

第四章：连续时间信号的采样

◆ 4.1 周期采样

◆ 4.2 采样的频域表示

◆ 4.3 由样本重构带限信号

◆ 4.4 连续时间信号的离散时间处理

◆ 4.5 离散时间信号的连续时间处理

◆ 4.6 利用离散时间处理改变采样率

◆ 4.7 多采样率信号处理

◆ 4.8 模拟信号的数字处理

◆ 4.9 在A/D和D/A转换中的过采样和噪声成形

4.1 周期采样

◆ 一个连续时间信号的周期采样序列表示为

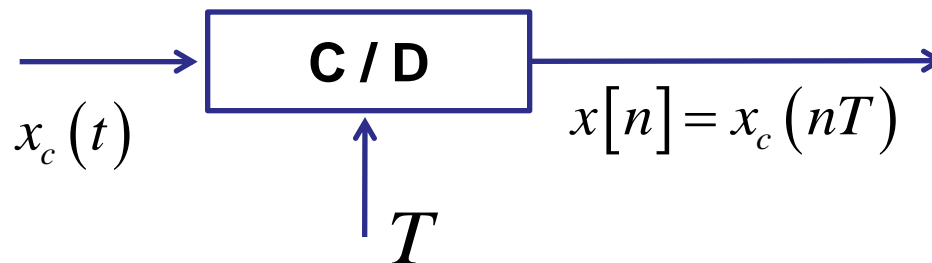
$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

