Probabilidade e Estatística

Series de Problemas 3

30 de Abril de 2025

1. **Um pequeno ferryboat transporta veículos de tipos A e B. Considere que X e Y representam o número de veículos de tipos A e B transportados por viagem (respectivamente). Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta:**

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{15}$
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{40}$

Determine o valor da função de distribuição marginal de Y no ponto 0.74.

Resolução:

Para determinar o valor da função de distribuição marginal de Y no ponto 0.74, calcule-se a probabilidade acumulada $P(Y \leq 0.74)$. Observe-se que, como Y é uma variável aleatória discreta que assume apenas os valores 0, 1 e 2, tem-se:

$$F_Y(0,74) = P(Y \leq 0,74) = P(Y = 0).$$

A probabilidade marginal $P(Y = 0)$ é obtida somando as probabilidades conjuntas para $Y = 0$ em todos os valores de X:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) \\ &= \frac{3}{40} + \frac{2}{15} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Resposta: O valor da função de distribuição marginal de Y no ponto $0,74$ é $\frac{1}{3}$.

2. **Considere o par aleatório (X, Y) com a seguinte função de probabilidade conjunta:**

$X \setminus Y$	0	4
-2	$\frac{1}{8}$	0
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	0	$\frac{1}{8}$

Calcule $E\left(Y^2 | X \leq 0.8\right)$. Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

Resolução:

Note-se que a condição $X \leq 0.8$ inclui os valores $X = -2$ e $X = 0$.

Primeiramente, calcule-se a probabilidade total do evento condicionante:

$$\begin{aligned} P(X \leq 0.8) &= P(X = -2) + P(X = 0) \\ &= \left(\frac{1}{8} + 0\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Em seguida, calcule-se $E(Y^2 \cdot I_{\{X \leq 0.8\}})$, onde $I_{\{X \leq 0.8\}}$ é a função indicadora:

$$\begin{aligned}
E(Y^2 \cdot I_{\{X\leq 0.8\}}) &= \sum_{x\leq 0.8} \sum_y y^2 \cdot P(X=x, Y=y) \\
&= \left(\sum_y y^2 \cdot P(X=-2, Y=y)\right) \\
&\quad + \left(\sum_y y^2 \cdot P(X=0, Y=y)\right) \\
&= \left(0^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot 0\right) \\
&\quad + \left(0^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot \frac{1}{8}\right) \\
&= (0+0) + \left(0 + 16 \cdot \frac{1}{8}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Finalmente, a esperança condicional é dada por:

$$\begin{aligned}
E(Y^2 \mid X \leq 0.8) &= \frac{E(Y^2 \cdot I_{\{X\leq 0.8\}})}{P(X \leq 0.8)} \\
&= \frac{2}{\frac{3}{8}} \\
&= \frac{16}{3} \approx 5.3333
\end{aligned}$$

Resposta: O valor de $E\left(Y^2|X \leq 0.8\right)$ é 5.3333.

3. **Seja X (respetivamente, Y) a variável aleatória que descreve o índice de capacidade de carga do pneu dianteiro (respetivamente traseiro) de um carro novo. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta dada por:**

$X \setminus Y$	52	54	55
56	$\frac{87}{1000}$	$\frac{239}{1500}$	$\frac{87}{1000}$
58	$\frac{87}{1000}$	$\frac{87}{1000}$	$\frac{239}{1500}$
60	$\frac{239}{1500}$	$\frac{87}{1000}$	$\frac{87}{1000}$

Calcule o valor esperado de $X + Y$ condicional a $Y = 55$. Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

Resolução:

Para calcular $E(X + Y \mid Y = 55)$, utilize-se a propriedade da esperança condicional:

$$E(X + Y \mid Y = 55) = E(X \mid Y = 55) + E(Y \mid Y = 55)$$

Observe-se que $Y = 55$ é uma condição determinística, logo $E(Y \mid Y = 55) = 55$.

Resta calcular $E(X \mid Y = 55)$. Primeiramente, determine-se a probabilidade marginal $P(Y = 55)$:

$$\begin{aligned} P(Y = 55) &= \frac{87}{1000} + \frac{239}{1500} + \frac{87}{1000} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

As probabilidades condicionais $P(X = x \mid Y = 55)$ são:

$$P(X = 56 \mid Y = 55) = \frac{P(X = 56, Y = 55)}{P(Y = 55)} = \frac{\frac{87}{1000}}{\frac{1}{3}} = \frac{261}{1000}$$
$$P(X = 58 \mid Y = 55) = \frac{P(X = 58, Y = 55)}{P(Y = 55)} = \frac{\frac{239}{1500}}{\frac{1}{3}} = \frac{717}{1500}$$
$$P(X = 60 \mid Y = 55) = \frac{P(X = 60, Y = 55)}{P(Y = 55)} = \frac{\frac{87}{1000}}{\frac{1}{3}} = \frac{261}{1000}$$

