1 Odvození Ciolkovského rovnice

Velká část naší práce byla věnována popisu dynamiky rakety během jejího pohybu vzduche. Jeden z klíčových výchozích bodů pro nás proto představuje Ciolkovského rovnce dávající do souvislosti změnu hmotnosti raketyse změnou její rychlosti. Představme si, že zplodiny opouštějí raketové trysky s rychlostí w. Elemement zplodin o hmotnosti dm je nyní vyvrhnut rychlostí w dolů pod raketu. Podle zákona zachování hybnosti musí platit, že hybnost těchto zplodin se musí rovnat nárustu hybnosti rakety ve směru jejího pohybu (tedy vzhůru). Raketa má hmotnost, již budeme modelovat jako proměnnou funkci času $m(t)$. Platí:

$$-dmw = mdv \tag{1}$$

Záporné znaménko figuruje u prvního diferenciálu z toho důvodu, že raketa palivo spotřebovává a diferenciál hmotnosti je proto záporný. Nyní je potřeba přeorganizovat členy v rovnici (1) tak, aby příslušné proměnné byly u svých diferenciálů:

$$-w\frac{dm}{m} = dv \tag{2}$$

Přeintegrujme nyní rovnici (4), abychom se zbavili diferenciálů na obou stranách:

$$-w\int \frac{1}{m}dm = \int dv \tag{3}$$

$$-w\ln(m) = v + C \tag{4}$$

C zde značí integrační konstantu, kterou bychom určili z počátečních podmínek. Vzhledem k tomu ale, že v Ciolkovského rovnici figuruje rozdíl rychlostí ve dvou okamžicích, konstanta se odečte. Předpokládejme, že nás zajímá změna rychlosti ve dvou po sobě jdoucích okamžicích. Rychlosti rakety si označíme v_1 a v_2, odpovídající hmotnosti budou m_1 a m_2. Za použití rovnice (4) tak můžeme vyjádřit změnu rychlosti:

$$\Delta v = w\ln(m_1) - w\ln(m_2) \tag{5}$$

Což lze přepsat do známějšího tvaru:

$$\Delta v = w\ln(\frac{m_1}{m_2}) \tag{6}$$

Pokud budeme studovat pohyb rakety od zážehu, bude změna rychlosti určovat rychlost v konečném čase a za 1. hmotnost dosadíme počáteční hmotnost rakety m_0:

$$v = w\ln(\frac{m_0}{m_2}) \tag{7}$$