T 是采样周期,

采样周期的倒数为采样频率 $f_s = 1/T$

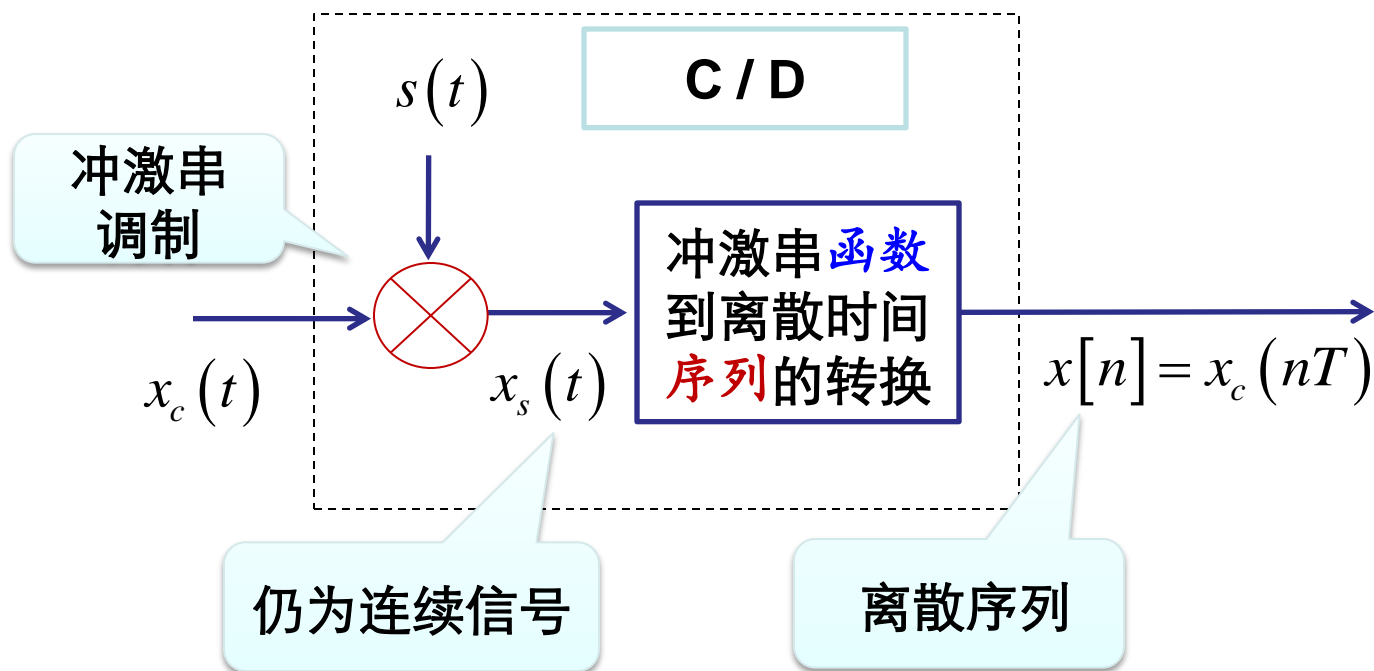
采样频率的弧度表示为 $\Omega_s = 2\pi/T$

理想连续时间到离散
时间 (C/D) 转换器



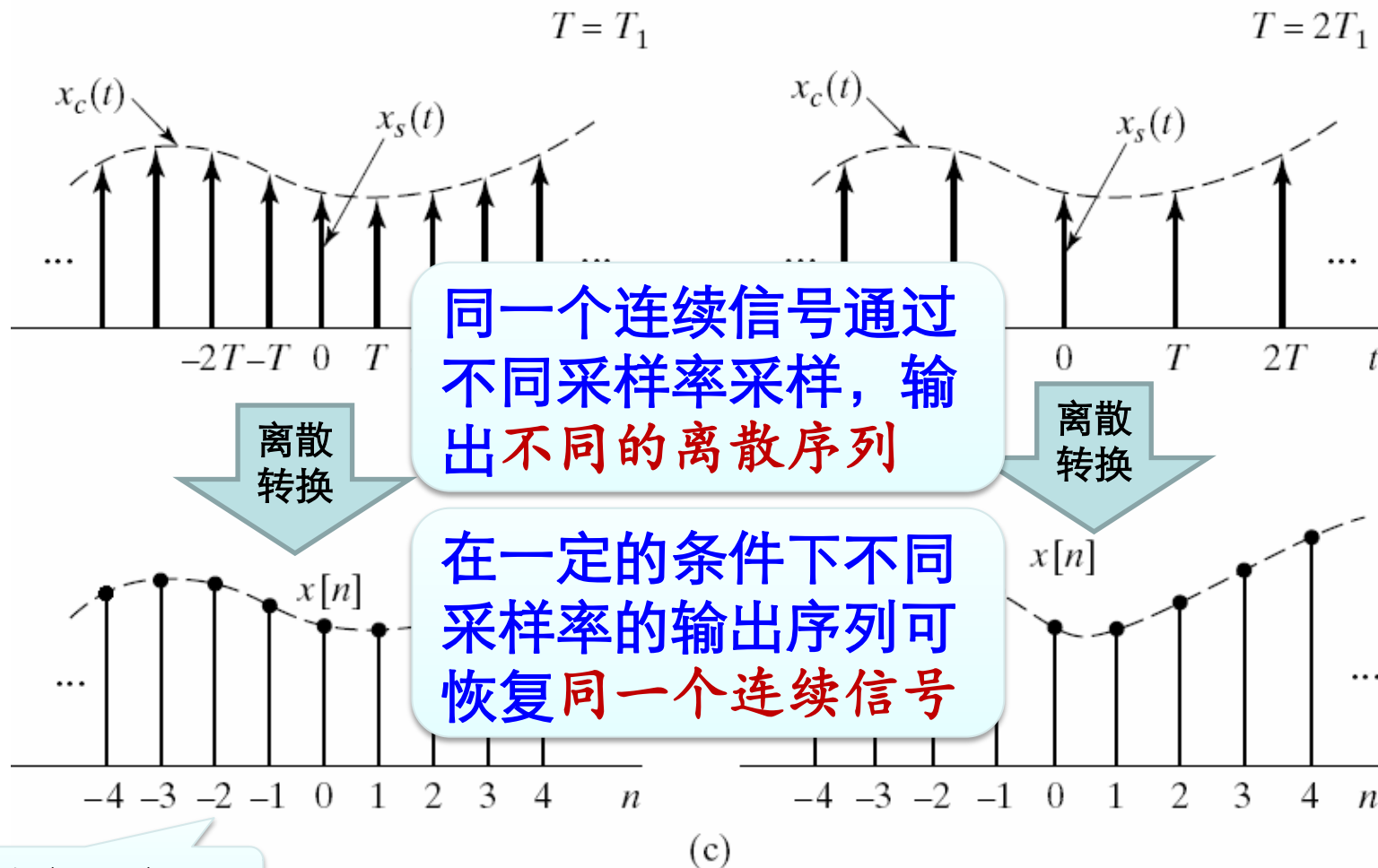
4.1 周期采样

◆ 理想采样的数学模型



4.1 周期采样

◆ 相同输入连续信号采用不同采样率的输出序列



坐标轴变量变化

第四章：连续时间信号的采样

◆4.1 周期采样

◆4.2 采样的频域表示

◆4.3 由样本重构带限信号

◆4.4 连续时间信号的离散时间处理

◆4.5 离散时间信号的连续时间处理

◆4.6 利用离散时间处理改变采样率

◆4.7 多采样率信号处理

◆4.8 模拟信号的数字处理

◆4.9 在A/D和D/A转换中的过采样和噪声成形

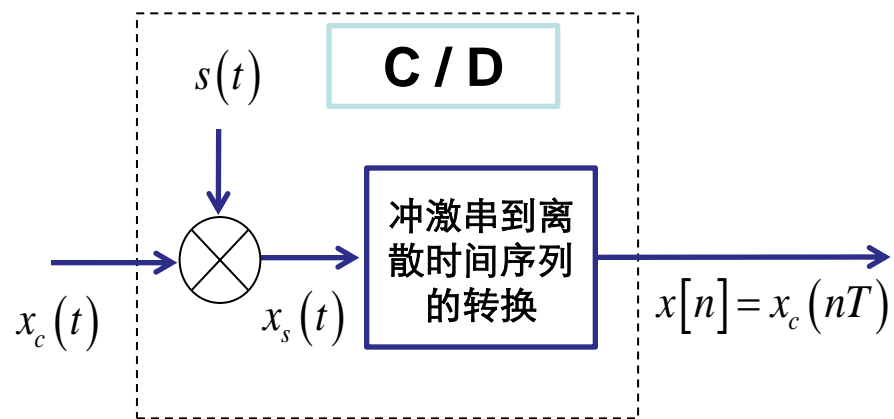
4.2 采样的频域表示

◆ 冲激串调制信号的时域表式

冲激串函数可表示为：

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$\delta(t)$ 为单位冲激函数。



用 $x_c(t)$ 调制 $s(t)$ 可得冲击串调制信号

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t) s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

4.2 采样的频域表示

◆ 冲激串调制信号的频域表示

$$\text{令 } x_c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_c(j\Omega)$$

