

Diagramas de Feynman: O poder de uma imagem

Feynman diagrams: The power of a picture

Arlene Cristina Aguilar*¹

¹Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia, Campinas, SP, Brasil

Recebido em 07 de Dezembro, 2017. Revisado em 13 de Março, 2018. Aceito em 20 de Março, 2018.

O objetivo deste artigo é apresentar uma breve introdução aos diagramas de Feynman para a QED. Iniciaremos com uma sucinta descrição histórica de como esta técnica diagramática poderosa foi desenvolvida por Feynman. A seguir, introduziremos os elementos básicos *i.e.* propagadores e vértices, que compõem os diagramas. Discutiremos o significado físico associado aos diagramas e listaremos as regras de Feynman essenciais para cálculos em nível de perturbação mais baixa. Analisaremos três processos fundamentais da QED: o (i) espalhamento Bhabha, (ii) Compton e a (iii) aniquilação do par elétron-positron. Por fim, discutiremos como a série perturbativa em ordem mais alta é gerada graficamente para o caso específico do espalhamento Moller.

Palavras-chave: Diagramas de Feynman, QED, Processos de Espalhamento.

The purpose of this paper is to present a brief introduction to QED Feynman diagrams. We will start with a concise historical description of how this powerful diagrammatic technique was developed by Feynman. Next, the basic elements, *i.e.* propagators and vertices, which form the diagrams are presented. We discuss the physical meaning associated with the diagrams and list the main Feynman rules, which are needed for the calculations at the lower perturbation level. Then, the following three fundamental QED processes are analyzed: (i) Bhabha scattering, (ii) Compton and (iii) the annihilation of the electron-positron pair. Finally, we will discuss how the perturbative series, at higher order, is generated graphically for the specific case of the Moller scattering.

Keywords: Feynman diagrams; QED, Scattering Processes.

1. História

Hoje em dia é quase impossível pensar em discutir física de partículas sem utilizar os emblemáticos *diagramas de Feynman*. Quem nunca viu artigos ou seminários de físicos de partículas “decorados” com desenhos que agrupam linhas de diversos formatos - contínuas, pontilhadas, onduladas, emaranhadas, zig-zag ou duplas? Estes diagramas são representações esquemáticas de como as partículas interagem entre si, dentro de uma determinada teoria ou modelo. A justificativa para seu uso intensivo e sua rápida difusão na física está diretamente relacionada com a sua simplicidade de transmitir um conceito físico, sem a necessidade de se enveredar em uma série de cálculos complexos que estes diagramas escondem.

O interesse de Feynman pela *Eletrodinâmica Quântica* (QED) já vinha de seu doutorado, mas em 1945 recém contratado em Cornell, Feynman decidiu atacar novamente o velho problema de construir uma teoria quântica que descrevesse a interação dos elétrons com o campo eletromagnético [1].

O maior desafio era construir, de uma maneira consistente, uma teoria que permitisse estender os cálculos da QED além da ordem de perturbação mais baixa. Já que era amplamente conhecido, desde os anos trinta, que os

cálculos das correções de ordens mais altas desta teoria estavam infestados de infinitos, mesmo quando se tratava de cálculos para obtenção de uma grandeza física finita como uma seção de choque. Inspirado pela nova formulação da eletrodinâmica clássica, integrais de trajetórias e, pelo fato de que os elétrons com energia negativa poderiam ser tratados como se estivessem movendo-se na direção oposta do tempo, Feynman resolveu com sucesso o problema da formulação da QED [2,3]. No entanto, ele não foi o único que conseguiu este feito. No mesmo ano de 1948, de forma independente, Julian Schwinger desenvolveu uma formulação para a QED usando métodos considerados mais convencionais para a época dos que os empregados por Feynman. Schwinger escrevia os campos que descrevem as partículas, como uma combinação de operadores de criação e destruição e calculava as matrizes de transição quânticas, típicas de um processo de espalhamento quântico. No Japão, Sin-Itiro Tomonaga também tinha resolvido o mesmo problema alguns anos antes. Entretanto, devido ao isolamento que a física japonesa sofreu devido às consequências da segunda guerra mundial, os resultados de Tomonaga só foram conhecidos fora do Japão em 1947. Tomonaga, Schwinger e Feynman dividiram, em 1965, o prêmio Nobel de Física por ter formulado a QED [1].

*Endereço de correspondência: aguilar@ifi.unicamp.br.

Embora equivalentes, ao passar dos tempos a versão de Feynman para QED apresentou grandes vantagens práticas sobre as de Tomonaga e Schwinger. Uma das mais importantes foi que os cálculos poderiam ser feitos de uma maneira mais simples associando, a cada termo que deve ser calculado, uma representação gráfica denominada *diagrama*.

Em geral o objetivo dos cálculos feitos por Feynman era determinar a chamada *amplitude de probabilidade* de um determinado processo de espalhamento de partículas, e os diagramas tinham a habilidade de representar as diferentes maneiras que este espalhamento pode ocorrer na natureza [2, 3]. Foi Freeman Dyson que verificou, para alguns casos, que o formalismo de Feynman levava exatamente às mesmas respostas encontradas por Schwinger e Tomonaga, que usavam extensos e trabalhosos cálculos onde operadores de campos atuavam em um vácuo interagente da teoria [4, 5].

