SI231B: Matrix Computations, 2024 Spring

Homework Set #1

Acknowledgements:

1) Deadline: **2024-03-21 23:59:59**
2) You have 5 "free days" in total for late submission.
3) Submit your homework in **Homework 1** on **Gradescope**. Entry Code: **NPK2YD**. Make sure that you have correctly select pages for each problem. If not, you probably will get 0 point.

Problem 1. (Range Space and Rank) (15 points)

Given $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ and $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k\times n}$, prove that

1) $\dim \mathcal{R}(\mathbf{AB}) \leq \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$. (3 points)
2) $\dim \mathcal{R}(\mathbf{AB}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$ if $\mathbf{B}$ has full row rank. (3 points)
3) Based on the above two results, show that

$$\mathsf{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathsf{rank}(\mathbf{A}), \mathsf{rank}(\mathbf{B})\}$$

and the equality attains if the columns of $\mathbf{A}$ are linearly independent or the rows of $\mathbf{B}$ are linearly independent. (5 points)

Hint: It suffices to show $\dim \mathcal{R}(\mathbf{AB}) \leq \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$ and $\dim \mathcal{R}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) \leq \dim \mathcal{R}(\mathbf{B}^T)$.

4) $\dim \mathcal{R}(\mathbf{AB}) = k$ if $\mathbf{A}$ has full column rank and $\mathbf{B}$ has full row rank. (4 points)

1) 要证明 $\dim \mathrm{R}(AB) \leq \dim \mathrm{R}(A)$，我们可以利用矩阵乘法的性质以及列空间的定义。
设 A 是一个 $m \times k$ 的矩阵，B 是一个 $k \times n$ 的矩阵。我们知道，AB 的列空间是由 A 的列向量经过 B 的变换而得到的。由于 B 是一个 $k \times n$ 的矩阵，它将 A 的列向量投影到一个 n 维的子空间中。根据线性代数的基本原理，我们知道，任何 m 维的向量空间在进行线性变换后得到的子空间的维度不会超过 m。因此，AB 的列空间的维度不会超过 A 的列空间的维度。
因此，我们得出 $\dim \mathrm{R}(AB) \leq \dim \mathrm{R}(A)$。
2) 对于线性方程组 $ABx = 0$ 与 $Bx = 0$, 因为 B 是满秩, 所以两个线性方程组同解。所以 $R(AB) = R(B)$
3) AB 中的行向量是 A 中行向量的线性组合，同时也是 A 中行向量的极大无关组的线性组合. 如果把 AB 中的所有行向量与 A 中的极大无关组写成一个 n 维向量，那么这个极大无关组也是这个 n 维向量的极大无关组.AB 的极大无关组应该小于或者等于 A 中行向量的极大无关组所包含的向量数量，而极大无关组中向量的数量就是原向量组的秩.B 同理可证，结果就是 $R(AB) \leq \min(dim\mathcal{R}(A), dim\mathcal{R}(B))$

4) 根据 1），2），3）的结论可以得出，$dimR(A) = rank(A) = k, dimR(B) = k, dim(R(AB)) = MIN(R(A), R(B)) = k$

Problem 2. (Vector Norms) (15 points)

Recall that we talked about the vector norm in class. For any $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$, please prove the following arguments:

1) The maximum norm is defined to be

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Show that

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

(5 points)

2) Verify the following inequality chain

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

(5 points)

3) Show that

$$\|\mathbf{x}\|_1 \|\mathbf{x}\|_\infty \le \frac{1+\sqrt{n}}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

(5 points)

1) 最大范数 $\|x\|_\infty$ 是指随着 p 趋向无穷大时的极限：

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

我们需要证明 $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$。

证明过程如下：- 首先，考虑 $|x_i|^p$ 当 $p\to\infty$ 时的情况。对于任意的 $x_i \neq 0$，$|x_i|^p$ 随着 p 的增大而趋近于 $|x_i|^\infty = |x_i|$，而对于 $x_i = 0$，$|x_i|^p$ 为 0。- 因此，当 p 趋向无穷大时，$(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ 的值将趋近于 $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$。- 因此，最大范数 $\|x\|_\infty$ 就是 $|x_i|$ 中的最大值，即 $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$。

