1.一阶马尔可夫链信源有 3个符号$(u_1,u_2,u_3)$,转移概率为： $p(u_1/u_1)=1/2$
$p(u_2/u_1)=1/2$, $p(u_3/u_1)=0$, $p(u_1/u_2)=1/3$, $p(u_2/u_2)=0$, $p(u_3/u_2)=2/3$
$p(u_1/u_3)=1/3$, $p(u_2/u_3)=2/3$, $p(u_3/u_3)=0$.画出状态图并求出各符 号稳态概率。

这是一阶马尔可夫矩阵， 只记忆到前1个符号。因此
用上次输出的符号就可 以标记信源的状态，记 为
$S(u_1),S(u_2),S(u_3)$,题目中给的概率是信源 状态转移的概率。

写出1步转移概率矩阵：

| | $S(u_1)$ | $S(u_2)$ | $S(u_3)$ |
|---|---|---|---|
| $S(u_1)$ | $1/2$ | $1/2$ | $0$ |
| $S(u_2)$ | $1/3$ | $0$ | $2/3$ |
| $S(u_3)$ | $1/3$ | $2/3$ | $0$ |

注意：$p(a/b):b$是条件$a$是结果。概率转移矩阵 行求和$=1$。

求稳态：从一步转移矩 阵上看不出稳态存在与 否(有0元)。

只管求，不管存在不存 在。

设信源稳态中3种状态的概率为 $W=(w_1,w_2,w_3)$

$WP=W$(转移一次稳态中各状态 概率不变)

$$(w_1,w_2,w_3)\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & 0 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix}=(w_1,w_2,w_3)$$

$$\frac{1}{2}w_1+\frac{1}{3}w_2+\frac{1}{3}w_3=w_1$$

$$\frac{1}{2}w_1+\frac{2}{3}w_3=w_2$$

$$\frac{2}{3}w_2=w_3$$

方程不独立，任取 2个,(取第二，三个比较方便 ），

加上概率归一方程 $w_1+w_2+w_3=1$,求解：

$$w_1=\frac{10}{25},w_2=\frac{9}{25},w_1=\frac{6}{25}$$

信源在稳态下有 $(10/25,9/25,6/25)$的概率处于$S(u_1),S(u_2),S(u_3)$

其中$S(u_1)$态有$(1/2,1/2,0)$的概率向$S(u_1),S(u_2),S(u_3)$转移，即有

$(1/2,1/2,0)$输出$u_1,u_2,u_3$。

同样$S(u_2)$态有$(1/3,0,2/3)$的概率输出$u_1,u_2,u_3$。

$S(u_3)$态有$(1/3,2/3,0)$的概率输出$u_1,u_2,u_3$。

此时稳态输出信源各符 号的概率当然应该用全 概率公式:

就是三个态的概率叠加

$$p(u_1)=\frac{10}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{25}\times\frac{1}{3}+\frac{6}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{25}$$

$$p(u_2)=\frac{10}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{25}\times 0+\frac{6}{25}\times\frac{2}{3}=\frac{9}{25}$$

$$p(u_3)=\frac{10}{25}\times 0+\frac{9}{25}\times\frac{2}{3}+\frac{6}{25}\times 0=\frac{6}{25}$$

