第八章：离散傅里叶变换

8.3 周期信号的傅里叶变换

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}$$

离散序列的傅里叶变换/反变换定义为

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

尽管上式将 ω 的变化范围选定为 $-\pi$ 与 π 之间，但任何 2π 间隔都适用于该定义式。

对于周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$，利用其DFS系数序列为 $\tilde{X}[k]$，则周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换可表示为（2.7节、2.125）

$$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

其中 $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ 是周期为 2π 的周期函数，$\tilde{X}[k]$是周期为 N 的周期序列，并且冲击串的间隔为 $2\pi/N$。

周期序列的FT为以其DFS系数加权间隔为$2\pi/N$的周期冲击串函数。

可以证明：$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ 的傅里叶反变换为周期序列 $\tilde{x}[n]$ 。

$$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

◆ **证明：** $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ 的傅里叶反变换为 $\tilde{x}[n]$

由傅里叶反变换定义，并变更 ω 积分范围为 $0-\varepsilon$ 与 $2\pi-\varepsilon$ 之间（$0<\varepsilon<2\pi/N$），可得 $\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)$ 的傅里叶反变换为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}[k]\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}=\tilde{x}[n] \quad \#$$

周期序列的傅里叶级数综合式

由傅里叶变换对可知： $\tilde{x}[n]\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$

8.3 周期信号的傅里叶变换

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

◆ 示例8.5：周期脉冲串的傅里叶变换

设一个周期为N的周期脉冲串表示为

$$\tilde{p}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]$$

由例8.1可知，该周期脉冲串的DFS系数为

$$\tilde{P}[k]=1,\quad \text{对所有的 } k$$

因此由周期序列傅里叶变换特性，$\tilde{p}[n]$ 的傅里叶变换为

$$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

8.3 周期信号的傅里叶变换

◆ 周期序列的DFS系数序列与有限长序列的傅里叶变换之间的关系

考虑一个有限长信号 $x[n]$（ $x[n]=0,\quad n\notin[0\quad N-1]$ ），与周期脉冲串 $\tilde{p}[n]$ （周期为N）进行卷积，可得一个周期序列为

$$\tilde{x}[n]=x[n]*\tilde{p}[n]=x[n]*\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN]$$

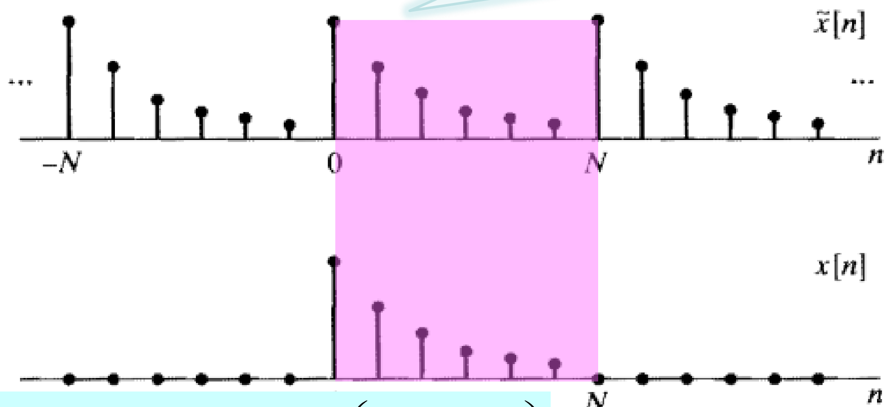
周期序列为有限长序列按脉冲串周期延拓

若有限长序列 $x[n]$的FT为 $X\left(e^{j\omega}\right)$，则周期序列 $\tilde{x}[n]$的傅里叶变换为

$$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=X\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}X\left(e^{j(2\pi/N)k}\right)\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$



$$\tilde{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

由周期序列的傅里叶变换表达式构

$$\tilde{X}[k]=X\left(e^{j(2\pi/N)k}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

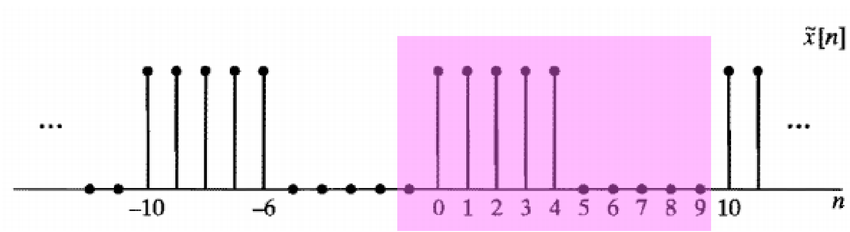
周期序列（周期为N）的DFS系数序列为有限长（长度N）序列的傅里叶变换按间隔$2\pi/N$等间隔采样值

8.3 周期信号的傅里叶变换

◆ 示例8.6：傅里叶级数系数与一个周期的傅里叶变换之间的关系

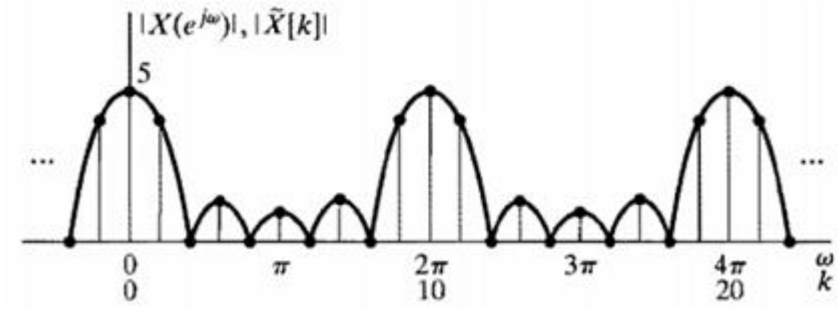
周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期为

