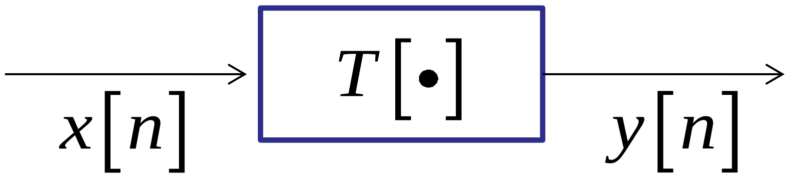
第二章：离散时间信号与系统

□ 离散时间系统定义

- **离散时间系统**——将输入序列**映射**为输出序列的**变换**或**操作符**

$$y[n]=T\big[x[n]\big]$$



- **系统对两种典型信号的输出（响应）**
  - 单位脉冲响应——输入为单位脉冲序列的系统输出

$$h[n]=T\big[\delta[n]\big]$$

  - 单位阶跃响应——输入为单位阶跃序列的系统输出

$$h[n]=T\big[u[n]\big]$$

□ 常用系统（输入和输出关系表达式表示）

1、回响系统： $y[n]=x[n]+ax[n-n_d]$

2、累加系统： $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

3、延迟系统： $y[n]=x[n-n_d]$

4、滑动平均： $y[n]=\dfrac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x[n-k]$

□ 常用系统（续）

5、压缩系统：（下采样） $y[n]=x[Mn],\quad -\infty<n<\infty$

6、后向差分： $y[n]=x[n]-x[n-1]$

7、前向差分： $y[n]=x[n+1]-x[n]$

相同点：
晚出现的值-早出现的值/
序号大的值-序号小的值

不同点：
后向：当前值-过去（过后）值
前向：未来（超前）值-当前值

2.2 离散时间系统

■ 离散时间系统分类

1、无记忆系统：

2、线性系统：

3、时不变系统：

4、因果系统：

5、稳定系统：

2.2.1 无记忆系统

□ 无记忆系统定义：

在每一个 n值(时刻)上的输出 $y[n]$只决定于同一 n 值的输入 $x[n]$。（当前时刻的输出仅取决于当前时刻的输入，即系统中没有可以记忆数据的单元，如寄存器）

◆无记忆系统示例

$$y[n]=a(x[n])^2$$

◆非无记忆系统示例

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

判断方法：

判断输出中是否有序号与当前序号n不同的项

2.2.2 线性系统

□ 线性系统定义（叠加原理）

$y_1[n]$和 $y_2[n]$分别是输入为 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$时某一系统的响应，对于线性系统，**当且仅当**下式成立：

$$\begin{cases} T\{x_1[n]+x_2[n]\}=T\{x_1[n]\}+T\{x_2[n]\}=y_1[n]+y_2[n] \\ T\{ax[n]\}=aT\{x[n]\}=ay[n] \end{cases}$$

◆线性系统示例

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

◆非线性系统示例

$$y[n]=(x[n])^2$$

判断方法：
令$x[n]=x_1[n]+x_2[n]$，判断输出**是否是**分别输入$x_1[n]$和$x_2[n]$的输出之和

2.2.3 时不变系统

□ 时不变系统定义（延迟不变性）

系统对所有 n_0 ，值为 $x_1[n]=x[n-n_0]$ 的输入序列将产生值为 $y_1[n]=y[n-n_0]$ 的输出序列。

◆时不变系统示例

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

◆时变系统示例

$$y[n]=x[Mn]$$

判断方法:
令$x[n]=x[n-n_0]$，判断输出是否与原输出延时n_0的值相同

令输入为$x[n-n_0]$，则

对$x[n-n_0]$进行M倍的下采样后的输出为
$y'[n]=x[Mn-n_0]$

直接对$y[n]$时移n_0后的输出为
$y[n-n_0]=x[M(n-n_0)]$

$y'[n]\neq y[n-n_0]$

2.2.4 因果系统

□ 因果系统定义

系统对任意选取的 n_0，输出序列在 $n=n_0$ 的值**仅取决于**输入序列在 $n\le n_0$ 的值。

◆因果系统示例

$$y[n]=x[n-n_d],\quad n_d\ge 0$$

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

判断方法:
令 $n=n_0$，判断输出中是否有序号大于 n_0 的项

◆非因果系统示例

$$y[n]=x[n+1]-x[n]$$

2.2.5 稳定系统

□ 稳定系统定义

当且仅当每一个有界的输入序列都产生一个有界的输出序列，则称该系统在有界输入有界输出（BIBO）意义下是稳定的。

- BIBO

$$|x[n]| \le B_x < \infty \quad \text{，对所有 } n$$

$$|y[n]| \le B_y < \infty \quad \text{，对所有 } n$$

B_x，B_y 为有限正数。

2.2.5 稳定系统（续）

◆ 稳定系统示例

$$y[n]=\left(x[n]\right)^2$$

◆ 非稳定系统示例

$$y[n]=\log 10\left(\left|x[n]\right|\right)$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

