

# FORMULÁRIO PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

## Navegação rápida por fórmulas

Índice geral: Página 2

Índice de fórmulas: Página 3

Clique-se diretamente na fórmula desejada para navegar até lá

**Autor:** Vicente Duarte

**Data:** 6 de julho de 2025

# Índice Geral

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos básicos de probabilidade</b>	<b>3</b>
1.1	Experiência aleatória. Espaço de resultados e acontecimentos . . . . .	3
1.2	Noção de probabilidade. Probabilidade condicionada e lei da probabilidade total . . . . .	3
1.3	Teorema de Bayes . . . . .	3
1.4	Acontecimentos independentes . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Variáveis aleatórias discretas e contínuas</b>	<b>5</b>
2.1	Definição de variável aleatória. Função de distribuição. Função de massa de probabilidade e função de densidade de probabilidade . . . . .	5
2.2	Valor esperado, moda, variância e quantis . . . . .	5
2.3	Distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelação de dados . . .	6
<b>3</b>	<b>Pares aleatórios</b>	<b>7</b>
3.1	Distribuição conjunta, marginais e condicionais . . . . .	7
3.2	Independência . . . . .	7
3.3	Covariância e correlação . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Combinações lineares e teorema do limite central</b>	<b>9</b>
4.1	Combinações lineares de variáveis aleatórias . . . . .	9
4.2	Distribuição assintótica da soma e da média . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Estimação pontual</b>	<b>10</b>
5.1	Estatísticas e estimadores . . . . .	10
5.2	Método da máxima verosimilhança . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Estimação intervalar</b>	<b>11</b>
6.1	Intervalos de confiança para o valor esperado, variância conhecida . . . . .	11
6.2	Intervalos de confiança para o valor esperado, variância desconhecida . . .	11
6.3	Intervalo de confiança para a variância . . . . .	11
6.4	Intervalo de confiança para probabilidade de sucesso . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Testes de hipóteses</b>	<b>12</b>
7.1	Testes para o valor esperado, variância conhecida . . . . .	12
7.2	Testes para o valor esperado, variância desconhecida . . . . .	12
7.3	Testes para a variância . . . . .	12
7.4	Testes para probabilidade de sucesso . . . . .	13
7.5	Teste de ajustamento do qui-quadrado . . . . .	13
<b>8</b>	<b>Introdução à regressão linear simples</b>	<b>14</b>
8.1	Modelo de regressão linear simples . . . . .	14
8.2	Intervalos de confiança e testes para os parâmetros . . . . .	14
8.3	Coeficiente de determinação . . . . .	15

# Índice de Fórmulas

Clique na fórmula desejada para navegar diretamente:

## PROBABILIDADE BÁSICA

- [Fórmula 1](#): Acontecimentos mutuamente exclusivos
- [Fórmula 2](#): União de três acontecimentos
- [Fórmula 3](#): Inclusão-exclusão para  $n$  acontecimentos
- [Fórmula 4](#): Teorema de Bayes
- [Fórmula 5](#): Independência de acontecimentos

## VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

- [Fórmula 6](#): Valor esperado (discretas)
- [Fórmula 7](#): Valor esperado (contínuas)
- [Fórmula 8](#): Variância
- [Fórmula 9](#): Propriedade da esperança
- [Fórmula 10](#): Propriedade da variância
- [Fórmula 11](#): Quantis
- [Fórmula 12](#): Falta de memória (geométrica)
- [Fórmula 13](#): Falta de memória (exponencial)
- [Fórmula 14](#): Soma de binomiais
- [Fórmula 15](#): Soma de Poisson
- [Fórmula 16](#): Combinação linear de normais

## PAIRES ALEATÓRIOS

- [Fórmula 17](#): Função de distribuição acumulada
- [Fórmula 18](#): Independência (discreto)
- [Fórmula 19](#): Independência (contínuo)
- [Fórmula 20](#): Covariância
- [Fórmula 21](#): Correlação

## TEOREMA LIMITE CENTRAL

- [Fórmula 22](#): TLC (soma)
- [Fórmula 22a](#): TLC (média)

## ESTIMAÇÃO

- [Fórmula 23](#): Máxima verosimilhança
- [Fórmula 24](#): IC média (variância conhecida)
- [Fórmula 25](#): IC média (t-Student)
- [Fórmula 26](#): IC média (amostra grande)
- [Fórmula 27](#): IC variância
- [Fórmula 28](#): IC proporção

