

Logique

TD no2

Exercice 1

Soit le système formel S défini par :

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \Sigma^*$ = ensemble de toutes les séquences finies de symboles de Σ (par exemple : a, b, aabbaa, ... et en particulier la séquence vide formée d'aucun symbole de Σ)
- $A = \{a\}$
- $R = \{r_1, r_2\}$

$$\begin{array}{lcl} r_1 : & Pa & \vdash aPa \\ r_2 : & aP & \vdash aPb \end{array}$$

où $P \in F$ (P est donc une séquence finie de symboles de Σ pouvant être vide ou non)

1. Montrer dans S que $\vdash aab$
2. La formule aba est-elle un théorème de S ? expliquer
3. Caractériser la forme générale des théorèmes de S.
4. Que se passe-t-il si on ajoute la formule aa à l'ensemble des axiomes A ?

Exercice 2

Soit le système formel S défini par :

- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $F = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$
- $A = \{a^{2i} b c^{2i} \mid i \geq 0\}$
- $R = \{r_1\}$

$$r_1 : a^n b c^m, a^{n'} b c^{m'} \vdash a^{n+n'} b c^m$$

1. Montrer que $a^6 b c^2$ et $a^{10} b$ sont des théorèmes
2. Identifier l'ensemble des théorèmes T et montrer que chaque théorème peut être dérivé en au plus 3 étapes
3. Montrer que si on enlève un seul axiome alors T n'est plus le même.
4. Proposer un système formel (Σ', F', A', R') avec $\Sigma' = \Sigma$, $F' = F$ tel que A' contienne un seul élément et R' contienne deux règles et tel que $T = T'$