Langages hors contextes et automates à pile

Langages hors contextes

- Un langage **hors-contexte** est un langage généré par une grammaire hors-contexte (type 2)

Langages hors contextes

Exemple:

$S \rightarrow aSb$

$S \rightarrow \varepsilon$

$S \Rightarrow \varepsilon$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$

$L(G) = \{a^n b^n; n \geq 0\}$

Conception d'une grammaire

Exemple du langage des parenthèses

1. Base : ε est une SPE
2. Schéma d'induction :
   – Si A est une SPE, alors (A) est une SPE
   – Si A et B sont des SPE, alors AB est une SPE
3. Clause finale : rien n'est une SPE hormis par (1) et (2)

Traduction sous forme de grammaire:

$$S \dashrightarrow \varepsilon \mid (S) \mid SS$$

Ex: S => (S) => ((S)) => ((SS)) => (((S)S)) => ((()(S))) => ((()(SS))) => ((()((S)S))) => ((()(()S))) => ((()(())))

Arbre de dérivation

- Soit G = <V, Σ, S, **R**> une grammaire hors-contexte

  Un **arbre de dérivation** pour $w \in \Sigma^*$ dans G est un arbre tel que :
  - Racine : S
  - Concaténation des feuilles : w
  - Si un nœud N a pour descendants immédiats N_1, N_2, …, N_k, alors $(N \to N_1 N_2 \ldots N_k) \in R$

Arbre de dérivation

- **Théorème**

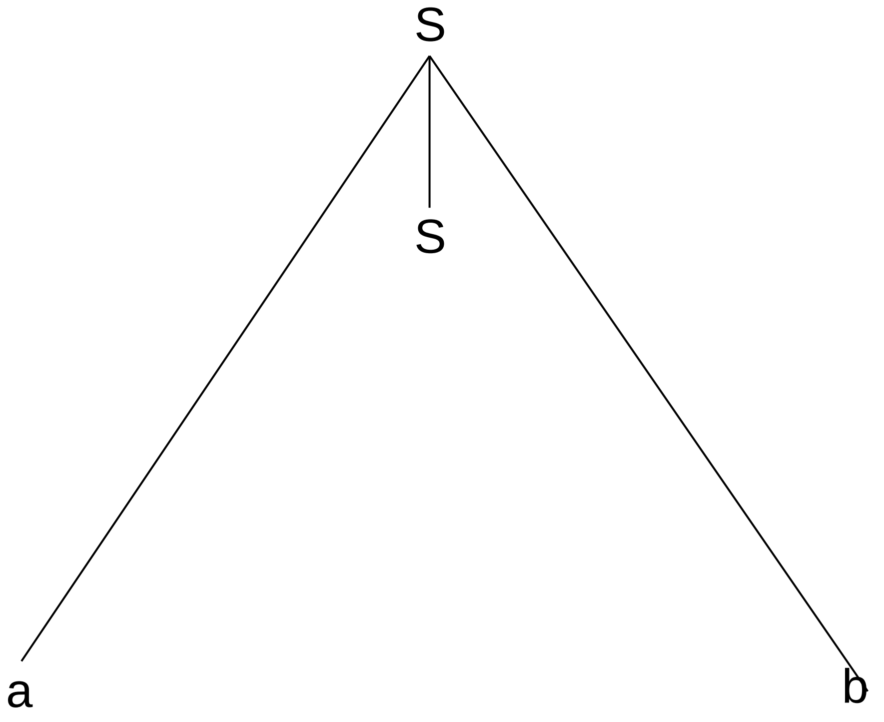
$w \in L(G) \Leftrightarrow$ il existe un arbre de dérivation A pour w dans G

Preuve:

- $\Rightarrow$: récurrence sur le nombre de pas dans la dérivation (démontrer que pour tout non-terminal X et tout mot φ, si X $\Rightarrow^* \varphi$, alors il existe un arbre de dérivation pour φ de racine X)
- $\Leftarrow$: récurrence sur la profondeur de l'arbre