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & 5\le n\le 9\end{cases}$$



$\tilde{x}[n]$一个周期的傅里叶变换为

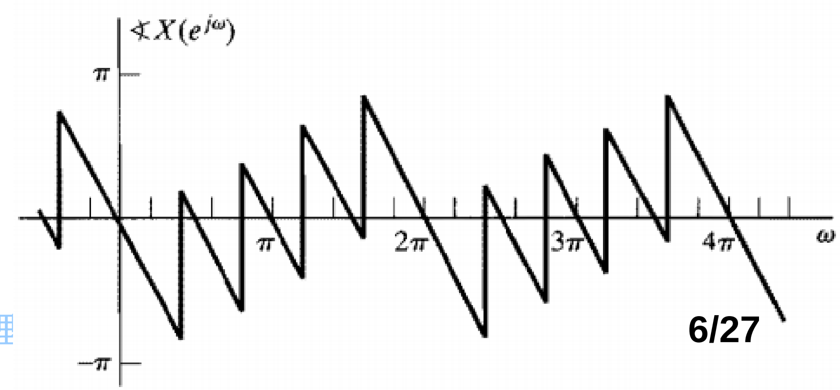
$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(5\omega/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$



(a)

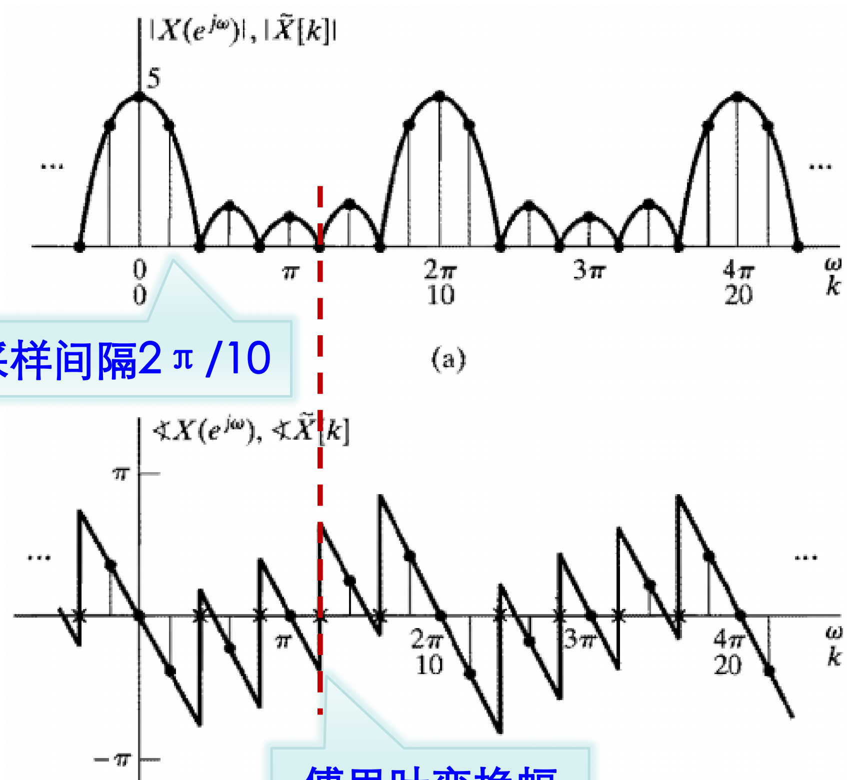
将$\omega=2\pi k/10$ (N=10) 代入上式可得周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的DFS系数

$$\tilde{X}\left[k\right]=e^{-j4\pi k/10}\frac{\sin\left(\pi k/2\right)}{\sin\left(\pi k/10\right)}$$