正好就是稳态概率分布 $(10/25,9/25,6/25)$:这是必然的。

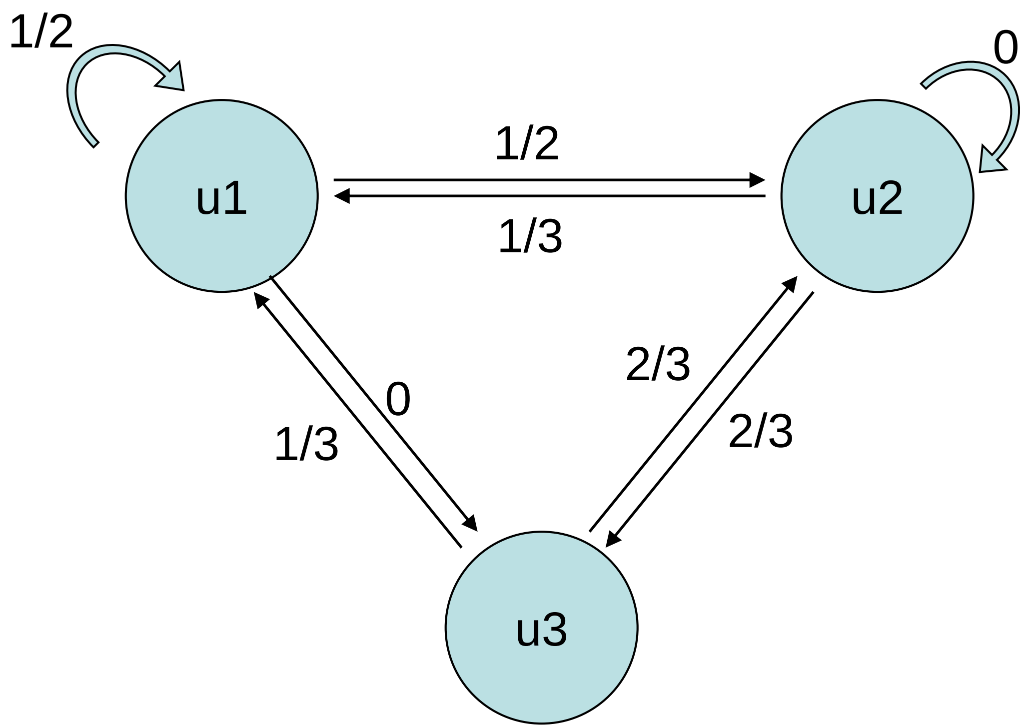
由稳态分布的概念保证 ，稳态分布输出下个符 号(变成下个状态 )的

概率固定，那么稳态分 布各态的概率当然就是 输出下个符号的概率。

不然就不是稳态了。

马尔可夫信源的稳态其 实不应该叫稳态，而应 该称为稳态分布。它不是一个状态，而是 所有状态合成的概率 (分布)空间。

在一阶马尔可夫信源中 ，稳态分布的概率分布 就是输出符号的概率分布。



由符号集 $\{0,1\}$ 组成的二阶马尔可夫 链，其转移概率为 $p(0/00)=0.8$, $p(0/11)=0.2$, $p(1/00)=0.2$, $p(1/11)=0.8$, $p(0/01)=0.5$, $p(0/10)=0.5$, $p(1/01)=0.5$, $p(1/10)=0.5$。画出状态图，计算各 状态的稳态概率。

先写出概率转移矩阵： 二阶马尔可夫信源的信 源状态不能用一个输出符号表示，要用上 次和上上次两个输出的 符号来表示。

把上上次输入写在左边， 上次输入写在右边

概率转移矩阵为：

| | 00 | 01 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0.8 | 0.2 | | |
| 01 | | | 0.5 | 0.5 |
| 10 | 0.5 | 0.5 | | |
| 11 | | | 0.2 | 0.8 |

$00 \to 0$, 说明的是信源从 00转移到00的概率。

$11 \to 0$, 说明的是信源从 11转移到10的概率。

同理给出其它转移概率 数值。

概率转移矩阵每行的求 和已经为1。因此根据概率归一把剩下的补上0,完整的一步概率转移矩 阵为:

| | 00 | 01 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0.8 | 0.2 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 10 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0.2 | 0.8 |

求稳态$W=(w_1,w_2,w_3,w_4)$

$WP=W$

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}=(w_1,w_2,w_3,w_4)$$

得到4个方程:

$$(w_1, w_2, w_3, w_4)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

得到4个方程：

$$0.8w_1 + 0.5w_3 = w_1, 0.2w_1 + 0.5w_3 = w_2$$

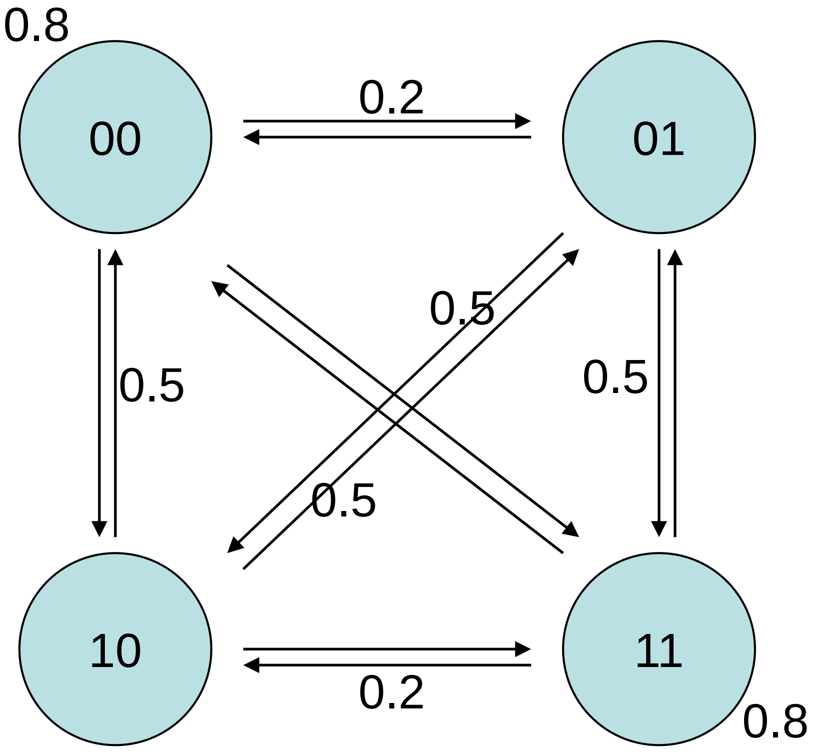
$$0.5w_2 + 0.2w_4 = w_3, 0.5w_2 + 0.8w_4 = w_4$$

