Recherche Opérationnelle - Projet 2 : Algorithme de Ford-Fulkerson

Kylian BERREBI Kévin CARENOU Thibault MEUNIER
Matthieu PERRIER François-Xavier STEMPFEL Sacha VANLEENE

21 Octobre 2016

Sommaire

Introduction

Les graphes sont fréquement utilisés pour modéliser divers problèmes. Ce rapport expose trois problèmes de recherche opérationnelle et leur résolution. Pour chacun, la réponse se découpe en deux parties : la modélisation sous forme de graphe et les calculs sur ce dernier. La multiplicité des calculs demandés a nécessité l'emploi d'outils informatiques et algorithmiques puissants : l'algorithme de Ford Fulkerson implanté en langage Matlab.

Cet algorithme possède deux variantes. La première permet de rechercher le flot maximum entre les deux extrémités (qui sont uniques car on peut toujours les rajouter artificiellement) d'un graphe identifiés par la suite comme "la source" et "le puit". La seconde détermine la tension maximale séparant deux points d'un système.

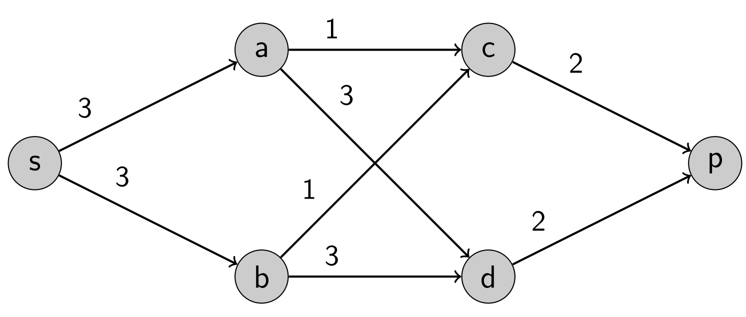
1 Algorithme de Ford-Fulkerson

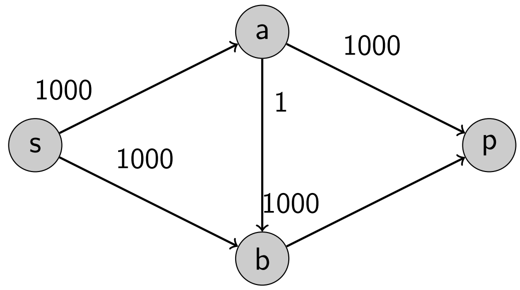
L'algorithme se base sur la connaissance d'un chemin réalisable que l'on améliore par un processus itératif. A chaque étape, on possède une solution réalisable du problème, meilleure que toutes les précédentes. Cette amélioration se fait au moyen d'un processus de marquage spécifique à chacune des méthodes décrites ci-dessous. L'identification du chemin nul comme réalisable offre un point de départ simple et commun à tout problème.

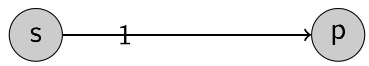
Par la suite, nous nous intéresserons aux notations données dans le polycopié distribué en cours.

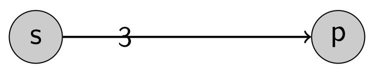
1.1 Exemples

Les graphes suivants réprésentent quatre problèmes solubles grâce à l'algorithme de Ford-Fulkerson.









1.2 Ford-Fulkerson du flot maximal

1.2.1 Problème de flot maximal

Le problème de flot maximal se traduit comme un problème d'optimisation.

$$(P_\phi) \begin{cases} Max f(\phi) = \phi_1 \\ \phi \in \Phi(G) \\ b_i \leq \phi_i \leq c_i \quad i = 1..m \end{cases} \tag{1}$$

1.2.2 Résolution

L'algorithme étant itératif, il répète à chaque étape les deux actions suivantes :

1. Le marquage : processus consistant à chercher une possible amélioration du flot au travers d'un chemin améliorant. On marque un sommet à chaque fois qu'on l'utilise pour trouver un tel chemin.
2. L'amélioration : si le marquage a pas abouti, on augmente le flot le long du chemin améliorant. Sinon, le chemin est optimal et on peut s'arrêter.

En pseudo code, l'algorithme s'écrit ainsi :

```
Initialisation
Tant que l'on trouve un chemin améliorant
    Tant que le puit n'est pas marqué ou qu'il n'existe pas de chemin
 améliorant
        Sélectionner un sommet non marqué, tous les précédents ayant été
            marqués et Déterminer leur marque.
        Mettre à jour l'ensemble des sommets marqués.
    Fin
    Si un chemin a été trouvé
```

```
            Mettre à jour le flot le long du chemin améliorant
        Fin
    Fin.
```

1.3 Ford-Fulkerson pour la tension maximale

On peut formuler certains problèmes en utilisant une tension compatible, que l'on cherchera à maximiser entre la source et le puit. Le principe de l'algorithme est le suivant :

1. On marque le puit, puis on affecte à chacun de ses prédécesseurs la valeur minimale de leurs capacité (au moins un d'entre eux est alors marqué).
2. On marque un sommet si un arc sortant a une tension égale à sa longueur ou si un arc entrant a une tension égale à sa capacité.
3. On affecte à chaque arc entrant d'un sommet marqué la valeur minimale des capacités de ses prédécesseurs.