$$s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(j\Omega)$$

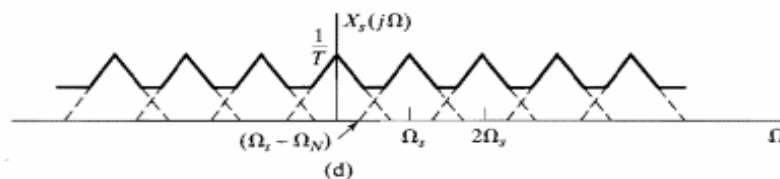
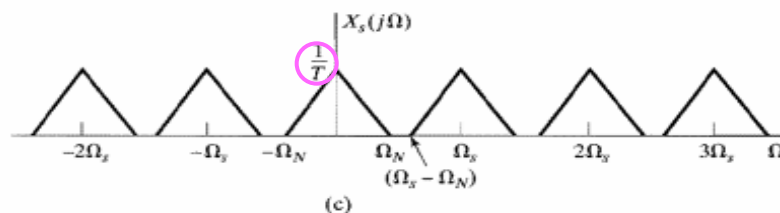
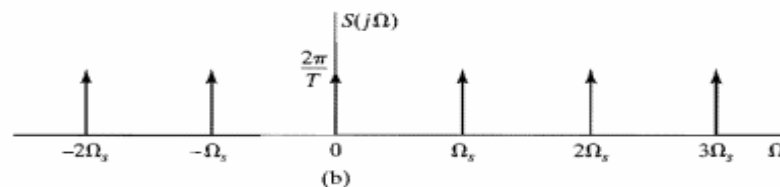
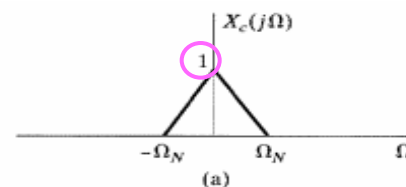
$$x_s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_s(j\Omega)$$

可得

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$



冲激串调制输出信号的频谱为输入信号频谱按采样频率为周期的移位叠加

4.2 采样的频域表示

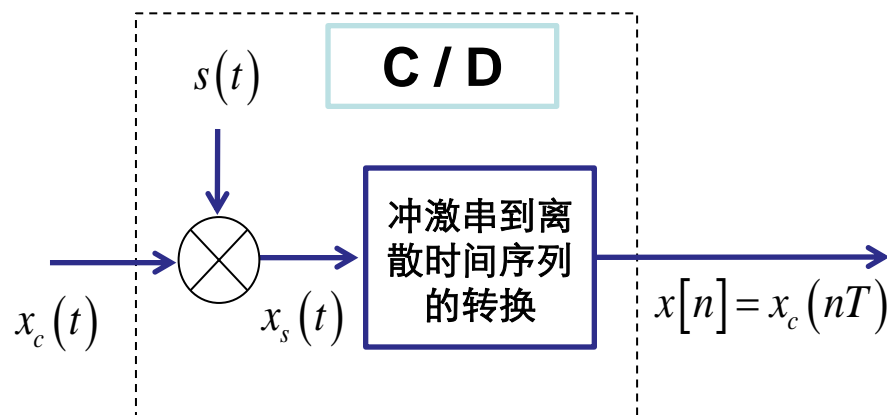
◆ 采样序列的频域表达式

由冲激串调制时域表达式

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

其傅里叶变换(频域)表示为

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega T n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega T n}$$



可得采样序列的FT与冲激串调制(连续信号)的FT之间存在关系:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = X_s(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T}$$

即由输入连续信号的FT --> 冲激串调制信号的FT --> 采样序列的FT

$$X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \xrightarrow{\Omega=\omega/T} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k)/T)$$



4.2 采样的频域表示

◆时、频域尺度关系

➤ 频域尺度 (频谱)

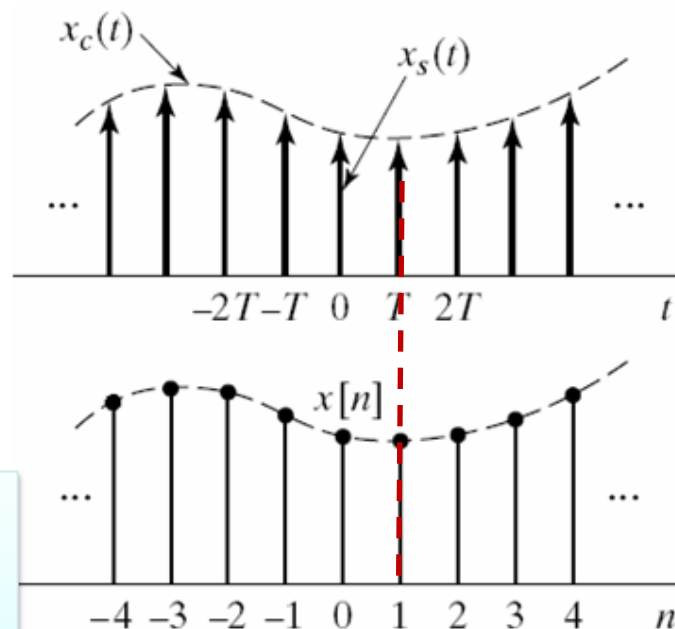
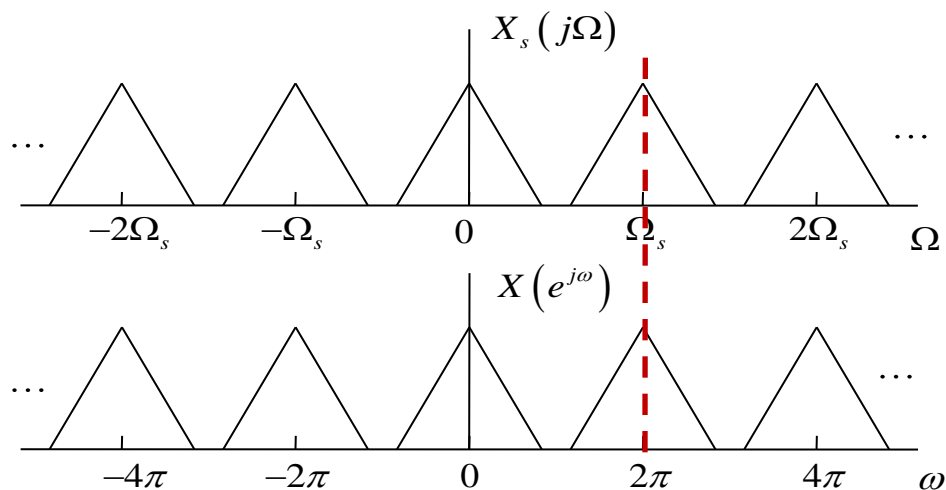
频率尺度关系 $\omega = \Omega T$ 表征 $X(e^{j\omega})$ 与 $X_s(j\Omega)$ 之间的尺度变换。

