Guia Teórico Completo de Probabilidade e Estatística

Vicente Duarte

Ano Letivo 2024/2025

Resumo

Este guia teórico apresenta uma visão abrangente dos conceitos de Probabilidade e Estatística abordados nas séries de problemas do curso. O documento está estruturado de forma progressiva, abordando desde conceitos básicos de probabilidade até distribuições de variáveis aleatórias, probabilidade condicional e técnicas de inferência estatística. É especialmente útil como material de apoio ao estudo e à resolução dos exercícios propostos.

Conteúdo

1 Conceitos Fundamentais de Probabilidade

1.1 Espaço Amostral e Eventos

O espaço amostral, geralmente representado por Ω, é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Um evento A é um subconjunto do espaço amostral, ou seja, $A \subseteq \Omega$.

Exemplo

Ao lançar um dado de seis faces, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O evento "sair um número par"corresponde ao conjunto $A = \{2, 4, 6\}$.

1.2 Definição de Probabilidade

A probabilidade de um evento A, denotada por $P(A)$, é uma medida da possibilidade de A ocorrer. Pela definição axiomática de Kolmogorov, a probabilidade deve satisfazer:

(i) $P(A) \geq 0$ para qualquer evento A

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

Exemplo

No lançamento de uma moeda equilibrada, $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$. Para o lançamento de um dado equilibrado, $P(\text{sair } 3) = \frac{1}{6}$.

1.3 Operações com Eventos

As operações básicas com eventos incluem:

- **União** ($A \cup B$): evento que ocorre quando A ou B (ou ambos) ocorrem

- **Interseção** ($A \cap B$): evento que ocorre quando A e B ocorrem simultaneamente
- **Complemento** ($\overline{A}$ ou A^c): evento que ocorre quando A não ocorre

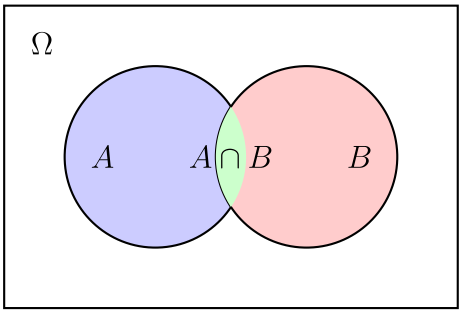

Figura 1: Diagrama de Venn representando eventos A e B, sua interseção e o espaço amostral Ω

1.4 Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional de um evento A dado que o evento B ocorreu, denotada por $P(A|B)$, é definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{onde } P(B) > 0 \tag{1}$$

Fórmula Fundamental

A fórmula da probabilidade condicional pode ser reorganizada para obter:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A) \tag{2}$$

Esta é uma das fórmulas mais importantes e frequentemente utilizadas em problemas de probabilidade.

1.5 Independência de Eventos

Dois eventos A e B são independentes se e somente se:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \tag{3}$$

Equivalentemente, A e B são independentes se $P(A|B) = P(A)$ ou $P(B|A) = P(B)$.

Exemplo

Ao lançar um dado duas vezes, o evento "tirar um número par no primeiro lançamento"é independente do evento "tirar um número menor que 3 no segundo lançamento".

1.6 Teorema da Probabilidade Total

Se $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituem uma partição do espaço amostral Ω (ou seja, são mutuamente exclusivos e $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$), então para qualquer evento A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \times P(B_i) \tag{4}$$

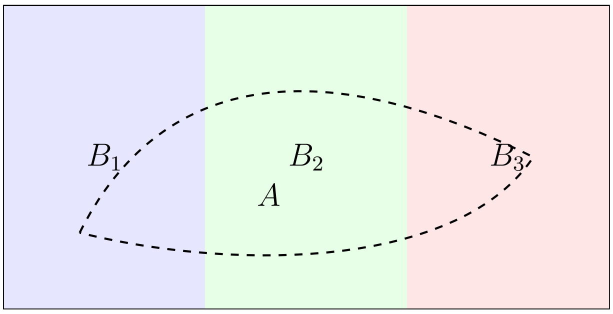

Figura 2: Ilustração do Teorema da Probabilidade Total: evento A distribuído entre a partição $\{B_1, B_2, B_3\}$