加上$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$求解：

$$w_1 = \frac{5}{14}, w_2 = \frac{1}{7}, w_3 = \frac{1}{7}, w_4 = \frac{5}{14}$$

输出下个符号的概率分 布则需要全概率公式求 。

比一阶要多个步骤。


0.8
00
0.2
01
0.5
0.5
0.5
0.5
10
11
0.2
0.8

2，同时掷两个骰子，各面的概率都为$1/6$，求：

1),3和5同时出现事件的自信息量。

2),两个1同时出现事件的自信息量。

3),两个点数各种组合(无序对)的熵或平均信息量。

4),两个点数之和的熵。

5),两个点数中至少有一个是1的自信息。

自信息：对应概率空间中的单个事件。

其意义为该事件出现能消除的不确定度。

$I(x) = -\log p(x)$。

平均自信息：对应概率空间，是概率空间中所有事件自信息的统计平均。

$$H(X) = \sum_x p(x)I(x) = -\sum_x p(x)\log p(x)$$

1),3和5同时出现事件的自信息 量。

同时掷两个骰子就是两 个独立事件的联合事件，

构成联合概率空间，事 件为联合事件，概率为 单独事件概率乘积。

题意不考虑哪个骰子是 3哪个是5。

同时出现3,5的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$I(3,5)=-\log(\frac{1}{18})$选单位$bit$则取对数底为2

$I(3,5)=\log_2(18)bit=4.17b$

2), 两个1同时出现事件的自信息 量。

同时出现1,1的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$I(1,1)=-\log(\frac{1}{36})=5.17b$

3), 两个点数各种组合 (无序对)的熵或平均信息量。

这是求平均自信息，对 应概率空间要清楚。

概率空间的事件是互相 独立的基本事件。是对 这些

基本事件的自信息的统 计平均。

无序对一共：$6+\dfrac{C_6^1C_5^1}{2}=21$个。(乘法口诀表)

其中两个骰子相同对的 概率为$1/36$，不同的为$1/18$

因此总的平均自信息 (信息熵)

$$H(X)=-\sum_x p(x)\log\ p(x)=6\times\frac{1}{36}\times\log(36)+15\times\frac{1}{18}\times\log(18)$$

$$=4.34b$$

4),两个点数之和的熵。

两个点数和这个概率空 间和刚才的不一样。

这个概率空间只有 $2 \to 12$ 一共11个事件。

需要算出每个事件的概 率。

$$p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 1/18$$

$$p(4) = p(10) = 1/36 + 1/18 = 1/12$$

$$p(5) = p(9) = 1/18 + 1/18 = 1/9$$

$$p(6) = p(8) = 1/36 + 1/9 = 5/36$$

$$p(7) = 1/18 \times 3 = 1/6$$

$$H(X) = 2 \times \frac{1}{18} \log 18 + 2 \times \frac{1}{12} \log 12 + 2 \times \frac{1}{9} \log 9 +$$

