

7 ОММ, ОМП, ОМС

Мальчики получают первый вариант, а девочки – второй.

Не забудьте, что правдоподобие удобнее логарифмировать перед максимизацией.

1. Построить график функции логарифмического правдоподобия (в пункте б) – обычного) для следующих моделей при $n = 1, 5, 20, 100, 1000$:
 - (а) 1 вариант – $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, 2 вариант $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.
 - (б) $X_1, \dots, X_n \sim R[0, \theta]$.
 - (с) * X_1, \dots, X_n – выборка из распределения, являющегося смесью $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$ и $\mathcal{N}(0, 1)$ с весами $1/2, 1/2$; здесь требуется построить графики $L(\theta_2)$ при фиксированном значении первого параметра: а) θ_1 – настоящее значение (с которым генерировалась выборка), б) $\theta_1 = X_1$, в) любое число, не равное настоящему значению и не совпадающее ни с одним из элементов выборки.
2. X_i имеют распределение Коши, где в варианте 1 неизвестный параметр – сдвиг θ , а в варианте 2 – масштаб. Построить ОМП по выборке размера $n = 5, 10, 20, 50, 100$. Для каждого n генерировать $k = 500$ выборок X_1, \dots, X_n , для каждой найти значение ОМП и $\hat{\theta}$, найти выборочное среднее и выборочную дисперсию ОМП и $\hat{\theta}$ и сравнить их. Здесь $\hat{\theta}$ для первого варианта – это выборочная медиана, а для второго – половина интерквартильного размаха, то есть полуразность верхнего и нижнего выборочного квартиля.
3. 1 вариант – $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$, 2 вариант – $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, $\hat{\theta}_1$ – ОММ, $\hat{\theta}_2$ – ОМС, $\hat{\theta}_3$ – ОМП.
 - (а) Построить по выборке $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3$ (найти численно или аналитически, как удобнее).
 - (б) Сравнить, какая из оценок чаще оказывается ближе к θ при разных n , смоделировав для этого по 1000 реализаций (для каждого n).
 - (с) Построить гистограммы для $\sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta)$ на одном графике, сравнить разбросы.
 - (д) * Посчитать асимптотическую дисперсию этих оценок, построить график (по θ , сравнить с выборочной дисперсией (нормированной)).
4. * 1-й вариант: $X_1, \dots, X_n \sim \text{Beta}(a, b)$, 2-й вариант: $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\theta = (a, b)$, $\hat{\theta}_1 = (\hat{a}_1, \hat{b}_1)$ – ОМП, $\hat{\theta}_2 = (\hat{a}_2, \hat{b}_2)$ – ОМС.
 - (а) Построить по выборке оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ (найти численно).
 - (б) Сравнить, какая из оценок чаще оказывается ближе к θ при разных n (отдельно по каждой координате и в смысле расстояния на плоскости), смоделировав для этого по 1000 реализаций (для каждого n).
 - (с) Построить гистограммы (одномерные) для $\sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta)$ на одном графике, сравнить разбросы.