	基频序列(信号)	周期	基频	k次谐波序列(信号)
连续周期	$e^{j\Omega_0 t}=e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}$	T_0	$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	$e^{j\Omega_0 n}=e^{j\frac{2\pi}{N}n}$	N	$\omega_0=\frac{2\pi}{N}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$　　$\therefore$ $W_N^n=W_N^{n+kN}$　　$W_N^{kn}=W_{N/k}^n$

$W_N^n=(W_N^{-n})^*$

$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{nk}(W_N^{mk})^*=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-m)k}=\begin{cases}1, & n-m=rN\\ 0, & n-m\neq rN.\end{cases}$

r为整数

设序列 $x[n]$ 在 $0\sim M-1$ 内有值（有限长序列看成周期序列的一个周期）

则其 N 点的 DFT $(N\geq M)$

$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}$，$k=0,1,\cdots,N-1$.

$\therefore$ $\tilde{X}[k]=X[(k)_N]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}X[k+mN]$

$\tilde{X}[k]$ 为 $X[k]$ 以 N 为周期延拓的序列.

$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$　$\Rightarrow$　$\tilde{X}[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}$

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

☆ 取 $\tilde{X}[k]$ 的主值区间，则：$X[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

$X[k] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} x[n]$

$\therefore$ $X[k]$ 为 $x[n]$ 在Z变换在单位圆上的抽样.

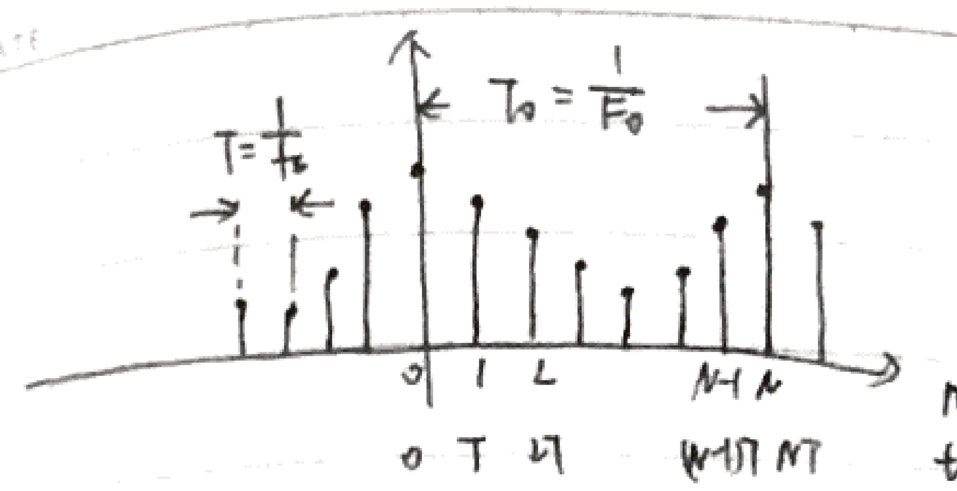
即 $x[n]$ DTFT $X(e^{j\omega})$ 在 $0\leq\omega\leq2\pi$ 上的 N 个间隔为 $\frac{2\pi}{N}$ 的等间隔点 $\omega_k=\frac{2\pi k}{N}$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$ 的抽样值.

DFT与DTFT的精确插值计算

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\omega n}$

$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}\right]e^{-j\omega n}$

$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\omega-\frac{2\pi k}{N})n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\frac{\sin\left(\frac{\omega N-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega N-2\pi k}{2N}\right)}\cdot e^{-j[(\omega-\frac{2\pi k}{N})][(N-1)/2]}$

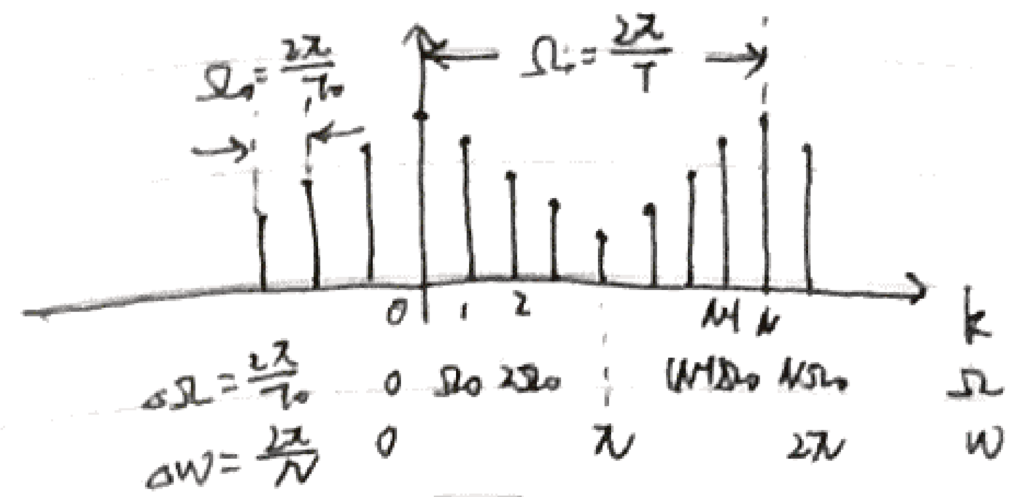


$\therefore T_0=NT$

T_0 ⇑ 时序列周期 ⇒ 频率抽样间隔 ⇑ $\frac{2\pi}{T_0}$

时采样间隔 ⇒ 频序列周期

⇓ T　　⇓ $\frac{2\pi}{T}$



$\therefore \omega=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$

$\omega_k=\boxed{\frac{2\pi k}{N}}=\frac{2\pi}{NT}\cdot kT=\Omega_k T=2\pi f_k T=\boxed{2\pi\frac{f_k}{f_s}}$

$\Rightarrow$ $\frac{f_k}{k}=\frac{f_s}{N}=\frac{1}{NT}$ ＜ $f_k=k\cdot\frac{f_s}{N}$

☆ ⇒ 时域抽样频率 f_s 即为频域的一个周期.

$\therefore$ 当频域 N 点采样时，相邻 2 采样点间隔为 $\frac{f_s}{N}$. 则第 k 个采样点对应频率为 $k\cdot\frac{f_s}{N}$.

⇒ 时域序列频率即为频域抽样频率.

$\therefore$ $\frac{f_s}{N}=\frac{1}{NT}$

实部：$\frac{1}{2}(x[n]+x^*[n])$

虚部：$\frac{1}{2}(x[n]-x^*[n])$

偶部：$\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])$

奇部：$\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])$

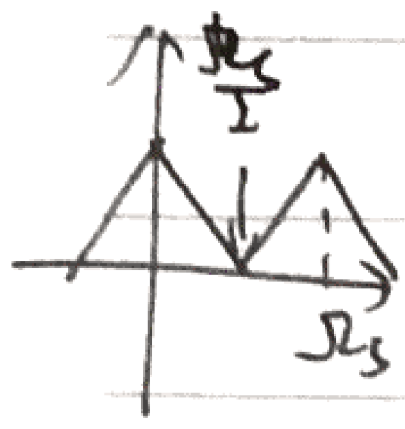
共轭对称部分：$\frac{1}{2}(x[n]+x^*[-n])$.

反　　：$\frac{1}{2}(x[n]-x^*[-n])$.

DATE S M T W T F S

信号恢复.

当 $|\Omega| \le \frac{\Omega_s}{2}$ 时, $\hat{X}_a(j\Omega) = X_a(j\Omega)$



$$H(j\Omega)=\begin{cases} T, & |\Omega|<\frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega|\geq\frac{\Omega_s}{2}\end{cases} \longleftrightarrow h(t)=\frac{\sin(\frac{\Omega_s}{2}t)}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t)/T}$$

则 $X_a(j\Omega)=\hat{X}_a(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$

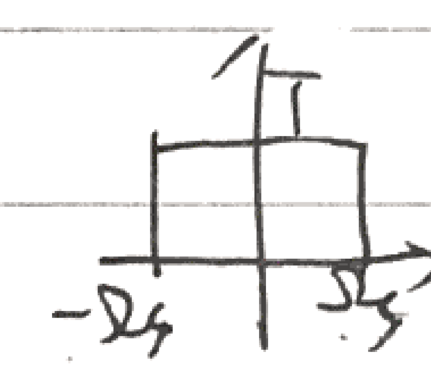
$g_{\Omega_s}(t) \leftrightarrow \Omega_s Sa(\frac{\Omega_s}{2}\Omega)$

$\therefore \frac{\Omega_s}{2\pi} Sa(\frac{\Omega_s}{2}\Omega) \leftrightarrow g_{\Omega_s}(\Omega)$

$T\cdot g_{\Omega_s}(j\Omega) \leftrightarrow \frac{T\Omega_s}{2\pi} Sa(\frac{\Omega_s}{2}\Omega)$

$= Sa(\frac{\pi}{T}t)$

$= \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \longleftrightarrow$



$= h(t)$.

$x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$x_a(t) = \hat{x}_a(t) * h(t)$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * h(t)$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot h(t-nT)$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot \frac{\sin\frac{\pi(t-nT)}{T}}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$

$\frac{\pi(t-nT)}{T}$

实偶 → 实偶.　　　　虚偶 → 虚偶

$x[n] = x[-n] = x^*[n]$

↓

$X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$

实奇 → 虚奇　　　　虚奇 → 实奇.

$x[n] = -x[-n] = x^*[n]$

↓

$X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

二. DTFT. 离散时间傅里叶变换.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad \Rightarrow e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n} \Rightarrow X(e^{j\omega})\text{以}2\pi\text{为周期}.$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

$x[n]$ 绝对可和 ⇒ DTFT存在.

$x[n]$ 平方可和(能量有限) ⇒ DTFT存在

DTFT为序列在单位圆上的Z变换.

$$\therefore X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$x[n]=1 \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi k)$　常数序列为以 $\omega=0$ 为中心, 2π 整数倍为间隔的冲激函数

冲激面积为 2π.

$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$. 复常数序列. $\omega=\omega_0$.

CTFT: $X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$　　连续 非周期 ⇒ 非周期 连续

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega.$

(采样间隔T)

DTFT: $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$　　离散 非周期 ⇒ 周期($\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$), 连续

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

FS: $X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$　　连续 周期(T_0) ⇒ 非周期, 离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$).

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$

DFS: $\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$　　离散(采样间隔T), 周期(T_0) ⇒ 周期($\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$), 离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$)

$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

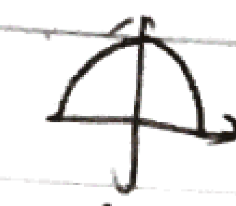
DFT: $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}$, $\boxed{k=0,1,\dots,N-1}$.

$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$, $\boxed{n=0,1,\dots,N-1}$.

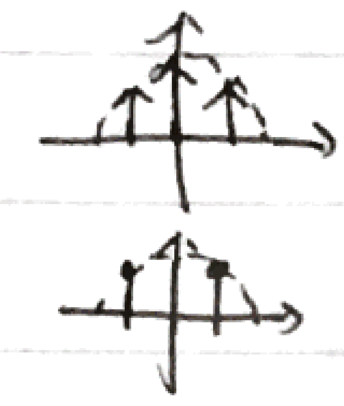
DFT为DFS在 $n,k\in[0,N-1]$ 的一段.