8.3 周期信号的傅里叶变换

◆ 周期序列(N=10)的傅里叶变换的采样

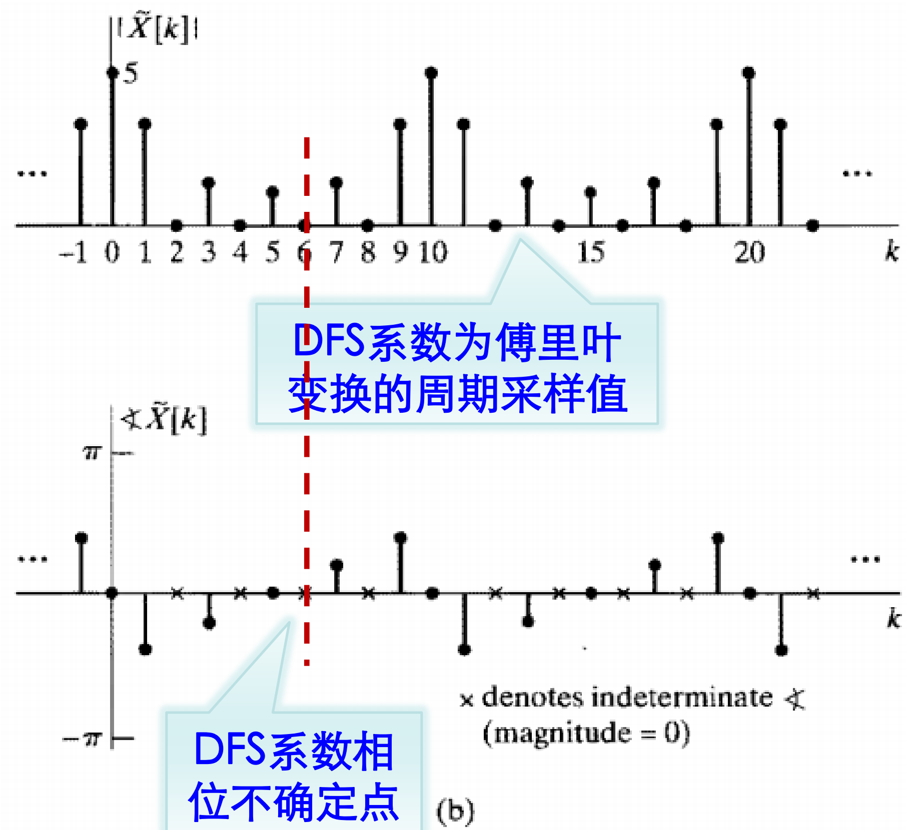


采样间隔2π/10

傅里叶变换幅值的过零点

$$X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(5\omega/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

◆ 周期矩形脉冲串的DFS系数



DFS系数为傅里叶变换的周期采样值

DFS系数相位不确定点

$$\tilde{X}\left[k\right]=e^{-j4\pi k/10}\frac{\sin\left(\pi k/2\right)}{\sin\left(\pi k/10\right)}$$

第八章：离散傅里叶变换

8.4 对傅里叶变换采样

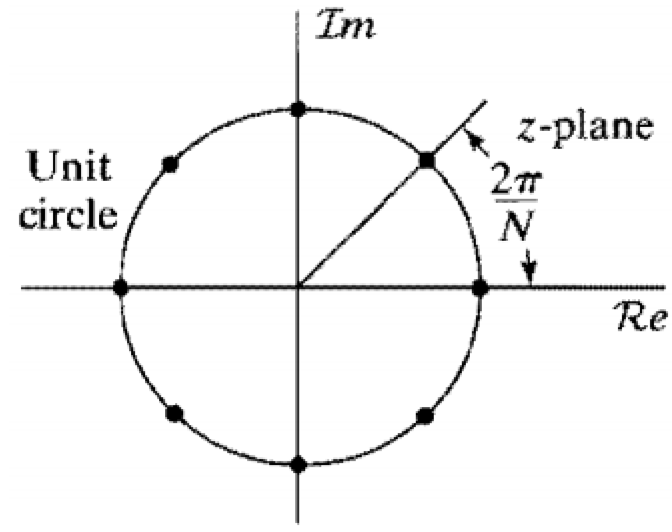
◆ 非周期序列的傅里叶变换采样与z变换采样之间的关系

设一个非周期序列 $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X\left(e^{j\omega}\right)$，且假设序列 $\tilde{X}[k]$ 是通过对 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 在 $\omega_k = 2\pi k/N$ 频率处采样得到

$$\tilde{X}[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = X\left(e^{j(2\pi/N)k}\right)$$

由于傅里叶变换为z变换在单位圆上的值，即

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$



所以 $\tilde{X}[k]$ 也可通过对 $X(z)$ 在单位圆上等间隔采样N个值获得，即

$$\tilde{X}[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = X\left(e^{j(2\pi/N)k}\right)$$

8.4 对傅里叶变换采样

◆ 周期拓展的影响

周期序列可由有限长序列 $x[n]$（ $x[n]=0,\quad n\notin[0\quad N-1]$ ）与周期脉冲串 $\tilde{p}[n]$ 卷积获得，即周期拓展为

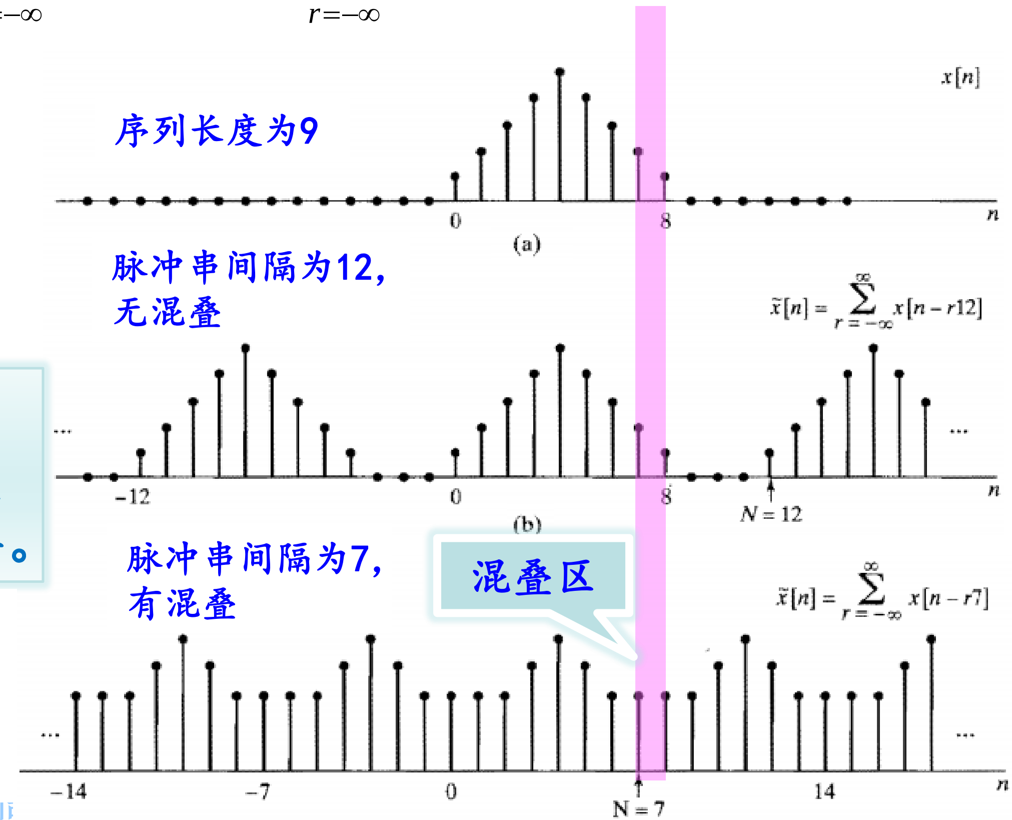
$$\tilde{x}[n]=x[n]*\tilde{p}[n]=x[n]*\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN]$$

