INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso do Sul

Métodos Numéricos Computacionais

Prof. Márcio Peres

marcio.peres@ifms.edu.br

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

- Métodos exatos:
  - Método de eliminação de Gauss;
  - Método de decomposição LU;
  - Método de Cholesky;
- obtém a solução final após um número *k* de passos.
- Em alguns casos/aspectos, métodos iterativos têm algumas vantagens.
  - são melhores em matrizes esparsas;
  - apresentam auto-correção de erros (podem ser usados para melhorar a solução obtida por métodos exatos).

Fonte: Neide Maria Bertoldi Franco
Cálculo Numérico – ICMC/USP

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

- Um **método é iterativo** quando fornece uma sequência de aproximantes da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela **repetição** do mesmo tipo de processo.
- Um método iterativo é **estacionário** se cada aproximante é **obtido do anterior** sempre pelo mesmo processo.
- Métodos: <u>Jacobi-Richardson</u> e <u>Gauss-Seidel</u>
- Matriz estritamente diagonalmente dominante (*diagonally-dominant matrix)*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|, \ \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonte: Neide Maria Bertoldi Franco
Cálculo Numérico – ICMC/USP

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

- Matriz estritamente diagonalmente dominante (*diagonally-dominant matrix)*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} |a_{ij}|, \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

```
for (i=1;i<=n;i++) //para cada linha
{
      Sum=0;
      for (j=1;j<=n;j++) //para cada coluna
            if (i!=j)//considera apenas elementos fora da diagonal
                  Sum += fabs(a[i][j]);
      if (fabs(a[i][i])<=Sum)
      {
            cout <<"Unsuccessful, the matrix is not
                  diagonally-dominant" << endl;
            return; //aborta a repetição. Semelhante ao comando break
      }
}
```

Fonte: Computing for Numerical Methods Using Visual C++
Shaharuddin Salleh – 2007

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

- Considere o sistema linear $Ax = b$ de ordem n, determinado, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- A *r-ésima* equação do sistema de equações lineares $n \times n$ é:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j = b_r, \text{ or}$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r.$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Jacobi-Richardson

- A *r-ésima* equação do sistema de equações lineares $n \times n$ é :

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r .$$

- Para essa equação, a variável x_r é escrita em função das demais:

$$x_r = \frac{b_r - \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj}x_j}{a_{rr}}$$

$$= \frac{b_r - a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \cdots - a_{r,r-1}x_{r-1} - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{r,n-1}x_{n-1} - a_{rn}x_n}{a_{rr}} .$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Jacobi-Richardson

- Na iteração k, a atualização de x_r é baseada nos valores correntes das variáveis

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} = [x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \dots \quad x_n^{(k)}]^T$$

para produzir os novos valores na próxima iteração $k + 1$:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)} \quad x_2^{(k+1)} \quad \dots \quad x_n^{(k+1)}]^T$$

É calculada como segue:

$$\boxed{x_r^{(k+1)} = \frac{b_r - a_{r1}x_1^{(k)} - a_{r2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{r,r-1}x_{r-1}^{(k)} - a_{r,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \cdots - a_{rn}x_n^{(k)}}{a_{rr}}.}$$

Obs.: Os valores iniciais normais para essas variáveis são **0 ou próximos de 0**.

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Jacobi-Richardson

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1r}x_r^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{22}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2r}x_r^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}},$$

$$\cdots$$

$$x_r^{(k+1)} = \frac{b_r - a_{r1}x_1^{(k)} - a_{r2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{r,r-1}x_{r-1}^{(k)} - a_{r,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \cdots - a_{rn}x_n^{(k)}}{a_{rr}},$$

$$\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nr}x_r^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}.$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Todos o b_i e a_{ij} podem ser divididos pelo elemento da diagonal principal a_{ii}

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1r}x_r^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{22}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2r}x_r^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}},$$

$$\cdots$$

$$x_r^{(k+1)} = \frac{b_r - a_{r1}x_1^{(k)} - a_{r2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{r,r-1}x_{r-1}^{(k)} - a_{r,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \cdots - a_{rn}x_n^{(k)}}{a_{rr}},$$

$$\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nr}x_r^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}.$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

- Critério de parada
- Máximo da diferença da norma de magnitude do vetor $\boldsymbol{x}$

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty = \max\left(\left|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}\right|, \left|x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\right|, \ldots, \left|x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}\right|\right).$$

- Para alcançar a precisão ϵ, calcula o <u>erro relativo</u>.

