

学 号:3182090711240

题目类型: 论文

(设计、论文、报告)

桂林理工大学

GUILIN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

本科毕业设计(论文)

题目: 非线性 Schrödinger 方程数值模拟
单光孤子的周期性演化

学 院: 理学院

专业(方向): 应用物理学

班 级: 2018-2 班

学 生: 韩旭东

指 导 教 师: 王恒

2022 年 6 月 13 日

桂林理工大学

毕业设计（论文）独创性声明

本人声明所呈交的设计（论文）是我个人在指导教师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了设计（论文）中特别加以标注和致谢的地方外，设计（论文）中不包含其他人或集体已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得桂林理工大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。对设计（论文）的研究成果做出贡献的个人和集体，均已作了明确的标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

设计（论文）作者签名： 日期： 年 月 日

桂林理工大学

设计（论文）使用授权声明

本设计（论文）作者完全了解学校有关保留、使用设计（论文）的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交设计（论文）的复印件和电子版，允许设计（论文）被查阅或借阅。本人授权桂林理工大学可以将本设计（论文）的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本设计（论文）。

设计（论文）作者签名： 日期： 年 月 日
指 导 老 师 签 名： 日期： 年 月 日

摘 要

非线性 Schrödinger 方程不仅是非线性光纤光学的重要问题，也是非线性偏微分方程的重要课题之一。数学上可应用逆散射方法得到非线性 Schrödinger 方程的解析解，但是需要求解很复杂的积分方程，因此数值方法求解非线性 Schrödinger 方程是有必要的。非线性 Schrödinger 方程有一类特殊的解，在传输过程中，光脉冲会经历窄化、分裂、再恢复的周期性演化过程。它就是光孤子，它是色散和非线性效应共同作用的结果。本文用伪谱方法、分步 Fourier 方法和有限差分法实现了非线性 Schrödinger 方程的数值求解，得到了单光孤子周期性演化的物理图像。

关键词：非线性 Schrödinger 方程；光孤子；伪谱方法；分步 Fourier 方法；有限差分法

Numerical simulation of nolinear Schrödinger equation

Periodic evolution of single optical soliton

Student: HAN Xu-dong

Teacher: WANG Heng

Abstract: Nonlinear Schrödinger equation(NLSE) is not only an important problem in nonlinear fiber optics, but also one of the important topics in nonlinear partial differential equations. The Inverse Scattering Transform Method(IST) can be used to get the analytical solution of nonlinear Schrödinger equation In mathematics, but it needs to solve a very complex integral equation. So it is necessary to solve nonlinear Schrödinger equation numerically. There is a special kind of solution in nonlinear Schrödinger equation. During the transmission process, the optical pulse will undergo a periodic evolution process of narrowing, splitting, and recovery. It is an optical soliton, which is the result of the combined action of dispersion and nonlinear effects. In this paper, pseudospectral method, split-step Fourier method(SSFM) and finite difference method are used to solve the nonlinear Schrödinger equation numerically, and the physical picture of the periodic evolution of single optical soliton is obtained.

Key words: NLSE; optical soliton; pseudospectral method; SSFM; finite difference method

目 录

摘 要	II
Abstract	III
1 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 本文工作	1
2 非线性 Schrödinger 方程	2
2.1 介电响应	2
2.2 脉冲传输	3
3 光孤子效应	5
3.1 孤立波与孤子	5
3.2 孤子本质	5
3.3 逆散射方法	7
3.4 光孤子	10
3.4.1 基阶孤子	10
3.4.2 二阶和高阶孤子	11
4 数值方法	13
4.1 伪谱方法	13
4.2 分步 Fourier 方法	14
4.2.1 交替计算	15
4.2.2 改进分步 Fourier 方法	15
4.3 有限差分法	18
5 结论	21
致 谢	22
参考文献	23
附录 1	24
附录 2	25
附录 3	26
附录 4	27

1 引言

1.1 研究背景

激光器和超低损耗光纤的问世不仅引起了光纤通信的革命，而且拉开了非线性光学的序幕。非线性光学是现代光学很重要的分支，它主要研究强光（主要是激光）与物质相互作用产生的各种非线性效应，比如 Kerr 效应、受激散射效应、多波混频效应和光孤子效应等。1973 年，Hasegawa 和 Tappert 在研究脉冲在光纤中传输的课题时认为，反常群速度色散和非线性效应的相互作用，可以使孤子脉冲在低损光纤中传输，且其传输过程由非线性 Schrödinger 方程描述。他们还指出，若在通信系统用光孤子作为载体，可使通信容量比线性通信系统提高 1~2 个数量级^[1]。光孤子通信的广阔前景引起人们的兴趣，对它进行了广泛的研究。

理论上对光孤子的研究就是求解非线性 Schrödinger 方程。1971 年，Zakharov 和 Shabat 用逆散射方法对非线性 Schrödinger 方程进行求解，得到该方程的解析解。然而，逆散射方法求解非线性 Schrödinger 方程需要求解复杂的积分方程，因此数值模拟成为研究非线性 Schrödinger 方程（光孤子问题）必要的一种手段。除了求解偏微分方程通用的有限差分法外，Hardin 和 Tappert 在 1972 年提出用分步 Fourier 方法求解非线性偏微分方程^[2]；1978 年，Fornberg 和 Whitham 提出用伪谱方法求解非线性偏微分方程^[3]。非线性 Schrödinger 方程的数值求解方法有很多，Taha 和 Ablowitz 在 1983 年对非线性 Schrödinger 方程的数值方法进行了总结和比较^[4]。

1.2 本文工作

本文的主要工作是在 MATLAB 上应用有限差分、分步 Fourier 方法和伪谱方法这三种数值方法实现非线性 Schrödinger 方程的数值求解。求解目标是得到现单光孤子周期性演化的物理图像。在本文的第2章，从光纤介质的本构关系出发推导了非线性 Schrödinger 方程；在本文的第3章，介绍了孤子理论，着重介绍了但光孤子的传输；在本文的第4章，阐述了用三种数值方法对光孤子效应进行数值模拟的工作；在本文的最后部分，对三种数值方法进行了总结和对比。

2 非线性 Schrödinger 方程

2.1 介电响应

根据 Maxwell 电磁理论，光在光纤中的传输可以用波动方程描述

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (2-1)$$

光纤的主要材料是熔融 SiO₂ 合成的纯石英玻璃，该电介质对光波的介电响应 $\vec{P}(\omega)$ 与光波频率 ω 有关。光纤的这一特性就是色散效应，最终导致光脉冲不同的频率分量以不同的速度传输。因此在频域中讨论光波问题会更方便，对波动方程进行 Fourier 变换得到三个分量的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) + \varepsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = \vec{0} \quad (2-2)$$

短脉冲（脉宽范围约为 10 fs ~ 10 ns）在光纤中传输时，介质对高强度光场的响应是非线性的，通常情况下极化强度 \vec{P} 与电场 \vec{E} 的关系为

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots \right) \quad (2-3)$$

其中，线性极化率 $\chi^{(1)}$ 对介电响应起主要作用，影响光纤的折射率 n 和衰减系数 α ；由于 SiO₂ 为对称分子，光纤中的二阶极化率 $\chi^{(2)} = 0$ ；三阶极化率 $\chi^{(3)}$ 及更高阶的极化率是产生非线性光学现象的主要原因。

因此，光脉冲在光纤中传输时，需要综合考虑色散效应和非线性效应。如此复杂的本构关系，势必会增加求解 Helmholtz 方程的难度，那么不妨做如下假设^[5]

- (1) 把非线性介电响应处理为线性介电响应的微扰；
- (2) 假定光场的偏振态沿光纤长度方向不变；
- (3) 假定光场是准单色的，即中心频率 ω_0 远小于频谱宽度 $\Delta\omega$ ， $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 。

这样一来，讨论光在光纤中的传输问题简化为求解偏振方向的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon_r(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (2-4)$$

相对介电常数 ε_r 可以表达为¹

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)} + \varepsilon_{NL} \quad (2-5)$$

其中，线性极化率 $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)$ 是 $\chi_{xx}^{(1)}(t)$ 作 Fourier 变换的结果，非线性介电常数 ε_{NL} 被处理为常量

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left| \tilde{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \quad (2-6)$$

¹线偏振光场假设下，仅需考虑极化率张量的某一分量。

可用介电常量 ε_r 定义折射率 \tilde{n} 和吸收系数 $\tilde{\alpha}$

$$\varepsilon_r = \left(\tilde{n} + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \right)^2 \quad (2-7)$$

介电常数 ε_r 中含有与光场有关的非线性部分 ε_{NL} , 折射率 \tilde{n} 和吸收系数 $\tilde{\alpha}$ 描述如下

$$\tilde{n} = n + n_2|E|^2 \quad (2-8a)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2|E|^2 \quad (2-8b)$$

其中, 线性折射率 n 和线性吸收系数 α 与线性极化率 $\chi_{xx}^{(1)}$ 有关; 非线性折射率 n_2 和非线性吸收系数 α_2 与三阶极化率 $\chi_{xxx}^{(3)}$ 有关。通常忽略石英光纤的非线性吸收系数 α_2 。

2.2 脉冲传输

研究短脉冲在光纤中的传输问题就是求解 Helmholtz 方程 (2-4), 试探解分离变量如下

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z) \quad (2-9)$$

其中, $F(x, y)$ 是光波模式, $\tilde{A}(z, \omega)$ 是光波的慢变包络函数, β_0 是波数。将试探解代入 Helmholtz 方程 (2-4), 得到光波模式方程 (2-10a) 和慢变包络函数方程 (2-10b)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon_r(\omega) k_0^2 - \tilde{\beta}^2 \right] F = 0 \quad (2-10a)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \right) \tilde{A} = 0 \quad (2-10b)$$

包络函数方程 (2-10b) 中, 需要做慢变包络近似², 忽略二阶导数 $\partial^2 \tilde{A} / \partial z^2$ 。

若介质对光场的响应是线性的, 那么可用本征函数理论求解 (2-10a)。但是, 短脉冲在光纤中传输时, 介电响应并非线性

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\omega) &= (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n \\ \Delta n(\omega) &= n_2|E|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0} \end{aligned} \quad (2-11)$$

