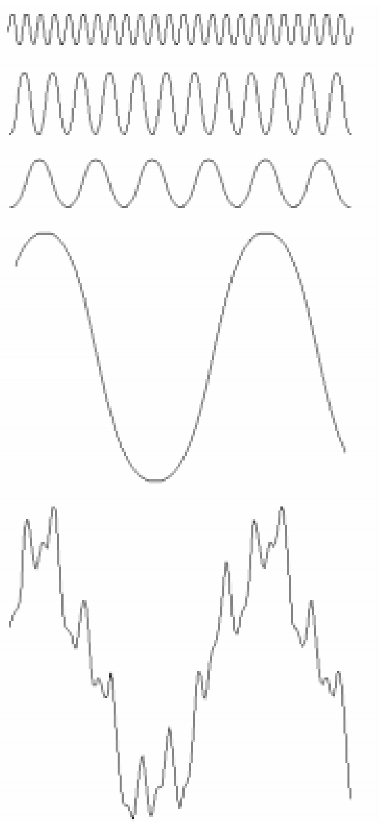
$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-n_d]e^{-j\omega n}=e^{-j\omega n_d}$$

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

◆ 傅里叶变换的缘起

傅里叶在1807年提出：

周期函数可用*sin*或*cos*信号的加权和表示



$$x[n] = \sum_{\omega=\omega_0}^{\omega_3} |X(\omega)| \cos(\omega n + \phi(\omega))$$

$$= \sum_{\omega=\omega_0}^{\omega_3} |X(\omega)| \frac{e^{j(\omega n+\phi(\omega))} + e^{-j(\omega n+\phi(\omega)}}{2}$$

$$= \sum_{\omega=-\omega_3}^{\omega_3} |X'(\omega)| e^{j(\omega n+\phi(\omega))}$$

$$= \sum_{\omega=-\omega_3}^{\omega_3} X(\omega) e^{j\omega n}$$

$$X(\omega) = |X'(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

◆ 离散序列傅里叶变换的定义

很多序列都能表示为如下傅里叶积分的形式：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

傅里叶反变换
（综合式）
输出为离散序列

其中

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

傅里叶变换
（分析式）
输出为连续函数

上两式共同构成序列的傅里叶表示。

◆ 傅里叶变换对的物理涵义

- 傅里叶反变换表示时域信号由不同频率分量叠加构成；
- 傅里叶变换表示时域信号在各频率分量上的复加权值，即信号 $x[n]$ 通过内积运算在正交基 $e^{j\omega n}$ 上的投影。

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

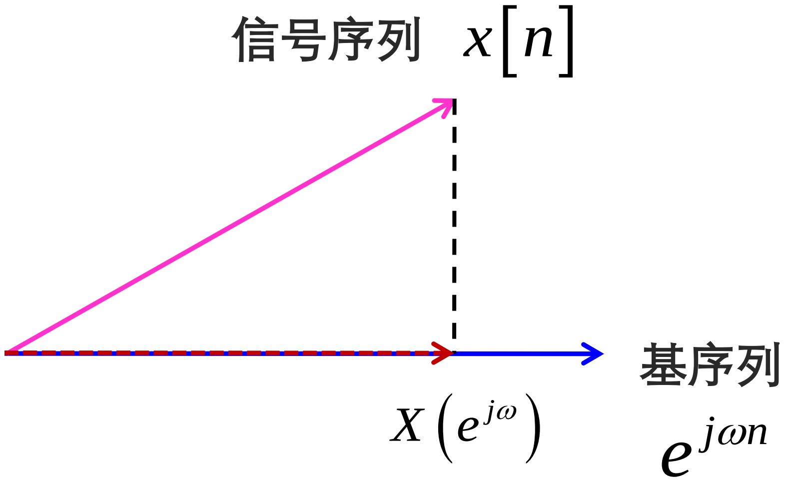
◆ 离散序列傅里叶变换的另一种理解

事实上，序列 $x[n]$ 的傅里叶变换可看作其与正交基序列 $e^{j\omega n}$ 的**内积**运算，即序列（矢量）$x[n]$ 在无穷维（ω 为连续实数）正交基（矢量）$e^{j\omega n}$ 上的映射。

