1- Mq A^*B est une solution.

$$A^*B = A.A^*B + B$$
$$= A^+.B + B = \underbrace{(A^+ + \{\varepsilon\})}_{A^*}.B$$

2- a) $\underline{A^*B \subseteq L}$ et b) $L \subseteq A^*B$

$A^*B \subseteq L = AL + B$

par récurrence sur n:

$$A^*B = A^0B + A^1B + A^2B \dots + A^nB + \dots$$

Mq $A^iB \subseteq L \quad \forall i$

$i = 0 \quad A^0B = \underline{B} \subseteq L = AL + \underline{B}$

$i=0 \quad A^0B \subseteq L$

$A^0B = B \subseteq L = AL+B$

$i=1 \quad A^1B = AB \subseteq L = AL+B$

$B \subseteq L$

$AB \subseteq AL \subseteq AL+B = L$

vrai pour n : $A^n B \subseteq L$

Mq c'est vrai pour $n+1$:

$A^{n+1}B = A \cdot A^n B$

on a : $A^n B \subseteq L \Rightarrow A \cdot A^n B \subseteq AL$

$\Rightarrow A^{n+1}B \subseteq AL$

$\subseteq AL+B$

$= L$

$L \subseteq A^*B$ ~~Su~~ supposons que ce n'est pas vrai : alors $L = A^*B + R$

avec $A^*B \cap R = \phi$

$L = AL + B$

$A^*B + R = \underbrace{A^*B + AR + B}_{\subseteq A^*B}$

1) $A^*B + R = A^*B + AR$

$$R = \underline{AR - A^*B}$$

On note $\min(R)$ la taille du plus petit mot de R

$\min(R) \geq \min(AR)$

$= \min(A) + \min(R)$

vrai si $\min(A) = 0$

impossible car $\varepsilon \notin A$