Théorie des langages et des automates 2020/2021

Série 1

Exercice 1 (Lemme de Levi)

Soient les 4 mots a, b, c, d sur un alphabet X vérifiant ab=cd.

1. Montrer que:
   - si $|a|=|c|$ alors a=c et b=d.
   - si $|a|<|c|$ alors a est facteur gauche de c (et d est facteur droit de b)
   - si $|a|>|c|$ alors c est facteur gauche de a (et b est facteur droit de d)
2. En déduire une propriété de simplification.

Exercice 2

Montrer que si 3 mots vérifient $u^2v^2=w^2$ alors uv=vu.

Exercice 3

Sur l'alphabet X={a,b,c,d} un mot w est dit parfait si et seulement si w=d ou w=aubvc, u et v étant parfaits.

1. Montrer que si w est parfait alors $|w|_a=|w|_b=|w|_c=|w|_d -1$
2. Montrer qu'aucun facteur gauche propre d'un mot parfait n'est parfait.

Exercice 4

Déterminer les automates finis déterministes reconnaissant les langages suivants où X={a, b, c}.

$L_1=\{w\in X^*|$ w contient un facteur abc}

$L_2=\{w \in X^*|$ w se termine par aabb}

Exercice 5

Soit l'alphabet X={0,1}

1. Construire un automate fini déterministe reconnaissant le langage L de l'ensemble des représentations binaires des nombres entiers naturels n qui peuvent s'écrire sous la forme 3k+1. Formellement: $L=\{w\in X^*|\ n(w)=3k+1,\ k\in N\}$ où w est la représentation binaire de n(w).
2. En déduire une expression générale du langage L.

Exercice 6

1. Soit M l'automate fini non déterministe suivant: $(\{q_0, q_1,q_2\}, \{a,b\},\delta, q_0,\{q_2\})$ avec

$\delta(q_0,a)=\{q_1,q_2\}$

$\delta (q_1,a)=\{q_0,q_1\}$

$\delta (q_2,a)=\{q_0,q_2\}$

$\delta (q_0,b)=\{q_0\}$

$\delta (q_1,b)=\varnothing$

$\delta (q_2,b)=\{q_1\}$

Trouver un automate fini déterministe acceptant L(M).

2. Soit M' l'automate fini déterministe équivalent à M.

Trouver la grammaire régulière qui accepte le même langage que L(M').