那么可用微扰理论求解脉冲传输问题^[5]。把 Δn 处理为 n 的微扰, 先用线性响应 $\varepsilon_r = n^2$ 求解 (2-10a) 得到模式分部 $F(x, y)$ 和对应的本征值 β ; 然后加入微扰 Δn 的影响, 一阶微扰不影响模式分布 $F(x, y)$, 但是本征值修正为

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\omega) &= \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) \\ \Delta\beta(\omega) &= \frac{\omega^2 n(\omega)}{c^2 \beta(\omega)} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\omega) |F(x, y)|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \end{aligned} \quad (2-12)$$

²行波脉冲的包络在时间和空间上缓慢变化 (与波的周期或波长相比)。

本征值 $\beta(\omega)$ 决定了光波模式，光纤通信领域中它被称为传输常数。传输常数 β 主要取决于材料

$$\beta(\omega) \approx n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (2-13)$$

传输常数 $\beta(\omega)$ 是光波频率的函数，可对其在中心频率 ω_0 附近做 Taylor 展开以考察其色散效应

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots$$

$$\beta_1 = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{v_g} \quad (2-14a)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right) \quad (2-14b)$$

其中，参量 β_1 与群速度 v_g （光脉冲包络移动的速度）有关；参量 β_2 描述的就是群速度的色散。群速度色散 (group-velocity dispersion, 简称 GVD) 是造成脉冲展宽的主要原因。

在准单色假设下，中心频率 ω_0 附近的 $\beta(\omega)$ ， $\Delta\beta(\omega)$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 \quad (2-15a)$$

$$\Delta\beta = \Delta\beta_0 \quad (2-15b)$$

有了本征值 $\tilde{\beta}(\omega)$ 的近似值，就可以把包络方程 (2-10b) 近似处理为^[5]

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0] \tilde{A} \quad (2-16)$$

对频域中的包络方程进行 Fourier 逆变换，便得到脉冲包络随时间演化的方程

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\Delta\beta_0 A \quad (2-17)$$

根据微扰讨论结果可将脉冲包络在光纤中的传输表达为

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma(\omega_0) |A|^2 A \quad (2-18)$$

该方程中， α 是光纤的损耗项， β_1 描述的是脉冲群速度， β_2 是光纤的色散项， γ 包含了光纤的非线性效应。

在研究脉冲传输问题时，通常采用以群速度 v_g 随脉冲移动的参考系，这就要求对脉冲传输方程做延时变换^[5]

$$T = t - z/v_g = t - \beta_1 z \quad (2-19)$$

忽略光纤损耗 α 的情况下，脉冲包络传输就用非线性 Schrödinger 方程 (noline Schrödinger equation, 简称 NLSE) 描述³

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (2-20)$$

³在研究受激散射和或脉宽小于 1 ps 的超短脉冲传输的问题时，需要更高阶的色散项和非线性项对非线性 Schrödinger 方程进行修正，本文不再对推广的非线性 Schrödinger 方程进行介绍。

3 光孤子效应

3.1 孤立波与孤子

1834 年,英国造船工程师 Russel 骑着马沿着狭窄的运河走时,偶然观察到一个有趣的现象^[6]。当小船突然停止前进时,船头会挤出一个水堆。这个水堆保持着自己的形状,以很高的速度沿着河道继续前进。Russel 骑马追了约两英里,它才渐渐消失。Russel 称这种现象为**孤立波 (solitary wave)**,并在英国科学协会中报告了这一现象,引起了很长时间的争论。

直到 1895 年,两位荷兰的数学家 Korteweg 和 de Vries 在流体动力学的研究中导出了浅水波方程^[6],即 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3-1)$$

同时,他们还得到这一方程的一种行波解,在波长趋于无限长的情形下,该行波解能很好地描述 Russel 所发现的孤立波。至此,人们才渐渐接受了 Russel 提出的孤立波的概念,但是这项研究并没有得到人们的广泛关注。

1955 年, Fermi、Pasta 和 Ulam 在一篇有关晶格热传导的论文中提出了一个看似与孤立波无关的问题——在具有非线性相互作用的一维振子链模型中,如果按照能量均分定理,初始能量最终会均分到振子链的所有自由度。但是所得结果却是经过一段时间,能量又基本回到最初的振动模式 (FPU 问题)^[6]。

一直到 1965 年,美国普林斯顿大学的 Kruskal 和贝尔实验室的 Zabusky 对 FPU 问题进行数值计算。他们发现,在一环形振子链⁴中,初始脉冲随着时间的推移,演化成几个大小不同的孤立波,它们互相碰撞、穿行,碰撞后仍然保持各自原来的形状与速度,并在某一时刻,所有孤立波在环上同一地点相遇,基本重现初始状态。由于这种类似粒子的性质, Kruskal 和 Zabusky 将这样的孤立波命名为**孤子 (soliton)**。**孤子是一种特殊的孤立波,总结其特点^[6-7]**

- (1) 孤子之间碰撞和相互作用后,能保持其形状和速度不变,仅相位发生变化;
- (2) 孤子的能量总是集中在有限的空间区域内,不会耗散到无限的空间区域中去。

3.2 孤子本质

目前为止,人们在很多学科领域发现孤子现象,并且在理论上得到了一批描述孤子的非线性偏微分方程 (见图3.1),孤子问题也逐渐发展为完整、系统的理论。虽然孤子是非线性偏微分方程的一种特殊解,但是孤子的物理本质并不复杂,它是色散效应和非线性效应综合作用的结果。

不同频率波的传播速度不同形成色散,色散使脉冲 (波包) 在传输过程中逐渐展宽,能量逐渐耗散,最终导致脉冲 (波包) 消失;非线性波的传播速度依赖于振幅,振

⁴周期性边界条件

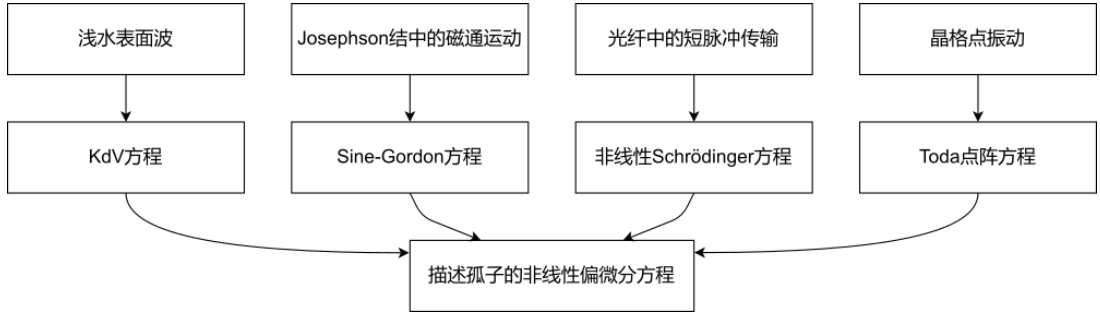


图 3.1 不同领域中的孤子问题

幅越大的地方传播速度越快，这就使得波的前沿不断变陡，波形更加尖锐。因此，色散作用使波形平展，非线性效应使波形尖锐，两者的作用刚好相反。当两种因素相互平衡时，便能使波形保持不变，形成孤子^[6]。

如2.2节所述，非线性 Schrödinger 方程描述的就是色散效应和非线性效应共同作用下脉冲在光纤中的传输过程。Hasegawa 和 Tappert 就在 1973 年指出，反常群速度色散和非线性效应的相互作用使得孤子脉冲可以在低损光纤中传输，并通过数值实验证实了光孤子在通信系统中的稳定性^[1]。

为了描述到底是色散效应还是非线性效应对脉冲的传输演化起主要作用，需要对非线性 Schrödinger 方程进行无量纲化处理，并引入色散长度 L_D 和非线性长度 L_{NL} 来衡量脉冲传输过程中色散和非线性效应哪个起重要作用。那么，先对脉冲进行归一化处理

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0}$$

$$A(z, \tau) = \sqrt{P_0}U(z, \tau) \quad (3-2)$$

T_0 为初始脉宽， τ 是归一化时间尺度（不具有时间量纲）， P_0 为入射脉冲峰值功率， U 是归一化振幅（也不具备振幅量纲），已忽略光纤的损耗系数 α 。根据非线性 Schrödinger 方程 (2-20)，归一化振幅 $U(z, \tau)$ 需满足

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sng}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (3-3)$$

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

可根据脉冲传输距离 z 与色散长度 L_D 和非线性长度 L_{NL} 之间的相对大小，将光纤分为不同的传输区域^[5]

(1) $z \ll L_D$ 且 $z \ll L_{NL}$ ，色散和非线性效应都不起重要作用。传输过程中，脉冲形状保持不变（见图3.2）。

(2) $z \ll L_{NL}$ 而 $z \approx L_D$ ，脉冲传输演化过程中，群速度色散（GVD）起主要作用，使脉冲展宽（见图3.3）。

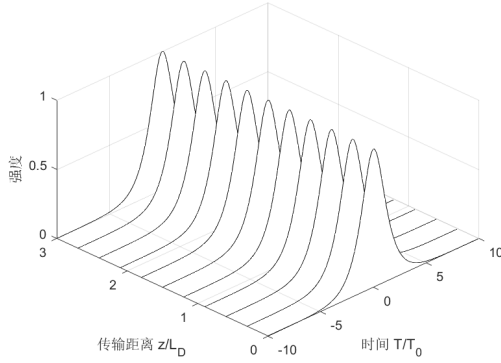


图 3.2 脉冲无畸变传输

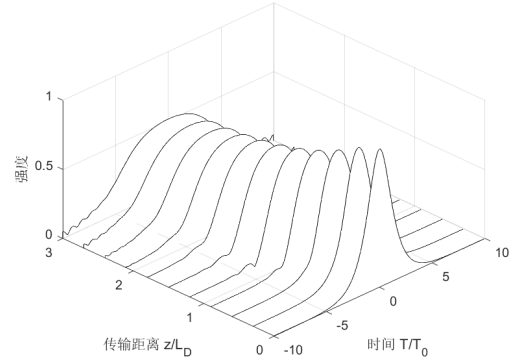
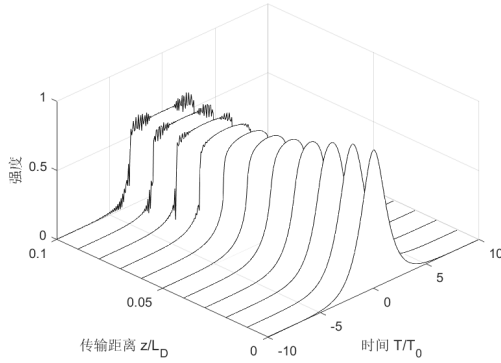
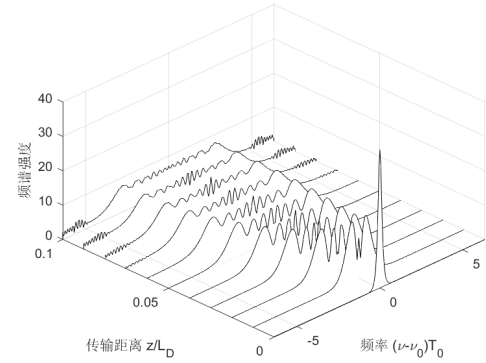