1.7 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes permite inverter condições em probabilidades condicionais:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \times P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \times P(B_j)} \tag{5}$$

Numa forma mais simplificada, para dois eventos A e B:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \times P(B)}{P(A)} \tag{6}$$

Dica para Aplicar o Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é particularmente útil em problemas onde:

- São fornecidas probabilidades do tipo $P(A|B)$
- Pede-se para calcular probabilidades do tipo $P(B|A)$
- Existe informação adicional que surge após uma observação inicial

2 Variáveis Aleatórias

2.1 Definição e Tipos

Uma variável aleatória é uma função que associa um valor numérico a cada resultado do espaço amostral. As variáveis aleatórias podem ser:

- **Discretas**: assumem valores em conjunto finito ou enumerável (e.g., número de caras em 10 lançamentos de moeda)
- **Contínuas**: podem assumir qualquer valor em um intervalo contínuo (e.g., tempo de espera, altura de uma pessoa)

2.2 Função de Probabilidade (V.A. Discretas)

Para uma variável aleatória discreta X, a função de probabilidade $p_X(x)$ (também chamada de função massa de probabilidade) é definida como:

$$p_X(x) = P(X = x) \tag{7}$$

Propriedades:

(i) $p_X(x) \geq 0$ para todo x

(ii) $\sum_x p_X(x) = 1$

2.3 Função Densidade de Probabilidade (V.A. Contínuas)

Para uma variável aleatória contínua X, a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ satisfaz:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \tag{8}$$

Propriedades:

(i) $f_X(x) \geq 0$ para todo x

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

2.4 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada (FDA) $F_X(x)$ de uma variável aleatória X é definida como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{9}$$

Para variáveis aleatórias discretas:

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} p_X(t) \tag{10}$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \tag{11}$$

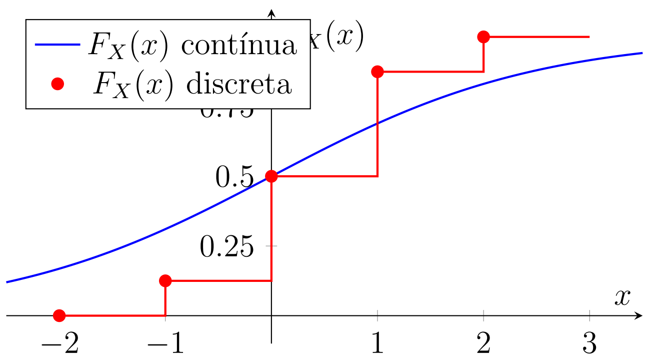

Figura 3: Comparação entre funções de distribuição acumulada para variáveis aleatórias contínuas e discretas

2.5 Valor Esperado (Média)

O valor esperado de uma variável aleatória X, denotado por $E[X]$ ou μ_X, representa o valor médio que esperamos obter se repetirmos a experiência muitas vezes.

Para variáveis aleatórias discretas:

$$E[X] = \sum_x x \cdot p_X(x) \tag{12}$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx \tag{13}$$

2.6 Variância e Desvio Padrão

A variância de uma variável aleatória X, denotada por $\text{Var}(X)$ ou σ_X^2, mede a dispersão dos valores em torno da média:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{14}$$

O desvio padrão σ_X é definido como a raiz quadrada da variância:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \tag{15}$$

Propriedades do Valor Esperado e Variância

Para constantes a e b e variáveis aleatórias X e Y:

$$E[aX + b] = aE[X] + b \tag{16}$$
$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X) \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

Se X e Y são independentes:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] \tag{19}$$
$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \tag{20}$$

3 Distribuições Discretas Importantes

3.1 Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli modela experiências com apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso). Se X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p (probabilidade de sucesso), então:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \\ 1 - p, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Média: $E[X] = p$