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

内积：

$$C=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^{*}[n]$$



◆ 信号的频谱

傅里叶反变换把序列 $x[n]$ 表示成频率在 2π 的区间范围内，由 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 确定其相对大小的无限小复正弦分量的叠加，该复正弦分量可表示为：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$X\left(e^{j\omega}\right)$ 极坐标表示为

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\angle X\left(e^{j\omega}\right)}$$

频谱

幅度谱

相位谱

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

◆ 序列存在傅里叶变换表示的充分条件：

序列具有绝对（值）可加性，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|<\infty$ 。

证明见教材

例：阶跃指数序列的傅里叶变换

令 $x[n]=a^n u[n]$ ，该序列的傅里叶变换运算结果为

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\quad \left|ae^{-j\omega}\right|<1 \quad or \quad |a|<1$$

事实上，当满足条件 $|a|<1$ 时，阶跃指数序列是绝对可加的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|a^n u[n]\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|a^n\right|=\frac{1}{1-|a|}<\infty,\quad |a|<1$$

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

◆ 对于平方可加序列（即满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2<\infty$），存在傅里叶变换表示的充分条件：

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)-X_M\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \mathrm{d}\omega=0$$

其中

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

序列x[n]的无限项的傅里叶变换运算

和

$$X_M\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-M}^{M}x[n]e^{-j\omega n}$$

序列x[n]的有限项的傅里叶变换运算

也即，随 $M\to\infty$，误差 $\left|X\left(e^{j\omega}\right)-X_M\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 的总能量趋于零。

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

例：理想低通滤波器的平方可加

理想低通滤波器频率响应为

$$H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

由傅里叶反变换式计算可得其单位脉冲响应（序列）

$$h_{LP}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n}d\omega=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n},\quad -\infty<n<\infty$$

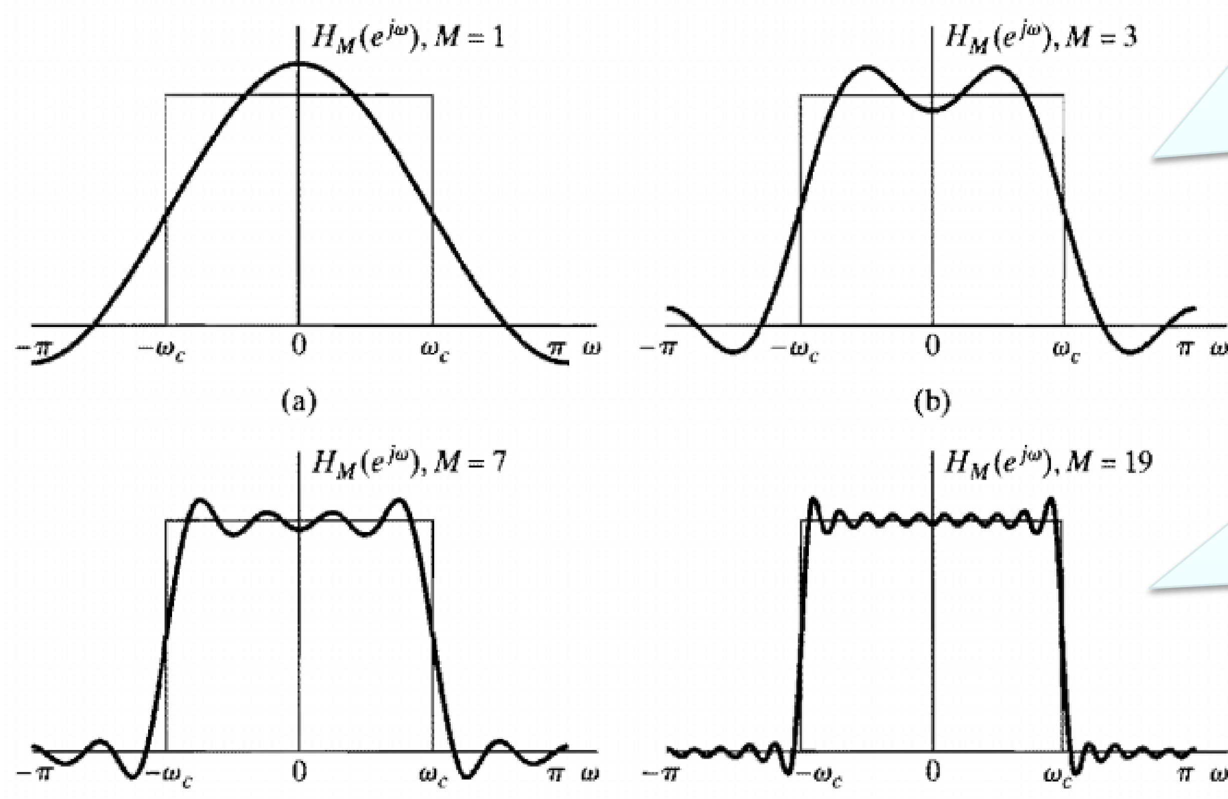
$h_{LP}[n]$ 非绝对可加但平方可加，其有限项的傅里叶变换 $H_M\left(e^{j\omega}\right)$ 以均方意义收敛于 $H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)$，即

