廣東工業大學

现 代 控 制 理 论 基 础

题目名称 大作业

学生姓名 xxx

学　　号 12345678

专业班级 xxxxxx

指导教师 xxx

2018 年 7 月 2 日

目 录

1 基于状态空间表达式的控制器设计方法

1.1 模型的建立

对于 SISO LTI 系统，状态空间形式如下：

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D\end{cases} \tag{1}$$

其中 **X** 是表示系统状态变量的 n 乘 1 矢量，U 是表示输入的标量，Y 是表示输出的标量。矩阵 A（n 乘 n），B（n 乘 1）和 C（1 乘 n）确定状态变量与输入和输出之间的关系。注意，有 n 个一阶微分方程。状态空间表示也可用于具有多输入和多输出（MIMO）的系统，但我们将主要用单输入单输出（SISO）系统。

为了介绍状态空间控制设计方法，我们将以磁悬浮球为例。通过线圈的电流引起磁力，该磁力可以平衡重力并使球（由磁性材料制成）悬浮在半空中，如下图：

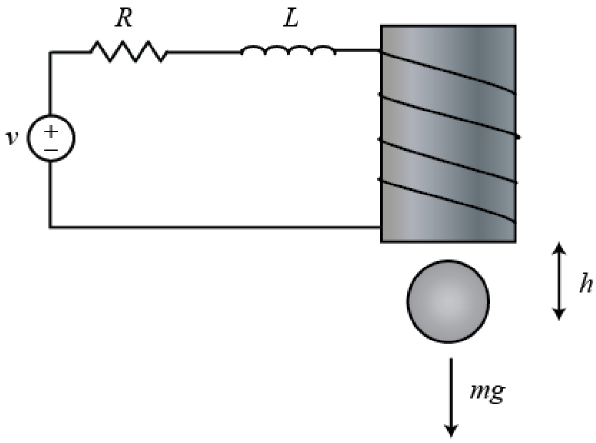

图 1: 磁悬浮球模型

系统的方程式由下式给出：

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = mg - \frac{Ki^2}{h} \tag{2}$$

$$V = L\frac{di}{dt} + iR \tag{3}$$

h 球的垂直位置距离，i 是通过电磁铁的电流，V 是施加的电压，m 是球的质量，g 是由重力引起的加速度，L 是电感，R 是电阻，K 是决定电阻的系数施加在球上的磁力。为简单起见，我们将选择值 m= 0.05 kg，K= 0.0001，L= 0.01 H，R= 1 Ohm，g= 9.81m/s^2。只要 h=K i^2/mg（此时 $\frac{dh}{dt}$= 0），系统处于平衡状态（球悬浮在半空中）。我们将关于该点的方程线性化 $h = 0.01$ m（标称电流约为 7 安培）并获得状态空间方程如下：

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$x = \begin{bmatrix}\triangle h \\ \triangle \dot{h} \\ \triangle i\end{bmatrix} \tag{5}$$

是系统的状态变量集（3x1 向量），u 是输入电压与其平衡值（ΔV）y 的偏差，(输出）是球高度与其平衡位置（Δh）的偏差。将系统矩阵输入到 m 文件中。

```
clear all
close all
clc

A = [ 0  1   0;980 0  -2.8;0  0  -100 ];
B = [ 0;0;100 ];
C = [ 1 0 0 ];
```

1.2 系统稳定性分析

首先，分析开环系统（没有任何控制）是否稳定，系统矩阵的特征值 A（等于传递函数的极点）决定了稳定性。A 矩阵的特征值是特征方程 $det(sI-A)=0$ 的解 s。

```
poles = eig(A)

poles =
   31.3050
  -31.3050
 -100.0000
```