2) 验证不等式链：

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$$

证明：$\|x\|_\infty \le \|x\|_2$：最大范数是向量的所有分量的绝对值中的最大值，因此最大范数不会超过欧几里得范数。$\|x\|_2 \le \|x\|_1$：欧几里得范数是向量的所有分量的平方和的平方根，而曼哈顿范数是向量的所有分量的绝对值之和。显然，平方和的平方根不会超过绝对值之和。$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$：根据柯西-施瓦茨不等式，我们有 $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| \le \sqrt{n}(|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$。$\sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$：由于最大范数是向量的所有分量的最大值，因此欧几里得范数不会超过最大范数的 $\sqrt{n}$ 倍。

3) 证明：- 根据柯西-施瓦茨不等式，我们有 $\|x\|_1\|x\|_\infty \le \|x\|_2^2$。- 另一方面，我们可以将 $\sqrt{n}\|x\|_2 \ge \|x\|_1$ 代入，得到 $\|x\|_1 \le \frac{1+\sqrt{n}}{2}\|x\|_2$。- 因此，将这两个不等式结合起来，我们得到 $\|x\|_1\|x\|_\infty \le \frac{1+\sqrt{n}}{2}\|x\|_2^2$。

Problem 3. (Direct Sum of Subspaces) (20 points)

A vector space V is the *(internal) direct sum* of a family $\mathcal{F} = \{S_1, \cdots, S_n\}$ of subspaces of V, written $V = \oplus_{i=1}^{n} S_i = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ if the following two conditions hold:

- V is the sum of the family $\mathcal{F}$: $V = \sum_{i=1}^{n} S_i$,
- for each i, $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$.

For example, a vector space V is the direct sum of a subspace S and its orthogonal complement $S^{\perp}$: $V = S \oplus S^{\perp}$. $\mathbb{R}^3$ is the direct sum of any three non-coplanar lines.

1) Determine which of the following sums are direct sums. Briefly explain why.
   a) $\mathbb{R}^3$ is the sum of any two distinct planes. (1 point)
   b) $\mathbb{R}^{n\times n}$ is the sum of the subspace of upper-triangular matrices and the subspace of lower-triangular matrices. (2 points)
   c) $\mathbb{R}^{n\times n}$ is the sum of the subspace of symmetric matrices and the subspace of skew-symmetric matrices. (A square matrix $\mathbf{A}$ is called skew-symmetric if $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.) (2 points)
2) Let $\mathcal{F} = \{S_1, \cdots, S_n\}$ be a family of distinct subspaces of a finite-dimensional vector space V such that $V = \sum_{i=1}^{n} S_i$. Prove that the following statements are equivalent:
   a) **(Independence of the family)** For each i, $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$.
   b) **(Uniqueness of expression for 0)** The zero vector 0 cannot be written as a sum of nonzero vectors from distinct subspaces of $\mathcal{F}$.
   c) **(Uniqueness of expression)** Every nonzero $v \in V$ has a unique, except for order of terms, expression as a sum $v = s_1 + \cdots + s_n$ of nonzero vectors from distinct subspaces in $\mathcal{F}$.

   (So a sum $V = \sum_{i=1}^{n} S_i$ is direct if and only if any one of the above statements holds.)

   Hint: to prove the equivalence, you could show that, for example, a) implies b) and b) implies c) and c) implies a). (15 points)

1) explain:
   a) 两个不同的面，不能构成一个立体空间
   b) 因为上对角矩阵 A ， 下对角矩阵 B ， $A \cap B =$ 对角线, 交集不为空，所以不符合
   c) 考虑一个 n×n 的矩阵 A，我们可以写成它的对称部分和反对称部分的和：

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad 和 \quad C = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

   验证 B 和 C 分别是对称矩阵和反对称矩阵：

   对于 B：

$$B^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B$$

所以 B 是对称矩阵。

对于 C：

$$C^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}((A - A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C$$

所以 C 是反对称矩阵。

因此，我们得到了 $A = B + C$，其中 B 是对称矩阵，C 是反对称矩阵，并且这种分解是唯一的。这表明 Rn×n 可以表示为对称矩阵和反对称矩阵的直和。

2) prove:

