作业 五

1. 证明：当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶.

2. (a) 证明：$y = ax + b\,(a \neq 0)$ 是曲线的渐近线（渐近线的严格定义见讲义《第三讲》附录一）当且仅当

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

   (b) 计算 $y = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$ 所描绘曲线的渐近线.

3. 当 $x \to 0$ 时，确定下列无穷小对于 x 的阶，并确定其主部

$$a)\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\ (x \to 0^+) \qquad b)\ \sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}\ (a > 0)$$

$$c)\ \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x} \qquad d)\ (\cos x)^x - 1$$

4. 求下列各题中的常数 a.

   (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$；

   (b) 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[4]{1 + ax^2} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小；

   (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$，并指出该计算的几何意义；

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - bx + 1}) = 2$，并指出该计算的几何意义.

5. 计算下列极限（可用无穷小（大）替换）

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)\ln(1 + x)} \qquad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \tan x}{\sqrt{1 - x^2} - 1}$$

$$c)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}\ (a, b \neq 0) \qquad d)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{2^2 + 3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

6. 已知 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小，且 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x - 1} = 5$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

7. 求下列函数的间断点，并确定其类型，若为可去间断点，补充或修改定义使之连续.

$$a)\ y=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}} \qquad b)\ y=\ln\cos x$$

$$c)\ y=\left[\frac{1}{|x|+1}\right] \qquad d)\ y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$$

8. 求下列各题中的常数 a，b 的值，使得函数连续.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x} & x<0\\ 1 & x=0\\ \frac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x} & x>0\end{cases} \qquad b)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

9. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\frac{1}{x} & x>0\\ e^x+b & x\le 0\end{cases}$ 的连续性，其中 a,b 是任意常数.

10. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\varphi(0)=0$ 及 $|f(x)|\le|\varphi(x)|$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

11. (a) 找一个区间使得 $\sin x=7\cos x$ 在其上有根.

    (b) 假设 f 在 $[0,4]$ 上连续,且 $f(0)=f(2)=f(4)=1$,$f(1)=f(3)=-1$. 试问：$f(x)=0$ 在 $[0,4]$ 上解的个数?

12. 证明方程 $x=a\sin x+b$ $(a,b>0)$ 至少有一个正根.

13. 设函数 $f(x),g(x)\in C[a,b]$,且 $f(a)<g(a)$,$f(b)>g(b)$. 证明:$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

14. 设 $f(x)\in C[0,2]$, 且 $f(0)=f(2)$, 证明: 存在 $x,y\in[0,2]$ 满足 $y-x=1$, 使得 $f(x)=f(y)$.

15. 证明: 对偶数次多项式方程 $f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$, 若 $a_{2n}<0$，则它至少有两个实根.

16. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$（有限值），证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

17. 设 $f(x) \in C[0,1]$，且 $f(0)=f(1)$，证明：$\forall n \in \mathbb{N}_+$，$\exists \xi_n \in [0,1]$ 使得 $f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$

18. 设 $f(x) \in C[0,1]$，且 $f(x)$ 只取有理值，若 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$，证明：$\forall x \in [0,1]$，有 $f(x) = 2$.