3.1设二进制对称信道的概 率转移矩阵为：$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

1)若$p(x_0)=3/4, p(x_1)=1/4$。求$H(X), H(X/Y), H(Y/X), I(X;Y)$

2)求该信道的信道容量及 达到信道容量时的输入 概率分布。

1)$H(X)=-\sum p\log p=3/4\log 4/3+1/4\log 4=0.811b$

由于$p(Y/X)$条件概率矩阵已经给出 ，因此先计算$H(Y/X)$是方便的。

$H(Y/X)$就是条件概率矩阵中各 个$H(line)$关于对应$p(x)$的统计平均。

$$H(Y/X)=\frac{3}{4}H(\frac{2}{3},\frac{1}{3})+\frac{1}{4}H(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=0.918b$$

$H(XY)=H(Y)+H(X/Y)$,因此计算$H(X/Y)$需要计算$H(XY)$和$H(Y)$

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X)=1.729b$$

$p(y)$用全概率公式，$p(y_0)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}, p(y_1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$

$$H(Y)=0.980b$$

$$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=0.749b$$

当然也可以用贝叶斯公 式来计算$p(X/Y)$矩阵,然后求$H(X/Y)$

$I(X;Y)=H(X)-H(Y/X)=0.062b$

$=H(Y)-H(X/Y)=0.062b$

2)这是个对称信道，因此信道在输入概率分布为等概率分布时

达到信道容量, $p(X)=(1/2,1/2)$

$C=\log m-H(Line)=\log 2-H(1/3,2/3)=0.082b$

此时$p(Y)$一定也是$(1/2,1/2)$

3.2某信源发送端有 2个符号， $x_i, i=1,2;\ p(x_1)=a,$ 每秒发错一个符号。接 收端有 3种符号 $y_j, j=1,2,3,$ 转移概率矩阵为 $p=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

(1)计算接收端的平均不确 定度;

(2)计算由于噪声产生的不 确定度 $H(Y/X)$;

(3)计算信道容量。

(1) : 所谓不确定度，就是 $H(Y)$。

Y的不确定度和 X是相关的，因为我们发 送X后才能收到 Y。这是关联事件。

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{2}p(x_iy_j)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)p(y_j/x_i)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{a}{4} & \frac{1}{4}-\frac{a}{4}\end{pmatrix}$$

其中$p(x_2)=1-a,$概率归一化。

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j)\log\ p(y_j)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(\frac{1}{4}(1+a))-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(\frac{1}{4}(1-a))$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(1-a)$$

(2)计算由于噪声产生的不 确定度$H(Y/X)$;

根据$H(Y/X)$的定义

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}-p(x_i y_j)\log p(y_j/x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}-p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

$$=a\frac{1}{2}\log 2+a\frac{1}{2}\log 2+0+(1-a)\frac{1}{2}\log 2+(1-a)\frac{1}{4}\log 4+(1-a)\frac{1}{4}\log 4$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{a}{2}$$

(3)计算信道容量。

观察信道矩阵，不是对 称或者准对称。那么只 能用概念硬算。

信道容量是信道单位信 息(符号)可以携带的最大信息率 。

也就是信道输出关于信 道输入的最大互信息。

$C=\max R$,直接把a当作变量。

$$R=I(x;y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(1-a)-(\frac{3}{2}-\frac{a}{2})$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(1-a)$$

求其关于自变量a的极值。对a求导等于0

$$\frac{dR}{da}=\frac{1}{2}-(\frac{1}{4}\log_2(1+a)+\frac{\log_2 e}{4})-(-\frac{1}{4}\log_2(1-a)-\frac{\log_2 e}{4})=0$$

$\frac{1}{4}\log_2(\frac{1+a}{1-a})=\frac{1}{2},a=\frac{3}{5}$。代入$C=0.16b/s$

信源输入概率分布为$(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$时，信息传输率达到信 道容量。

3.5求下列两个信道的信道 容量，并加以比较：

$$(1).\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix},(2)\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

(1)

