1.一阶马尔可夫链信源有 3个符号(u_1,u_2,u_3),转移概率为：$p(u_1/u_1)=1/2$ $p(u_2/u_1)=1/2, p(u_3/u_1)=0, p(u_1/u_2)=1/3, p(u_2/u_2)=0, p(u_3/u_2)=2/3$ $p(u_1/u_3)=1/3, p(u_2/u_3)=2/3, p(u_3/u_3)=0$.画出状态图并求出各符 号稳态概率。

这是一阶马尔可夫矩阵，只记忆到前1个符号。因此

用上次输出的符号就可 以标记信源的状态，记 为

$S(u_1), S(u_2), S(u_3)$,题目中给的概率是信源 状态转移的概率。

写出1步转移概率矩阵：

$$
\begin{array}{cccc}
 & S(u_1) & S(u_2) & S(u_3) \\
S(u_1) & 1/2 & 1/2 & 0 \\
S(u_2) & 1/3 & 0 & 2/3 \\
S(u_3) & 1/3 & 2/3 & 0
\end{array}
$$

注意：$p(a/b):b$是条件a是结果。概率转移矩阵 行求和$=1$。

求稳态：从一步转移矩 阵上看不出稳态存在与 否(有0元)。

只管求，不管存在不存 在。

设信源稳态中3种状态的概率为 $W=(w_1,w_2,w_3)$

$WP=W$(转移一次稳态中各状态 概率不变)

$$(w_1,w_2,w_3)\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & 0 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix}=(w_1,w_2,w_3)$$

$$\frac{1}{2}w_1+\frac{1}{3}w_2+\frac{1}{3}w_3=w_1$$

$$\frac{1}{2}w_1+\frac{2}{3}w_3=w_2$$

$$\frac{2}{3}w_2=w_3$$

方程不独立，任取 2个,(取第二，三个比较方便 ），

加上概率归一方程 $w_1+w_2+w_3=1$,求解：

$$w_1=\frac{10}{25},w_2=\frac{9}{25},w_1=\frac{6}{25}$$

信源在稳态下有 $(10/25, 9/25, 6/25)$的概率处于$S(u_1), S(u_2), S(u_3)$

其中$S(u_1)$态有$(1/2, 1/2, 0)$的概率向$S(u_1), S(u_2), S(u_3)$转移，即有

$(1/2, 1/2, 0)$输出u_1, u_2, u_3。

同样$S(u_2)$态有$(1/3, 0, 2/3)$的概率输出 u_1, u_2, u_3。

$S(u_3)$态有$(1/3, 2/3, 0)$的概率输出 u_1, u_2, u_3。

此时稳态输出信源各符 号的概率当然应该用全 概率公式:

就是三个态的概率叠加

$$p(u_1) = \frac{10}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{25} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{25}$$

$$p(u_2) = \frac{10}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{25} \times 0 + \frac{6}{25} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{25}$$

$$p(u_3) = \frac{10}{25} \times 0 + \frac{9}{25} \times \frac{2}{3} + \frac{6}{25} \times 0 = \frac{6}{25}$$

正好就是稳态概率分布 $(10/25, 9/25, 6/25)$:这是必然的。

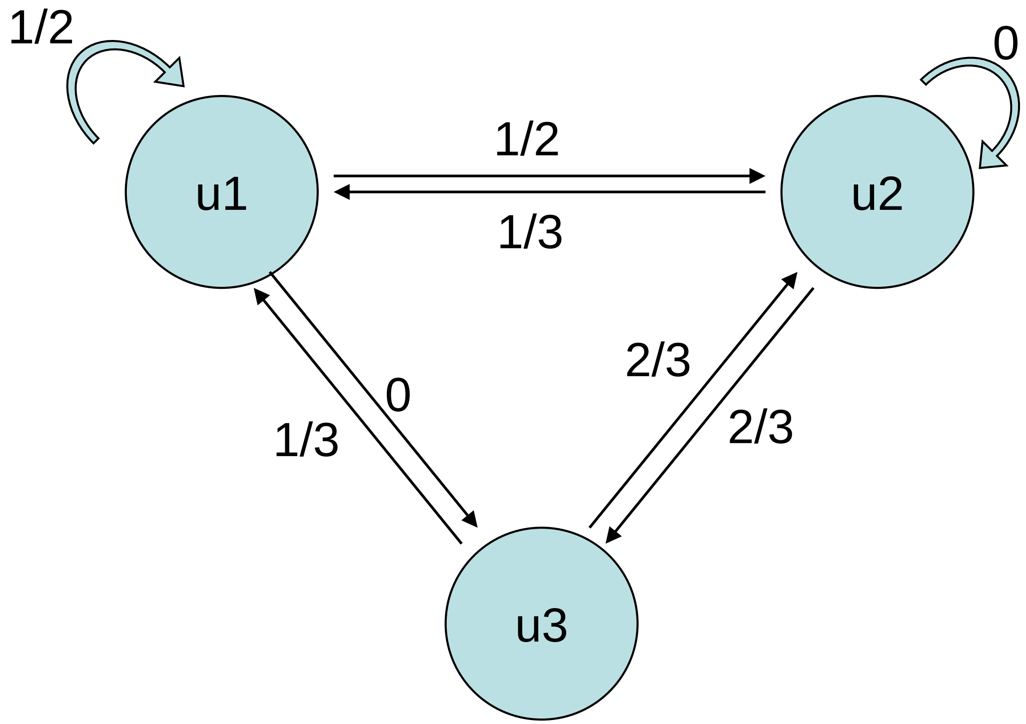
由稳态分布的概念保证 ，稳态分布输出下个符 号(变成下个状态)的

概率固定，那么稳态分 布各态的概率当然就是 输出下个符号的概率。

不然就不是稳态了。

马尔可夫信源的稳态其 实不应该叫稳态，而应 该称为稳态分布。它不是一个状态，而是 所有状态合成的概率 (分布)空间。

在一阶马尔可夫信源中 ，稳态分布的概率分布 就是输出符号的概率分布。



由符号集 $\{0,1\}$ 组成的二阶马尔可夫 链，其转移概率为 $p(0/00)=0.8,$ $p(0/11)=0.2,\ p(1/00)=0.2,\ p(1/11)=0.8,\ p(0/01)=0.5,\ p(0/10)=0.5,$ $p(1/01)=0.5,\ p(1/10)=0.5$。画出状态图，计算各 状态的稳态概率。

先写出概率转移矩阵： 二阶马尔可夫信源的信 源状态不能用一个输出符号表示，要用上 次和上上次两个输出的 符号来表示。

把上上次输入写在左边， 上次输入写在右边

概率转移矩阵为：

	00	01	10	11
00	0.8	0.2		
01			0.5	0.5
10	0.5	0.5		
11			0.2	0.8

$00\rightarrow 0,$ 说明的是信源从00转移到00的概率。

$11\rightarrow 0,$ 说明的是信源从11转移到10的概率。

同理给出其它转移概率 数值。

概率转移矩阵每行的求 和已经为1。因此根据概率归一把剩下的补上0,完整的一步概率转移矩 阵为:

	00	01	10	11
00	0.8	0.2	0	0
01	0	0	0.5	0.5
10	0.5	0.5	0	0
11	0	0	0.2	0.8

求稳态$W=(w_1,w_2,w_3,w_4)$

$WP=W$

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8\end{pmatrix}=(w_1,w_2,w_3,w_4)$$