  - $\dfrac{||\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}||_\infty}{||\boldsymbol{x}^{(k+1)}||_\infty} < \epsilon$

  - *em que,* ϵ é uma precisão pré-fixada; $\epsilon = 10^{-m}$, *m* é o n° de casas decimais corretas no resultado.
  - Ex. $\epsilon = 10^{-4} = 0{,}0001$.

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

- Obs.: A matriz abaixo não é estritamente diagonalmente dominante, mas pode ser se for trocado as linhas 2 e 3.

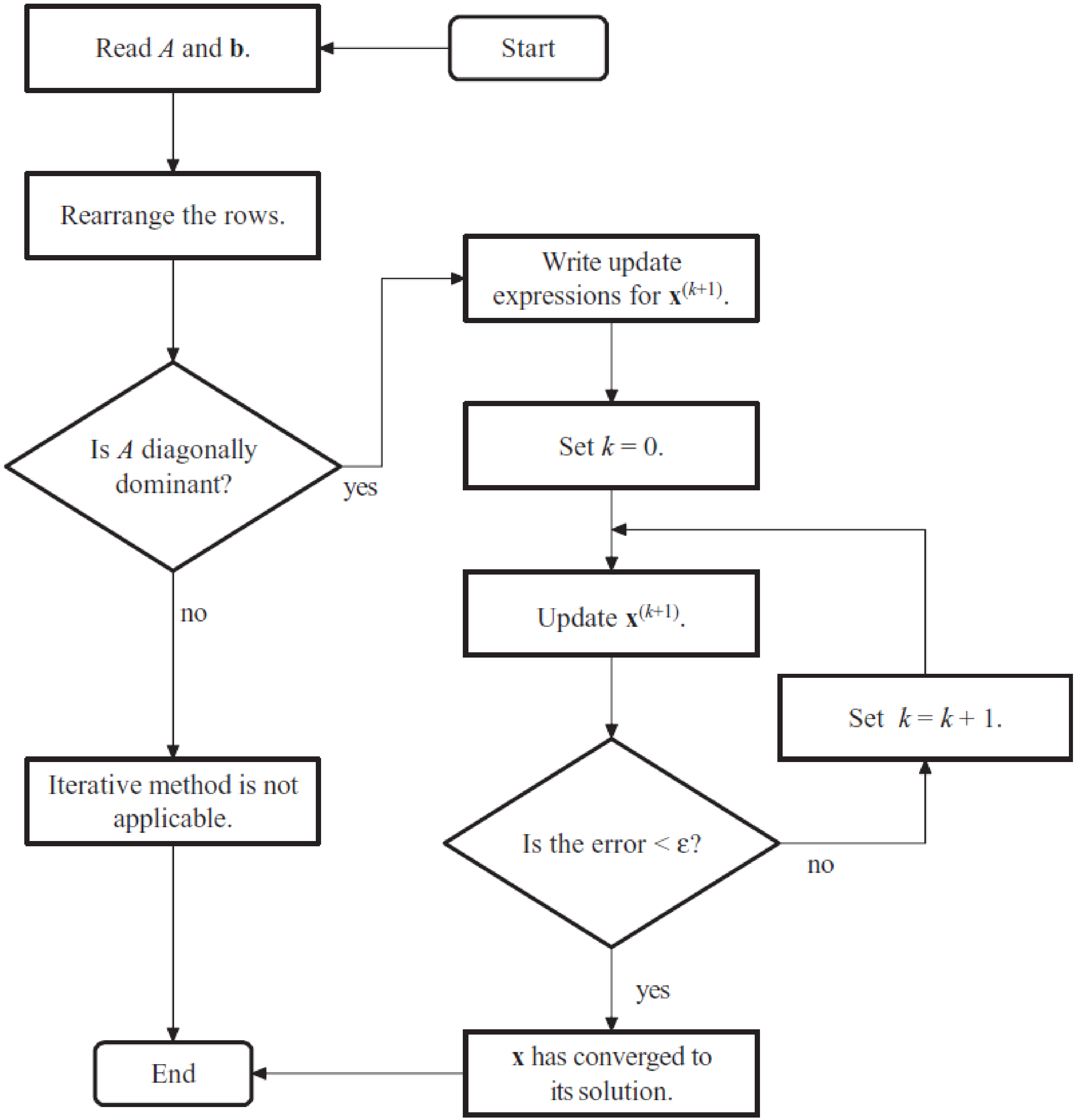
$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Exemplo 5.2 - *Resolver o sistema:*