Entretanto, vale ressaltar que a importância e a praticidade dos diagramas de Feynman não foram imediatamente reconhecidas pela comunidade de físicos que trabalhavam com a QED [2].

A primeira vez que Feynman apresentou seus diagramas em público foi durante uma reunião científica, onde somente 28 físicos da envergadura de Schwinger e Hans Bethe foram convidados. Esta reunião ocorreu em uma pousada em Pocono Manor na Pensilvânia em 1948. Durante a apresentação de Feynman, um dos primeiros diagramas a serem desenhados na lousa foi a colisão de dois elétrons, $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, similar ao mostrada na Fig. 1 [2]. Mais tarde, esta mesma figura faria parte

de seu primeiro artigo, onde ele introduziu seu método para QED [6].

Apesar de ser reconhecido como um exímio palestrante, Feynman não teve muita sorte nesta reunião. O palestrante anterior ao seu seminário, foi ninguém menos que Schwinger. Neste seminário, que durou praticamente o dia inteiro, Schwinger apresentou seu método para renormalizar a QED e remover os indesejáveis infinitos. Quando a apresentação de Feynman começou, ninguém conseguia seguir a linha lógica apresentada por Feynman e entender a conexão dos novos diagramas com os princípios, até então conhecidos, da QED. Além disso, os ouvintes não conseguiram relacionar o que estava sendo discutido por Feynman com o trabalho recém apresentado por Schwinger [2].

Coube a Freeman Dyson, mostrar no ano seguinte a equivalência matemática entre os métodos propostos por Feynman, Schwinger e Tomonaga em dois artigos publicado na Phys. Rev. D no ano de 1949 [4, 5]. Nestes trabalhos Dyson explicou detalhadamente como estes diagramas devem ser desenhados e derivou uma série de regras mnemônicas, que permitiam converter estes diagramas nas expressões matemáticas obtidas por Schwinger.

A importância destes trabalhos de Dyson vai muito além da demonstração da equivalência dos métodos. Dyson mostrou, de uma maneira sistemática, que a renormalização da QED e a subsequente remoção de todos infinitos poderiam ser realizadas em todas as ordens de perturbação. Sem dúvida, esta contribuição generalizava os resultados de Feynman, Schwinger e Tomonaga que ficaram restritos a problemas específicos que eram calculados em *nível de árvore* ou de *1-loop*, que correspondem às contribuições dominante e de ordem seguinte da série perturbativa, respectivamente [7].

Uma curiosidade a respeito dos diagramas é que os primeiros diagramas publicados apareceram nos trabalhos de Dyson [4, 5] e não nos de Feynman [6, 8]. Isto se deve ao fato que os dois trabalhos de Dyson foram publicados meses antes dos de Feynman. Por este motivo, em um primeiro momento estas representações esquemáticas foram denominadas de diagramas de Dyson, depois passaram a ser chamadas de diagramas de Dyson-Feynman e, finalmente de diagramas de Feynman. Mesmo anos depois de que os artigos de Feynman foram publicados, os dois artigos de Dyson eram citados com mais frequência que os do próprio Feynman [9].

Em uma entrevista a J. Mehra [9], Feynman comentou sobre o fato de Dyson ter publicado, pela primeira vez na literatura, a representação de um processo utilizando o diagrama de Feynman. Ao entrevistador ele disse: “Certamente ele teve a minha permissão para publicá-lo em seu trabalho. Somos bons amigos. Não há nenhum problema.” Essa informação já havia sido dada anteriormente por Dyson a Mehra. Nesta entrevista de 1987, Dyson disse o seguinte - “Ele foi absolutamente generoso. Ele não teve nenhuma dificuldade em deixar-me livre

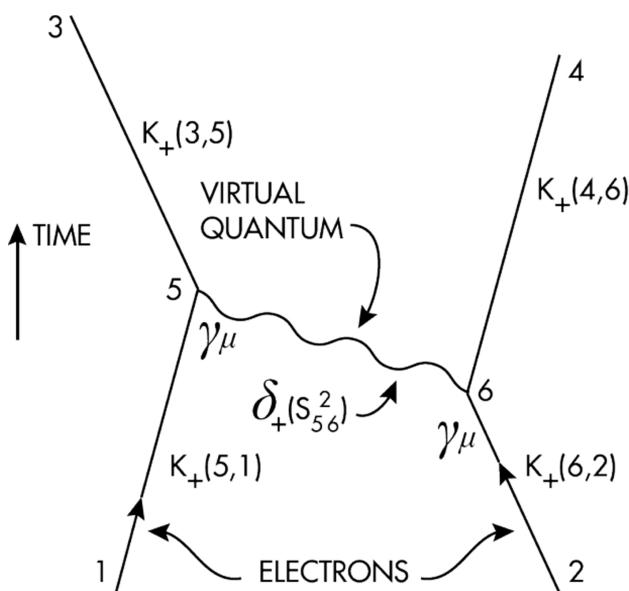


Figura 1: Reprodução do primeiro diagrama que apareceu no trabalho [6] de Feynman. O diagrama representa espalhamento elástico de dois elétrons. A interação dos elétrons ocorre via troca de um fóton, representado pela linha ondulada.

para publicá-lo. Ele (Feynman) apenas disse:- Bem, isto é ótimo! Finalmente eu sou respeitável” [10].

