Probabilidade e Estatística

Series de Problemas 5

21 de Maio de 2025

1. **Admita que a resistência mecânica de certo material cerâmico possui distribuição normal com valor esperado e variância desconhecidos. Uma vez medidas as resistências mecânicas de 10 espécimes selecionados casualmente, verificou-se que a média amostral e a variância amostral corrigida são iguais a 10.16 e 2.6401, respectivamente.**

   Obtenha um intervalo de confiança a 90% para o verdadeiro valor esperado da resistência mecânica.

   A) **[9.5015, 10.8185]**
   B) **[9.4494, 10.8706]**
   C) **[9.2181, 11.1019]**
   D) **[9.3148, 11.0052]**

Resolução:

Neste problema, pretende-se construir um intervalo de confiança para o valor esperado (média) de uma distribuição normal com parâmetros desconhecidos.

Considere-se a variável aleatória X que representa a resistência mecânica do material cerâmico:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Dados do problema:

$$\begin{aligned} n &= 10 \quad \text{(tamanho da amostra)} \\ \bar{X} &= 10.16 \quad \text{(média amostral)} \\ S^2 &= 2.6401 \quad \text{(variância amostral corrigida)} \end{aligned}$$

Quando a média μ é desconhecida e a variância σ^2 também é desconhecida, utilizamos a distribuição t de Student para construir o intervalo de confiança.

A estatística de teste apropriada é:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Para um intervalo de confiança de nível $(1 - \alpha)$, o intervalo é dado por:

$$\bar{X} \pm t_{n-1,\,1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Aqui:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2.6401} \approx 1.6248$$

Para nível de confiança de 90%, temos $\alpha = 0.10$, então $\alpha/2 = 0.05$.

Com $n - 1 = 9$ graus de liberdade, e utilizando uma tabela da distribuição t ou uma calculadora estatística, encontramos:

$$t_{9,\,0.95} \approx 1.833$$

O erro padrão da média é:

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.6248}{\sqrt{10}} \approx 0.5138$$

Portanto, a semi-amplitude do intervalo de confiança é:

$$\begin{aligned} t_{9,\,0.95} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} &= 1.833 \times 0.5138 \\ &\approx 0.9418 \end{aligned}$$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\begin{aligned}\bar{X} \pm 0.9418 = 10.16 \pm 0.9418 \\ &= [10.16 - 0.9418, 10.16 + 0.9418] \\ &= [9.2182, 11.1018] \\ &\approx [9.2181, 11.1019]\end{aligned}$$

Resposta: A opção correta é **(C)** [**9.2181, 11.1019**].

2. **Considere que o tempo de vida de certo tipo de lâmpadas (na unidade militar de hora) tem distribuição normal com valor esperado e variância desconhecidos. Depois de obtidas as durações de 11 lâmpadas selecionadas casualmente, verificou-se que a variância amostral corrigida é igual a 0.0492.**

   Determine um intervalo de confiança a 99% para o verdadeiro valor do desvio padrão.

   A) [**0.1398, 0.4777**]
   B) [**0.0195, 0.2282**]
   C) [**0.3099, 0.6478**]
   D) [**0.3727, 0.5814**]

Resolução:

Neste problema, pretende-se construir um intervalo de confiança para o desvio padrão σ de uma distribuição normal com parâmetros desconhecidos.

Considere-se a variável aleatória X que representa o tempo de vida das lâmpadas:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Dados do problema:

$$\begin{aligned} n &= 11 \quad \text{(tamanho da amostra)} \\ S^2 &= 0.0492 \quad \text{(variância amostral corrigida)}\end{aligned}$$

Para construir um intervalo de confiança para σ^2 (e consequentemente para σ), utilizamos o resultado de que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Para um intervalo de confiança de nível $(1-\alpha)$ para σ^2, temos:

$$P\left(\chi^2_{n-1,\,\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Isolando σ^2:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

O intervalo de confiança para σ^2 é, portanto:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}\right]$$

Para nível de confiança de 99%, temos $\alpha = 0.01$, então $\alpha/2 = 0.005$.

