

Figure 1: Rys.1. Trójkat Sierpińskiego.

Na dzisiejszych zajęciach będziemy zajmować się fraktalami. Fraktale to zbiory matematyczne charakteryzujące się tzw. samopodobieństwem – w każdym powiększeniu wyglądają identycznie<sup>1</sup>.

## Trójkat Sierpińskiego

Idea trójkąta Sierpińskiego polega na tym, że każdy trójkąt zawiera w sobie trzy takie same trójkąty o dwukrotnie krótszych bokach (patrz Rys. 1).

Trójkąt Sierpińskiego można stworzyć na różne sposoby. My wykorzystamy rekurencję.

## Rekurencyjne wywoływanie funkcji

Rekurencyjne wywoływanie funkcji polega na tym, że dana funkcja wywołuje samą siebie. Jak łatwo się domyślić, takie wywoływanie trwałoby w nieskończoność. Aby tego uniknąć, nakłada się warunek na wywołanie funkcji.

Cały mechanizm, ilustruje to poniższy przykład:

```
void recursiveDraw(double x, double y, double R) {
  circle(x, y, R);

if(x < 500) {
    recursiveDraw(x + 5, y + 5, 0.88 * R);
  }
}</pre>
```

Funkcja recursive Draw rysuje okrąg o zadanych parametrach oraz wywołuje samą siebie z innymi wartościami argumentów, dopóki wartość x nie przekroczy 500.

W wypadku trójkąta Sierpińskiego, napiszemy funkcję, która generuje fraktal do pewnej "głębokości". Głębokość 1 oznacza pojedynczy trójkąt, 2 – trzy trójkąty, 3 – dziewięć, itd. Funkcję taką można napisać zauważając, że trójkąt o głębokości n składa się z trzech trójkątów o głębokości n-1.

#### Ćwiczenia

Napisz funkcję sierpinski (x, y, d, n), która:

- 1. Dla n=1 rysuje trójkąt równoboczny o wysokości d oraz lewym dolnym wierzchołku w punkcie (x,y)
- 2. Dla n>1 wywołuje trzy razy funkcję sierpinski() z:
  - odpowiednio zmienionymi współrzędnymi (x, y),
  - $\bullet$  dwa razy zmniejszonym d,
  - głębokością n-1.
- 3. Na początku funkcji umieść instrukcję animate() w celu spowolnienia rysowania i zobacz w jakiej kolejności powstają kolejne trójkąty.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Z tego powodu wydają się bardzo skomplikowane. Okazuje się jednak, że fraktale stanowią całkiem niezły sposób opisu przyrody – wystarczy spojrzeć na kawałek wybrzeża Wielkiej Brytanii albo na gałąż choinki, żeby stwierdzić, że przypominają całość, tylko w pomniejszeniu.

# Zbiór Julii, zbiór Mandelbrota

Wyobraźmy sobie ciąg liczb zespolonych takich, że każdy wyraz zależy od poprzedniego zgodnie ze wzorem:  $z_{n+1}=z_n^2+c$ . Taki ciąg ma nietypowe własności. Między innymi, jego rozbieżność zależy w bardzo złożony sposób od wyrazu początkowego  $z_0$  i stałej c. Zbiór takich  $z_0$ , dla których ciąg ten nie jest rozbieżny nazwany został zbiorem Julii (zależy on od c). Zaś zbiór takich c, dla których ciąg ten nie jest rozbieżny oraz  $z_0=0$  – zbiorem Mandelbrota.

## Mapa kolorów

Do zobrazowania tych zbiorów potrzebna jest umiejętność kolorowania pojedynczych pikseli. Wyobraźmy sobie, że nasze okno grafiki to układ dwuwymiarowy, gdzie  $x \in [-4,4]$  i  $y \in [-3,3]$ . Używając funkcji setcolor(), możemy narysować wykres funkcji  $\sin(x^2 + y^2)$  dla tych współrzednych.

Funkcja setcolor() jako argument przyjmuje liczbę z przedziału od 0 do 1 i ustawia kolor rysowania.

Przeanalizuj poniższy program:

```
double fun(double x, double y) {
    return (sin((x * x + y * y) * 50.0) + 1.0) / 2.0;
}

void main() {
    double r;
    int i, j;

    graphics(800, 600);

for(i = 0; i < 800; i++)
    for(j = 0; j < 600; j++) {
        r = fun(i / 200.0 - 2.0, j / 200.0 - 1.5);
        setcolor(r);
        point(i, j);
    }

    wait();
}</pre>
```

#### Rozbieżność

Napisz funkcję divergence(zR, zI, cR, cI), która sprawdza czy ciąg opisany równaniem

$$\begin{cases} z_0 = zR + zI \cdot i \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \\ c = cR + cI \cdot i \end{cases}$$

jest zbieżny.