$$\begin{cases} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{cases} .$$

pelo método de Jacobi-Richardson com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^t$ *e* $\epsilon < 10^{-2}$.


Start
Read A and $\mathbf{b}$.
Rearrange the rows.
Is A diagonally dominant?
yes
no
Write update expressions for $\mathbf{x}^{(k+1)}$.
Set $k = 0$.
Update $\mathbf{x}^{(k+1)}$.
Is the error < ε?
no
Set $k = k + 1$.
yes
$\mathbf{x}$ has converged to its solution.
Iterative method is not applicable.
End

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Example 5.12. Solve the following system using the Jacobi method with the initial value of $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ until $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty \leq \varepsilon$, where $\varepsilon = 0.005$:

$$\begin{aligned}
x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\
-2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2, \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 &= 2, \\
6x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1.
\end{aligned}$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Example 5.12. Solve the following system using the Jacobi method with the initial value of $\boldsymbol{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ until $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty \leq \varepsilon$, where $\varepsilon = 0.005$:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\
-2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2, \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 &= 2, \\
6x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1, \\
x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\
-2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2, \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

ica

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

TABLE 5.2. Results from Jacobi iterations in Example 5.12

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty$
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.600
1	−0.167	−0.600	0.400	−0.250	0.150
2	−0.317	−0.503	0.297	−0.133	0.112
3	−0.305	−0.577	0.399	−0.245	0.045
4	−0.314	−0.532	0.357	−0.208	0.021
5	−0.305	−0.550	0.378	−0.229	0.011
6	−0.308	−0.540	0.366	−0.218	0.005
7	−0.306	−0.545	0.372	−0.223	

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Gauss-Seidel

- Método de Gauss-Seidel é similar ao anterior. A *r-ésima* equação do sistema de equações lineares $n \times n$ é:

$$x_r = \frac{b_r - \sum_{j=1, j \neq r}^{n} a_{rj} x_j}{a_{rr}}.$$

$$x_r^{(k+1)} = \frac{b_r - a_{r1}x_1^{(k+1)} - a_{r2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{r,r-1}x_{r-1}^{(k+1)} - a_{r,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \cdots - a_{rn}x_n^{(k)}}{a_{rr}}.$$

- A diferença é que utiliza-se os valores mais atualizados de $\boldsymbol{x}$.

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1r}x_r^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{22}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2r}x_r^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}},$$

$$\cdots$$

$$x_r^{(k+1)} = \frac{b_r - a_{r1}x_1^{(k+1)} - a_{r2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{r,r-1}x_{r-1}^{(k+1)} - a_{r,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \cdots - a_{rn}x_n^{(k)}}{a_{rr}},$$

$$\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{nr}x_r^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}}.$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Gauss-Seidel

- Resolver o sistema por Gauss-Seidel com valores iniciais e erro relativo iguais aos utilizados na resolução com o método anterior.

$$
\begin{aligned}
6x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1, \\
x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\
-2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2, \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos - Gauss-Seidel

- Compare as tabelas dos resultados

TABLE 5.3. Results from Example 5.12

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty$
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.633
1	−0.167	−0.633	0.340	−0.133	0.175
2	−0.341	−0.574	0.395	−0.228	0.035
3	−0.318	−0.539	0.374	−0.228	0.013
4	−0.305	−0.541	0.368	−0.221	0.002
5	−0.306	−0.543	0.369	−0.221	