Com $n-1 = 10$ graus de liberdade, e utilizando uma tabela da distribuição χ^2 ou uma calculadora estatística, encontramos:

$$\chi^2_{10,\,0.995} \approx 25.188$$
$$\chi^2_{10,\,0.005} \approx 2.156$$

Substituindo os valores na fórmula do intervalo de confiança para σ^2:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{inf}} &= \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} \\ &= \frac{10 \cdot 0.0492}{25.188} \\ &\approx 0.0195\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{sup}} &= \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}} \\ &= \frac{10 \cdot 0.0492}{2.156} \\ &\approx 0.2282\end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada para obter o intervalo para o desvio padrão σ:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{inf}} &= \sqrt{\sigma^2_{\text{inf}}} \\ &= \sqrt{0.0195} \\ &\approx 0.1396\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{sup}} &= \sqrt{\sigma^2_{\text{sup}}} \\ &= \sqrt{0.2282} \\ &\approx 0.4777\end{aligned}$$

Portanto, o intervalo de confiança a 99% para o desvio padrão σ é:

$$[\sigma_{\text{inf}}, \sigma_{\text{sup}}] = [0.1396, 0.4777]$$

Comparando com as alternativas dadas, a opção que mais se aproxima é:

Resposta: A opção correta é **(A)** [**0.1398, 0.4777**].

3. **Em determinada região afetada por um surto epidémico, recolheu-se uma amostra casual de 120 indivíduos, tendo-se encontrado 54 indivíduos contaminados.**

   Qual das seguintes opções representa um intervalo de confiança a aproximadamente 95% para a verdadeira proporção, p**, de indivíduos contaminados na região afetada pelo surto epidémico?**

A) **[0.361, 0.539]**

B) **[0.384, 0.516]**

C) **[0.3753, 0.5247]**

D) **[0.3946, 0.5054]**

Resolução:

Neste problema, pretende-se construir um intervalo de confiança para a proporção p de indivíduos contaminados na população.

Dados do problema:

$$n = 120 \quad \text{(tamanho da amostra)}$$
$$X = 54 \quad \text{(número de indivíduos contaminados)}$$

A proporção amostral é:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{54}{120} = 0.45$$

Como o tamanho da amostra é grande ($n = 120$) e tanto $n\hat{p} = 120 \times 0.45 = 54$ quanto $n(1-\hat{p}) = 120 \times 0.55 = 66$ são maiores que 5, podemos utilizar a aproximação normal para construir o intervalo de confiança para a proporção.

O erro padrão da proporção é:

$$\begin{aligned} \text{SE}(\hat{p}) &= \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.45 \times 0.55}{120}} \\ &\approx 0.04542 \end{aligned}$$

Para um nível de confiança de 95%, o valor crítico da distribuição normal padrão é:

$$z_{0.975} \approx 1.96$$

O intervalo de confiança é dado por:

$$\begin{aligned}
\hat{p} \pm z_{0.975} \times \text{SE}(\hat{p}) &= 0.45 \pm 1.96 \times 0.04542 \\
&= 0.45 \pm 0.0890 \\
&= [0.45 - 0.0890, 0.45 + 0.0890] \\
&= [0.3610, 0.5390] \\
&\approx [0.361, 0.539]
\end{aligned}$$

Resposta: A opção correta é **(A)** [**0.361, 0.539**].

4. **O engenheiro mecânico responsável pela produção de um dado tipo de pneus admite que a sua duração (em milhas percorridas) possui distribuição normal. Foram testados 19 pneus desse tipo, tendo-se obtido uma amostra com média e variância iguais a $\bar{x} = 41089.3$ e $s^2 = 8.34067 \times 10^6$, respectivamente.**

   Um engenheiro afirma que o valor esperado da duração desse tipo de pneus é igual a 40000 milhas, ao passo que uma consultora defende que tal valor esperado é inferior a 40000 milhas. Confronte a hipótese defendida pelo engenheiro com a defendida pela consultora e decida com base no valor-p do teste.