频域尺度变换是一种频率轴的归一化，使 $\Omega = \Omega_s$ 归一化到 $\omega = 2\pi$ 。

➤ 时域尺度 (信号)

$x[n]$ 与 $x_s(t)$ 之间亦存在 (时域) 尺度变换。

时域尺度变换使 $t = T$ 归一化到 $n = 1$ 。



课后阅读例4.1-4.3,
加深理解

4.2 采样的频域表示

◆ 奈奎斯特采样定理

令 $x_c(t)$ 是一个带限信号,

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_N$$

那么 $x_c(t)$ 能唯一取决于它的采样样本

$$x[n] = x_c(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

连续信号可由采样
样本无失真的恢复

所需的（采样频率）必要条件为

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N$$

频率 Ω_N 一般称为奈奎斯特频率

允许的最大信号带宽

频率 $2\Omega_N$ 称为奈奎斯特（采样）率

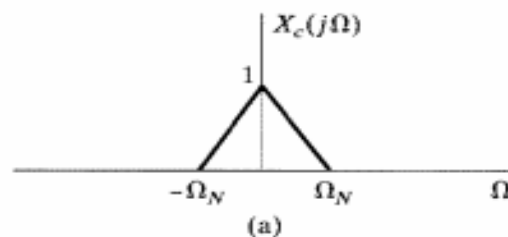
允许的最小采样频率



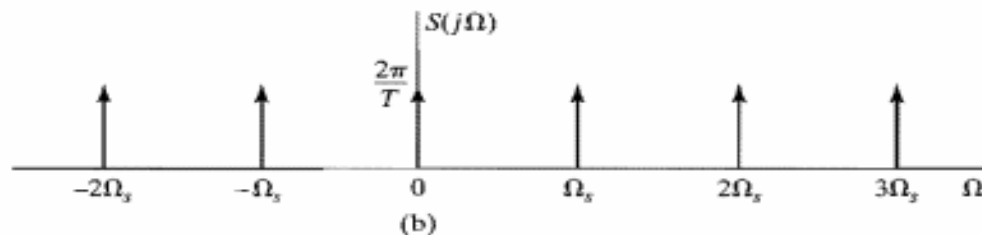
4.2 采样的频域表示

◆ 冲激串调制频谱示例

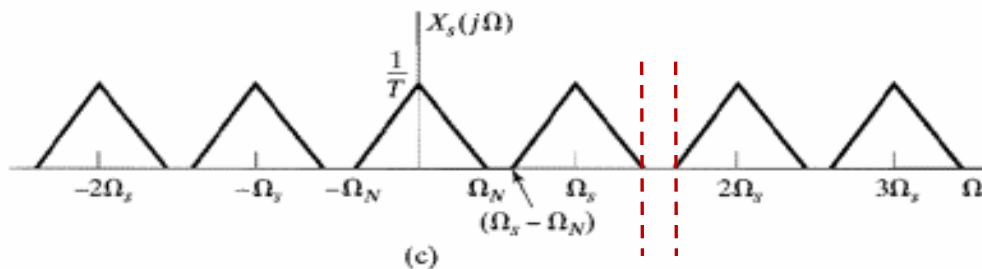
连续时间信号频谱



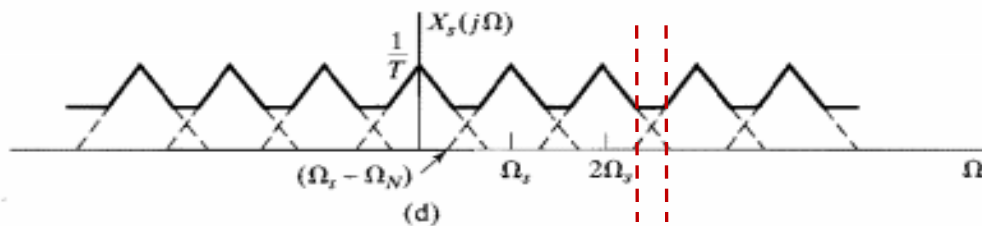
冲激串信号频谱



$\Omega_s > 2\Omega_N$ 调制频谱
--无混叠



$\Omega_s < 2\Omega_N$ 调制频谱
--有混叠



4.2 采样的频域表示

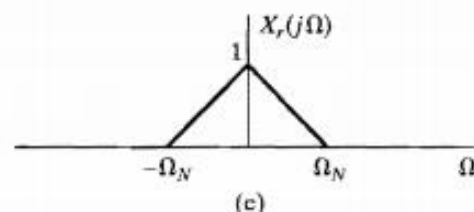
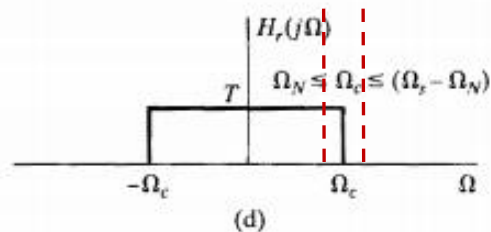
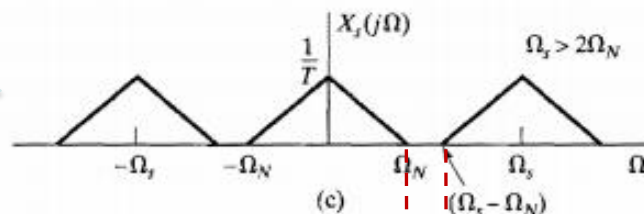
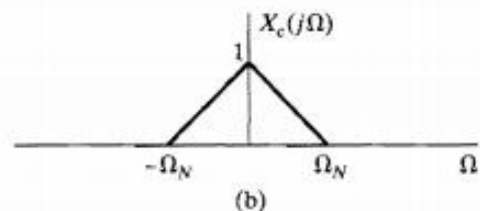
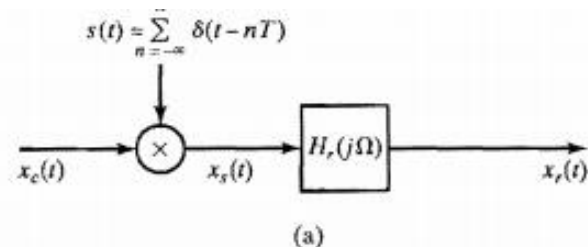
◆ 由冲激串调制输出信号 重构原始连续时间信号