Variância: $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$

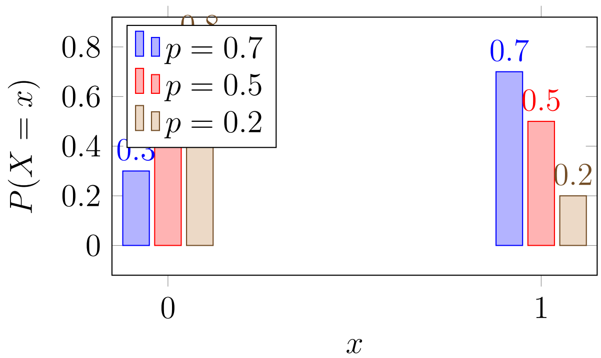

Figura 4: Função de massa de probabilidade da distribuição de Bernoulli para diferentes valores de p

3.2 Distribuição Binomial

A distribuição binomial modela o número de sucessos em n tentativas independentes de Bernoulli, cada uma com probabilidade de sucesso p. Se X é uma variável aleatória binomial com parâmetros n e p, denotamos $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ e:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{22}$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Média: $E[X] = np$

Variância: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

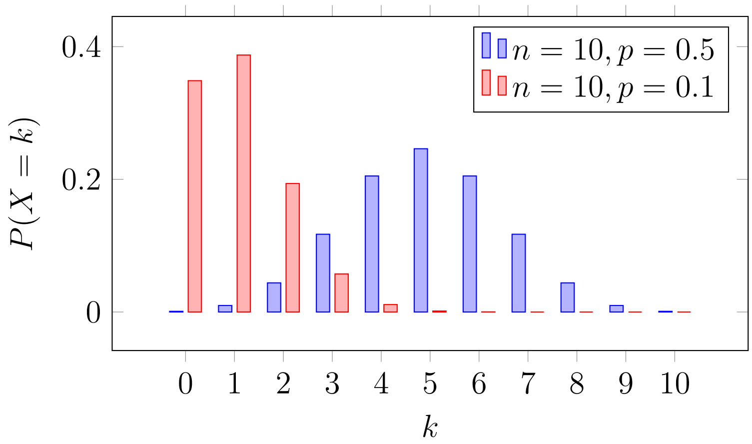

Figura 5: Função de massa de probabilidade da distribuição binomial para diferentes valores de p com $n = 10$

3.3 Distribuição Geométrica

A distribuição geométrica modela o número de tentativas necessárias até o primeiro sucesso em tentativas independentes de Bernoulli. Se X é uma variável aleatória geométrica com parâmetro p (probabilidade de sucesso em cada tentativa), então:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

Média: $E[X] = \frac{1}{p}$

Variância: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Propriedade de "Falta de Memória"

A distribuição geométrica é a única distribuição discreta que possui a propriedade de "falta de memória":

$$P(X > n + m | X > n) = P(X > m) \tag{24}$$

Esta propriedade significa que, se já esperamos n tentativas sem sucesso, a probabilidade de precisarmos de mais m tentativas é igual à probabilidade original de precisarmos de m tentativas.

3.4 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson modela o número de ocorrências de um evento em um intervalo fixo, quando esses eventos ocorrem a uma taxa média constante e independentemente uns dos outros. Se X é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ (taxa média de ocorrências), denotamos $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Média: $E[X] = \lambda$

