

电磁场与电磁波理论

(第三版)

徐立勤 制作



第 4 章

第4章 恒定电场与恒定磁场

主 要 内 容

在静电场中的导体，电荷只能分布在其表面，不会形成电流。如果有某一种电场可以将导体上某一端的电荷移向导体的另外一端，那就在导体中形成了电流。若导体中存在的是恒定电流，则对应的推动导体中电荷运动的电场就称为恒定电场。同时，当导体中存在恒定电流时，在导体的内部和外部还会产生恒定磁场。

第4章 恒定电场与恒定磁场

主 要 内 容

- 4.1 恒定电场基本方程与边界条件
- 4.2 恒定电场的电位与静电比拟法
- 4.3 恒定磁场基本方程与边界条件
- 4.4 矢量磁位和标量磁位
- 4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

第4章 恒定电场与恒定磁场

基 本 要 求

- ♥ 掌握恒定电场的基本方程和边界条件；
- ♥ 掌握静电比拟法的基本概念；
- ♥ 掌握恒定磁场的基本方程和边界条件；
- ♥ 掌握恒定磁场的矢量磁位和标量磁位的基本概念；
- ♥ 掌握恒定磁场的能量和载流回路的电感的基本概念。

4.1 恒定电场基本方程与边界条件

- 恒定电场的基本概念
 - 当导体中的电流恒定时，电荷就处于一种动态平稳状态，电荷分布不随时间而变化。此时在导体内部必然存在一个不随时间而变化的电场来驱动电荷做定向运动，这个电场就是导体内部的恒定电场。
 - 产生恒定电流的方式有很多，也就是恒定电场的源各不相同。例如：直流电机，干电池等等。
 - 我们仅仅讨论的是导体内部的恒定电场，并不涉及导体以外（包括产生恒定电场的源当中）的场。
 - 恒定电场也是时变电磁场的特殊情形。恒定电场基本方程和边界条件也是麦克斯韦方程组和时变电磁场的边界条件在各类场量均不随时间而变化时的特殊情形。

4.1 恒定电场基本方程与边界条件

4.1.1 导体内部恒定电场的基本方程

- 导体**内部**恒定电场的微分方程

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.1.2)$$

- 导体**内部**恒定电场的积分方程

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.1.4)$$

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.1.5)$$

- 欧姆定律微分形式的

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.1.3)$$

- ♥ 导体**内部**恒定电场的电位移矢量满足的方程与静电场一样

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

4.1 恒定电场基本方程与边界条件

4.1.2 导体内部恒定电场的边界条件

- 具有不同电导率 σ_1 和 σ_2 的两个导体的分界面的边界条件
- 采取第2章同样的方法，可以从积分方程得到边界条件。

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \quad (4.1.6)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n} \quad (4.1.7)$$

- ♥ 电场强度的切向分量和电流密度的法向分量是连续的。
- ♥ 电场强度的法向分量和电流密度的切向分量是不连续的。
- ♥ 两个导电媒质分界面上可以存在自由面电荷

$$\rho_S = D_{1n} - D_{2n} = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) E_{1n} = \left(\varepsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_2 \right) E_{2n}$$

4.1 恒定电场基本方程与边界条件

4.1.2 导体内部恒定电场的边界条件

● 边界条件的两个例子：

□ 接地良导体 $\sigma_2 \gg \sigma_1$

$$\begin{aligned} E_{1t} = E_{2t} &\Rightarrow \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ll 1 \\ &\Rightarrow J_{1t} \approx 0 \Rightarrow E_{1t} \approx 0 \end{aligned}$$

♥ 不良导体中的电流近似地与良导体表面垂直。

□ 理想介质中的良导体 $(\sigma_2 = 0, \sigma_1 \rightarrow \infty)$

$$\sigma_2 = 0 \Rightarrow J_2 = \sigma_2 E_2 = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n} = 0$$

♥ 良导体的表面只有切向电流。

♥ 细导线如何弯曲，电流线如何弯曲。

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.1 恒定电场的电位

- 恒定电场的位函数的定义——由矢量恒等式来定义的

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u = 0$$



$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$$

(4.2.1)

- ♥ 恒定电场的电位没有物理意义，仅仅是一个计算的辅助量。
- ♥ 恒定电场的电位只能通过求解微分方程得到。
- ♥ 根据静电比拟法可以将恒定电场与无源区的静电场相互转换。

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.1 恒定电场的电位

● 恒定电场的位函数的微分方程——拉普拉斯方程

➤ 线性各向同性的均匀导电媒质中 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ，且 σ 为常数

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\sigma \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = -\sigma \nabla^2 \Phi = 0$$



$$\nabla^2 \Phi = 0$$

(4.2.2)

♥ 线性和各向同性的均匀媒质中的体电荷密度恒为零，亦即不存在体电荷的（恒定电场没有泊松方程）。

$$\rho = 0$$

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.1 恒定电场的电位

- 恒定电场电位的边界条件

➤ 利用梯度的性质由场的的边界条件得到

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} E_{1t} = E_{2t} \\ J_{1n} = J_{2n} \end{array} & \begin{array}{c} E_t = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ J_n = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} \end{array} & \begin{array}{l} \Phi_1 = \Phi_2 \\ -\sigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \end{array}
 \end{array}$$