$$2 \times \frac{5}{36} \log \frac{36}{5} + \frac{1}{6} \log 6 = 3.27b$$

5), 两个点数中至少有一个 是1的自信息。

这个事件又回到了原来 的联合概率空间。

至少有一个是1个概率为 $\frac{1}{36}+5\times\frac{1}{18}=\frac{11}{36}$

$$I(x)=\log\frac{36}{11}=1.71b$$

10.在一个袋中放5个黑球,10个白球，摸一个球为一 次实验，摸出的球不再放入。求：

1),一次实验包含的不确定 度。

2),第一次实验$X$摸出的是黑球，第二次 实验$Y$给出的不确定度。

3),第一次实验$X$摸出的是白球，第二次 实验$Y$给出的不确定度。

4),第二次实验$Y$包含的不确定度。

1),一次实验包含的不确定 度

一次实验是一个概率空 间，其中有黑白两种事 件。

概率空间的不确定度就 是指这个概率空间的信 息熵。

黑的概率为$1/3$,白的概率为$2/3$

概率空间为为$X(w,b)=(p(w)=1/3,\ p(b)=2/3)$

$$H(X)=1/3\log 3+2/3\log 3/2=0.92b$$

2), 第一次实验$X$摸出的是黑球，第二次 实验$Y$给出的不确定度。

3), 第一次实验$X$摸出的是白球，第二次 实验$Y$给出的不确定度。

同样$Y$也是一个概率空间

这个并不是条件熵$H(Y/X)$，而是以$X$中一个事件为条件的信 息熵

条件熵对应的两个概率 空间。

这里是$H(Y/x)$，只是条件概率矩阵中 求一行平均自信息。

条件概率矩阵每一行都 是个概率空间，整体不 构成概率空间。

联合概率矩阵整体构成 一个概率空间，需要把 条件概率矩阵乘以对应 $x$的概率

$H(Y/x)$没有公式只能从定义算 。

$b/b=2/7, w/b=5/7, b/w=5/14, w/w=9/14$

条件概率矩阵写为$P(Y/X)=\begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 5/14 & 9/14 \end{pmatrix}$

$$H(Y/b)=\frac{2}{7}\log\frac{7}{2}+\frac{5}{7}\log\frac{7}{5}=0.86b$$

$$H(Y/w)=\frac{5}{14}\log\frac{14}{5}+\frac{9}{14}\log\frac{14}{9}=0.94b$$

4),第二次实验$Y$包含的不确定度。

需要确定$Y$概率空间$b$和$w$事件的概率。

用全概率公式从条件概 率矩阵中来求

$$P(Y/X)=\begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 5/14 & 9/14 \end{pmatrix}$$

$$p(b)=\sum_x p(x)p(y/x)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{14}=\frac{1}{3}$$

$$p(w)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{14}=\frac{2}{3}$$

$$H(Y)=H(X)=0.92b$$

不给定$X$，则没有收到任何信息 ，$Y$实验信源的不确定度

没有任何减少，当然和 单做$Y$实验信息熵一样。

11),有一个可旋转的圆盘， 盘面上被均匀分成38份，用1...38数字标示。其中2份涂绿色,18份涂红色,18份涂黑色，圆盘停转后 指针指向某一数字和颜色。

1),若仅对颜色感兴趣，计 算平均不确定度。

2),若对颜色和数字都感兴 趣，计算平均不确定度 。

3),若颜色已知时，计算条 件熵。

1)只对颜色感兴趣，则概 率空间一共3个事件绿$g$,红$r$,黑$b$

概率分布为$p(X)=(1/19,9/19,9/19)$

所谓平均不确定度就是 信息熵

$$H(X)=1/19\log 19+2\times 9/19\log(19/9)=1.245b$$

2),若对颜色和数字都感兴 趣，计算平均不确定度 。

看到数字则概率空间分 为38个事件，该事件可以直 接用数字标记，不需要颜色。

数字出现概率相等为$1/38$

$H(XY)=H(Y)=\log 38=5.25b$

3),若颜色已知时，计算条 件熵。

题意为求$Y$概率空间以$X$空间里事件为条件的条 件熵。

写出条件概率矩阵 :任意假定颜色涂的数字 (不影响结果)

| | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | 20 | 21 | $\cdots$ | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $1/2$ | $1/2$ | 0 | $\cdots$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 |
| $r$ | 0 | 0 | $1/18$ | $\cdots$ | $1/18$ | 0 | $\cdots$ | 0 |
| $b$ | 0 | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | $1/18$ | $\cdots$ | $1/18$ |

条件熵为条件概率矩阵 每一行平均自信息的统 计平均

$$H(Y/X)=-\sum_x p(x)\sum_y p(y/x)\log p(y/x)$$

$$H(Y/X)=\frac{1}{19}\times(\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2)$$

$$+\frac{9}{19}\times(\frac{1}{18}\log 18\times 18)+\frac{9}{19}\times(\frac{1}{18}\log 18\times 18)$$

$$=4.00b$$

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X)$$

$$H(Y/X)=H(XY)-H(X)$$

这儿有$H(XY)=H(Y)$

$$H(Y/X)=H(Y)-H(X)=5.25-1.245=4.00b$$

$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=0, Y$为条件$X$就没有信息了，

知道了$y$必定知道$x$。

显然知道了数字，一定 知道了颜色。

注意下这儿的$H(Y/X)$和前面$H(Y/b), H(Y/w)$的区别。

12, 两个实验$X$和$Y$, $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$,

$$\text{联合概率为}\ r(x_i, y_j)=r_{ij}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{bmatrix}$$