Variância: $\text{Var}(X) = \lambda$

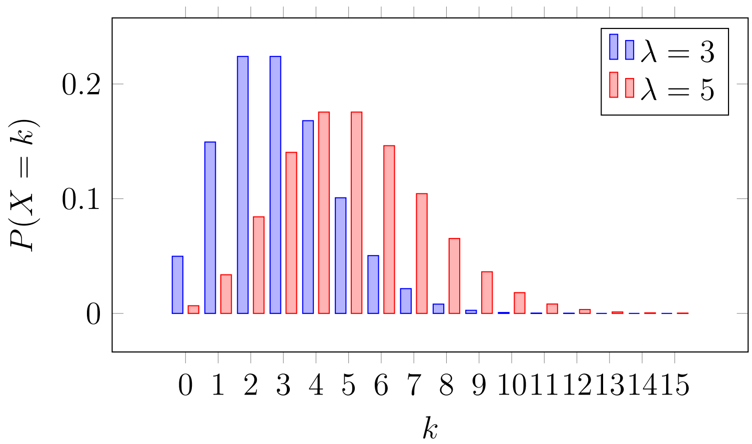

Figura 6: Função de massa de probabilidade da distribuição de Poisson para diferentes valores de λ

4 Distribuições Contínuas Importantes

4.1 Distribuição Uniforme Contínua

A distribuição uniforme contínua modela situações onde todos os valores em um intervalo $[a, b]$ têm a mesma probabilidade de ocorrer. Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[a, b]$, denotamos $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ e sua função densidade de probabilidade é:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{26}$$

Função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se } x > b \end{cases} \tag{27}$$

Média: $E[X] = \frac{a+b}{2}$

Variância: $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Figura 7: Funções de densidade e de distribuição da distribuição uniforme contínua no intervalo $[0, 5]$

4.2 Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é frequentemente usada para modelar o tempo até a ocorrência de um evento, quando a taxa de ocorrência é constante. Se X é uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ (taxa), denotamos $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e sua função densidade de probabilidade é:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{28}$$

Função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{29}$$

Média: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

Variância: $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Propriedade de ”Falta de Memória”

Assim como a distribuição geométrica, a distribuição exponencial possui a propriedade de ”falta de memória”:

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s) \tag{30}$$

Isso significa que, se um componente já funcionou por t unidades de tempo sem falhar, a probabilidade de ele funcionar por mais s unidades de tempo é igual à probabilidade original de funcionar por s unidades de tempo.

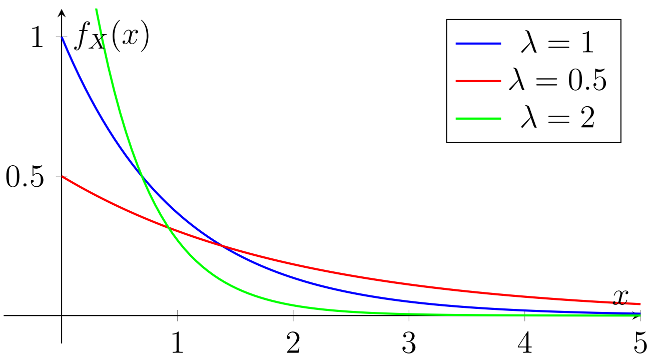

Figura 8: Função densidade de probabilidade da distribuição exponencial para diferentes valores de λ

4.3 Distribuição Normal

A distribuição normal (ou gaussiana) é uma das distribuições mais importantes em estatística. Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, denotamos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e sua função densidade de probabilidade é:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \tag{31}$$

A distribuição normal padrão, denotada por $Z \sim N(0, 1)$, tem média zero e variância unitária. Qualquer variável aleatória normal pode ser padronizada através da transformação $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Média: $E[X] = \mu$

Variância: $\text{Var}(X) = \sigma^2$

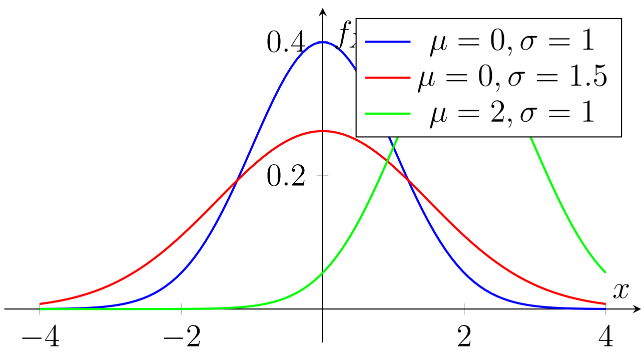

Figura 9: Função densidade de probabilidade da distribuição normal para diferentes valores de μ e σ