当 $\Omega_s > 2\Omega_N$ 无混叠

采用理想低通滤波器，
截止频率 Ω_c 满足

$$\Omega_N \leq \Omega_c \leq (\Omega_s - \Omega_N)$$

可从冲激串调制输出无失真恢复原始连续时间信号



4.2 采样的频域表示

例：COS信号冲激串调制与重构

COS信号

$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t$$

其傅里叶变换

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

无混叠重构输出

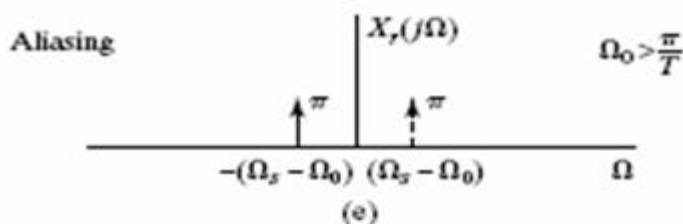
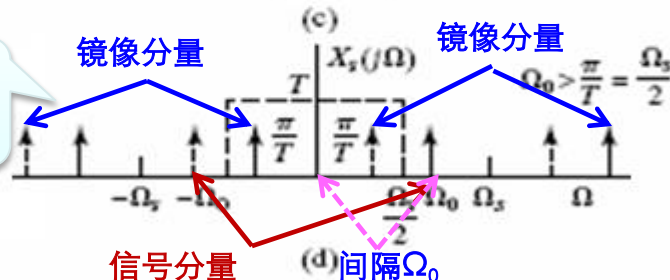
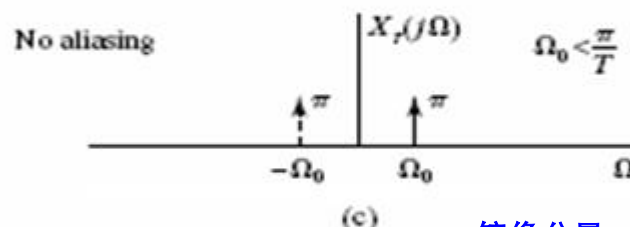
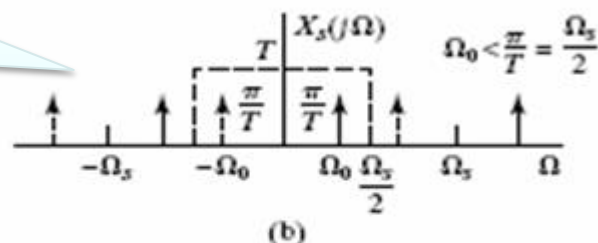
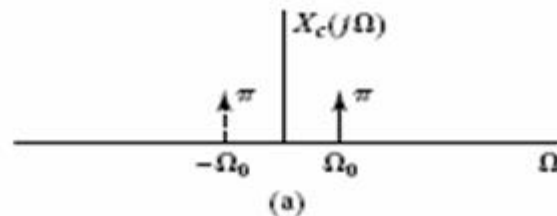
$$x_r(t) = \cos \Omega_0 t$$

有混叠重构输出

$$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t$$

无混叠
调制频谱

有混叠
调制频谱



4.2 采样的频域表示

◆带通信号的采样

通带信号 $x_c(t)$ 频谱位于

$$\Omega_L \leq \Omega \leq \Omega_H \quad \Omega_L > 0$$

由**采样定理**决定的**采样率**为

$$\Omega_s \geq 2\Omega_H$$

定义通带信号带宽为

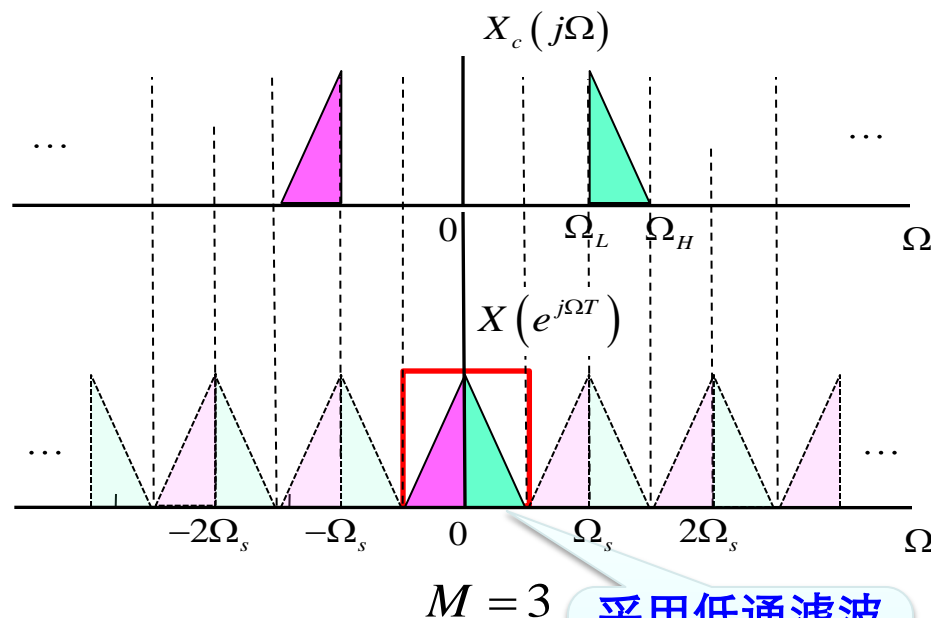
$$\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L$$