得到4个方程:

$$(w_1, w_2, w_3, w_4)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

得到4个方程：

$$0.8w_1 + 0.5w_3 = w_1, 0.2w_1 + 0.5w_3 = w_2$$

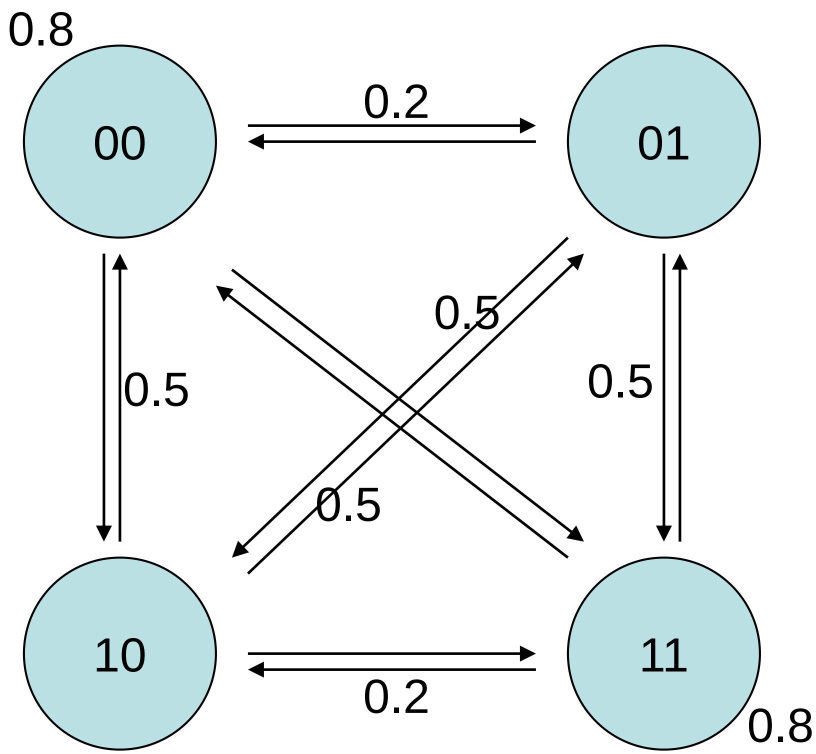
$$0.5w_2 + 0.2w_4 = w_3, 0.5w_2 + 0.8w_4 = w_4$$

加上$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$求解：

$$w_1 = \frac{5}{14}, w_2 = \frac{1}{7}, w_3 = \frac{1}{7}, w_4 = \frac{5}{14}$$

输出下个符号的概率分 布则需要全概率公式求 。

比一阶要多个步骤。


0.8
00
0.2
01
0.5
0.5
0.5
0.5
10
11
0.2
0.8

2，同时掷两个骰子，各面的概率都为$1/6$，求：

1),3和5同时出现事件的自信息量。

2),两个1同时出现事件的自信息量。

3),两个点数各种组合(无序对)的熵或平均信息量。

4),两个点数之和的熵。

5),两个点数中至少有一个是1的自信息。

自信息：对应概率空间中的单个事件。

其意义为该事件出现能消除的不确定度。

$I(x) = -\log p(x)$。

平均自信息：对应概率空间，是概率空间中所有事件自信息的统计平均。

$$H(X) = \sum_x p(x)I(x) = -\sum_x p(x)\log p(x)$$

1),3和5同时出现事件的自信息 量。

同时掷两个骰子就是两 个独立事件的联合事件，

构成联合概率空间，事 件为联合事件，概率为 单独事件概率乘积。

题意不考虑哪个骰子是 3哪个是5。

同时出现3,5的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$I(3,5)=-\log(\frac{1}{18})$选单位$bit$则取对数底为2

$I(3,5)=\log_2(18)bit=4.17b$

2),两个1同时出现事件的自信息 量。

同时出现1,1的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$I(1,1)=-\log(\frac{1}{36})=5.17b$

3), 两个点数各种组合 (无序对)的熵或平均信息量。

这是求平均自信息，对 应概率空间要清楚。

概率空间的事件是互相 独立的基本事件。是对 这些基本事件的自信息的统 计平均。

无序对一共: $6+\frac{C_6^1 C_5^1}{2}=21$个。(乘法口诀表)

其中两个骰子相同对的 概率为$1/36$，不同的为$1/18$

因此总的平均自信息 (信息熵)

$$H(X)=-\sum_{x} p(x)\log\ p(x)=6\times\frac{1}{36}\times\log(36)+15\times\frac{1}{18}\times\log(18)$$

$$=4.34b$$

4), 两个点数之和的熵。

两个点数和这个概率空 间和刚才的不一样。

这个概率空间只有 $2 \to 12$ 一共11个事件。

需要算出每个事件的概 率。

$$p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 1/18$$

$$p(4) = p(10) = 1/36 + 1/18 = 1/12$$

$$p(5) = p(9) = 1/18 + 1/18 = 1/9$$

$$p(6) = p(8) = 1/36 + 1/9 = 5/36$$

$$p(7) = 1/18 \times 3 = 1/6$$

$$H(X) = 2 \times \frac{1}{18} \log 18 + 2 \times \frac{1}{12} \log 12 + 2 \times \frac{1}{9} \log 9 +$$

$$2 \times \frac{5}{36} \log \frac{36}{5} + \frac{1}{6} \log 6 = 3.27b$$

5),两个点数中至少有一个 是1的自信息。

这个事件又回到了原来 的联合概率空间。

至少有一个是1个概率为 $\frac{1}{36}+5\times\frac{1}{18}=\frac{11}{36}$

$$I(x)=\log\frac{36}{11}=1.71b$$

10.在一个袋中放5个黑球,10个白球，摸一个球为一 次实验，摸出的球不再放入。求：

1),一次实验包含的不确定 度。

2),第一次实验X摸出的是黑球，第二次 实验Y给出的不确定度。

3),第一次实验X摸出的是白球，第二次 实验Y给出的不确定度。

4),第二次实验Y包含的不确定度。

1),一次实验包含的不确定 度

一次实验是一个概率空 间，其中有黑白两种事 件。

概率空间的不确定度就 是指这个概率空间的信 息熵。

黑的概率为$1/3$,白的概率为$2/3$

概率空间为为$X(w,b)=(p(w)=1/3, p(b)=2/3)$

$H(X)=1/3\log 3+2/3\log 3/2=0.92b$

2), 第一次实验X摸出的是黑球，第二次 实验Y给出的不确定度。

3), 第一次实验X摸出的是白球，第二次 实验Y给出的不确定度。

同样Y也是一个概率空间

这个并不是条件熵$H(Y/X)$，而是以X中一个事件为条件的信 息熵

条件熵对应的两个概率 空间。

这里是$H(Y/x)$，只是条件概率矩阵中 求一行平均自信息。

条件概率矩阵每一行都 是个概率空间，整体不 构成概率空间。

联合概率矩阵整体构成 一个概率空间，需要把 条件概率矩阵乘以对应 x的概率

$H(Y/x)$没有公式只能从定义算 。

$b/b=2/7, w/b=5/7, b/w=5/14, w/w=9/14$

条件概率矩阵写为$P(Y/X)=\begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 5/14 & 9/14 \end{pmatrix}$

$$H(Y/b)=\frac{2}{7}\log\frac{7}{2}+\frac{5}{7}\log\frac{7}{5}=0.86b$$

$$H(Y/w)=\frac{5}{14}\log\frac{14}{5}+\frac{9}{14}\log\frac{14}{9}=0.94b$$

4),第二次实验Y包含的不确定度。

需要确定Y概率空间b和w事件的概率。

用全概率公式从条件概 率矩阵中来求

$$P(Y/X)=\begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 5/14 & 9/14 \end{pmatrix}$$

$$p(b)=\sum_x p(x)p(y/x)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{14}=\frac{1}{3}$$