图 3.3 群速度色散导致脉冲展宽



(a) 时域



(b) 频域

图 3.4 自相位调制主要影响下的光波分裂

(3) $z \ll L_D$ 但 $z \approx L_{NL}$, 非线性效应对脉冲起主要作用。其结果是产生自相位调制 (self-phase modulation, SPM) 现象, 使脉冲频谱发生变化。较强的自相位调制和较弱的群速度色散导致光波分裂现象, 脉冲前后沿变陡, 并演化出快速振荡的精细结构 (见图3.4a), 频谱中央也因此产生多峰结构^[5] (见图3.4b)。

(4) $z \approx L_D$, $z \approx L_{NL}$, 色散和非线性效应对脉冲传输都有重要作用。在正常色散区 $\beta_2 > 0$, 群速度色散和自相位调制可用于脉冲压缩; 在反常色散区 $\beta_2 < 0$, 两者的作用能形成光孤子^[5]。

3.3 逆散射方法

如 3.2 节所述, 孤子现象由一些特殊的非线性偏微分方程所描述, 人们在研究这些特殊的非线性偏微分方程的过程中发展了量子力学中的逆散射方法 (the Inverse Scattering Transform Method, 简称 IST)。

1967 年, Gardner 等人将 IST 方法应用于 KdV 方程求解, 对孤子现象做出严格的数学证明。一开始, 人们认为 IST 方法能用于求解 KdV 方程仅仅是因为 Schrödinger

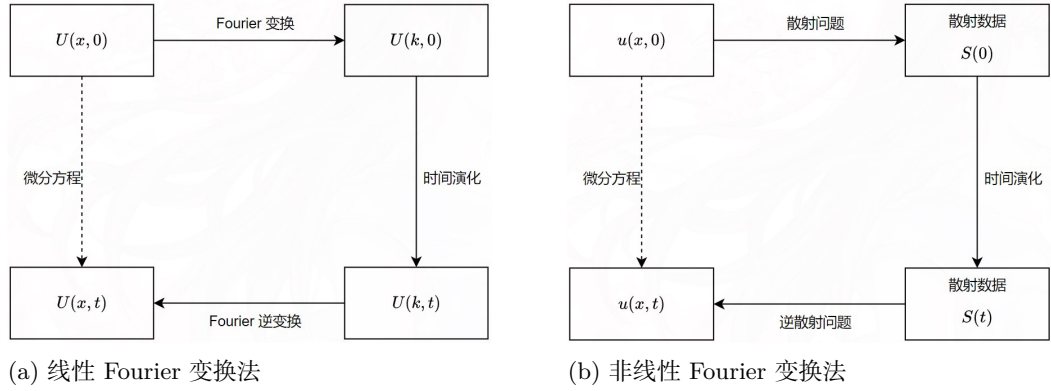


图 3.5 Fourier 变换方法与逆散射方法

方程与 KdV 方程之间的巧妙联系。但是, Lax 在 1968 年对 IST 方法做了推广, 使得 IST 方法能求解更多的非线性偏微分方程。1971 年, Zakharov 和 Shabat 将 IST 方法用于非线性 Schrödinger 方程的求解, 并给出了非线性 Schrödinger 方程的解析解^[7-8]。

量子力学中, Schrödinger 方程的散射问题是根据已知势场求散射数据以及波函数在无穷远处的渐近行为; 逆散射问题正好相反, 已知散射数据和波函数在无穷远处的边界条件反向求散射势⁵。IST 方法并不是直接去求非线性偏微分方程的解, 而是把非线性演化问题作为一个散射问题考虑, 根据初始散射数据求散射数据在散射过程中的演化, 再由演化的散射数据重构位势, 散射势就是非线性偏微分方程的解。IST 方法的思想与 Fourier 变换法求解线性偏微分方程非常类似 (见图 3.5), 因此 IST 方法也被称为非线性 Fourier 变换法^[6]。

本节着重讨论非线性 Schrödinger 方程的 IST 方法求解。不妨对传输距离 z 也做无量纲化处理 $\xi = z/L_D$, 并引入参量 $N^2 = L_D/L_{NL}$, 把非线性 Schrödinger 表述成更简洁的形式

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} = \text{sng}(\beta_2) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - N^2 |U|^2 U \quad (3-4)$$

在反常色散区 $\beta_2 < 0$, 标准化的非线性 Schrödinger 方程为

$$u = NU = \sqrt{\gamma L_D} A$$

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (3-5)$$

与该非线性演化相联系的散射问题是^[9]

$$\begin{pmatrix} i\partial/\partial\tau & u \\ -u^* & -i\partial/\partial\tau \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

其中, ψ_1 和 ψ_2 是被势场 $u(\xi, \tau)$ 散射的两个波函数, k 是本征值。根据 Lax 推广的 IST 方法, 非线性偏微分方程应等价于两个线性问题, 其中一个就是如 (3-6) 所示的散射问

⁵ 逆散射方法最初就是利用散射数据来构造势能曲线, 以了解原子与分子结构。

题；另一个线性方程描述波函数随空间传输的演化过程

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

算子 M 的具体形式需要用 AKNS 方法⁶推导^[9]，结果比较繁琐，此处不再说明。

散射问题 (3-6) 是一个本征值问题。当本征值 k 为实数时，可以取连续值，本征函数为行波解，即波函数对应于连续态，其在无穷远处的渐进行为

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik\tau} + R(k, \xi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{ik\tau}, & \tau \rightarrow -\infty \\ T(k, \xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik\xi}, & \tau \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3-8)$$

其中， $R(k, \xi)$ 为反射系数， $T(k, \xi)$ 为透射系数。当本征值 k 为复数时，只能取有限个分立值 k_n ，本征函数指数衰减，即波函数对应为束缚态（孤子）。这种情形下，本征值 k_n 正是反射系数 $R(k, \xi)$ 在 k 平面上的极点，对应的留数为 $C_n(k_n, \xi)$ ^[9]。

连续本征值 k 对应的反射系数 $R(k, \xi)$ 和离散本征值 k_n 对应的留数 $C(k_n, \xi)$ 就是散射问题 (3-6) 的散射数据。可由波函数演化方程 (3-7) 确定散射数据随传输距离的演化关系

$$R(k, \xi) = R(k, 0) e^{i2k^2 \xi} \quad (3-9a)$$

$$C_n(k_n, \xi) = C_n(k_n, 0) e^{ik_n^2 \xi} \quad (3-9b)$$

根据 $\xi = 0$ 处的输入脉冲得到初始的散射数据 $R(k, 0)$ 和 $C_n(k_n, 0)$ ⁷，脉冲在光纤中的传输对应于散射数据演化，直接给出逆散射问题的结果，也就是散射势

$$u(\xi, \tau) = -2K_1(\tau, \tau, \xi) \quad (3-10)$$

其中，函数 $K_1(x, y, t)$ 满足 Gel'fand-Levitan-Marchenko 积分方程（简称 GLM 方程）

$$\begin{cases} K_1(x, y, t) = B^*(x+y, t) + \int_x^\infty B^*(y+z, t) K_2^*(x, z, t) dz \\ K_2^*(x, y, t) = - \int_x^\infty B(y+z, t) K_1(x, z) dz \end{cases} \quad (3-11)$$

积分核 $B(x+y, \xi)$ 由散射数据给出

$$B(x+y, \xi) = \sum_{n=1}^N C_n^2(ik_n, \xi) e^{k_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, \xi) e^{ik(x+y)} dk \quad (3-12)$$

上述过程给出了严格求解非线性 Schrodinger 方程的步骤，其中不可避免地要求解复杂的积分方程 (3-11)。但是，对于无反射的孤子解情形 $R(k, 0) = 0$ ，便可通过求解代

⁶1973 年，Ablowitz、Kaup、Newell 和 Segur 在求解 Sine-Gordon 方程时提出由散射问题算子 \hat{L} 构造波函数演化算子 \hat{M} 的方法
⁷1974 年，Satsuma 和 Yajima 讨论了初始条件对非线性 Schrödinger 方程解的影响。

数方程组得到 $u(\xi, \tau)$

$$u(\xi, \tau) = -2 \sum_{n=1}^N \lambda_n^* \psi_{2n}^* \quad (3-13)$$

$$\lambda_n^* = \sqrt{C_n} e^{i(k_n \tau + k_n^2 \xi)}$$

其中, ψ_{2n}^* 满足代数方程组

$$\psi_{1n} + \sum_{n'=1}^N \frac{\lambda_n \lambda_{n'}^*}{k_n - k_{n'}^*} \psi_{2n'}^* = 0$$

$$\psi_{2n}^* - \sum_{n'=1}^N \frac{\lambda_n^* \lambda_{n'}}{k_n^* - k_{n'}} \psi_{1n'} = \lambda_n^* \quad (3-14)$$

极点数目 N 或离散本征值 k_n 的数目表征孤子阶数。

3.4 光孤子

从 IST 方法求解非线性 Schrödinger 方程的过程我们清楚地可以知道, 光孤子解来自散射问题的束缚态 ($R(k, \xi)$ 的极点处, 本征值为复数 k_n)。上一节仅在反常群速度色散区讨论光孤子的解, 随着光纤和激光技术的成熟, 人们在实验上发现或者在理论上提出了多种光孤子 (见图3.6), 本文重点讨论反常色散区的光孤子 (亮孤子)^[5]。