从上面结果可以看出，其中一个极点位于右半平面（即具有正实部），这意味着开环系统不稳定。

当初始条件非零时，此不稳定系统会怎样变化，可以通过 Matlab 仿真：

```
t = 0:0.01:2;
u = zeros(size(t));
x0 = [0.01 0 0];
sys = ss(A,B,C,0);
[y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0);
plot(t,y)
title('Open-Loop Response to Non-Zero Initial Condition')
grid on
```

仿真图像如下：

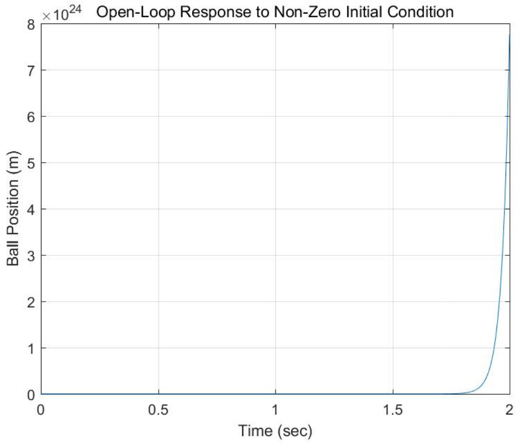

图 2: 初始条件非零系统响应曲线

从图像可以看出球和电磁铁之间的距离将变为无穷大，可能是球首先击中桌子或地板（也可能超出模型线性化的有效范围）。

1.3 系统的可控性和可观性

如果总是存在控制输入，则系统是可控的 $u(t)$，该控制输入在有限时间内将系统的任何状态转移到任何其他状态。可以证明，当且仅当其控制矩阵 $\mathcal{C}$ 具有满秩时（即，如果 rank($\mathcal{C}$)= n，其中 n 是状态变量的数量），该系统是可控的。可以使用命令 rank（ctrb（A，B））或 rank（ctrb（sys））在 MATLAB 中确定 LTI 模型的可控性矩阵的等级。

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{6}$$

系统的所有状态变量可能无法直接测量，例如，如果组件位于不可访问的位置。在这些情况下，有必要仅使用可用的系统输出来估计未知内部状态变量的值。如果初始状态下，$x(t_0)$，可以确定基于系统输入的知识，$u(t)$ 以及系统输出，$y(t)$，过一些有限的时间间隔 $t_0 < t < t_f$，那么系统是可观的，。对于 LTI 系统，当且仅当可观矩阵 $\emptyset$ 具有满秩（即 rank（$\emptyset$）= n，其中 n 是状态变量的数量）时，系统是可观的。可以使用该命令在 MATLAB 中确定 LTI 模型的可观性 rank（obsv（A，C））或 rank（obsv（sys））。

$$\emptyset = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

可控性和可观察性是双重概念。当且仅当系统（A'，B'）是可观察的时，系统（A，B）是可控的。

1.4 使用极点配置的控制设计

下面就是使用极点放置方法为该系统设计一个控制器。全状态反馈系统的原理图如下所示。对于这个系统，我们需要一个传感器测量球的位置，另一个测量球的速度，第三个测量电磁铁中的电流。

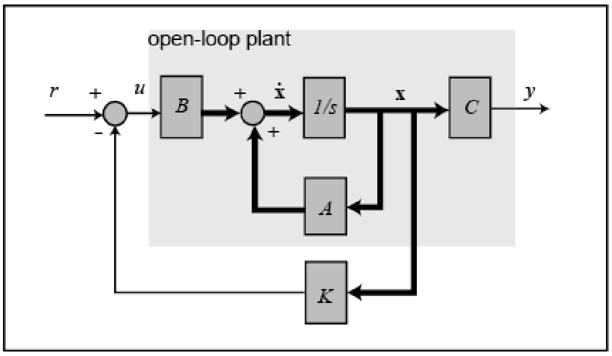

图 3: 全状态反馈系统的原理图

为简单起见，假设 $r = 0$. 输入如下：

$$u = -Kx \tag{8}$$

因此，闭环反馈系统的状态空间方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases} \tag{9}$$