1), 如果有人告诉你$X$和$Y$的实验结果，得到的平 均信息量是多少？

2), 有人告诉你$Y$的实验结果，等到的平 均信息量是多少？

3), 在已知$Y$的实验结果下，告诉你 $X$的实验结果，得到的平 均信息量是多少？

1), $X, Y$实验联合结果的平均自 信息。联合概率空间所 有事件自信息的统计平均，联合概率矩 阵所有概率自信息的统 计平均。

$$H(XY)=2\times\frac{7}{24}\log\frac{24}{7}+4\times\frac{1}{4}\log 4+\frac{1}{4}\log 4=2.3b$$

2),有人告诉你$Y$的实验结果，等到的平 均信息量是多少？

$Y$实验的平均自信息，需 要知道$Y$概率空间的概率分布。

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i y_j)$$

$$p(y)=(1/3,1/3,1/3)$$

$$H(Y)=\log 3=1.58b$$

3),在已知$Y$的实验结果下，告诉你 $X$的实验结果，得到的平 均信息量是多少？

题意求$H(X/Y)$

$$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=2.3-1.58=0.72b$$

根据条件概率矩阵，直 接用定义算$H(X/Y)$

需要知道$P(X/Y)$，我们把联合概率矩阵 写成以y为行

的形式$r_{ji}$: $\begin{bmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{bmatrix}$,在这题对称。

每行要归一化才是条件 概率矩阵

$$P(X/Y)=\begin{bmatrix} 7/8 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}, p(Y)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$H(X/Y)=\frac{1}{3}(\frac{7}{8}\log\frac{8}{7}+\frac{1}{8}\log 8)+\frac{1}{3}(\frac{1}{8}\log 8\times 2+\frac{3}{4}\log\frac{4}{3})$$

$$+\frac{1}{3}(\frac{7}{8}\log\frac{8}{7}+\frac{1}{8}\log 8)=0.72b/s$$

13．有两个二元随机变量$X$和$Y$，它们的联合概率如表所示。并定义另一随机变量Z＝$XY$（一般乘积）。试计算：

(1)$H(X)$、$H(Y)$、$H(Z)$、$H(XZ)$、$H(YZ)$和$H(XYZ)$。
(2)$H(X/Y)$、$H(Y/X)$、$H(X/Z)$、$H(Z/X)$、$H(Y/Z)$、$H(Z/Y)$、$H(X/YZ)$、$H(Y/XZ)$和$H(Z/XY)$。
(3)$I(X;Y)$、$I(X;Z)$、$I(Y;Z)$、$I(X;Y/Z)$、$I(Y;Z/X)$和$I(X;Z/Y)$。

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/8 | 3/8 |
| 1 | 3/8 | 1/8 |

$$H(X)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\times 2=1b/s，竖着加 p(x)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$$

$$H(Y)=1b/s，横着加$$

$$H(Z)有些XY乘起来一样，所以 H(Z)\neq H(XY)$$

$$0的概率7/8,1的概率1/8所以$$

| Z | 0 | 1 |
|---|---|---|
| p | 7/8 | 1/8 |

$$H(Z)=-\frac{7}{8}\log\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}=0.54$$

$$H(XZ)就是算X,Z的联合概率。$$

| Z \ $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/2 | 3/8 |
| 1 | 0 | 1/8 |

$$H(XZ)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}=1.41b/s$$

$H(YZ)$就是算$Y,Z$的联合概率。

$H(YZ)=H(XZ)=1.41b/s$

| Y \ Z | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/2 | 3/8 |
| 1 | 0 | 1/8 |

$H(X,Y,Z)$就是算$X,Y,Z$的联合概率。注意到$Z$由$XY$确定，$H(Z/XY)=0$。

所以$H(XYZ)$═$H(XY)=-2\times\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}-2\times\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}=1.81b/s$