1）当周期脉冲串间隔≥序列长度时，无时域混叠，且 $x[n]$ 可由 $\tilde{x}[n]$ 无失真恢复出来，即

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

此时，$\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数 $\tilde{X}[k]$ 可由一个周期内的序列 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 的按间隔 $2\pi/N$ 采样获得。

2）当周期脉冲串间隔<序列长度时，将产生时域混叠，因此无法由 $\tilde{x}[n]$ 和 $\tilde{X}[k]$ 恢复 $x[n]$ 和 $X\left(e^{j\omega}\right)$



8.5 有限长序列的傅里叶表示：DFT

对应每一个长度为N的有限长序列 $x[n]$，总可与一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 关联，并且

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

即，周期序列为有限长序列的周期拓展，当拓展周期$N\geqslant$序列长度时，周期序列 $\tilde{x}[n]$可表示为

$$\tilde{x}[n]=x\left[((n))_N\right]$$

当序列长度小于拓展周期，则可对序列补零

由于周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的DFS系数 $\tilde{X}[k]$也是一个周期为N的周期序列，则，选取 $\tilde{X}[k]$ 的一个周期对应的序列 $X[k]$，可得

$$X[k]=\begin{cases}\tilde{X}[k], & 0\le k\le N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

或周期系数序列 $\tilde{X}[k]$可表示为有限长序列 $X[k]$ 的周期拓展

$$\tilde{X}[k]=X\left[((k))_N\right]$$

该有限长序列 $X[k]$ 即为有限长序列 $x[n]$ 的离散傅里叶变换（DFT）

8.5 有限长序列的傅里叶表示：DFT

由周期序列的离散傅里叶级数（DFS）表达式

分析式： $\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$

综合式： $\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}$

再根据 $x[n]$ 和 $X[k]$ 的有限长定义区间和DFS求和区间，可得

$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}, & 0\le k\le N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$x[n]=\begin{cases}(1/N)\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}, & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

通常DFT的分析/综合对可表示为

分析式： $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}$

综合式： $x[n]=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}$

$x[n]$和 $X[k]$的DFT关系可表示为

$$x[n]\xleftrightarrow{\mathcal{DFT}}X[k]$$

有限长序列（长度 $\leqslant N$）

$x[n]$

$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$

周期拓展（周期为N）→

周期序列

$\tilde{x}[n] = x\left[((n))_N\right]$

傅里叶变换 →

频率响应（频谱）

$X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} x[n]$

DFS ↓

频域采样（$2\pi k/N$）↓

DFS（系数）序列

$\tilde{X}[k] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{x}[n]$

$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}$

← 取一个周期（周期为N）

DFT序列

$X[k] = \tilde{X}[k]$

$0 \le k \le N-1$

DFT（N点）↕

◆ 示例8.7：矩形脉冲的DFT

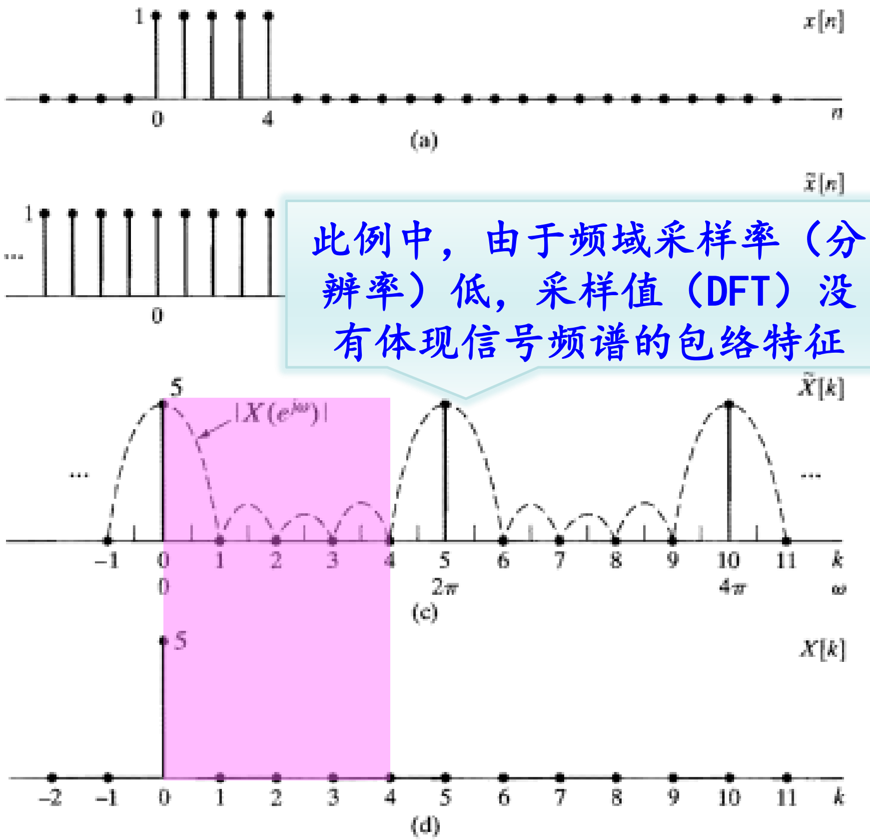
设 $x[n]$为长度N=5的矩形脉冲，其周期N拓展序列 $\tilde{x}[n]$的DFS系数 $\tilde{X}[k]$ 与 $x[n]$ 的DFT对应，即