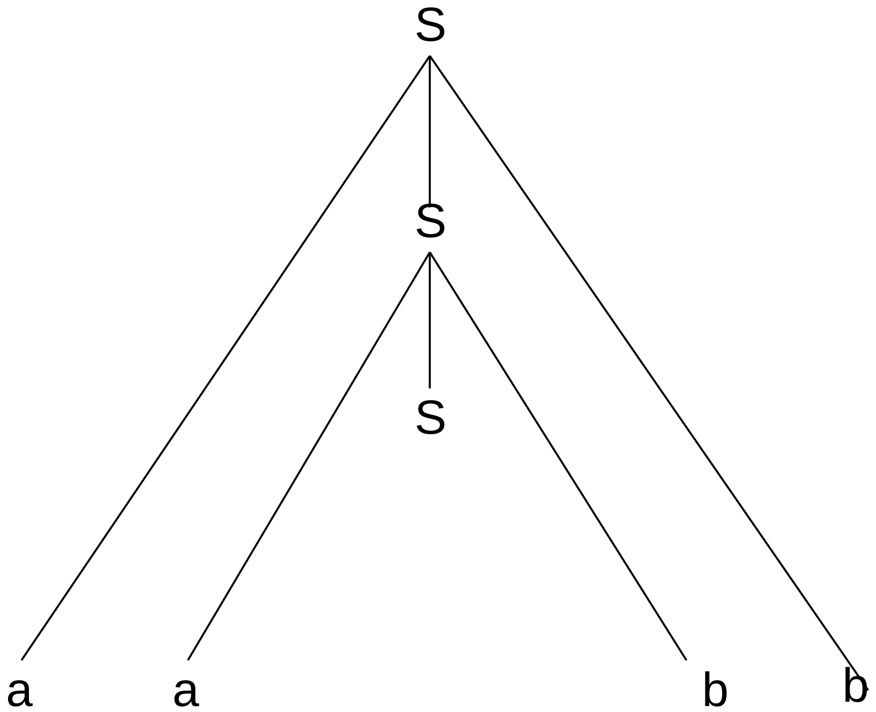
Exemple

- S ---> aSb
- S ---> ε



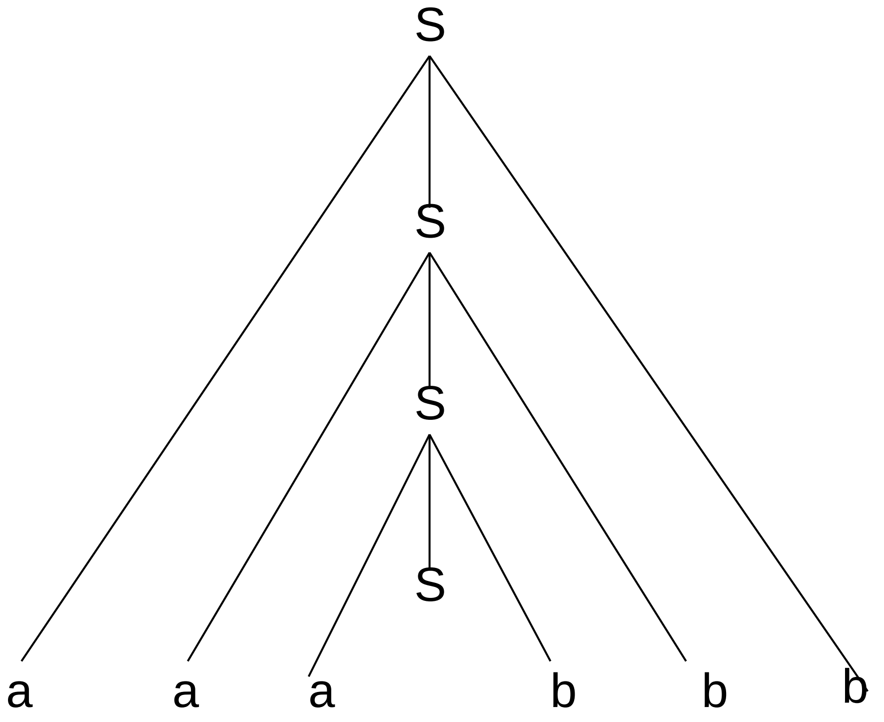
Exemple

- S ---> aSb
- S ---> ε



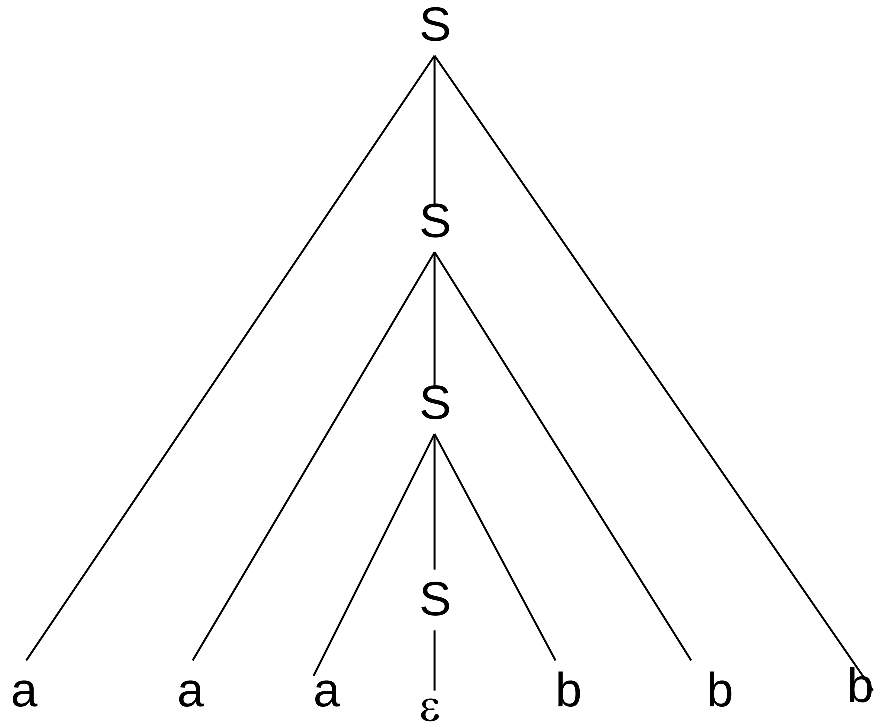
Exemple

- S ---> aSb
- S ---> ε



Exemple

- S ---> aSb
- S ---> ε



Ambiguïté

- $w \in L(G)$ est dit **ambigu** si et seulement si w admet plus d'un arbre de dérivation

- G est ambiguë ssi elle engendre au moins un mot ambigu

- L est ambigu ssi L ne peut être engendré que par des grammaires ambiguës

Ambiguïté

Exemple:

Soit la grammaire G dont les règles sont:

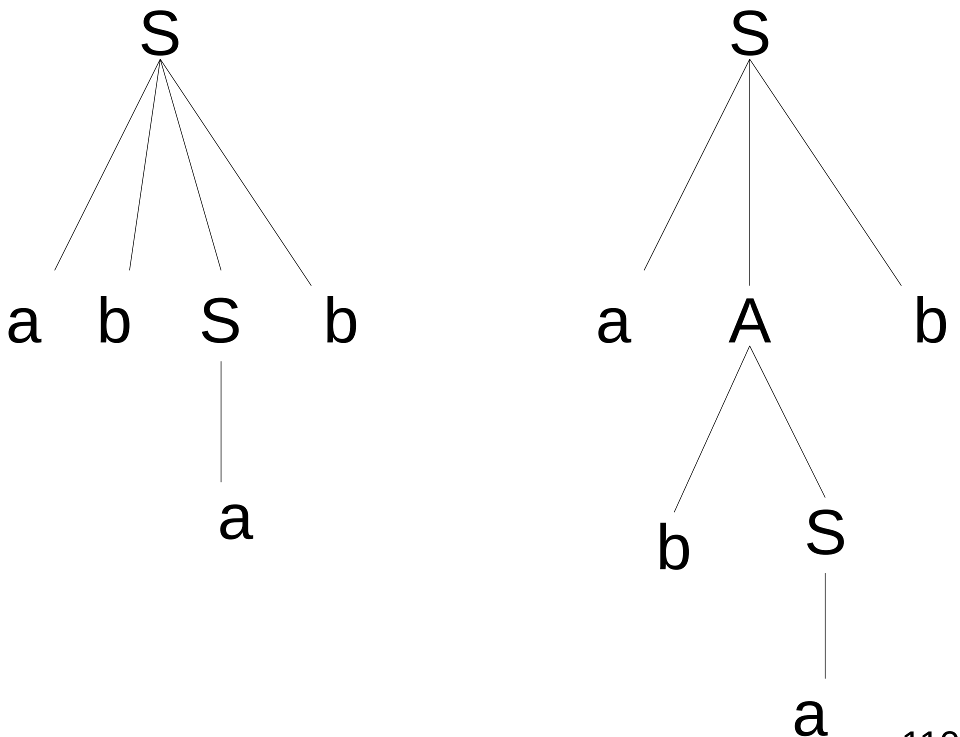
$S \rightarrow aAb$

$S \rightarrow a$

$S \rightarrow abSb$

$A \rightarrow bS$

G est ambiguë



Propriétés des langages hors-contexte

Théorème

L’ensemble des langages hors-contextes est fermé pour:

- la réunion
- la concaténation
- l’étoile (et aussi +)
- L’image miroir

Propriétés des langages hors-contexte

- **Fermeture pour la réunion**:

  $G_1 = <V_1, \Sigma, S_1, R_{\mathbf{1}}>$
  $G_2 = <V_2, \Sigma, S_2, R_{\mathbf{2}}>$

  On peut supposer que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et que $S \notin V_1 \cup V_2$.
  On définit $G = <\{S\} \cup V_1 \cup V_2, \Sigma, S, R>$ où R contient $R_1 \cup R_2$ et la règle: $S \rightarrow S1 \mid S2$.
  Alors $L(G)=L(G_1) \cup L(G_2)$

–

Propriétés des langages hors-contexte

- **Fermeture pour la concaténation**:

  $G_1 = <V_1, \Sigma, S_1, R_{\mathbf{1}}>$

  $G_2 = <V_2, \Sigma, S_2, R_{\mathbf{2}}>$

  On peut supposer que $V_1 \cap V_2=\emptyset$ et que $S \notin V_1 \cup V_2$.