Propriedades da Distribuição Normal

- É simétrica em torno da média μ
- A moda e a mediana coincidem com a média
- Tem forma de sino, com ponto de inflexão em $\mu \pm \sigma$
- Aproximadamente 68,27% dos valores estão a uma distância de até σ da média
- Aproximadamente 95,45% dos valores estão a uma distância de até 2σ da média
- Aproximadamente 99,73% dos valores estão a uma distância de até 3σ da média (regra 3-sigma)

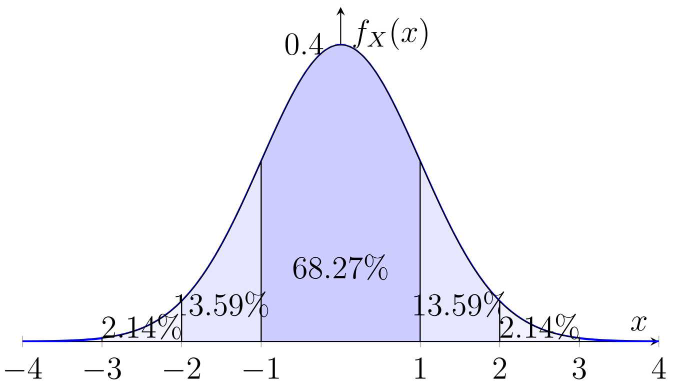

Figura 10: Distribuição normal padrão com áreas correspondentes a diferentes intervalos de desvios padrão

5 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

5.1 Distribuição Conjunta

Para variáveis aleatórias discretas X e Y, a função de probabilidade conjunta é:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \tag{32}$$

Para variáveis aleatórias contínuas X e Y, a função densidade de probabilidade conjunta satisfaz:

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \tag{33}$$

5.2 Distribuições Marginais

Para variáveis aleatórias discretas:

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) \tag{34}$$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y) \tag{35}$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \tag{36}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \tag{37}$$

5.3 Distribuições Condicionais

Para variáveis aleatórias discretas:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}, \quad \text{se } p_Y(y) > 0 \tag{38}$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}, \quad \text{se } p_X(x) > 0 \tag{39}$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad \text{se } f_Y(y) > 0 \tag{40}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \quad \text{se } f_X(x) > 0 \tag{41}$$

5.4 Independência de Variáveis Aleatórias

Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se e somente se:

Para variáveis aleatórias discretas:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y), \quad \text{para todo } x, y \tag{42}$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \text{para todo } x, y \tag{43}$$

5.5 Covariância e Correlação

A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida como:

$$\text{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{44}$$

onde $\mu_X = E[X]$ e $\mu_Y = E[Y]$.

A correlação entre X e Y é:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{45}$$

onde $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ e $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)}$.

Propriedades da Correlação

- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
- $\rho_{X,Y} = 1$ ou $\rho_{X,Y} = -1$ se e somente se existe uma relação linear perfeita entre X e Y
- $\rho_{X,Y} = 0$ se X e Y são independentes (a recíproca não é necessariamente verdadeira)

5.6 Esperança Condicional

A esperança condicional de uma variável aleatória X dado $Y = y$ é definida como:

Para variáveis aleatórias discretas:

$$E[X|Y = y] = \sum_x x \cdot p_{X|Y}(x|y) \tag{46}$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\, dx \tag{47}$$

A esperança condicional $E[X|Y]$ pode ser vista como uma função de Y.

Lei da Esperança Total

$$E[X] = E[E[X|Y]] \tag{48}$$

Ou seja, a esperança incondicional de X pode ser obtida tomando a média ponderada das esperanças condicionais.

6 Teoremas Limite e Aproximações

6.1 Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números assegura que a média aritmética de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas converge para a esperança comum dessas variáveis.

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E[X_i] = \mu$. Defina $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$. Então:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad \text{quando } n \to \infty \tag{49}$$

onde $\xrightarrow{P}$ denota convergência em probabilidade.

