Probabilidade e Estatística

Series de Problemas 2

24 de Março de 2025

1. **Estima-se que 9% dos doentes que se dirigem a um dado hospital durante um dado surto de gripe tenham gripe. A probabilidade de haver pelo menos 4 doentes com gripe num conjunto de 18 doentes que se dirigem ao hospital durante esse surto de gripe é:**

   Resolução:

   Defina-se a variável aleatória X como o número de doentes com gripe em 18 doentes. Observe-se que:

   $$p = 0.09 \quad \text{(probabilidade de um doente ter gripe)}$$
   $$n = 18 \quad \text{(número total de doentes)}$$

   Note-se que X segue uma distribuição binomial:

   $$\begin{aligned} X &\sim \text{Bin}(18, 0.09) \\ P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] \end{aligned}$$

   Utilizando a função `BinomialCD` da calculadora Casio fx-CG50, calcula-se a probabilidade acumulada:

   $$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 0.92773717$$
   $$P(X \geq 4) = 1 - 0.92773717 = 0.07226283$$

   Resposta: A probabilidade de pelo menos 4 entre 18 doentes terem gripe é aproximadamente 0.07 ou 7.23%.

2. **Numa grande instituição bancária, 9% das pessoas empregadas são programadoras de profissão, 43% das pessoas empregadas são mulheres e 6% das mulheres empregadas são programadoras de profissão. Considere que a variável aleatória**

X representa o número de pessoas da instituição que são selecionadas, ao acaso e com reposição, até ser detectado pela primeira vez um homem programador de profissão. Obtenha $P(X > 5)$.

Resolução:

Defina-se os eventos P e M como sendo, respectivamente, a pessoa ser programadora e a pessoa ser mulher. O enunciado fornece:

$$\begin{aligned} P(P) &= 0.09 \\ P(M) &= 0.43 \quad \text{(consequentemente, } P(\overline{M}) = 0.57\text{)} \\ P(P|M) &= 0.06 \end{aligned}$$

Primeiramente, determine-se a probabilidade de uma pessoa ser homem programador. Utilizando o teorema da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P|M)P(M) + P(P|\overline{M})P(\overline{M}) \\ 0.09 &= 0.06 \times 0.43 + P(P|\overline{M}) \times 0.57 \\ 0.09 &= 0.0258 + P(P|\overline{M}) \times 0.57 \\ P(P|\overline{M}) &= \frac{0.09 - 0.0258}{0.57} = \frac{0.0642}{0.57} = 0.1126... \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de selecionar um homem programador é:

$$p = P(\overline{M} \cap P) = P(\overline{M}) \times P(P|\overline{M}) = 0.57 \times 0.1126... = 0.0642...$$

A variável aleatória X segue uma distribuição geométrica com parâmetro $p = 0.0642...$. Utilizando a função `GeometricCD` da calculadora Casio fx-CG50 ou pela fórmula:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= (1 - p)^5 \\ &= (1 - 0.0642...)^5 \\ &= (0.9358...)^5 \\ &= 0.7177... \end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade de precisar selecionar mais de 5 pessoas até encontrar o primeiro homem programador é aproximadamente 0.72 ou 72%.

3. **Numa produção em série, o número total de peças fabricadas por hora segue uma distribuição de Poisson. A probabilidade de não ser fabricada qualquer peça numa hora é igual a 0.027. Qual é a probabilidade de serem fabricadas 4 peças numa hora, sabendo que foi fabricada pelo menos uma peça nesse período de tempo? Indique o resultado com, pelo menos, quatro casas decimais.**

Resolução:

Considere-se a variável aleatória X como o número de peças fabricadas por hora:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Segundo o enunciado, sabe-se que:

$$P(X = 0) = 0.027$$

Para determinar o valor de λ, utilize-se a função de probabilidade da Poisson:

$$\begin{aligned} P(X = 0) = e^{-\lambda} &= 0.027 \\ \lambda &= -\ln(0.027) \end{aligned}$$

Utilizando a função `ln` da calculadora Casio fx-CG50:

$$\lambda \approx 3.6119$$

A probabilidade $P(X = 4)$ pode ser calculada utilizando a função

`PoissonPD` da calculadora:

$$\begin{aligned}P(X = 4) &= \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^4}{4!} \\ &= \frac{e^{-3.6119} \times (3.6119)^4}{24} \\ &\approx 0.1915\end{aligned}$$

Aplicando a probabilidade condicional:

$$\begin{aligned}P(X = 4 \mid X \geq 1) &= \frac{P(X = 4)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{0.1915}{1 - P(X = 0)} \\ &= \frac{0.1915}{1 - 0.027} \\ &= \frac{0.1915}{0.973} \\ &\approx 0.1968\end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade de serem fabricadas 4 peças numa hora, sabendo que foi fabricada pelo menos uma peça, é 0.1968.

4. **A quantidade mensal de certa matéria-prima usada num estaleiro naval é representada pela variável aleatória X com distribuição uniforme contínua com valor esperado 35 e desvio padrão 3. Obtenha $E(50 + 30\sqrt{X})$, o custo mensal esperado de tal matéria-prima. Indique o resultado com pelo menos três casas decimais.**

Resolução:

Sabe-se que $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ com $E[X] = 35$ e $\sigma_X = 3$.

Para uma distribuição uniforme, tem-se:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{a+b}{2} = 35 \quad \Rightarrow \quad a+b=70 \\
\text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} = 9 \\
&\Rightarrow (b-a)^2 = 108 \\
&\Rightarrow b-a = \sqrt{108} \approx 10.3923
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para a e b:

$$\begin{cases} a+b=70 \\ b-a \approx 10.3923 \end{cases}$$

Utilizando a função `solve` da calculadora Casio fx-CG50:

$$\begin{aligned}
b &\approx 40.1962 \\
a &\approx 29.8039
\end{aligned}$$

Para calcular $E[\sqrt{X}]$ para $X \sim \text{Uniforme}(a,b)$:

$$\begin{aligned}
E[\sqrt{X}] &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{x}\,dx \\
&= \frac{1}{10.3923} \times \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_a^b \\
&= \frac{2}{3 \times 10.3923} \times \left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)
\end{aligned}$$

Calculando com a calculadora Casio fx-CG50:

$$E[\sqrt{X}] \approx 5.91063$$

O custo esperado é:

$$\begin{aligned}
E(50+30\sqrt{X}) &= 50 + 30 \times E[\sqrt{X}] \\
&= 50 + 30 \times 5.91063 \\
&\approx 227.319
\end{aligned}$$

Resposta: O custo mensal esperado é 227.319.

5. **O tempo de vida de lasers de um dado tipo possui distribuição normal com valor esperado igual a 7197 horas e desvio padrão igual a 609 horas. A probabilidade de o tempo de vida de um desses lasers ser inferior a 5090 horas é:**

Resolução:

Considere-se a variável aleatória X como o tempo de vida dos lasers:

$$X \sim N(\mu = 7197, \sigma = 609)$$

Pretende-se calcular:

$$P(X < 5090)$$

Para isso, padronize-se a variável X calculando o Z-score:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{5090 - 7197}{609} \\ &= -3.4599... \end{aligned}$$

Utilizando a função `NormalCD` da calculadora Casio fx-CG50:

$$P(X < 5090) = P(Z < -3.46) \approx 0.00027$$

Resposta: A probabilidade de o tempo de vida de um desses lasers ser inferior a 5090 horas é aproximadamente 0.0003 ou 0.03%.