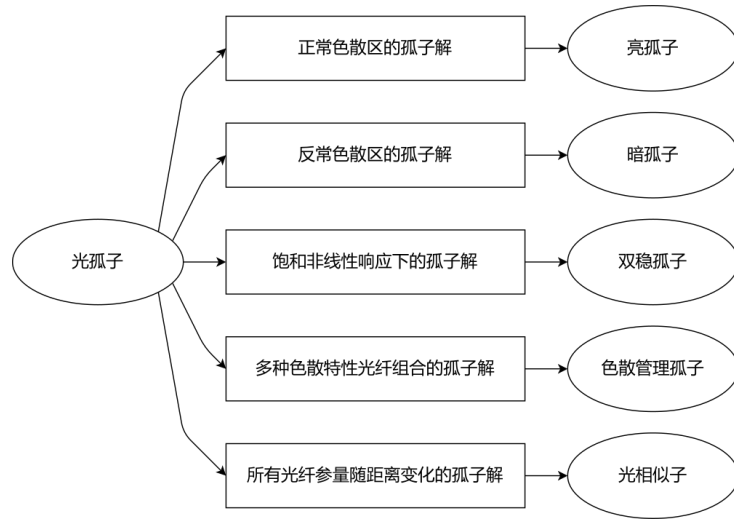


图 3.6 不同类型的光孤子

3.4.1 基阶孤子

单个本征值 $N = 1$ 的情形下, 脉冲传输能形成基阶孤子, 可通过求解孤子解方程组 (3-13) 得到基阶孤子的一般形式

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}[\eta(\tau - \tau_s + \delta \xi)] \exp[i(\eta^2 - \delta^2)\xi/2 - i\delta\tau + i\phi_s] \quad (3-15)$$

其中, η 、 δ 、 τ_s 和 ϕ_s 是表征基阶孤子的 4 个参数。 ϕ_s 是相位常数, 在研究单孤子问题时常把它忽略, 在讨论孤子相互作用问题时才起作用。参量 τ_s 表示孤子峰的位置, 选取适当的时间原点可以使 $\tau_s = 0$ 。参量 η 不仅决定孤子的振幅, 而且同时决定了孤子的宽度。参量 δ 表示孤子相对于中心频率 ω_0 的频移, 同时也导致群速度 v_g 的改变^[5]

$$\begin{aligned} |u(\xi, \tau)| &= \eta \operatorname{sech}[\eta(\tau + \delta\xi)] = \eta \operatorname{sech}\left[\eta\left(\frac{t - \beta_1 z}{T_0} + \delta\frac{z}{L_D}\right)\right] \\ &= \eta \operatorname{sech}\left(\eta\frac{t - \beta_1' z}{T_0}\right) \\ \beta_1' &= \beta_1 - \frac{\delta|\beta_2|}{T_0} \end{aligned} \quad (3-16)$$

在忽略相位常量 ϕ_s 、孤子中心 τ_s 和频移 δ 参量后, 基阶孤子可以描述为

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}(\eta\tau) \exp\left(i\frac{\eta^2\xi}{2}\right) \quad (3-17)$$

从中我们可以发现

- (1) 孤子宽度 T_0/η 反比于孤子振幅 η , 这是孤子很重要的一个特点;
- (2) 对于 $N = 1$ 的基阶孤子脉冲, 在光纤中将无畸变地传输 (见图3.7), 这使得基阶孤子在光纤通信中具有广阔前景。

3.4.2 二阶和高阶孤子

高阶孤子也可以用通解 (3-13) 来描述, 不同的本征值 k_n 和留数 C_n 可以构造出各种各样的高阶孤子。可根据本征值与留数的关系区分不同的孤子集, 其中一类孤子集其初始形状如下

$$u(0, \tau) = N \operatorname{sech}(\tau) \quad (3-18)$$

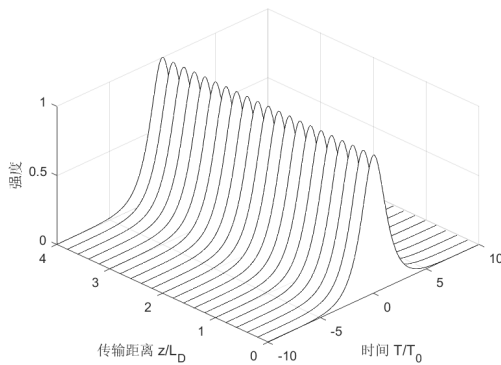


图 3.7 基阶孤子无畸变传输

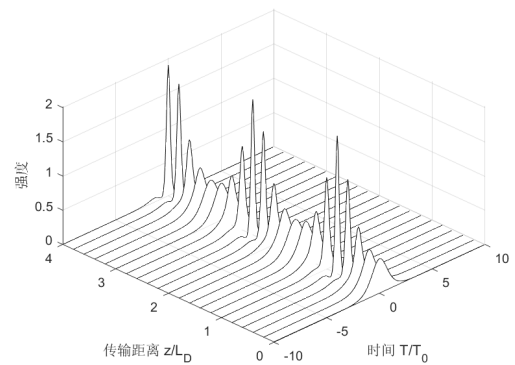


图 3.8 二阶孤子的周期性演化

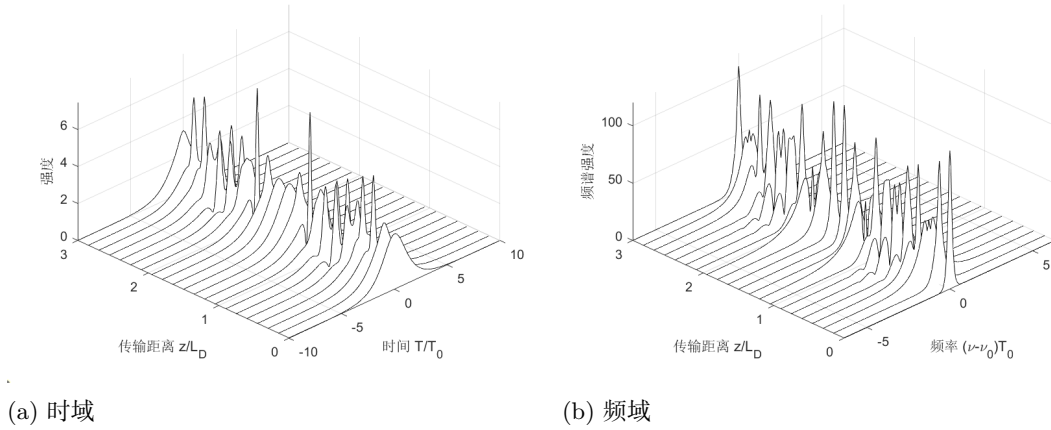


图 3.9 三阶孤子的周期性演化

孤子阶数 N 为整数⁸。这一类孤子有一个很有趣的特征——包络形状 $|u(\xi, \tau)|$ 做周期 $\xi_0 = \pi/2$ 的周期性变化。拿二阶孤子举例，对于本征值 $k_1 = 1/2$ 和 $k_2 = 3i/2$ 的二阶孤子，其场分布 $u(\xi, \tau)$

$$u(\xi, \tau) = \frac{4[\cosh(3\tau) + 3e^{4i\xi} \cosh(\tau)]}{\cosh(4\tau) + 4 \cosh(2\tau) + 3 \cos(4\xi)} e^{i\xi/2} \quad (3-19)$$

根据场分布 $u(\xi, \tau)$ 的解析表达式作图（见图3.8），可以发现孤子周期 z_0

$$z_0 = \xi_0 L_D = \frac{\pi}{2} \frac{T_0^2}{|\beta_2|^2} \quad (3-20)$$

对三阶孤子（ $N = 3$ ）进行数值模拟（见图3.9a）。发现脉冲在光纤中传输时，开始阶段脉宽被压缩，在 $z_0/2$ 处被窄化的脉冲一分为二，在孤子周期 z_0 处又变回原来形状的单脉冲。脉冲变窄、分裂、再恢复的过程在每个孤子周期内重复进行。

从三阶孤子的频谱演化过程来看（见图3.9b），在 $z = 0.3L_D$ 附近，出现了自相位调制的典型振荡结构，这种振荡性的频谱结构使得孤子的前沿和后沿发生变化，导致脉冲分裂；随后的反常群速度色散导致脉宽变窄，脉冲频谱也相应改变。也就是说，自相位调制和群速度色散交替的主导作用使得光孤子无论是时域还是频域上来看都将呈现周期性的演化过程^[5]。

对于基阶孤子（ $N = 1$ ），自相位调制和色散影响互相平衡，脉冲的形状和频谱几乎不随传输变化。对于二阶、三阶甚至更高阶的孤子，自相位调制和群速度色散的影响地位是交替变化着的，导致传输过程中出现脉冲变窄、分裂、再恢复的周期性演化结果^[5]。

⁸当 N 不为整数时，涉及到孤子稳定性问题，本文不做讨论。

4 数值方法

数学上可以用逆散射方法得到非线性 Schrödinger 方程的解析解，也可以用矩方法、变分法得到半解析半近似的解。虽然解析解能很好地反映脉冲在光纤中传输的物理图像，但是大部分实际问题求解析解非常繁琐或是根本就无法用解析方法求解。因此通过数值方法求解非线性 Schrödinger 方程来研究光脉冲的非线性传输是必要的。求解这种非线性偏微分方程的数值方法大致可以分为两类

- (1) 通过频谱间接求解，分步 Fourier 方法（split-step Fourier method, 简称 SSFM）和伪谱方法（pseudospectral method）;
- (2) 在时域中直接求解，有限差分法（finite difference method, 简称 FDM）。

4.1 伪谱方法

Fourier 积分变换可以把时域（或空间域）的偏微分方程转换为频域的常微分方程，通过求解频域的常微分方程，再进行逆 Fourier 变换得到偏微分方程的时域（空间域）的解（见图3.5a）。将此方法应用于偏微分方程离散求解，就是伪谱方法^[10]。

要在计算机上实现伪谱方法，有两个问题需要解决

- (1) 实现离散数据序列时域与频域的互相转换；
- (2) 实现常微分方程的数值求解。

快速 Fourier 变换（fast Fourier transform, 简称 FFT）可以很方便地实现离散 Fourier 变换（MATLAB 提供了快速 Fourier 变换的指令 fft 和 ifft）；通常用 Runge-Kutta 方法求解常微分方程的数值解（MATLAB 中集成了非常多用 Runge-Kutta 方法设计的 ODE 求解器，比如最常用的 ode45）^[11]。因此，应用伪谱方法求解偏微分方程在技术上是可行的，求解步骤也十分清楚^[10]