2. Elementos de um diagrama

Para calcular a probabilidade de um processo de espalhamento relativístico, nós precisamos determinar a chamada *amplitude de espalhamento invariante de Lorentz*, \mathcal{M}_{fi} , que conecta um estado inicial, $|\Psi_i\rangle$, caracterizado por um conjunto de partículas que possuem momentos bem definidos, a um estado final, $|\Psi_f\rangle$, contendo outras partículas (na maioria das vezes diferentes) que também possuem momentos bem definidos.

Para fazer uso da técnica gráfica criada por Feynman é importante saber que cada diagrama de Feynman representa uma contribuição para \mathcal{M}_{fi} . Isto significa que cada diagrama representa uma função complexa escrita em termos dos momentos externos. Ou seja, os diagramas fornecem um maneira pictórica de representar as contribuições para a amplitude \mathcal{M}_{fi} . Uma vez determinada uma amplitude é possível calcular grandezas física mensuráveis como a seção de choque diferencial [11, 12], já que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (1)$$

De forma esquemática, um processo de espalhamento de partículas é composto pelos seguintes elementos:

partículas iniciais \rightarrow *interação* \rightarrow *partículas finais*.

São exatamente estes estágios que são representados pictoricamente nos diagramas de Feynman. Aqui, por razões de simplicidade e espaço, vamos nos restringir a apresentar somente processos que ocorrem através da QED e portanto vamos mostrar as regras de Feynman para esta teoria.

Para isto, vamos começar, mostrando na Fig. 2 os tipos de linhas que podem ser encontradas em um diagrama que representa um processo físico da QED. Note que cada “estilo” de linha representa uma partícula específica da teoria. No caso da QED, temos o elétron (partícula), e^- , e o pósitron (antipartícula), e^+ , onde ambos são representados por linhas sólidas. Já o fóton, que é o bóson responsável pela interação, é representado pela linha ondulada e denotado pelo símbolo γ .

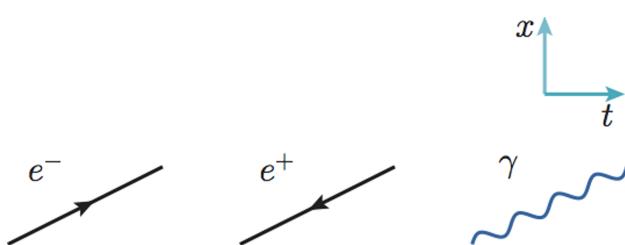


Figura 2: Elementos básicos que compõem os diagramas de Feynman para QED. As linhas são as representações do (a) elétron, (b) pósitron e (c) fóton.

Como os diagramas de Feynman são representações espaço-temporais que contam a estória de como um conjunto de partículas iniciais interagem, é importante definir o significado de cada eixo (apesar deles serem convenientemente omitidos na grande maioria das figuras). Aqui vamos adotar que o eixo horizontal indica o fluxo do tempo enquanto o vertical representa o espaço. A escolha reversa também é válida e igualmente utilizada na literatura (veja por exemplo a Fig. 1). Por motivos didáticos vamos desenhar, somente nos nossos primeiros diagramas, os eixos indicando a direção do fluxo temporal e espacial, como feito na Fig. 2 [13].

Uma vez fixado o sentido do fluxo temporal, a Fig. 2 deve ser lida da esquerda para a direita. Manter este sentido é importante, pois ele determina a interpretação correta do diagrama.

Na Fig. 2, as linhas sólidas que aparece nas duas primeiras figuras representam o elétron e o pósitron se propagando entre duas coordenadas espaço-temporais, por exemplo, x e t , respectivamente. Note que uma convenção importante, que é sempre utilizada ao desenhar um diagrama de Feynman, é o fato que partículas (como é o caso do elétron), são representadas por uma linha com uma flecha apontando na mesma direção do fluxo do tempo enquanto que anti-partícula (como o pósitron) tem a sua flecha apontando na direção oposta. Já a linha ondulada, da terceira figura, representa o propagador do fóton que nos fornece informações de como o campo eletromagnético se propaga entre os pontos x e y . Os propagadores nada mais são que funções de Green que conectam dois pontos do espaço-tempo.

Nos diagramas de Feynman interações são representadas como “vértices”, isto é, a junção de três linhas em um mesmo ponto do espaço-tempo. Os vértices representam os pontos onde as partículas são criadas ou destruídas. No caso da interação eletromagnética existe somente um vértice básico. Este vértice acopla um fóton a um partícula carregada (elétron/pósitron) com uma intensidade que é proporcional a carga elétrica do fermion, e . Além disso, em cada vértice, sempre é conservado o quadrimomento, isto é, as somas da energia e do tri-momento das partículas que entram devem ser iguais às somas da energia e do tri-momento das partículas que saem do vértice (a mesma lei de conservação vale para a carga elétrica, spin, número leptônico, etc.).

Na Fig. 3 mostramos algumas maneiras diferentes de interpretar a mesma interação.