   A) **Não se rejeita para 1%, 5% e 10%**
   B) **Rejeita-se para 10% e não se rejeita para 1% e 5%**
   C) **Rejeita-se para 5% e 10% e não se rejeita para 1%**
   D) **Rejeita-se para 1%, 5% e 10%**

Resolução:

Neste problema, estamos perante um teste de hipóteses sobre o valor esperado da duração dos pneus. As hipóteses são:

$$\begin{aligned}
H_0 &: \mu = 40000 \\
H_a &: \mu < 40000
\end{aligned}$$

Dados do problema:

$$\begin{aligned}
n &= 19 \quad \text{(tamanho da amostra)} \\
\bar{X} &= 41089.3 \quad \text{(média amostral)} \\
S^2 &= 8.34067 \times 10^6 \quad \text{(variância amostral corrigida)}
\end{aligned}$$

O desvio padrão amostral corrigido é:

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{S^2} \\
&= \sqrt{8.34067 \times 10^6} \\
&\approx 2888.02
\end{aligned}$$

Para testar as hipóteses sobre o valor esperado de uma distribuição normal com variância desconhecida, utilizamos a estatística de teste T que segue uma distribuição t de Student com $(n-1)$ graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \\
&= \frac{41089.3 - 40000}{2888.02/\sqrt{19}} \\
&= \frac{1089.3}{2888.02/4.3589} \\
&= \frac{1089.3}{662.557} \\
&\approx 1.644
\end{aligned}$$

Como estamos testando $H_a : \mu < 40000$ (hipótese alternativa da consultora), mas o valor da estatística de teste $T \approx 1.644$ é positivo, significa que os dados amostrais indicam $\bar{X} > \mu_0$. Isto contradiz a direção da hipótese alternativa.

Para calcular o valor-p para este teste unilateral à esquerda:

$$\begin{aligned}
\text{valor-}p &= P(T_{18} \leq 1.644) \\
&= 1 - P(T_{18} \leq -1.644) \\
&\approx 0.941
\end{aligned}$$

Como o valor-$p \approx 0.941$ é maior que os níveis de significância usuais $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.10\}$, não rejeitamos a hipótese nula H_0 em favor da hipótese alternativa H_a em nenhum destes níveis.

Resposta: A opção correta é **(A) Não se rejeita para 1%, 5% e 10%**.

5. **Um inquérito a 100 lisboetas revelou que, entre eles, 19 são favoráveis à aplicação de uma taxa à circulação automóvel no centro histórico da cidade.**

   Uma engenheira afirmou que "um quarto dos lisboetas é favorável à proposta". Avalie se os dados recolhidos contrariam esta afirmação. Decida com base no valor-p.

   A) **Rejeita-se para 10% e não se rejeita para 1% e 5%**
   B) **Não se rejeita para 1%, 5% e 10%**
   C) **Rejeita-se para 1%, 5% e 10%**
   D) **Rejeita-se para 5% e 10% e não se rejeita para 1%**

Resolução:

Neste problema, estamos perante um teste de hipóteses sobre a proporção p de lisboetas favoráveis à aplicação da taxa. As hipóteses são:

$$H_0 : p = 0.25$$
$$H_a : p \neq 0.25$$

Dados do problema:

$$n = 100 \quad \text{(tamanho da amostra)}$$
$$X = 19 \quad \text{(número de indivíduos favoráveis)}$$

A proporção amostral é:

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{X}{n} \\ &= \frac{19}{100} \\ &= 0.19\end{aligned}$$

Sob H_0, o erro padrão da proporção é:

$$\begin{aligned}\text{SE}(\hat{p}) &= \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{100}} \\ &= \sqrt{0.001875} \\ &\approx 0.0433\end{aligned}$$

Para testar as hipóteses, calculamos a estatística de teste z:

$$\begin{aligned}z &= \frac{\hat{p} - p_0}{\text{SE}(\hat{p})} \\ &= \frac{0.19 - 0.25}{0.0433} \\ &\approx -1.386\end{aligned}$$

Como o teste é bilateral, o valor-p é calculado por:

$$\begin{aligned}\text{valor-}p &= 2 \times P(Z \leq -1.386) \\ &\approx 2 \times 0.0829 \\ &\approx 0.1658\end{aligned}$$

Como o valor-$p \approx 0.1658$ é maior que os níveis de significância usuais $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.10\}$, não rejeitamos a hipótese nula H_0 em favor da hipótese alternativa H_a em nenhum destes níveis.

Resposta: A opção correta é **(B) Não se rejeita para 1%, 5% e 10%**.