

## 10 Байесовский анализ

1.  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(\theta)$ ,  $\theta \sim \text{R}[0, 1]$ . Посчитать апостериорную плотность и построить ее график.
  - а) для выборок размера  $n = 5, 10, 20, 50, 100$  для  $\theta = 1/2$ ,  $\theta = 1/3$ ;
  - б) вместо генерации выборки положите  $\sum_{i=1}^n X_i$  равной  $9n/10$  или  $99n/100$ .
2. Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ ,  $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Апостериорную плотность можно не считать, а взять из таблицы. Посмотрим, как влияют параметры априорного распределения на итоговый результат. Для этого будем генерировать выборки для какого-то одного фиксированного  $\theta$  (возьмите любое число из  $[0, 1]$ , а также посмотрите на какое-нибудь  $\theta$ , близкое к 0 или 1).
  - (а) Сравнить (визуально на графике) апостериорные плотности для нескольких разных значений  $(\mu, \sigma^2)$ .
  - (б) Построить пример, когда при  $n = 10000$  оценка  $\theta$  достаточно сильно отличается от настоящего значения несмотря на размер выборки.
  - (с) Сравнить байесовские оценки для квадратичного риска при разных  $(\mu, \sigma^2)$ .
3.  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ . Построить (на листочке) байесовский критерий для проверки  $H_0 : \theta = 0$  против  $H_1 : \theta = 1$ , если априорная вероятность  $\mathbf{P}(\theta = 0) = p$ . Построить графики зависимости ошибок 1-го и 2-го рода от  $p$ .
4. \* Пусть  $X_i \sim \exp(\theta)$ , а  $\theta \sim \text{Gamma}(a, b)$ . а) Построить байесовские оценки для абсолютной и квадратичной функций потерь и сравнить у таких оценок среднюю а) квадратичную б) абсолютную ошибку. б) Построить байесовский доверительный интервал уровня 95% и эмпирически исследовать ее уровень доверия.