

9 Доверительное оценивание

1. Построить график функции $y_{1-\alpha+\beta} - y_\beta$ для $\beta \in (0, \alpha)$, где y_t – квантиль распределения

- (a) $N(0, 1)$,
- (b) $Gamma(n, 1)$, $n = 1, 2, 5, 10, 100$,
- (c) $R[0, 1]$,
- (d) $Beta(a, b)$, $a = b = 5$, $a = 10$, $b = 2$, $a = 20$, $b = 1$.

Рассмотреть одно любое значение α , например, $\alpha = 0.001, 0.05, 0.1$. Сделать вывод о выборе оптимального β для построения доверительного интервала на основе статистики с нашим распределением.

2. $X_1, \dots, X_n \sim R[0, \theta]$.

- (a) Построить асимптотический доверительный интервал, используя \bar{X} . Найти эмпирически доверительную вероятность этого интервала (построить 1000 выборок, подсчитать долю тех, для которых интервал накрыл истинное значение параметра, для $n = 20, 50, 100$).
- (b) Построить точный доверительный интервал, используя достаточную статистику. Сравнить средние длины точного и асимптотического интервалов при $n = 20, 50, 100$.

3. $X_1, \dots, X_n \sim Bern(\theta)$. Построить асимптотический доверительный интервал двумя способами с помощью \bar{X} , сравнить средние длины полученных интервалов (генерировать 1000 выборок, по каждой строить оба интервала, посчитать и показать средние длины) для $\theta = 0.1, 0.4, 0.5, 0.9$ и $n = 20, 50, 100$.

4. * $X_1, \dots, X_n \sim Gamma(\theta, 1)$. Построить асимптотический доверительный интервал для θ на основе ОМП.

5. ** Построить доверительный эллипс для параметра (μ_1, μ_2) по выборке из $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ распределения, где а) $\Sigma = E$ б) Σ имеет 1 и 2 на диагонали и 0.5 вне. Для построения можно использовать `confidence_ellipse` из `matplotlib`. Как меняется эллипс при изменении размера выборки: взять $n = 10, 100, 500$.

6. ** $X_1, \dots, X_n \sim R[\theta_1, \theta_2]$. Построить доверительное множество для (θ_1, θ_2) с помощью $X_{(1)}, X_{(n)}$, изобразить для разных (θ_1, θ_2) .