Creative Commons License: Attribution Share Alike

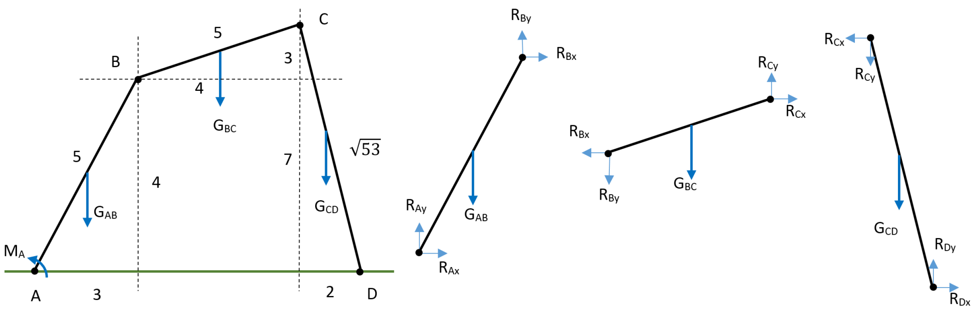
Wprowadzenie

Pliki do wykorzystania w poniższym ćwiczeniu można pobrać za pomocą poniższych linków:

- Plik nagłówkowy gauss.h
- Plik źródłowy gauss.cpp

Rozwiązanie wielu problemów inżynierskich wymaga rozwiązania nieliniowych układów równań (wśród których choć jedno równanie jest równaniem nieliniowym). Dzisiejsze laboratorium będzie poświęcone metodzie Newtona-Raphsona pozwalającej rozwiązywać takie zagadnienia. W celu przypomnienia podstawowych zagadnień zaczniemy od problemu liniowego wypływającego ze statyki mechanizmu po uwolnieniu poszczególnych członów od więzów. Umiejętność rozwiązania zagadnienia liniowego jest nieodzownym elementem implementacji metody Newtona-Raphsona.

Problem liniowy



Rozważmy mechanizm pokazany na rysunku i uwolnijmy ten układ od więzów, uwydatniając siły w parach kinematycznych. Znana jest geometria układu oraz ciężary poszczególnych członów wynoszące $G_{AB} = 25$, $G_{BC} = 16$ oraz $G_{CD} = 53$.

Dla układu o zadanej na rysunku geometrii oraz ciężarach członów podanych powyżej równania równowagi wyglądają następująco:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
R_{Ax} & & & +R_{Bx} & & & & & & = 0 \\
 & R_{Ay} & & & +R_{By} & & & & & = G_{AB} \\
 & & M_A & -4R_{Bx} & +3R_{By} & & & & & = +1.5G_{AB} \\
 & & & -R_{Bx} & & +R_{Cx} & & & & = 0 \\
 & & & & -R_{By} & & +R_{Cy} & & & = G_{BC} \\
 & & & & & -3R_{Cx} & +4R_{Cy} & & & = G_{BC} \\
 & & & & & -R_{Cx} & & +R_{Dx} & & = 0 \\
 & & & & & & -R_{Cy} & & +R_{Dy} & = G_{CD} \\
 & & & & & & & +7R_{Dx} & +2R_{Dy} & = -G_{CD}
\end{array}
$$

W postaci macierzowej układ równań ma postać:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Cx} \\ R_{Cy} \\ R_{Dx} \\ R_{Dy}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 25 \\ 37.5 \\ 0 \\ 16 \\ 32 \\ 0 \\ 53 \\ 53
\end{bmatrix}
$$

Zadanie 1

Napisz program w C, który obliczy siły i momenty przenoszone w parach kinematycznych. Do rozwiązania układu równań wykorzystaj metodę eliminacji Gaussa, której implementacja jest dostępna w pliku `gauss.cpp`. (Uwaga: Funkcja `gauss(int N, double **A, double *x, double *b)` przyjmuje podwójny wskaźnik do macierzy - z tego względu pamiętaj o zaalokowaniu dynamicznym dwuwymiarowej tablicy - tablica statyczna miałaby typ niezgodny z nagłówkiem funkcji). Sprawdź, czy otrzymujesz poprawne rozwiązanie wynoszące:

Creative Commons License: Attribution Share Alike

$$\begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Cx} \\ R_{Cy} \\ R_{Dx} \\ R_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.117647 \\ 39.088235 \\ 47.294118 \\ -8.117647 \\ -14.088235 \\ -8.117647 \\ 1.911765 \\ -8.117647 \\ 54.911765 \end{bmatrix}$$

Problem nieliniowy

Metoda Newtona-Raphsona

Metoda Newtona-Raphsona wynika z rozwinięcia funkcji wielu zmiennych w szereg Taylora, ucięcia go po członie liniowym i zapostulowania, że nieznany przyrost argumentów ma być taki, aby funkcja miała w tym miejscu wartość zero. Zapiszmy takie rozwinięcie dla funkcji $F(\vec{x})$, gdzie $\vec{x} = [x, y]$, a $\vec{h} = [h_x, h_y]$.

$$F(\vec{x}_0 + \vec{h}) = F(\vec{x}_0) + \frac{\partial F}{\partial x} h_x + \frac{\partial F}{\partial y} h_y + \dots$$

W zapisie indeksowym napiszemy dla funkcji F_i (może tych funkcji być cały wektor dla $i = 1, \dots, n$)

$$F_i(\vec{x}_0 + \vec{h}) = F_i(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} h_j + ...$$

Wiemy, że z pochodnych $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ można utworzyć macierz Jacobiego. Będzie to macierz kwadratowa, jako że rozwiązujemy zagadnienie mające tyle samo równań co niewiadomych. Przyrównujemy rozwinięcie do zera - pozwoli nam to wyznaczyć takie przesunięcie argumentów, że gdyby liniowe rozwinięcie funkcji wokół danego punktu było słuszne, to w jednej iteracji otrzymywalibyśmy dokładne rozwiązanie zadania. Otrzymujemy:

$$F_i(\vec{x_0} + \vec{h}) = F_i(\vec{x_0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} h_j = 0$$

i tym samym

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} h_j = -F_i(\vec{x}_0)$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

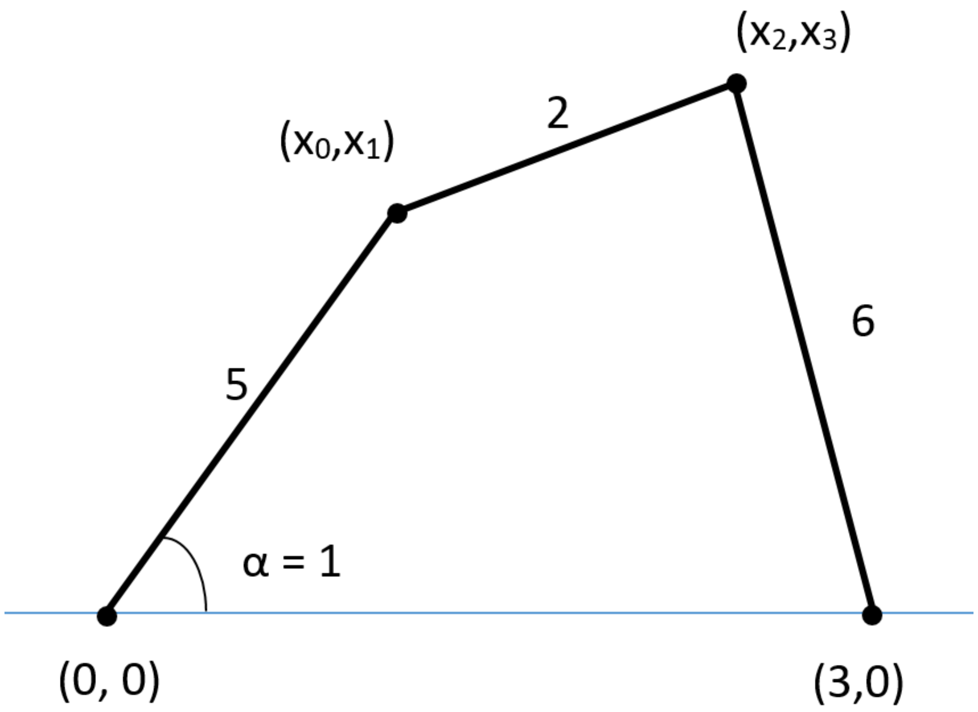
Proces iteracyjny dla metody Newtona-Raphsona ma następującą postać:

- Wybierz przybliżenie startowe x^1.
- Przypisz k = 1.
- Wyznacz wektor $\vec{h}^k$, rozwiązując układ równań $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(\vec{x}^k)}{\partial x_j} h_j^k = -F_i(\vec{x}^k)$, $i = 1, \dots, n$.
- Zaktualizuj przybliżenie rozwiązania: $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \vec{h}^k$.
- Przypisz $k = k + 1$.
- Wróć do punktu 3. i powtarzaj aż do osiągnięcia zbieżności.