♥ 除非 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ ，否则两个导体分界面上一定存在自由面电荷。

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} = -\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\left(\varepsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_2 \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导

1. 恒定电场的功率损耗

- 恒定电场的功率损耗的基本概念
- ♥ 当电子在运动的过程中不断的与原子晶格点阵上的质子发生碰撞，把自身的能量传递给质子，使晶格点阵的热运动加剧，导体温度上升，产生了热能。这就是电流的**热效应**。由电能转换来的热能称为**焦耳热**。
- ♥ 虽然电场对电子做了功，但是电子的动能和势能并没有增加，也就是说，电子在运动过程中产生了**能量损耗**。
- ♥ 这种从电能到热能的转换是一种**不可逆转**的能量转换。

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导

1. 恒定电场的功率损耗

- 焦耳定律的微分形式和积分形式

- 导电媒质的功率损耗——电场在单位时间内的功率损耗

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq \vec{E} \cdot d\vec{l}}{dt} = I \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{J} dS \cdot \vec{E} d\vec{l} = \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

- 总的功率损耗

$$P = \int_V p dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \sigma E^2 dV \quad (4.2.7)$$

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导

1. 恒定电场的功率损耗

- 焦耳定律的微分形式和积分形式

- 功率损耗密度——焦耳定律的微分形式

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 \quad (4.2.6)$$

- 焦耳定律的积分形式

$$P = UI \quad (4.2.8)$$

- 欧姆定律的微分形式

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.1.3)$$

- 欧姆定律的积分形式

$$\frac{U}{I} = R \quad (4.2.10)$$

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

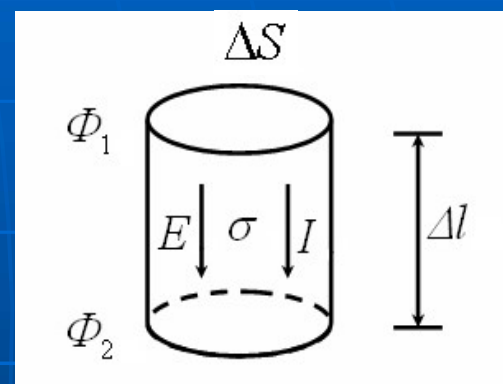
4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导

1. 恒定电场的功率损耗

□ 一小段电流均匀分布的导体（导电媒质）

➤ 焦耳定律

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = J \cdot E \cdot \Delta S \cdot \Delta l = (E \Delta l) \cdot (J \Delta S) = UI$$



➤ 欧姆定律

$$U = E \Delta l = \frac{J}{\sigma} \Delta l = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{\Delta S} I = RI$$

➤ 电阻定律

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$$

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导

2. 电容器的漏电导

- 漏电流——电容器中填充的介质材料具有一定的损耗时在导体之间存在的电流。电容器的损耗可以用漏电流通过电阻或电导时所产生的热损耗来等效。
- 电容器的漏电导——导体之间的漏电流与电位差的比值

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (4.2.11)$$

S ——导体的表面积 l ——导体之间的任意一条路径

$d\vec{S}$ 的方向是导体表面的外法线方向

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.3 恒定电场的静电比拟法

- 导体内（源区除外）恒定电场的基本方程以及边界条件与理想介质内（源区除外）静电场的基本方程和边界条件

源外的恒定电场

无源区的静电场

场方程

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

结构方程

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

位函数方程

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

边界条件

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad J_{1n} = J_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}$$

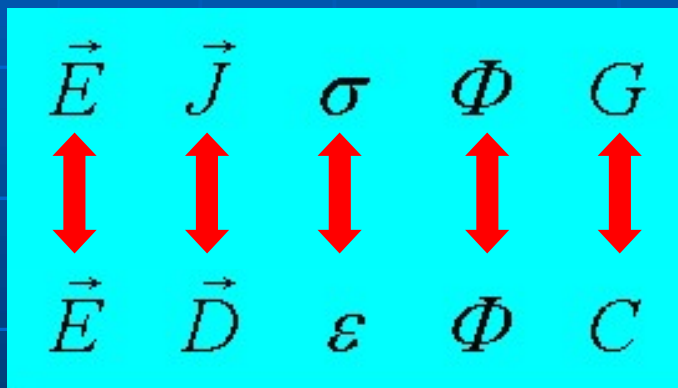
4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.3 恒定电场的静电比拟法

- ♥ 静电比拟法——借助静电场的计算方法或者计算结果来得到导体内恒定电场问题的解答。或者借助已有的导体内恒定电场的计算或实验结果得到静电问题的解答。

恒定电场

静电场



- ♥ 只有无源区的静电场才能与恒定电场相比拟，并且还要有类似的边界条件。
- ♥ 电容器的漏电导与电容也有类似的对应关系。

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.3 恒定电场的静电比拟法

♥ 常见简单电容器的电容和电导

| 电 容 器 | 电 容 | 漏 电 导 |
|--------------------------|---|--|
| 平板电容器 (d, S) | $C = \varepsilon \frac{S}{d}$ | $G = \sigma \frac{S}{d}$ |
| 同轴电容器 ($R_2 > R_1$) | $C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(R_2/R_1)}$ | $G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(R_2/R_1)}$ |
| 球形电容器 ($R_2 > R_1$) | $C = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ | $G = \frac{4\pi\sigma R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ |
| 孤立球体 (R) | $C = 4\pi\varepsilon R$ | $G = 4\pi\sigma R$ |

