

FORMULÁRIO PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Navegação rápida por fórmulas

Índice geral: Página 2

Índice de fórmulas: Página 3

Clique-se diretamente na fórmula desejada para navegar até lá

Autor: Vicente Duarte

Data: 7 de julho de 2025

Índice Geral

Conteúdo

1	Conceitos básicos de probabilidade	3
1.1	Experiência aleatória. Espaço de resultados e acontecimentos	3
1.2	Noção de probabilidade. Probabilidade condicionada e lei da probabilidade total	3
1.3	Teorema de Bayes	3
1.4	Acontecimentos independentes	4
2	Variáveis aleatórias discretas e contínuas	5
2.1	Definição de variável aleatória. Função de distribuição. Função de massa de probabilidade e função de densidade de probabilidade	5
2.2	Valor esperado, moda, variância e quantis	5
2.3	Distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelação de dados . . .	6
3	Pares aleatórios	7
3.1	Distribuição conjunta, marginais e condicionais	7
3.2	Independência	7
3.3	Covariância e correlação	7
4	Combinações lineares e teorema do limite central	9
4.1	Combinações lineares de variáveis aleatórias	9
4.2	Distribuição assintótica da soma e da média	9
5	Estimação pontual	10
5.1	Estatísticas e estimadores	10
5.2	Método da máxima verosimilhança	10
6	Estimação intervalar	11
6.1	Intervalos de confiança para o valor esperado, variância conhecida	11
6.2	Intervalos de confiança para o valor esperado, variância desconhecida . . .	11
6.3	Intervalo de confiança para a variância	11
6.4	Intervalo de confiança para probabilidade de sucesso	11
7	Testes de hipóteses	12
7.1	Testes para o valor esperado, variância conhecida	12
7.2	Testes para o valor esperado, variância desconhecida	12
7.3	Testes para a variância	12
7.4	Testes para probabilidade de sucesso	13
7.5	Teste de ajustamento do qui-quadrado	13
8	Introdução à regressão linear simples	14
8.1	Modelo de regressão linear simples	14
8.2	Intervalos de confiança e testes para os parâmetros	14
8.3	Coeficiente de determinação	15

Índice de Fórmulas

Clique na fórmula desejada para navegar diretamente:

PROBABILIDADE BÁSICA

- [Fórmula 1](#): Acontecimentos mutuamente exclusivos
- [Fórmula 2](#): União de três acontecimentos
- [Fórmula 3](#): Inclusão-exclusão para n acontecimentos
- [Fórmula 4](#): Teorema de Bayes
- [Fórmula 5](#): Independência de acontecimentos

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

- [Fórmula 6](#): Valor esperado (discretas)
- [Fórmula 7](#): Valor esperado (contínuas)
- [Fórmula 8](#): Variância
- [Fórmula 8a](#): Variância amostral
- [Fórmula 9](#): Propriedade da esperança
- [Fórmula 10](#): Propriedade da variância
- [Fórmula 11](#): Quantis
- [Fórmula 12](#): Falta de memória (geométrica)
- [Fórmula 13](#): Falta de memória (exponencial)
- [Fórmula 14](#): Soma de binomiais
- [Fórmula 15](#): Soma de Poisson
- [Fórmula 16](#): Combinação linear de normais

PARES ALEATÓRIOS

- [Fórmula 17](#): Função de distribuição acumulada
- [Fórmula 18](#): Independência (discreto)
- [Fórmula 19](#): Independência (contínuo)
- [Fórmula 20](#): Covariância
- [Fórmula 21](#): Correlação

TEOREMA LIMITE CENTRAL

- [Fórmula 22](#): TLC (soma)
- [Fórmula 22a](#): TLC (média)

ESTIMAÇÃO

- [Fórmula 23](#): Máxima verosimilhança
- [Fórmula 24](#): IC média (variância conhecida)
- [Fórmula 25](#): IC média (t-Student)
- [Fórmula 26](#): IC média (amostra grande)
- [Fórmula 27](#): IC variância
- [Fórmula 28](#): IC proporção

