1 Odvození Ciolkovského rovnice

Velká část naší práce byla věnována popisu dynamiky rakety během jejího pohybu vzduchem. Jeden z klíčových výchozích bodů pro nás proto představuje Ciolkovského rovnice dávající do souvislosti změnu hmotnosti rakety se změnou její rychlosti. Představme si, že zplodiny opouštějí raketové trysky s rychlostí $\mathrm{d}w$.

"Element zplodin" o hmotnosti $\mathrm{d}m$ je nyní vyvrhnut rychlostí dolů pod raketu. Podle zákona zachování hybnosti musí platit, že hybnost těchto zplodin se musí rovnat nárůstu hybnosti rakety ve směru jejího pohybu (tedy nahoru). Raketa má hmotnost, jíž budeme modelovat jako proměnnou funkci času $m(t)$. Platí:

$$-dmw = mdv \tag{1}$$

Záporné znaménko figuruje u diferenciálu z toho důvodu, že raketa palivo spotřebovává, a $\mathrm{d}m$ má proto záporné znaménko. Nyní je potřeba přeorganizovat členy v rovnici (3) rovnici tak, aby příslušné proměnné byly u svých diferenciálů:

$$-w\frac{dm}{m} = dv \tag{2}$$

Přeintegrujme nyní rovnici (4), abychom se zbavili diferenciálů na obou stranách:

$$\begin{aligned} -w\int \frac{1}{m}\,dm &= \int dv \\ -w\ln(m) &= v + C \end{aligned} \tag{3}$$

C zde označuje integrační konstantu, kterou bychom určili z počátečních podmínek. Naším cílem je však odvodit Ciolkovského rovnici, která vyjadřuje pouze závilost změny rychlosti na spáleném množství paliva. Předpokládejme, že nás zajímá změna rychlosti ve dvou po sobě jdoucích okamžicích. Rychlosti rakety si označme v_1 a v_2. Jim odpovídají hmotnosti m_1 a m_2.

Za použití rovnice tak (5) tak získáme obecný předpis pro změnu rychlost:

$$\Delta v = w\ln(m_1) - w\ln(m_2) \tag{4}$$

Což se dá přepsat do známějšího tvaru:

$$\Delta v = w\frac{m_1}{m_2} \tag{5}$$

Pokud budeme studovat pohyb raket od zážehu, bude změna rychlosti určovat rychlost v konečném čase a za 1. hmotnost pouze dosadíme počáteční hmotnost rakety m_0:

$$v = w\frac{m_0}{m_2} \tag{6}$$