首先观察信道矩阵，准 对称，不需要用定义求 极大值了。

准对称信道输入等概率 时达到信道容量, $p(x) = \text{常数} = \frac{1}{2}$。

那么直接计算R需要的记忆量最小。

$$R = I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$p(y) = \sum_x p(x)p(y/x) = (\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon, 2\varepsilon),$$

$$H(Y) = (2\varepsilon - 1)\log(\frac{1}{2}-\varepsilon) - 2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$$H(Y/X) = -\sum_y \sum_x p(x)p(y/x)\log p(y/x)$$

$$= -(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon) - (p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon) - 2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$$C = 1-(1-2\varepsilon)\log(1-2\varepsilon) - 2\varepsilon\log(4\varepsilon)$$

$$+(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon) + (p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon) + 2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$$(1).\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

懒得算，喜欢记公式的，先把准对称矩阵分成 对称的子矩阵

$$\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{array}\right]$$

用公式准对称矩阵的信 道容量

$$C = \log n + \sum_j p_{ij} \log p_{ij} - \sum_{k=1}^{r} N_k \log M_k$$

n是行数，i任取一行，有两个子矩 阵k取1,2。N_k是对应子矩阵行求和

M_k对应子矩阵列求和。

$$C = 1-(1-2\varepsilon)\log(1-2\varepsilon) - 2\varepsilon\log(4\varepsilon)$$

$$+(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon) + (p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon) + 2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

与刚才一致，这个方法 还是要快些的。

$$(2)\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{array}\right]$$

$$C = 1-(1-2\varepsilon)\log(1-2\varepsilon)-2\varepsilon\log 2\varepsilon$$

$$+(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon)+(p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon)+2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$tips$：这儿概率的0是无限小。

（3）两个信道容量除了 $-2\varepsilon\log 4\varepsilon, -2\varepsilon\log 2\varepsilon$都一样。

而$\varepsilon > 0$所以,$C_1 - C_2 = 2\varepsilon\log\dfrac{1}{2} < 0$,第二个信道容量较大。

3.7。发送端有3种等概率符号(x_1, x_2, x_3), $p(x_i)=1/3$, 接收端收到3种符号，

(y_1, y_2, y_3), 信道转移矩阵为： $P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

(1)接收端收到一个符号后 得到的信息量$H(Y)$

(2)计算噪声熵$H(Y/X)$;

(3)计算接收端收到一个符 号y_2的错误概率；

(4)计算从接收端看的平均 错误概率；

(5)计算从发送端看的平均 错误概率；

(6)从转移矩阵中能看出该 信道好坏吗？

(7)计算发送端的$H(X)$和$H(X/Y)$。

(1)接收端收到一个符号后 得到的信息量$H(Y)$

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i)p(y_j/x_i)=(1/3,1/2,1/6)$$

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j)\log p(y_j)=1.46b/s$$

(2)计算噪声熵$H(Y/X)$;

$$H(Y/X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)=1.18b/s$$

(3)计算接收端收到一个符 号y_2的错误概率；

错误在这里指的是x_i经过信道变成$y_j, i\neq j$。在信道编码中错误概率，平均错误概率在 译码中是个有意义的参 数。

收到y_2错误，那就是指这个y_2对应的输入是x_1,x_3

这个概率$=(p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_3)p(y_2/x_3))/p(y_2)=0.8$

当然也可以用$1-p(x_2)p(y_2/x_2)/p(y_2)=0.8$

(4)计算从接收端看的平均 错误概率；

平均错误概率指收到一 个符号的错误概率，那 么就是收到y_1, y_2, y_3错误概率的统计平均。

y_1的正确概率$p(x_1/y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1)/p(y_1) = 0.5$

y_2的正确概率$p(x_2/y_2) = p(x_2)p(y_2/x_2)/p(y_2) = 0.2$

y_3的正确概率$p(x_3/y_3) = p(x_3)p(y_3/x_3)/p(y_3) = 0$

贝叶斯公式中传输正确 的项。

平均错误概率为$p(y_1)\times 0.5 + p(y_2)\times 0.8 + p(y_3)\times 1 = 11/15 = 0.73$

(5)计算从发送端看的平均 错误概率；

发送端看的错误概率是 输入一个x_i得到$y_j\,(i \neq j)$的概率。

x_i正确的概率即为$p(y_i/x_i) = (0.5,0.3,0)$

平均错误概率为$\sum_{i=1}^{3} p(x_i)(1 - p(y_i/x_i)) = 0.73$

每一个输入符号的错误 / 正确概率与对应的输出 符号错误 / 正确概率未必相等，但是这 两个平均错误概率，或 者平均正确概率必须相等，直接从物理 上想一下，如果错误概 率不等，一定出现输入认为正确，输出 认为错误的情况。这时 不可能的。数学上看这个两个平均概率 就是联合概率的求和， 当然每一项都相等，更不用说总的求和 了。