Uwaga: Metoda Newtona-Raphsona jest niezawsze zbieżna.

Creative Commons License: Attribution Share Alike

Zadanie 2



Zajmijmy się teraz czworobokiem przegubowym pokazanym powyżej i rozważmy zadanie o położeniach (patrz: TMM I). Zadanie o położeniach zawsze prowadzi do układu równań nieliniowych. Do jego rozwiązania wykorzystamy metodę Newtona-Raphsona. Układ rozważymy we współrzędnych naturalnych (nieznanymi wielkościami będą współrzędne punktów (x_0, x_1) i (x_2, x_3), a równania więzów będą wynikać z odchylenia członu kierującego o kąt α od poziomu oraz długości dwóch pozostałych członów). Tym samym równania członów są postaci:

$$\begin{aligned} x_0 &= 5\cos\alpha \\ x_1 &= 5\sin\alpha \\ (x_2 - x_0)^2 + (x_3 - x_1)^2 &= 4 \\ (3 - x_2)^2 + (x_3 - 0)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Po rozwinięciu i zapisaniu całego układu w postaci funkcji wektorowej wektorowego argumentu otrzymamy następujące sformułowanie naszego układu równań: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$, gdzie

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_0 - 5\cos\alpha \\ x_1 - 5\sin\alpha \\ x_2^2 - 2x_0x_2 + x_0^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 - 4 \\ -6x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 27 \end{bmatrix}$$

Wyprowadziwszy powyższe równania możemy analitycznie obliczyć macierz Jacobiego:

$$J = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2x_2 + 2x_0 & -2x_3 + 2x_1 & -2x_0 + 2x_2 & -2x_1 + 2x_3 \\ 0 & 0 & -6 + 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

Zadania do wykonania

- Napisz program, który rozwiąże zadanie o położeniach przy wykorzystaniu metody Newtona-Raphsona. W tym celu stwórz następujące funkcje:
  - `void Constraints(double *x, double *F);`
  - `void JacobiMatrix(double **J, double *x);`
  - `void NewtonRaphson(double *x);`
- Zmodyfikuj program tak, aby nie wymagał analitycznego obliczenia macierzy Jacobiego, ale mógł numerycznie obliczyć tę macierz. W tym celu stwórz dodatkową funkcję `void JacobiMatrixFD(double **J, double *x);` przybliżającą poprawną macierz Jacobiego macierzą obliczoną z użyciem metody różnic skończonych (ang. *finite difference*). Można tego dokonać z użyciem algorytmu zapisanego w poniższym pseudokodzie (metoda różnic skończonych 2-ego rzędu):
  - Wybierz małą wartość, np. $\epsilon = 1e-8$, stwórz wektory $\vec{x}'$ i $\vec{x}''$.
  - Wykonaj pętlę po wszystkich czterech kolumnach:
    - Przypisz do $\vec{x}'$ i $\vec{x}''$ bieżącą wartość $\vec{x}$.
    - Zwiększ (zaburz) i-tą składową $\vec{x}'$ o ϵ, a tę samą składową $\vec{x}''$ zmniejsz o ϵ.
    - Wyznacz wektory wartości funkcji $\vec{F}(\vec{x}')$ oraz $\vec{F}(\vec{x}'')$.
    - Do i-tej kolumny macierzy J wpisz wartości $\frac{\vec{F}(\vec{x}')-\vec{F}(\vec{x}'')}{2\epsilon}$.

Creative Commons License:
Attribution Share Alike

W ramach testów sprawdź, czy macierz Jacobiego dla punktu startowego obliczona metodą dokładną i numeryczną ma te same wartości. Dla punktu startowego $\vec{x} = [0, 5, 3, 6]$ macierz Jacobiego ma postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$