

6 Ветвящиеся процессы

Пусть Z_n – количество частиц в n -м поколении ветвящегося процесса (ВП) Гальтона-Ватсона ($Z_0 = 1$) с геометрическим распределением (с параметром p) числа потомков.

Прежде чем решать задачи, полезно вспомнить (или разобраться), как по параметру p определить, является ли процесс критическим, надкритическим или докритическим?

Задачи 1-4 посвящены моделированию ветвящихся процессов, задача 5 посвящена статистике.

1. Оценить вероятность вырождения ВП по множеству симуляций и сравнить с точным ответом.
2. Смоделировать критический процесс 1000 раз до момента вырождения или до 50-го хода, отобрать траектории, которые через 50 ходов еще жива, вывести их. Как их количество и численность соответствующих процессов согласуется с предельной теоремой для ВП?
Сколько траекторий проживет 50 ходов в случае докритического процесса с геометрическим $p > 1/2$? Моделировать процесс для различных p .
3. Смоделировать 20 шагов надкритического процесса с $p = 0.45$ построить график $\log Z_n$ от n . Построить несколько траекторий таких процессов.
4. Рассмотрим докритический ВП с иммиграцией в одну частицу. Найти численно вероятность того, что в процессе k частиц в момент n , где $k \leq 5$.
- 5*. Рассмотрим а) надкритический, б) критический ВП. Моделировать процесс в течении 20 поколений (дождавшись невырождения).

Оценить с помощью ОМП среднее число потомков одной частицы и вероятность того, что частица дает ровно 0 потомков, а также вероятность того, что частица дает ровно одного потомка. Сравнить оценки с реальными значениями.

Задача также приносит 0.5 баллов по факультативу за 5 семинар.