GL3

Logique
TD no1

Exercice1 (ensembles : définitions)

Soient A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {3, 6, 2} et C = {1, 3}.
Calculer A ∪ B, B ∪ C, A ∩ B, B ∩ C, $C_A(B)$ et B\C.

Exercice 2

Soient A = {3, 5}, et B = {2, 5, 9}. Calculer A × B et B × A.

Exercice 3 (ensembles : définitions)

Soit E = {a} un ensemble à un élément. Déterminer P(E) et P(P(E)).

Exercice 4

Montrer que les lois de Morgan peuvent être généralisées à une collection quelconque d'ensembles finis

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \ldots \cup \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}$$

Exercice 5

Soients A et B deux ensembles quelconques.

1. Que vaut P(A)∩ P(B) ? prouver
2. A-t-on P(A∪B)=P(A)∪P(B) ? prouver

Exercice 6

Donner une définition inductive de la relation de divisibilité dans ℕ

Exercice 7

Démontrer, en utilisant les principes de récurrences vus en cours, les propositions suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad c)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 8

Soit A un ensemble (d'étiquettes de nœuds). On considère l'ensemble ABS des arbres binaires stricts comme le plus petit ensemble défini inductivement par :
(Base) $(\emptyset, a, \emptyset) \in ABS$, pour chaque $a \in A$.
(Hérédité) $g, d \in ABS \Rightarrow (g, a, d) \in ABS$, pour chaque $a \in A$.

Montrer que dans un arbre binaire strict, le nombre de sommets n vérifie $n = 2f - 1$, où f est le nombre de feuilles.