TESTES DE HIPÓTESES

- [Fórmula 29](#): Teste média (variância conhecida)
- [Fórmula 30](#): Teste média (variância desconhecida)
- [Fórmula 31](#): Teste variância
- [Fórmula 32](#): Teste proporção
- [Fórmula 33](#): Teste qui-quadrado

REGRESSÃO LINEAR

- [Fórmula 34](#): Estimador inclinação
- [Fórmula 35](#): Estimador ordenada origem
- [Fórmula 36](#): Inferência sobre β_0
- [Fórmula 37](#): Inferência sobre β_1
- [Fórmula 38](#): Inferência sobre $\beta_0 + \beta_1 x_0$
- [Fórmula 39](#): Teste valor esperado resposta
- [Fórmula 40](#): Coeficiente determinação R^2
- [Fórmula 41](#): Estimador da variância dos resíduos

1 Conceitos básicos de probabilidade

1.1 Experiência aleatória. Espaço de resultados e acontecimentos

1.2 Noção de probabilidade. Probabilidade condicionada e lei da probabilidade total

Acontecimentos mutuamente exclusivos

Dois acontecimentos são mutuamente exclusivos se não podem ocorrer simultaneamente:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \quad (\text{Fórmula 1})$$

Probabilidade da união de três acontecimentos

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (\text{Fórmula 2})$$

Fórmula da inclusão-exclusão para n acontecimentos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \quad (\text{Fórmula 3})$$

1.3 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes permite calcular a probabilidade *a posteriori* de um acontecimento A_i dado que ocorreu um acontecimento B .

Teorema de Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j)P(A_j)} \quad (\text{Fórmula 4})$$

Onde:

- A_1, \dots, A_n formam uma partição do espaço amostral
- B é um acontecimento tal que $P(B) > 0$
- $P(A_i)$ é a probabilidade *a priori* de A_i
- $P(B | A_i)$ é a verosimilhança de B dado A_i
- $P(A_i | B)$ é a probabilidade *a posteriori* de A_i dado B

1.4 Acontecimentos independentes

Independência de acontecimentos

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{Fórmula 5})$$

2 Variáveis aleatórias discretas e contínuas

2.1 Definição de variável aleatória. Função de distribuição. Função de massa de probabilidade e função de densidade de probabilidade

2.2 Valor esperado, moda, variância e quantis

Valor esperado para variáveis discretas

$$E(X) = \sum_x x P(X = x) \quad (\text{Fórmula 6})$$

Valor esperado para variáveis contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{Fórmula 7})$$

Variância

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (\text{Fórmula 8})$$

Variância amostral

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1} \quad (\text{Fórmula 8a})$$

Propriedades da esperança e variância

Esperança:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad (\text{Fórmula 9})$$

Variância:

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y) \quad (\text{Fórmula 10})$$

Quantis

Mediana: valor m tal que $P(X \leq m) \geq 0.5$ e $P(X \geq m) \geq 0.5$

Quantil de ordem q ($0 < q < 1$):

$$x_q = F_X^{-1}(q) \quad \text{onde } F_X(x_q) = q \quad (\text{Fórmula 11})$$

2.3 Distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelação de dados

Propriedade de falta de memória - Distribuição geométrica

Para uma sequência de ensaios de Bernoulli:

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n) \quad (\text{Fórmula 12})$$

Interpretação: A probabilidade de esperar mais n tentativas, dado que já se esperou m , é independente do número de tentativas já realizadas.

Propriedade de falta de memória - Distribuição exponencial

Se $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ representa o tempo até à ocorrência de um evento:

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t) \quad (\text{Fórmula 13})$$

Nota: A distribuição exponencial é a única distribuição contínua com propriedade de falta de memória.

Soma de variáveis binomiais independentes

Se $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$ são independentes, então:

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right) \quad (\text{Fórmula 14})$$

Condição: Todas as variáveis devem ter o mesmo parâmetro p .