判断方法：
令输入为任意幅度有限值，判断输出是否会出现幅度无限的项

◆线　性　性：叠加原理

◆时不变性：延迟不变性

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

一个线性时不变系统（LTI）完全由其**单位脉冲响应** $h[n]$ 来表征。

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

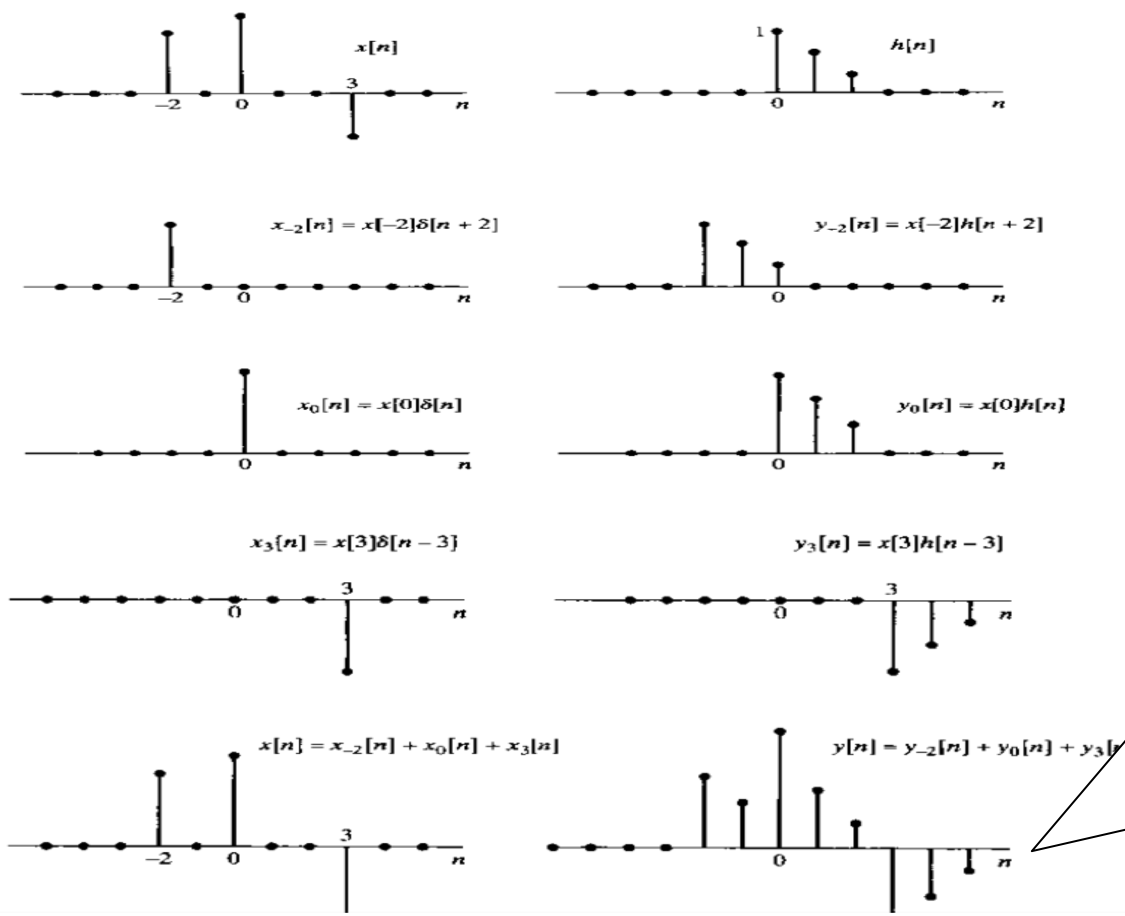
输出为系统 $h[n]$ 的加权和

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

输出为输入 $x[n]$ 的加权和

2.3 线性时不变系统

LTI系统的输出可表示为系统分别对各单个输入样本响应的叠加