$$p(w)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{14}=\frac{2}{3}$$

$$H(Y)=H(X)=0.92b$$

不给定X，则没有收到任何信息 ，Y实验信源的不确定度没有任何减少，当然和 单做Y实验信息熵一样。

11),有一个可旋转的圆盘， 盘面上被均匀分成38份，用1...38数字标示。其中2份涂绿色,18份涂红色,18份涂黑色，圆盘停转后 指针指向某一数字和颜色。

1),若仅对颜色感兴趣，计 算平均不确定度。

2),若对颜色和数字都感兴 趣，计算平均不确定度 。

3),若颜色已知时，计算条 件熵。

1)只对颜色感兴趣，则概 率空间一共3个事件绿g,红r,黑b

概率分布为$p(X)=(1/19,9/19,9/19)$

所谓平均不确定度就是 信息熵

$H(X)=1/19\log 19+2\times 9/19\log(19/9)=1.245b$

2),若对颜色和数字都感兴 趣，计算平均不确定度 。

看到数字则概率空间分 为38个事件，该事件可以直 接用数字标记，不需要颜色。

数字出现概率相等为$1/38$

$$H(XY)=H(Y)=\log 38=5.25b$$

3),若颜色已知时，计算条 件熵。

题意为求Y概率空间以X空间里事件为条件的条 件熵。

写出条件概率矩阵 :任意假定颜色涂的数字 (不影响结果)

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & 20 & 21 & \cdots & 38 \\ g & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r & 0 & 0 & 1/18 & \cdots & 1/18 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/18 & \cdots & 1/18 \end{array}$$

条件熵为条件概率矩阵 每一行平均自信息的统 计平均

$$H(Y/X)=-\sum_x p(x)\sum_y p(y/x)\log p(y/x)$$

$$H(Y/X)=\frac{1}{19}\times(\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2)$$

$$+\frac{9}{19}\times(\frac{1}{18}\log 18\times 18)+\frac{9}{19}\times(\frac{1}{18}\log 18\times 18)$$

$$=4.00b$$

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X)$$

$$H(Y/X)=H(XY)-H(X)$$

这儿有$H(XY)=H(Y)$

$$H(Y/X)=H(Y)-H(X)=5.25-1.245=4.00b$$

$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=0, Y$为条件X就没有信息了，

知道了y必定知道x。

显然知道了数字，一定 知道了颜色。

注意下这儿的$H(Y/X)$和前面$H(Y/b), H(Y/w)$的区别。

12, 两个实验X和Y, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$,

联合概率为$r(x_i,y_j)=r_{ij}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{bmatrix}$

1), 如果有人告诉你X和Y的实验结果，得到的平 均信息量是多少？

2), 有人告诉你Y的实验结果，等到的平 均信息量是多少？

3), 在已知Y的实验结果下，告诉你X的实验结果，得到的平 均信息量是多少？

1), X, Y实验联合结果的平均自 信息。联合概率空间所 有事件自信息的统计平均，联合概率矩 阵所有概率自信息的统 计平均。

$$H(XY)=2\times\frac{7}{24}\log\frac{24}{7}+4\times\frac{1}{4}\log 4+\frac{1}{4}\log 4=2.3b$$

2),有人告诉你Y的实验结果，等到的平 均信息量是多少？

Y实验的平均自信息，需 要知道Y概率空间的概率分布。

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i y_j)$$

$$p(y)=(1/3,1/3,1/3)$$

$$H(Y)=\log 3=1.58b$$

3),在已知Y的实验结果下，告诉你 X的实验结果，得到的平 均信息量是多少？

题意求$H(X/Y)$

$$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=2.3-1.58=0.72b$$

根据条件概率矩阵，直 接用定义算$H(X/Y)$

需要知道$P(X/Y)$，我们把联合概率矩阵 写成以y为行

的形式r_{ji}: $\begin{bmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{bmatrix}$,在这题对称。

每行要归一化才是条件 概率矩阵

$$P(X/Y)=\begin{bmatrix} 7/8 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}, p(Y)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$H(X/Y)=\frac{1}{3}(\frac{7}{8}\log\frac{8}{7}+\frac{1}{8}\log 8)+\frac{1}{3}(\frac{1}{8}\log 8\times 2+\frac{3}{4}\log\frac{4}{3})$$

$$+\frac{1}{3}(\frac{7}{8}\log\frac{8}{7}+\frac{1}{8}\log 8)=0.72b/s$$

13．有两个二元随机变量X和Y，它们的联合概率如表所示。并定义另一随机变量Z＝XY（一般乘积）。试计算:

(1)$H(X)$、$H(Y)$、$H(Z)$、$H(XZ)$、$H(YZ)$和$H(XYZ)$。
(2)$H(X/Y)$、$H(Y/X)$、$H(X/Z)$、$H(Z/X)$、$H(Y/Z)$、$H(Z/Y)$、$H(X/YZ)$、$H(Y/XZ)$和$H(Z/XY)$。
(3)$I(X;Y)$、$I(X;Z)$、$I(Y;Z)$、$I(X;Y/Z)$、$I(Y;Z/X)$和$I(X;Z/Y)$。

Y \ X	0	1
0	1/8	3/8
1	3/8	1/8

$$H(X)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\times 2=1b/s，竖着加p(x)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$$

$$H(Y)=1b/s，横着加$$

$H(Z)$有些XY乘起来一样，所以$H(Z)\neq H(XY)$

0的概率$7/8$,1的概率$1/8$所以

Z	0	1
p	7/8	1/8

$$H(Z)=-\frac{7}{8}\log\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}=0.54$$

$H(XZ)$就是算X,Z的联合概率。

X \ Z	0	1
0	1/2	3/8
1	0	1/8

$$H(XZ)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}=1.41b/s$$

$H(YZ)$就是算Y,Z的联合概率。

$H(YZ)=H(XZ)=1.41b/s$

Z / Y	0	1
0	1/2	3/8
1	0	1/8

$H(X,Y,Z)$就是算X,Y,Z的联合概率。注意到Z由XY确定，$H(Z/XY)=0$。

所以$H(XYZ)$═$H(XY)=-2\times\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}-2\times\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}=1.81b/s$

$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=0.81b/s$

$H(Y/X)=H(XY)-H(X)=0.81b/s$

$H(X/Z)=H(XZ)-H(Z)=0.86b/s$

$H(Z/X)=H(XZ)-H(X)=0.41b/s$

$H(Y/Z)=H(XZ)-H(Z)=0.86b/s$

$H(Z/Y)=H(XZ)-H(Y)=0.41b/s$

$H(X/YZ)=H(XYZ)-H(YZ)=0.40b/s$

$H(Y/XZ)=H(XYZ)-H(XZ)=0.40b/s$

$H(Z/XY)=H(XYZ)-H(XY)=0b/s$

互信息是分别处在两个 关联概率空间中的两个 事件互相给出的信息量 。

$$I(x_i;y_j)=\log\frac{1}{p(x_i)}-\log\frac{1}{p(x_i/y_j)}=\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}=I(y_j;x_i)$$

x的自信息$-y$发生下x还剩多少$=y$发生给出了关于x的多少信息量。

平均互信息就是联合概 率空间互信息的统计平 均。

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=I(Y;X)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)=0.19b/s$$