数4-3楼　21日．10:00

$x_a(t)$：模拟信号



$\hat{x}_a(t)$：理想采样信号 $= x_a(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,\delta(t-nT)$



$x[n]$：离散时间抽样序列 $= x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$

$x_a(t) = A\cos(\Omega_0 t+\varphi)$　$\boxed{T=\frac{2\pi}{\Omega_0}}$　Ω_0↑，变化越快．

$x[n] = A\cos(\Omega_0 nT+\varphi)$　　其中：T⇒抽样周期．$f_s=\frac{1}{T}$⇒抽样频率．　$\Omega_s=2\pi f_s$⇒抽样角频率．

$= A\cos(\frac{\Omega_0}{f_s}n+\varphi)$　　f：模拟频率．

$= A\cos(\frac{2\pi f}{f_s}n+\varphi)$　　Ω_0：模拟角频率．

$= A\cos(\omega n+\varphi)$．　而 $\boxed{\frac{2\pi}{\omega}=\frac{N}{k}\Rightarrow T}$　　ω：数字角频率

不是 ω↑，变化越快

$\omega=\frac{\Omega_0}{f_s}=\frac{2\pi f}{f_s}$　数字角频率 = 模拟角频率被抽样频率归一化结果．

= 2π 模拟频率被抽样频率归一化结果

f	0	$f_s/2$	f_s	
Ω_0	0	$\Omega_s/2$	Ω_s	$=\omega f_s$
ω	0	π	2π	$=2\pi f/f_s$

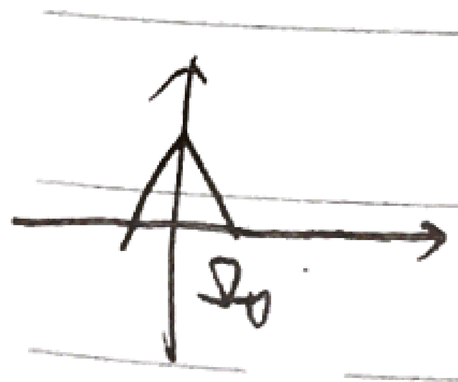
$\hat{x}_a(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega) * [\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)]$　　$\omega=\frac{\Omega}{f_s}$

$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a[j(\Omega-k\Omega_s)]$．　$\boxed{\Omega=\frac{\omega}{T}\Leftarrow\omega=\Omega T}$　　$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$　采样角频率．

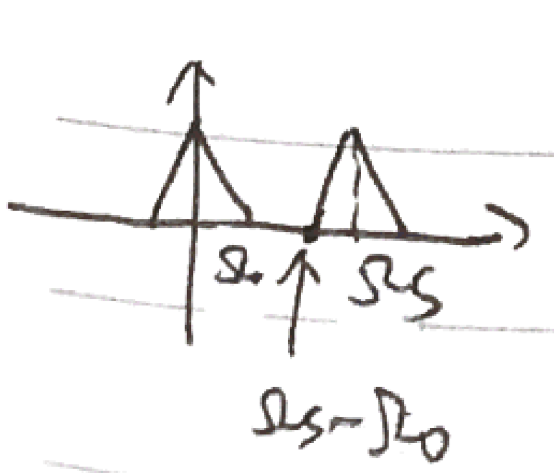
∴ $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是 $X_a(j\Omega)$ 以 Ω_s 为周期的周期延拓．幅度有 f_s 加权．　时域抽样 频域周期延拓

幅度会随 f_s 改变．



∴ $\Omega_s-\Omega_0\geq\Omega_0\Rightarrow\Omega_s\geq2\Omega_0$ ⇒ 无混叠．　$\Omega=2\pi f$．

⇒ $\boxed{f_s\geq2f}$



当 $f=\frac{1}{2}f_s$ 时．　$\omega=\frac{2\pi f}{f_s}=\pi$．

抽样频率 f_s 对应的 $\omega_s=\frac{2\pi f_s}{f_s}=2\pi$ ⇒ $\boxed{\hat{X}_a(j\omega/T)=\hat{X}_a(j\Omega)|_{\Omega=\frac{\omega}{T}}\ \text{延拓周期为}\ 2\pi}$

$a^n u[n]$, $-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$

$\Downarrow$ $|z|>|a|$ $\qquad$ $\Downarrow$ $|z|<|a|$.

$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z) \qquad e^{-jwm}X(e^{jw})$

$a^n x(n) \leftrightarrow X(\frac{z}{a}) \qquad X(\frac{1}{a}e^{jw})$

$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad j\frac{dX(e^{jw})}{dw} \qquad -e^{jw}\frac{dX(e^{jw})}{de^{jw}} = -e^{jw}\frac{1}{je^{jw}}$

$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad X^*(e^{-jw})$

$x(-n) \leftrightarrow X(\frac{1}{z}) \qquad X(e^{-jw})$

$\sum_{m=0}^{n} x(m) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}X(z)$.

$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

$x(\infty) = \lim_{z=1}(z-1)X(z)$

$\delta[n] \leftrightarrow 1$

$x[n]=1 \quad -\infty<n<\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$.

$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jwk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w-2\pi k)$.

$e^{jw_0 n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)\cdot e^{jw_0 n} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w-w_0-2\pi k)$

因果性: $h[n]=0$, $n<0$ 时. $\Rightarrow$ 收敛域为 $|z|>R_{h-}$ (包含 $z=\infty$).

稳定性: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$ $\Rightarrow$ 收敛域包括单位圆.

因果稳定性 $\Rightarrow$ ~~收敛域为~~ 从单位圆 $|z|=1$ 到 $|z|=\infty$ 整个平面收敛

$\Leftrightarrow$ 极点全在单位圆内.

	复频域	频域
连续时间信号	拉氏(s)	傅里叶
离散时间信号	Z域	傅里叶.

一、Z变换.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz.$$

收敛域：$|X(z)|<\infty$.

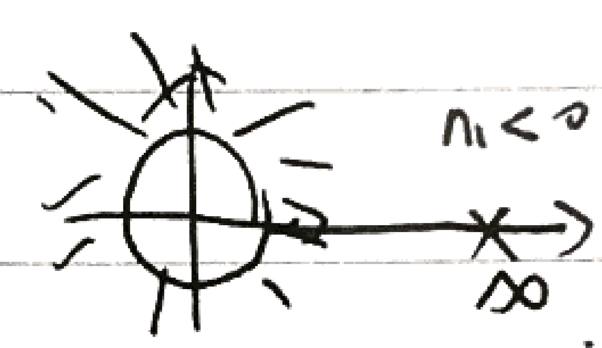
① 有限长序列.

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}.$$

除 $z=0$，$z=\infty$ 外，$X(z)$ 一定收敛.

② 右边序列.

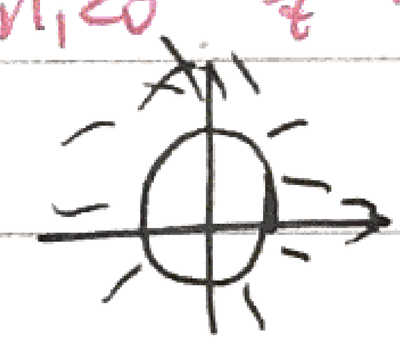
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad R_{x-}<|z|<\infty.$$



$n_1<0$.

Ⅰ：$n_1<0$，则不包含 $z=\infty$. $\Rightarrow -n_1>0$，$z^{-n_1}=\infty$ X.

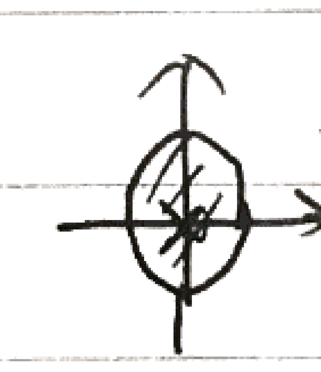
Ⅱ：$n_1\geq 0$. 因果序列. $z=\infty$ 也可以，收敛域包括 $z=\infty$. $-n_1\leq 0$ z^{n_1} ✓.



$n_1\geq 0$.

③ 左边序列.

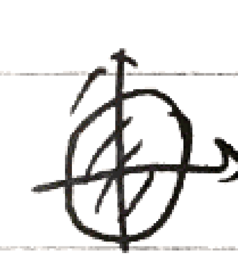
$$X(z)=\sum_{-\infty}^{n=n_2} x(n)z^{-n}. \qquad 0<|z|<R_{x+}.$$



$n_2>0$.

Ⅰ：$n_2>0$. $-n_2<0$. $z^{-n_2}|_{z=0}$. $\Rightarrow (\frac{1}{z})^{n_2}$ X.

Ⅱ：$n_2\leq 0$ $-n_2\geq 0$ $z^{-n_2}=0$. ✓ $\Rightarrow$ 反因果序列.



$n_2\leq 0$

④ 双边序列.

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}.$$

cascade 串联

parallel 并联

LTI { FIR (MA) 全零点；IIR { AR 全极点；ARMA 零极点.

有限长冲激响应系统.

FIR.

$y[n]=\sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$

全零点系统，无极点

（滑动平均系统）MA

无限长冲激响应

IIR

$y[n]=x[n]-\sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$.

全极点系统（自回归系统）AR

零极点系统（自回归滑动平均）ARMA

$y[n]=\sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$

FIR是 z^{-1} 的多项式，⇒只在0处有极点.

线性相位滤波器

$\theta(w)=kw+\varphi$.

IIR是 z^{-1} 的有理分式 ⇒ 有除0外极点.

非线性相位滤波器

数字滤波器基本结构：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k].$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

FIR：$a_k=0$. $\boxed{\text{直接型、级联型、线性相位型}}$ （$h[n]=\pm h[N-n]$ （长为 $N+1$））

$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$. ⇒ 无反馈，只有非递归结构

$H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$ ⇒ 在 $0<|z|<\infty$ 的z域中只有零点.（全零点系统）.

即滑动平均（MA）系统. 系统全部极点都在 $z=0$ 处.

$\boxed{\text{可以有严格线性相位}}$.

IIR：至少有一个 $a_k\neq 0$. $\boxed{\text{直接I型、直接II型、级联、并联}}$.

$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$ ⇒ 有反馈，递归结构.

$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$ ⇒ 在 $0<|z|<\infty$ 内上一定有极点 { 只有 $b_0\neq 0$，其余 $b_k=0$. ⇒全极点系统（自回归系统）. ；多个 $b_k\neq 0$ ⇒ 零－极点系统 自回归滑动平均系统

FIR滤波器

$$H(e^{jw})=e^{j\theta(w)}\cdot|H(e^{jw})|=|H(e^{jw})|e^{j(kw+\varphi)}$$

$\theta(w)=kw+\varphi$ ⇒ 线性相位 $=-\frac{N}{2}w+\varphi$ { 1、2型 $\varphi=0$ 或 π；3、4型 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$

$h[n]=h[N-n]$ $n\in[0,N]$

$\theta(w)=-\frac{N}{2}w$

① 长度(N+1)为奇数 ⇒ 1型系统 ⇒ 四种滤波器

滤波器阶数N为偶. 在 $z=\pm1$ 处有偶数个或0个零点.

② 长度(N+1)为偶数 ⇒ 2型系统

滤波器阶数N为奇. 在 $z=1$ 处有偶数个零点. $\boxed{\text{在 } z=-1 \text{ 处有奇数个零点}}$. ⇑ 不能设计高通.

$\boxed{z=1=e^{jw}\Rightarrow w=0.\quad z=-1=e^{jw}\Rightarrow w=\pi}$

$h[n]=-h[N-n]$ $n\in[0,N]$

$\theta(w)=-\frac{N}{2}w+\frac{\pi}{2}$

① 长度(N+1)为奇数 ⇒ 3型

阶数N为偶

$\boxed{\text{在 } z=\pm1 \text{ 处有奇数}}$ 个零点 ⇑ 不能低通、高通、带阻.