## TESTES DE HIPÓTESES

- [Fórmula 29](#): Teste média (variância conhecida)
- [Fórmula 30](#): Teste média (variância desconhecida)
- [Fórmula 31](#): Teste variância
- [Fórmula 32](#): Teste proporção
- [Fórmula 33](#): Teste qui-quadrado

## REGRESSÃO LINEAR

- [Fórmula 34](#): Estimador inclinação
- [Fórmula 35](#): Estimador ordenada origem
- [Fórmula 36](#): Inferência sobre  $\beta_0$
- [Fórmula 37](#): Inferência sobre  $\beta_1$
- [Fórmula 38](#): Inferência sobre  $\beta_0 + \beta_1 x_0$
- [Fórmula 39](#): Teste valor esperado resposta
- [Fórmula 40](#): Coeficiente determinação  $R^2$

# 1 Conceitos básicos de probabilidade

## 1.1 Experiência aleatória. Espaço de resultados e acontecimentos

## 1.2 Noção de probabilidade. Probabilidade condicionada e lei da probabilidade total

### Acontecimentos mutuamente exclusivos

Dois acontecimentos são mutuamente exclusivos se não podem ocorrer simultaneamente:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \quad (\text{Fórmula 1})$$

### Probabilidade da união de três acontecimentos

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (\text{Fórmula 2})$$

### Fórmula da inclusão-exclusão para n acontecimentos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \quad (\text{Fórmula 3})$$

## 1.3 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes permite calcular a probabilidade *a posteriori* de um acontecimento  $A_i$  dado que ocorreu um acontecimento  $B$ .

### Teorema de Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j)P(A_j)} \quad (\text{Fórmula 4})$$

Onde:

- $A_1, \dots, A_n$  formam uma partição do espaço amostral
- $B$  é um acontecimento tal que  $P(B) > 0$
- $P(A_i)$  é a probabilidade *a priori* de  $A_i$
- $P(B | A_i)$  é a verosimilhança de  $B$  dado  $A_i$
- $P(A_i | B)$  é a probabilidade *a posteriori* de  $A_i$  dado  $B$

## 1.4 Acontecimentos independentes

### Independência de acontecimentos

Dois acontecimentos  $A$  e  $B$  são independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{Fórmula 5})$$

## 2 Variáveis aleatórias discretas e contínuas

### 2.1 Definição de variável aleatória. Função de distribuição. Função de massa de probabilidade e função de densidade de probabilidade

### 2.2 Valor esperado, moda, variância e quantis

#### Valor esperado para variáveis discretas

$$E(X) = \sum_x x P(X = x) \quad (\text{Fórmula 6})$$

#### Valor esperado para variáveis contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{Fórmula 7})$$

#### Variância

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (\text{Fórmula 8})$$

#### Propriedades da esperança e variância

##### Esperança:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad (\text{Fórmula 9})$$

##### Variância:

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y) \quad (\text{Fórmula 10})$$

#### Quantis

**Mediana:** valor  $m$  tal que  $P(X \leq m) \geq 0.5$  e  $P(X \geq m) \geq 0.5$

**Quantil de ordem  $q$  ( $0 < q < 1$ ):**

$$x_q = F_X^{-1}(q) \quad \text{onde } F_X(x_q) = q \quad (\text{Fórmula 11})$$

## 2.3 Distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelação de dados

### Propriedade de falta de memória - Distribuição geométrica

Para uma sequência de ensaios de Bernoulli:

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n) \quad (\text{Fórmula 12})$$

*Interpretação:* A probabilidade de esperar mais  $n$  tentativas, dado que já se esperou  $m$ , é independente do número de tentativas já realizadas.

### Propriedade de falta de memória - Distribuição exponencial

Se  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$  representa o tempo até à ocorrência de um evento:

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t) \quad (\text{Fórmula 13})$$

*Nota:* A distribuição exponencial é a única distribuição contínua com propriedade de falta de memória.

### Soma de variáveis binomiais independentes

Se  $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$  são independentes, então:

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right) \quad (\text{Fórmula 14})$$

*Condição:* Todas as variáveis devem ter o mesmo parâmetro  $p$ .

