№1. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ - выборка, $p_{X_1}(x, \theta) = e^{-x+\theta} I(x > \theta)$, где $\theta \in \mathbb{R}$

(а) Используя $\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta \sim \Gamma(1, n)$, постройте точный доверительный интервал уровня $1-\alpha$ для параметра θ

(б) Постройте асимптотический дов-й интервал уровня $1-\alpha$ для пар-ра θ

а) $\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta \sim \Gamma(1, n)$, + о.

Тогда найдем такие a_1 и a_2 что $P(a_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta < a_2) = 1-\alpha$

Преобразуем: $P(-a_2 < n\theta - \sum X_i < -a_1) =$

$= P\left(-\frac{a_2}{n} < \theta - \bar{X} < -\frac{a_1}{n}\right) = P\left(-\frac{a_2}{n} + \bar{X} < \theta < -\frac{a_1}{n} + \bar{X}\right) \overset{(*)}{=}$

$= F(a_2) - F(a_1)$, где F - распределение сл.в ξ с плотностью $f_\xi(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{\Gamma(n)} I(x > 0)$

$(*) = \int_0^{a_2} \frac{x^{n-1} e^{-x} dx}{\Gamma(n)} - \int_0^{a_1} \frac{x^{n-1} e^{-x} dx}{\Gamma(n)}$

Распределение не симетрично, что положим $a_1 = 0$, тогда $\int_0^{a_2} \frac{x^{n-1} e^{-x} dx}{\Gamma(n)} = 1-\alpha \Rightarrow a_2 = X_{1-\alpha}$

Доверит. интервал: $\left(-\frac{X_{1-\alpha}}{n}+\bar{X},\ \bar{X}\right)$

б). $EX = \int_\theta^\infty e^{-x+\theta} x\,dx = e^\theta \int_0^\infty e^{-x} x\,dx = \left|\text{поменяем}\right| =$

$= -e^\theta \int_\theta^\infty x\, de^{-x} = \left|\text{по частям}\right| =$

$= -e^\theta e^{-x} x\Big|_\theta^\infty + e^\theta \int_\theta^\infty e^{-x} dx = \theta - e^\theta \int_\theta^\infty e^{-x} d(-x) =$

$= \theta - e^\theta e^{-x}\Big|_0^\infty = \theta + 1$

$DX = ?;\ EX^2 = \int_0^\infty e^{-x+\theta} x^2 dx = -e^\theta \int_0^\infty x^2\, d e^{-x} =$

$= -e^\theta x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + 2EX = \theta^2 + 2\theta + 2$

$\Downarrow$

$DX = \theta^2+2\theta+2-\theta^2-2\theta-1 = 1$

По ЦПТ: $\sqrt{n}\left(\bar X-(\theta+1)\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$

$P\left(z_{\frac\alpha2} < \sqrt n\left(\bar X - (\theta+1)\right) < z_{1-\frac\alpha2}\right) \to 1-\alpha$

$P\left(\frac{-z_{1-\frac\alpha2}}{\sqrt n} + \bar X - 1 < \theta < \frac{-z_{\frac\alpha2}}{\sqrt n}+\bar X - 1\right) \to 1-\alpha$

Интервал получен, квантили находятся по таблице

№2 Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ - выборка. $X_1 \sim U[0, \theta]$, $\theta > 0$.

(а) Используя одну из статистик $X_{(1)}, X_{(n)}, \overline{X}$, постройте точный доверительный интервал уровня $1-\alpha$ для θ

(б) Постройте асимптотический доверит. интервал уровня $1-\alpha$ для θ.

