

## 11 Критерии: основные понятия

1. Пусть  $X_i \sim \text{Bern}(\theta)$ , для  $H_0 : \theta = 1/2$  и  $H_1 : \theta = \theta_1$ , где а)  $\theta_1 = 1/3$ , б)  $\theta_1 = 2/3$ . Рассмотрим критерий  $\{\sum_{i=1}^n X_i > C\}$ ,  $n = 10$ . Построить графики вероятностей ошибки I рода, ошибки II рода и мощности критерия в зависимости от  $C$ . Для какой альтернативы осмысленно использовать этот критерий?

2. График ЭФР p-value.

- (а) Генерируем выборку, находим значение статистики критерия  $T$  ( $T = X_{(1)}$  или  $T = X_{(n)}$ ). Находим функцию распределения  $F_T(x)$  нашей статистики. Вычисляем  $p\text{-value} = 1 - F_T(T)$ , для критических множеств вида  $\{T > C\}$ ,  $p\text{-value} = F_T(T)$  для критических множеств вида  $\{T < C\}$ . Повторяем  $m \geq 100$  раз. Получился массив  $p_1, \dots, p_m$ , упорядочиваем его по возрастанию.
- (б) Строим график: по оси  $Ox$  – значения  $p_1, \dots, p_m$ , по оси  $Oy$  – числа  $1/m, 2/m, \dots, 1$ . Иными словами, мы строим график эмпирической функции распределения p-value.

Мы знаем, что если  $F(x)$  непрерывна, то  $F_T(T) \sim R[0, 1]$ . Значит, при гипотезе точки должны быть близки к прямой  $y = x$ . При альтернативе мы ожидаем увидеть отклонение от этой прямой.

Посмотрим как это работает на синтетическом наборе данных: пусть  $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ ,  $H_0 : \theta = 0$ ,  $H_1 : \theta = \theta_1$ . Постройте а) критерий Неймана-Пирсона для  $\theta_1 > 0$  б) для  $\theta_1 < 0$  в) асимптотический критерий  $|MED - 1/2| > C$ . Рассчитайте для них ф.р. статистик критерия, найдите p-value критериев.

- (а) Построить графики p-value всех трех критериев, выбирая данные а) при верной нулевой гипотезе б) при каждой из альтернатив ( $\theta_1 = -1$  и  $\theta_1 = 1$ ). Построить их на одном графике. В какую сторону отклоняются графики от прямой  $y = x$ ?
  - (б) Как влияет размер выборки на отклонение от  $y = x$ ?
  - (с) Какой критерий самый лучший?
3.  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(\theta)$ ,  $H_0 : \theta = 1/2$ ,  $H_1 : \theta = 1/3$ . При каких  $n$  можно построить критическое множество вида  $\{\sum_{i=1}^n X_i < C\}$  так, чтобы вероятности ошибок первого и второго рода не превышали 0.05? Построить графики вероятностей ошибок первого и второго рода (как функции от  $C$ ) для разных  $n$ .
  4. \* Построить в предыдущей задаче рандомизированный критерий Неймана-Пирсона уровня значимости 0.05. Эмпирически исследовать вероятность ошибки I рода критерия и убедиться, что она действительно 0.05.