  On définit $G = <\{S\}\cup V_1 \cup V_2, \Sigma, S, R>$ où R contient $R_1 \cup R_2$ et la règle: $S \rightarrow S1\ S2$.

  Alors $L(G)=L(G_1)\ L(G_2)$

Propriétés des langages hors-contexte

- **Fermeture pour l'étoile**:

  $G_1 = <V_1, \Sigma, S_1, R_{\mathbf{1}}>$

  On définit $G = <\{S\} \cup V_1 , \Sigma, S, R>$ où R contient R_1 et la règle: $S \rightarrow S\ S1\ |\varepsilon$.

  Alors $L(G)=L(G_1)^*$

Propriétés des langages hors-contexte

- Remarque:

  L'ensemble des langages hors-contexte n'est pas fermé pour l'intersection et la complémentation

Propriétés des langages hors-contexte

Lemme de pompage:

Soit L un langage hors-contexte. Alors, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout mot $w \in L$ avec $|w| \geq n$, on peut trouver $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in \Sigma^*$ tels que $w = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$ et:

- $w_2 w_4 \neq \varepsilon$
- $|w_2 w_3 w_4| \leq n$
- Pour tout $k \in \aleph$, $xy^k z \in L$

Limites des langages hors contexte

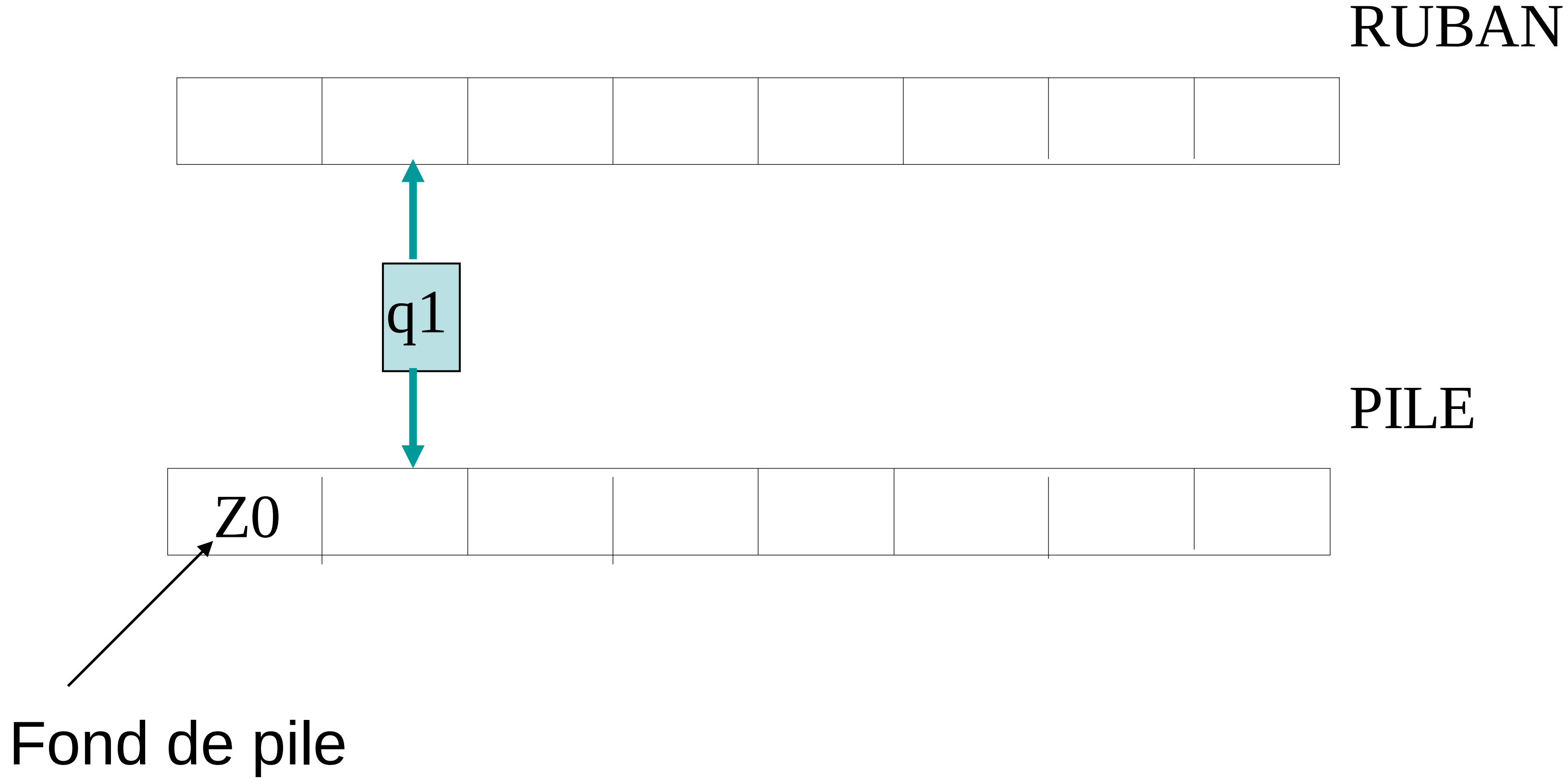
- Il existe des langages non hors-contexte.

  Exemple: $\{a^n\ b^n\ c^n | n \geq 0\}$

- On utilise le lemme de pompage pour montrer par l'absurde qu'un langage est non hors-contexte.