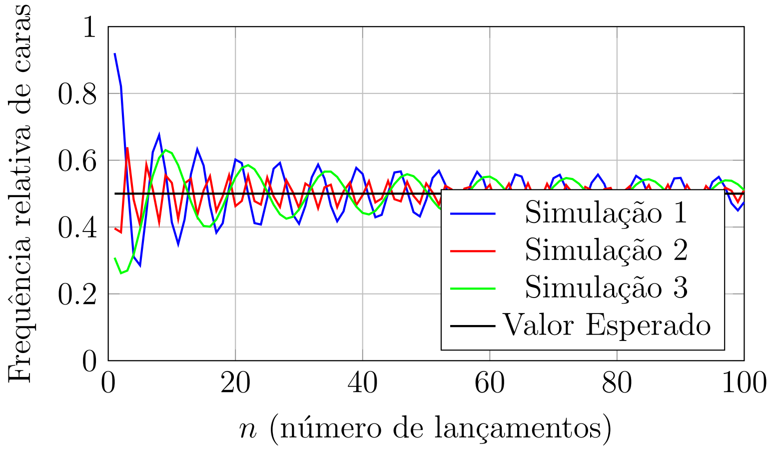

Figura 11: Ilustração da Lei dos Grandes Números: frequência relativa de caras em n lançamentos de uma moeda equilibrada

6.2 Teorema Central do Limite

O Teorema Central do Limite estabelece que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segue aproximadamente uma distribuição normal, independentemente da distribuição original das variáveis.

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Defina $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então, para n suficientemente grande:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{quando } n \to \infty \tag{50}$$

onde $\xrightarrow{d}$ denota convergência em distribuição.

Aplicação do Teorema Central do Limite

O TCL permite aproximar a distribuição da soma de várias variáveis aleatórias por uma distribuição normal, facilitando enormemente os cálculos de probabilidades. Por exemplo, para n grande:

$$P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a) \tag{51}$$

onde Φ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

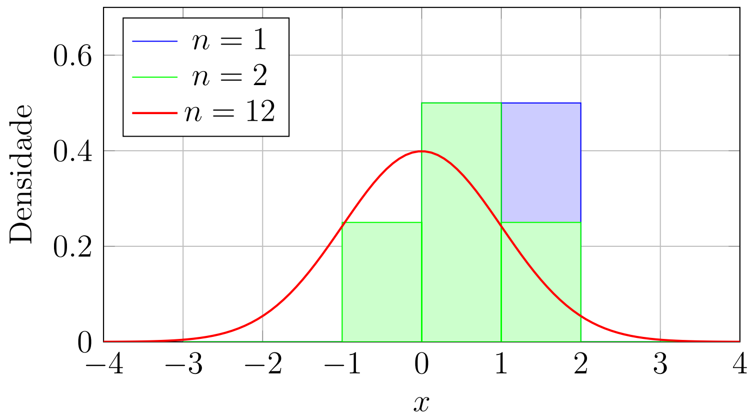

Figura 12: Ilustração do Teorema Central do Limite: a soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas aproxima-se de uma distribuição normal conforme n aumenta

6.3 Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

Para valores grandes de n e valores de p não muito próximos de 0 ou 1, a distribuição binomial $\text{Bin}(n, p)$ pode ser aproximada por uma distribuição normal com média np e variância $np(1-p)$:

$$\text{Bin}(n, p) \approx N(np, np(1-p)) \tag{52}$$

Regra prática: a aproximação é considerada boa quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