如果 Ω_H 为信号带宽的整数倍

$$\Omega_H = M \times \Delta\Omega$$

通带信号采样频率可选为

$$\Omega_s = 2 \times \Delta\Omega = \frac{2\Omega_H}{M}$$



采用低通滤波
即可获取通带
等效基带信号

通带信号的**采样信号**频谱为

$$X(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2 \times \Delta\Omega k))$$



第四章：连续时间信号的采样

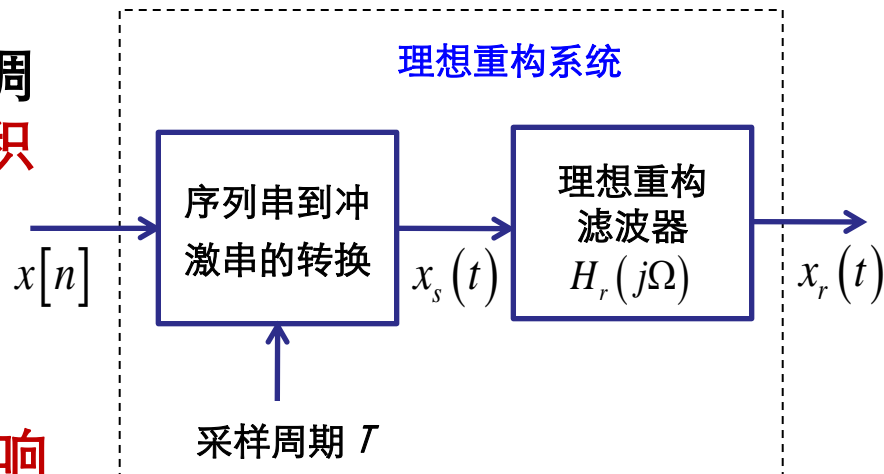
- ◆ 4.1 周期采样
- ◆ 4.2 采样的频域表示
- ◆ 4.3 由样本重构带限信号
- ◆ 4.4 连续时间信号的离散时间处理
- ◆ 4.5 离散时间信号的连续时间处理
- ◆ 4.6 利用离散时间处理改变采样率
- ◆ 4.7 多采样率信号处理
- ◆ 4.8 模拟信号的数字处理
- ◆ 4.9 在A/D和D/A转换中的过采样和噪声成形

4.3 由样本重构采样信号

◆理想重构系统

- 先由样本序列 $x[n]$ 形成冲激串调制信号 $x_s(t)$ ，各连续冲激的面积等于序列值，即

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$$



- 再通过频率响应为 $H_r(j\Omega)$ 、冲激响应为 $h_r(t)$ 的理想低通滤波器，输出为

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT)$$

其中，理想低通滤波器的增益为 T

截止频率 Ω_c 满足 $\Omega_N \leq \Omega_c \leq (\Omega_s - \Omega_N)$

一般地 Ω_c 取值为 $\Omega_c = \Omega_s / 2 = \pi / T$



4.3 由样本重构采样信号

◆理想重构系统（续）

截止频率为 π/T 理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$h_r(t) = \sin(\pi t / T) / (\pi t / T)$$

$h_r(t)$ 特性

$$h_r(0) = 1$$

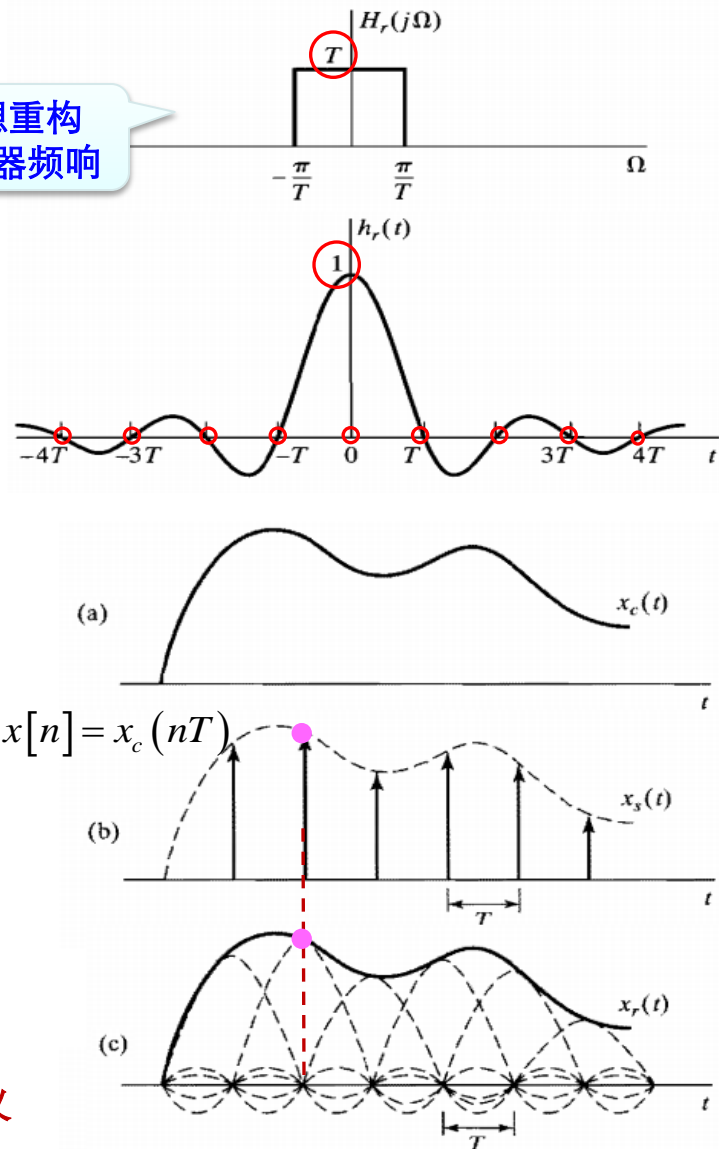
$$h_r(nT) = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

