

## Całkowanie numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych

Pliki do wykorzystania w poniższym ćwiczeniu można pobrać za pomocą poniższych linków:

- [Plik nagłówkowy rk4.h](#)
- [Plik źródłowy rk4.cpp](#)

### 1. Wstęp

Celem dzisiejszych zajęć jest zapoznanie się z podstawowymi metodami całkowania numerycznego równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Część procesów fizycznych, które obserwujemy w otaczającym nas świecie może być modelowana za pomocą właśnie równań różniczkowych. Większości z nich nie da się rozwiązać w sposób analityczny (tj. podać rozwiązania w postaci jawnej). W szczególności, największe problemy sprawiają równania zawierające człony nieliniowe. Świat, w którym żyjemy, jest silnie nieliniowy i większość problemów, które przyjdzie nam rozwiązywać, nie będzie posiadać rozwiązania w formie analitycznej.

Jako pierwszą poznamy metodę pierwszego rzędu zwaną (od nazwiska twórcy) jawną metodą **Eulera**. Jest ona jednocześnie najprostszą i bardzo niestabilną metodą. Drugą metodą, którą zastosujemy na dzisiejszych zajęciach, będzie metoda **Rungego-Kutty 4-go rzędu**. Jest to metoda jawna, która charakteryzuje się stosunkowo wysokim rzędem, łatwością implementacji oraz relatywnie wysoką stabilnością.

Obie metody wykorzystamy do rozwiązania zagadnienia początkowego w postaci:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

### 2. Metoda Eulera

W celu rozwiązania zastosujemy następujący schemat iteracyjny:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(t_i, y_i) \end{aligned}$$

Gdzie:

- $h$  – krok całkowania,
- $y_{i+1}$  – rozwiązanie,
- $y_i$  – rozwiązanie w kroku poprzednim,
- $f$  – funkcja obliczająca prawą stronę równania różniczkowego.

### 3. Metoda Rungego-Kutty 4-ego rzędu

Schemat iteracyjny ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_2\right) \\ K_4 &= f(x_i + h, y_i + hK_3) \end{aligned}$$

Metoda ta **jest już** zaimplementowana w pliku `rk4.cpp`. Nagłówek funkcji, która wykonuje jeden krok całkowania równania różniczkowego ma postać:

```
double rk4(double x0, double y0, double h, double (*fun)(double, double))
```

gdzie:

- $x_0$  – wartość początkowa zmiennej niezależnej,
- $y_0$  – wartość początkowa zmiennej zależnej,
- $h$  – krok całkowania,
- `fun` – adres funkcji obliczającej prawe strony równania.

### 4. Ćwiczenia

Dane jest zagadnienie początkowe w postaci:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Jego rozwiązanie dokładne to:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda(t-t_0)}$$

1. Napisz program, który rozwiąże dane zagadnienie początkowe z wykorzystaniem schematu Eulera.
2. Wykorzystaj schemat RK4 zaimplementowany w pliku `rk4.cpp` i ponownie rozwiąż zagadnienie.
3. Dla obu przypadków wyświetl na monitorze kolejne wartości  $t_i$ ,  $y_i$  oraz względne wartości błędów:  $\varepsilon_i = \frac{|y_i - y_i^{\text{analityczne}}|}{|y_i^{\text{analityczne}}|}$ .
4. Zmodyfikuj program tak aby wykonywał obliczenia jedną i drugą metodą dla zadanego  $t_k$  i liczby kroków:  $N = 2^0, 2^1, \dots, 2^6$ .  
Wydrukuj do pliku: liczbę kroków  $N$ , długość kroku  $h$ , błąd metody Eulera i błąd metody RK4 dla ostatniego kroku czasowego.
5. Sporządź wykresy błędów obu metod w funkcji kroku  $h$  i oszacuj ich rzędy zbieżności.