$$I(X;Z)=H(X)+H(Z)-H(XZ)=H(X)-H(X/Z)=H(Z)-H(Z/X)=0.14b/s$$

$$I(Y;Z)=H(Y)+H(Z)-H(YZ)=H(Y)-H(Y/Z)=H(Z)-H(Z/Y)=0.14b/s$$

$$I(X;Y/Z)=I(X;YZ)-I(X;Z)=H(X)-H(X/YZ)-I(X;Z)=0.46b/s$$

$$I(Y;Z/X)=I(Y;ZX)-I(Y;X)=H(Y)-H(Y/ZX)-H(Y)+H(Y/X)=0.41b/s$$

$$I(X;Z/Y)=I(X;ZY)-I(X;Y)=H(X)-H(X/ZY)-H(X)+H(X/Y)=0.41b/s$$

公式小结：

$$H(XY)=H(YX),H(Y/X)\neq H(X/Y)$$

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X)=H(Y)+H(X/Y)$$

$$H(XYZ)=H(YZ)+H(X/YZ)$$

$$I(X;Y)=I(Y;X)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$I(X;YZ)=H(X)-H(X/YZ)$$

$$I(X;Y/Z)=I(X;YZ)-I(X;Z)$$

以Z为条件Y给出关于X的平均互信息 $=$

YZ一起给出X的平均互信息 $-$ Z单独给出关于X的平均互信息。

$$I(X;Y/Z) = I(Y/Z;X) \text{-------------} \text{因为} I(X;Y) = I(Y;X)$$

$$= H(Y/Z) + H(X) - H(Y/Z,X) \text{-------} \text{因为} I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

$$= H(Y/Z) + H(X) - H(Y,Z,X) + H(Z,X) - \text{因为} H(X,Y,Z) = H(Y,Z) + H(X/Y,Z)$$

$$= H(Y/Z) + H(X) - H(X,Y,Z) + H(X,Z) - \text{因为} H(X,Y) = H(Y,X)$$

$$= 0.86 + 1 - 1.81 + 1.41 = 1.46 b/s$$

16, 黑白传真机的消息元只 有黑色和白色两种，一 般气象图上，黑色出现概率为0.3,白色出现概率为0.7。

1), 假设黑白消息前后无关，求信源熵。

2), 黑白之间有关联，其转 移概率为$p(w/w)=0.9143$, $p(b/w)=0.0857$ $p(w/b)=0.2$, $p(b/b)=0.8$。求这个一阶马尔可夫 信源的信源熵。

3), 比较两种信源熵大小， 并说明原因。

1), $H(X)=-0.3\log 0.3-0.7\log 0.7=0.881b$

2), 马尔可夫信源达到稳态 分布才有信源熵的概念 。

先求稳态$W=(w_w,w_b),w_w+w_b=1$

$$(w_w,w_b)\times\begin{pmatrix}0.9143 & 0.0857\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}=(w_w,w_b)$$

解得$w_w=0.7,w_b=0.3$

马尔可夫信源稳态的信 源熵是稳态分布下各个 状态信源熵的统计平均 。

w态的熵为$H(w)=-0.9173\log 0.9173-0.0857\log 0.0857=0.418b$

b态的熵为$H(b)=-0.2\log 0.2-0.8\log 0.8=0.722b$

$H(W)=0.7\times 0.418+0.3\times 0.722=0.509b$

3), $H(W) < H(X)$

因为符号之间有关联概率，比只知道原始出现概率要多知道点信息，所以剩下的信息自然少了。

29), 有一个一阶平稳马尔可夫链 $X_1, X_2, \ldots$, 各 X_r 取值于 $A(a_1, a_2, a_3)$。已知起始概率 $p(X)$ 为 $p_1 = 1/2, p_2 = p_3 = 1/4$。

转移概率如右所示。

ij	1	2	3
1	$1/2$	$1/4$	$1/4$
2	$2/3$	0	$1/3$
3	$2/3$	$1/3$	0

1), 求 (X_1, X_2, X_3) 的联合熵和平均符号熵。

2), 求这个链的极限平均符号熵。

3), 求 H_0, H_1, H_2 和他们对应的冗余度。

$$1\text{求}H(X_1X_2X_3)=-\sum p(x_1x_2x_3)\log\ p(x_1x_2x_3)$$

$$p(111)=1/8,\ p(112)=1/16,\ p(113)=1/16$$

$$p(121)=1/12,\ p(122)=0,\ p(123)=1/24$$

$$p(131)=1/12,\ p(132)=1/24,\ p(133)=0$$

$$p(211)=1/12,\ p(212)=1/24,\ p(213)=1/24$$

$$p(221)=0,\ p(222)=0,\ p(223)=0$$

$$p(231)=1/18,\ p(232)=1/36,\ p(233)=0$$

$$p(311)=1/12,\ p(312)=1/24,\ p(313)=1/24$$

$$p(321)=1/18,\ p(322)=0,\ p(323)=1/36$$

$$p(331)=0,\ p(332)=0,\ p(333)=0,$$

$$H(X_1X_2X_3)=-\frac{1}{8}\log 8-\frac{2}{16}\log 16-\frac{4}{12}\log 12$$

$$-\frac{2}{18}\log 18-\frac{6}{24}\log 24-\frac{2}{36}\log 36=3.97b$$

求平均符号熵,3个符号除一下即可。 $H(\overline{X})=1.32b$

2求极限平均符号熵,即信源熵。先求稳态分 布$W=(w1,w2,w3)$

稳态要求$WP=W, w1+w2+w3=1$

$$\frac{1}{2}w1+\frac{2}{3}w2+\frac{2}{3}w3=w1$$

$$\frac{1}{4}w1+\frac{1}{3}w3=w2$$

$$\frac{1}{4}w1+\frac{1}{3}w2=w3$$

$$W=(\frac{4}{7},\frac{3}{14},\frac{3}{14})$$

即达到稳态分布时，信 源有$4/7$概率处于$a1$状态,$3/14$在$a2$态,$3/14$在$a3$态。

那么此时发出一个符号 的平均符号熵为：

$$H_{\infty}(X)=\frac{4}{7}H^{a1}(X)+\frac{3}{14}H^{a2}(X)+\frac{3}{14}H^{a3}(X)$$

$$=\frac{4}{7}H(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})+\frac{3}{14}H(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3})+\frac{3}{14}H(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)=1.25b$$

3求H_0, H_1, H_2。

H_0是什么意思？就是连初 始概率都不知道情况下 可能产生的最大信源熵 。(最大符号熵)，也就是各符号概率相 等下的信源熵。

$H_0 = \log 3 = 1.58b$

H_1是什么意思？知道初始 概率分布，但是不知道 任何符号关联信息时可 能产生的最大熵。不知道 关联，信源状态不改变 (无记忆信源)。

H_1即是初始分布的信源熵 $H_1 = 1.5b$

H_2是什么意思？知道两个 符号之间关联，但是不 知道三个包括以上之间符号关联时的熵。

知道两个符号的关联， 这样一个平稳信源就是 一阶马尔可夫信源，求 其极限信源熵即是H_2,本题的信源就是一阶马 尔可夫信源，没有更多 关联了。

$H_2 = H_\infty = 1.25b$

求冗余度$r_m = 1 - \eta_m = 1 - \dfrac{H_\infty}{H_m}$

$$r_0 = 1 - \frac{1.25}{1.58} = 0.21, r_1 = 1 - \frac{1.25}{1.5} = 0.17, r_2 = 1 - \frac{1.25}{1.25} = 0$$

31．设有一信源，它在开始时以p(a)=0.6,p(b)=0.3,p(c)=0.1的概率发出X。如果X1为a时，X2为a,b,c的概率为1/3,X1为b时，X2为a,b,c的概率为1/3。,X1为c时，X2为a,b,的概率为1/2,为c的概率为0。而且后面发出Xi的概率只与Xi－1有关，又有p(Xi|Xi-1)=p(X2|X1)，
i>=3。试利用马尔可夫信源的图示法画出状态转移图，并求出转移矩阵和信源熵H无穷。