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{4}e^{-j(2\pi/5)kn}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j(2\pi/5)k}}$$

$$=\begin{cases}5, & k=0,\pm5,\pm10,\cdots\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然，$\tilde{X}[k]$为 $X\left(e^{j\omega}\right)$在 $\omega_k=2\pi k/5$ 处的采样值。

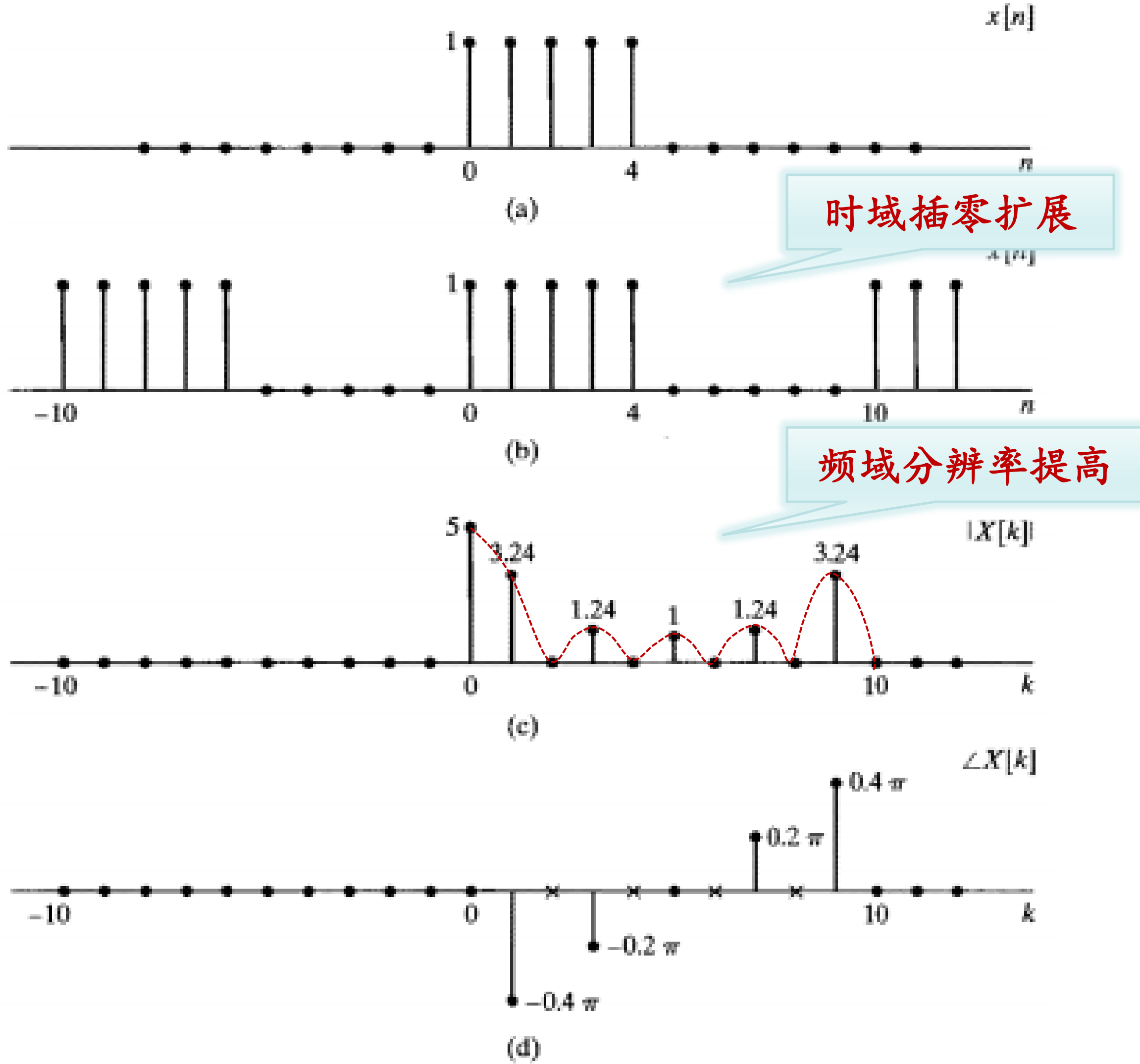
并且，$X[k]$为 $\tilde{X}[k]$ 的一个周期的有限长序列。



此例中，由于频域采样率（分辨率）低，采样值（DFT）没有体现信号频谱的包络特征

◆ 示例8.7：矩形脉冲的DFT（续）

增加拓展周期
N=10



第八章：离散傅里叶变换

8.6.1 线性

◆ DFT的线性性

若有限长序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$ 的DFT表示为

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k]$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_2[k]$$