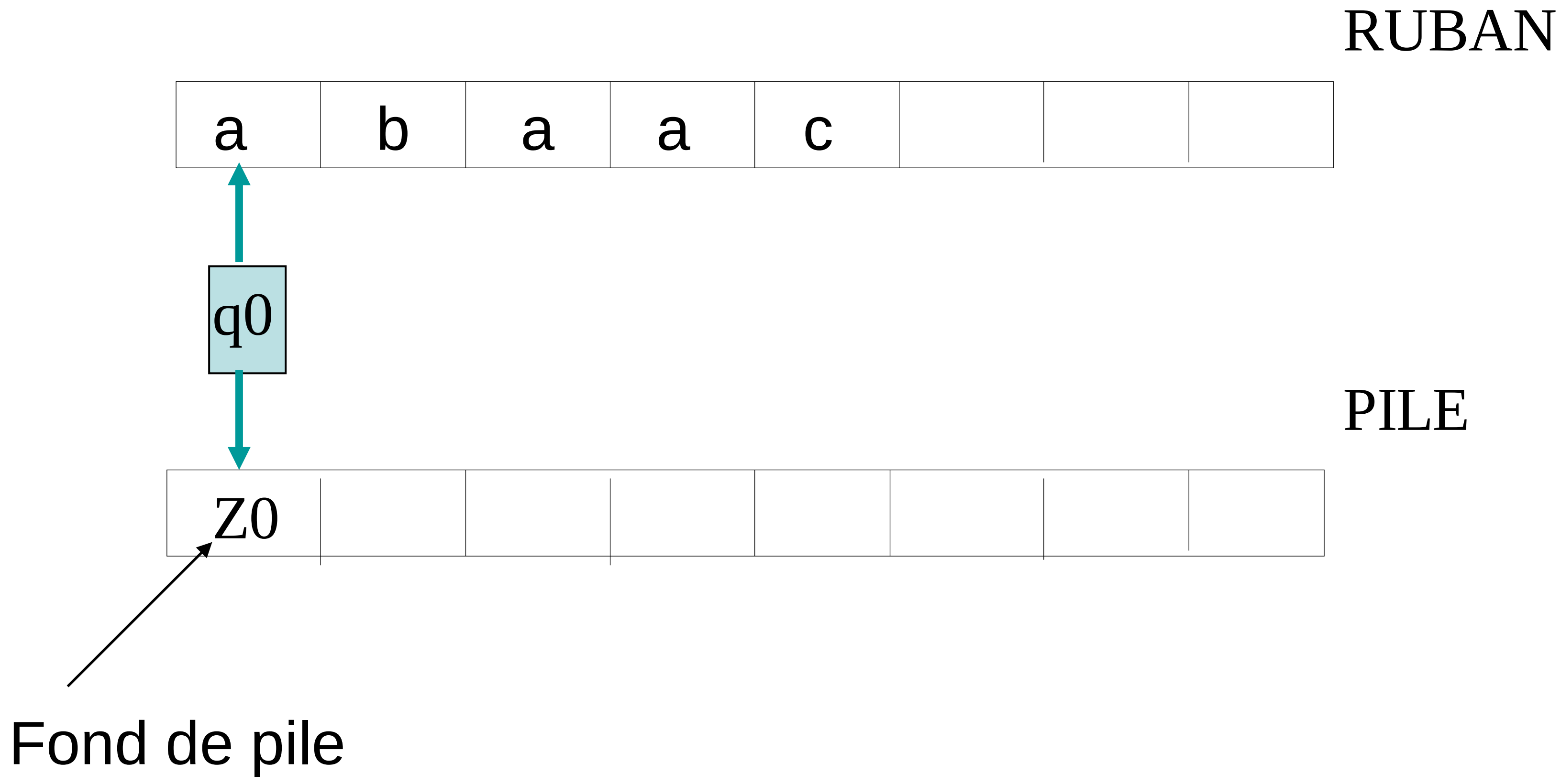
Automates à Pile

- Description:



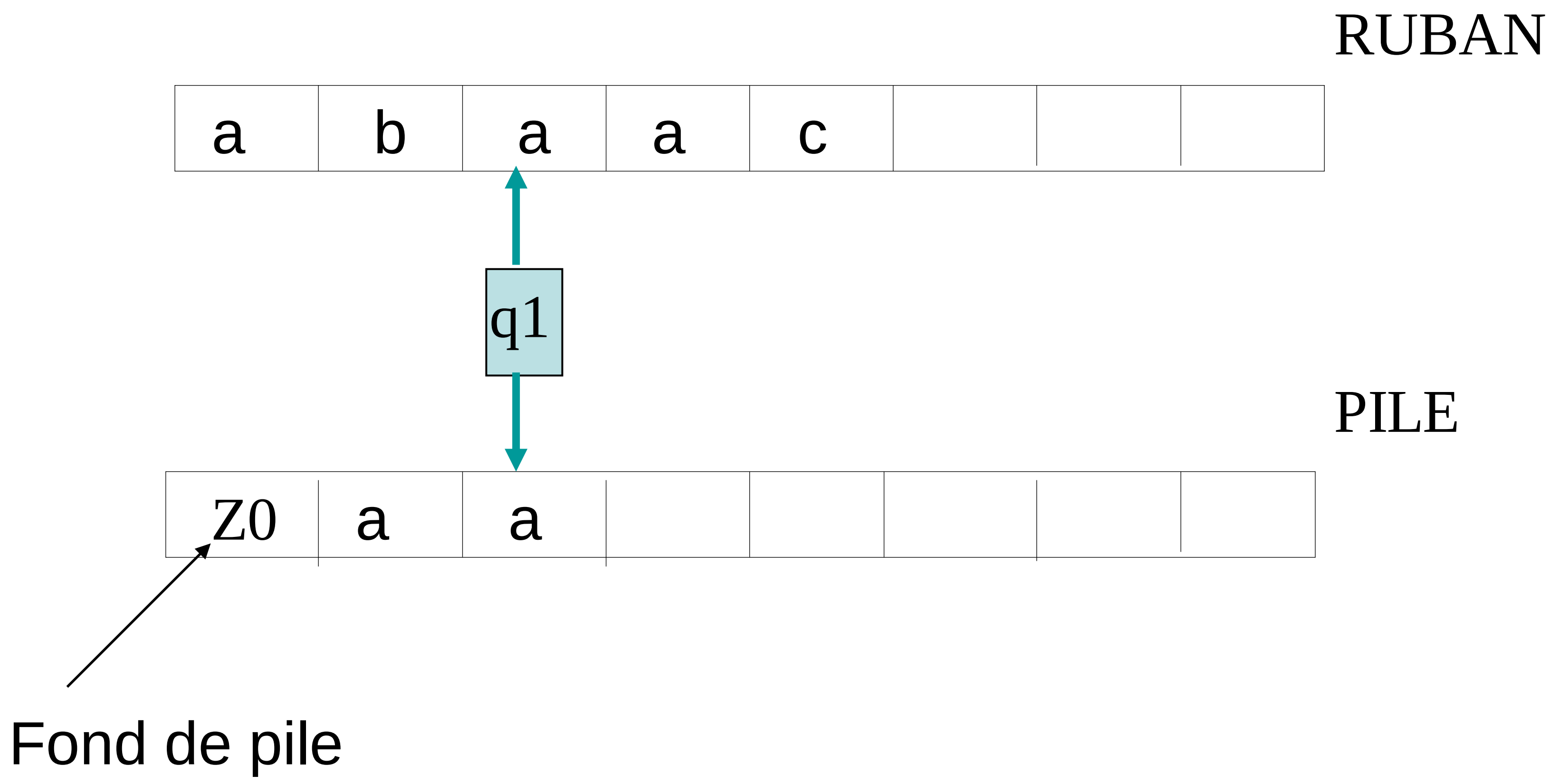
Automates à Pile

- Situation initiale:



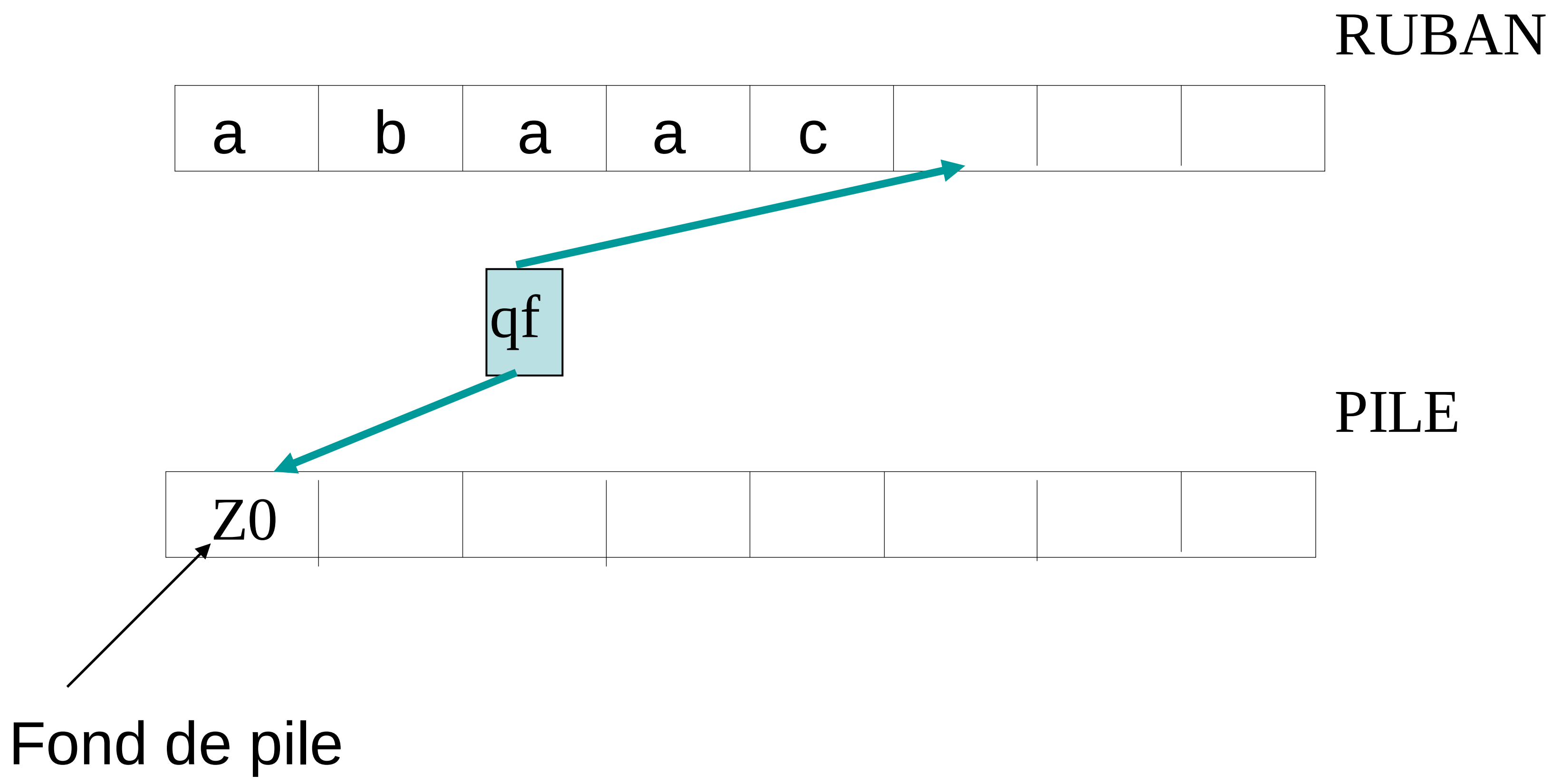
Automates à Pile

- Situation quelconque:



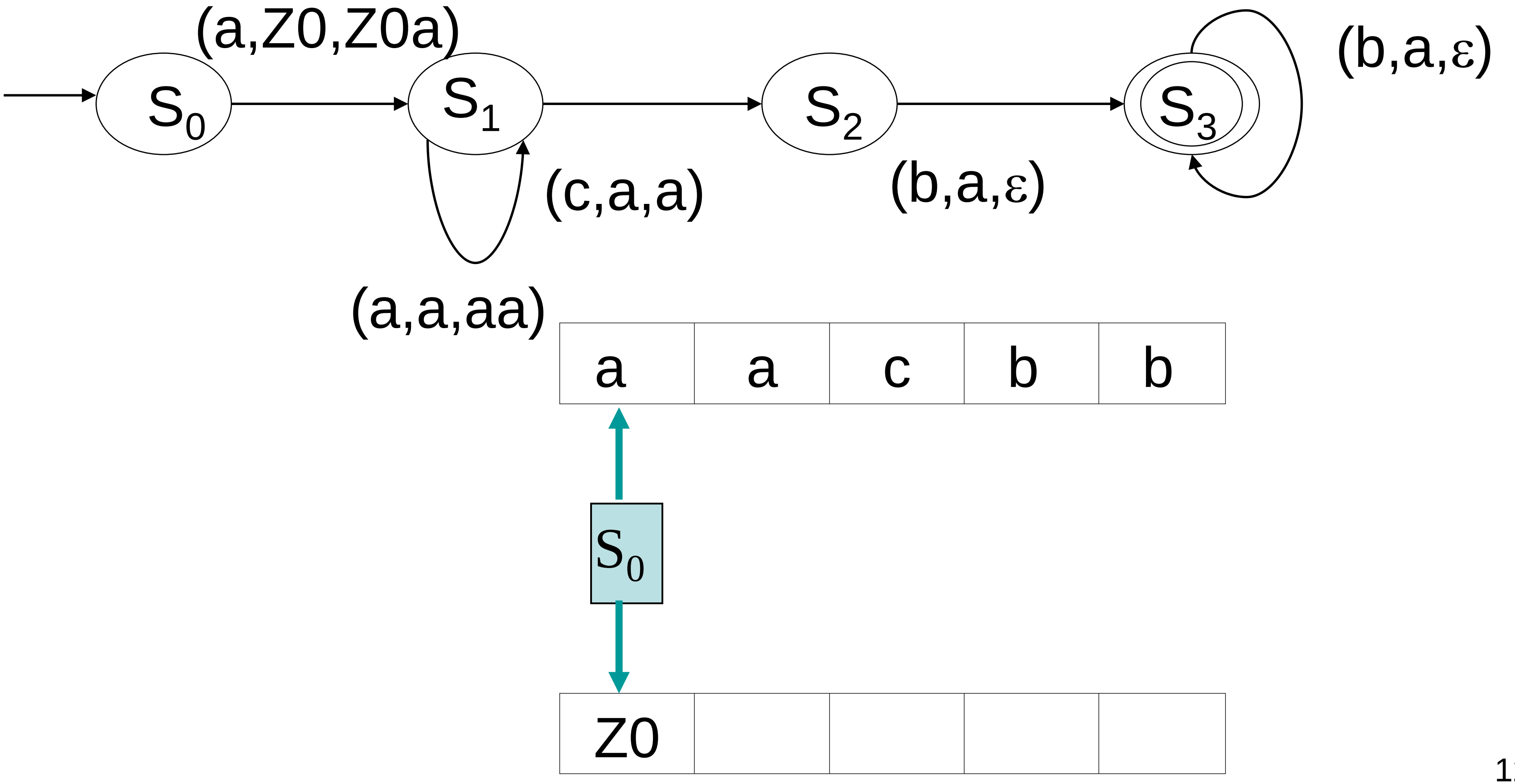
Automates à Pile

- Situation finale acceptante:



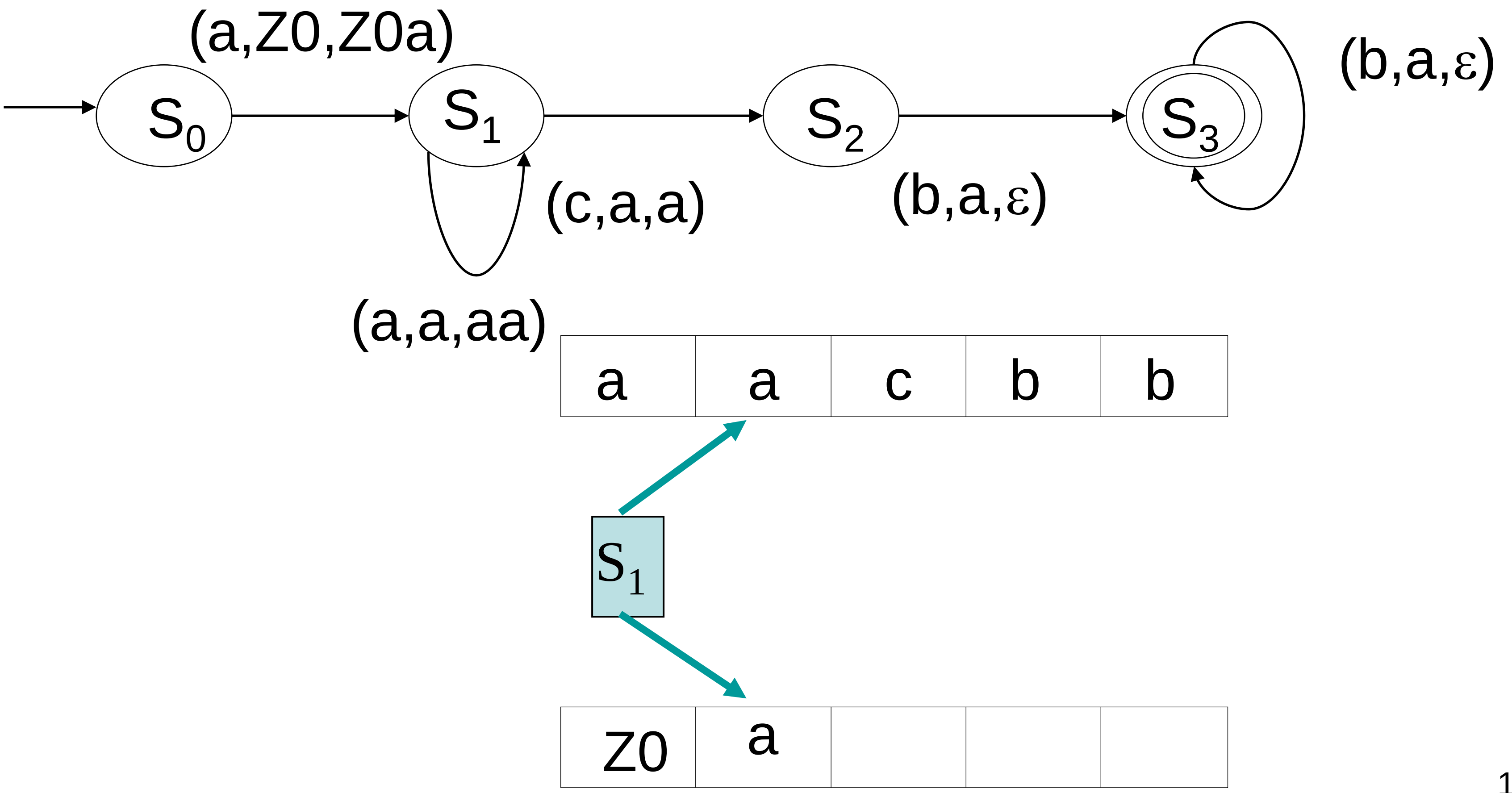
Exemple

- $L=\{a^ncb^n \mid n\geq 0\}$



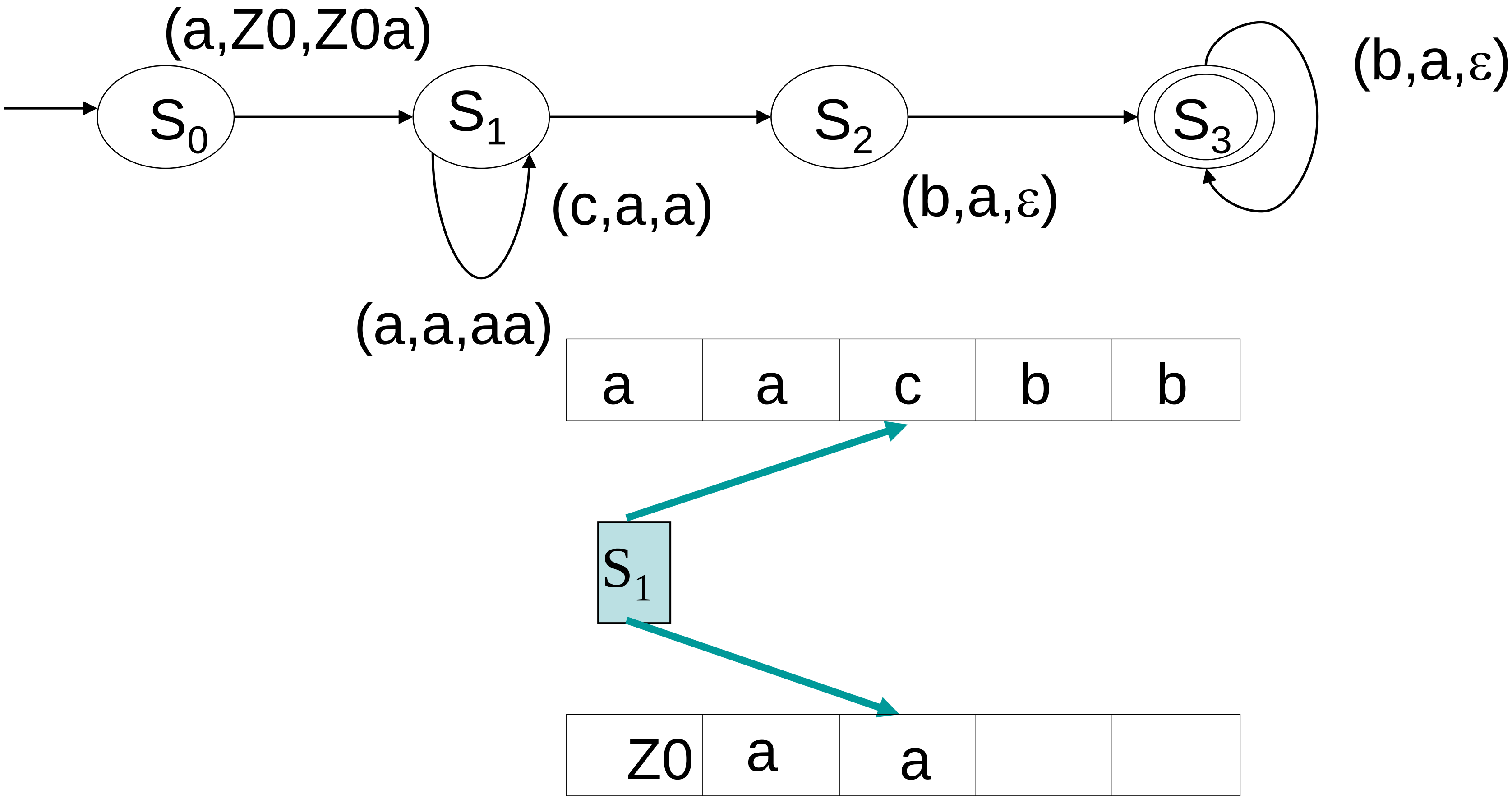
Exemple

- $L=\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$



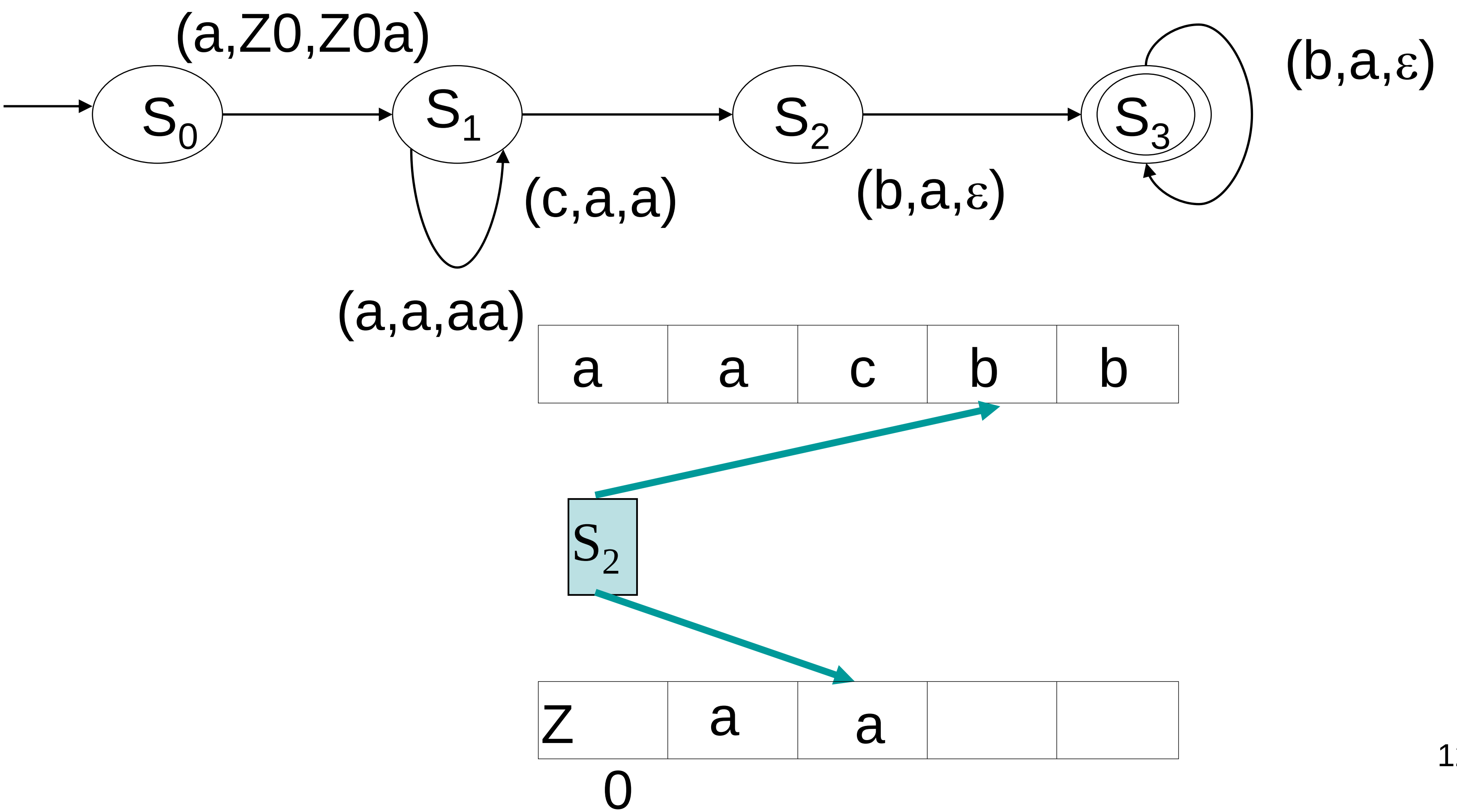
Exemple

- $L=\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$



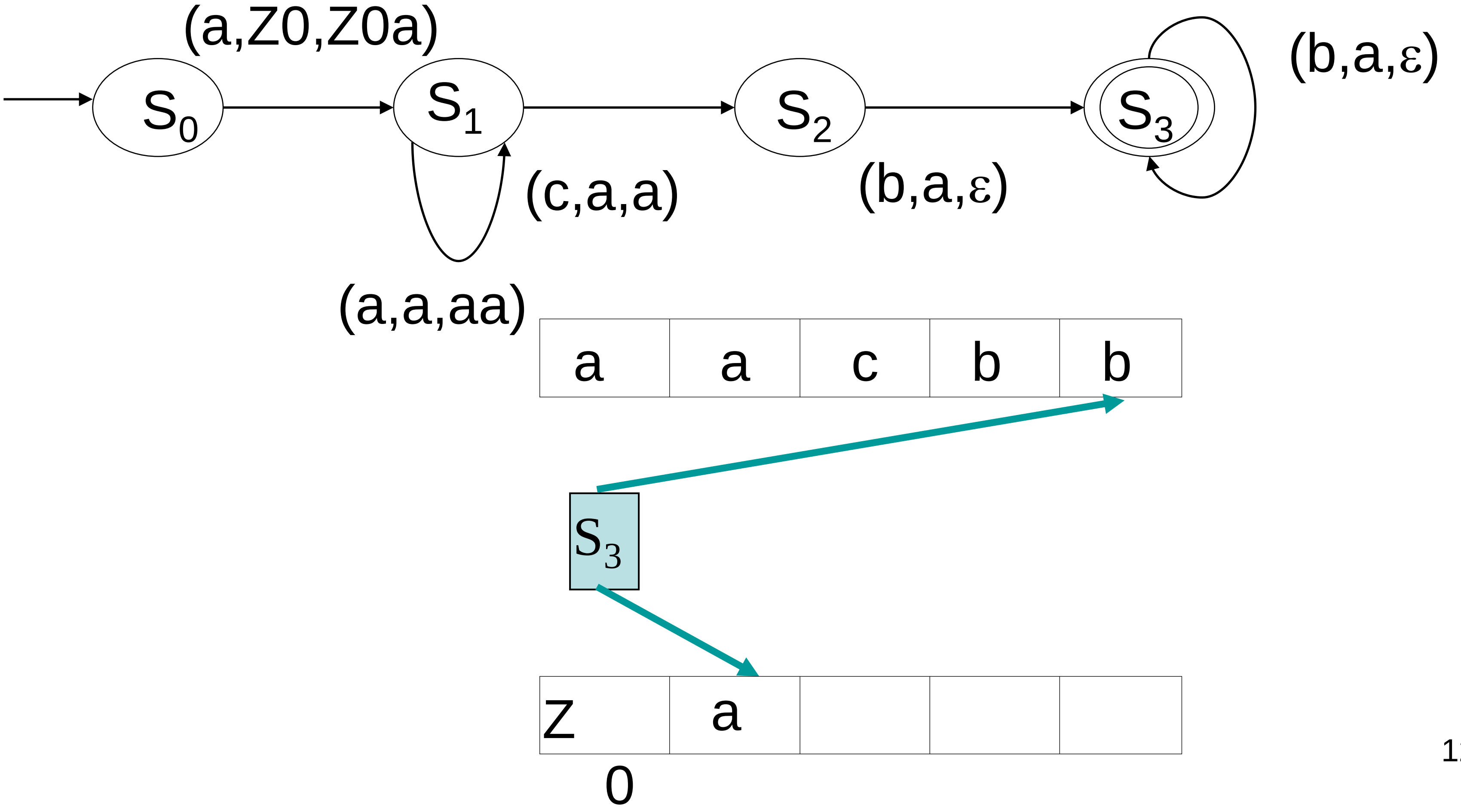
Exemple

- $L=\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$



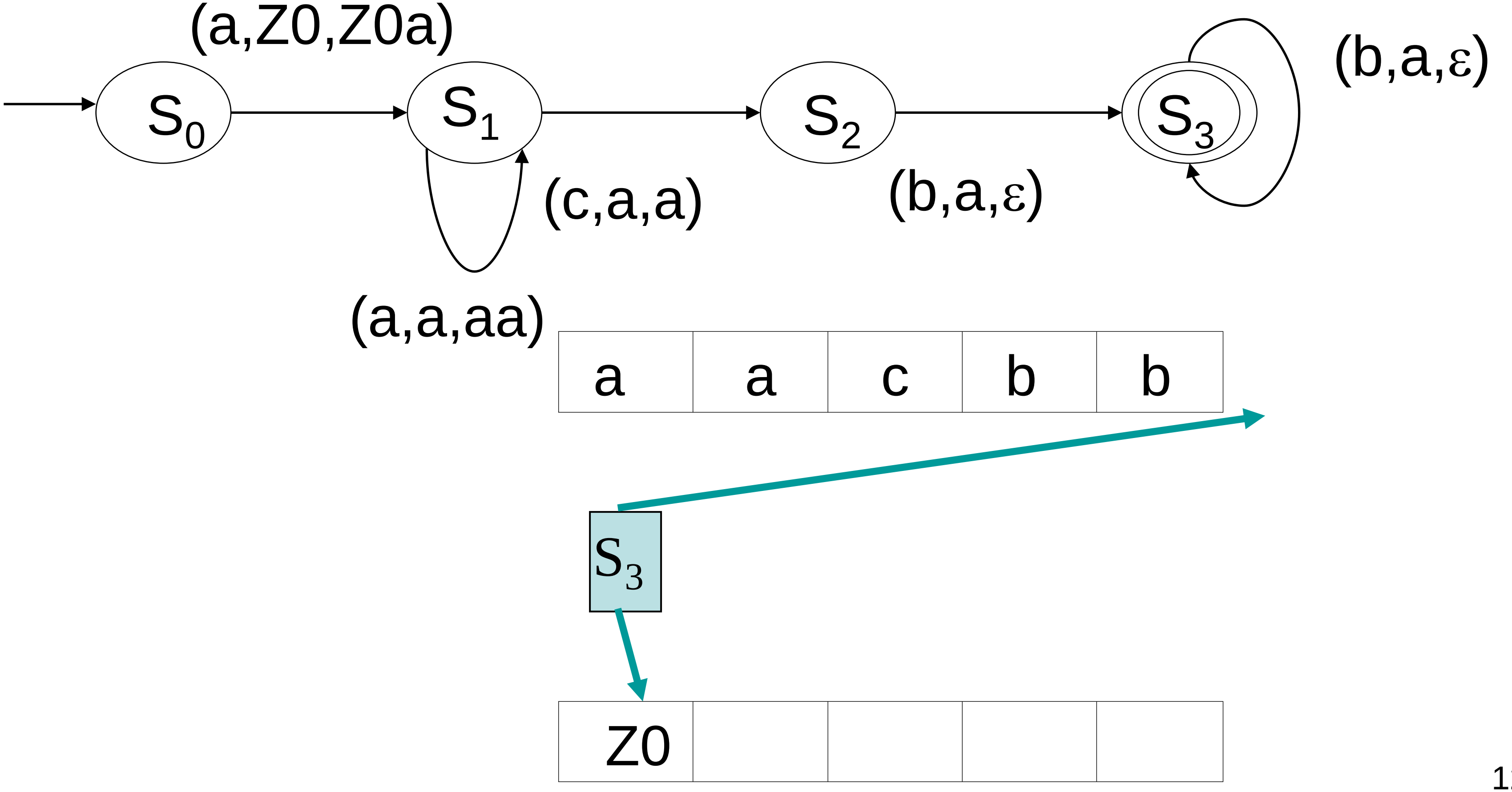
Exemple

- $L=\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$



Exemple

- $L=\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$



Automates à Pile

- Un automate à pile est la donnée de :
  - Q : ensemble d ’états
  - Σ : alphabet (ruban)
  - Γ : alphabet (pile)
  - Z0 $\in \Gamma$: symbole initial de la pile
  - q0$\in$Q : état initial
  - F$\subseteq$ Q : ensemble d’états finaux
  - δ : ensemble de transitions (quintuplets)

