

# Probabilidade e Estatística

## Series de Problemas 1

10 de Março de 2025

1. Uma peça de certo tipo é classificada de acordo com a sua dimensão e porosidade. Num grande lote composto por peças deste tipo, verificaram-se as seguintes proporções: 44% têm dimensão inadequada e são porosas; 53% têm dimensão inadequada e não são porosas. Escolhida ao acaso uma peça do lote, calcule a probabilidade de ela ser porosa, sabendo que tem dimensão inadequada. Indique o resultado com pelo menos três casas decimais.

### Resolução:

Considere-se os eventos  $D$  e  $P$  como sendo, respectivamente, a peça ter dimensão inadequada e a peça ser porosa. Note-se que o enunciado fornece:

$$P(D \cap P) = 0.44$$

$$P(D \cap \bar{P}) = 0.53$$

Pretende-se calcular  $P(P|D)$ . Observe-se que pelo Teorema da Probabilidade Condicional:

$$\begin{aligned} P(P|D) &= \frac{P(P \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(P \cap D)}{P(P \cap D) + P(\bar{P} \cap D)} \\ &= \frac{0.44}{0.44 + 0.53} = 0.4536... \end{aligned}$$

**Resposta:** A probabilidade da peça ser porosa, sabendo que tem dimensão inadequada, é 0.454.

2. Sabe-se que a probabilidade de haver um dia de sol é 0.9. Sabe-se também que caso haja sol, a probabilidade de haver alunos na sala é de 0.22 e que caso não haja sol, a probabilidade de haver alunos na sala é 0.87 . Qual a probabilidade de haver alunos na sala?
- (a) 0.1914  
(b) 0.8766  
(c) 0.285  
(d) 0.87

**Resolução:**

Considere-se os eventos  $S$  e  $A$  como sendo, respectivamente, a ocorrência de sol e a presença de alunos na sala. O enunciado fornece:

$$\begin{aligned}P(S) &= 0.9 \\P(A|S) &= 0.22 \\P(A|\bar{S}) &= 0.87\end{aligned}$$

Para calcular a probabilidade de haver alunos na sala, aplique-se o Teorema da Probabilidade Total:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A|S)P(S) + P(A|\bar{S})P(\bar{S}) \\&= 0.22 \times 0.9 + 0.87 \times 0.1 = 0.285\end{aligned}$$

**Resposta:** A probabilidade de haver alunos na sala é 0.285, correspondendo à alternativa (c).

3. Num arranha-céus 50 % das portas de segurança funcionam por controlo remoto. Durante um processo de inspeção regular, verificou-se que a probabilidade de uma porta não abrir é igual a 0.125 se esta opera remotamente, e é igual a 0.35 caso não opere remotamente. Considere que uma das portas foi selecionada ao acaso para inspeção. Qual é a probabilidade de a porta selecionada operar por controlo remoto, sabendo

que ela abriu durante a inspeção? Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

**Resolução:**

Defina-se os eventos  $R$  e  $A$  como sendo, respectivamente, a porta operar por controlo remoto e a porta abrir durante a inspeção. O enunciado fornece:

$$\begin{aligned}P(R) &= 0.5 \\P(\bar{R}) &= 0.5 \\P(\bar{A}|R) &= 0.125 \\P(\bar{A}|\bar{R}) &= 0.35\end{aligned}$$

Pretende-se calcular  $P(R|A)$ . Aplicando o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}P(R|A) &= \frac{P(A|R)P(R)}{P(A)} \\&= \frac{P(A|R)P(R)}{P(A|R)P(R) + P(A|\bar{R})P(\bar{R})} \\&= \frac{(1 - P(\bar{A}|R))P(R)}{(1 - P(\bar{A}|R))P(R) + (1 - P(\bar{A}|\bar{R}))P(\bar{R})} \\&= \frac{(1 - 0.125) \times 0.5}{(1 - 0.125) \times 0.5 + (1 - 0.35) \times 0.5} = 0.57377...\end{aligned}$$

**Resposta:** A probabilidade da porta operar por controlo remoto, sabendo que abriu durante a inspeção, é 0.5738.

4. Numa dada experiência aleatória, sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos independentes, tais que  $P(A) = \frac{1}{6}$  e  $P(B) = \frac{1}{9}$ . Calcule  $P[A|(A \cup B)]$ . Preencha a caixa com o resultado com, pelo menos, duas casas decimais.

**Resolução:**

Observe-se que, como  $A$  e  $B$  são independentes, tem-se  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$ .

Para calcular  $P(A|(A \cup B))$ , utilize-se a definição de probabilidade condicional:

$$\begin{aligned}
 P(A|(A \cup B)) &= \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\
 &= \frac{P((A \cap A) \cup (A \cap B))}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\
 &= \frac{P(A \cap A) + P(A \cap B) - P(A \cap A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\
 &= \frac{P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\
 &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54}} = \frac{9}{14} = 0.642857...
 \end{aligned}$$

**Resposta:** A probabilidade  $P[A|(A \cup B)]$  é 0.64.

5. Considere os acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $C$  tais que:  $A$  e  $B$  são independentes condicionalmente a  $C$ ;  $P(A|C) = \frac{1}{80}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{9}{32}$  e  $P(B \cap C) = \frac{3}{4}$ . Obtenha  $P(C|(A \cap B))$ , indicando o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

**Resolução:**

Note-se que, como  $A$  e  $B$  são independentes condicionalmente a  $C$ , temos  $P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$ .

Aplique-se o Teorema de Bayes para calcular  $P(C|(A \cap B))$ :

$$\begin{aligned}
 P(C|(A \cap B)) &= \frac{P((A \cap B)|C)P(C)}{P(A \cap B)} \\
 &= \frac{P(A|C)P(B|C)P(C)}{P(A \cap B)}
 \end{aligned}$$

Observe-se que  $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$ , logo  $P(B|C)P(C) = P(B \cap C)$ .

Continuando:

$$\begin{aligned}P(C|(A \cap B)) &= \frac{P(A|C)P(B \cap C)}{P(A \cap B)} \\&= \frac{\frac{1}{80} \times \frac{3}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{1}{30} = 0.033333...\end{aligned}$$

**Resposta:** A probabilidade  $P(C|(A \cap B))$  é 0.0333.