② 长度(N+1)为偶数 ⇒ 4型

阶数N为奇.

$\boxed{\text{在 } z=1 \text{ 处有奇数}}$ 个零点 ⇑ 不能低通. 在 $z=-1$ 处有偶数个零点.

零点约束：

FIR滤波器若有零点 $z=z_1$，则 $z=z_1^*$，$z=\frac{1}{z_1}$，$z=\frac{1}{z_1^*}$ 也为其零点.

FIR滤波器设计方法.

窗函数法（时域方法）.

①. 给定 $H_d(e^{jw})$ 求出 $h_d[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{jw})e^{jwn}\,dw$.

②. 用$\underbrace{\text{窗函数}}_{\text{长度为}N}$截断无限长的 $h_d[n]$ ⇒ $h_d[n]\cdot w[n]=h_t[n]$. $0\le n\le N-1$. ⇒ $h_t[n-m]$，$m=\frac{N-1}{2}$

③. 求 $H_t(e^{jw})$，检验 $H_t(e^{jw})$ 是否满足 $H_d(e^{jw})$ 要求.

第四章 离散时间系统

全零点系统（FIR系统，有限长冲激响应系统，滑动平均系统）

$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$$

$$=y[n-1]+\frac{1}{M}\left(x[n]-x[n-M]\right).$$

滑动平均滤波器可 $\boxed{\text{去除噪声干扰}}$.

线性内插器 ⇒ $\boxed{\text{放大}}$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}\left(x[n-1]+x[n+1]\right)$$ 2点内插

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{3}\left(x[n-2]+x[n+2]\right)+\frac{2}{3}\left(x[n-1]+x[n+1]\right)$$

中值滤波器（中位数）. ⇒ $\boxed{\text{去除随机噪声（冲激噪声）}}$

$y[n]=\mathrm{med}\{x[n-k],\cdots x[n-1],x[n],x[n+1]\cdots x[n+k]\}$. 取中位数.

---

① 线性

令 $x[n]=k_1x_1[n]+k_2x_2[n]$

$y[n]=F(x[n])\overset{?}{=}k_1y_1[n]+k_2y_2[n]$. k_1, $x[n]$为整体

② 时移性.

令 $x_1[n]=x[n-n_0]$

$y_1[n]=F(x_1[n])\overset{?}{=}y[n-n_0]$ y_1, n为整体

③ 因果性 收敛域包括 $R_{x-}<|z|\le\infty$.

$y[n]$是否与未来值有关.

④ 稳定性. 收敛域包括 $R_{x-}<|z|\le\infty$.

$|x[n]|<\infty$时. $|y[n]|<\infty$. 有界输入，有界输出. $\boxed{R_{x-}\le 1}$

或 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$. 因果稳定性：极点在单位圆内.

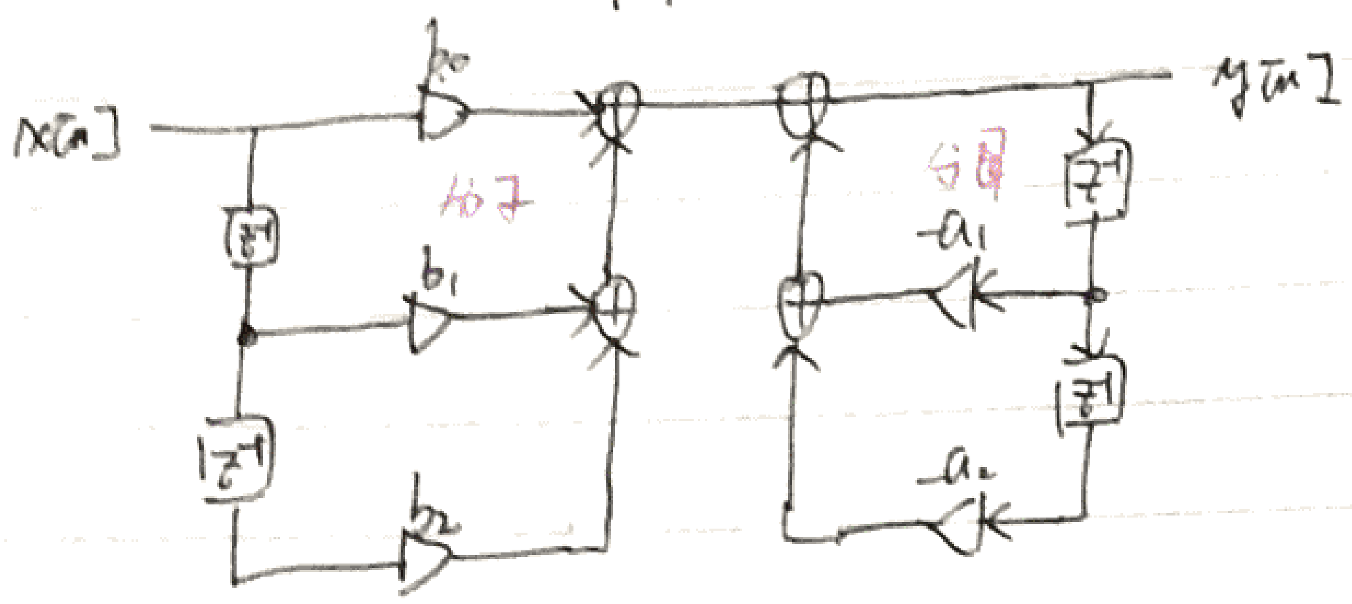
IIR 滤波器结构.

一、直接型.

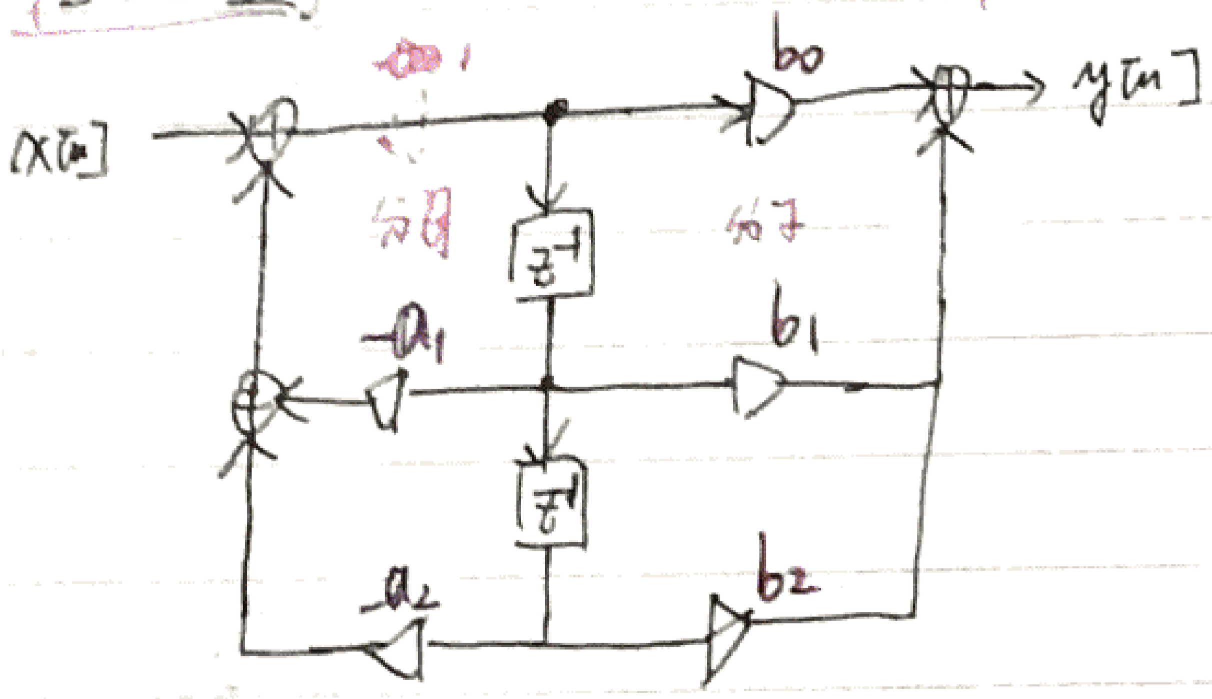
1. 直接I型. M阶 N阶 共(M+N)个延时单元.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k].$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

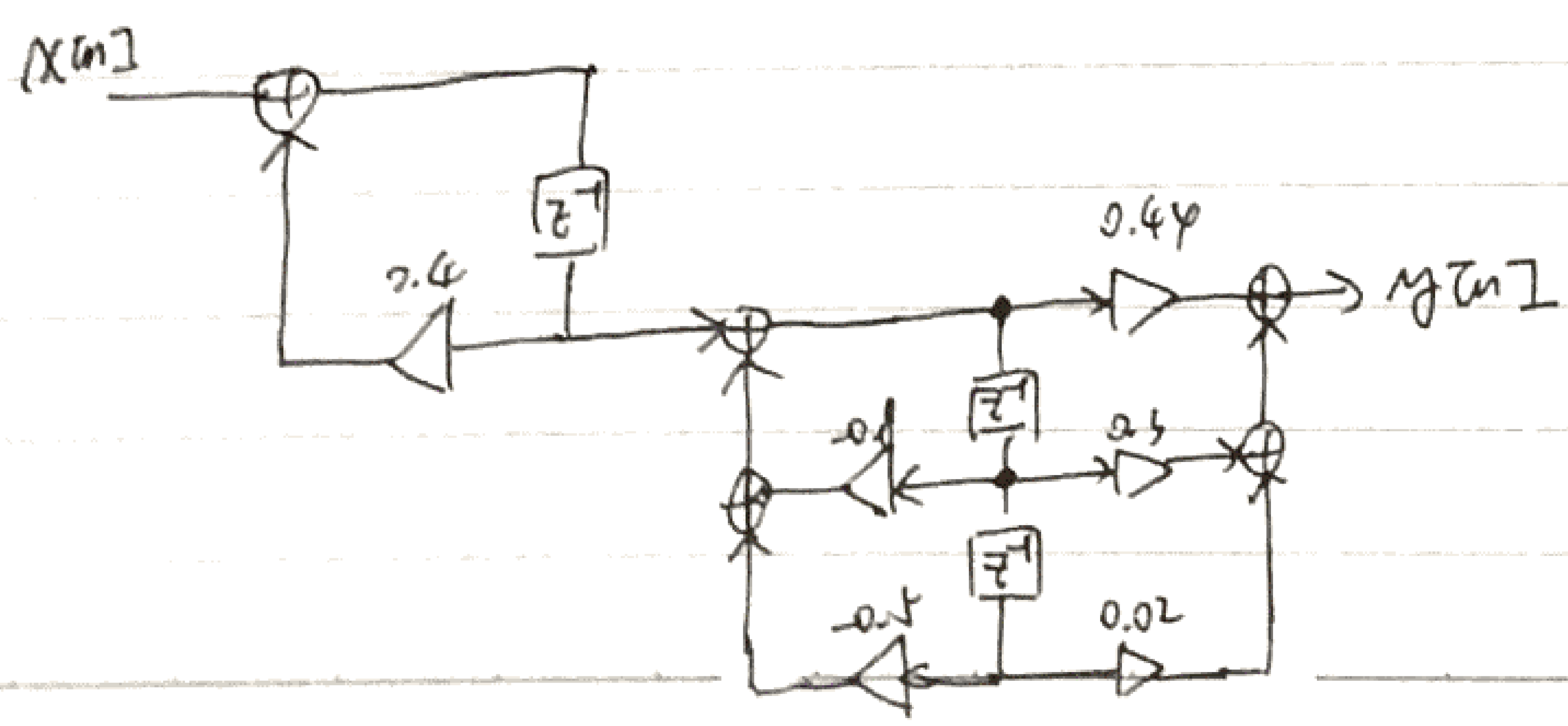


2. 直接II型 需 max[M,N] 个延时单元.