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)-H_M\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega=0$$

$$H_M\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-M}^{M}\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}e^{-j\omega n}$$

例：理想低通滤波器的平方可加（续）

$$H_{LP}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}\qquad H_M\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-M}^{M}\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}e^{-j\omega n}$$



(a) (b) (c) (d)

$H_M(e^{j\omega})$不是一致收敛于$H_{LP}(e^{j\omega})$，震荡的最大幅度不随M→∞而趋于0，而是震荡的位置朝ω_c收敛

随着M增大，有限项FT不断逼近无限项FT（理想滤波器的频率响应）

◆既非绝对可加又非平方可加序列的傅里叶变换（1）

例1：常数序列 $x[n]=1$

引入单位冲击函数 $\delta(\omega)$

$$\begin{cases} \delta(\omega)=0, \quad \omega\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega=1 \end{cases}$$

则常数序列的傅里叶变换（运算）可表示为

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega+2\pi r)$$

加权（2π）周期（2π）冲击串

事实上，对 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 运用傅里叶反变换运算可得

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega+2\pi r)\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega=1=x[n]$$

◆既非绝对可加又非平方可加序列的傅里叶变换（2）

例2：复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

类似常数序列求解方法，复指数序列的傅里叶变换可表示为周期冲击串：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}2\pi\delta\left(\omega-\omega_0+2\pi r\right)$$

详细证明见教材。

实际上常数序列是指数序列在 $\omega_0=0$ 时的特殊情况。

2.7 离散序列的傅里叶变换表示

◆既非绝对可加又非平方可加序列的傅里叶变换（3）

例3：单位阶跃序列 $u[n]$ 的傅里叶变换

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{r=-\infty}^{\infty}\pi\delta\left(\omega+2\pi r\right)$$

课后自学证明。

◆ 共轭对称序列定义

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

对于实序列为偶序列

◆ 共轭反对称序列定义

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

对于实序列为奇序列

任何序列都可表示为一个共轭对称序列与一个共轭反对称序列之和。

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

式中

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[-n]\right) = x_e^*[-n]$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x^*[-n]\right) = -x_o^*[-n]$$

2.8 傅里叶变换的对称性

采用相同的构造法，一个序列的傅里叶变换 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 亦可表示为一个共轭对称函数与一个共轭反对称函数之和

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X_e\left(e^{j\omega}\right)+X_o\left(e^{j\omega}\right)$$

其中

共轭对称函数

$$X_e\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left(X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right)=X_e^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

共轭反对称函数

$$X_o\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left(X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right)=-X_o^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

2.8 傅里叶变换的对称性

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})=\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})=j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega})=X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega})=-X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

相关推导，请课后自学。

◆ 序列傅里叶变换对称性质举例

例：序列 $x[n]=a^n u[n]$ （**a**为实数）的傅里叶变换为

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\quad |a|<1$$

则有

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$X_R\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

$$X_I\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-a\sin\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\left(1+a^2-2a\cos\omega\right)^{1/2}}$$

$$\angle X\left(e^{j\omega}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$

2.8 离散序列傅里叶变换

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{r=-\infty}^{\infty}\pi\delta\left(\omega+2\pi r\right)$$