任何序列都可表示为单位脉冲序列$\delta[n]$的时延加权和

系统（卷积）输出可理解为单位脉冲响应的延时加权和

结论：若系统的输出可表示为输入与其单位脉冲响应的卷积，则该系统必然是LTI系统

◆卷积（和）示例

$$h[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & other\end{cases}$$

$$x[n]=\begin{cases}a^n & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

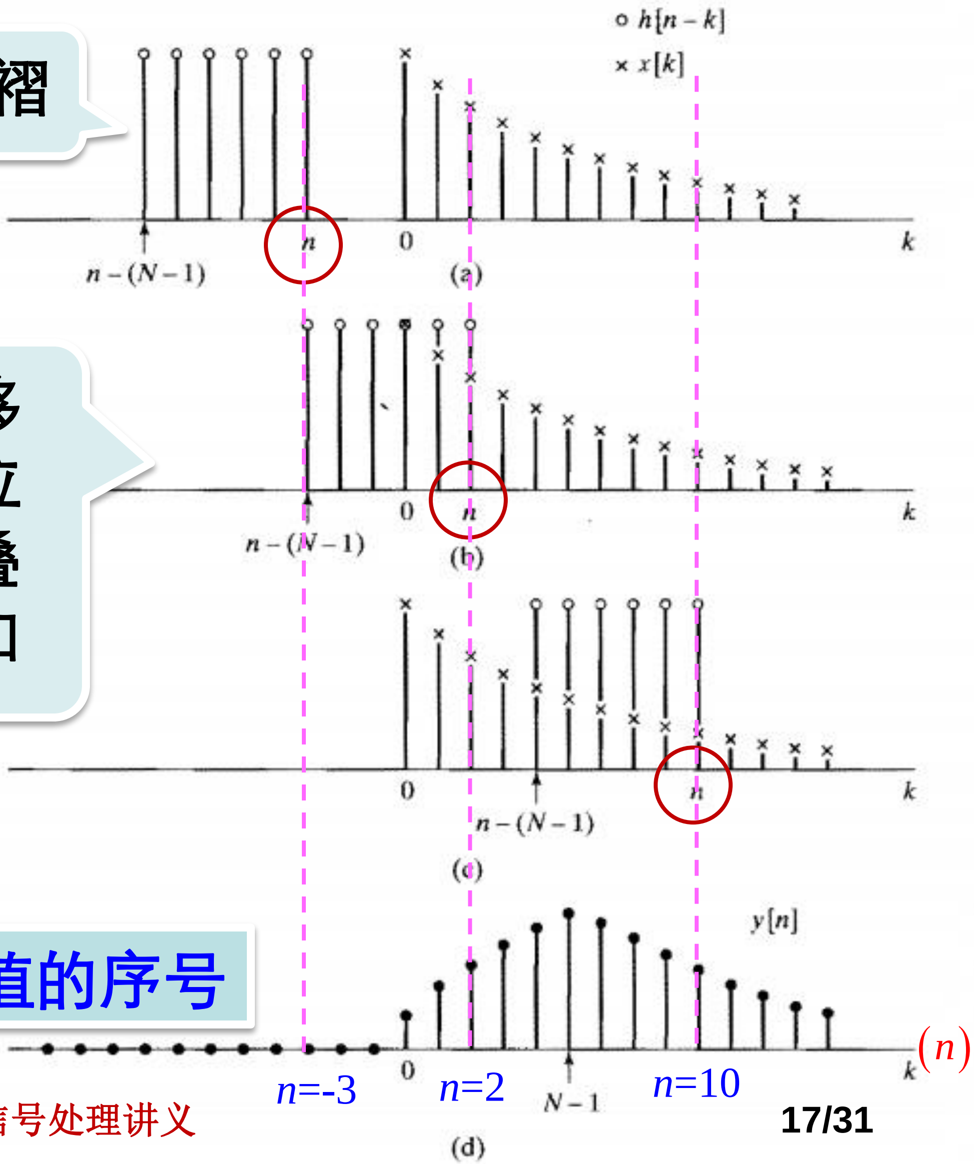
$$y[n]=x[n]*h[n]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