No diagrama (a) um elétron emite um fóton e continua se propagando. Já em (b) um pósitron absorve um fóton e continua seu caminho. Em (c) representamos um elétron e um pósitron se aniquilando em um fóton. Por fim o diagrama (d) representa a produção espontânea de um par elétron-pósitron por um fóton.

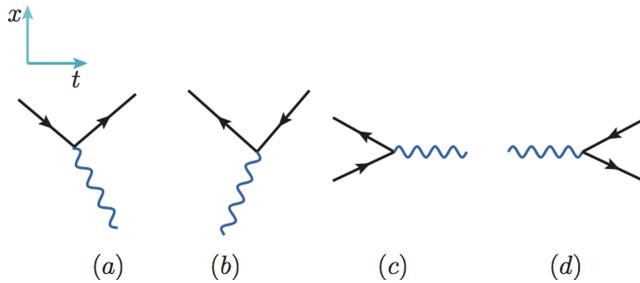


Figura 3: Diagramas de Feynman para interações: (a) elétron-fóton, (b) pósitron-fóton, (c) aniquilação do par elétron-pósitron, (d) criação do par elétron-pósitron.

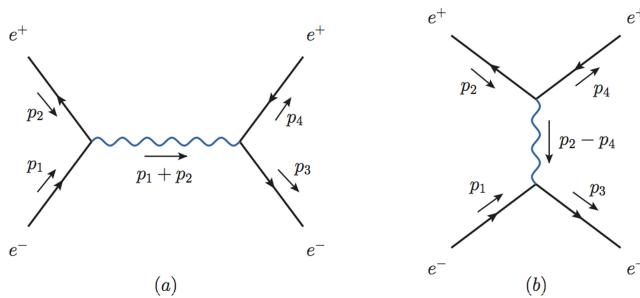


Figura 4: Contribuições para o espalhamento Bhabha, $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

3. Espalhamentos básicos da QED

Agora vamos considerar o espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ representado na Fig. 4. Este processo possui duas contribuições para a amplitude de espalhamento. No diagrama (a) representamos o caso onde o elétron e pósitron se aniquilam, criando um fóton virtual, que na sequência produz um par elétron-pósitron. Já o diagrama (b) o elétron troca um fóton com um pósitron que está em sua vizinhança. Note que esta troca ocorre sem que o elétron entre em contato com o pósitron.

As linhas que aparecem do lado esquerdo de cada diagrama mostrado na Fig. 4 representam as partículas iniciais do processo. Elas então interagem uma com a outra e dão origem às partículas finais (representadas pelas linhas que aparecem à direita dos diagramas). São as partículas finais que são eventualmente detectadas nos aceleradores de partículas. É importante mencionar, que todas as partículas externas (iniciais e finais) sempre satisfazem, individualmente, a relação energia-momento relativística $E_i^2 - p_i^2 = m_i^2$, onde $i = 1, 2, 3$ e 4 . Note que estamos utilizando unidades naturais onde $\hbar = c = 1$.

Já as linhas internas do diagrama representam partículas virtuais que não são diretamente observadas. No caso da Fig. 4 a partícula virtual é o fóton, que está mediando a interação entre o elétron e o pósitron. As partículas virtuais são criadas e destruídas devidos às interações quânticas. Sua função é permitir que uma dada interação possa ocorrer para que as partículas iniciais se convertam nas partículas finais do processo. Para uma partícula

virtual a relação relativística de energia-momento não é satisfeita, ou seja, $E_q^2 - q^2 \neq m_q^2$, onde E_q e q são a energia e o tri-momento desta partícula virtual, respectivamente. Então, dizemos que estas partículas estão fora da camada de massa. Note que não satisfazer a relação energia-momento não é um problema para partículas virtuais, já que elas existem por um curíssimo intervalo de tempo e, o seu momento e energia não podem ser medidos, a menos que colidirmos algo contra elas. Então, nunca iremos “ver” partículas fora da camada de massa, somente podemos medir os efeitos que elas causam em outras partículas com que elas interajam.

Para escrever a expressão matemática da amplitude de espalhamento que corresponde a cada um dos diagramas representados na Fig. 4, precisamos listar as regras de Feynman. Estas regras podem ser lidas diretamente da Lagrangiana da QED, ou calculadas através da técnica de integrais de caminho. Detalhes de como esta derivação é feita podem ser encontrados nas Refs. [11, 12]. Aqui vamos nos restringir a simplesmente listá-las nas Figs. 5 and 6.

Nestas regras aparecem a métrica, $g^{\mu\nu}$, as matrizes de Gama de Dirac, γ^μ , e os spinores de quatro componentes de Dirac para o elétron $u(p)$ e $\bar{u}(p)$ e para o pósitron $v(p)$ e $\bar{v}(p)$.

As duas primeiras representações gráficas e suas respectivas expressões matemáticas mostradas na Figs. 5 são os propagadores do fóton e elétron (ou pósitron), respectivamente. Estas expressões matemáticas são válidas para descrever partículas virtuais e, portanto devem ser utilizadas exclusivamente na parte interna dos diagramas de Feynman. Desta forma garantimos que seus denominadores não se anulem, pois como já foi mencionado, as partículas virtuais sempre estão fora da camada de massa. Já a terceira representação é a regra para o vértice de interação fóton-elétron. Note que para cada vértice que aparece em um processo de espalhamento, ganhamos um fator e que corresponde a carga elétrica do elétron.