### Soma de variáveis de Poisson independentes

Se  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$  são independentes, então:

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \quad (\text{Fórmula 15})$$

### Combinação linear de variáveis normais independentes

Se  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  são independentes e  $a_i$  são constantes reais:

$$X = \sum_{i=1}^k a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2\right) \quad (\text{Fórmula 16})$$

### 3 Pares aleatórios

#### 3.1 Distribuição conjunta, marginais e condicionais

##### Função de distribuição acumulada (FDA)

Para uma variável aleatória contínua  $X$ :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (\text{Fórmula 17})$$

#### 3.2 Independência

##### Independência - Caso discreto

$X$  e  $Y$  são independentes se, para todos os valores possíveis  $x$  e  $y$ :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad (\text{Fórmula 18})$$

##### Independência - Caso contínuo

$X$  e  $Y$  são independentes se, para todos os valores  $x$  e  $y$ :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (\text{Fórmula 19})$$

#### 3.3 Covariância e correlação

##### Covariância

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (\text{Fórmula 20})$$

##### Correlação

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \quad (\text{Fórmula 21})$$

##### Interpretação da correlação:

- $\text{Corr}(X, Y) = 0$ : Ausência de correlação linear (não implica independência)
- $\text{Corr}(X, Y) > 0$ : Associação linear positiva
- $\text{Corr}(X, Y) < 0$ : Associação linear negativa
- $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ : Correlação linear perfeita
- $|\text{Corr}(X, Y)| \approx 0.24$ : Correlação linear fraca



### Exemplos de interpretação:

- **Se  $\text{Corr}(X, Y) \neq 0$ :** Uma vez que  $\text{Corr}(X, Y) \neq 0$ , concluímos que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias dependentes. [É sabido que: caso  $X$  e  $Y$  sejam v.a. independentes, então  $\text{Corr}(X, Y) = 0$ .]
- **Se  $\text{Corr}(X, Y) < 0$ :** Dado que  $\text{Corr}(X, Y) < 0$ , podemos adiantar que  $X$  e  $Y$  tenderão a variar em sentidos opostos relativamente aos respetivos valores esperados.
- **Se  $|\text{Corr}(X, Y)| \approx 0.24$ :** Como  $|\text{Corr}(X, Y)| \approx 0.24$  dista bastante de 1, podemos afirmar que as v.a. estão fracamente correlacionadas. [Importa notar que o coeficiente de correlação quantifica a associação linear entre as v.a.  $X$  e  $Y$ , logo não captura uma eventual relação não linear entre estas duas v.a.]

## 4 Combinações lineares e teorema do limite central

### 4.1 Combinações lineares de variáveis aleatórias

### 4.2 Distribuição assintótica da soma e da média

#### Teorema do Limite Central (TLC)

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra i.i.d. com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Para  $n$  suficientemente grande ( $n \geq 30$ ):

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{onde } S_n = X_1 + \dots + X_n \quad (\text{Fórmula 22})$$

Equivalentemente, para a média amostral:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{onde } \bar{X} = \frac{S_n}{n} \quad (\text{Fórmula 22a})$$

Quando usar o TLC:

- **Distribuição original desconhecida ou não-normal:** O TLC permite usar a aproximação normal para a soma ou média amostral, desde que  $n \geq 30$ .
- **Distribuição original normal:** A soma ou média amostral tem distribuição exatamente normal para qualquer  $n$  (não é necessário recorrer ao TLC).
- **Aplicação prática:** Permite calcular probabilidades e construir intervalos de confiança quando a distribuição populacional é desconhecida.

Notas importantes:

- Válido independentemente da distribuição original das  $X_i$
- A convergência é mais rápida se a distribuição original for simétrica
- Para  $n < 30$ , só se pode usar se a população for aproximadamente normal

## 5 Estimação pontual

### 5.1 Estatísticas e estimadores

### 5.2 Método da máxima verosimilhança

#### Função de máxima verosimilhança

Para uma amostra  $X_1, \dots, X_n$  com função de densidade  $f_X(x)$  dependente do parâmetro  $\mu$ :

**Função de verosimilhança:**

$$L(\mu \mid \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \quad (\text{Fórmula 23})$$

**Função log-verosimilhança:**

$$\ell(\mu \mid \underline{x}) = \ln L(\mu \mid \underline{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f_X(x_i)$$

**Estimador de máxima verosimilhança:**

$$\hat{\mu} : \begin{cases} \left. \frac{\partial \ln L(\mu \mid \underline{x})}{\partial \mu} \right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0 & (\text{ponto estacionário}) \\ \left. \frac{\partial^2 \ln L(\mu \mid \underline{x})}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=\hat{\mu}} < 0 & (\text{ponto de máximo}) \end{cases}$$

## 6 Estimação intervalar

### 6.1 Intervalos de confiança para o valor esperado, variância conhecida

#### IC para média - Variância conhecida

Para população normal ou amostra grande (TLC):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 24})$$