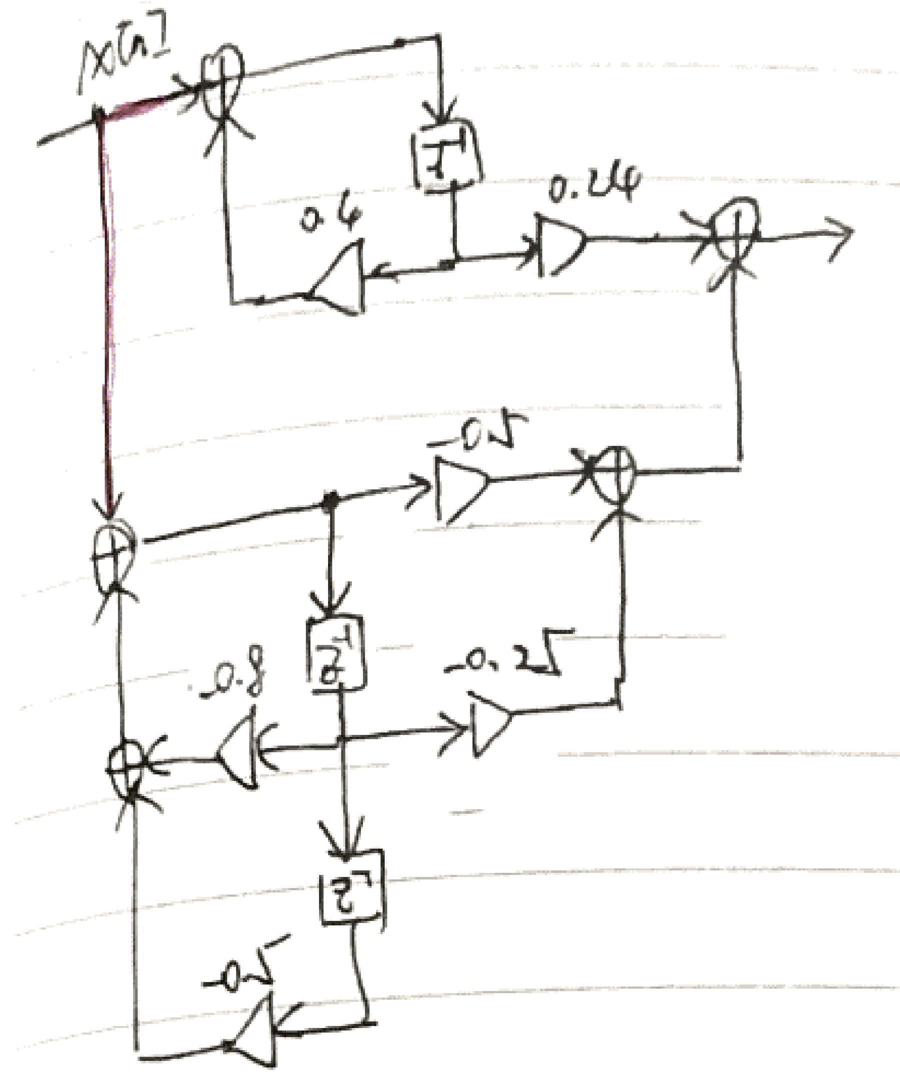
3. 级联(串联).

$$H(z)=C\cdot\prod_k \frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}=\left(\frac{0.44+0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}{1+0.8z^{-1}+0.5z^{-2}}\right)\left(\frac{z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}\right).$$



4. 并联.

$$H(z)=\sum_k\left(\frac{\gamma_{1k}z^{-1}+\gamma_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}\right)=\frac{0.24z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}+\frac{-0.5-0.25z^{-1}}{1+0.8z^{-1}+0.5z^{-2}}$$



$y[n] = x_1[n] ⊛ x_2[n]$ 　　 $y[n] = x_1[n]\cdot x_2[n]$

则 $Y[k] = X_1[k]\cdot X_2[k]$ 　　 $Y[k] = \frac{1}{N} X[k] ⊛ X[k]$

圆周卷积与线性卷积的关系

$$y_l[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\, x_2[n-m] = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1[m]\, x_2[n-m] \qquad 0\le n\le N_1+N_2-2$$

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x_1[m]\cdot x_2[\langle n-m\rangle_L] \qquad 0\le n\le L-1$$

二、当 $x_2[n]$ 以L为周期作周期延拓

$\therefore \tilde{x}_2[n] = x_2[\langle n\rangle_L] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n+rL]$

∴ 则 $y_c[n] = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1[m]\cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n+rL-m]$

$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l[n+rL]$

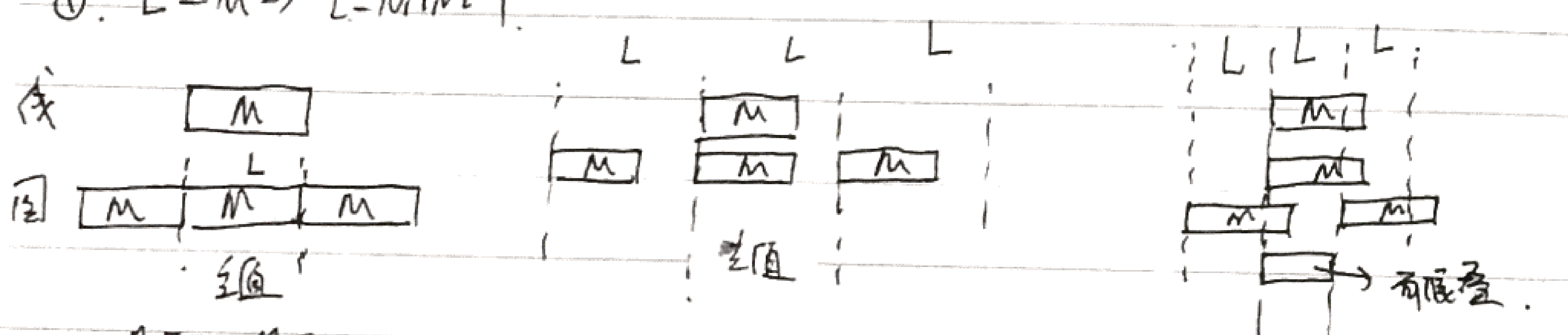
$$\boxed{\therefore y_c[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l[n+rL]\cdot R_L(n)}$$

L点的圆周卷积和 = 两序列线性卷积和以L为周期周期延拓后的主值序列

记线性卷积长度 $M = N_1+N_2-1$.

圆周卷积长度 L

① $L = M \Rightarrow L = N_1+N_2-1$.



$y_c[n] = y_l[n]$ 　　 $y_c[n] = y_l[n]$ 　　 $y_c[n] \ne y_l[n]$

$\therefore L \ge N_1+N_2-1$ 时，

$y_c[n] = y_l[n]$

例. $x[n] = [1,3,2,4]$

$h[n] = [2,1,3]$

求 $y_l[n]$ 和 4点的 $y_c[n]$.

```
      1  3  2  4
         2  1  3
   ------------------
      3  9  6 12
   1  3  2  4
2  6  4  8
   ------------------
2  7 10 19 10 12
```

$\therefore y_l[n] = [2\ 7\ 10\ 19\ 10\ 12]$

```
2  7 10 19 | 10 12
2  7 10 19 | 10 12
   10 12
-----------------
12 19 10 19
```

$\therefore y_c[n] = [12\ 19\ 10\ 19]$

频域抽样定理

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

以 $\omega = 0\sim 2\pi$ 间 N 个均匀点上（间隔 $\frac{2\pi}{N}$）抽样

则 $\tilde{X}(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] W_N^{kn}$

DFS: $\tilde{x}_N[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$

DFT: $\therefore x_N[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]\, R_N[k]$. 主值区间

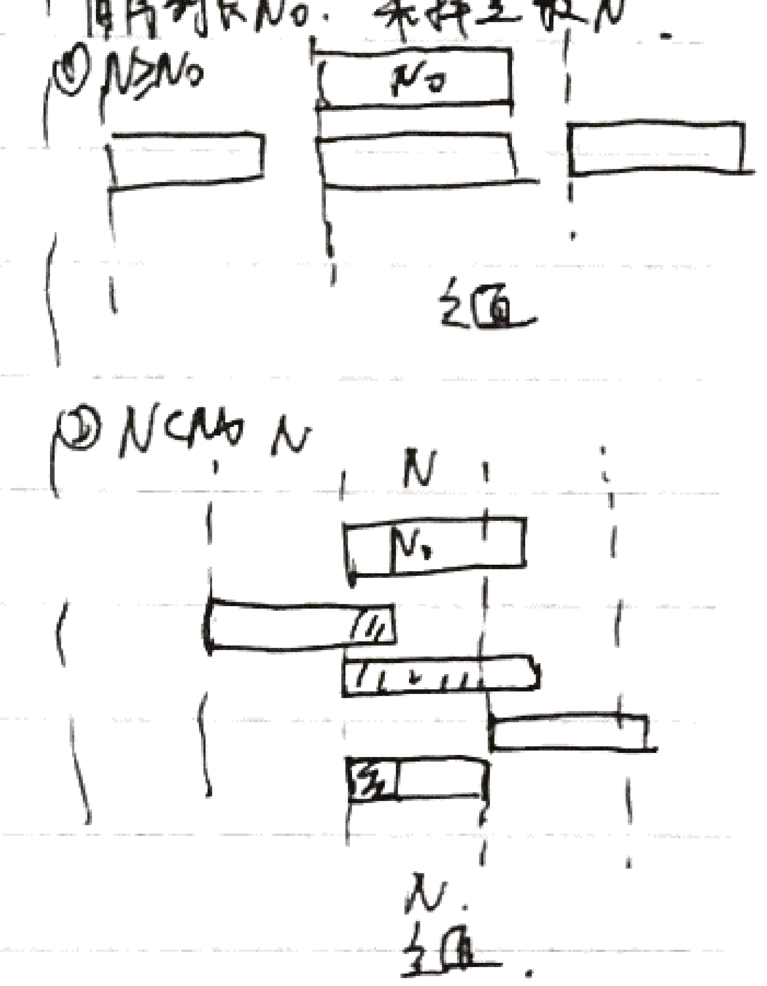
∴ 频域抽样（间隔 $\frac{2\pi}{N}$）对应时域序列以N为周期作周期延拓后主值序列 → 一个周期的抽样函数

二、 $\hat{x}_a(t) = x_a(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\Omega-k\Omega_s)]$ → 抽样函数

∴ 时域抽样，对应频域序列以 Ω_s 为周期作周期延拓，并 $\frac{1}{T}$ 的比例变化.

原序列长 N_0，采样点数 N



∴ $N\ge N_0$ 时可恢复

三、利用圆周卷积计算线性卷积

取L点，$L \ge N_1+N_2-1$ 时 $y_c[n] = y_l[n]$

~~$x[n] \xrightarrow{L\ge N_1+N_2-1} y_c[n]$~~

$\xrightarrow{DFT,\ FFT} y_c[n]\ (L\ge N_1+N_2-1) \Rightarrow y_l[n]$

例：$x_1[n], N_1,\ x_2[n], N_2$ 的线性卷积.