虽然用联合概率理解起 来很容易，正确的概率 当然就是x与对应y同时出现的概率。但是 联合概率还是要按照刚 才的公式才能计算出来，因此并不能作为 一个简便方法。

(6)从转移矩阵中能看出该 信道好坏吗？

除了x_3信道矩阵行中有个 0.9，x_1, x_2对应行的概率都相对接 近，我们知道如果等概率就完全 传送不了信息，信道矩 阵的行越接近等概率就越差，因此我们可以 认为这个信道不好。

(7)计算发送端的$H(X)$和$H(X/Y)$。

(7)计算发送端的$H(X)$和$H(X/Y)$。

$H(X)=\log 3=1.58b/s$

$H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)=R$

所以$H(X/Y)=H(X)-H(Y)+H(Y/X)=1.58-1.46+1.18=1.30b/s$

3.8.具有6.5MHz带宽的某高斯信道，若 信道中信号功率与噪声 功率谱密度之比为45.5MHz,求其信道容量。

一看到信噪比，没有特 殊说法那就是要你用加 性高斯白噪声信道模型来计算。再看到带宽 ，一定是所谓的限时， 限频，限功率的高斯信道。关于高斯信道的 公式，只能靠记忆。

$$C_t = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})$$

其中W是带宽，C_t信道容量是单位时间内 能通过的信息量，而非单位符号能携带的 信息量。

注意题目给的是信号功 率与噪声功率谱密度之 比：$\frac{P_S}{N_0} = 45.5MHz$

是个有单位的量。不是 信噪(功率)比$\frac{P_S}{N_0 W}$

因此

$$C_t = 6.5\log(1+\frac{45.5}{6.5}) = 19.5Mb/s\text{(比特兆赫兹)}$$

3.9。电视图像由30万个像素组成，对于适 当的对比度，一个像素 可取10个可辨别的亮度电平， 假设各个像素的10个亮度电平都以等概率出现，实时传送电视 图像每秒发送30帧图像。为了获得满意 的图像质量，要求信号与噪 声的平均功率比值为$30dB$，试计算在这些条件下传送电视视频信号 所需的带宽。

一看到信噪比，没有特 殊说法那就是要你用加 性高斯白噪声信道模型来计算。再看到带宽 ， 一定是所谓的限时， 限频，限功率的高斯信道。关于高斯信道的 公式，只能靠记忆。指 望象对称，准对称信道那样现算是不行 的。

$C_t = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})$,其中$W$是带宽， C_t信道容量是单位时间内 能通过的信息量，而非单位符 号能携带的信息量。$\frac{P_S}{N_0 W}$是信噪功率比。

信噪比已经知道。要求 带宽，必须知道最小 C_t

根据题意，计算单位时 间内需要传输的信息量 。

每秒传输的像素为$30\times 3\times 10^5=9\times 10^6$，每个像素有10种可能取值。

由于10个可能取值等概率出现 。那么每传送一个电平 值的信息量

为$H(X)=\frac{1}{10}\log 10\times 10$

因此最少每秒的信息量

为$C_t=\log 10\times 9\times 10^6=2.99\times 10^7 b/s$

而根据dB的定义$10\log SNR=30$,则$SNR=1000$

代入公式$W=C_t/\log(1+SNR)=0.30\times 10^7 Hz$

这边可以看出用奈特要 方便的多$\lg 10=1, \lg 1001=3$。

3.12。有一个二元对称信道，其信道转移概率如图$3-21$所示。设该信道以1500个二元符号$/s$的速度输入符号。现有 一消息序列共有14000个二元符号，并设在这 消息中$p(0)=p(1)=1/2$，问从信息传输的角度来考虑,10秒钟内能否将这消息序 列无失真的传输完？