- (1) 对偏微分方程做时域（或空间域）的 Fourier 变换，再将其离散化；
- (2) 调用 ODE 求解器对离散化的常微分方程进行求解；
- (3) 用 ifft 函数将频域上的计算结果转换为时域（或空间域）上的结果。

1978 年，Fornberg 和 Whitham 提出用伪谱方法求解非线性 Schrödinger 方程^[3]。对于非线性 Schrödinger 方程 (3-5)，通常选择做时域 Fourier 变换，得到脉冲传输（频域）的常微分方程⁹

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = -\frac{i\omega^2}{2}\tilde{u} + i\mathcal{F} \left[|\mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}]|^2 \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}] \right] \quad (4-1)$$

$$\tilde{u}(0, \omega) = \mathcal{F} [N \cdot \text{sech}(\tau)] \quad (4-2)$$

⁹应用伪谱方法求解非线性 Schrödinger 方程要求脉冲在时域具有周期性，这在光纤传输中是可行的。

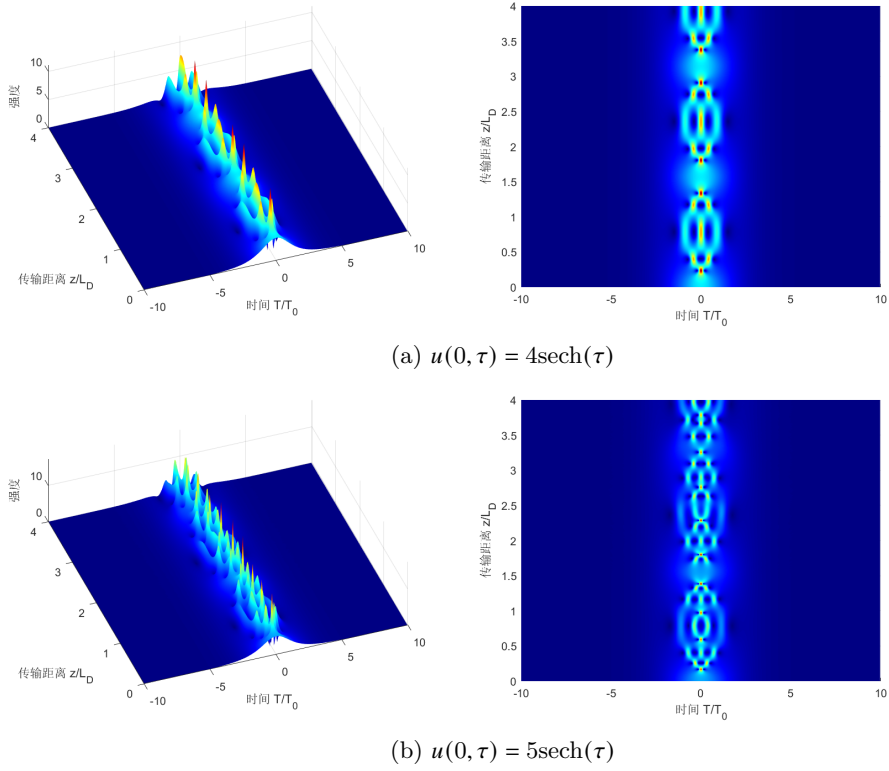


图 4.1 伪谱方法模拟的高阶孤子周期性演化

将该方程离散化后调用 ode45 指令求解离散后的频域演化方程，再用 ifft 函数将频域结果转换为时域演化过程（详见附录 1）。

图3.9a 和图3.9b 就是用伪谱方法计算输入脉冲 $u(0, \tau) = 3\text{sech}(\tau)$ 在光纤中传输得到的三阶光孤子演化结果。用伪谱方法对高阶孤子进行数值模拟，同样得到了脉冲窄化、分裂、再恢复的周期性物理过程（见图4.1）。

4.2 分步 Fourier 方法

伪谱方法在计算机上求解效率高、计算内存小，但是它需要对频域的常微分方程进行数值求解。并且在研究受激 Raman 散射和受激 Brillouin 散射问题时，需要在非线性 Schrödinger 方程中引入高阶色散项和非线性项，这种情形下需要对频域的常微分方程进行降阶等一系列处理，伪谱方法的可拓展性就非常有限。其实早在伪谱方法之前，人们在求解 KdV 方程的时候就应用了分步 Fourier 方法^[2, 12]，后来这一数值方法被推广到非线性 Schrödinger 方程及其他非线性偏微分方程的求解。

4.2.1 交替计算

脉冲在光纤中传输时，光场包络同时受色散和非线性效应的影响

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial z} &= (\hat{D} + \hat{N}) A \\ \hat{D} &= -\frac{\alpha}{2} - \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \dots \\ \hat{N} &= i\gamma |A|^2 + \dots\end{aligned}\quad (4-3)$$

也就是说，色散效应（线性微分算子 \hat{D} ）和非线性效应（非线性函数 \hat{N} ）对包络函数 A 的作用是同步的。分步 Fourier 方法假设光场传输过程中这两种作用交替进行，分别考虑其影响。这种假设从计算结果上看是可行的，能得到光波传输的近似结果^[5, 13]。

脉冲从 z 到 $z+h$ 传播一小段距离，这一小段传输过程可以分两步进行：第一步，仅考虑非线性效应的影响，忽略线性算子的作用， $\hat{D} = 0$ ；第二步，仅考虑色散效应的作用，忽略非线性函数的影响， $\hat{N} = 0$

$$A(z+h, T) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, T) \quad (4-4)$$

非线性效应的影响 $\exp(h\hat{N})$ 可以在时域中计算，色散效应的影响 $\exp(h\hat{D})$ 在频域中计算更为方便

$$\exp(h\hat{D}) B(z, T) = \mathcal{F}^{-1} [\exp(h\hat{D}(-i\omega)) \mathcal{F}[B(z, T)]] \quad (4-5)$$

其中， $\hat{D}(-i\omega)$ 表示用 $-i\omega$ 去替换时域微分算子 $\partial/\partial T$ ^[5]。

最原始的分步 Fourier 方法是非常不精确的，因为它忽略了算子 \hat{D} 和算子 \hat{N} 的非对易性，根据 Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式

$$\exp(\hat{a}) \exp(\hat{b}) = \exp\left(\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{12}[\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] + \dots\right) \quad (4-6)$$

可知对易子 $h^2[\hat{D}, \hat{N}]$ 是分步 Fourier 方法误差的主要来源，因此分步 Fourier 方法产生的空间截断误差是 $O(h^2)$ 。

4.2.2 改进分步 Fourier 方法

可以对脉冲在 z 到 $z+h$ 小区间上传输过程做不同的假设，以提高分步 Fourier 方法的精度。比较常用的一种方案是对称分步 Fourier 方法，该方法假定非线性效应作用在每个小区间的中间

$$A(z+h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) \quad (4-7)$$

分步 Fourier 方法的物理过程是非常直观的（见图4.2）。脉冲 $A(z, T)$ 在最初的 $h/2$ 距离上传输时仅考虑色散作用；在 $z+h/2$ 的处，包络乘以非线性的积分项，表示整个

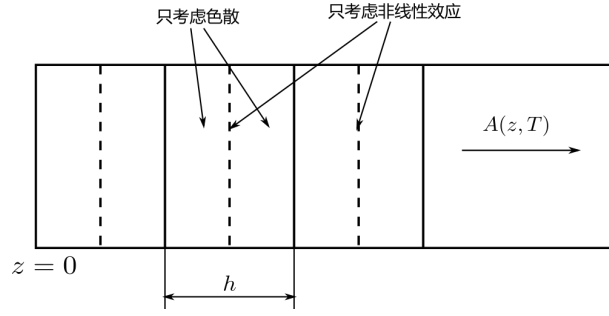


图 4.2 分步 Fourier 方法示意图

小区间上的非线性效应；脉冲在剩下的 $h/2$ 距离上的传输也只与色散有关，最终得到 $A(z+h, T)$ [5]。

应用 BCH 公式可知对称分步 Fourier 方法的主要误差来自双对易子 $h^3[\hat{N}, [\hat{D}, \hat{N}]]$ 和 $h^3[\hat{D}, [\hat{D}, \hat{N}]]$ ，因此分步 Fourier 方法的截断误差 $O(h^3)$ 。

分步 Fourier 方法很容易在计算机上实现。可将长度为 L 的光纤划分为 M 个计算区间，若步长 $h = L/M$ 足够小，包含非线性算子积分的指数项可以近似为 $\exp(h\hat{N})$ 。应用 (4-7) 给出的传输假设

$$A(L, T) \approx e^{-\frac{1}{2}h\hat{D}} \left(\prod_{m=1}^M e^{h\hat{D}} e^{h\hat{N}} \right) e^{\frac{1}{2}h\hat{D}} A(0, T) \quad (4-8)$$

当然也可以把色散作用集中在每一个小区间的中间，得到另一种不同的算法

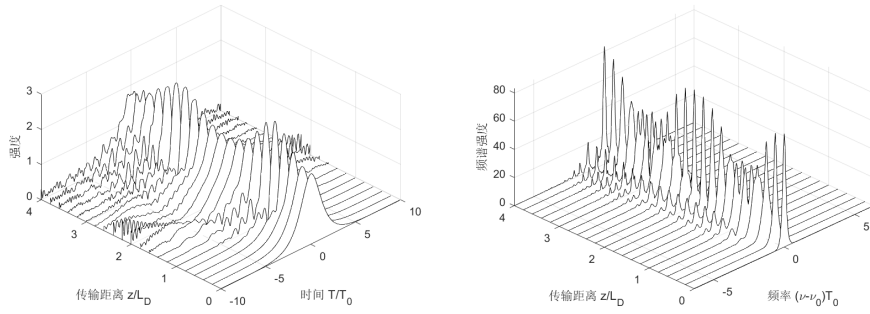
$$A(L, T) \approx e^{-\frac{1}{2}h\hat{N}} \left(\prod_{m=1}^M e^{h\hat{N}} e^{h\hat{D}} \right) e^{\frac{1}{2}h\hat{N}} A(0, T) \quad (4-9)$$

图4.3a 给出了用对称分步 Fourier 方法 (4-9) 实现的二阶孤子的时域和频域演化过程（计算代码详见附录 2）；图4.3b 给出的是相同步长 h 下伪谱方法计算所得的结果。将其与二阶孤子解析结果（见图3.8）进行对比发现