♥ 同轴电容器的电容和电导是指单位长度的电容和电导。

4.2 恒定电场的电位与静电比拟法

4.2.3 恒定电场的静电比拟法

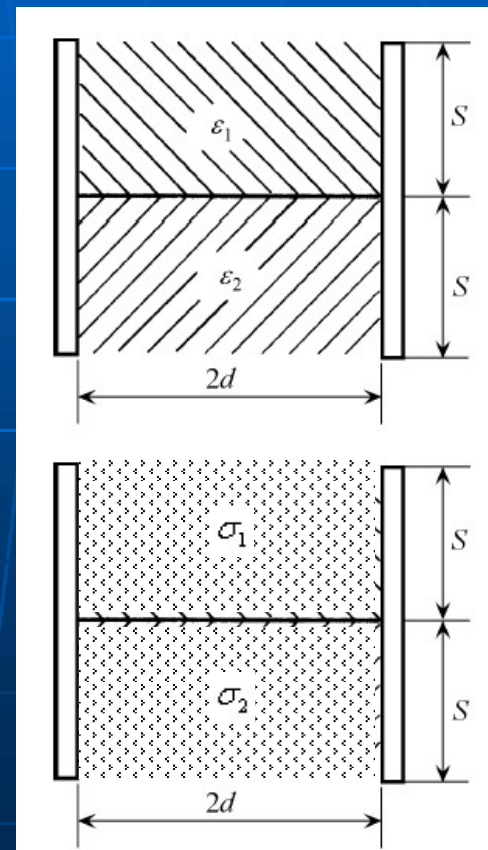
□ 如果将习题3.11 (a) 中的两种的理想介质换成两种导电媒质，试求电容器中电流分布以及电容器的漏电导。

解：根据直接积分法已经求得平板电容器中的电场分布和电容为

$$\vec{E} = -\vec{e}_x \frac{U_0}{2d} \quad C = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{S}{2d}$$

根据静电比拟法可知该电容器中电流分布以及电容器的漏电导

$$\vec{J}_1 = -\vec{e}_x \frac{\sigma_1 U_0}{2d} \quad \vec{J}_2 = -\vec{e}_x \frac{\sigma_2 U_0}{2d} \quad G = (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{S}{2d}$$



4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

- 恒定磁场的基本概念
- 对载有恒定电流的导体而言，它还在导体的内部和外部产生恒定磁场。
- 恒定磁场与恒定电场之间是相互独立的，可以分别进行讨论。
- 对于恒定磁场的分布型问题（已知无限大空间的所有的电流分布求磁场）的分析，可以直接利用安培定律或比奥—萨伐尔定律来计算，但是恒定磁场的边值问题还是需要利用恒定磁场的基本方程与边界条件。
- 恒定磁场也是时变电磁场的特殊情形。恒定磁场基本方程和边界条件也是麦克斯韦方程组和时变电磁场的边界条件在各类场量均不随时间而变化时的特殊情形。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.1 恒定磁场的基本方程

- 恒定磁场的积分方程

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.3.1)$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.3.2)$$

- ♥ 方程（4.3.1）为恒定磁场的安培环路定律。它表明，磁场强度沿任一闭合回路的环量等于穿过该回路所限定面积的**恒定传导电流**。
- ♥ 方程（4.3.2）为恒定磁场的磁通连续性定律。它表明，穿过任一闭合曲面的磁通始终等于零，不存在“**磁荷**”。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.1 恒定磁场的基本方程

- 恒定磁场的微分方程

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3.4)$$

- ♥ 方程（4.3.3）描述了恒定磁场的旋度特性，表明恒定磁场是一个有旋场。恒定磁场的磁力线总是围绕着电流。

- ♥ 方程（4.3.4）描述了恒定磁场的散度特性，表明恒定磁场是一个无源场。磁力线是闭合曲线。

- ♥ 恒定磁场的结构方程

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.3.5)$$

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.1 恒定磁场的基本方程

- 恒定磁场的微分方程

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3.4)$$

- ♥ 恒定磁场的微分方程形式可以从的麦克斯韦微分方程组直接得出。
- ♥ 也可以借助于高斯定理和斯托克斯定理从恒定磁场基本方程的积分形式推导出来。
- ♥ 还可以由体电流的比奥-沙伐尔定律直接计算旋度和散度得到。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.1 恒定磁场的基本方程

- 恒定磁场与静电场的比较

- ♥ 静电场是一个**无旋场**，电场强度的旋度处处为零；恒定磁场是一个有旋场，在空间的任一点上，磁场强度的旋度等于该点的恒定电流密度
- ♥ 恒定磁场是一个**无源场**，磁感应强度的散度都等于零；静电场是一个有源场，在空间的任一点上，电位移的散度等于该点的体电荷密度。
- ♥ 在静电场中，电力线起于正电荷止于负电荷，是一些**有头有尾**的曲线。在恒定磁场中，不存在作为“源”的磁荷，磁力线是一些无头无尾的**闭合曲线**。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.2 恒定磁场的边界条件