根据图先写出信道矩阵$\begin{pmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}$

这又是一个看单位时间 内的信息量与信道容量 大小的问题。

先算单位时间内的信息 量

$R=\log 2=1b/s, R_t=14000\ R/t=1400\,b/\sec$。

二元对称信道

信道容量$C=\log 2+0.98\log 0.98+0.02\log 0.02=0.86b/s$,

$C_t=1500\times 0.86=1290\,b/\sec$

信息论告诉我们10s内一般是传不完的。信 息论毕竟是门概率的学科，运气足够好当然 也是能正确传输的，这 就是不是信息量概念的内容了。

4.3。设输入符号与输出符 号X和Y均取值于(0,1,2,3)，且输入信号的分布为 等概率分布，设失真矩阵 为$d=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

求$D_{\min}, D_{\max}, R(D_{\min}), R(D_{\max})$,以及相应的编码器转移 矩阵。

1.求$D_{\min}$,平均失真的最小值。

失真矩阵每行都有一个 0，所以$D_{\min}=0$

$R(D_{\min})=H(X)=\log 4=2b/s$

编码器转移矩阵就是假 想信道矩阵，写法 0变1,1变0

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.求D_{max}，其概念是使得信息传 输率等于0的最小平均失真。物理 上来说就是允许失真到了这个 程度就可以不用传信息 了。

如前所述D_{max}等于信源概率矢量乘以 失真矩阵后形成矢量中 最小的分量。

$$(1/4,1/4,1/4,1/4)\times\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}=(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$$

都是$\frac{3}{4}$，含义是这4项对平均失真的贡献一 样大，随便选一个就行，

我们就选第一个。$D_{max}=\frac{3}{4}$

对应的假想信道矩阵为 选取最小值对应列全为1,其它为0

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$，根据定义此时$R(D_{max})=0$

$$(1/4,1/4,1/4,1/4)\times\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$$

都是$\frac{3}{4}$，含义是这4项对平均失真的贡献一 样大，随便选一个就行，

贡献前面乘的是$p(y)$,而$p(y)=p(y/x)$

所以假想矩阵的一般形 式为$\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ a & b & c & d\\ a & b & c & d\\ a & b & c & d\end{bmatrix}$

$a+b+c+d=1$

4.5。具有符号集合 $U=(u_0,u_1)$的二元信源，信源发生 概率为：$p(u_0)=p, p(u_1)=1-p, 0<p\le 1/2$。$Z$信道如图所示，接收符 号集$V=(v_0,v_1)$, 转移概率为：$q(v_0/u_0)=1, q(v_1/u_1)=1-q$。发出符号与接收符号的失真：$d(u_0,v_0)=d(u_1,v_1)=0, d(u_1,v_0)=d(u_0,v_1)=1$。

(1), 计算平均失真 $\overline{D}$;

(2), 率失真函数$R(D)$的最大值是什么？当 q为什么值时可以达到最大值？此时平均失真 $\overline{D}$是多大？

(3), 率失真函数$R(D)$的最小值是什么？当 q为什么值时可以达到最小值？此时平均失真 $\overline{D}$是多大？

(4), 画出$R(D)-D$的曲线。

题目罗里罗嗦一大堆就 是告诉大家信源概率分 布$(p,1-p)$

失真矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，限制假想信道矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$。

(1)计算平均失真$\overline{D}$,就是失真统计平均。

把输入与输出的联合概 率算出来，乘上对应的 失真矩阵元，求和。

$\overline{D}=q(1-p)$

(2)根据$R(D)-D$曲线，率失真函数的最 大值就是在$\overline{D}=D_{\min}$

这个失真矩阵满足第一 行第二行都有0，所以$D_{\min}=0$

率失真函数最大值为$R(0)=H(X)=-p\log p-(1-p)\log(1-p)$

此时信道矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，对比原信道矩阵可知$q=0.$

此时的平均失真$\overline{D}=D_{\min}=0$

(3)率失真函数在$\mathrm{D}_{\max}$时最小，且值为0

$\{p,1-p\}*\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\{1-p,p\}$,由于$p$大于$1/2$所以$p>1-p$。

$\mathrm{D}_{\max}=1-p$,此时信道矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，对比原信道矩阵可知$q=1$

（4）图，y轴上取一点，$D=0,H(X)$,

x轴上取一点，$D=D_{\max},R=0$

画条凹曲线即可。

第4章的东西，如果指望掌 握定义自己来推导，一 般都比较麻烦。

不排除考试的时候可能 会出现用定义算过程也 不复杂的题目。

指望融会贯通的还是要 掌握概念和定义。

指望最小代价应付考试 的，就记那些流程。