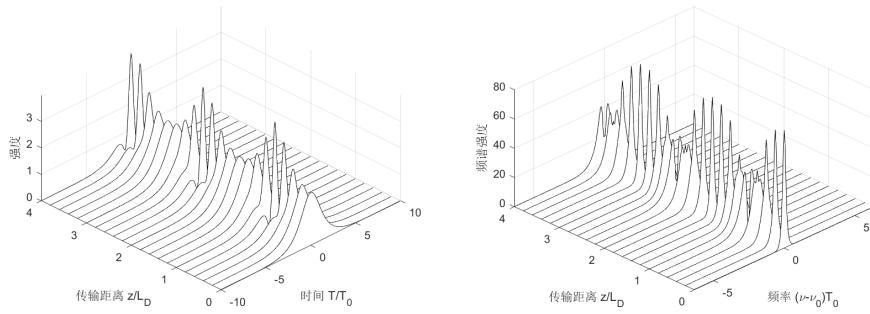
(1) 伪谱方法脉冲传输的计算结果与解析解非常吻合；而分步 Fourier 方法却不能很好地体现孤子周期性，并且随着传输距离的增加，计算结果会在脉冲的前沿和后沿出现振荡；

(2) 从频域结果看，伪谱方法所得频谱可以体现自相位调制和反常色散交替影响的结果；而分步 Fourier 方法所得结果中出现了频移的小峰，这部分较小的频移导致脉冲边缘在传输过程中的振荡。

导致分步 Fourier 方法计算结果不准确的主要原因是用 $\exp(h\hat{N})$ 代替了非线性算子积分的指数项进行求解。可用迭代的方法计算近似积分，过程比较繁琐，但是通过减小区间步长 h 一样可以得到更可靠的结果。因此，采用更小的空间步长计算，分步 Fourier 方法可以得到和伪谱方法类似的求解结果（见图4.4）。

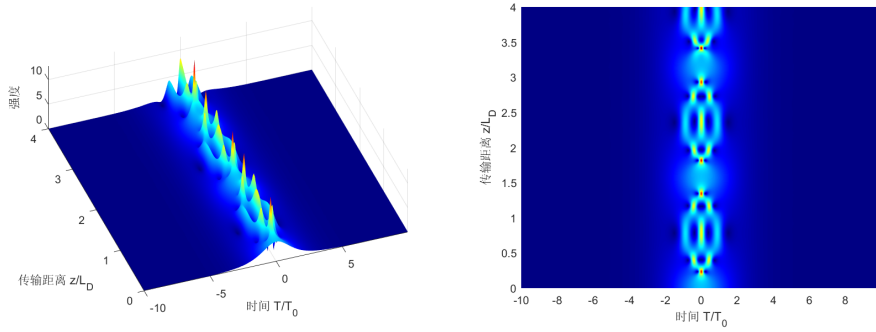


(a) 分步 Fourier 方法求解孤子时域演化和频谱 ($h = 0.2$)

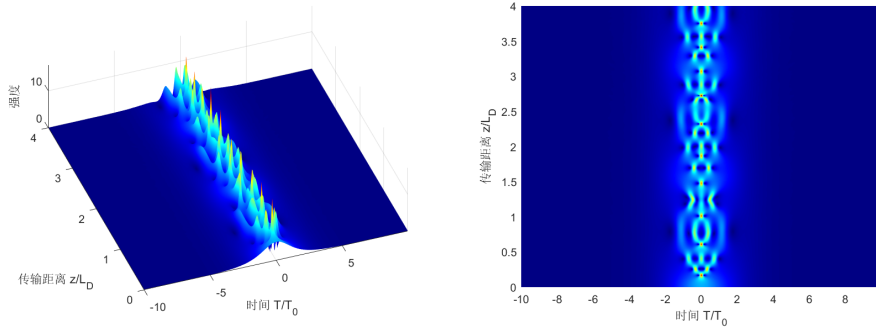


(b) 伪谱方法求解孤子时域演化和频谱 ($h = 0.2$)

图 4.3 分步 Fourier 方法和伪谱方法求解二阶孤子结果对比



(a) $u(0, \tau) = 4\text{sech}(\tau)$



(b) $u(0, \tau) = 5\text{sech}(\tau)$

图 4.4 分步 Fourier 方法模拟的高阶孤子周期性演化

4.3 有限差分法

有限差分法是人们在研究微分方程时发展起来的一种数值技术,该方法的基本思想是用差分近似代替微分方程中的微分,把复杂的微分方程问题转化为计算机上容易处理的差分方程(代数方程)问题。利用有限差分法求解偏微分方程基本包括三个步骤^[7]

- (1) 将求解区域离散化(划分网格节点);
- (2) 对偏微分方程和定解条件做差分近似(构造差分格式);
- (3) 求解差分方程组(一般采用迭代法求解)。

首先,对非线性 Schrödinger 方程 (3-5) 的求解区域处理为离散的节点网格

$$u_n^m = u(m\Delta\xi, n\Delta\tau) \quad (4-10)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$n = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N$$

其中,上标 m 标记传输距离,下标 n 标记群速度坐标系下的时间。

其次,将非线性 Schrödinger 方程近似处理为等效的差分方程。一般应用 Taylor 级数对偏微分方程进行差分近似,比如 Euler 格式、蛙跳(hopscotch)格式、Crank-Nicolson 格式^[4, 14]。1976 年,Ablowite 和 Ladik 基于逆散射方法提出了针对非线性偏微分方程求解的差分格式^[4]。

本文仅介绍常用的差分格式,最典型的差分近似是 Euler 差分格式

$$i \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta\xi} + \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{2(\Delta\tau)^2} + |u_n^m|u_n^m = 0 \quad (4-11)$$

Euler 格式是显式差分格式,一阶偏导 $\partial u / \partial \xi$ 为中心差分,二阶偏导 $\partial^2 u / \partial \tau^2$ 也是中心差分,因此其截断误差为 $O((\Delta\xi)^2) + O((\Delta\tau)^2)$ 。该差分格式的稳定性受 CFL 条件¹⁰约束

$$\lambda = \frac{\Delta\xi}{2(\Delta\tau)^2} \leq \frac{1}{4} \quad (4-12)$$

当然也可以对非线性项做(时间)平均近似得到蛙跳格式

$$i \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta\xi} + \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{2(\Delta\tau)^2} + \frac{1}{2} (|u_{n+1}^m|^2 u_{n+1}^m + |u_{n-1}^m|^2 u_{n-1}^m) = 0 \quad (4-13a)$$

$$i \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta\xi} + \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{2(\Delta\tau)^2} + \frac{1}{2} (|u_{n+1}^{m+1}|^2 u_{n+1}^{m+1} + |u_{n-1}^{m+1}|^2 u_{n-1}^{m+1}) = 0 \quad (4-13b)$$

把隐式差分格式 (4-13b) 的上标 m 代换为 $m-1$, 并结合显式差分格式 (4-13a) 可以发现蛙跳格式隐含了空间平均的近似

$$u_n^{m+1} + u_n^{m-1} = 2u_n^m \quad (4-14)$$

¹⁰该稳定性条件由 Courant、Friedrichs、Lewy 提出,可用 von Neumann 方法推导。

因此，蛙跳格式的一阶偏导 $\partial u / \partial \xi$ 虽然是前向差分，但是其截断误差也是 $O((\Delta \xi)^2) + O((\Delta \tau)^2)$ ，并且无条件稳定。

比较常用的是一种差分近似是 Crank-Nicolson 格式，它将二阶偏导项 $\partial^2 u / \partial \tau^2$ 做了平均处理^[4, 15]

$$i \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta \xi} + \frac{1}{4(\Delta \tau)^2} [u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} + u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m] + \frac{1}{2} (|u_{n+1}^m|^2 u_{n+1}^m + |u_{n-1}^m|^2 u_{n-1}^m) = 0 \quad (4-15)$$

该种差分格式的截断误差为 $O(\Delta \xi) + O((\Delta \tau)^2)$ ，并且无条件稳定。若要减小 Crank-Nicolson 格式的空间截断误差，可对非线性项做（空间）平均

$$i \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta \xi} + \frac{1}{4(\Delta \tau)^2} [u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} + u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m] + \frac{1}{2} (|u_n^{m+1}|^2 u_n^{m+1} + |u_n^m|^2 u_n^m) = 0 \quad (4-16)$$

为了方便地在计算机上实现差分求解，通常把差分方程改写成矩阵方程的形式，比如对 Crank-Nicolson 格式的差分方程 (4-16)，可用矩阵方程表达^[4]

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{F} \quad (4-17)$$

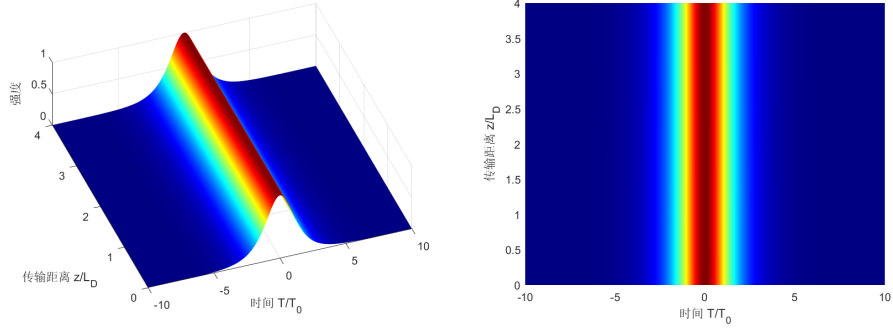
其中，差分矩阵 \mathbf{A} 通常是一个带状矩阵，在周期性边界条件 ($u_{-N-1}^m = u_N^m$, $u_{N+1}^m = u_{-N}^m$) 的假设下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i - \lambda & \lambda/2 & & & \lambda/2 \\ \lambda/2 & i - \lambda & \lambda/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda/2 & i - \lambda & \lambda/2 \\ \lambda/2 & & & \lambda/2 & i - \lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^{m+1} = \begin{bmatrix} u_{-N} \\ u_{-N+1} \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}^{m+1} \quad (4-18a)$$