① 定 $L = 2^m \ge N_1+N_2-1$

② $x_1[n] = \begin{cases} x_1[n] & 0\sim N_1-1 \\ 0 & N_1\sim L-1 \end{cases}$

$x_2[n] = \begin{cases} x_2[n] & 0\sim N_2-1 \\ 0 & N_2\sim L-1 \end{cases}$

③ $Y[k] = X_1[k]\cdot X_2[k]$ （L点DFT）

③ $y[n]$.

④ $y_l[n] = y_c[n]$.

FIR

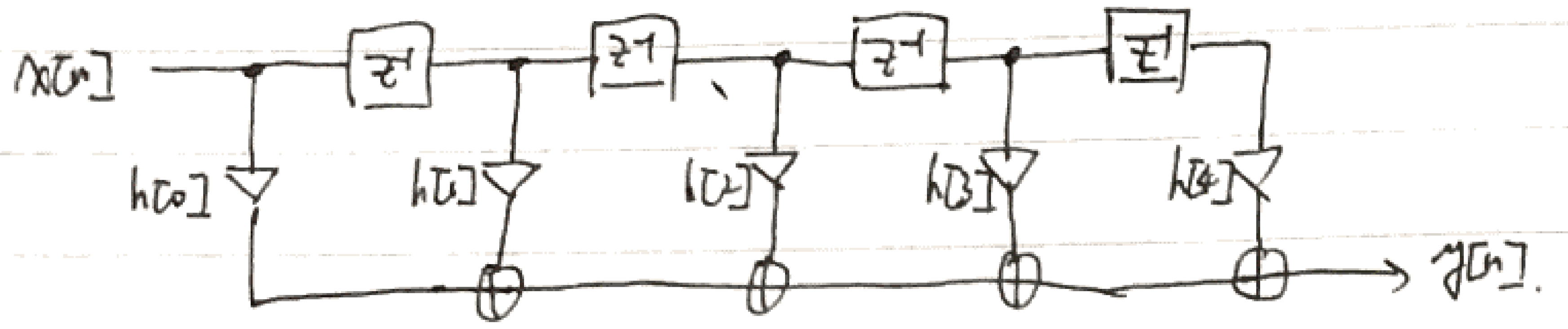
$(a_k=0)$. $y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

一、直接型. [对于N-1阶(N点)直接型有N次乘法, N-1次加法]

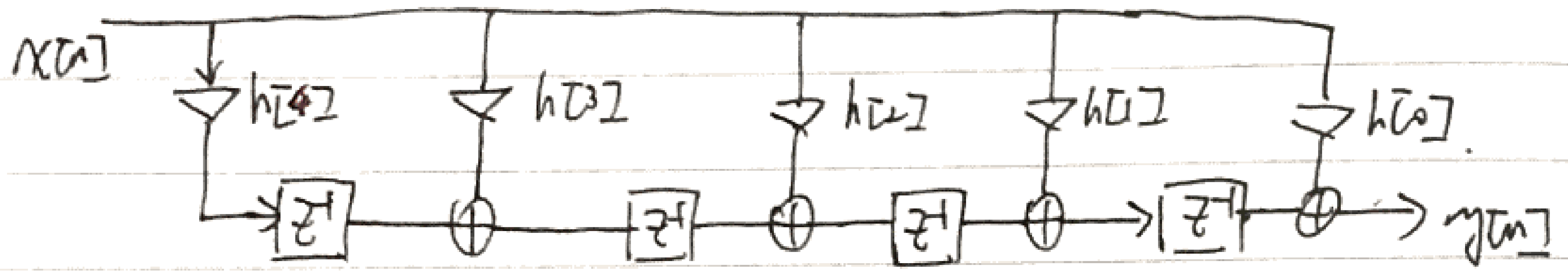
$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} b_k x[n-k]$. N点序列.

$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{n=0}^{N-1} b[n] z^{-n}$ $n_{max}=N-1$ 为N-1阶

①. 横向结构.

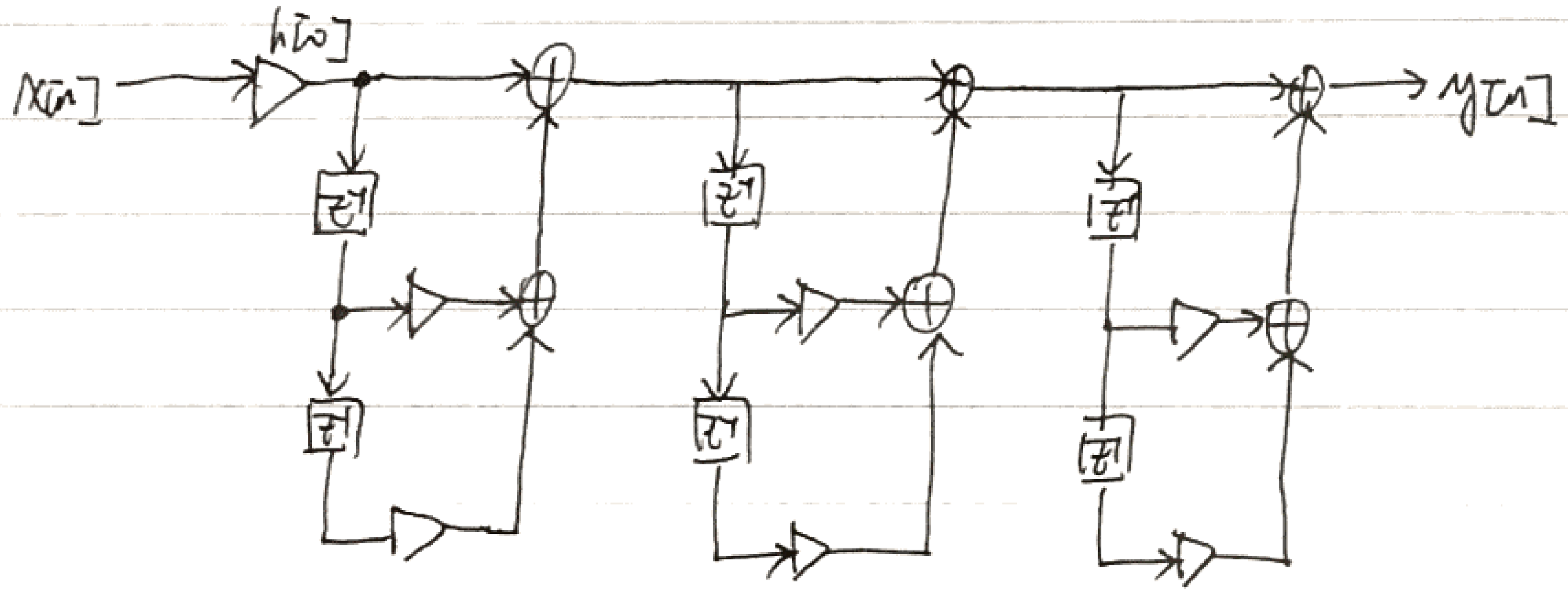


②. 转置结构



二、级联型. [每对零点都由一个子系统表示]

$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} b[n] z^{-n}=\prod_{k=1}^{k}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})$

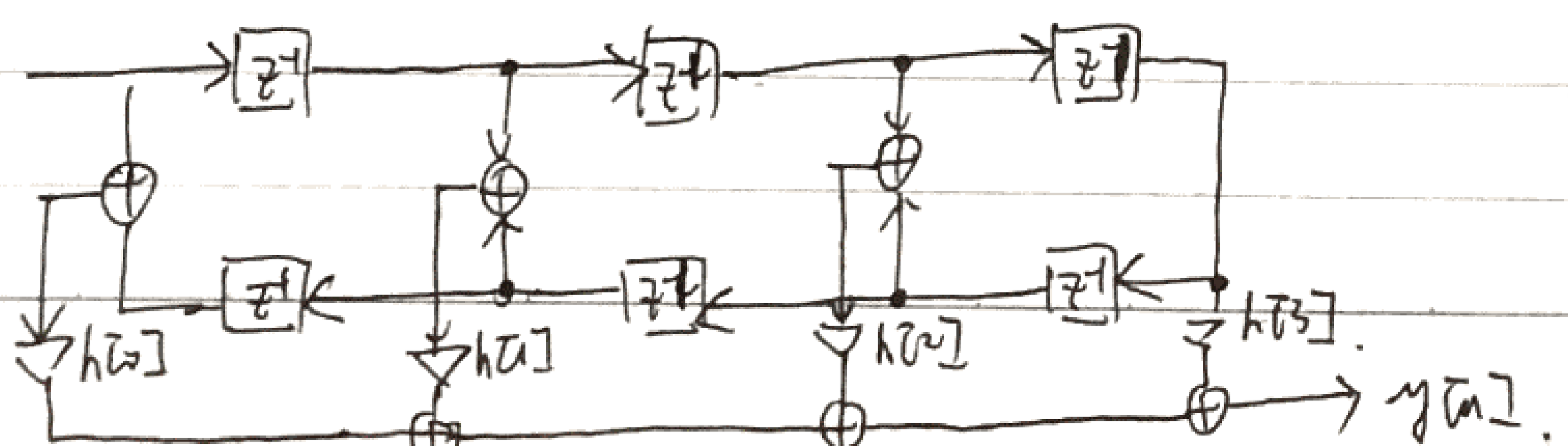


三、线性相位型. 省(一半)的乘法 N为奇时为 $\frac{N+1}{2}$

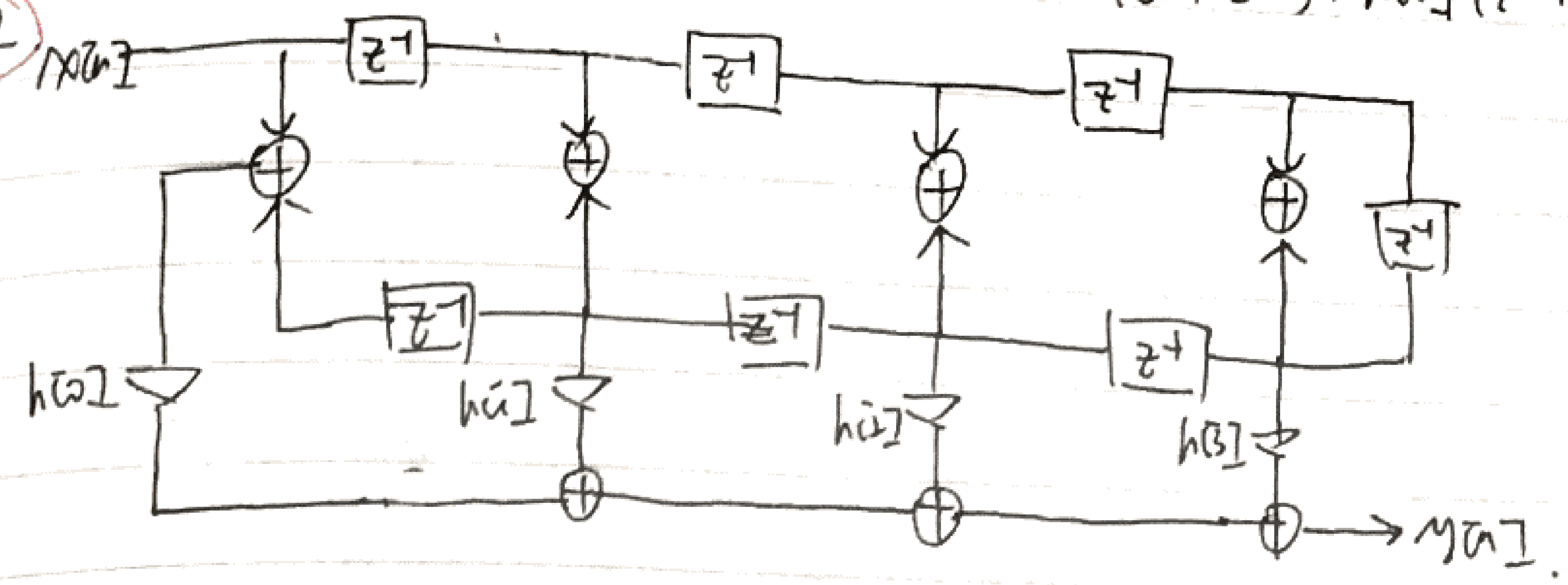
若 $h[n]=h[N-1-n]$. $0\le n\le N-1$. $\boxed{N-1}$阶

N为奇数 I型 $H(z)=h[0]+h[1]z^{-1}+h[2]z^{-2}+h[3]z^{-3}+h[2]z^{-4}+h[1]z^{-5}+h[0]z^{-6}$.