Przyjmij, że maksymalna liczba iteracji to 600. Jeśli ciąg jest rozbieżny, niech funkcja zwraca liczbę iteracji, po której  $|z_n| > 2$  podzieloną przez 600. Jeżeli ciąg jest zbieżny (tzn. po 600 iteracjach nadal  $|z_n| < 2$ ), niech funkcja zwraca 0. **Przypomnienie:** Działania na liczbach zespolonych wykonuj jak zwykłe mnożenie dwumianów, pamiętając jedynie, że  $i^2 = -1$ .

#### Ćwiczenia

- Pokoloruj piksele, tak jak w przykładzie z funkcją sin(), wywołując divergence(x, y, -0.3, 0.63). Dla ułatwienia, wywołanie to możesz umieścić wewnątrz fun(x, y) albo bezpośrednio wpisać jego wynik do zmiennej r.
- Zobacz, jak wygląda zbiór dla innych c, np  $c=-0.1+0.65 \cdot i$ , c=0, c=1, zmieniając liczbę iteracji jeśli zajdzie potrzeba.
- Pokoloruj piksele zgodnie z divergence(0, 0, x, y). Powinieneś otrzymać zbiór Mandelbrota.
- Zmodyfikuj funkcję tak, aby zwracała logarytm z liczby iteracji.
- $\bullet$  Zmodyfikuj kod tak, aby zobaczyć obszar o środku w punkcie (-0.345, 0.635).
- Powiększ obszar 200 razy.

## \* Antyaliasing - dla dociekliwych

Antyaliasing ma na celu usunięcie efektów reprezentacji ze skończoną rozdzielczością. Dla przykładu, jeśli mamy literę, to jej krawędź jest gładką krzywą, która przechodzi tylko częściowo przez piksel. Jeśli zaczernimy tylko piksele wewnątrz krzywej, uzyskamy bardzo nienaturalny efekt. Jeśli jednak użyjemy odcienia szarości, proporcjonalnego do "pola" przykrytego tą literą, uzyskamy ładną, gładką czcionkę. Wyobraźmy sobie, że mamy obraz składający się z dużej liczby gęsto ułożonych czarnych linii na białym tle. Chcąc taki obraz zmniejszyć, możemy wziąć np. co trzeci piksel w każdą stronę. Jednak takie podejście spowoduje, że raz trafimy na

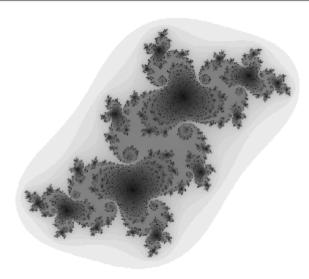


Figure 2: Rys.2. Zbiór Julii.

w pełni czarny, a raz na w pełni biały piksel. Ostatecznie uzyskamy biało-czarną kaszę. Drugim podejściem byłoby wyznaczenie średniej z każdej kostki  $3\times 3$ . Takie podejście da nam pożądany efekt rozmazania zbyt małych struktur i kolor szary w miejscu losowej kaszy. Taki rodzaj antyaliasingu nazywany jest super-samplingiem. W wypadku obrazów takich jak zbiór Mandelbrota czy zbiór Julii, możemy dla każdego piksela obliczyć  $k\times k$  wartości funkcji fun() i uśrednić wynik. Taki zabieg wygładzi obraz i usunie "odstające" piksele.

### Ćwiczenia

- Stwórz funkcję fun2(x, y), która oblicza średnią wartość funkcji fun w czterech punktach: (x, y), (x + s, y), (x, y + s) i (x + s, y + s), gdzie s = 1/800. Pokoloruj piksele za jej pomoca.
- Pokoloruj połowę obrazu z antyaliasingiem, a połowę bez (Np. zbiór Julii dla  $c=-0.1+0.65\cdot i$ ). Czy widać różnicę?
- \* Spróbuj uogólnić technikę z k=2 na dowolne k.
- \* Zamiast średniej oblicz maksimum lub minimum.
- Zamień funkcję setcolor() na setgray().

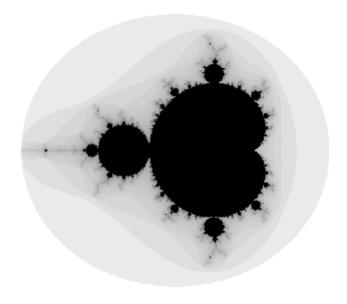


Figure 3: Rys.3. Zbiór Mandelbrota.