    $\delta : Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \rightarrow \mathcal{P}\,(Q \times \Gamma^*)$

Transitions

- Un élément de δ:

  $(q, u, \alpha) \rightarrow (q', \beta)$

  $q, q' \in Q$; $u, v \in \Sigma^*$; $\alpha, \beta \in \Gamma^*$

- Si dans l'état q, l'automate peut lire le mot u sur le ruban (de gauche à droite) et si le mot α figure en haut de la pile (de haut en bas), alors il peut passer dans l'état q',parcourir u et remplacer en haut de la pile α par β

Cas particuliers

- $(q0, u, \varepsilon) \text{ ----> } (q1, \beta)$:
  - EMPILER β
- $(q0, u, \alpha) \text{ ----> } (q1, \varepsilon)$:
  - DEPILER α

Configurations

- Triplet (q, u, σ) où:
  - $q \in \Sigma$; $u \in \Sigma^*$; $\sigma \in \Gamma^*$
  - q : état courant
  - u : mot restant à lire (de gauche à droite)
  - σ : contenu de la pile (de bas en haut)
- **configuration initiale**:
  - (q0, w, Z0)
- **configuration terminale acceptante**:
  - $(q, \varepsilon, Z0)$: automate (**q final** et **chaîne entièrement parcourue** et **pile vide**)

Transformation d’une grammaire hors-contexte en un automate à pile

- $G = \langle V_T, V_N, S, R \rangle$

But: trouver P, automate à pile, qui reconnaît exactement le langage engendré par G

Transformation d'une grammaire hors-contexte en un automate à pile

- L'automate est défini par:
  - $Q = \{p, q\}$
  - $\Sigma = V_T$
  - $\Gamma = V_N \cup V_T \cup \{Z0\}$ (Z0$\notin V_N \cup V_T$)
  - Z0 $\in \Gamma$: symbole initial de pile
  - p = état initial
  - {q} = ensemble d'états finaux
  - δ : ensemble de transitions (quintuplets)
    - $(p,\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (q, S)$
    - pour chaque règle $A \rightarrow \varphi$
      ajouter $(q, \varepsilon, A) \rightarrow (q, \sim\varphi)$
    - pour chaque symbole terminal x :
      ajouter $(q, x, x) \rightarrow (q, \varepsilon)$