### 6.2 Intervalos de confiança para o valor esperado, variância desconhecida

#### IC para média - Variância desconhecida (amostra pequena, população normal)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 25})$$

#### IC para média - Variância desconhecida (amostra grande)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 26})$$

### 6.3 Intervalo de confiança para a variância

#### IC para variância - População normal, média desconhecida

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2 \quad (\text{Fórmula 27})$$

### 6.4 Intervalo de confiança para probabilidade de sucesso

#### IC para proporção - População de Bernoulli

Para  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  com amostra grande:

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \sim N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 28})$$

## 7 Testes de hipóteses

### 7.1 Testes para o valor esperado, variância conhecida

#### Teste para média - Variância conhecida

Para testar  $H_0 : \mu = \mu_0$ :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 29})$$

Rejeita-se  $H_0$  se  $|Z| > z_{1-\alpha/2}$  (teste bilateral).

#### Cálculo do valor-p

**Definição:** Probabilidade, sob  $H_0$ , de obter um valor da estatística tão extremo ou mais extremo que o observado.

- **Testes bilaterais:** valor-p =  $2 \cdot P(Z > |z_{obs}|)$
- **Testes unilaterais:** valor-p =  $P(Z > z_{obs})$  ou  $P(Z < z_{obs})$
- **Para estatísticas t:** Substituir  $Z$  por  $t$  e usar distribuição t
- **Decisão:** Compara-se com  $\alpha$  para decidir sobre  $H_0$

### 7.2 Testes para o valor esperado, variância desconhecida

#### Teste para média - Variância desconhecida

Para testar  $H_0 : \mu = \mu_0$  em população normal:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 30})$$

Rejeita-se  $H_0$  se  $|t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ . Para  $n$  grande, usar aproximação normal.

### 7.3 Testes para a variância

#### Teste para variância - População normal

Para testar hipóteses sobre  $\sigma^2$  com média desconhecida:

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 31})$$

## 7.4 Testes para probabilidade de sucesso

### Teste para proporção - População de Bernoulli

Para testar  $H_0 : p = p_0$  com amostra grande ( $n > 30$ ):

$$T = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{H_0}{\sim} N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 32})$$

## 7.5 Teste de ajustamento do qui-quadrado

### Teste de ajustamento de Pearson

Para hipótese nula simples:

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{(k-1)} \quad (\text{Fórmula 33})$$

Onde  $O_i$  são frequências observadas,  $E_i$  são frequências esperadas e  $k$  é o número de categorias.

## 8 Introdução à regressão linear simples

### 8.1 Modelo de regressão linear simples

#### Estimadores dos parâmetros de regressão

Inclinação:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i Y_i - n \bar{x} \bar{Y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (\text{Fórmula 34})$$

Ordenada na origem:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (\text{Fórmula 35})$$

### 8.2 Intervalos de confiança e testes para os parâmetros

#### Estatísticas para inferência sobre $\beta_0$

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 36})$$

#### Estatísticas para inferência sobre $\beta_1$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \sim t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 37})$$

#### Estatísticas para inferência sobre $\beta_0 + \beta_1 x_0$

$$\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 38})$$

#### Teste para valor esperado da resposta em $x_0$

Para testar  $H_0 : E(Y|x_0) = e_0$ :

$$T = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 - e_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim_{H_0} t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 39})$$

### 8.3 Coeficiente de determinação

#### Coeficiente de determinação $R^2$

Mede a proporção da variabilidade de  $Y$  explicada pelo modelo linear:

$$R^2 = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y})^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2)} \quad (\text{Fórmula 40})$$

#### Interpretação geral:

- $R^2 \approx 0$ : Modelo não explica a variabilidade de  $Y$
- $R^2 \approx 1$ : Modelo explica quase toda a variabilidade de  $Y$
- $0 < R^2 < 1$ : Proporção da variância explicada pelo modelo

#### Exemplo de interpretação:

- **Se  $R^2 = 0.34$ :** Cerca de 34% da variação total da variável resposta  $Y$  é explicada pela variável  $x$ , através do modelo de regressão linear simples ajustado. Podemos concluir que a reta estimada não se ajusta bem ao conjunto de dados.
- **Critério de ajuste:** Valores de  $R^2$  próximos de 0.7 ou superiores indicam um bom ajuste do modelo aos dados.

**Formulário completo com 40 fórmulas numeradas (retiradas de exames)**

*Use-se o índice de fórmulas (página 3) para navegação direta*