Já a Fig. 6 representam as regras de Feynman para as linhas externas dos diagramas, ou seja, suas expressões matemáticas correspondem à partículas físicas que estão na camada de massa. No caso das partículas externas

$$\begin{aligned} \text{Wavy line} &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \\ \text{Solid line} &= \frac{i(p+m)}{p^2 + m^2 + i\epsilon} \\ \text{Feynman vertex} &= -ie\gamma^\mu \end{aligned}$$

Figura 5: Regras de Feynman para os propagadores do fóton e elétron (ou pósitron) que aparecem na parte interna (partículas virtuais) dos diagramas e o vértice de interação.

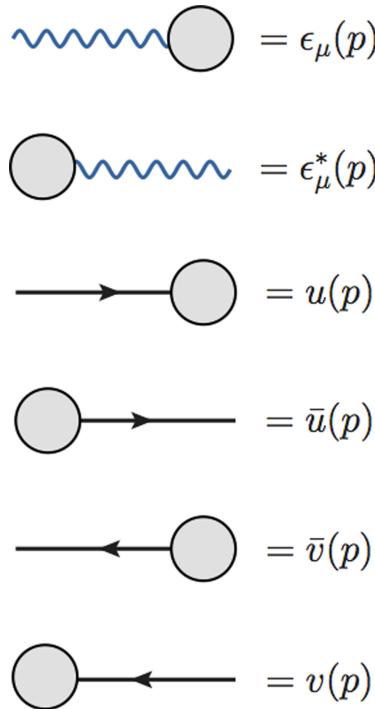


Figura 6: Regras de Feynman para as linhas externas que aparecem nos diagramas. Os círculos significam o resto do diagrama que foi omitido.

serem elétrons ou pósitrons, elas vão satisfazer a equação de Dirac, sendo $u(p)$ e $v(p)$ os espinores que satisfazem esta equação. Os círculos em cinza representam o resto do diagrama que foi omitido. Assim, se tivermos um fóton, de momento p , no estado inicial de um dado processo, utilizamos a polarização $\epsilon_\mu(p)$; já para um fóton do estado final usamos $\epsilon_\mu^*(p)$. Similarmente, um elétron e um pósitron, de momento p , nos estados iniciais de um espalhamento serão expressos por $u(p)$ $\bar{v}(p)$, respectivamente. Por outro lado, quando eles são partículas finais, o elétron e o pósitron são escritos como $\bar{u}(p)$ e $v(p)$.

Vamos agora aplicar as regras de Feynman acima descritas para os diagramas mostrados na Fig. 4. Devemos ter cuidado ao escrever a expressão matemática que cada diagrama de Feynman corresponde, pois a ordem dos termos importa - a regra é começar pelo final de cada linha de fermion e se mover sentido contrário ao fluxo de partículas (indicado pelas setas que ficam sobre as linhas), escrevendo cada vértice ou propagador interno do fermion, mas sempre se movendo na direção do início da linha do fermion.

Utilizando o procedimento acima descrito e a convenção de momento indicada na figura, chegamos que a

amplitude de espalhamento é dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{fi} &= (-ie)^2 [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] \\ &\times \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)] \\ &- (-ie)^2 [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_2 - p_4)^2} \\ &\times [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)], \end{aligned} \quad (2)$$

onde suprimimos os índices de Dirac nos espinores e nas matrizes γ para manter a notação compacta. Note que também não colocamos o $i\epsilon$ no denominador do propagador do fóton, já que não faz diferença quando nós tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Além disto, devido ao fato que os elétrons obedecem a estatística de Fermi, no caso deste espalhamento incluímos um sinal relativo entre os dois diagramas representados na Fig. 4, pois eles diferem pela troca de pósitron entrando e um elétron saindo.

Para obter a seção de choque dada pela equação (1), é necessário calcular $|\mathcal{M}_{fi}|^2 \equiv \mathcal{M}_{fi}\mathcal{M}_{fi}^\dagger$. A seguir vamos mostrar os passos principais para o desenvolvimento deste cálculo. Se denotarmos os resultados fornecidos pelo diagramas (a) e (b) da Fig. 4 como \mathcal{M}_a e \mathcal{M}_b , respectivamente, a amplitude total do espalhamento será dada por $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$. Desta forma, o módulo da amplitude de espalhamento ao quadrado pode ser escrito como

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = |\mathcal{M}_a|^2 + \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^\dagger + |\mathcal{M}_b|^2, \quad (3)$$

onde os termos mistos são termos de interferência entre os dois diagramas. Portanto a seção de choque da equação (1) recebe contribuições de interferência que “misturam” os diagramas que compõem um dado processo de espalhamento.