则由DFT定义式易得

$$ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} aX_1[k]+bX_2[k]$$

式中序列 $x_1[n]$ 与 $x_2[n]$ 的DFT长度（点数）相同

当序列 $x_1[n]$与 $x_2[n]$ 的长度不相同（如$N_1 \neq N_2$）时：

- DFT长度取两个序列长度中的最大值（如N_2）；
- $x_1[n]$尾部添加（N_2-N_1）个零值使其长度与DFT长度相同。

8.6.2 序列的循环移位

◆ DFT的循环移位特性

若有限长序列 $x[n]$ 的DFT表示为

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$$

则 $x[n]$ 的循环移位序列的DFT表示为

$$x\left[\left(\left(n-m\right)\right)_N\right],\quad 0 \le n \le N-1 \xleftrightarrow{DFT} e^{-j(2\pi k/N)m} X[k],\quad 0 \le k \le N-1$$

8.6.2 序列的循环移位

◆ **证明** $x\left[((n-m))_N\right],\quad 0\le n\le N-1 \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} e^{-j(2\pi k/N)m}X[k],\quad 0\le k\le N-1$

由周期序列的DFS定义可得

$$x\left[((n))_N\right]=\tilde{x}[n]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}\tilde{X}[k]=X\left[((k))_N\right]$$

由周期序列的DFS的时移性可得

$$x\left[((n-m))_N\right]=\tilde{x}[n-m]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k]$$

由于，$\tilde{X}[k]$ 和 $e^{-j(2\pi k/N)m}$ 均是周期为 N 的序列（变量k）

$$e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k]=X_1\left[((k))_N\right];\quad X_1[k]=e^{-j(2\pi k/N)m}X[k],\ 0\le k\le N-1$$

因此有

$$x\left[((n-m))_N\right]\xleftrightarrow{\mathcal{DFS}}X_1\left[((k))_N\right]=e^{-j\left(2\pi((k))_N/N\right)m}X\left[((k))_N\right]$$

由有限长序列DFT与周期序列的DFS系数之间的关系值，可得

$$x\left[((n-m))_N\right],\quad 0\le n\le N-1\xleftrightarrow{\mathcal{DFT}}X_1[k]=e^{-j(2\pi k/N)m}X[k],\quad 0\le k\le N-1\ \#$$