保证（通过移位叠加获得的）重构信号在采样点处取值仅取决于原采样值

重构输出为

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

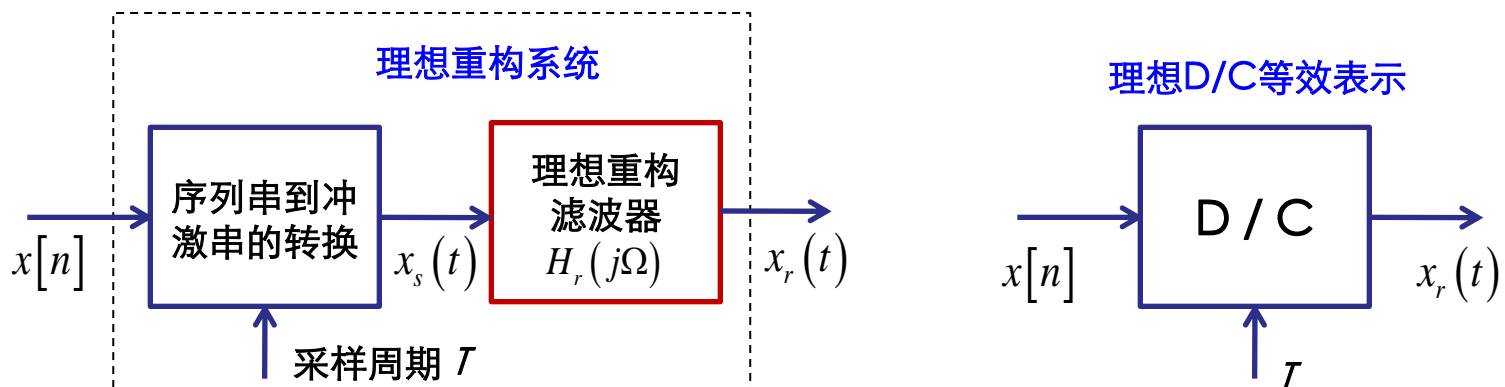
理想重构
滤波器频响



4.3 由样本重构采样信号

◆理想离散到连续时间 (D/C) 转换器

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega T n}$$



由时域重构信号

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

通过傅里叶变换, 可得频域重构信号

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega T n} = H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T})$$

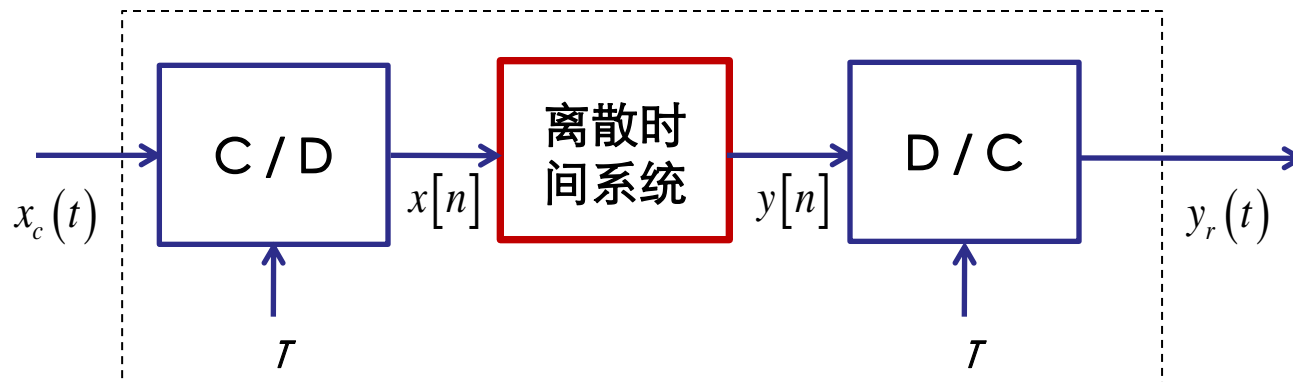
其中 $X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega T n} = X_s(j\Omega)$ 冲击串调制输出信号 $x_s(t)$ 的傅里叶变换

第四章：连续时间信号的采样

- ◆ 4.1 周期采样
- ◆ 4.2 采样的频域表示
- ◆ 4.3 由样本重构带限信号
- ◆ 4.4 连续时间信号的离散时间处理
- ◆ 4.5 离散时间信号的连续时间处理
- ◆ 4.6 利用离散时间处理改变采样率
- ◆ 4.7 多采样率信号处理
- ◆ 4.8 模拟信号的数字处理
- ◆ 4.9 在A/D和D/A转换中的过采样和噪声成形

4.4 连续时间信号的离散时间处理

◆连续时间信号离散时间处理模型



其中

离散系统
输入信号

$$x[n] = x_c(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k)/T)$$

连续系统
输出信号

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| \leq \pi/T \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