- 恒定磁场的边界条件的基本概念

- ♥ 像将导电率很大的金属材料近似视为理想导电体一样，可以将磁导率非常大的铁磁物质近似视为理想导磁体。
- ♥ 在理想导磁体中不存在磁场，就像在导电体中不可能存在静电场一样。（**导体中是可以有恒定电场和恒定磁场**）
- ♥ 研究恒定磁场所涉及到的媒质主要有**磁介质**（以磁化现象为主的物质）和**理想导磁体**（不存在磁场的媒质）。
- ♥ 恒定磁场的边界条件分为不同磁介质的分界面的边界条件以及理想导磁体表面的边界条件。
- ♥ 恒定磁场的边界条件可以由时变电磁场的边界条件直接得到，也可以由恒定磁场的积分方程推导得到。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.2 恒定磁场的边界条件

- 不同磁介质分界面上恒定磁场的边界条件的一般形式

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (4.3.6)$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (4.3.7)$$

- ♥ 磁感应强度的法向分量永远是连续的，磁场强度的切向分量仅仅当界面上不存在面传导电流密度时才是连续的。

- 不存在恒定的面传导电流密度时的边界条件 $J_s = 0$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (4.3.8)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (4.3.9)$$

- ♥ 即使不存在面传导电流，磁场强度的法向分量和磁感应强度的切向分量也是不连续的。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.2 恒定磁场的边界条件

- 恒定磁场的**折射定律**——在分界面上，若磁导率发生突变，则磁场的方向将发生突变。

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4.3.10)$$

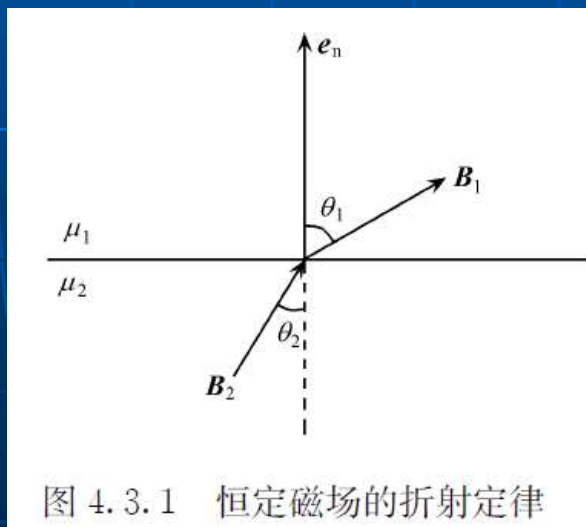


图 4.3.1 恒定磁场的折射定律

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

4.3.2 恒定磁场的边界条件

- 理想导磁体表面的边界条件

$$H_t = 0 \quad (4.3.11)$$

- ♥ 磁场强度永远垂直于理想导磁体的表面。
- ♥ 理想导磁面——处处与磁力线垂直的曲面（包括理想导磁体的表面）。
- 导体表面静电场满足的边界条件

$$E_t = 0$$

$$D_n = \rho_s$$

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

- 恒定磁场边值问题的求解
- ♥ 恒定磁场的求解与静电场的求解是一样，也可以分为**分布型问题**和**边值型问题**。
- ♥ 对于简单的分布型问题，只要直接利用**比奥-沙伐尔定律**就可以求出无限大空间内各种电流分布所产生的恒定磁场。
- ♥ 对于恒定磁场的边值问题，就可以采用在求解静电场边值问题所采用的各种分析方法来求解。例如，**直接积分法**、**分离变量法**、**镜像法**以及**数值计算**等等。
- ♥ 在分析恒定磁场时，也可以像静电场一样，通过引入**位函数**（下一节介绍）使得求解过程变得更简单。

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

● 恒定磁场边值问题的镜像法求解

□ 例4.3.1 如在理想导磁体平面上方放置一根与之平行的无限长直导线，该导线与导磁平面的距离为 h 。设导线上流有恒定电流 I ，试求导磁平面上方的磁场强度。

解：类似静电场的镜像法，为确保恒定磁场边界条件得到满足，即在导磁平面上总磁场的切向分量为零，可以在导磁平面下方的镜像位置上放置一根与原线电流大小相等、方向相同的恒定电流，用来取代导磁平面，等效地计算导磁平面上方的磁场，即

