Probabilidade e Estatística

Series de Problemas 4

08 de Maio de 2025

1. **Admita que o número de programas examinados de modo independente até que se observe o primeiro programa que não compile é representado pela variável aleatória X com distribuição geométrica com parâmetro p, onde p é uma probabilidade desconhecida. Determine a estimativa de máxima verosimilhança de p, atendendo à amostra $(4, 5, 13, 30)$ proveniente da população X.**

Resolução:

Considere-se a variável aleatória $X \sim \text{Geom}(p)$ que representa o número de programas examinados até observar o primeiro que não compile, incluindo este. A função de probabilidade da distribuição geométrica é:

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Para a amostra $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 5, 13, 30)$, a função de verosimilhança é:

$$\begin{aligned}
L(p) &= \prod_{i=1}^{4} P(X = x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{4} (1-p)^{x_i - 1} p \\
&= p^4 \times (1-p)^{\sum_{i=1}^{4}(x_i - 1)} \\
&= p^4 \times (1-p)^{48}
\end{aligned}$$

Para maximizar a verosimilhança, aplique-se o logaritmo natural:

$$\begin{aligned}
\ell(p) &= \log L(p) \\
&= \log\left(p^4 \times (1-p)^{48}\right) \\
&= 4 \log p + 48 \log(1-p)
\end{aligned}$$

Derive-se $\ell(p)$ em relação a p:

$$\begin{aligned}\frac{d\ell}{dp} &= \frac{d}{dp}\left(4\log p + 48\log(1-p)\right)\\ &= \frac{4}{p} + 48 \cdot \frac{1}{1-p} \cdot (-1)\\ &= \frac{4}{p} - \frac{48}{1-p}\end{aligned}$$

Igualando a derivada a zero para encontrar o valor de p que maximiza $\ell(p)$:

$$\begin{aligned}\frac{4}{p} - \frac{48}{1-p} &= 0\\ \frac{4}{p} &= \frac{48}{1-p}\\ 4(1-p) &= 48p\\ 4 - 4p &= 48p\\ 4 &= 52p\\ p &= \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0.0769\end{aligned}$$

Resposta: A estimativa de máxima verosimilhança de p é $\frac{1}{13} \approx 0.0769$.

2. **Tem-se assumido que o impacto hidrodinâmico (com valores medidos em unidades apropriadas), X do casco de um navio sobre uma onda em determinada região do globo possui função de densidade de probabilidade dada por**

$$f(x) = \left|\frac{2x}{\lambda^2}\right| e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}},$$

onde $x > 0$ e o parâmetro λ é uma constante positiva desconhecida. Tendo por base uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_{13})$ de X com $n = 13$, determine a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro λ para uma realização da amostra tal que $\sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 62$.

Resolução:

Comece-se por observar que a função de densidade fornecida pode ser reescrita, já que $x > 0$, como:

$$f(x) = \frac{2x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}}, \quad x > 0$$

Trata-se da distribuição de Rayleigh generalizada. A função de verosimilhança para uma amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dada por:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\lambda^2} e^{-\frac{x_i^2}{\lambda^2}} = \left(\frac{2^n}{\lambda^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot e^{-\frac{1}{\lambda^2} \sum x_i^2}$$

Passe-se à log-verosimilhança:

$$\ell(\lambda) = \log L(\lambda) = n \log 2 - 2n \log \lambda + \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{1}{\lambda^2} \sum x_i^2$$

Derivando em relação a λ e igualando a zero:

$$\frac{d\ell}{d\lambda} = -\frac{2n}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3} \sum x_i^2 = 0$$
$$\Rightarrow -2n\lambda^2 + 2 \sum x_i^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2$$
$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$$

Apliquemos agora à amostra fornecida:

$$n = 13$$
$$\sum x_i^2 = 62$$
$$\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{62}{13}} = \sqrt{4.7692} \approx 2.1839$$

Resposta: A estimativa de máxima verosimilhança de λ é 2,18 (com duas casas decimais).