8.6.2 序列的循环移位

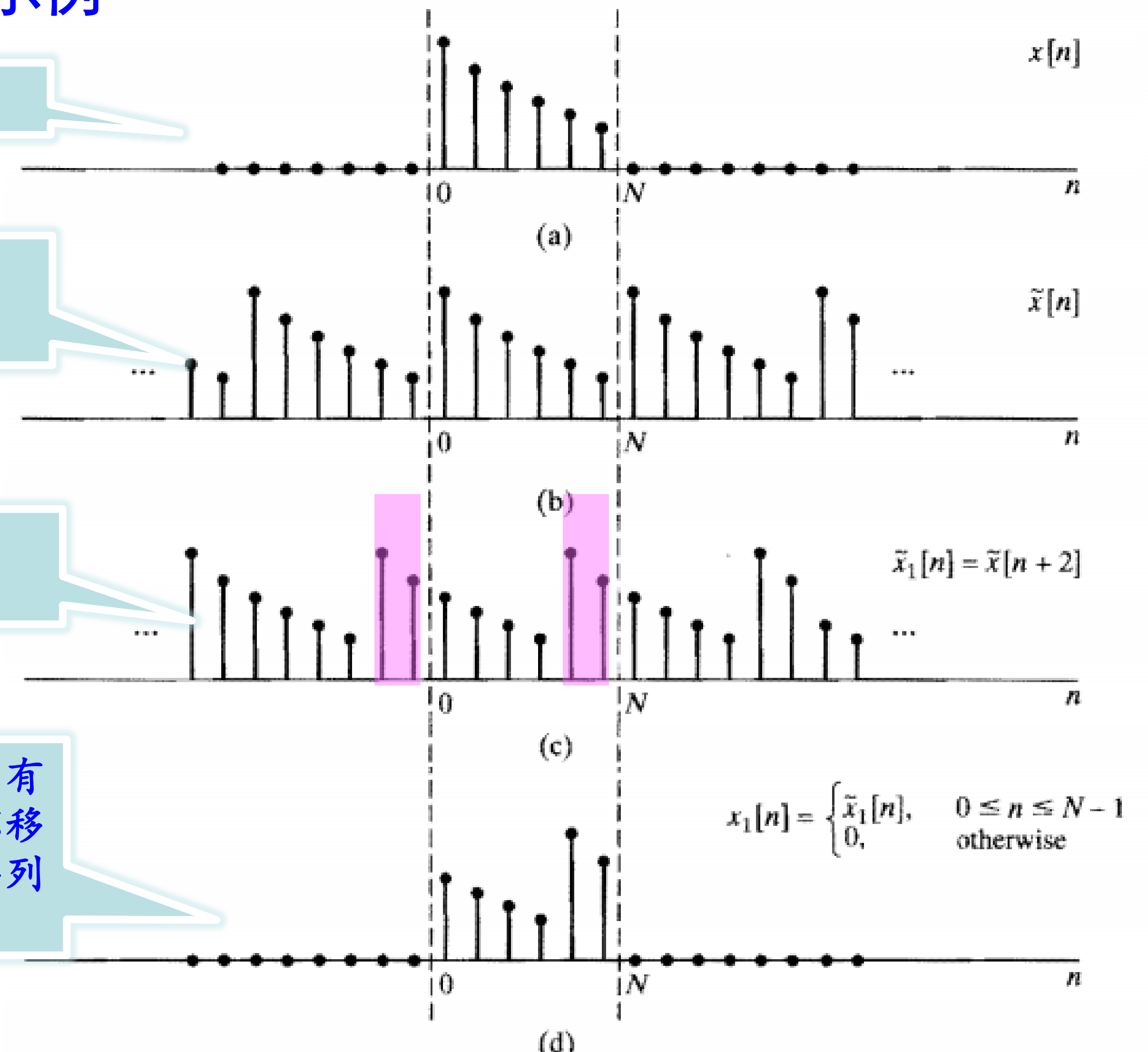
◆循环移位示例

有限长序列

有限长序列的周期拓展

周期序列的线性移位

在一个周期内，有限长序列的循环移位等效为周期序列的线性移位



8.6.3 对偶性

◆ DFT的对偶性

若有限长序列 $x[n]$ 的DFT表示为

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]$$

则 $X[n]$ 的DFT表示为

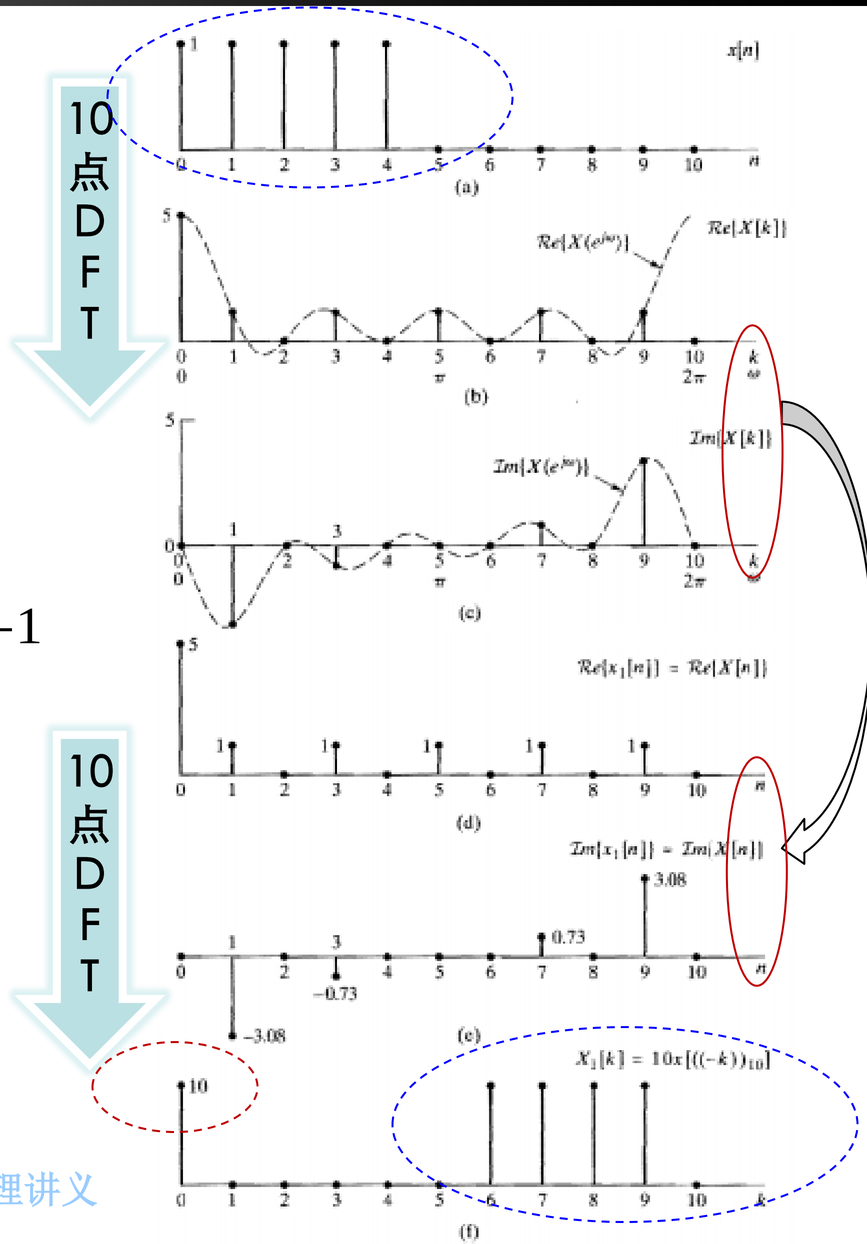
$$X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} Nx\left[((-k))_N\right], \quad 0 \le n \le N-1$$

证明（略）：

主要利用

1）DFS的对偶性

2）DFS与DFT之间关系



8.6.4 对称性

◆ DFT的对称性

若有限长序列 $x[n]$ 的DFT表示为

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]$$

则 $x[n]$ 的共轭序列和循环对称共轭序列的DFT存在关系

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X^*\left[((-k))_N\right],\quad 0 \le n \le N-1$$

和

$$x^*\left[((-n))_N\right] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X^*[k],\quad 0 \le n \le N-1$$

与对偶性相比，
序号变化相同，
但多了共轭，且
少了幅度的变化

证明略!