2 Problème du trafic maritime

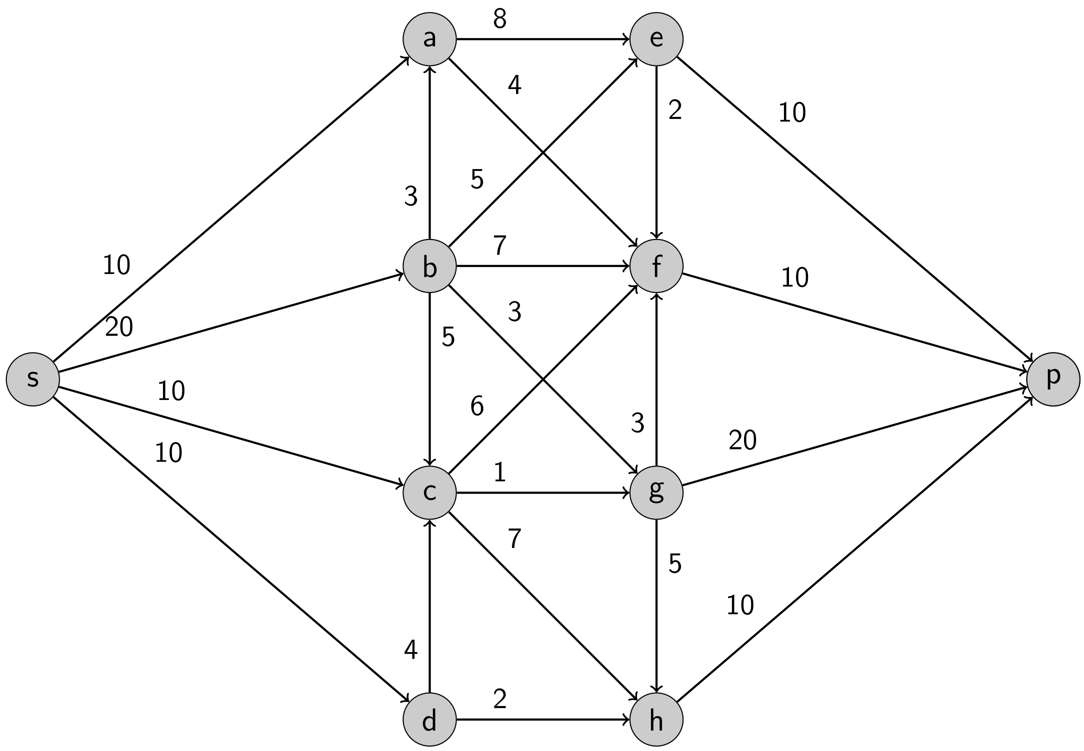
On cherche à maximiser la quantité de pétrole échangée entre différents ports.

On réduit le trafic maritime à des échanges entre des ports exportateurs et importateurs. Chaque port exportateur stocke une quantitée de pétrole. On modélise un port par un nœud et une liaison maritime par un arc orienté entre le port exportateur et importateur, pondéré par la quantité transportée. On obtient ainsi un graphe orienté qui possède de multiples sources et puits.

Afin de se ramener au conditions initiales de l'algorithme de Ford-Fulkerson appliqué au problème du flot maximum, on crée une source unique de laquelle partent des arcs dirigés vers les sources réelles. Ces arcs sont pondérés par la quantité de pétrole initialement disponible dans le port. Par un principe équivalent, on construit un unique puit.

Le flot maximum donné par l'algorithme répond bien au problème posé. En effet, en maximisant le flot sur le graphe, il maximise bien les échanges entre les ports, et donc la quantité totale de pétrole échangée.

Le graphe suivant représente le problème.



3 Problème du plus court chemin

Ce problème est une application directe de l'algorithme de ford Fulkerson pour les tensions maximum. On cherche le plus court chemin pour aller de la source au puit. On modélise ce problème par une tension θ et l'on cherche à maximiser la tension $\theta(p, s) = P(s) - P(p)$ où P est le potentiel de chaque sommet, c'est-à-dire la distance parcourue. Maximiser $\theta(p, s)$ revient à minimiser $P(p)$.

Il suffit de traduire le graphe en termes de liste de successeurs et de lui appliquer l'algorithme de la tension maximale.

4 Problème d'ordonnancement

Un problème d'ordonnancement consiste à déterminer l'ordre de commencement de tâches mutuellement dépendantes de façon à ce que le système soit le plus rapide. Les poids des arcs représentent donc des durées, et le but est une fois de plus de minimiser le durée totale du système.

En effet, le potentiel $P(p)$ représente maintenant la date de début du puit, soit la date de terminaison de l'ensemble du processus. L'objectif est bien de le minimiser, où plutôt de maximiser la tension $\theta(p, s) = P(s) - P(p)$.

Conclusion

Pour ces projets, nous nous sommes répartis les tâches comme suit :

— Sacha, Kévin et Kylian ont programmé l'algorithme de résolution de l'emploi du temps. Ils ont donc effectué les tests du projet 2, sur les algorithmes de Ford-Fulkerson.

— Thibault, Matthieu et François-Xavier se sont intéressés aux algorithmes de Ford-Fulkerson. Ils ont testé le problème de l'emploi du temps.

Malgré cette organisation, les projets ont été faits en commun, chacun apportant sa pierre à l'édifice, et les personnes travaillant sur un projet n'ont pas hésité à aider le groupe travaillant sur l'autre.