$H(X/Y)=H(XY)-H(Y)=0.81b/s$

$H(Y/X)=H(XY)-H(X)=0.81b/s$

$H(X/Z)=H(XZ)-H(Z)=0.86b/s$

$H(Z/X)=H(XZ)-H(X)=0.41b/s$

$H(Y/Z)=H(XZ)-H(Z)=0.86b/s$

$H(Z/Y)=H(XZ)-H(Y)=0.41b/s$

$H(X/YZ)=H(XYZ)-H(YZ)=0.40b/s$

$H(Y/XZ)=H(XYZ)-H(XZ)=0.40b/s$

$H(Z/XY)=H(XYZ)-H(XY)=0b/s$

互信息是分别处在两个 关联概率空间中的两个 事件互相给出的信息量 。

$$I(x_i;y_j)=\log\frac{1}{p(x_i)}-\log\frac{1}{p(x_i/y_j)}=\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}=I(y_j;x_i)$$

$x$的自信息 $-$ $y$发生下$x$还剩多少 $=$ $y$发生给出了关于$x$的多少信息量。

平均互信息就是联合概 率空间互信息的统计平 均。

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=I(Y;X)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)=0.19b/s$$

$$I(X;Z)=H(X)+H(Z)-H(XZ)=H(X)-H(X/Z)=H(Z)-H(Z/X)=0.14b/s$$

$$I(Y;Z)=H(Y)+H(Z)-H(YZ)=H(Y)-H(Y/Z)=H(Z)-H(Z/Y)=0.14b/s$$

$$I(X;Y/Z)=I(X;YZ)-I(X;Z)=H(X)-H(X/YZ)-I(X;Z)=0.46b/s$$

$$I(Y;Z/X)=I(Y;ZX)-I(Y;X)=H(Y)-H(Y/ZX)-H(Y)+H(Y/X)=0.41b/s$$

$$I(X;Z/Y)=I(X;ZY)-I(X;Y)=H(X)-H(X/ZY)-H(X)+H(X/Y)=0.41b/s$$

公式小结：

$$H(XY)=H(YX),H(Y/X)\neq H(X/Y)$$

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X)=H(Y)+H(X/Y)$$

$$H(XYZ)=H(YZ)+H(X/YZ)$$

$$I(X;Y)=I(Y;X)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$I(X;YZ)=H(X)-H(X/YZ)$$

$$I(X;Y/Z)=I(X;YZ)-I(X;Z)$$

以$Z$为条件$Y$给出关于$X$的平均互信息 =

$YZ$一起给出$X$的平均互信息 $-$ $Z$单独给出关于$X$的平均互信息。

$I(X;Y/Z)=I(Y/Z;X)$-------------因为$I(X;Y)=I(Y;X)$

$=H(Y/Z)+H(X)-H(Y/Z,X)$-------因为$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$

$=H(Y/Z)+H(X)-H(Y,Z,X)+H(Z,X)$-因为$H(X,Y,Z)=H(Y,Z)+H(X/Y,Z)$

$=H(Y/Z)+H(X)-H(X,Y,Z)+H(X,Z)$-因为$H(X,Y)=H(Y,X)$

$=0.86+1-1.81+1.41=1.46b/s$

16, 黑白传真机的消息元只 有黑色和白色两种，一 般气象图上，黑色出现概率为0.3,白色出现概率为0.7。

1), 假设黑白消息前后无关，求信源熵。

2), 黑白之间有关联，其转 移概率为$p(w/w)=0.9143$, $p(b/w)=0.0857$ $p(w/b)=0.2$, $p(b/b)=0.8$。求这个一阶马尔可夫 信源的信源熵。

3), 比较两种信源熵大小， 并说明原因。

1), $H(X)=-0.3\log 0.3-0.7\log 0.7=0.881b$

2), 马尔可夫信源达到稳态 分布才有信源熵的概念 。

先求稳态$W=(w_w,w_b), w_w+w_b=1$

$$(w_w,w_b)\times\begin{pmatrix}0.9143 & 0.0857\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}=(w_w,w_b)$$

解得$w_w=0.7, w_b=0.3$

马尔可夫信源稳态的信 源熵是稳态分布下各个 状态信源熵的统计平均 。

$w$态的熵为$H(w)=-0.9173\log 0.9173-0.0857\log 0.0857=0.418b$

$b$态的熵为$H(b)=-0.2\log 0.2-0.8\log 0.8=0.722b$

$H(W)=0.7\times 0.418+0.3\times 0.722=0.509b$

3), $H(W) < H(X)$

因为符号之间有关联概率，比只知道原始出现概率要多知道点信息，所以剩下的信息自然少了。

29), 有一个一阶平稳马尔可夫链 $X_1, X_2, \ldots,$ 各 $X_r$ 取值于 $A(a_1, a_2, a_3)$。已知起始概率 $p(X)$ 为 $p_1 = 1/2,\ p_2 = p_3 = 1/4$。