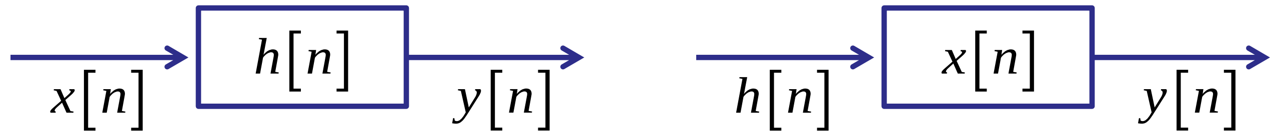
反褶

移位叠加

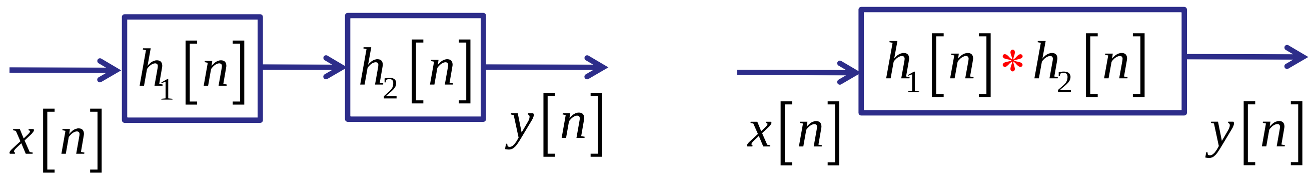


n的位置决定输出序列样值的序号

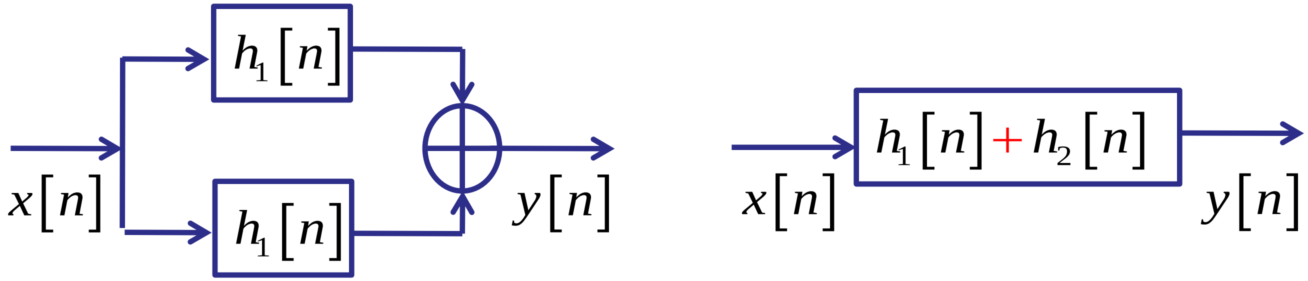
- 交换性：



- 级联联接：



- 并联联接：



2.4 线性时不变系统性质（2）

◆ 稳定性： $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h[n]\right|<\infty$ 绝对可和

◆ 因果性： $h[n]=0,\quad n<0$

➢ 有限脉冲响应（FIR）： 系统单位脉冲响应只有有限个非零值

➢ 无限脉冲响应（IIR）： 系统单位脉冲响应有无限个非零值

对于LTI系统，其性质可由其单位脉冲响应决定。

2.4 线性时不变系统性质（3）

□ LTI系统性质示例（基于单位脉冲响应直接判断）

理想延迟：$h[n]=\delta[n-n_d]$，n_d 为正整数

稳定（ √ ），因果（ √ ），有限（ √ ）

滑动平均：
$$h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}\delta[n-k]$$

M_1, M_2：为正整数，且<∞

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1\le n\le M_2\\ 0, & other\end{cases}$$