$=h[0](1+z^{-6})+h[1](z^{-1}+z^{-5})+h[2](z^{-2}+z^{-4})+h[3]z^{-3}$.



N为偶数 II型 $H(z)=h[0](1+z^{-7})+h[1](z^{-1}+z^{-6})+h[2](z^{-2}+z^{-5})+h[3](z^{-3}+z^{-4})$.



第十一章

DFT：$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}$，$k=0,1,\cdots N-1$.

复数乘法次数：$k=0$，N次 ⇒ N^2次. ⇒ $\frac{N}{2}\log_2 N$

加法次数：$k=0$，$(N-1)$次 ⇒ $N(N-1)$次 ⇒ $N\log_2 N$.

$W_N^{nk}=W_N^{(n+N)k}=W_N^{(k+N)n}$

$e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+N)k}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\cdot e^{-j2\pi k}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

$e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\cdot e^{-j2\pi n}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

$e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=e^{-(-j\frac{2\pi}{N}kn)}$

$(W_N^{nk})^*=W_N^{-nk}$

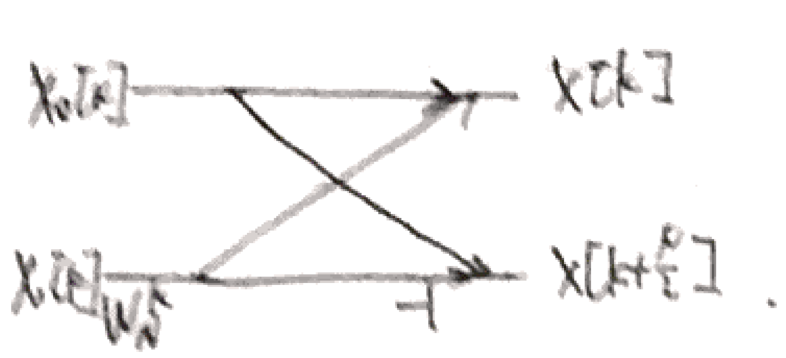
$W_N^{nk}=W_{mN}^{mnk}=W_{N/m}^{nk/m}$

$$\boxed{\begin{aligned}&W_N^{N/2}=W_2^1=e^{-j\frac{2\pi}{2}}=-1\\&W_N^{k+\frac{N}{2}}=W_N^k\,W_N^{\frac{N}{2}}=-W_N^k\end{aligned}}$$

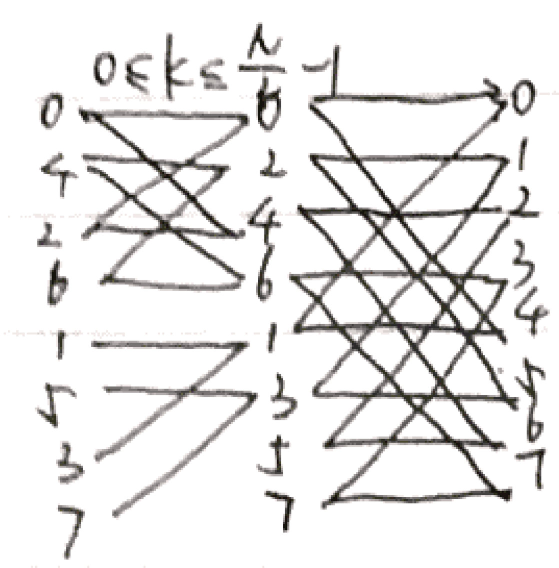
$X[k]=\underbrace{X_0[\langle k\rangle_{\frac{N}{2}}]}_{偶}+W_N^k\underbrace{X_1[\langle k\rangle_{\frac{N}{2}}]}_{奇}$　　$0\le k\le N-1$

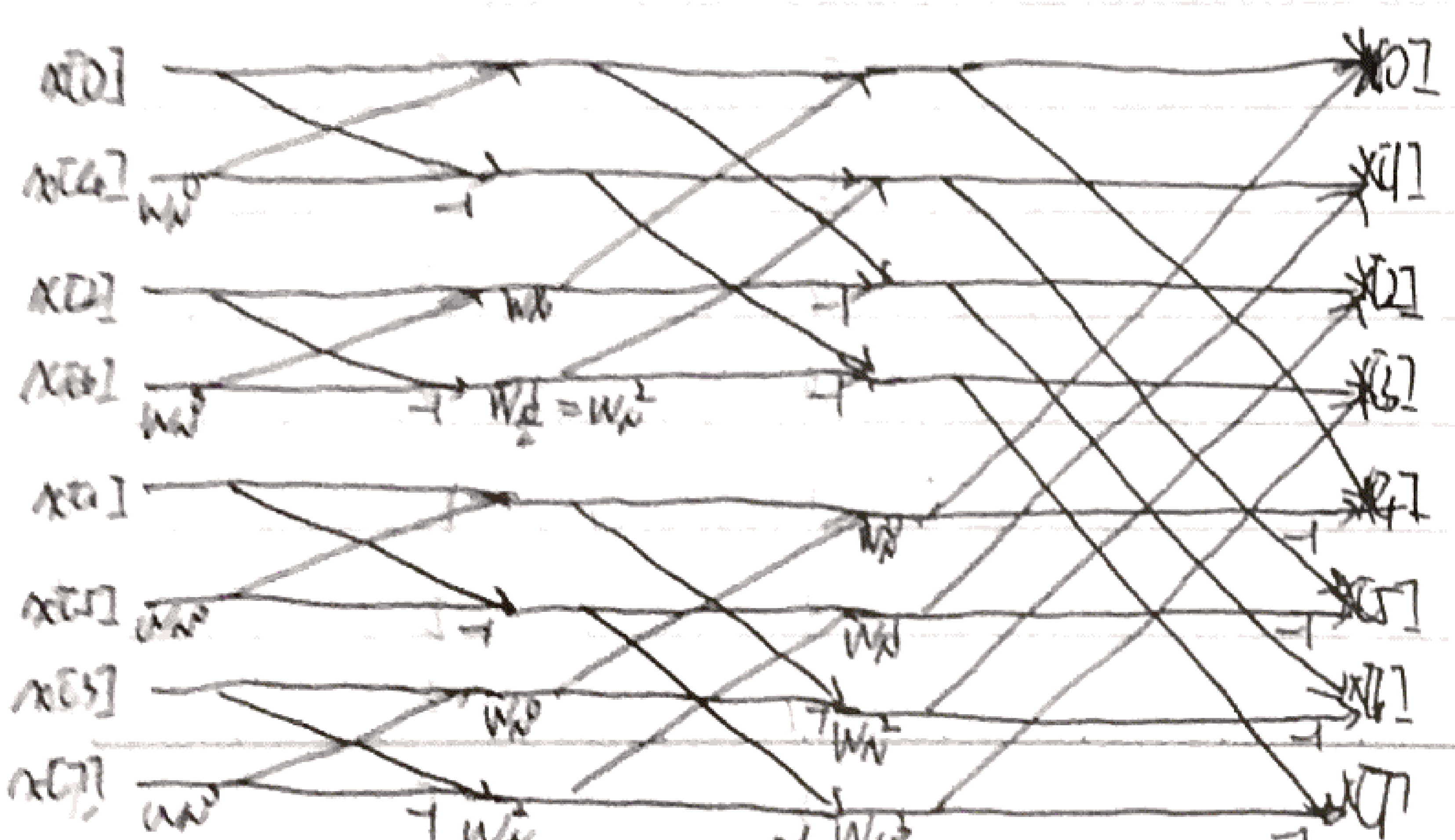
$X[k]=X_0[k]+W_N^kX_1[k]$　　$0\le k\le \frac{N}{2}-1$

$X[k+\frac{N}{2}]=X_0[k]-W_N^kX_1[k]$



8点.





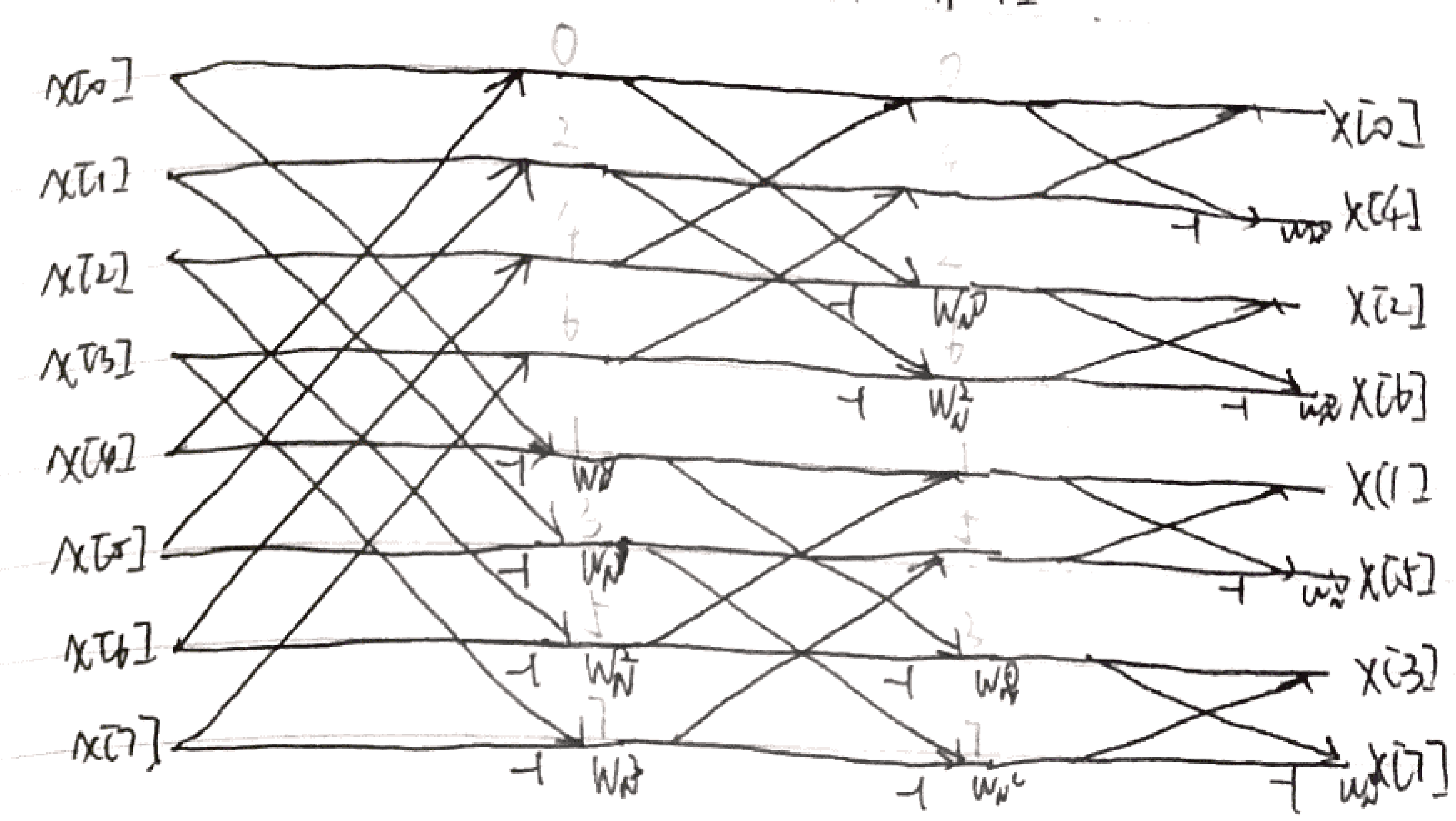
乘法次数：$\frac{N}{2}\log_2 N$

加法次数：$N\log_2 N$

按频率抽取：

$X[k]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n]W_N^{kn}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x[n]W_N^{kn}$