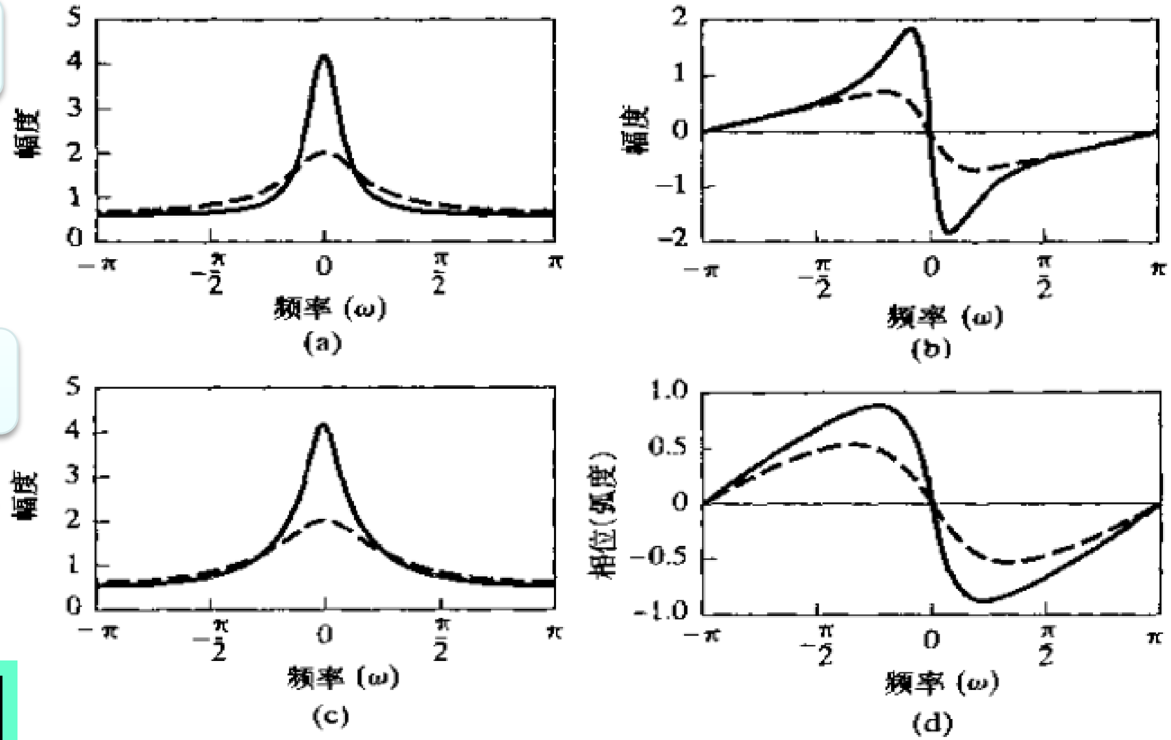
指数阶跃序列的傅里叶变换（频率

实部偶函数

虚部奇函数

幅度偶函数

相位奇函数



$$h[n]=a^{n}u[n]$$

图 2.22　单位脉冲响应 $h[n]=a^nu[n]$的系统频率响应
(a)实部;(b)虚部;(c)幅度;(d)相位
$a>0$,图中实线对应 $a=0.9$;虚线对应 $a=0.5$

思考：对频率响应的理解

第二章：离散时间信号与系统

2.9 傅里叶变换定理

◆ 傅里叶变换算子符号

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\mathscr{F}\{x[n]\}$$

$$x[n]=\mathscr{F}^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$x[n]\stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$\mathscr{F}$ 记作：取 $x[n]$傅里叶变换的运算

$\mathscr{F}^{-1}$记作：取 $x[n]$ 傅里叶反变换的运算

2.9 傅里叶变换定理

◆ 序列的傅里叶变换性质

Sequence	Fourier Transform	
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$	
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$	
1. $ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$	线性
2. $x[n-n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$	时移
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$	频移
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$	（复）反褶
	$X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.	（实）共轭
5. $nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$	频域微分
6. $x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$	时域卷积
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$	调制/加窗

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$ 时、频域能量守恒

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$ 时、频域内积相等

第二章：离散时间信号与系统

- 2.3 线性时不变系统
- 2.4 线性时不变系统性质
- 2.5 线性常系数差分方程
- 2.6 离散时间信号与系统的频域表示
- 2.7 离散序列傅里叶变换
- 2.8 傅里叶变换的对称性
- 2.9 傅里叶变换定理
- 2.10 离散时间随机信号

2.10 离散时间随机信号

课后自学