8.6.5 循环卷积

◆ DFT的循环卷积特性

长度为N的序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$ 的DFT表示为

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] \quad \text{和} \quad x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_2[k]$$

且序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$ 的N点循环卷积表示为

$$x_3[n] = x_1[n] \, \circledN \, x_2[n]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1\left[((m))_N\right] x_2\left[((n-m))_N\right], \quad 0 \le n \le N-1$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2\left[((n-m))_N\right], \quad 0 \le n \le N-1$$

或 $x_3[n] = x_2[n] \, Ⓝ \, x_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m] x_1\left[((n-m))_N\right], \quad 0 \le n \le N-1$

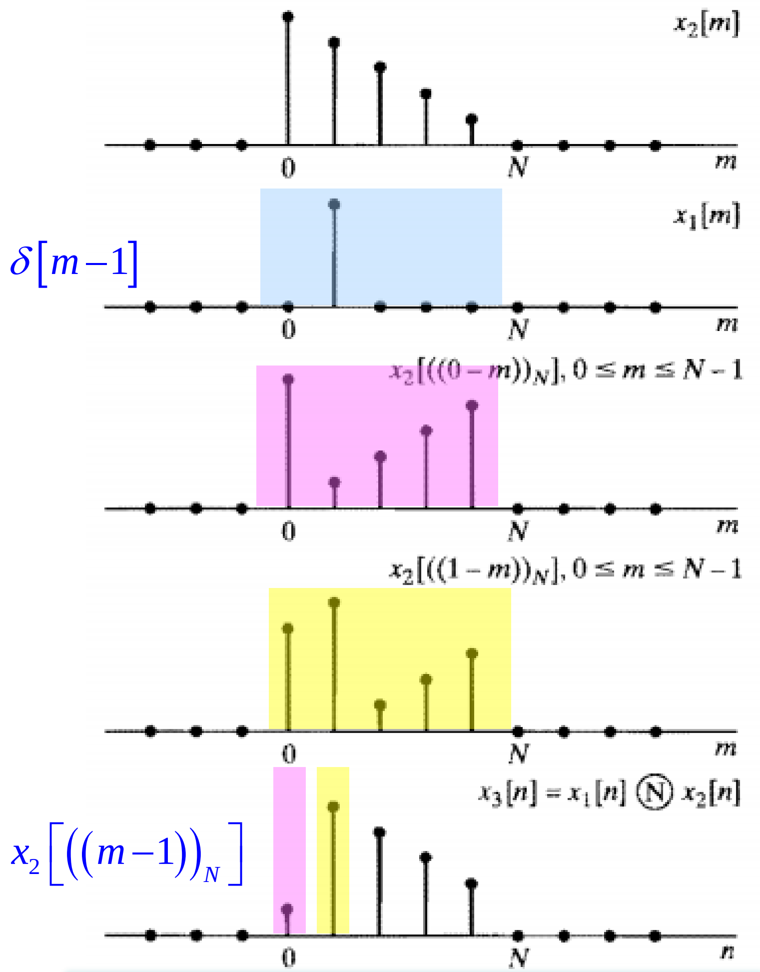
则序列循环卷积的DFT可表示为

$$x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n] = x_2[n] \, Ⓝ \, x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] X_2[k]$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

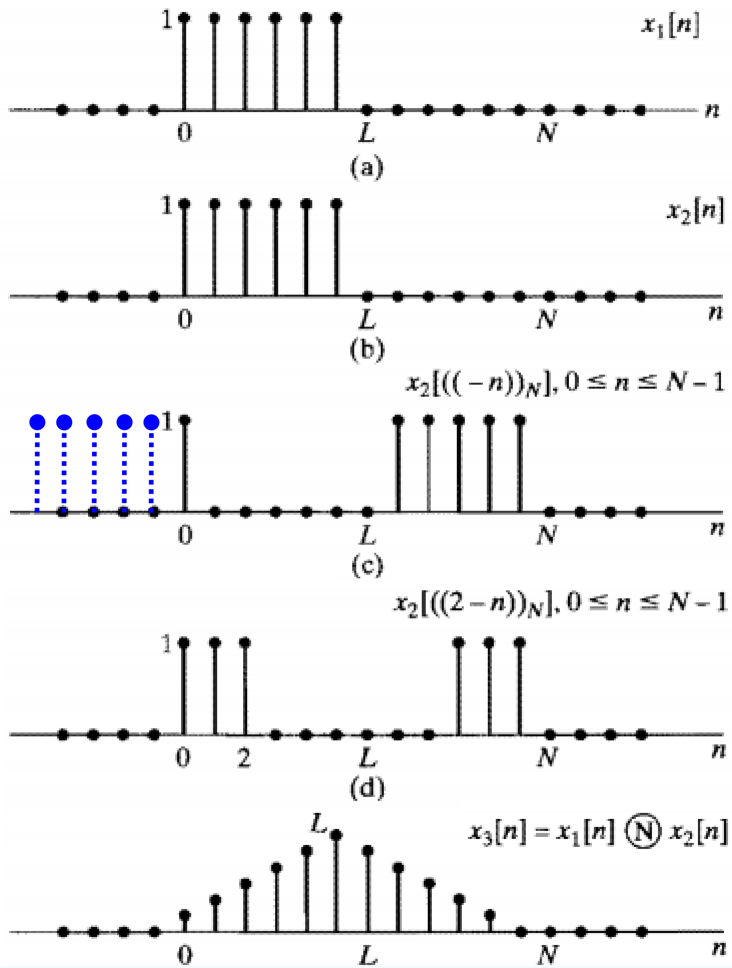
8.6.5 循环卷积

◆与延迟脉冲序列的循环卷积



序列与延迟脉冲序列的循环卷积等效为序列的循环移位

◆矩形脉冲的循环卷积



当循环卷积点数≥两序列长度之和减1时，循环卷积等效为线性卷积

8.6.6 离散傅里叶变换的性质汇总

	Finite-Length Sequence (Length N)	N-point DFT (Length N)
1.	$x[n]$	$X[k]$
2.	$x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3.	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4.	$X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5.	$x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6.	$W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7.	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8.	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
9.	$x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10.	$x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{ep}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12.	$j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{op}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13.	$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14.	$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$
	Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15.	Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16.	$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17.	$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$

DFT性质与DFS性质形式相同，除了超出定义区间范围的序号采用取模N运算。