$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x[n]+(-1)^kx[n+\frac{N}{2}]\right)W_N^{kn}$　　$k\in[0,N-1]$



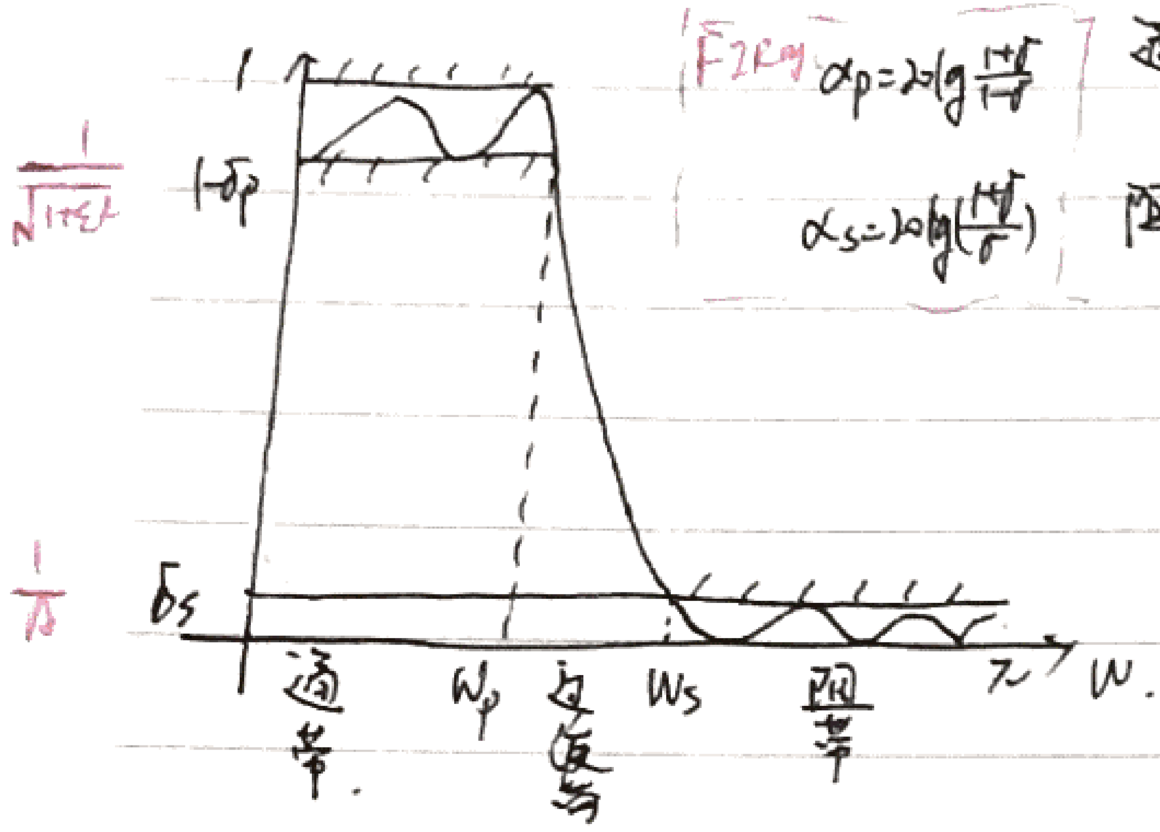
IIR.

特点：① 单位冲激响应 $h[n]$ 为无限长。

② $H(z)$ 为分式，因在 $0<|z|<\infty$ 上既有极点，又有零点，极点全在单位圆内。

③ 有反馈，递归结构。

滤波器设计



FIR中 $\alpha_p=20\lg\frac{1+\delta_p}{1-\delta_p}$，$\alpha_s=20\lg\frac{1+\delta_p}{\delta_s}$

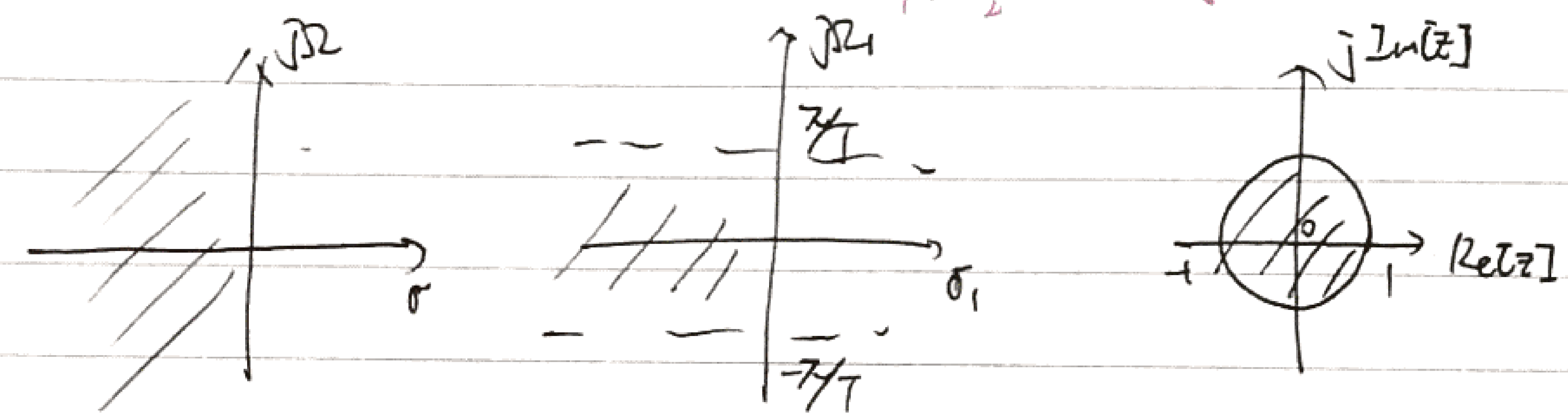
通带衰减 $\alpha_p=20\lg 1-20\lg(1-\delta_p)=20\lg\frac{1}{1-\delta_p}=-20\lg(1-\delta_p)$

阻带衰减 $\alpha_s=20\lg 1-20\lg\delta_s=20\lg\frac{1}{\delta_s}=-20\lg\delta_s$

$$\omega_p=\frac{\Omega_p}{f_T}=\frac{2\pi f_p}{f_T}=2\pi f_p\cdot T$$

$$\omega_s=\frac{\Omega_s}{f_T}=\frac{2\pi f_s}{f_T}=2\pi f_s\cdot T$$

双线性变换法. $H(e^{j\omega})=H_a(j\Omega)|_{\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}}=H_a[j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}]$



$$\boxed{\Omega=\tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)=\tan\frac{\omega_1}{2}}$$

$\Omega=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$ $(T=2)$

$$\Rightarrow j\Omega=j\frac{\sin\frac{\Omega_1T}{2}}{\cos\frac{\Omega_1T}{2}}=\frac{e^{j\frac{\Omega_1T}{2}}-e^{-j\frac{\Omega_1T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1T}{2}}+e^{-j\frac{\Omega_1T}{2}}}$$

令 $j\Omega=s$，$j\Omega_1=s_1$

$$s=\frac{e^{\frac{s_1T}{2}}-e^{-\frac{s_1T}{2}}}{e^{\frac{s_1T}{2}}+e^{-\frac{s_1T}{2}}}=\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}$$

令 $z=e^{s_1T}$

$$\therefore\ \boxed{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\qquad z=\frac{1+s}{1-s}}$$

$\boxed{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ $(T=2)$

总结 IIR Bilinear 法.

设计步骤.

1. 确定模拟指标. $\Omega_p'=2\pi f_p$，$\Omega_s'=2\pi f_s$，α_p，α_s，f_T
2. 以冲激响应不变法数字化： $\omega_p=\frac{\Omega_p'}{f_T}$，$\omega_s=\frac{\Omega_s'}{f_T}$
3. 双线性反数字化： $\Omega_p=\tan\frac{\omega_p}{2}$，$\Omega_s=\tan\frac{\omega_s}{2}$
4. $N=\frac{1}{2}\frac{\lg\frac{A^2-1}{\varepsilon^2}}{\lg\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}=\boxed{\frac{1}{2}\frac{\lg\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}{\lg\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}}$ 取大.

$\frac{1}{A}=\delta_s\Rightarrow A^2-1=10^{0.1\alpha_s}-1$

$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=1-\delta_p\Rightarrow\varepsilon^2=10^{0.1\alpha_p}-1$

5. 查表得系统函数 $H_{an}(s)$. ⇒ 归一化的
6. 求3dB 衰减处 Ω_c

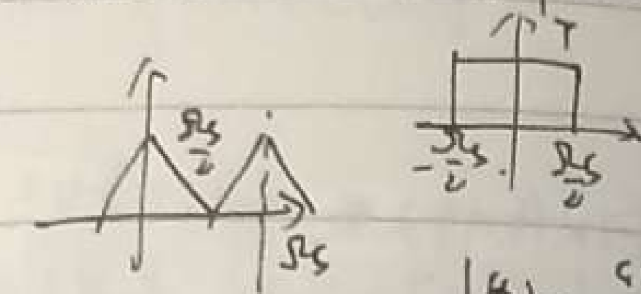
$$|H_a(j\Omega_p)|^2=\frac{1}{1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}\Rightarrow\boxed{\Omega_c'=\frac{\Omega_s'}{(10^{0.1\alpha_s}-1)^{\frac{1}{2N}}}=\frac{\Omega_p}{(10^{0.1\alpha_p}-1)^{\frac{1}{2N}}}}$$

7. $H_a(s)=H_{an}(\frac{s}{\Omega_c})$ ⇒ 去归一化.
8. $H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

理想低通、带通、带阻、高通的线性相位FIR表达式.

↳ $H(\omega)$ 为矩形，ω 为有限带宽

∴对应的时域冲激响应 $h_d[n]$ 为无限长 ⇒ 截断后去满足线性相位FIR的要求：即可用来设计FIR线性相位滤波器的冲激响应 $h[n]$



$$h(t) = \frac{\sin\frac{\Omega_s}{2}t}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$

①. 理想低通.

