Probabilidade e Estatística

Series de Problemas 1

10 de Março de 2025

1. **Uma peça de certo tipo é classificada de acordo com a sua dimensão e porosidade. Num grande lote composto por peças deste tipo, verificaram-se as seguintes proporções: 44% têm dimensão inadequada e são porosas; 53% têm dimensão inadequada e não são porosas. Escolhida ao acaso uma peça do lote, calcule a probabilidade de ela ser porosa, sabendo que tem dimensão inadequada. Indique o resultado com pelo menos três casas decimais.**

Resolução:

Considere-se os eventos D e P como sendo, respectivamente, a peça ter dimensão inadequada e a peça ser porosa. Note-se que o enunciado fornece:

$$P(D \cap P) = 0.44$$
$$P(D \cap \overline{P}) = 0.53$$

Pretende-se calcular $P(P|D)$. Observe-se que pelo Teorema da Probabilidade Condicional:

$$\begin{aligned} P(P|D) &= \frac{P(P \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(P \cap D)}{P(P \cap D) + P(\overline{P} \cap D)} \\ &= \frac{0.44}{0.44 + 0.53} = 0.4536... \end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade da peça ser porosa, sabendo que tem dimensão inadequada, é 0.454.

2. **Sabe-se que a probabilidade de haver um dia de sol é 0.9. Sabe-se também que caso haja sol, a probabilidade de haver alunos na sala é de 0.22 e que caso não haja sol, a probabilidade de haver alunos na sala é 0.87 . Qual a probabilidade de haver alunos na sala?**

   (a) 0.1914
   (b) 0.8766
   (c) 0.285
   (d) 0.87

Resolução:

Considere-se os eventos S e A como sendo, respectivamente, a ocorrência de sol e a presença de alunos na sala. O enunciado fornece:

$$\begin{aligned} P(S) &= 0.9 \\ P(A|S) &= 0.22 \\ P(A|\overline{S}) &= 0.87 \end{aligned}$$

Para calcular a probabilidade de haver alunos na sala, aplique-se o Teorema da Probabilidade Total:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|S)P(S) + P(A|\overline{S})P(\overline{S}) \\ &= 0.22 \times 0.9 + 0.87 \times 0.1 = 0.285 \end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade de haver alunos na sala é 0.285, correspondendo à alternativa **(c)**.

3. **Num arranha-céus 50 % das portas de segurança funcionam por controlo remoto. Durante um processo de inspeção regular, verificou-se que a probabilidade de uma porta não abrir é igual a 0.125 se esta opera remotamente, e é igual a 0.35 caso não opere remotamente. Considere que uma das portas foi selecionada ao acaso para inspeção. Qual é a probabilidade de a porta selecionada operar por controlo remoto, sabendo**

que ela abriu durante a inspeção? Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

Resolução:

Defina-se os eventos R e A como sendo, respectivamente, a porta operar por controlo remoto e a porta abrir durante a inspeção. O enunciado fornece:

$$P(R) = 0.5$$
$$P(\overline{R}) = 0.5$$
$$P(\overline{A}|R) = 0.125$$
$$P(\overline{A}|\overline{R}) = 0.35$$

Pretende-se calcular $P(R|A)$. Aplicando o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(R|A) &= \frac{P(A|R)P(R)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|R)P(R)}{P(A|R)P(R) + P(A|\overline{R})P(\overline{R})} \\ &= \frac{(1 - P(\overline{A}|R))P(R)}{(1 - P(\overline{A}|R))P(R) + (1 - P(\overline{A}|\overline{R}))P(\overline{R})} \\ &= \frac{(1 - 0.125) \times 0.5}{(1 - 0.125) \times 0.5 + (1 - 0.35) \times 0.5} = 0.57377... \end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade da porta operar por controlo remoto, sabendo que abriu durante a inspeção, é 0.5738.

4. **Numa dada experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos independentes, tais que $P(A) = \frac{1}{6}$ e $P(B) = \frac{1}{9}$. Calcule $P[A|(A \cup B)]$. Preencha a caixa com o resultado com, pelo menos, duas casas decimais.**

Resolução:

Observe-se que, como A e B são independentes, tem-se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$.

Para calcular $P(A|(A \cup B))$, utilize-se a definição de probabilidade condicional:

$$\begin{aligned} P(A|(A \cup B)) &= \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{P((A \cap A) \cup (A \cap B))}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \frac{P(A \cap A) + P(A \cap B) - P(A \cap A \cap A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \frac{P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54}} = \frac{9}{14} = 0.642857... \end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade $P[A|(A \cup B)]$ é 0.64.

5. **Considere os acontecimentos A, B e C tais que: A e B são independentes condicionalmente a C; $P(A|C) = \frac{1}{80}$, $P(A \cap B) = \frac{9}{32}$ e $P(B \cap C) = \frac{3}{4}$. Obtenha $P(C|(A \cap B))$, indicando o resultado com pelo menos quatro casas decimais.**

Resolução:

Note-se que, como A e B são independentes condicionalmente a C, temos $P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$.

Aplique-se o Teorema de Bayes para calcular $P(C|(A \cap B))$:

$$\begin{aligned} P(C|(A \cap B)) &= \frac{P((A \cap B)|C)P(C)}{P(A \cap B)} \\ &= \frac{P(A|C)P(B|C)P(C)}{P(A \cap B)} \end{aligned}$$

Observe-se que $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$, logo $P(B|C)P(C) = P(B \cap C)$.

Continuando:

$$
\begin{aligned}
P(C|(A\cap B)) &= \frac{P(A|C)P(B\cap C)}{P(A\cap B)}\\
&= \frac{\frac{1}{80}\times\frac{3}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{1}{30} = 0.033333...
\end{aligned}
$$

Resposta: A probabilidade $P(C|(A\cap B))$ é 0.0333.