闭环反馈系统的稳定性和时域性能主要由矩阵（$A - BK$）的特征值的位置确定，其等于闭环极点。由于矩阵 A 和 BK 均为 3×3，将有 3 个极的系统。通过选择合适的状态反馈增益矩阵 K，我们可以将这些闭环极点放在我们想要的任何地方（因为系统是可控的）。我们可以使用 MATLAB 函数来找到状态反馈增益 K，它将提供所需的闭环极点。

假设控制器的标准是建立时间 < 0.5 秒且过冲 < 5，那么我们可能会尝试将两个主极点置于-10±10i（$\zeta = 0.7°$ 或 45°，$\sigma = 10 > 4.6 * 2$）。第三个极点在-50 处开始（因此它足够快以至于它对响应没有太大影响）：

```
A = [ 0  1   0;980 0  -2.8;0  0  -100 ];
B = [ 0;0;100 ];
C = [ 1 0 0 ];
poles = eig(A)


t = 0:0.01:2;
u = zeros(size(t));
x0 = [0.01 0 0];

p1 = -10 + 10i;
p2 = -10 - 10i;
p3 = -50;
K= place(A,B,[p1 p2 p3]);
sys_cl = ss(A-B*K,B,C,0);
lsim(sys_cl,u,t,x0);
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Ball Position (m)')
grid on
```

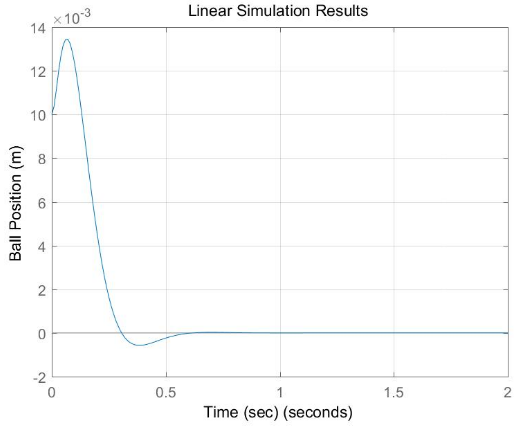

图 4: 闭环极点配置的仿真图像

从图像可以看到过冲太大。尝试将极点放在左侧以查看瞬态响应是否有所改善。

```
clear all
close all
clc

A = [ 0  1   0;980 0  -2.8;0  0  -100 ];
B = [ 0;0;100 ];
C = [ 1 0 0 ];
poles = eig(A)
p1 = -20 + 20i;
p2 = -20 - 20i;
p3 = -100;

K = place(A,B,[p1 p2 p3]);
sys_cl = ss(A-B*K,B,C,0);
lsim(sys_cl,u,t,x0);
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Ball Position (m)')
 grid on
```

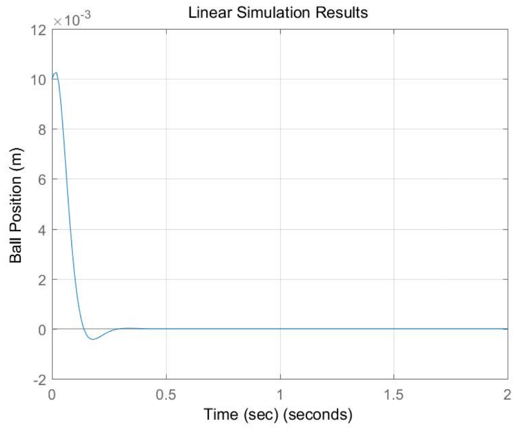

图 5: 闭环极点配置的仿真图像

这次过冲较小，比较两种情况下所需的控制力（u）。通常，将杆子向左移动得越远，需要的控制力就越大。

1.5 实验总结与心得

通过这次大作业，我学会了对物理模型进行转换成数学的状态空间表达式。通过对系统的控制器的设计，在 Matlab 下的仿真，加深理解课本的理论知识，同时提高自己的实践技能。