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\leftrightarrow h_{LP}[n] = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n=0 \\ \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, & n \ne 0 \end{cases}$$

②. 理想高通

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0, & 0 \le |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

$$\leftrightarrow h_{HP}[n] = \delta[n] - \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$$

③. 理想带通

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_{c1} \\ 1 & \omega_{c1} \le |\omega| \le \omega_{c2} \\ 0 & \omega_{c2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\leftrightarrow h_{BP}[n] = \frac{\sin\omega_{c2}n - \sin\omega_{c1}n}{\pi n}$$

④. 理想带阻

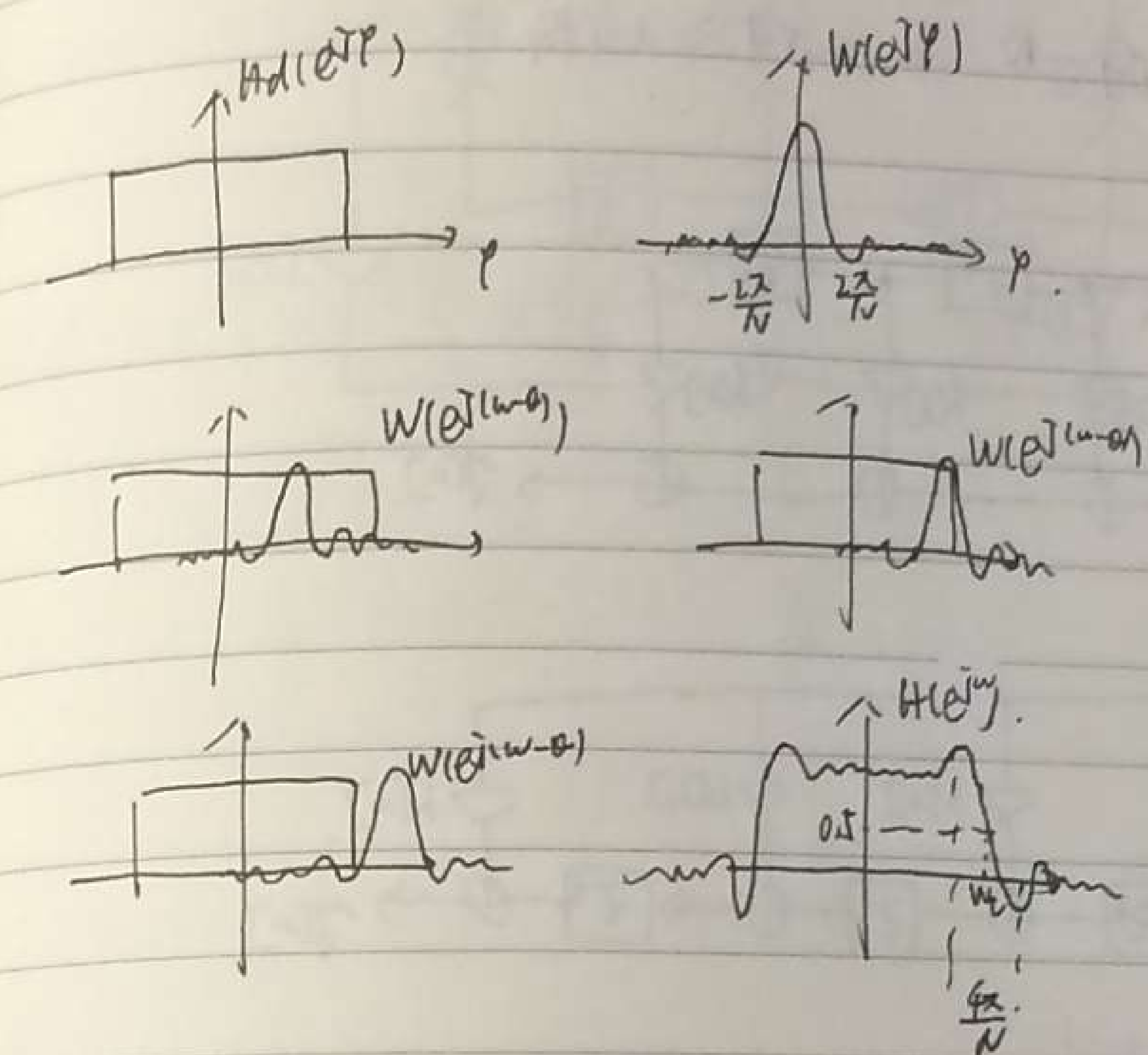
$$H_{BS}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_{c1} \\ 0 & \omega_{c1} \le |\omega| \le \omega_{c2} \\ 1 & \omega_{c2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\leftrightarrow h_{BS}[n] = \delta[n] + \frac{\sin\omega_{c1}n - \sin\omega_{c2}n}{\pi n}$$

设计.

设计理想 $H_d(e^{j\omega})$ 即. 考察设计的 $H(e^{j\omega})$ 对 $H_d(e^{j\omega})$ 的逼近情况.

与窗形状及窗长有关.



$\omega_s - \omega_p$.

⇑

$\Delta\omega$：肩峰间过渡带 主瓣宽度 $= \frac{4\pi}{N} = \frac{4\pi}{2M+1}$

$\Delta\omega_m$.

条件 $M = \frac{N-1}{2}$（满足线性相位）

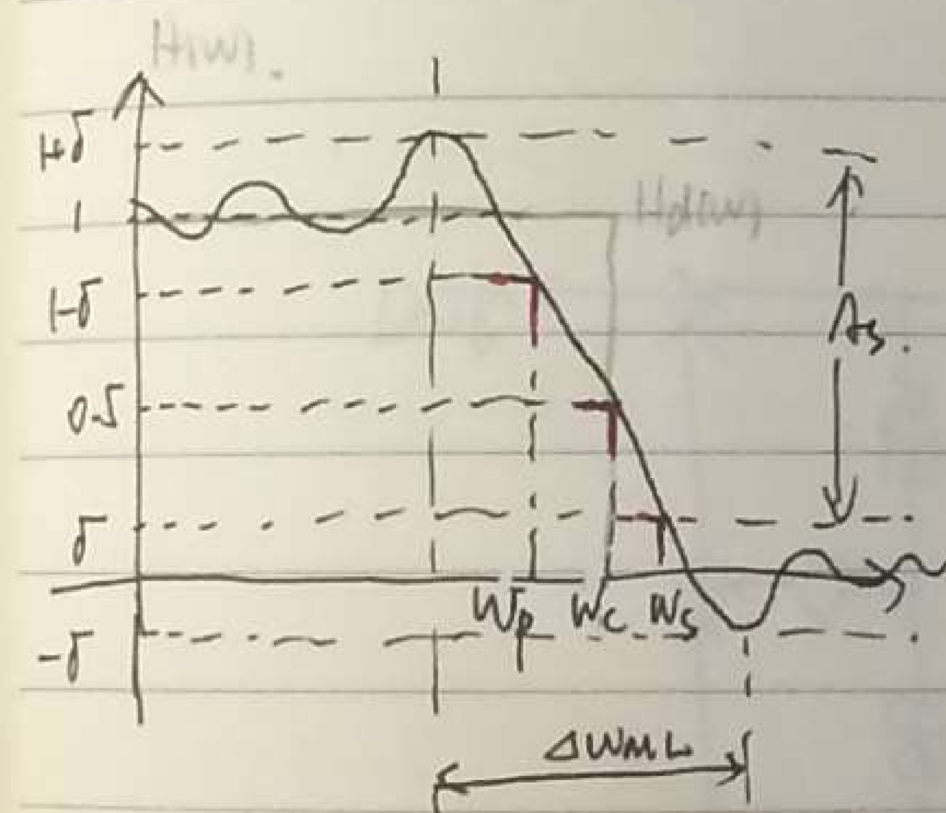
$\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_p + \omega_s)$

α_s(阻带衰减) $= 20\lg(1+\delta) - 20\lg\delta$

$= \boxed{20\lg\left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)}$

R_p(通带衰减) $= 20\lg(1+\delta) - 20\lg(1-\delta)$

$= 20\lg\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)$



$N\uparrow$，$\Delta\omega\downarrow$，起伏振荡变密，肩峰相对值不变 ⇒ Gibbs效应.

$N\uparrow$，过渡带变窄，主峰高度↑，肩峰相对大小不变，波纹变密（平坦），（大小不变）.

$\boxed{N相同时}$ $\boxed{\Delta\omega越大}$ 阻带波纹越小

步骤：

①. 求出 $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_p + \omega_s)$，$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$.

②. 求出阻带最小衰减 α_s，选择窗函数（取大）.

③. 根据对应窗函数 $\Delta\omega$ 表达式求出 M（取大）.

④. 求出窗函数点数 $N = 2M+1$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin\omega_c(n-M)}{\pi(n-M)} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

DFT的圆周移位性质

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn},\ k=0,1,2\cdots N-1$$

∵ $n,k\in[0,N-1]$，则作线性移位序列值会超出范围。

对偶性

CTFT: $x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$　　　DFT: $x[n]\leftrightarrow X[k]$

$X(t)\Leftrightarrow 2\pi x(-j\Omega)$　以Ω=0对称　　　$X[n]\Leftrightarrow Nx[N-k]$　以$k=\frac{N}{2}$对称

DFT运算中圆周共轭对称性 ⇒ 关于 $k=\frac{N}{2}$ 对称 ⇒ 可降低计算量

$x^*[n]\leftrightarrow X^*[N-k]$

$x^*[\langle -n\rangle_N]\leftrightarrow X^*[k]$

$x(n)=Re(x[n])+j\cdot Im(x[n]) = x_{ep}[n]+x_{op}[n]$

$\updownarrow$

$X[k]=X_{ep}[k]+X_{op}[k]$　　　$Re(X[k])+j\,Im(X[k])$

其中 $x_{ep}[n]=\frac{1}{2}(x[n]+x^*[-n])=x_{ep}^*[\langle -n\rangle_N]=x_{ep}^*[N-n]$　　实 ⇔ 共轭对称

$x_{op}[n]=\frac{1}{2}(x[n]-x^*[-n])=-x_{op}^*[\langle -n\rangle_N]=-x_{op}^*[N-n]$　　虚 ⇔ 共轭反对称

当$x[n]$为实序列时. $X[k]\leftrightarrow X^*[\langle -n\rangle_N]\leftrightarrow X^*[N-k]$ 满足圆周共轭对称 {实部偶对称，虚部奇对称

⇒ $X[k]=X^*[\langle -k\rangle_N]$

$x[n]=x^*[\langle -n\rangle_N]$

线性卷积、

$$y_L[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x_1[m]\cdot x_2[n-m]\qquad n\in[0,N_1+N_2-2].\qquad 长度为 N_1+N_2-1$$

圆周卷积、

L点圆周卷积、

$$y_c[n]=\sum_{m=0}^{L-1}x_1[m]\cdot x_2[\langle n-m\rangle_L],\quad n\in[0,L]\qquad 长度为 L\ (L\geq \max(N_1,N_2))$$

$x_2[\langle n-m\rangle_L]$ ⇒ 即对圆周翻转序列 $x_2[\langle -m\rangle_N]$ 进行圆周移位，圆周移n位。

即 $x_2[L-m]$ 向右圆周移n位。

n=0时，m从0→L-1:
n=1时 右移1位:
⋮

$$\begin{bmatrix} x_2[0], & x_2[L-1], & x_2[L-2] & \cdots & x_2[2], & x_2[1] \\ x_2[1], & x_2[0], & x_2[L-1], & \cdots & x_2[3], & x_2[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2[L-1], & x_2[L-2], & x_2[L-3], & \cdots & x_2[1], & x_2[0] \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[L-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[L-1] & x_2[L-2] & \cdots & x_2[2] & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & x_2[L-1] & \cdots & x_2[3] & x_2[2] \\ x_2[2] & x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[4] & x_2[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2[L-1] & x_2[L-2] & x_2[L-3] & \cdots & x_2[1] & x_2[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ x_1[2] \\ \vdots \\ x_1[L-1] \end{bmatrix}$$

圆周卷积与线性卷积的不同：

① 用L点圆周卷积、两序列长度必须为L(不足补0)，线性卷积则序列长度任意。