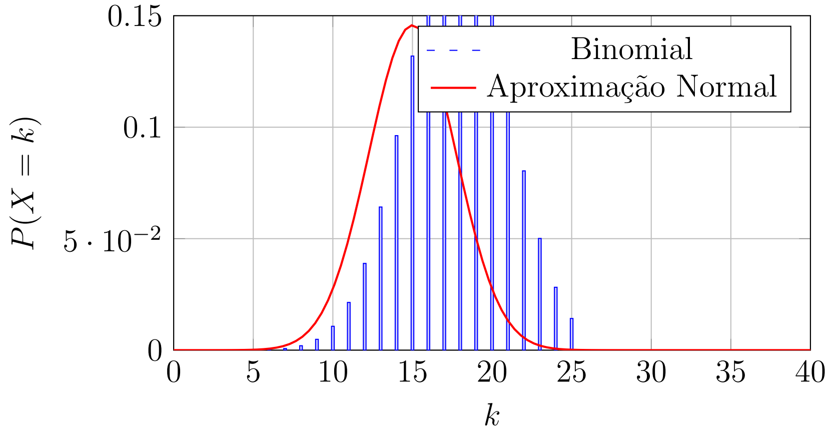

Figura 13: Aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal

7 Estatística Inferencial Básica

7.1 Estimação Pontual

A estimação pontual consiste em utilizar uma única estatística (estimador) para estimar um parâmetro desconhecido da população.

- **Estimador**: função dos dados da amostra
- **Estimativa**: valor específico do estimador calculado a partir de dados amostrais

Propriedades desejáveis de um estimador:

- **Não-viesado**: $E[\hat{\theta}] = \theta$ (o valor esperado do estimador é igual ao parâmetro)
- **Consistente**: $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ quando $n \to \infty$ (o estimador converge em probabilidade para o parâmetro)
- **Eficiente**: tem a menor variância possível entre os estimadores não-viesados

Estimadores comuns:

$$\text{Média amostral: } \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{53}$$

$$\text{Variância amostral: } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{54}$$

$$\text{Proporção amostral: } \hat{p} = \frac{X}{n} \tag{55}$$

7.2 Intervalos de Confiança

Um intervalo de confiança é um intervalo de valores que, com uma certa probabilidade (nível de confiança), contém o verdadeiro valor do parâmetro populacional.

Para a média populacional μ de uma distribuição normal com variância σ^2 conhecida, um intervalo de confiança de nível $(1-\alpha)$ é:

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{56}$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o quantil de ordem $1-\alpha/2$ da distribuição normal padrão.

Se a variância σ^2 é desconhecida e a amostra é de uma distribuição normal, utiliza-se a distribuição t de Student:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{57}$$

onde $t_{\alpha/2,n-1}$ é o quantil de ordem $1-\alpha/2$ da distribuição t com $n-1$ graus de liberdade.

Interpretação Correta de um Intervalo de Confiança

Um intervalo de confiança de 95% não significa que a probabilidade do parâmetro estar no intervalo é 95%. Significa que, se muitas amostras fossem coletadas e intervalos de confiança calculados, 95% desses intervalos conteriam o verdadeiro valor do parâmetro.

7.3 Testes de Hipóteses

Um teste de hipóteses é um procedimento para decidir se uma hipótese sobre a população é plausível, com base em dados amostrais.

- **Hipótese nula** (H_0): hipótese que está sendo testada
- **Hipótese alternativa** (H_1 ou H_a): hipótese que será aceita se H_0 for rejeitada
- **Estatística de teste**: função dos dados que é usada para decidir se H_0 deve ser rejeitada
- **Região crítica**: conjunto de valores da estatística de teste que levam à rejeição de H_0
- **Nível de significância** (α): probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira (erro Tipo I)
- **Valor-p**: probabilidade de observar um valor da estatística de teste pelo menos tão extremo quanto o observado, supondo que H_0 seja verdadeira

Para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (teste bilateral) para uma distribuição normal com σ conhecido:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{58}$$

Rejeita-se H_0 ao nível de significância α se $|Z| > z_{\alpha/2}$.