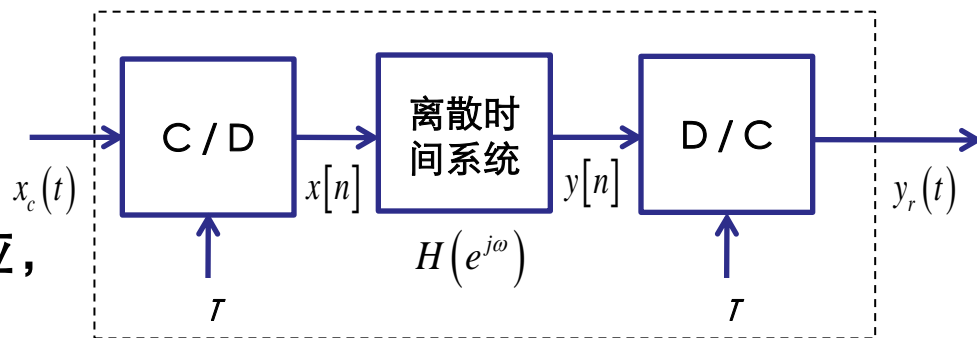
4.4.1 线性时不变离散系统

◆连续时间信号离散时间处理模型（续）

若上述模型中离散时间系统为LTI，
则其输出信号的频谱为

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

其中 $H(e^{j\omega})$ 为离散系统的频率响应，
 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别为输入和输出序列的傅里叶变换（频谱）



$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k)/T)$$

则，整个连续时间信号系统的输出信号频谱可表示为

$$\begin{aligned} Y_r(j\Omega) &= H_r(j\Omega) Y(e^{j\Omega T}) \\ &= H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) X(e^{j\Omega T}) \\ &= H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k/T)) \end{aligned}$$

4.4.1 线性时不变离散系统

◆连续时间信号离散时间处理模型（续2）

若 $X_c(j\Omega) = 0$, $|\Omega| \geq \pi/T$, 则 $Y_r(j\Omega)$ 简化为

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

因此, 当 $X_c(j\Omega)$ 带限, 且采样率不低于奈奎斯特率时, 整个连续时间系统可表示成

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(e^{j\Omega T}) X_c(j\Omega)$$

其中整个连续时间系统的等效频率响应可表示成

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

若: 1) 离散时间系统为LTI; 2) 采样频率高于奈奎斯特率 $\Omega_s > 2\Omega_N$
问: 整个连续时间系统是否为LTI 系统?

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \times \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k/T))$$

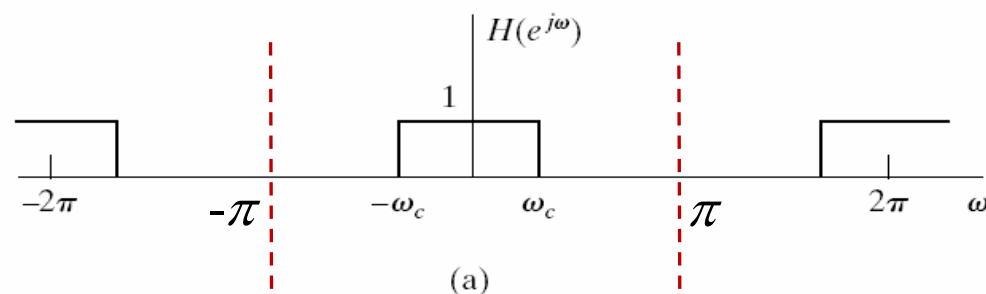


4.4.1 线性时不变离散系统

例4.4 采用离散时间低通滤波器的理想连续时间低通滤波

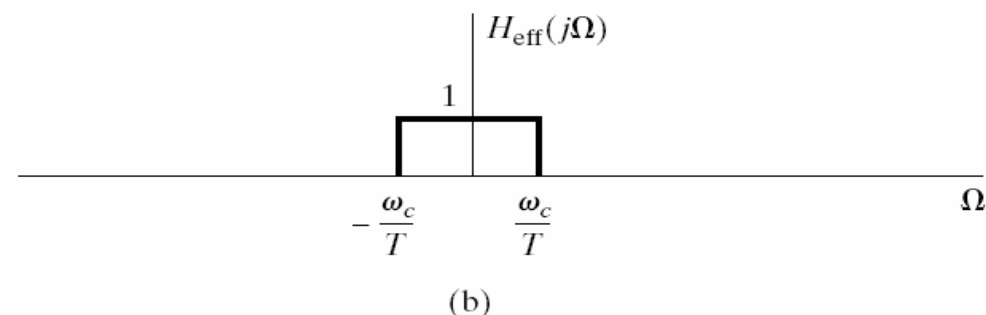
LTI离散时间系统频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



对于采用不低于奈奎斯特率采样的带限输入信号，等效的LTI连续时间系统频率响应为

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \omega_c/T \\ 0, & |\Omega| \geq \omega_c/T \end{cases}$$



LTI连续时间系统的频率响应可由LTI离散时间系统在一个周期内的频率响应经过尺度变换获得。



4.4.1 线性时不变离散系统

◆采用离散时间低通滤波器的理想连续时间低通滤波系统信号的频谱

结论1: 离散时间系统采用截止频率为 ω_c 的理想离散低通滤波器时, 整个连续时间系统则为截止频率为 $\Omega_c = \omega_c/T$ 的理想连续时间低通滤波器

结论2: 若 $\Omega_N T < \omega_c < (2\pi - \Omega_N T)$ 整个系统输出可无失真重构输入的连续时间信号, $y_r(t) = x_c(t)$

结论3: 离散时间系统输入信号有混叠时, 如果混叠分量被滤除掉, 即要求: $\omega_c < (2\pi - \Omega_N T)$