Deste modo, para calcular o elemento de matriz ao quadrado precisamos multiplicar a amplitude pelo seu conjugado complexo. Usando o fato que a matriz γ^0 é hermitiana, enquanto que γ^i são anti-hermitianas, além da definição que $\bar{u}(p) \equiv u^\dagger(p)\gamma^0$ [similarmente para $v(p)$], nos podemos mostrar que

$$(\bar{u}\Gamma u') = (\bar{u}'\bar{\Gamma}u), \quad (4)$$

onde u e u' podem representar os dois espinores (u ou v), Γ representa uma sequência de matrizes γ e $\bar{\Gamma}$ é a mesma sequência de matrizes γ , mas em ordem reversa.

Quando nós construímos o elemento de matriz associado aos diagramas da Fig. 4 e expresso pela equação (2), obtemos três termos. Substituindo $s = (p_1 + p_2)^2$ e $t = (p_2 - p_4)^2$ chegamos à

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2)] \\ &\times [\bar{u}(p_3)\gamma_\nu v(p_4)\bar{v}(p_4)\gamma_\mu u(p_3)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$|\mathcal{M}_b|^2 = \frac{e^4}{t^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\nu v(p_4)\bar{v}(p_4)\gamma^\mu v(p_2)] \\ \times [\bar{u}(p_3)\gamma_\nu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma_\mu u(p_3)], \quad (6)$$

e a interferência entre os dois gráficos

$$2\Re e\{\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b\} = -2\frac{e^4}{st} [\bar{v}(p_2)\gamma^\nu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(p_3)] \\ \times [\bar{u}(p_3)\gamma_\nu v(p_4)\bar{v}(p_4)\gamma_\mu v(p_2)]. \quad (7)$$

Na maioria dos experimentos a direção da polarização dos férmiões do estado final não é medida, mas como elas contribuem para o processo, nós somamos o elemento de matriz quadrado sobre todos os estados finais de helicidade, s' . Além disto, como usualmente utilizamos feixes de férmiões iniciais não polarizados, nós fazemos a média sobre as helicidades iniciais s , *i.e.*, nós somamos a helicidades de todos os quatro férmiões e dividimos por quatro.

Usando as relações

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = (\not{p} + m), \\ \sum_{s=1}^2 v_s(p)\bar{v}_s(p) = (\not{p} - m), \quad (8)$$

chegamos nas seguintes expressões

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_a|^2 = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr} [(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] \\ \times \text{Tr} [(\not{p}_3 + m)\gamma_\nu (\not{p}_4 - m)\gamma_\mu], \quad (9)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_b|^2 = \frac{e^4}{t^2} \text{Tr} [(\not{p}_2 - m)\gamma^\nu (\not{p}_4 - m)\gamma^\mu] \\ \times \text{Tr} [(\not{p}_3 + m)\gamma_\nu (\not{p}_1 + m)\gamma_\mu], \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{s,s'} \Re e\{\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b\} = -\frac{e^4}{2st} \text{Tr} [(\not{p}_2 - m)\gamma^\nu (\not{p}_1 + m)\gamma^\mu] \\ (\not{p}_3 + m)\gamma_\nu (\not{p}_4 - m)\gamma_\mu], \quad (11)$$

onde Tr indica o traço das matrizes.

Para simplificar os cálculos, vamos agora nos restringir ao limite de altas energias, onde todos os momentos são grandes quando comparados com a massa do elétron, m . Esta aproximação nos leva à

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_a|^2 = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma_\mu], \\ \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_b|^2 = \frac{e^4}{t^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu], \\ \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \Re e\{\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b\} = -\frac{e^4}{2st} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma_\mu]. \quad (12)$$

Utilizando as expressões para os traços do produto de matrizes γ , que podem ser encontrados nas Ref. [11, 12] e, depois contraindo os índices de Lorentz obtemos

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_a|^2 = \frac{8e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)], \\ \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_b|^2 = \frac{8e^4}{t^2} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)], \\ \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \Re e\{\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b\} = \frac{16e^4}{st} [(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3)]. \quad (13)$$

É conveniente re-expressar as equações acima utilizando as chamadas variáveis de Mandelstam, que no limite de altas energias se reduzem à

$$s = 2(p_1 \cdot p_2) = 2(p_3 \cdot p_4), \\ t = -2(p_1 \cdot p_3) = -2(p_4 \cdot p_2), \\ u = -2(p_1 \cdot p_4) = -2(p_3 \cdot p_2). \quad (14)$$

Assim, o elemento de matriz ao quadrado é dado por

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right). \quad (15)$$

O próximo passo é inserir este resultado na integral do espaço de fase para duas partículas no estado final e dividir pelo fator de fluxo. [11, 12]. Desta forma, no limite onde a massa do elétron pode ser desprezada, nós chegamos a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right), \quad (16)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi$.

A relação entre t e u com o ângulo de espalhamento θ , no referencial do centro de massa, é dado por

$$t = -s \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad u = -s \frac{1 + \cos \theta}{2}. \quad (17)$$

Finalmente, obtemos a seção de choque do espalhamento Bhabha em termos do ângulo de espalhamento do centro de massa que é expressa por

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{\alpha^2}{s} \left[\frac{(1 - \cos^2 \theta)}{2} + \frac{(5 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta)}{(1 - \cos^2 \theta)} \right. \\ \left. - \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)} \right]. \quad (18)$$

Um outro exemplo de processo da QED é o espalhamento Compton, onde o elétron e o fóton sofrem um espalhamento elástico, $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$. Na Fig. 7, mostramos as duas formas distintas de como este espalhamento pode ocorrer. No diagrama (a) um elétron real e um fóton são combinados, criando um elétron virtual (representado pela linha interna) cuja massa e energia são diferentes do elétron que aparece no estado inicial.