转移概率如右所示。

| $ij$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 1/4 | 1/4 |
| 2 | 2/3 | 0 | 1/3 |
| 3 | 2/3 | 1/3 | 0 |

1), 求 $(X_1, X_2, X_3)$ 的联合熵和平均符号熵。

2), 求这个链的极限平均符号熵。

3), 求 $H_0, H_1, H_2$ 和他们对应的冗余度。

$$1求H(X_1X_2X_3)=-\sum p(x_1x_2x_3)\log p(x_1x_2x_3)$$

$$p(111)=1/8,\ p(112)=1/16,\ p(113)=1/16$$

$$p(121)=1/12,\ p(122)=0,\ p(123)=1/24$$

$$p(131)=1/12,\ p(132)=1/24,\ p(133)=0$$

$$p(211)=1/12,\ p(212)=1/24,\ p(213)=1/24$$

$$p(221)=0,\ p(222)=0,\ p(223)=0$$

$$p(231)=1/18,\ p(232)=1/36,\ p(233)=0$$

$$p(311)=1/12,\ p(312)=1/24,\ p(313)=1/24$$

$$p(321)=1/18,\ p(322)=0,\ p(323)=1/36$$

$$p(331)=0,\ p(332)=0,\ p(333)=0,$$

$$H(X_1X_2X_3)=-\frac{1}{8}\log 8-\frac{2}{16}\log 16-\frac{4}{12}\log 12$$

$$-\frac{2}{18}\log 18-\frac{6}{24}\log 24-\frac{2}{36}\log 36=3.97b$$

求平均符号熵，3个符号除一下即可。 $H(\overline{X})=1.32b$

2求极限平均符号熵,即信源熵。先求稳态分 布$W=(w1,w2,w3)$

稳态要求$WP=W, w1+w2+w3=1$

$$\frac{1}{2}w1+\frac{2}{3}w2+\frac{2}{3}w3=w1$$

$$\frac{1}{4}w1+\frac{1}{3}w3=w2$$

$$\frac{1}{4}w1+\frac{1}{3}w2=w3$$

$$W=(\frac{4}{7},\frac{3}{14},\frac{3}{14})$$

即达到稳态分布时，信 源有$4/7$概率处于$a1$状态,$3/14$在$a2$态,$3/14$在$a3$态。

那么此时发出一个符号 的平均符号熵为:

$$H_{\infty}(X)=\frac{4}{7}H^{a1}(X)+\frac{3}{14}H^{a2}(X)+\frac{3}{14}H^{a3}(X)$$

$$=\frac{4}{7}H(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})+\frac{3}{14}H(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3})+\frac{3}{14}H(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)=1.25b$$

3求$H_0, H_1, H_2$。

$H_0$是什么意思？就是连初 始概率都不知道情况下 可能产生的最大信源熵 。(最大符号熵)，也就是各符号概率相 等下的信源熵。

$H_0 = \log 3 = 1.58b$

$H_1$是什么意思？知道初始 概率分布，但是不知道 任何符号关联信息时可 能产生的最大熵。不知道 关联，信源状态不改变 (无记忆信源)。

$H_1$即是初始分布的信源熵 $H_1 = 1.5b$

$H_2$是什么意思？知道两个 符号之间关联，但是不 知道三个包括以上之间符号关联时的熵。

知道两个符号的关联， 这样一个平稳信源就是 一阶马尔可夫信源，求 其极限信源熵即是$H_2$,本题的信源就是一阶马 尔可夫信源，没有更多 关联了。

$H_2 = H_\infty = 1.25b$

求冗余度$r_m = 1 - \eta_m = 1 - \dfrac{H_\infty}{H_m}$

$$r_0 = 1 - \frac{1.25}{1.58} = 0.21, r_1 = 1 - \frac{1.25}{1.5} = 0.17, r_2 = 1 - \frac{1.25}{1.25} = 0$$

31. 设有一信源，它在开始时以p(a)=0.6,p(b)=0.3,p(c)=0.1的概率发出X。如果X1为a时，X2为a,b,c的概率为1/3,X1为b时，X2为a,b,c的概率为1/3。,X1为c时，X2为a,b,的概率为1/2,为c的概率为0。而且后面发出Xi的概率只与Xi－1有关，又有p(Xi|Xi-1)=p(X2|X1)，
i>=3。试利用马尔可夫信源的图示法画出状态转移图，并求出转移矩阵和信源熵H无穷。

