

5 Цепи Маркова

1. Дана м.в.п. однородной цепи Маркова

$$1) \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} 2/9 & 1/3 & 0 & 4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 0 & 4/9 \\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3 \\ 2/9 & 2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Найти стационарное распределение.
- Возвести матрицу в степень 5, 10, 20, 30, 50 и сравнить результаты.

2. Пусть ξ_n – ЦМ с м.в.п.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Найти стационарное распределение. Построить траекторию цепи. Сходится ли она п.н.? Найти долю посещений каждого из состояний за большое число n шагов. Сходится ли она п.н.? Моделируем 100 траекторий и для каждой вычтем из доли посещения первого состояния соответствующую стационарную вероятность, умножим результат на \sqrt{n} . Построить гистограмму полученного распределения.

3. В файле MarkovChain.txt находится м.в.п. цепи, не имеющей несущественных состояний. Написать программу, которая а) разделит состояния на неразложимые классы, б)* каждый из классов на подклассы состояний в соответствии с периодичностью цепи.

4. Пусть ξ_n – ЦМ с м.в.п.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Какую м.в.п. имеет обращенная цепь ξ_{N-n} ? Исследовать к какому распределению сходится а) прямая цепь б) обращенная цепь?

5. Моделировать случайное блуждание а) на целочисленной решетке прямой, выбирающее равновероятно одну из двух соседних точек б) на целочисленной решетке плоскости, выбирающее равновероятно одну из четырех соседних точек в) в трехмерном пространстве, выбирающее равновероятно одну из шести соседних точек. Какие из них, исходя из моделирования, оказались возвратными?

6* (Засчитывается как факультатив по теории случайных процессов). Построить кооп для проверки гипотезы H_0 : X_i независимы с альтернативой H_1 : X_i – однородная цепь Маркова. Использовать критерий (считая выполненной теорему Уилкса) для проверки гипотезы для данных с м.в.п.

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

при а) $p = 1/2$, б) $p = 1/3$, в) $p = 0.52$.