我们首先证明 a) 蕴含 b)：

a) 对于每个 i，$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$。

假设，相反地，b) 是错误的，这意味着零向量 **0** 可以被表示为来自 F 中不同子空间的非零向量之和。我们将这些非零向量表示为 $v_1, v_2, \ldots, v_k$，其中每个 v_j 属于不同的子空间 S_{i_j}。然后我们有：

$$\mathbf{0} = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

这意味着 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 线性相关，与 a) 中的假设矛盾。因此，命题 b) 成立。

接下来，我们证明 b) 蕴含 c)：

b) 零向量 **0** 不能被表示为来自 F 中不同子空间的非零向量之和。

现在，让 $v \in V$ 是一个非零向量。假设，为了矛盾，存在两个不同的表达式使得 v 可以被表示为来自 F 中不同子空间的非零向量之和：

$$v = s_1 + s_2 + \ldots + s_k = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$$

其中每个 s_i 属于不同的子空间 S_{i_j}，每个 t_j 属于不同的子空间 S_{j_l}。那么：

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_k - (t_1 + t_2 + \ldots + t_m) = \mathbf{0}$$

但这与 b) 中的假设矛盾。因此，命题 c) 成立。

最后，我们证明 c) 蕴含 a)：

c) 每个非零 $v \in V$ 都可以唯一地表示为来自 F 中不同子空间的非零向量之和。

假设，为了矛盾，存在 i 使得 $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) \neq \{0\}$。这意味着存在一个非零向量 v 同时属于 S_i 和 $\sum_{j \neq i} S_j$。然而，根据命题 c)，v 必须有一个唯一的表达式，表示为来自不同子空间的非零向量之和，这与 v 同时属于 S_i 和 $\sum_{j \neq i} S_j$ 的事实相矛盾。因此，命题 a) 成立。

综上所述，证毕。

Problem 4. (Grassmann Formula) (10 points)

Let S and T be subspaces of a finite-dimensional vector space V. Please prove the following formula

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

In particular, if T is any complement of S in V, then

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(V),$$

that is, the dimensions of vector spaces are additive in a direct sum:

$$\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T).$$

Hint: to prove the first formula, you might start by considering a basis for $S \cap T$, and extending it to bases for S and T separately. With these bases, then consider how to construct a basis for $S + T$ and prove that it is a basis indeed.

prove:

假设 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 是 $S \cap T$ 的基。由于 $S \cap T$ 是 S 的一个子空间，我们可以将 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 扩充为 S 的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_k$。同样地，我们也可以将 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 扩充为 V_2 的一组基 $\beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$。

我们首先说明 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 是线性无关的。如果它们线性相关，那么一定存在不全为零的 $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_t$，使得：

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_s\alpha_s + b_1\beta_1 + \ldots + b_k\beta_k = c_1\gamma_1 + \ldots + c_t\gamma_t$$

上式的左边在 S 中，右边在 T 中。因此，$c_1\gamma_1 + \ldots + c_t\gamma_t \in S \cap T$。由于 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 的选择，知道它们都不在 $S \cap T$ 中，因此 $c_1 = \ldots = c_t = 0$。同样的道理可以知道 $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k$ 也必须都是零。所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 是线性无关的。

其次我们说明 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 能够张成 $S + T$。这是因为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_k$ 能张成 S，$\beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 能够张成 T。所以它们合在一起能够张成 $S + T$。

因此 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 是 $S + T$ 的一组基。所以

$$\dim(S + T) = s + k + t = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

$$\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$$

Problem 5. (Block Matrix Computations) (20 points)

Let $\mathbf{S}$ as the sample covariance matrix of n independent observed samples of a p-variate Gaussian random variable with zero mean and covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Denote σ_{ij} as the ij-th entry in $\boldsymbol{\Sigma}$. Suppose four elements $\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}\}$ in $\boldsymbol{\Sigma}$ are missing as

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} ? & ? & \cdots \\ ? & ? & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Our goal is to estimate the missing entries based on the observed ones in $\boldsymbol{\Sigma}$ and the sample covariance matrix $\mathbf{S}$. Given

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{AA} & \boldsymbol{\Sigma}_{AB} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{AB} & \boldsymbol{\Sigma}_{BB} \end{bmatrix}, \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{AA} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