Calcule-se $E(X \mid Y = 55)$:

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 55) &= 56 \cdot P(X = 56 \mid Y = 55) \\ &\quad + 58 \cdot P(X = 58 \mid Y = 55) \\ &\quad + 60 \cdot P(X = 60 \mid Y = 55) \\ &= 56 \cdot 0.261 + 58 \cdot 0.478 + 60 \cdot 0.261 \\ &= 14.616 + 27.724 + 15.660 \\ &= 58.000 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} E(X + Y \mid Y = 55) &= E(X \mid Y = 55) + E(Y \mid Y = 55) \\ &= 58.000 + 55.000 \\ &= 113.0000 \end{aligned}$$

Resposta: O valor esperado de $X + Y$ condicional a $Y = 55$ é 113.0000.

4. **Admita que uma lente escolhida ao acaso da produção de um pequeno laboratório de óptica e optometria possui deformação com probabilidade $p = 0.05$, independentemente das restantes lentes.**

   Qual a probabilidade de serem detetadas exatamente 2 lentes com deformação ao serem examinadas as lentes produzidas de modo independente e provenientes de três turnos horários responsáveis pela produção de 4, 6 e 2 lentes?

Resolução:

Observe-se que o número total de lentes produzidas é $4+6+2 = 12$.

Defina-se a variável aleatória X como o número de lentes defeituosas entre as 12 examinadas. Como a probabilidade de uma lente ter defeito é $p = 0.05$ e as lentes são independentes, X segue uma distribuição binomial:

$$X \sim \text{Bin}(n = 12, p = 0.05)$$

A probabilidade de exatamente 2 lentes defeituosas é dada por:

$$P(X=2) = \binom{12}{2} \cdot (0.05)^2 \cdot (0.95)^{10}$$

Resposta: A probabilidade de serem detetadas exatamente 2 lentes com deformação é 0.0987.

5. **Admita que os tempos (em horas) de reparação de reguladores de tensão elétrica de automóveis são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas à variável aleatória X com valor esperado $E(X) = \frac{2}{a}$ e segundo momento $E(X^2) = \frac{24}{a^2}$, onde $a = 1.1$.**

   Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o tempo total de reparação de 64 desses reguladores pertencer ao intervalo $[98, 9; 110, 5]$.

   Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

Resolução:

Primeiro, calcule-se a média e variância de X. Dado $a = 1.1$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2}{a} = \frac{2}{1.1} \\ &\approx 1.8182 \end{aligned}$$

Para a variância, utilize-se a relação:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{24}{a^2} - \left(\frac{2}{a}\right)^2 \\ &= \frac{24}{a^2} - \frac{4}{a^2} \\ &= \frac{20}{a^2} \\ &= \frac{20}{(1.1)^2} \\ &\approx 16.5289 \end{aligned}$$

Para 64 reguladores, o tempo total T tem média e variância:

$$\begin{aligned}\mu_T &= 64 \cdot E(X) = 64 \cdot 1.8182 \\ &\approx 116.3648 \\ \sigma_T^2 &= 64 \cdot \mathrm{Var}(X) = 64 \cdot 16.5289 \\ &\approx 1057.8496\end{aligned}$$

O desvio padrão é:

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \sqrt{1057.8496} \\ &\approx 32.5246\end{aligned}$$

Pelo Teorema Central do Limite, para um grande número de observações (64 é suficientemente grande), a soma das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas aproxima-se de uma distribuição normal. Assim, T segue aproximadamente uma distribuição $\mathcal{N}(116.3648, 32.5246^2)$.

Para calcular $P(98,9 \leq T \leq 110,5)$, padronize-se a variável:

$$\begin{aligned}Z_{\text{inf}} &= \frac{98.9 - 116.3648}{32.5246} \\ &\approx -0.537 \\ Z_{\text{sup}} &= \frac{110.5 - 116.3648}{32.5246} \\ &\approx -0.180\end{aligned}$$

Utilizando a função `NormalCD` da calculadora Casio fx-CG50:

$$\begin{aligned}P(Z \leq -0,180) \approx 0,4284 \\ P(Z \leq -0,537) \approx 0,2955\end{aligned}$$

Assim, a probabilidade aproximada é:

$$\begin{aligned}P(98,9 \leq T \leq 110,5) &= P(-0,537 \leq Z \leq -0,180) \\ &= 0,4284 - 0,2955 \\ &= 0,1329\end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade aproximada de o tempo total de reparação pertencer ao intervalo $[98,9; 110,5]$ é 0,1329.