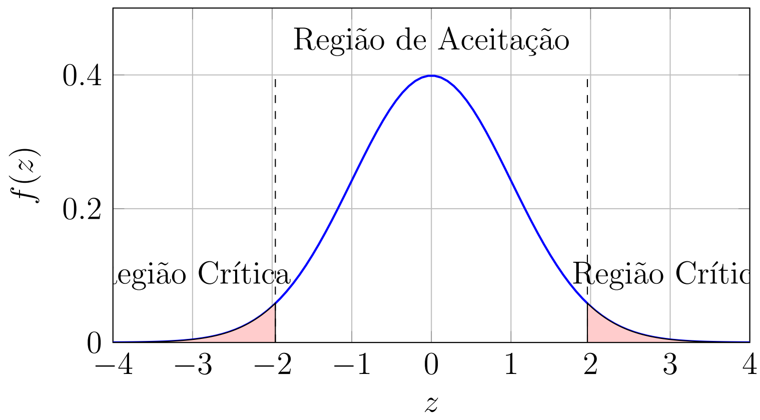

Figura 14: Regiões de aceitação e crítica para um teste bilateral ao nível de significância $\alpha = 5\%$

8 Exemplo de Aplicação Completa

8.1 Contexto do Problema

Suponha que uma empresa de semicondutores quer testar se um novo método de fabricação melhora a vida útil dos seus chips. A vida útil dos chips com o método atual segue aproximadamente uma distribuição normal com média $\mu = 1200$ horas e desvio padrão $\sigma = 150$ horas.

A empresa testa 36 chips produzidos com o novo método e obtém uma vida útil média de 1245 horas. Eles querem saber se há evidência estatística de que o novo método melhora a vida útil.

8.2 Formulação do Teste de Hipóteses

$$H_0 : \mu = 1200 \text{ (o novo método não melhora a vida útil)} \tag{59}$$

$$H_1 : \mu > 1200 \text{ (o novo método melhora a vida útil)} \tag{60}$$

8.3 Cálculo da Estatística de Teste

Considerando o desvio padrão conhecido:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1245 - 1200}{150/\sqrt{36}} = \frac{45}{25} = 1.8 \tag{61}$$

8.4 Decisão

Para um teste unilateral com nível de significância $\alpha = 0.05$, o valor crítico é $z_{0.05} = 1.645$.

Como $Z = 1.8 > 1.645$, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

8.5 Cálculo do Valor-p

$$\text{Valor-p} = P(Z > 1.8) = 1 - \Phi(1.8) \approx 0.0359 \tag{62}$$

onde Φ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

8.6 Interpretação

O valor-p de 0.0359 é menor que o nível de significância de 0.05, o que confirma nossa decisão de rejeitar H_0. Há evidência estatística para concluir que o novo método de fabricação melhora a vida útil dos chips.

8.7 Intervalo de Confiança

Um intervalo de confiança de 95% para a média da vida útil com o novo método é:

$$\begin{aligned}
\overline{X} \pm z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 1245 \pm 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{36}} && (63)\\
&= 1245 \pm 1.96 \cdot 25 && (64)\\
&= 1245 \pm 49 && (65)\\
&= [1196, 1294] && (66)
\end{aligned}$$

8.8 Interpretação do Intervalo

O intervalo de confiança de 95% para a média da vida útil dos chips produzidos com o novo método vai de 1196 a 1294 horas. Como este intervalo contém o valor 1200 (embora por uma margem pequena), isso sugere que a melhoria pode não ser tão substancial quanto se esperava inicialmente.

8.9 Conclusão

Embora haja evidência estatística para concluir que o novo método melhora a vida útil dos chips (teste de hipóteses), o intervalo de confiança sugere que a melhoria pode ser modesta. A empresa deve considerar outros fatores, como o custo da implementação do novo método, antes de tomar uma decisão final.

Dica de Interpretação

Sempre considere tanto o resultado do teste de hipóteses quanto o intervalo de confiança ao tomar decisões baseadas em dados estatísticos. O teste de hipóteses fornece uma decisão binária (rejeitar ou não rejeitar), enquanto o intervalo de confiança fornece uma gama de valores plausíveis para o parâmetro, o que pode ser mais informativo para a tomada de decisões práticas.