

# Subgrafos

## Componentes Conexos

Em um grafo não direcionado, um **componente conexo** é um subconjunto de vértices e arestas em que **todos os vértices estão conectados entre si** por algum caminho, e **não há conexão com vértices fora desse subconjunto**.

### Definição Formal

Um **componente conexo** de um grafo  $(G = (V, E))$  é um **subgrafo maximal conexo**, ou seja, um subgrafo no qual:

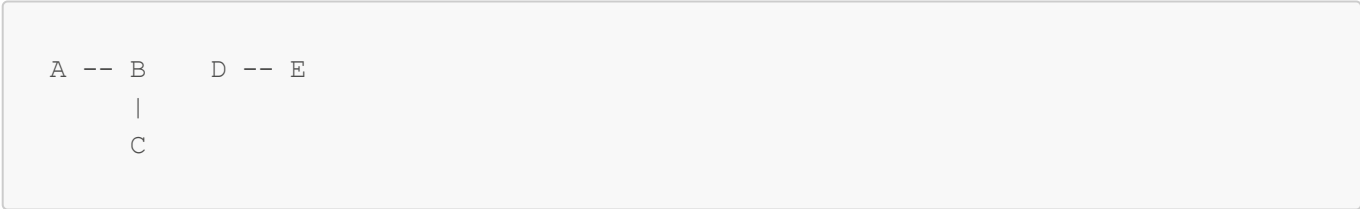
- Para qualquer par de vértices  $(u)$  e  $(v)$  dentro do componente, existe um **caminho** ligando  $(u)$  a  $(v)$ .
- Se adicionarmos qualquer outro vértice fora do componente, ele **deixaria de ser conexo**.

### Propriedades

1. **Cada vértice pertence a exatamente um componente conexo.**
2. Se um grafo for totalmente conexo (todos os vértices podem ser alcançados a partir de qualquer outro), ele tem **apenas um componente conexo**.
3. Se o grafo for **desconexo**, ele pode ser dividido em vários componentes conexos **independentes**.

### Exemplo

Considere o seguinte grafo:



- Aqui temos **dois componentes conexos**:
  1.  $(\{A, B, C\}) \rightarrow$  Todos os vértices estão conectados.
  2.  $(\{D, E\}) \rightarrow$  Esses vértices formam outro componente separado.

### Tamanho de um Grafo

O tamanho de um grafo  $(G)$  é dado por:

$$[|G| = |V| + |E|]$$

Onde:

- $(|V|)$  é o número de **vértices**.
- $(|E|)$  é o número de **arestas**.

### Subgrafos e Relação com o Grafo Original

Se  $(G')$  é um subgrafo de  $(G)$ , então seus conjuntos de vértices e arestas devem ser subconjuntos dos de  $(G)$ :

$$[V' \subseteq V, \quad E' \subseteq E]$$

Ou seja, o subgrafo contém apenas vértices e arestas que já pertencem ao grafo original.

---

## Grau dos Vértices

- Se todos os vértices possuem o mesmo grau, ele é chamado de grafo regular.

## Grafo Regular

---

## Menor Número de Arestas Possível em um Grafo

Para que um grafo seja **conexo**, cada componente conexo deve ter **pelo menos** o número mínimo de arestas necessário para conectar todos os seus vértices.

A fórmula para o **número mínimo de arestas** em um grafo com  $(V)$  vértices e  $(C)$  componentes conexos é:

$$[|E| = |V| - |C|]$$

### Explicação:

- Em um **grafo conexo**, para conectar  $(n)$  vértices no **formato de uma árvore** (estrutura mais simples sem ciclos), é necessário exatamente  **$(n - 1)$  arestas**.
- Se tivermos  **$(C)$  componentes conexos**, cada um precisa de  **$(|V_i| - 1)$  arestas** (sendo  $(|V_i|)$  o número de vértices no  $(i)$ -ésimo componente).
- Somando para todos os componentes, o número total mínimo de arestas no grafo é  **$(|V| - |C|)$** .

### Exemplo:

Suponha um grafo com **7 vértices** e **3 componentes conexos**. O número mínimo de arestas será:

$$[|E| = 7 - 3 = 4]$$

---

## Exercício

- Determinar o número de componentes conexos de um grafo não direcionado. (Maior quantidade possível de arestas se há  $|C|$  componentes)
-