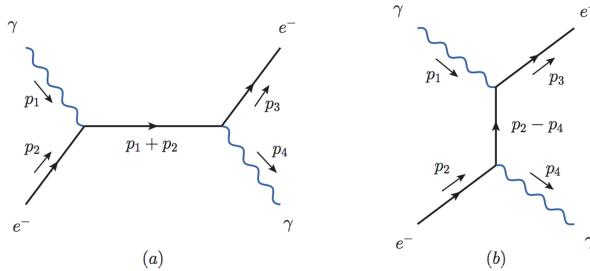


Figura 7: As duas possíveis contribuições para o espalhamento Compton, $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.

Este elétron virtual, devido sua massa e energia não realística, emite um fóton e um elétron que definem as partículas que compõem o estado final. Já no diagrama (b) o elétron emite um fóton e depois é espalhado pelo fóton inicial.

Neste caso a amplitude de espalhamento é dada por

$$i\mathcal{M}_{fi} = (-ie)^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_4^{*\nu} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \gamma^\mu u(p_2) \\ + (-ie)^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_4^{*\nu} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_2 - \not{p}_4 + m)}{(p_2 - p_4)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_2), \quad (19)$$

onde utilizamos a notação compacta $\epsilon_i^\mu = \epsilon^\mu(p_i)$.

Não iremos calcular a seção de choque deste processo em detalhes, mas para calcular a seção de choque não polarizada, é importante mencionar que ao tomar o quadrado do elemento de matriz, teremos que somar sobre as polarizações do fóton ϵ_i^μ . Para isto, utilizaremos que a soma sobre todos os possíveis estados dos fótons externos é dada por

$$\sum_{s=1}^2 \epsilon_s^\mu(p_i) \epsilon_s^{*\nu}(p_i) \rightarrow -g^{\mu\nu}. \quad (20)$$

O próximo processo fundamental da QED que iremos discutir é $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ representado na Fig. 8. Note que, neste processo temos duas partículas iguais no estado final, portanto temos que levar em conta a possibilidade que os vértices de interação tenham partículas dos estados

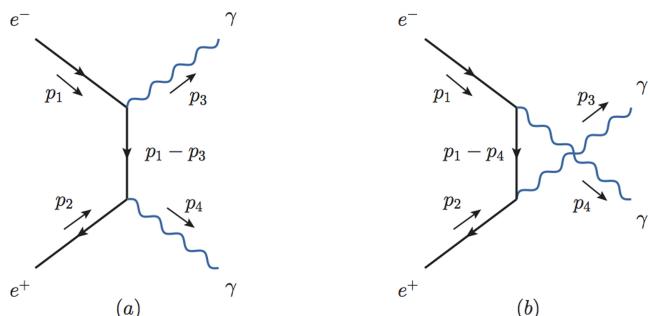


Figura 8: Contribuições para o espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$.

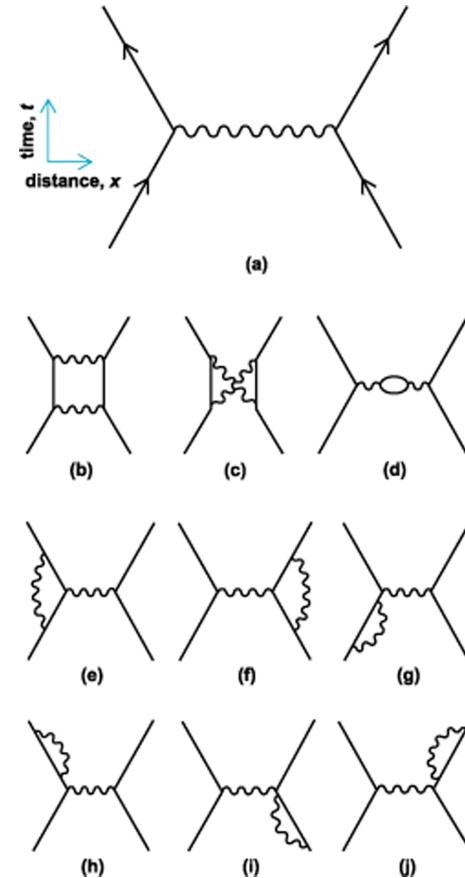


Figura 9: Nível de árvore e correções radiativas do espalhamento Moller $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

finais permutadas. Assim, podemos escrever que

$$i\mathcal{M}_{fi} = (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_1 - \not{p}_3 + m)}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_1) \epsilon_4^{*\mu} \epsilon_3^{*\nu} \\ + (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_1 - \not{p}_4 + m)}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_1) \epsilon_4^{*\nu} \epsilon_3^{*\mu}. \quad (21)$$

Por fim, vamos ilustrar na Fig. 9 o chamado espalhamento Moller que é o espalhamento elétron-elétron, $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$. Neste figura, vamos adotar que o eixo horizontal indica variação no espaço enquanto que tempo flui na vertical de baixo para cima. Estamos fazendo isto para manter a mesma convenção adotado por Feynman em seu artigo [6] onde este processo foi estudado.

