作业　六

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，利用导数的定义计算下列各式的值

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\ \text{其中}\ f(0)=0; \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$c)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}; \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0-h)}{h}$$

2. 按定义求下列函数的导数

$$a)\ f(x)=x^2+4x+200; \qquad b)\ f(x)=x\sin x$$

3. (a) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f^2(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 A，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性；

   (b) 设 $xf(x)$ 在 $x_0(\neq 0)$ 处可导，证明 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

   (c) 若 $F(x)$ 在 a 处连续，且 $F(x)\neq 0$, 试讨论函数 $f(x)=|x-a|F(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性.

   (d) 若 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f'(0)$ 存在，求 $f'(x)$.

4. (a) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的连续正值函数, 且 $f(0)=1, f'(0)=2$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}$

   (b) 设 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$.

   (c) 按定义证明：可导的偶函数的导函数是奇函数，可导的奇函数的导函数是偶函数；

   (d) 按定义证明：可导的周期函数的导函数仍然是周期函数，且周期不变.

5. 求下列函数在 x_0 初等的左、右导数，并指出它在该点的可导性.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 0\\ x^2, & x<0.\end{cases}\quad x_0=0; \qquad b)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}\quad x_0=0$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad x_0=0;\qquad d)\ f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 1\\ ax+b & x>1\end{cases}\quad x_0=1$$

6. 求下列函数的导数

$$a)\ y=x\sin x\ln x;\qquad b)\ y=\frac{1}{1+\sqrt{t}}-\frac{1}{1-\sqrt{t}};$$

$$c)\ y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9);\qquad d)\ y=x\sec x+\frac{\arctan x}{e^x}$$

7. 计算导数

$$a)\ y=\frac{1-\sqrt[3]{2x-1}}{1+\sqrt[3]{2x-1}};\qquad b)\ y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$$

$$c)\ y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2});\qquad d)\ y=x\arcsin(\ln x)$$

$$e)\ y=e^{\arctan\sqrt{x}};\qquad f)\ y=10^{x\tan x^2}$$

8. 用对数求导法求导数

$$a)\ y=\frac{(x+1)^2\sqrt[5]{4x+3}}{\sqrt[3]{2x^2+2x+1}};\qquad b)\ y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$$

$$c)\ y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x;\qquad d)\ y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$$

9. 求导数

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\leq 1,\\ \frac{1}{e}, & |x|>1\end{cases}\qquad b)\ f(x)=\arccos\frac{1}{|x|}$$

10. 计算下列函数的微分

$$a)\ y=\ln\tan\frac{x}{2};\qquad b)\ y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$c)\ y=\arctan\frac{v}{u}\,(\text{以 } du,dv \text{ 表示之});\qquad d)\ y=\ln(\ln(x))$$

11. 证明函数 $y=f(x)$ 的反函数的二阶导数公式

$$\frac{d^2x}{d^2y}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

12. 计算下列函数反函数的一阶导数和二阶导数

$$a)\ \theta=r\arctan r;\qquad b)\ y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$$

$$c)\ y=e^{\arcsin x};\qquad d)\ y=2x-\cos\frac{x}{2}$$

13. (a) 设 $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$;

    (b) 设 $y=(x+1)^2e^{2x}$，求 $y^{(100)}$

14. 求下列函数的 n 阶导数

$$a)\ y=\frac{1-x}{1+x};\qquad y=\frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$c)\ y=x\ln x;\qquad d)\ y=\sin^2 x$$