习题课

Gin zhao

October 2023

1 如果x_n 是无穷大量，且y_n 满足 $\exists\delta > 0$, $\exists N > 0$，使得 $\forall n \geq N$，有 $|y_n| \geq \delta$，则 $x_n y_n$ 是无穷大量

$\forall M > 0, \exists N_1 > 0, n > N_1$ 有 $|x_n| > M$

$\forall\delta > 0, \exists N_2 > 0, n > N_2$ 有 $|y_n| > \delta$

所以 $\forall\delta * M > 0, \exists N = max(N_1, N_2), n > N$, 有 $|x_n y_n| > \delta * M$

即可证明 $x_n y_n$ 是无穷大量

2 给定数列 $\{a_n\}$，对于每个自然数 m，记 $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$，也就是说 $S_1 = a_1$，$S_2 = a_1 + a_2$，$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$，以此类推。如果数列 $\{S_m\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量。举例说明，数列 $\{a_n\}$ 是无穷小并不能保证数列 $\{S_n\}$ 收敛。

证明:

假设 $\{S_m\}$ 收敛，这意味着存在一个有限的极限值 $\lim_{m\to\infty} S_m = S$。因此，对于任意正实数 $\varepsilon > 0$，存在一个正整数 N，使得当 $m > N$ 时，有 $|S_m - S| < \varepsilon$。

由于 S_m 是逐步累加的，我们可以将其拆分为 $S_m = S_{m-1} + a_m$。因此，我们可以写出：

$$|a_m| = |S_m - S_{m-1}| < \varepsilon$$

这说明了对于任意正实数 $\varepsilon > 0$，存在一个正整数 N，使得当 $m > N$ 时，有 $|a_m| < \varepsilon$，这表明了 a_m 是一个无穷小量。

一个例子是 $a_n = \frac{1}{n}$，这是一个无穷小量，它的极限是零。

然而，数列的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 是调和级数的部分和，它是发散的，也就是说 S_n 不会收敛。

3 $\forall \alpha > 0, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ 证明你的论断

证明：

$\forall \varepsilon > 0,\ N = \frac{1}{\varepsilon}^{\frac{1}{\alpha}} > 0, \exists n > N$ 使得 $|\frac{1}{n^\alpha}| < \varepsilon$

后面不抄写题目了

4 Problem

=>

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{3n^3 + 2n^2 + 1} \right)$$

=>

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^2 + 2n^2 + 1)} \right)$$

=>

$$res = \frac{1}{9}$$

5 Problem

=>

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} => \frac{1}{2}$$

6 Problem

=>

$$\lim_{n\to\infty} e^{2n^3 \ln(1+\frac{1}{n^3})}$$

=>

$$\lim_{n\to\infty} e^{2n^3 * \frac{1}{n^3}}$$

=>

$$res = e^2$$

7 Problem

=>

$$\lim_{n\to\infty} e^{(-1)^n \sin n ln(1+\frac{1}{n})}$$

=>

$$\leq \lim_{n\to\infty} e^{1/n}$$

=>

$$res = 1$$

8 Problem

=>

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n} ln(n^2-n+2)}$$

=> 洛

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n-1}{n^2-n+2}}$$

=>

$$\lim_{n\to\infty} res = 1$$

9 Problem

分子求和等于 n^2
所以

$$res = 1$$

10 Problem

=>

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

=>

$$\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

11 Problem

=>

$$\lim_{n\to\infty}2(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})...(1+\frac{1}{2^n})$$

=>

$$\lim_{n\to\infty}2(1-\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^2})...(1+\frac{1}{2^n})$$

=>

$$\lim_{n\to\infty}2(1-\frac{1}{2^{2n}})$$

=>

$$res=2$$

12 Problem

=>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1*4}{2*3}*\frac{2*5}{3*4}*\frac{3*6}{4*5}...\frac{(n-3)n}{(n-2)(n-1)}*\frac{(n-2)(n-1)}{(n-1)(n)}*\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

=>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$$

=>

$$\lim_{n\to\infty}res=\frac{1}{3}$$

13 Problem

=>

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$$

=>

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} < \frac{2n!!}{(2n+1)!!} = y_n$$

=>

$$x_n^2 < x_n y_n = \frac{1}{2n+1}$$

=>

$$\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$$

=> 又因为 x_n>0，根据夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

14 Problem

$$let : X_n = \left(\sum_i^m a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

=>

$$then : \left(mA^n\right)^{\frac{1}{n}} \geq X_n \geq \left(A^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

=> 两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A$$

15 Problem

(a)

=> 分母裂项拆开

$$a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

(b)

=> 容易知道 a_n 是单调增加的，其次

$$a_n < \sum_{i=0}^{n} (\frac{1}{2})^i < 2$$

=> 所以 a_n 是有上界的

16 Problem

(a) 使用不等式得

$$a_{n+1} \geq \sqrt{a_n * \frac{1}{a_n}} = 1$$

又

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1-a_n^2}{a_n}\right) \leq 0$$

所以数列单调递减有下界，数列收敛，两边同时取极限，令 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{A}$，有，保号性，A>0

$$2A = A + \frac{1}{A}, A = 1$$

(b)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

所以数列 a_n 是单调的，又有

$$1 < a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+a_n} < 2$$

所以数列是单调有界的，收敛，极限存在，两边同时取极限，令 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{A}$，有，保号性，A>0

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$