а). Найдем сначала распред. для максимума:

$$P(X_{(n)} < x) = P(X_1 < x, \dots, X_n < x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x) \text{ (по независ.)}$$

$$= \prod \int_0^x \frac{dx}{\theta} = \prod \frac{x}{\theta} = \frac{x^n}{\theta^n}$$

• Найдем распред $\xi = \frac{X_{(n)}}{\theta}$.

$$F_{\xi}(x) = P\left(\frac{X_{(n)}}{\theta} < x\right) = P\left(X_{(n)} < x\theta\right) = \left(\frac{\theta x}{\theta}\right)^n = x^n$$

• Нужно выбрать k так, чтобы $1-\alpha = 1 - P\left(\frac{X_{(n)}}{\theta} < k\right)$

т.е $P\left(\frac{X_n}{\theta} < k\right) = \alpha = k^n \Rightarrow k = \alpha^{\frac{1}{n}}$

• $P\left(\frac{X_{(n)}}{\theta} \geq \alpha^{\frac{1}{n}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow P\left(\theta < \frac{X_n}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right) = 1-\alpha$

Значит доверит. интервал: $\left(X_{(n)}; \frac{X_{(n)}}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right)$

б) $EX_1 = \frac{\theta}{2}$; $DX_1 = \frac{\theta^2}{12}$ для равномерного распр.

по ЦПТ: $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\frac{\theta^2}{12}}} \to N(0,1)$.

Поскольку $X_{(n)}$ – состоят. оценка θ, то:

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \frac{\theta}{2}}{\frac{X_{(n)}}{2\sqrt{3}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \to 1-\alpha$$

Преобразуем и получаем

$$P\left(\frac{-4\sqrt{3}\,Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,X_{(n)}}{\sqrt{n}} + 2\overline{x} \leq \theta < \frac{-4\sqrt{3}\,Z_{\frac{\alpha}{2}}\,(X_n)}{\sqrt{n}} + 2\overline{x}\right) \to 1-\alpha$$

Получаем асимптот. доверит. интервал ур-я $1-\alpha$.

№4. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ - выборка, $X_1 \sim Exp(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Построить РНМК уровня α для проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ против $H_1: \theta < \theta_0$, используя лемму Неймана-Пирсона.

• $P(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} I(x_i > 0)$

Тогда отношение $\dfrac{P(x,\theta_1)}{P(x,\theta_0)} = \dfrac{\theta_1^n \cdot e^{-\theta_1 n \bar{x}}}{\theta_0^n \cdot e^{-\theta_0 n \bar{x}}} =$

$$= \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \cdot e^{(\theta_0 - \theta_1) n \bar{x}} \geq \lambda. \quad (*)$$

Гипотеза H_1 предполагает, что $\theta_0 > \theta_1$.

~~Т.к.~~ Тогда $\theta_0 - \theta_1 > 0 \Rightarrow$ ~~*~~ из $(*)$ следует что

$\bar{X} \geq \lambda^*$; Это λ^* нужно находить из таблиц по нужному квантилю для условия

$$\alpha = P_{\theta_0}(\bar{X} \geq \lambda^*).$$

№5 Пусть $X=(X_1,\dots,X_n)$ - выборка, $X_1 \sim Pois(\theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$.
Построить РНМК уровня зн-я α для проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1: \theta > \theta_0$ используя лемму Неймана-Пирсона.

$$p(x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}$$

$$\frac{P(X,\theta_1)}{P(X,\theta_0)} = \frac{\theta_1^{\sum x_i}}{\theta_0^{\sum x_i}} \cdot \frac{e^{-n\theta_1}}{e^{-n\theta_0}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\sum x_i} \cdot e^{n(\theta_0-\theta_1)} \geq \lambda$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq \lambda^*$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta x_i \sim P(n,\theta)$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum x_i \geq \lambda^*\right) = P_{\theta_0}\left(\sum \theta_0 x_i \geq \theta_0 \lambda^*\right) =$$

$$= 1 - P_{\theta_0}\left(\sum \theta_0 x_i \cancel{\geq} \leq \theta_0 \lambda^*\right) = 1 - F_{\theta_0}(\lambda^*)$$

Значит $\lambda^* = \frac{z_{1-\alpha}}{\theta_0}$ и $\left\{\sum x_i \geq \lambda^*\right\}$ - РНМК