$$I' = I$$

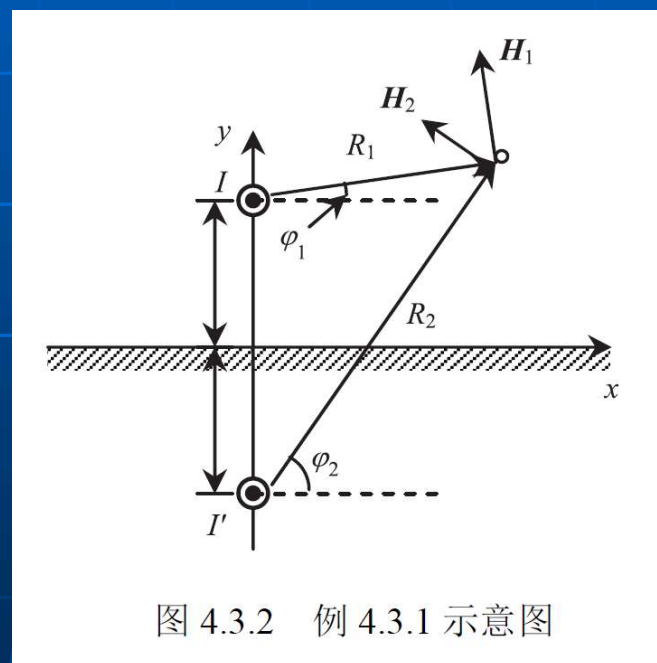
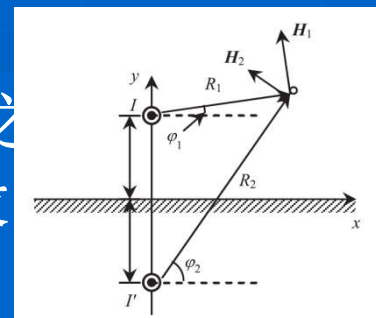


图 4.3.2 例 4.3.1 示意图

4.3 恒定磁场基本方程与边界条件

● 恒定磁场边值问题的镜像法求解

□ 例4.3.1 如在理想导磁体平面上方放置一根与之平行的长直导线，该导线与导磁平面的距离为 h 。设恒定电流 I ，试求导磁平面上方的磁场强度。



解：导磁平面上方任意点的磁场强度为

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{I}{2\pi} \left[-\vec{e}_x \left(\frac{y-h}{R_1^2} + \frac{y+h}{R_2^2} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{x}{R_1^2} + \frac{x}{R_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{I}{2\pi} \left\{ -\vec{e}_x \left[\frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2} \right] + \vec{e}_y \left[\frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{x}{x^2 + (y+h)^2} \right] \right\}\end{aligned}$$

♥ 可以验证在导磁平面上磁场的切向分量为零，即 $y=0$ 时

$$\vec{H} = \vec{e}_y \frac{Ix}{\pi(x^2 + h^2)}$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

1. 矢量磁位的定义

- 要在空间唯一地确定一个矢量场，必须同时知道这个矢量场的旋度和散度。

矢量磁位的旋度

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

矢量磁位的散度

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

——库仑条件或库仑规范

- ♥ 矢量磁位的散度可以任意给定。
- ♥ 要唯一地确定矢量磁位，还必须选定零位参考点。
- ♥ 矢量磁位没有物理意义，仅仅是一个计算的辅助量。

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

2. 矢量磁位的积分表示式

- 利用矢量恒等式由比奥-沙伐尔定律可得

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') \right] dV' = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right]\end{aligned}$$

- ♥ 与基本方程 $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ 比较, 可得矢量磁位的积分表示式。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \vec{C}$$

$$\vec{C} = \vec{e}_x C_x + \vec{e}_y C_y + \vec{e}_z C_z \quad \text{——待定常矢量}$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

2. 矢量磁位的积分表示式

- 有限的区域内不同电流分布的矢量磁位——取无穷远处为零位参考点。这样一来，就有 $\vec{C} = 0$ 。

体电流

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (4.4.8)$$

面电流

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \quad (4.4.16)$$

线电流

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.4.17)$$

- ♥ 不同的零位参考点，矢量磁位不同，但是磁场是唯一的。
- ♥ 矢量磁位和电流是同方向的。

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

2. 矢量磁位的积分表示式

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ 的验证——利用矢量恒等式+高斯定理

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S}' = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

- ♥ 设想将体积无限扩大，则在它的界面上的电流密度将必然等于零，从而上式中的闭合曲面积分等于零。

4.4 矢量磁位和标量磁位

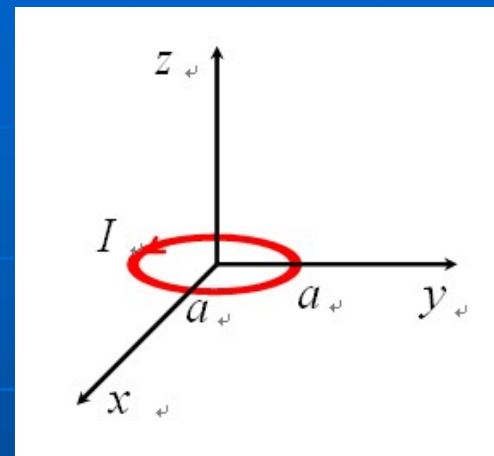
4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

2. 矢量磁位的积分表示式

□ 磁偶极子（小电流环）的磁场

➤ 磁偶极矩矢量 $\vec{p}_m = \mu_0 I S \vec{e}_z$

➤ 距离的近似计算（参见5.4节）



$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \left[r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \right]^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{r}{a} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r}{a} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \right] \end{aligned}$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