稳定（ √ ），因果（ × ），有限（ √ ）

2.4 线性时不变系统性质（3）

LTI系统示例（2）

累加器： $h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$

稳定（ ✕ ），因果（ √ ），有限（ ✕ ）

后向差分： $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

稳定（ √ ），因果（ √ ），有限（ √ ）

前向差分： $h[n]=\delta[n+1]-\delta[n]$

稳定（ √ ），因果（ ✕ ），有限（ √ ）

2.4 线性时不变系统性质（4）

□ 逆系统

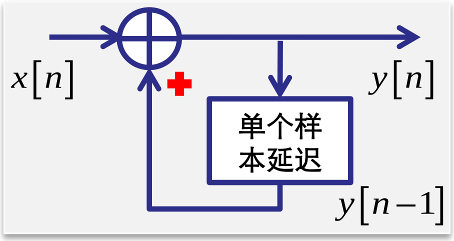
◆ 逆系统定义

若 $$h[n]*h_i[n]=\delta[n]$$

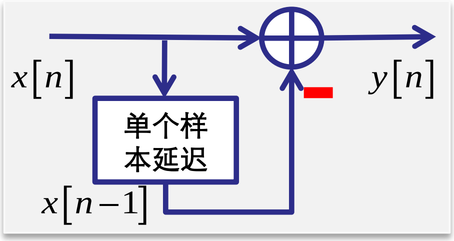
则 $h[n]$ 与 $h_i[n]$ 互为**逆系统**。

◆ 逆系统示例

累加器： $$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=u[n]$$



后向差分： $$h_i[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$



$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

2.5 线性常系数差分方程

系统的输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足N阶线性常系数差分方程通用表达式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

◆ 线性常系数差分方程特点

1）**无限/有限**：第n个输出值不仅取决于该时刻的**输入值**，而且与以前的**输出值**有关，则为无限脉冲响应；否则有限脉冲响应

2）**线性**: $y[n-k]$ 和 $x[n-m]$ 项都只有**一次幂**

3）**常系数**：方程中 a_k 和 b_m 为**常数（时不变）**

4）**阶数**：差分方程中 $y[n]$ 项的最高**延时序号**，一般$N > M$

◆ 累加器的差分方程表示

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

线性累加表示：
无限项，不可实现结构

$$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]$$

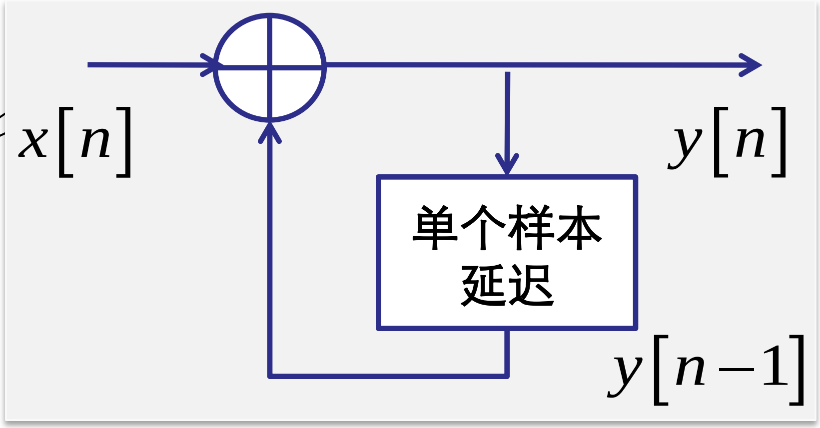
递推表示：

$$y[n]=y[n-1]+x[n]$$

差分方程表示：

$$y[n]-y[n-1]=x[n]$$

差分方程表示：
有限项，可实现结构



◆ 差分方程递推求解

$$y[n]=ay[n-1]+x[n]$$

输入 $x[n]=K\delta[n]$，K 为任意数，辅助条件 $y[-1]=c$ 。

求：对全部 n ，$y[n]$ 的取值表达式。

解： 1）对于 $n\geq 0$

$$y[0]=ac+K$$

$$y[1]=ay[0]+0$$

$$=a(ac+K)=a^2c+aK$$

$$y[2]=a(a^2c+aK)=a^3c+a^2K$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

推导可得： $y[n]=a^{n+1}c+a^nK,\quad n\geq 0$

◆ 差分方程递推求解（续）

$$y[n]=ay[n-1]+x[n]$$
$$y[-1]=c$$

2）对于 $n<0$

差分方程改为 $y[n-1]=a^{-1}\left(y[n]-x[n]\right)$

递推如下：

$$y[-2]=a^{-1}\left\{y[-1]-x[-1]\right\}=a^{-1}c$$
$$y[-3]=a^{-1}y[-2]=a^{-2}c$$
$$y[-4]=a^{-1}y[-3]=a^{-3}c$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

推导可得： $y[n]=a^{n+1}c,\quad n<0$

$$y[n]=a^{n+1}c+a^{n}K,\quad n\geq 0$$

综上，对于全部 n 取值范围，可得：

$$y[n]=a^{n+1}c+Ka^{n}u[n]$$

若某项仅在 $n<0$ 时有值，则该项乘以 $u[-n-1]$