A Fig. 9 é composta por uma série de diagramas de Feynman. Todos eles contribuem para o espalhamento Moller, mas em ordens de perturbação diferentes. A ordem de um diagrama pode ser determinada pelo número de vértices que um dado diagrama tem. Quanto menor é este número, menor será a ordem de perturbação que este diagrama contribui. Por exemplo, o diagrama (a) possui dois vértices logo será proporcional a e^2 , já os demais diagramas possuem 4 vértices e portanto todos serão proporcionais a e^4 . Em QED, a série perturbativa

é expandida em termos da constante de estrutura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}. \quad (22)$$

Note que a solução completa de uma dada teoria envolve a soma de todos os diagramas em todas as ordens de perturbação. Porém, é importante ter em mente que, como a magnitude da interação da QED é pequena, a maior contribuição vem da ordem mais baixa (dita ordem de árvore ou clássica), como é o caso do diagrama (a) da Fig. 9. Diagramas de ordem superior, como os mostrados nas figuras (b)-(j), revelam as chamadas *correções quânticas* ou *radiativas* da teoria.

Assim, devido ao seu caráter perturbativo é possível descrever a QED, com um boa precisão, calculando um pequeno número de diagramas. Evidentemente a medida que aumentamos a ordem da aproximação perturbativa para aumentar a precisão dos nossos cálculos, o número de diagramas e a dificuldade aumentam drasticamente. Para se ter uma ideia, o atual estado de arte dos cálculos teóricos do fator giromagnético do elétron $g - 2$ envolvem o cálculo de 891 diagramas da QED que vão até ordem α^4 [14]. A comparação deste cálculo teórico com os dados experimentais concordam em 10 casas decimais. A QED é a teoria mais precisa que temos atualmente em toda a física e por este motivo, Feynman costumava chamar a QED de “jóia da física” [15].

4. Conclusão

Vimos que para calcular a probabilidade de um processo de espalhamento relativístico, temos que ser capazes de visualizar todos os estados intermediários possíveis que conectam um estado inicial a um estado final. A soma das contribuições de cada uma destas transições formam a chamada amplitude de espalhamento \mathcal{M}_{fi} .

Os estados intermediários formam uma série perturbativa, cujo parâmetro de expansão é a constante de estrutura fina α . Vimos que cada um destes processos pode ser representados pelos diagramas de Feynman. A vantagem dos diagramas é que toda a expansão perturbativa pode ser feita de uma maneira organizada e sistemática, sem se perder em uma série de cálculos complicados envolvendo os operadores de campos locais, que eram amplamente utilizados por Schwinger antes do advento desta técnica diagramática.

Sem dúvida, foi graças aos diagramas de Feynman, que o entendimento da QED se espalhou entre os físicos teóricos. Mesmo tendo suas objeções com o uso dos diagramas de Feynman, o próprio Schwinger reconheceu que Feynman tinha fornecido as ferramentas para que qualquer um pudesse estudar QED. Em suas próprias palavras, Schwinger disse que: “*Like the silicon chips of more recent years, the Feynman diagram was bringing computation to the masses*” [16].

Tal é a utilidade prática desta técnica gráfica, que o uso dos diagramas de Feynman se tornou a maneira

padrão de realizar cálculos dentro da teoria dos campos quânticos e de partículas. Vale ressaltar, que seus princípios básicos transcendem a área de física de partículas. Metodologias similares são empregadas em outras áreas como a mecânica estatística, física do estado sólido e gravitação. Os diagramas de Feynman certamente nos mostram que para transmitir uma ideia, imagens são muito mais poderosas que equações!

Agradecimentos

A autora agradece o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq através da bolsa produtividade 305815/2015 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Fapesp através dos projetos 2017/07595-0 e 2017/05685-2.

Referências

- [1] Miguel Ángel Vázquez-Mozo, Revista CIC Network **5**, 70 (2009).
- [2] David Kaiser, American Scientist **93**, 156 (2005).
- [3] Frank Wilczek, Quanta Magazine July 5, (2016).
- [4] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949).
- [5] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [6] R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).
- [7] S. S. Schweber, *QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton University Press, New Jersey, 1994), p. 732.
- [8] R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749 (1949).
- [9] J. Mehra, *The Beat of a different drum: The Life and science of Richard Feynman* (Oxford University Press, New York, 1994), p. 630.
- [10] J. M. Filardo Bassalo, *Curiosidades da Física* (<http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore442.htm>).
- [11] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, New York, 2014), p. 863.
- [12] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1995), p. 842.
- [13] F. Tanedo, *Quantum diaries* (<https://www.quantumdiaries.org/2010/02/14/lets-draw-feynman-diagrams/>).
- [14] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio and B. C. Odom, Phys. Rev. Lett. **97**, 030802 (2006), Erratum: [Phys. Rev. Lett. **99**, 039902 (2007)].
- [15] R. P. Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter* (Princeton University Press, New Jersey, 1985), p. 158.
- [16] L. M. Brown and L. H. Hoddesdon, *The Birth of Particle Physics* (Cambridge University Press, New York, 1986) p. 436.