We are interested in the following Gaussian maximum likelihood estimation problem for $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$:

$$\min_{\boldsymbol{\Sigma}_{AA}} \quad \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right) + \log\det\left(\boldsymbol{\Sigma}\right). \tag{1}$$

1) If $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$ is invertible, it easy to verify that the above 2×2 partitioned $\boldsymbol{\Sigma}$ has the following factorization form

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{BA}\boldsymbol{\Sigma}_{AA}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{AA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{BB} - \boldsymbol{\Sigma}_{BA}\boldsymbol{\Sigma}_{AA}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Sigma}_{AA}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(Note: $\boldsymbol{\Sigma}_{BB} - \boldsymbol{\Sigma}_{BA}\boldsymbol{\Sigma}_{AA}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{AB}$ is named *Schur complement* of $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$ in the matrix literature.)

a) Based on the above factorization result, compute the inverse and determinant of $\boldsymbol{\Sigma}$. (5 points)

b) Write the objective function in (7) explicitly as a function of variable $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$. (5 points)

Hint: You may need to partition $\mathbf{S}$ as

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA} & \mathbf{S}_{AB} \\ \mathbf{S}_{BA} & \mathbf{S}_{BB} \end{bmatrix},$$

where $\mathbf{S}_{AA}$, $\mathbf{S}_{AB}$, $\mathbf{S}_{BA}$ and $\mathbf{S}_{BB}$ take the same dimension as $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{AB}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{BA}$, and $\boldsymbol{\Sigma}_{BB}$, respectively.

2) Directly solving for $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$ based on the objective function derived above is difficult, one alternative way is to solve for an intermediate variable $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{AA} = \boldsymbol{\Sigma}_{AA} - \boldsymbol{\Sigma}_{AB}\boldsymbol{\Sigma}_{BB}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{BA}$.

a) Mimicking the form of (6), decompose $\boldsymbol{\Sigma}$ into the product of three matrices, where $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{AA}$ shows up. (4 points)

b) Try to derive the objective function in terms of $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{AA}$ and discuss why the resulting problem is easier than the one you derived in 1.b). (6 points)

Hint: $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{AA}$ is the Schur complement of $\mathbf{\Sigma}_{BB}$. Deriving the objective function in terms of $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{AA}$ may require a similar proof as that in the previous question.

1) solve:

   a)

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{\Sigma}_{AA}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{BB} - \mathbf{\Sigma}_{BA}\mathbf{\Sigma}_{AA}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ \mathbf{0} - \mathbf{\Sigma}_{BA}\mathbf{\Sigma}_{AA}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

   $\mathbf{det}(\mathbf{\Sigma}) = \mathbf{det}(\mathbf{A})\mathbf{det}(\mathbf{S_A})$

   b) objective function :

$$\min_{\mathbf{\Sigma}_{AA}} \quad \operatorname{tr}\left(\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}^{-1}\right) + \log\det\left(\mathbf{\Sigma}\right). \tag{4}$$

$$\min_{\mathbf{\Sigma}_{AA}} \quad \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix} \Sigma_{-1}\right) + \log\det\left(\mathbf{\Sigma}\right). \tag{5}$$

2) a) sovle:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Sigma}_{AB}\mathbf{\Sigma}_{BB}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{AA} - \mathbf{\Sigma}_{AB}\mathbf{\Sigma}_{BB}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\Sigma}_{BB}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{BA} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

   b) objective function :

$$\min_{\mathbf{\Sigma}_{BB}} \quad \operatorname{tr}\left(\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}^{-1}\right) + \log\det\left(\mathbf{\Sigma}\right). \tag{7}$$

Problem 6. (Determinant) (20 points)

Consider the following matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Use a cofactor expansion to evaluate the determinants $\det(\mathbf{A})$ and $\det(\mathbf{B})$. (10 points)
2) Use determinants and adjugate matrices to compute the inverses $\mathbf{A}^{-1}$ and $\mathbf{B}^{-1}$. (10 points)

1)

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = 2 * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 1 * \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 8$$

同理：$\mathbf{det}(\mathbf{B}) = 15$

2)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -4 \\ 16 & -6 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -12 & 25 & -14 & 7 \\ -9 & 9 & 9 & 15 \\ -6 & 6 & 6 & -3 \\ 9 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$