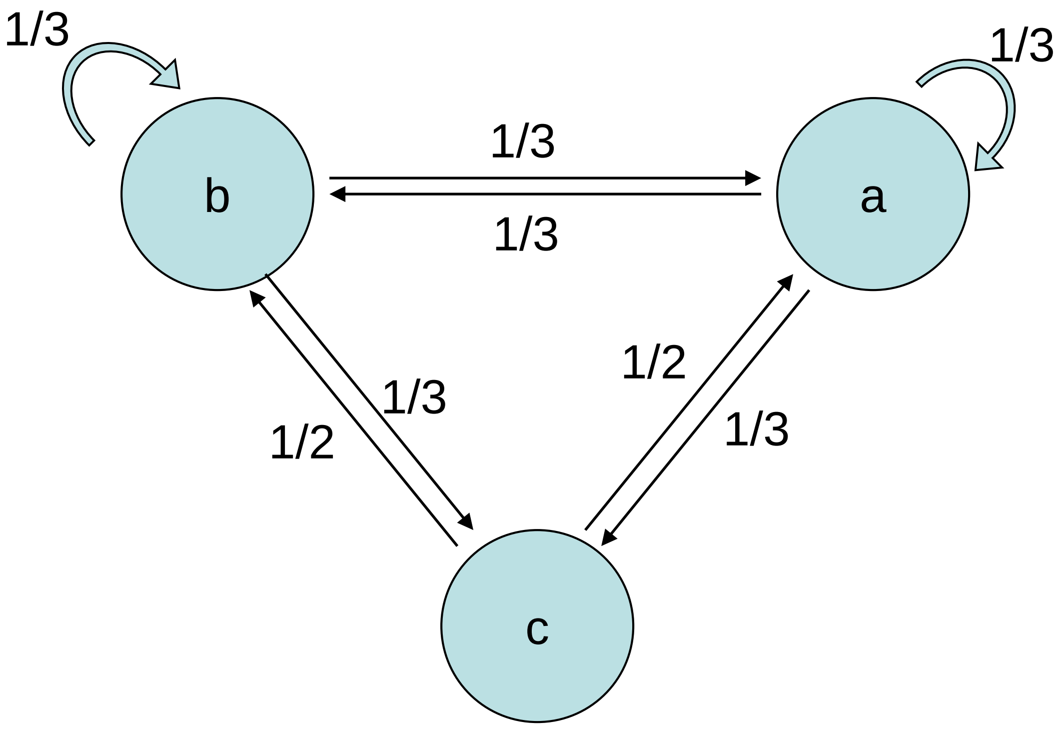
由题意可知：这是个一 阶的马尔可夫信源，信 源一共3个状态。

转移概率矩阵为：$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

求信源熵即是就极限平 均符号熵，必须先求稳 态分布。

$W = (3/8, 3/8, 1/4)$

$H_\infty = 3/8H(X/a) + 3/8H(X/b) + 1/4H(X/c) = 1.44b/s$


1/3
1/3
1/3
b
a
1/3
1/2
1/3
1/2
1/3
c

20．给定语音信号样值X的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$， $-\infty<x<\infty$

，求$H_c(X)$，并证明它小于同样方差的正态变量的连续熵。

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}(\log\frac{1}{2}\lambda+\log e^{-\lambda x})dx=-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda dx-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log e^{-\lambda x}dx$$

$$-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda dx=\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=-\log\frac{1}{2}\lambda$$

$$-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log e^{-\lambda x}dx=\log e\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\lambda x dx=\log e\int_{0}^{+\infty}e^{-t}tdt,t=\lambda x$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-t}tdt=-\int_{0}^{+\infty}tde^{-t}=-te^{-t}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt=0-e^{-t}\Big|_{0}^{\infty}=1$$

$$H(X) = -\log \frac{1}{2}\lambda + \log e = \log \frac{2e}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|} x^2 dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|} x dx\right)^2$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^2 dx - 0 = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-\lambda x} x dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$E(X) = 0, \sigma^2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$的正态分布为$p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$,

$$H(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) = \log\left(\frac{2\sqrt{\pi e}}{\lambda}\right) > \log\left(\frac{2e}{\lambda}\right)$$

3.1设二进制对称信道的概 率转移矩阵为：$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

1)若$p(x_0)=3/4, p(x_1)=1/4$。求$H(X), H(X/Y), H(Y/X), I(X;Y)$

2)求该信道的信道容量及 达到信道容量时的输入 概率分布。

1)$H(X)=-\sum p\log p=3/4\log 4/3+1/4\log 4=0.811b$

由于$p(Y/X)$条件概率矩阵已经给出，因此先计算$H(Y/X)$是方便的。

$H(Y/X)$就是条件概率矩阵中各 个$H(line)$关于对应$p(x)$的统计平均。

$$H(Y/X)=\frac{3}{4}H(\frac{2}{3},\frac{1}{3})+\frac{1}{4}H(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=0.918b$$

$H(XY)=H(Y)+H(X/Y)$,因此计算$H(X/Y)$需要计算$H(XY)$和$H(Y)$

$H(XY)=H(X)+H(Y/X)=1.729b$

$p(y)$用全概率公式，$p(y_0)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}, p(y_1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$

$H(Y)=0.980b$

$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=0.749b$

当然也可以用贝叶斯公 式来计算$p(X/Y)$矩阵,然后求$H(X/Y)$

$$I(X;Y)=H(X)-H(Y/X)=0.062b$$

$$=H(Y)-H(X/Y)=0.062b$$

2)这是个对称信道，因此信道在输入概率分布为等概率分布时

达到信道容量, $p(X)=(1/2,1/2)$

$$C=\log m-H(Line)=\log 2-H(1/3,2/3)=0.082b$$

此时$p(Y)$一定也是$(1/2,1/2)$

3.2某信源发送端有 2个符号， $x_i, i=1,2; p(x_1)=a,$ 每秒发错一个符号。接 收端有 3种符号 $y_j, j=1,2,3,$ 转移概率矩阵为 $p=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\1/2 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$

(1)计算接收端的平均不确 定度；

(2)计算由于噪声产生的不 确定度 $H(Y/X)$；

(3)计算信道容量。

$(1):$ 所谓不确定度，就是 $H(Y)$。

Y的不确定度和 X是相关的，因为我们发 送X后才能收到 Y。这是关联事件。

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{2}p(x_iy_j)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)p(y_j/x_i)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{a}{4} & \frac{1}{4}-\frac{a}{4}\end{pmatrix}$$

其中 $p(x_2)=1-a,$ 概率归一化。

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j)\log\ p(y_j)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(\frac{1}{4}(1+a))-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(\frac{1}{4}(1-a))$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(1-a)$$

(2)计算由于噪声产生的不 确定度$H(Y/X)$;

根据$H(Y/X)$的定义

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}-p(x_i y_j)\log p(y_j/x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}-p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

$$=a\frac{1}{2}\log 2+a\frac{1}{2}\log 2+0+(1-a)\frac{1}{2}\log 2+(1-a)\frac{1}{4}\log 4+(1-a)\frac{1}{4}\log 4$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{a}{2}$$

(3)计算信道容量。

观察信道矩阵，不是对 称或者准对称。那么只 能用概念硬算。

信道容量是信道单位信 息(符号)可以携带的最大信息率 。

也就是信道输出关于信 道输入的最大互信息。

$C=\max R$,直接把a当作变量。

$$R=I(x;y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(1-a)-(\frac{3}{2}-\frac{a}{2})$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{4}(1+a)\log_2(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)\log_2(1-a)$$

求其关于自变量a的极值。对a求导等于0

$$\frac{dR}{da}=\frac{1}{2}-(\frac{1}{4}\log_2(1+a)+\frac{\log_2 e}{4})-(-\frac{1}{4}\log_2(1-a)-\frac{\log_2 e}{4})=0$$