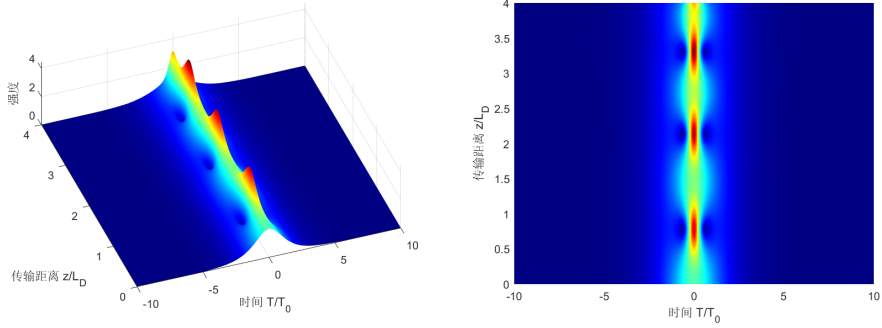
$$F_n = -\frac{\lambda}{2} (u_{n+1}^m + u_{n-1}^m) + (\lambda + i)u_n^m + \frac{\Delta \xi}{2} (|u_n^{m+1}|^2 u_n^{m+1} + |u_n^m|^2 u_n^m) \approx -\frac{\lambda}{2} (u_{n+1}^m + u_{n-1}^m) + (\lambda + i)u_n^m + \Delta \xi |u_n^m|^2 u_n^m \quad (4-18b)$$

最后便是求解矩阵方程 (4-17)。差分矩阵 \mathbf{A} 通常是大型矩阵，用 Gauss 消元法求解矩阵方程 (4-17) 会花费较多的计算时间。一般应用迭代方法求解矩阵方程，常用的迭代算法有 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代和逐次超松弛迭代 (successive overrelaxation, 简称 SOR) 方法^[11]，本文不做具体介绍。在 MATLAB 中，应用 spdiags 函数可以很方便地创建差分矩阵 \mathbf{A} ，并且 inv 函数可以直接求解带状矩阵 \mathbf{A} 的逆矩阵，使得有限差分的编程更容易实现（详见附录 3）。

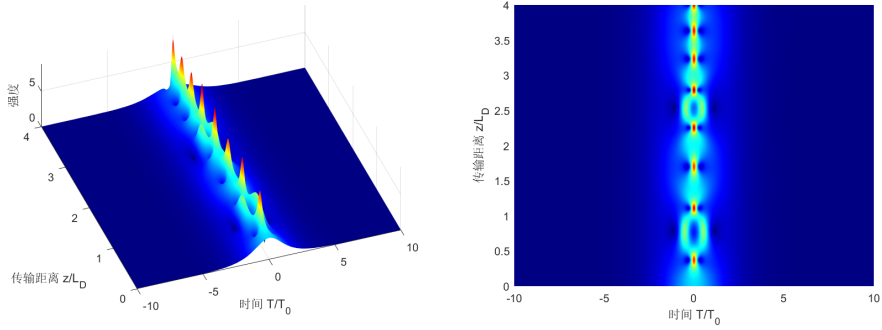
有限差分法可以实现单光子周期性演化的计算，但是有限差分法耗时非常多，且不容易控制传输距离，很容易产生发散的结果（见图 4.5）。一般情况下，分步 Fourier 方法比有限差分法快一到两个数量级，但是在波分复用系统的计算中，有限差分法比分步 Fourier 方法所用时间更少^[5]。



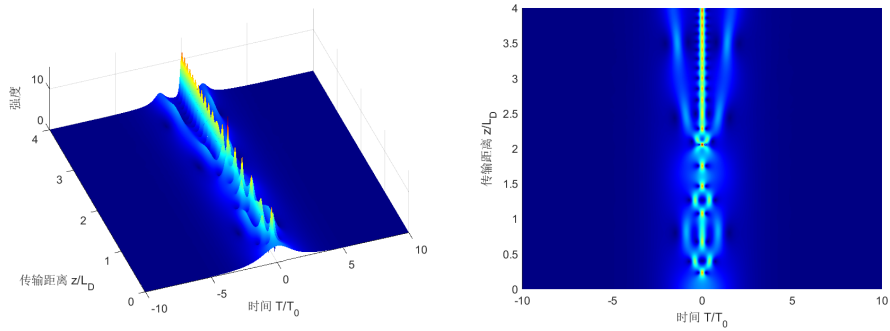
(a) $u(0, \tau) = \text{sech}(\tau)$



(b) $u(0, \tau) = 2\text{sech}(\tau)$



(c) $u(0, \tau) = 3\text{sech}(\tau)$



(d) $u(0, \tau) = 4\text{sech}(\tau)$

图 4.5 有限差分模拟的孤子周期性演化

5 结论

本文作者对伪谱方法和分步 Fourier 方法进行数值实验（有限差分法的计算时间比较长，笔者没有对其进行完整的数值实验），比较这两种数值方法的计算时间和求解结果（实验结果见附录 4）

(1) 从求解的结果看，伪谱方法的结果更加准确和稳定，分步 Fourier 方法需要更小的空间和时间步长才能达到满意的结果；

(2) 从计算耗时来看，分步 Fourier 方法比伪谱方法更快，主要原因是伪谱方法必须通过求解频域的常微分方程，再进行 Fourier 逆变换才能得到时域结果。

对三种数值方法求解单光孤子问题进行总结（见表 5.1）

表 5.1 非线性 Schrödinger 方程的三种数值方法求解对比

数值方法	计算类型	准确程度	计算时间
伪谱方法	频域计算	准确	较快
分步 Fourier 方法	时域和频域交替计算	较准确	快
有限差分法	时域计算	较准确	非常慢

本文研究的问题是非线性 Schrödinger 方程的数值求解，着重研究单光孤子的周期性演化过程，在本文的最后对研究课题进行总结

- (1) 从解析方法看，非线性 Schrödinger 方程可以用 IST 方法求解；
- (2) 从物理行为看，散射问题的离散本征值对应束缚态，其势场就是光孤子解；
- (3) 从数值方法看，非线性 Schrödinger 方程可以用分步 Fourier 方法、伪谱方法、有限差分法进行求解。

其实，非线性 Schrödinger 方程的研究方法、孤子概念都是从 KdV 方程迁移过来。就孤子问题来讲，还有很多有意思的课题，比如孤子稳定性、孤子相互作用等问题。

致 谢

大学四年即将结束，我也快要完成我的毕业论文，首先要感谢支持我完成论文的朋友。感谢我的指导老师王恒教授，给了我很大的发挥空间，在我对课题毫无头绪的时候指导我确定了具体的研究方向；感谢提供论文 L^AT_EX 模板的胡光辉老师，他设计的论文模板让我不再被公式输入、排版等问题所困扰；感谢提供本文研究课题的巴灵丽同学，光孤子数值模拟问题来自她参加的夏令营的一个题目；感谢提供计算算力的裴俊杰同学，没有他的算力支持，我得不到有限差分的计算结果

其次要感谢生我养我的父母。我能来到这个世界这本身就是一件幸运的事，更何况是他们无微不至的关爱让我可以顺利健康地长大成人。小时候很淘气，给父母惹了很多麻烦；青春期比较叛逆，觉得父母老古董了，经常和他们对着干；长大了才发现，维持一个家庭，上有老，下有小是多么的不容易。父母正在老去，我要更加努力，为自己和社会创造更多价值，让他们不再操劳，能安度晚年。

最后要感谢陪伴我四年的桂林理工大学。感谢理学院的老师和同学，他们让我大学四年的学习生活不再孤单，经常给我提供帮助和建议以及挑战；感谢田径队的教练和队员，在大学因为共同的跑步爱好而聚在一起，互相鼓励、交流、提高，真的非常难得；感谢电子协会、数学建模协会和物理协会，让我大学四年的课余生活丰富多彩，社团活动给了我很多挑战，让我练出了非常多的技能 即将离开母校，回想这四年，虽然有很多难熬的、烦心的事情，但是印象最深的还是那些奋斗过，快乐过的日子。

参考文献

- [1] AKIRA H, FREDERICK T. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion[J]. Applied Physics Letters, 1973, 23(3): 142-144.
- [2] F.Tappert. Numerical solutions of the Korteweg-de Vries equation and its generalizations by the split-step Fourier method[C]//Nonlinear Wave Motion: vol. 289. 1974: 215-216.
- [3] B.Fornberg, G.B.Whitham. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena[J]. Sciences, 1978, 289(1361): 373-404.
- [4] THIAB R, MARK J. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 55(2): 203-230.
- [5] GOVIND P. 非线性光纤光学[M]. 电子工业出版社, 2019.
- [6] 梁昆森, 刘法, 缪国庆. 数学物理方法[M]. 高等教育出版社, 2010.
- [7] 杨伯君, 赵玉芳. 高等数学物理方法[M]. 北京邮电大学出版社, 2003.
- [8] V.E.Zakharov, A.B.Shabet. Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media[J]. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1972, 34: 62-69.
- [9] 郭玉翠. 非线性偏微分方程引论[M]. 北京邮电大学出版社, 2008.
- [10] 张晓. Matlab 微分方程高效解法: 谱方法原理与实现[M]. 机械工业出版社, 2015.
- [11] ANNE G, TIMOTHY P. 数值方法: 设计、分析和算法实现[M]. 机械工业出版社, 2021.
- [12] VINITA C, S.Gopalakrishnan, V.Mani. Spectral solutions to the Korteweg-de-Vries and nonlinear Schrodinger equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2015, 81(2): 150-161.
- [13] ROBERT A, WILLIAM K. Numerical studies of the interplay between self-phase modulation and dispersion for intense plane-wave laser pulses[J]. Journal of Applied Physics, 1975, 46(11): 4921-4934.
- [14] CHANG Q, JIA E, SUN W. Difference Schemes for Solving the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148(2): 397-415.
- [15] I.S.Greig, J.Ll.Morris. A Hopscotch method for the Korteweg-de-Vries equation[J]. Journal of Computational Physics, 1976, 20(1): 64-80.