Soma de variáveis de Poisson independentes

Se $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ são independentes, então:

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \quad (\text{Fórmula 15})$$

Combinação linear de variáveis normais independentes

Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ são independentes e a_i são constantes reais:

$$X = \sum_{i=1}^k a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2\right) \quad (\text{Fórmula 16})$$

3 Pares aleatórios

3.1 Distribuição conjunta, marginais e condicionais

Função de distribuição acumulada (FDA)

Para uma variável aleatória contínua X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (\text{Fórmula 17})$$

3.2 Independência

Independência - Caso discreto

X e Y são independentes se, para todos os valores possíveis x e y :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad (\text{Fórmula 18})$$

Independência - Caso contínuo

X e Y são independentes se, para todos os valores x e y :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (\text{Fórmula 19})$$

3.3 Covariância e correlação

Covariância

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (\text{Fórmula 20})$$

Correlação

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \quad (\text{Fórmula 21})$$

Interpretação da correlação:

- $\text{Corr}(X, Y) = 0$: Ausência de correlação linear (não implica independência)
- $\text{Corr}(X, Y) > 0$: Associação linear positiva
- $\text{Corr}(X, Y) < 0$: Associação linear negativa
- $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$: Correlação linear perfeita
- $|\text{Corr}(X, Y)| \approx 0.24$: Correlação linear fraca

Exemplos de interpretação:

- **Se $\text{Corr}(X, Y) \neq 0$:** Uma vez que $\text{Corr}(X, Y) \neq 0$, concluímos que X e Y são variáveis aleatórias dependentes. [É sabido que: caso X e Y sejam v.a. independentes, então $\text{Corr}(X, Y) = 0$.]
- **Se $\text{Corr}(X, Y) < 0$:** Dado que $\text{Corr}(X, Y) < 0$, podemos adiantar que X e Y tenderão a variar em sentidos opostos relativamente aos respetivos valores esperados.
- **Se $|\text{Corr}(X, Y)| \approx 0.24$:** Como $|\text{Corr}(X, Y)| \approx 0.24$ dista bastante de 1, podemos afirmar que as v.a. estão fracamente correlacionadas. [Importa notar que o coeficiente de correlação quantifica a associação linear entre as v.a. X e Y , logo não captura uma eventual relação não linear entre estas duas v.a.]

4 Combinações lineares e teorema do limite central

4.1 Combinações lineares de variáveis aleatórias

4.2 Distribuição assintótica da soma e da média

Teorema do Limite Central (TLC)

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra i.i.d. com média μ e variância σ^2 . Para n suficientemente grande ($n \geq 30$):

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{onde } S_n = X_1 + \dots + X_n \quad (\text{Fórmula 22})$$

Equivalentemente, para a média amostral:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{onde } \bar{X} = \frac{S_n}{n} \quad (\text{Fórmula 22a})$$

Quando usar o TLC:

- **Distribuição original desconhecida ou não-normal:** O TLC permite usar a aproximação normal para a soma ou média amostral, desde que $n \geq 30$.
- **Distribuição original normal:** A soma ou média amostral tem distribuição exatamente normal para qualquer n (não é necessário recorrer ao TLC).
- **Aplicação prática:** Permite calcular probabilidades e construir intervalos de confiança quando a distribuição populacional é desconhecida.

Notas importantes:

- Válido independentemente da distribuição original das X_i
- A convergência é mais rápida se a distribuição original for simétrica
- Para $n < 30$, só se pode usar se a população for aproximadamente normal

5 Estimação pontual

5.1 Estatísticas e estimadores

5.2 Método da máxima verosimilhança

Função de máxima verosimilhança

Para uma amostra X_1, \dots, X_n com função de densidade $f_X(x)$ dependente do parâmetro μ :

Função de verosimilhança:

$$L(\mu \mid \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \quad (\text{Fórmula 23})$$

Função log-verosimilhança:

$$\ell(\mu \mid \underline{x}) = \ln L(\mu \mid \underline{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f_X(x_i)$$

Estimador de máxima verosimilhança:

$$\hat{\mu} : \begin{cases} \left. \frac{\partial \ln L(\mu \mid \underline{x})}{\partial \mu} \right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0 & (\text{ponto estacionário}) \\ \left. \frac{\partial^2 \ln L(\mu \mid \underline{x})}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=\hat{\mu}} < 0 & (\text{ponto de máximo}) \end{cases}$$

6 Estimação intervalar

6.1 Intervalos de confiança para o valor esperado, variância conhecida

IC para média - Variância conhecida

Para população normal ou amostra grande (TLC):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 24})$$