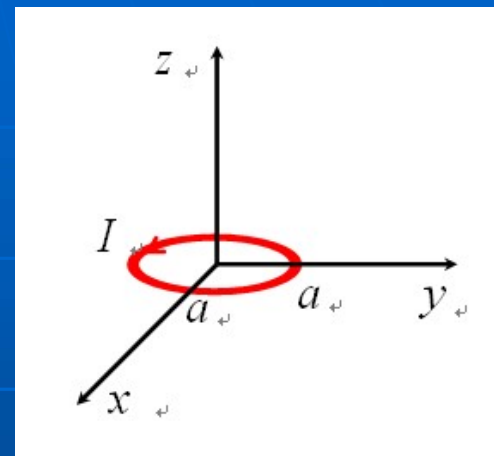
4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

2. 矢量磁位的积分表示式

□ 磁偶极子（小电流环）的磁场

➤ 磁偶极距矢量 $\vec{p}_m = \mu_0 I S \vec{e}_z$

➤ 磁偶极子的矢量磁位（参见5.4节）



$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{Id\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I}{R} a d\varphi' \\ &\approx \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I a}{2\pi r} \int_0^\pi \left[1 + \frac{r}{a} \sin\theta \cos(\varphi - \varphi') \right] \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \\ &= \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^2} \sin\theta = \frac{\vec{p}_m \times \vec{e}_r}{4\pi r^2}\end{aligned}$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

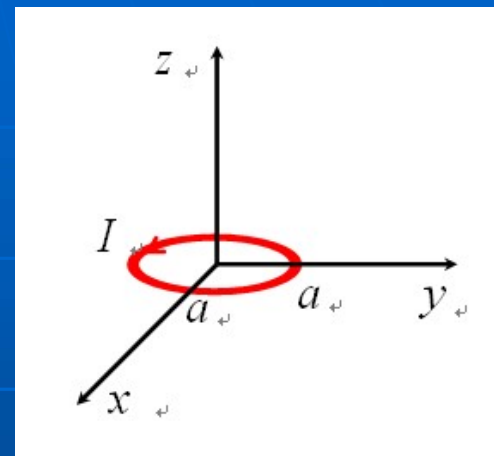
4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

2. 矢量磁位的积分表示式

□ 磁偶极子（小电流环）的磁场

➤ 磁偶极矩矢量 $\vec{p}_m = \mu_0 IS \vec{e}_z$

➤ 磁偶极子的磁场



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{IS}{4\pi r^2} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

3. 矢量磁位的泊松方程和拉普拉斯方程

- 由两个微分形式基本方程和矢量恒等式可以得到

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$



$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

- 由线性各向同性的媒质结构方程可以得到

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\mu \vec{H}) = \mu \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \mu \times \vec{H} = \mu \vec{J} + \vec{\nabla} \mu \times \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{\mu} \right)$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

3. 矢量磁位的泊松方程和拉普拉斯方程

- 均匀、线性和各向同性磁介质中**有源区**矢量磁位的泊松方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (4.4.18)$$

- 均匀、线性和各向同性磁介质中**无源区**矢量磁位的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (4.4.19)$$

- **非均匀**、线性和各向同性磁介质中矢量磁位的微分方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{\mu} \right)$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

3. 矢量磁位的泊松方程和拉普拉斯方程

- 在直角坐标系中的泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{e}_x \nabla^2 A_x + \vec{e}_y \nabla^2 A_y + \vec{e}_z \nabla^2 A_z$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= 0 \\ \nabla^2 A_y &= 0 \\ \nabla^2 A_z &= 0 \end{aligned}$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.1 恒定磁场的矢量磁位

3. 矢量磁位的泊松方程和拉普拉斯方程

- 恒定磁场矢量磁位的求解

- 矢量磁位的求解也可以分为**分布型**问题和**边值型**问题。
- 分布型问题可以直接利用矢量磁位的积分表示式求出。
- 对于边值问题的微分方程，可采用**直接积分法**（例**4.4.1**）、**分离变量法**以及**数值方法**求解。
- 矢量磁位的待定常数的确定同样也需要用到边界条件。不过，一般情况下，并不是直接利用矢量磁位的边界条件，而是根据磁场强度和磁感应强度的边界条件来确定**有用的待定常数**。

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.2 恒定磁场的标量磁位

1. 标量磁位的定义和标量磁位差

- 标量磁位的定义——只有在不存在传导电流的无源区域内，恒定磁场的旋度等于零，才可以定义标量磁位。

$$\begin{array}{ccc} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} & \xrightarrow[\vec{J} = 0]{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u = 0} & \vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m \end{array}$$

- 静电场和恒定电场的电位的定义

$$\begin{array}{ccc} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 & \xrightarrow{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u = 0} & \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi \end{array}$$

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.2 恒定磁场的标量磁位

1. 标量磁位的定义和标量磁位差

- 标量磁位的定义——只有在不存在传导电流的无源区域内，恒定磁场的旋度等于零，才可以定义标量磁位。

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m \quad (4.4.27)$$

- ♥ 标量磁位 Φ_m 只是一个计算的辅助量，单位是安培 (A)。
- ♥ $\Phi_m = \text{常数}$ 对应的是等磁位面。
- ♥ 磁场的方向垂直于等磁位面，指向标量磁位减小的方向。

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.2 恒定磁场的标量磁位

2. 标量磁位的拉普拉斯方程和边界条件

- 标量磁位的拉普拉斯方程——没有泊松方程
- 线性各向同性的均匀媒质的无源区

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi_m = 0$$



$$\nabla^2 \Phi_m = 0$$

(4.4.31)