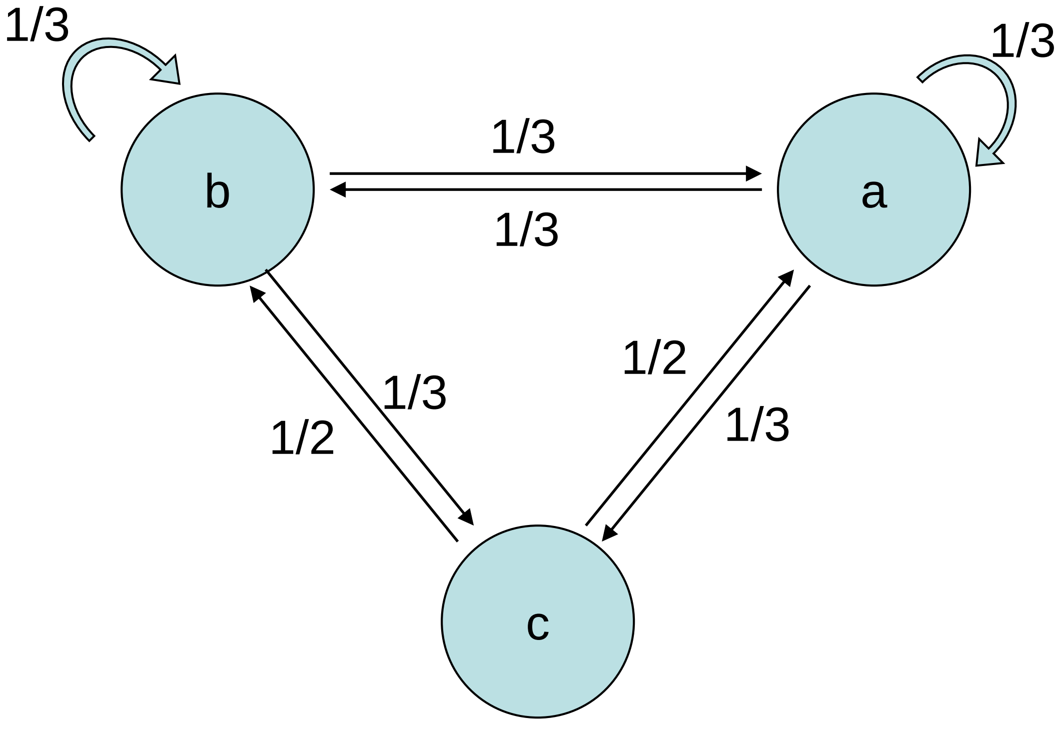
由题意可知：这是个一 阶的马尔可夫信源，信 源一共3个状态。

转移概率矩阵为：$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

求信源熵即是就极限平 均符号熵，必须先求稳 态分布。

$$W = (3/8,3/8,1/4)$$

$$H_{\infty} = 3/8H(X/a) + 3/8H(X/b) + 1/4H(X/c) = 1.44b/s$$


1/3
1/3
1/3
b
a
1/3
1/2
1/3
1/2
1/3
c

20．给定语音信号样值$X$的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$， $-\infty<x<\infty$

，求$H_c(X)$，并证明它小于同样方差的正态变量的连续熵。

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}(\log\frac{1}{2}\lambda+\log e^{-\lambda x})dx=-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda dx-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log e^{-\lambda x}dx$$

$$-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log\frac{1}{2}\lambda dx=\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=-\log\frac{1}{2}\lambda$$

$$-\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log e^{-\lambda x}dx=\log e\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\lambda x dx=\log e\int_{0}^{+\infty}e^{-t}tdt,t=\lambda x$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-t}tdt=-\int_{0}^{+\infty}tde^{-t}=-te^{-t}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt=0-e^{-t}\Big|_{0}^{\infty}=1$$

$$H(X) = -\log\frac{1}{2}\lambda + \log e = \log\frac{2e}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}x^2dx - (\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}xdx)^2$$

$$= \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}x^2dx - 0 = -x^2e^{-\lambda x}\,|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty}2e^{-\lambda x}xdx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$E(X) = 0, \sigma^2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$的正态分布为$p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$,

$$H(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) = \log(\frac{2\sqrt{\pi e}}{\lambda}) > \log(\frac{2e}{\lambda})$$