附录 1

在 MATLAB 上实现用伪谱方法求解非线性 Schrödinger 方程

代码 1: 伪谱方法求解三阶孤子

```
%% 参数设置
sgn = -1;
T_max = 10; N_t = 256;
t = 2*T_max/N_t*[-N_t/2:N_t/2-1];
omega = (pi/T_max)*[0:N_t/2-1 -N_t/2:-1].';
Z = 4; h = 0.2;
z = 0:h:Z;

%% 初始条件
u = 3*sech(t); ut = fft(u);

%% ODE求解
[z, UT] = ode45('NLSE', z, ut, [], sgn, omega);
U = ifft(UT, [], 2);

%% 可视化
figure
waterfall(t, z, abs(U));
xlabel('时间T/T_0'), ylabel('传输距离z/L_D'), zlabel('强度')
figure
waterfall(fftshift(omega)./(2.*pi), z, abs(fftshift(UT, 2)));
xlabel('频率(\nu-\nu_0)T_0'), ylabel('传输距离z/L_D'), zlabel('频谱强度')
```

其中, 调用 ode45 时需要自定义表达常微分方程的函数

```
function dut = NLSE(z, ut, dummy, sgn, omega)
%NLSE 函数表示被求解的 ODE 方程
% dut = i*sgn/2*(omega^2)*ut+i*F[|u|^2*u]
u = ifft(ut);
dut = sgn*(i/2)*(omega.^2).*ut+i*fft((abs(u).^2).*u);
end
```

附录 2

在 MATLAB 上实现用分步 Fourier 方法求解非线性 Schrödinger 方程

代码 2: 分步 Fourier 方法求解三阶孤子

```
%% 参数设置
beta_2 = -1; N = 1;
T_max = 10; N_t = 512;
Z = 4; h = 0.01;
t = 2*T_max/N_t*[-N_t/2:N_t/2-1];
omega = (pi/T_max).*[0:N_t/2-1 -N_t/2:-1];
z = 0:h:Z;

%% 色散项和非线性项
D = exp(1i/2*beta_2*omega.^2*h);
NL = 1i*N^2*h;

%% 初始条件
u = 3*sech(t);
U = []; UT = [];
U(1,:) = u; UT(1,:) = fftshift(fft(u));

%% 分步 Fourier 求解  $1/2N \rightarrow D \rightarrow 1/2N$ 
u = u.*exp(abs(u).^2.*NL/2);
for n = 2:length(z)
    ut = fft(u).*D;
    u = ifft(ut);
    u = u.*exp(abs(u).^2.*NL);
    u_r = u.*exp(-abs(u).^2.*NL/2);
    U(n,:) = u_r;
    UT(n,:) = fftshift(fft((u_r)));
end

%% 可视化
figure
waterfall(t, z, abs(U));
xlabel('时间T/T_0'), ylabel('传输距离z/L_D'), zlabel('强度')
figure
waterfall(fftshift(omega)./(2.*pi), z, abs(UT));
xlabel('频率(\nu-\nu_0)T_0'), ylabel('传输距离z/L_D'), zlabel('频谱强度')
```

附录 3

在 MATLAB 上实现用有限差分法求解非线性 Schrödinger 方程

代码 3: 有限差分法求解三阶孤子

```
%% 参数设置
Z_max = 4; T_max = 10;
dz = 0.0001; dt = 0.002; lambda = dz/dt^2/2;
z = [0:dz:Z_max]; t = [-T_max:dt:T_max];
[T, Z] = meshgrid(t, z);
N_t = length(t); N_z = length(z);

%% 差分矩阵
e = ones(N_t, 1);
A = spdiags([lambda/2*e, (1i-lambda)*e, lambda/2*e], [-1, 0, 1], N_t, N_t);
A(1, N_t) = lambda/2; A(N_t, 1) = lambda/2;
B = spdiags([-lambda/2*e, (1i+lambda)*e, -lambda/2*e], [-1, 0, 1], N_t, N_t);
B(1, N_t) = -lambda/2; B(N_t, 1) = -lambda/2;
A_i = inv(A);

%% 边界条件
u = 3*sech(t)'; U(1,:) = u';

%% 差分求解
for m = 2:N_z
    F = B*u-dz*abs(u).^2.*u;
    u = A_i*F;
    U(m,:) = u';
end

%% 可视化
figure
surf(T, Z, abs(U));
xlabel('时间T/T_0'), ylabel('传输距离z/L_D'), zlabel('强度')
```

附录 4

伪谱方法的数值实验结果（耗时记录）

$\Delta\xi$	N_τ	基阶孤子/s	二阶孤子/s	三阶孤子/s	四阶孤子/s	五阶孤子/s
0.1	256	0.913524	0.867968	1.087755	结果发散	结果发散
0.05	256	0.8847945	0.904476	1.126649	结果发散	结果发散
0.03	256	0.906814	0.887762	1.105801	结果发散	结果发散
0.01	256	0.961330	0.959687	1.207335	结果发散	结果发散
0.005	256	1.032782	1.017613	1.255176	结果发散	结果发散
0.003	256	1.128874	1.152278	1.403453	结果发散	结果发散
0.001	256	1.605832	1.594857	1.800561	结果发散	结果发散
0.1	512	4.150410	4.064225	4.060273	4.303629	5.136246
0.05	512	4.163852	4.063956	4.088162	4.283738	5.169811
0.03	512	4.083730	4.160560	4.200042	4.375078	5.205791
0.01	512	4.245213	4.231423	4.255282	4.445187	5.340950
0.005	512	4.390212	4.398500	4.402081	4.643569	5.505080
0.003	512	4.787179	4.706263	4.750699	4.907478	5.813890
0.001	512	5.457064	5.476309	5.466284	5.646329	6.594705

分步 Fourier 方法的数值实验结果（耗时记录）

$\Delta\xi$	N_τ	基阶孤子/s	二阶孤子/s	三阶孤子/s	四阶孤子/s	五阶孤子/s
0.1	256	0.011991	0.011326	结果发散	结果发散	结果发散
0.05	256	0.012258	0.012525	结果发散	结果发散	结果发散
0.03	256	0.019958	0.015117	结果发散	结果发散	结果发散
0.01	256	0.047944	0.048051	0.040772	0.046679	结果发散
0.005	256	0.098894	0.101310	0.102865	0.101067	结果发散
0.003	256	0.438257	0.431412	0.416631	结果发散	结果发散
0.001	256	4.911769	4.917287	4.916656	4.927861	结果发散
0.1	512	0.010518	0.010189	结果发散	结果发散	结果发散
0.05	512	0.013548	0.015026	结果发散	结果发散	结果发散
0.03	512	0.020160	0.019286	结果发散	结果发散	结果发散
0.01	512	0.066089	0.059894	0.058442	结果发散	结果发散
0.005	512	0.362146	0.371222	0.359213	结果发散	结果发散
0.003	512	1.137290	1.163925	1.134111	1.150079	1.142337
0.001	512	9.897807	9.908339	9.984559	9.904616	9.893836

MATLAB 编程要点

ODE 求解器的调用

在 MATLAB 中调用 ODE 求解器通常需要一个调用指令 `odesolver` 和一个函数定义文件 `odefun.m`。**odesolver 的调用语法为**

$$[X, U] = \text{odesolver}(\text{odefun}, \text{xspan}, \text{u0}, \text{options}, \text{parameter1}, \text{parameter2}, \dots)$$

- (1) “odesolver”是所调用求解器的函数名称,可以是 `ode45`、`ode23`、`ode113`、`ode15s`、`ode23s`、`ode23t`、`ode23tb` 和 `ode15i` 中的一个。
- (2) “odefun”是定义常微分方程组 $u'_i = f_i(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ 的函数句柄,可以是 `odefun.m` 文件定义的函数,也可以是“@”标记的匿名函数。
- (3) “xspan”是表示常微分方程组自变量 x 取值范围的向量 $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ 。
- (4) “u0”是代表常微分方程组初始条件的向量 $u_i(x_0)$ 。
- (5) “options”是一个改变 `odesolver` 默认参数设置的结构体,是一个可选参数。若不改变默认参数设置,可将其设置为空。
- (6) “parameter1, parameter2, ...”是传递给 `odefun` 的参数,是可选项。
- (7) “[X,U]”保存计算结果。向量 X 就是自变量的离散取值 $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$, 矩阵 U 就是所求常微分方程组的数值解。

odefun 函数的定义需要与 odesolver 的调用形式相对应

$$\text{function du} = \text{odefun}(x, u, \text{dummy}, \text{parameter1}, \text{parameter2}, \dots)$$

- (1) “odefun”为函数名,函数文件名必须与其相同。
- (2) “x”为自变量。
- (3) “u”是常微分方程组的函数值 $u_i(x)$,是一个矩阵。
- (4) “dummy”是一个占位符,无实际意义。
- (5) “parameter1, parameter2, ...”用于接收传递来的参数。
- (6) “du”为函数输出结果的变量名。

fftshift 操作

由于 FFT 算法本身的原因, `fft` 函数的输出结果在频域上是颠倒的

$$0, 2\pi/T_0, 4\pi/T_0, \dots, (2N-4)\pi/T_0, (2N-2)\pi/T_0, -2N\pi/T_0, -(2N-2)\pi/T_0, \dots, -4\pi/T_0, -2\pi/T_0$$

因此需要 `fftshift` 函数调整 `fft` 输出序列的顺序。但是在分步 Fourier 方法(伪谱方法)求解问题时,不需要每次运算都调整频谱顺序,只需将最后一步运算的频谱结果调整即可(频率序列首先需要人为颠倒,可视化时再调整回来)。

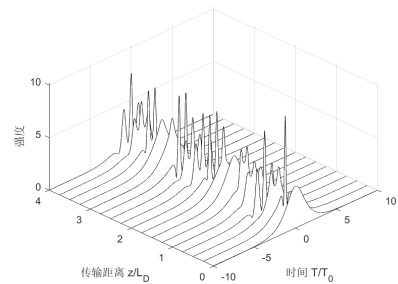
spdiags 函数创建带状矩阵

$$A = \text{spdiags}(B, d, m, n)$$

通过获取 B 的列并沿 d 指定的对角线放置它们，来创建一个 $m \times n$ 带状矩阵。

可视化模板

```
%% 瀑布图可视化
figure
waterfall(t, z, abs(U))
view(-45,45)
xlabel('时间 T/T_0'),
ylabel('传输距离 z/L_D'),
zlabel('强度'),
axis([-10 10 0 inf 0 inf]),
colormap([0 0 0]);
```



```
%% 曲面图可视化
[T, Z] = meshgrid(t, z);
figure
surf(T, Z, abs(U))
xlabel('时间 T/T_0'),
ylabel('传输距离 z/L_D'),
zlabel('强度'),
view(-20,70)
axis([-10 10 0 inf 0 inf]),
shading interp
colormap(gca, 'jet');
```