$\frac{1}{4}\log_2(\frac{1+a}{1-a})=\frac{1}{2},a=\frac{3}{5}$。代入$C=0.16b/s$

信源输入概率分布为$(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$时，信息传输率达到信 道容量。

3.5求下列两个信道的信道 容量，并加以比较：

$$(1).\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix},(2)\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

(1)

首先观察信道矩阵，准 对称，不需要用定义求 极大值了。

准对称信道输入等概率 时达到信道容量, $p(x)=$ 常数 $=\frac{1}{2}$。

那么直接计算 R 需要的记忆量最小。

$$R=I(X,Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$p(y)=\sum_x p(x)p(y/x)=(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon,2\varepsilon),$$

$$H(Y)=(2\varepsilon-1)\log(\frac{1}{2}-\varepsilon)-2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$$H(Y/X)=-\sum_y\sum_x p(x)p(y/x)\log p(y/x)$$

$$=-(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon)-(p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon)-2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$$C=1-(1-2\varepsilon)\log(1-2\varepsilon)-2\varepsilon\log(4\varepsilon)$$

$$+(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon)+(p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon)+2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

(1).$\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix}$

懒得算，喜欢记公式的，先把准对称矩阵分成 对称的子矩阵

$$\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 2\varepsilon \end{array}\right]$$

用公式准对称矩阵的信 道容量

$$C=\log n+\sum_{j} p_{ij}\log p_{ij}-\sum_{k=1}^{r} N_k \log M_k$$

n是行数，i任取一行，有两个子矩 阵k取1,2。N_k是对应子矩阵行求和

M_k对应子矩阵列求和。

$$C=1-(1-2\varepsilon)\log(1-2\varepsilon)-2\varepsilon\log(4\varepsilon)$$

$$+(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon)+(p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon)+2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

与刚才一致，这个方法 还是要快些的。

$$(2)\begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1-p-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & 1-p-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{array}\right]$$

$$C=1-(1-2\varepsilon)\log(1-2\varepsilon)-2\varepsilon\log 2\varepsilon$$

$$+(1-p-\varepsilon)\log(1-p-\varepsilon)+(p-\varepsilon)\log(p-\varepsilon)+2\varepsilon\log(2\varepsilon)$$

$tips$：这儿概率的0是无限小。

（3）两个信道容量除了 $-2\varepsilon\log 4\varepsilon, -2\varepsilon\log 2\varepsilon$都一样。

而$\varepsilon>0$所以, $C_1-C_2=2\varepsilon\log\frac{1}{2}<0$, 第二个信道容量较大。

3.7。发送端有3种等概率符号(x_1, x_2, x_3), $p(x_i)=1/3$, 接收端收到3种符号，(y_1, y_2, y_3),信道转移矩阵为： $P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

(1)接收端收到一个符号后 得到的信息量$H(Y)$

(2)计算噪声熵$H(Y/X)$;

(3)计算接收端收到一个符 号y_2的错误概率；

(4)计算从接收端看的平均 错误概率；

(5)计算从发送端看的平均 错误概率；

(6)从转移矩阵中能看出该 信道好坏吗？

(7)计算发送端的$H(X)$和$H(X/Y)$。

(1)接收端收到一个符号后 得到的信息量$H(Y)$

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i)p(y_j/x_i)=(1/3,1/2,1/6)$$

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j)\log\ p(y_j)=1.46b/s$$

(2)计算噪声熵$H(Y/X)$;

$$H(Y/X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}p(x_i)p(y_j/x_i)\log\ p(y_j/x_i)=1.18b/s$$

(3)计算接收端收到一个符 号y_2的错误概率;

错误在这里指的是x_i经过信道变成$y_j, i\neq j$。在信道编码中错误概率，平均错误概率在 译码中是个有意义的参 数。

收到y_2错误，那就是指这个y_2对应的输入是x_1, x_3

这个概率 $=(p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_3)p(y_2/x_3))/p(y_2)=0.8$

当然也可以用$1-p(x_2)p(y_2/x_2)/p(y_2)=0.8$

(4)计算从接收端看的平均 错误概率；

平均错误概率指收到一 个符号的错误概率，那 么就是收到y_1, y_2, y_3错误概率的统计平均。

y_1的正确概率$p(x_1/y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)/p(y_1)=0.5$

y_2的正确概率$p(x_2/y_2)=p(x_2)p(y_2/x_2)/p(y_2)=0.2$

y_3的正确概率$p(x_3/y_3)=p(x_3)p(y_3/x_3)/p(y_3)=0$

贝叶斯公式中传输正确 的项。

平均错误概率为$p(y_1)\times 0.5+p(y_2)\times 0.8+p(y_3)\times 1=11/15=0.73$

(5)计算从发送端看的平均 错误概率；

发送端看的错误概率是 输入一个x_i得到$y_j(i\neq j)$的概率。

x_i正确的概率即为$p(y_i/x_i)=(0.5,0.3,0)$

平均错误概率为$\sum_{i=1}^{3} p(x_i)(1-p(y_i/x_i))=0.73$

每一个输入符号的错误 /正确概率与对应的输出 符号错误/正确概率未必相等，但是这 两个平均错误概率，或 者平均正确概率必须相等，直接从物理 上想一下，如果错误概 率不等，一定出现输入认为正确，输出 认为错误的情况。这时 不可能的。数学上看这个两个平均概率 就是联合概率的求和， 当然每一项都相等，更不用说总的求和 了。

虽然用联合概率理解起 来很容易，正确的概率 当然就是x与对应y同时出现的概率。但是 联合概率还是要按照刚 才的公式才能计算出来，因此并不能作为 一个简便方法。

(6)从转移矩阵中能看出该 信道好坏吗？

除了x_3信道矩阵行中有个0.9，x_1, x_2对应行的概率都相对接 近，我们知道如果等概率就完全 传送不了信息，信道矩 阵的行越接近等概率就越差，因此我们可以 认为这个信道不好。

(7)计算发送端的$H(X)$和$H(X/Y)$。

(7)计算发送端的$H(X)$和$H(X/Y)$。

$$H(X)=\log 3=1.58b/s$$

$$H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)=R$$

所以$H(X/Y)=H(X)-H(Y)+H(Y/X)=1.58-1.46+1.18=1.30b/s$

3.8.具有6.5MHz带宽的某高斯信道，若 信道中信号功率与噪声 功率谱密度之比为45.5MHz,求其信道容量。

一看到信噪比，没有特 殊说法那就是要你用加 性高斯白噪声信道模型来计算。再看到带宽 ，一定是所谓的限时， 限频，限功率的高斯信道。关于高斯信道的 公式，只能靠记忆。

$$C_t = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})$$

其中W是带宽，C_t信道容量是单位时间内 能通过的信息量，而非单位符号能携带的 信息量。

注意题目给的是信号功 率与噪声功率谱密度之 比：$\frac{P_S}{N_0} = 45.5MHz$

是个有单位的量。不是 信噪(功率)比$\frac{P_S}{N_0 W}$

因此

$$C_t = 6.5\log(1+\frac{45.5}{6.5}) = 19.5Mb/s(\text{比特兆赫兹})$$

3.9。电视图像由30万个像素组成，对于适 当的对比度，一个像素 可取10个可辨别的亮度电平， 假设各个像素的10个亮度电平都以等概率出现，实时传送电视 图像每秒发送30帧图像。为了获得满意 的图像质量，要求信号与噪 声的平均功率比值为$30dB$，试计算在这些条件下传送电视视频信号 所需的带宽。