4.4 矢量磁位和标量磁位

4.4.2 恒定磁场的标量磁位

2. 标量磁位的拉普拉斯方程和边界条件

- 标量磁位的边界条件

- 若在两种不同磁介质的分界面上不存在传导电流，则标量磁位的边界条件和静电场中的电位边界条件类似

$$\Phi_{m1} = \Phi_{m2} \quad (4.4.32)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial n} \quad (4.4.33)$$

- ♥ 式中， $\partial/\partial n$ 为标量磁位沿正法线方向的方向导数。界面的正法线方向规定为由第2介质指向第1介质。

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.1 恒定磁场的能量和能量密度

- 恒定磁场的能量的基本概念
- 磁场和电场一样具有能量，因为磁场能够推动运动电荷或载流导体做功。
- 磁场的能量是在建立磁场时，由外力或外加的电源做功转变而来的。
- 可以**类比于静电场**，直接得到恒定磁场的能量和能量密度。
- 磁场储能和能量密度的单位分别与电场储能和电场能量密度的单位一样，为焦耳和焦耳每立方米。
- 磁场存在于导体回路的外部，也存在于导体回路的内部。所以，磁场能量也将分布在载流回路的内部和外部。

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.1 恒定磁场的能量和能量密度

- 恒定磁场的储能和能量密度

能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (4.5.1)$$

磁场储能

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (4.5.3)$$

- 静电场的储能和能量密度

能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

电场储能

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

- 载流回路的电感的基本概念

- 电容——导体系统储存电场能量的能力

$$\text{电容 } C = \frac{Q(\text{电量})}{V(\text{电压})} = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

- 电感——导体载流回路储存磁场的的能力

$$\text{电感 } L = \frac{\Psi(\text{磁通})}{I(\text{电流})} = \frac{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}}$$

- ♥ 根据静电场的高斯定律，闭合曲面包围的电量就等于穿过该闭合曲面的电通量。

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

- 单一载流回路的自感——该载流回路产生的磁场的磁力线穿过该回路所包围的面积所交链的磁通与该载流回路的电流的比值

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{I} \quad (4.5.4)$$

- ♥ 曲面的正法线方向与回路的环绕方向符合右手螺旋关系。
- ♥ 自感仅与回路的形状以及周围磁介质有关，与电流的大小无关。
- ♥ 如果回路是有 N 匝的线圈，并且通过每一匝的磁通量都是 Ψ_m ，则有

$$L = \frac{N\Psi_m}{I} \quad (4.5.5)$$

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

● 两个相邻的载流回路互感

- 互感 M_{21} —— 回路 L_1 中的电流 I_1 产生的磁场穿过回路 L_2 所围的面积 S_2 所交链的磁通 Ψ_{m21} 与电流 I_1 的比值
- 互感 M_{12} —— 回路 L_2 中的电流 I_2 产生的磁场穿过回路 L_1 所围的面积 S_1 所交链的磁通 Ψ_{m12} 与电流 I_2 的比值

$$M_{21} = \frac{\Psi_{m21}}{I_1} \quad \Psi_{m21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{m12}}{I_2} \quad \Psi_{m12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}$$

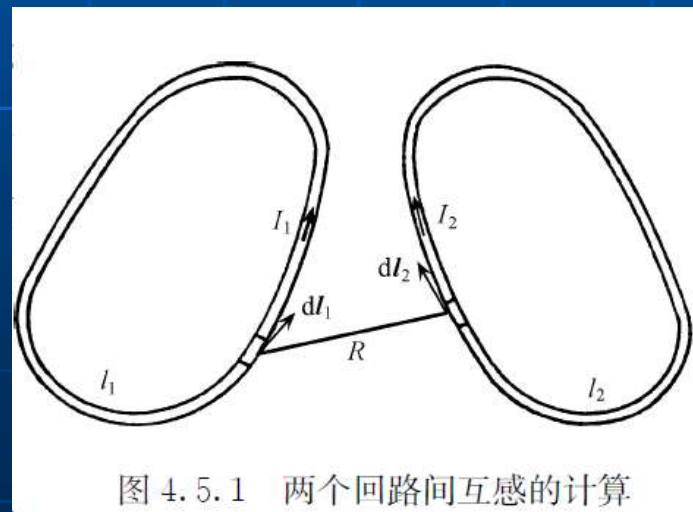


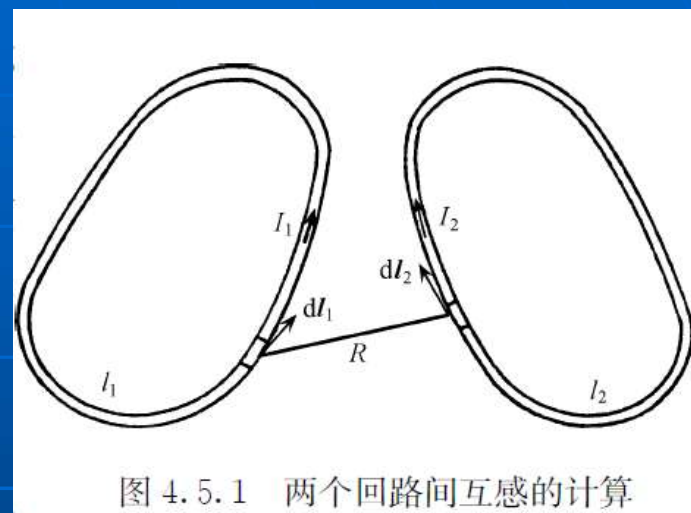
图 4.5.1 两个回路间互感的计算

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

- 计算互感的诺伊曼公式

$$M_{21} = \frac{\Psi_{m21}}{I_1} = \frac{\int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$$
$$M_{12} = \frac{\Psi_{m12}}{I_2} = \frac{\int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{R}$$