6.2 Intervalos de confiança para o valor esperado, variância desconhecida

IC para média - Variância desconhecida (amostra pequena, população normal)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 25})$$

IC para média - Variância desconhecida (amostra grande)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 26})$$

6.3 Intervalo de confiança para a variância

IC para variância - População normal, média desconhecida

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 27})$$

6.4 Intervalo de confiança para probabilidade de sucesso

IC para proporção - População de Bernoulli

Para $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ com amostra grande:

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \sim N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 28})$$

7 Testes de hipóteses

7.1 Testes para o valor esperado, variância conhecida

Teste para média - Variância conhecida

Para testar $H_0 : \mu = \mu_0$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 29})$$

Rejeita-se H_0 se $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ (teste bilateral).

Cálculo do valor-p

Definição: Probabilidade, sob H_0 , de obter um valor da estatística tão extremo ou mais extremo que o observado.

- **Testes bilaterais:** valor-p = $2 \cdot P(Z > |z_{obs}|)$
- **Testes unilaterais:** valor-p = $P(Z > z_{obs})$ ou $P(Z < z_{obs})$
- **Para estatísticas t:** Substituir Z por t e usar distribuição t
- **Decisão:** Compara-se com α para decidir sobre H_0

7.2 Testes para o valor esperado, variância desconhecida

Teste para média - Variância desconhecida

Para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ em população normal:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 30})$$

Rejeita-se H_0 se $|t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$. Para n grande, usar aproximação normal.

7.3 Testes para a variância

Teste para variância - População normal

Para testar hipóteses sobre σ^2 com média desconhecida:

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad (\text{Fórmula 31})$$

7.4 Testes para probabilidade de sucesso

Teste para proporção - População de Bernoulli

Para testar $H_0 : p = p_0$ com amostra grande ($n > 30$):

$$T = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{H_0}{\sim} N(0, 1) \quad (\text{Fórmula 32})$$

7.5 Teste de ajustamento do qui-quadrado

Teste de ajustamento de Pearson

Para hipótese nula simples:

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{(k-1)} \quad (\text{Fórmula 33})$$

Onde O_i são frequências observadas, E_i são frequências esperadas e k é o número de categorias.

8 Introdução à regressão linear simples

8.1 Modelo de regressão linear simples

Estimadores dos parâmetros de regressão

Inclinação:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i Y_i - n \bar{x} \bar{Y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (\text{Fórmula 34})$$

Ordenada na origem:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (\text{Fórmula 35})$$

8.2 Intervalos de confiança e testes para os parâmetros

Estatísticas para inferência sobre β_0

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 36})$$

Estatísticas para inferência sobre β_1

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \sim t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 37})$$

Estatísticas para inferência sobre $\beta_0 + \beta_1 x_0$

$$\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 38})$$

Teste para valor esperado da resposta em x_0

Para testar $H_0 : E(Y|x_0) = e_0$:

$$T = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 - e_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim_{H_0} t_{(n-2)} \quad (\text{Fórmula 39})$$

8.3 Coeficiente de determinação

Coeficiente de determinação R^2

Mede a proporção da variabilidade de Y explicada pelo modelo linear:

$$R^2 = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n \bar{x} \bar{Y})^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) (\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n \bar{Y}^2)} \quad (\text{Fórmula 40})$$

Interpretação geral:

- $R^2 \approx 0$: Modelo não explica a variabilidade de Y
- $R^2 \approx 1$: Modelo explica quase toda a variabilidade de Y
- $0 < R^2 < 1$: Proporção da variância explicada pelo modelo

Exemplo de interpretação:

- **Se $R^2 = 0.34$:** Cerca de 34% da variação total da variável resposta Y é explicada pela variável x , através do modelo de regressão linear simples ajustado. Podemos concluir que a reta estimada não se ajusta bem ao conjunto de dados.
- **Critério de ajuste:** Valores de R^2 próximos de 0.7 ou superiores indicam um bom ajuste do modelo aos dados.

Estimador da variância dos resíduos na regressão linear simples

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right) - \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \right] \quad (\text{Fórmula 41})$$

Formulário completo com 41 fórmulas numeradas (retiradas de exames)

Use-se o índice de fórmulas (página 3) para navegação direta