一看到信噪比，没有特 殊说法那就是要你用加 性高斯白噪声信道模型来计算。再看到带宽 ，一定是所谓的限时， 限频，限功率的高斯信道。关于高斯信道的 公式，只能靠记忆。指 望象对称，准对称信道那样现算是不行 的。

$C_t = W\log(1+\frac{P_S}{N_0W})$,其中$W$是带宽，$C_t$信道容量是单位时间内 能通过的信息量，而非单位符 号能携带的信息量。$\frac{P_S}{N_0W}$是信噪功率比。

信噪比已经知道。要求 带宽，必须知道最小 C_t

根据题意，计算单位时 间内需要传输的信息量 。

每秒传输的像素为 $30\times3\times10^5=9\times10^6$，每个像素有10种可能取值。

由于10个可能取值等概率出现 。那么每传送一个电平 值的信息量

为 $H(X)=\frac{1}{10}\log10\times10$

因此最少每秒的信息量

为 $C_t=\log10\times9\times10^6=2.99\times10^7 b/s$

而根据 dB 的定义 $10\log SNR=30$, 则 $SNR=1000$

代入公式 $W=C_t/\log(1+SNR)=0.30\times10^7 Hz$

这边可以看出用奈特要 方便的多 $\lg10=1,\lg1001=3$。

3.12。有一个二元对称信道，其信道转移概率如图3–21所示。设该信道以1500个二元符号/s的速度输入符号。现有 一消息序列共有14000个二元符号，并设在这 消息中$p(0)=p(1)=1/2$，问从信息传输的角度来考虑,10秒钟内能否将这消息序 列无失真的传输完?

根据图先写出信道矩阵$\begin{pmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}$

这又是一个看单位时间 内的信息量与信道容量 大小的问题。

先算单位时间内的信息 量

$R=\log 2=1b/s, R_t=14000\ R/t=1400\, b/\sec$。

二元对称信道

信道容量$\mathrm{C}=\log 2+0.98\log 0.98+0.02\log 0.02=0.86b/s$,

$C_t=1500\times 0.86=1290\, b/\sec$

信息论告诉我们10s内一般是传不完的。信 息论毕竟是门概率的学科，运气足够好当然 也是能正确传输的，这 就是不是信息量概念的内容了。

4.3。设输入符号与输出符 号X和Y均取值于(0,1,2,3)，且输入信号的分布为 等概率分布，设失真矩阵 为$d=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$,

求$D_{\min},D_{\max},R(D_{\min}),R(D_{\max})$,以及相应的编码器转移 矩阵。

1.求$D_{\min}$,平均失真的最小值。

失真矩阵每行都有一个 0，所以$D_{\min}=0$

$R(D_{\min})=H(X)=\log 4=2b/s$

编码器转移矩阵就是假 想信道矩阵，写法 0变1,1变0

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1.求D_{max}，其概念是使得信息传 输率等于0的最小平均失真。物理 上来说就是允许失真到了这个 程度就可以不用传信息 了。

如前所述D_{max}等于信源概率矢量乘以 失真矩阵后形成矢量中 最小的分量。

$$(1/4,1/4,1/4,1/4)\times\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}=(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$$

都是$\frac{3}{4}$，含义是这4项对平均失真的贡献一 样大，随便选一个就行，

我们就选第一个。$D_{max}=\frac{3}{4}$

对应的假想信道矩阵为 选取最小值对应列全为1,其它为0

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$，根据定义此时$R(D_{max})=0$

$$(1/4,1/4,1/4,1/4)\times\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}=(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$$

都是$\frac{3}{4}$，含义是这4项对平均失真的贡献一 样大，随便选一个就行，

贡献前面乘的是$p(y)$,而$p(y)=p(y/x)$

所以假想矩阵的一般形 式为$\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\\a&b&c&d\\a&b&c&d\end{bmatrix}$

$a+b+c+d=1$

4.5。具有符号集合 $U=(u_0,u_1)$的二元信源，信源发生 概率为：$p(u_0)=p, p(u_1)=1-p, 0<p\le 1/2$。$Z$信道如图所示，接收符 号集$V=(v_0,v_1)$,转移概率为:$q(v_0/u_0)=1, q(v_1/u_1)=1-q$。发出符号与接收符号的失真： $d(u_0,v_0)=d(u_1,v_1)=0, d(u_1,v_0)=d(u_0,v_1)=1$。

(1),计算平均失真$\overline{D}$;

(2),率失真函数$R(D)$的最大值是什么？当 q为什么值时可以达到最大值？此时平均失真 $\overline{D}$是多大？

(3),率失真函数$R(D)$的最小值是什么？当 q为什么值时可以达到最小值？此时平均失真 $\overline{D}$是多大？

(4),画出$R(D)-D$的曲线。

题目罗里罗嗦一大堆就 是告诉大家信源概率分 布$(p,1-p)$

失真矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，限制假想信道矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$。

(1)计算平均失真$\overline{D}$,就是失真统计平均。

把输入与输出的联合概 率算出来，乘上对应的 失真矩阵元，求和。

$\overline{D} = q(1-p)$

(2)根据$R(D)-D$曲线，率失真函数的最 大值就是在$\overline{D} = D_{\min}$

这个失真矩阵满足第一 行第二行都有0，所以$D_{\min} = 0$

率失真函数最大值为$R(0) = H(X) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$

此时信道矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，对比原信道矩阵可知$q = 0.$

此时的平均失真$\overline{D} = D_{\min} = 0$

(3)率失真函数在$\mathrm{D}_{\max}$时最小，且值为0

$\{p, 1-p\} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{1-p, p\}$,由于$p$大于$1/2$所以$p > 1-p$。

$\mathrm{D}_{\max} = 1-p$,此时信道矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，对比原信道矩阵可知$q = 1$

（4）图，y轴上取一点，$D=0, H(X)$,

x轴上取一点，$D=D_{\max}, R=0$

画条凹曲线即可。

第4章的东西，如果指望掌 握定义自己来推导，一 般都比较麻烦。

不排除考试的时候可能 会出现用定义算过程也 不复杂的题目。

指望融会贯通的还是要 掌握概念和定义。

指望最小代价应付考试 的，就记那些流程。

5.2, 信源的个各个消息 a,b,c,d.信源$A=00, B=01, C=10, D=11$

每个二进制码元的长度 为5ms。

1）信源等概率分布，平 均信息传输率

$H=\log 4=2b/s$

$H_t=H/t=200bps$

2)信源概率分布为$1/5,1/4,1/4,3/10$计算平均信息率。

$H=1.985b/s$

$H_t=198.55bps$

3)一一对应的定长编码， 还是前面的结果。

5.4若消息符号对应概率分布和二进制编码如下：

$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$
0	10	110	111

1)符号熵

$H(X)=7/4b/s$

2)每个符号的平均二进制码个数。

平均码长$\bar{K}=7/4$

3)各消息符号相互独立，求编码后对应的二进制码序列出现0,1的无条件概率p_0, p_1,以及码序列中的一个二进制码熵，并求相邻码间的条件概率$p(1/1), p(0/1), p(1/0), p(0/0)$

$$p_0=1/2\times1/\bar{K}+1/4\times1/2\times2/\bar{K}+1/8\times1/3\times3/\bar{K}=1/2$$
$$p_1=1/4\times4/7+1/8\times2\times4/7+1/8\times3\times4/7=1/2$$

$$p_0=1/2+1/4\times1/2+1/8\times1/3=2/3$$
$$p_1=1/4\times1/2+1/8\times2/3+1/8\times1=1/3$$

