TD1: Théorie des Langages et automates .

Exercice 1 :

Fact: $u = v \Rightarrow |u| = |v|$ et $\forall i \leq |u|$, $u(i) = v(i)$

ainsi : $ab = cd \Rightarrow |ab| = |cd|$ et $\forall i$, $ab(i) = cd(i)$

1. $|ab| = |cd| \Rightarrow |a| + |b| = |c| + |d|$ or $|a| = |c|$ *

   $\Rightarrow |b| = |d|$ *

$\forall i \leq |a|$, $ab(i) = a(i)$ et $cd(i) = c(i)$ donc $ab(i) = cd(i) \Rightarrow a(i) = c(i)$ **

* et ** => $a = c$

$\forall\ |a| < j \leq |ab|$, $ab(j) = b(j - |a|)$ et $cd(i) = d(j - |c|) = d(j - |a|)$

soit $k = j - |a|$ alors : $ab(i) = cd(i) \Rightarrow b(k) = d(k)$ **

* et ** => $b = d$

2. $uw = uv \Rightarrow w = v$

   $wu = vu \Rightarrow w = v$

Exercice 2 :

- $uuvv = ww \Rightarrow u$ est préfixe de w ($w = ux$) et v est suffixe de w ($w = yv$)

  $2 |u| + 2 |v| = 2|w| \Rightarrow |w| = |u| + |v|$

  $|w| = |u| + |x| \Rightarrow |x| = |v|$ de même $|y| = |u|$

  Correction:

  $|x| = |v|$ et $|y| = |u|$ et $ux = yv \Rightarrow u = y$ et $x = v$

  uu vv = uv uv on simplifie et on obtient $uv = vu$

  [my work:

  pour $i \leq |u|$ $w(i) = ux(i) = u(i) = yv(i) = y(i)$ (car $|y| = |u|$)

  d'où $u = y$

  pour $|u| < j \leq |w|$, $w(j) = ux(j) = x(j - |u|)$

  $w(j) = yv(j) = v(j - |u|)$

  $\Rightarrow v(k) = x(k)$ d'où $v = x$

  Ainsi $uv = vu$

  ]

Exercice 3 :

Preuve par récurrence:

cas 0: $w = d$, alors $|w|_a = |w|_c = |w|_b = |w|_d - 1 = 0$

cas 1: $u = d$ et $v = d$ alors : $|w|_a = |w|_c = |w|_b = |w|_d - 1 = 1$

cas général : supposons que c'est vrai pour tout mot parfait de taille < w et démontrons que c'est vrai pour w :

soient u , v 2 mots parfait , $w = aubvc \Rightarrow |w|_a = 1 + |u|_a + |v|_a$