- 符合实验结果 $M = M_{12} = M_{21}$

- 互感只与两个回路的形状、相对位置以及周围的磁介质有关，而与两个回路中的电流无关。

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

● 自感的计算

➤ 利用诺伊曼公式计算自感

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$$

l_1, l_2 —— 细导线的轴线和细导线的内边缘

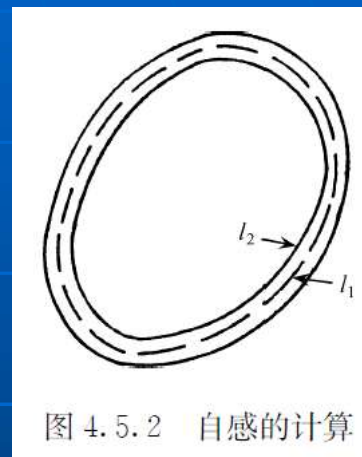


图 4.5.2 自感的计算

- ♥ 以上自感只是考虑了导线外部磁链，故又称为外自感 L_0 。
- ♥ 当导线具有一定截面时，导线内部同样存在磁链，而由这部分磁链与电流之间的比值定义的自感就称为内自感 L_i 。
- ♥ 两者之和即为总自感，即 $L = L_0 + L_i$

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

- 自感的计算

- 利用磁场储能计算电感

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} I \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} I \Psi_m$$



$$W_m = \frac{1}{2} I \Psi_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \rightarrow \quad L = \frac{2W_m}{I^2} \quad \longleftrightarrow \quad C = \frac{2W_e}{V^2}$$

♥ 只要求出了磁场的储能，就可以计算出载流回路的电感。

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

□ 例题4.5.1 试求无限长同轴线的单位长度电感。已知同轴线的内导体的半径为 R_1 ，外导体的半径为 R_2 ，外导体的厚度忽略不计。

解：设同轴线通过的电流为 I 。应用安培环路定律，求得同轴线中的磁感应强度为

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \quad (0 \leq \rho < R_1) \\ \vec{B}_2 &= \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (R_1 \leq \rho < R_2)\end{aligned}$$

同轴线单位长度内导体中所储存的磁场能量为

$$W_{\text{mi}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V |\vec{B}_1|^2 dV = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R_1^4} \int_0^{R_1} \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

□ 例题4.5.1 试求无限长同轴线的单位长度电感。已知同轴线的内导体的半径为 R_1 ，外导体的半径为 R_2 ，外导体的厚度忽略不计。

解：设同轴线通过的电流为 I 。应用安培环路定律，求得同轴线中的磁感应强度为

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \quad (0 \leq \rho < R_1) \\ \vec{B}_2 &= \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (R_1 \leq \rho < R_2)\end{aligned}$$

内外导体之间同轴线每单位长度所储存的磁场能量为

$$W_{m0} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V |\vec{B}_2|^2 dV = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感

4.5.2 载流回路的电感

□ 例题4.5.1 试求无限长同轴线的单位长度电感。已知同轴线的内导体的半径为 R_1 ，外导体的半径为 R_2 ，外导体的厚度忽略不计。

解：同轴线单位长度的总电感

$$L = L_i + L_o = \frac{2}{I^2} (W_{mi} + W_{mo}) = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

♥ L_i 和 L_o 分别是同轴线的内电感和外电感。

♥ 如果外导体的厚度不能忽略，那么还必须考虑外导体中的储能及其对应的电感。

第4章思考题

- 4.1 恒定电场的基本方程表明，导体内的恒定电场即是无源场又是无旋场，但是为什么它不为零？
- 4.2 恒定电场中的电位与静电场的电位有什么异同点？
- 4.3 当电荷在导电媒质中运动形成恒定电流时，该导电媒质中是否存在体电荷分布？为什么？
- 4.4 什么是电流的热效应？恒定电场的功率损耗是如何计算的？与电路分析中电阻的功率损耗的计算有什么异同点？
- 4.5 什么情况下可以将静电场与恒定电场相比拟？它们之间的比拟关系是怎样的？

第4章思考题

4.6 恒定磁场镜像法和静电场的镜像法有什么异同点？

4.7 为什么恒定磁场的矢量磁位要满足库仑条件或库仑规范？

4.8 静电场的能量和恒定磁场的能量有什么异同点？

4.9 什么是导体载流回路的电感？什么是内自感？什么是外自感？它与哪些因素有关？

4.10 试用你所学过的电路分析的知识解释载流回路的自感和互感？