相邻码间的条件概率$p(1/1), p(0/1), p(1/0), p(0/0)$

出现00要求一个0后必须出现消息1，因此$p(0/0)=1/2$

那么$p(1/0)=1/2$

出现一个1，那么这个1有$2/7$概率是消息2，有2/7的概率是消息3，

有3/7的概率是消息4。

消息2必定是10，概率为$2/7$。消息3中的1，有$1/2$概率为后1，产生10，

概率为$2/7\times 1/2$，而消息4中的1，有$1/3$概率为最后的1，接消息1后

产生10，概率为$3/7\times 1/3\times 1/2$

那么出现10的概率为

$$p(0/1)=2/7+1/7+1/14=1/2$$

$$p(1/1)=1/2=2/7\times 1/2+3/7\times 2/3+3/7\times 1/3\times 1/2$$

$5.6\ p0 = 0.005,\ p1 = 0995$,信源输出$\mathrm{L} = 100$的二元序列

在长为$L = 100$的信源序列中只对含有 3个或小于3个0

的个信源序列构成一一 对应的一组定长码。

1）求码字所需的最小长 度；

一一对应的定长码，因 此用不着编码定理，必 须要码长

容纳下所有要编的码

码的数量 $= 1 + C_{100}^{1} + C_{100}^{2} + C_{100}^{3} = 167246$

$2^{L} \geq 167246,\ L \geq \log_{2} 167246 = 17.35$

因此L最少需要18。

2）考虑没有给予编码的 信源序列出现的概率， 问错误概率。

出现未编码的信源序列 即发生错误。即总的概 率减去正确的概率

$$1 - 1 * 0.995^{100} - C_{100}^{1} * 0.995^{99} * 0.005 - C_{100}^{2} * 0.995^{98} * 0.005^{2}$$

$$- C_{100}^{3} * 0.995^{97} * 0.005^{3} = 0.0016$$

5.13.9个符号信源用三进制编 码

1）费诺码和哈夫曼码，求编码效率

三进制费诺码

$1/4$	a			a	1
$1/4$	b	a		ba	2
$1/8$	b	b		bb	2
$1/8$	c	a		ca	2
$1/16$	c	b	a	cba	3
$1/16$	c	b	b	cbb	3
$1/16$	c	c	a	cca	3
$1/32$	c	c	b	ccb	3
$1/32$	c	c	c	ccc	3

三进制哈夫曼码

$1/4$		$1/4$		$1/4$		$1/4$	c	c	1
$1/4$		$1/4$		$1/4$	a	$\underline{1/2}$	a	aa	2
$1/8$		$1/8$		$1/8$	c	$\underline{1/2}$	a	ac	2
$1/8$		$1/8$	a	$\underline{\underline{1/4}}$		$\underline{\underline{1/4}}$	b	ba	2
$1/16$		$1/16$	b	$\underline{\underline{1/4}}$		$\underline{\underline{1/4}}$	$b,$	bb	2
$1/16$		$1/16$	c	$\underline{\underline{1/4}}$		$\underline{\underline{1/4}}$	b	bc	2
$1/16$	a	$\underline{1/8}$		$\underline{1/8}$	b	$\underline{1/2}$	a	aba	3
$1/32$	b	$\underline{1/8}$		$\underline{1/8}$	b	$\underline{1/2}$	a	abb	3
$1/32$	c	$\underline{1/8}$		$\underline{1/8}$	b	$\underline{1/2}$	a	abc	3

2)c后不能紧跟c,则1不能有单独c, 2编码中不能有cc,

3,有c开头的码就没有c结尾的码，反之依然。

由3可得不能是满树哈夫曼码不然必然有c开头和c结尾的。

开始选2个最小的概率开始编试一试

三进制哈夫曼码

$1/4$		$1/4$		$1/4$		$1/4$	a	$\underline{\underline{11/16}}$	a	aa	2
$1/4$		$1/4$		$1/4$		$1/4$	c	$\underline{\underline{11/16}}$	a	ac	2
$1/8$		$1/8$		$1/8$	a	$\underline{5/16}$		$\underline{5/16}$	b	ba	2
$1/8$		$1/8$		$1/8$	b	$\underline{5/16}$		$\underline{5/16}$	b	bb	2
$1/16$		$1/16$	a	$\underline{\underline{3/16}}$		$\underline{\underline{3/16}}$	b	$\underline{\underline{11/16}}$	a,	aba	2
$1/16$		$1/16$	b	$\underline{\underline{3/16}}$		$\underline{\underline{3/16}}$	b	$\underline{\underline{11/16}}$	a	abb	3
$1/16$		$1/16$	c	$\underline{\underline{3/16}}$		$\underline{\underline{3/16}}$	b	$\underline{\underline{11/16}}$	a	abc	3
$1/32$	a	$\underline{1/16}$		$\underline{1/16}$	c	$\underline{5/16}$		$\underline{5/16}$	b	bca	4
$1/32$	b	$\underline{1/16}$		$\underline{1/16}$	c	$\underline{5/16}$		$\underline{5/16}$	b	bcb	4

5.14信源发出的数字1,2,3,4,5,6,7，概率为$1/3,1/3,1/9,1/9,$
$1/27,1/27,1/27.$

1编出二进制哈夫曼码， 求编码效率。

1/3									0	2/3	0	00	2
1/3									1	2/3	0	01	2
1/9					0	2/9	0	1/3			1	100	3
1/9					1	2/9	0	1/3			1	101	3
1/27			1	1/9			1	1/3			1	111	3
1/27	0	2/27	0	1/9			1	1/3			1	1100	4
1/27	1	2/27	0	1/9			1	1/3			1	1101	4

$H(X)=2.29$

平均码长为$4/3+7/9+8/27=2.41$

效率$=0.95$

1编出三进制哈夫曼码， 求编码效率。

$1/3$					1	1	1
$1/3$					2	2	1
$1/9$			1	$1/3$	0	01	2
$1/9$			2	$1/3$	0	02	2
$1/27$	0	$1/9$	0	$1/3$	0	000	3
$1/27$	1	$1/9$	0	$1/3$	0	001	3
$1/27$	2	$1/9$	0	$1/3$	0	012	3

平均码长为$2/3+4/9+1/3=1.44$

效率$=2.29/1.44/1.58=1$

5.16离散无记忆信源发出 A, B, C,3种符号，其概率分布为$5/9, 1/3, 1/9$,引用算术编码对序列 CABA编码。并解码

信源符号	概率分布	积累概率
a	$5/9$	0
b	$1/3$	$5/9$
c	$1/9$	$8/9$

$P()=0, p()=1$

$P(c)=P()+p()P_c=0+8/9=0, p(c)=8/9$

$P(ca)=P(c)+p(c)P_a=8/9+1/9\times 0=8/9, p(ca)=5/81$

$P(cab)=P(ca)+p(ca)P_b=8/9+5/81\times 5/9=673/729, p(cab)=5/243$

$P(caba)=P(cab)+p(cab)P_a=673/729+5/243\times 0=673/729$

$p(caba)=25/2187$

码长$L=-\log_2 25/2187=6.4=7$

$P(caba)$化二进制 $=0.1110110\ ****,$

算术编码与香农码不同 之处最后的 ****不为0时，需要进位得编码

因此编码为1110111

译码：译第一位

$C=1110111$，恢复小数$C=0.93$

$0.93\in(8/9,1)$,因此第一位是c,

译第二位，去掉第一位 的积累概率并根据第一 位放大

$(0.93-8/9)\div 1/9=0.37$

$0.37\in(0,5/9)$,因此第二位是a

第三位

$(0.37-0)\div 5/9=0.667$,第三位是b

第四位

$(0.667-5/9)\div 1/3=0.334$,第四位是$a$。

算术译码是译不完的， 需知道码长译码。