

Probabilidade e Estatística

Series de Problemas 2

24 de Março de 2025

1. Estima-se que 9% dos doentes que se dirigem a um dado hospital durante um dado surto de gripe tenham gripe. A probabilidade de haver pelo menos 4 doentes com gripe num conjunto de 18 doentes que se dirigem ao hospital durante esse surto de gripe é:

Resolução:

Defina-se a variável aleatória X como o número de doentes com gripe em 18 doentes. Observe-se que:

$$p = 0.09 \quad (\text{probabilidade de um doente ter gripe})$$

$$n = 18 \quad (\text{número total de doentes})$$

Note-se que X segue uma distribuição binomial:

$$X \sim \text{Bin}(18, 0.09)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] \end{aligned}$$

Utilizando a função `BinomialCD` da calculadora Casio fx-CG50, calcula-se a probabilidade acumulada:

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 0.92773717$$

$$P(X \geq 4) = 1 - 0.92773717 = 0.07226283$$

Resposta: A probabilidade de pelo menos 4 entre 18 doentes terem gripe é aproximadamente 0.07 ou 7.23%.

2. Numa grande instituição bancária, 9% das pessoas empregadas são programadoras de profissão, 43% das pessoas empregadas são mulheres e 6% das mulheres empregadas são programadoras de profissão. Considere que a variável aleatória

X representa o número de pessoas da instituição que são seleccionadas, ao acaso e com reposição, até ser detectado pela primeira vez um homem programador de profissão. Obtenha $P(X > 5)$.

Resolução:

Defina-se os eventos P e M como sendo, respectivamente, a pessoa ser programadora e a pessoa ser mulher. O enunciado fornece:

$$P(P) = 0.09$$

$$P(M) = 0.43 \quad (\text{consequentemente, } P(\overline{M}) = 0.57)$$

$$P(P|M) = 0.06$$

Primeiramente, determine-se a probabilidade de uma pessoa ser homem programador. Utilizando o teorema da probabilidade total:

$$P(P) = P(P|M)P(M) + P(P|\overline{M})P(\overline{M})$$

$$0.09 = 0.06 \times 0.43 + P(P|\overline{M}) \times 0.57$$

$$0.09 = 0.0258 + P(P|\overline{M}) \times 0.57$$

$$P(P|\overline{M}) = \frac{0.09 - 0.0258}{0.57} = \frac{0.0642}{0.57} = 0.1126...$$

Assim, a probabilidade de seleccionar um homem programador é:

$$p = P(\overline{M} \cap P) = P(\overline{M}) \times P(P|\overline{M}) = 0.57 \times 0.1126... = 0.0642...$$

A variável aleatória X segue uma distribuição geométrica com parâmetro $p = 0.0642...$. Utilizando a função `GeometricCD` da calculadora Casio fx-CG50 ou pela fórmula:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= (1 - p)^5 \\ &= (1 - 0.0642...) ^5 \\ &= (0.9358...) ^5 \\ &= 0.7177... \end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade de precisar selecionar mais de 5 pessoas até encontrar o primeiro homem programador é aproximadamente 0.72 ou 72%.

3. Numa produção em série, o número total de peças fabricadas por hora segue uma distribuição de Poisson. A probabilidade de não ser fabricada qualquer peça numa hora é igual a 0.027. Qual é a probabilidade de serem fabricadas 4 peças numa hora, sabendo que foi fabricada pelo menos uma peça nesse período de tempo? Indique o resultado com, pelo menos, quatro casas decimais.

Resolução:

Considere-se a variável aleatória X como o número de peças fabricadas por hora:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Segundo o enunciado, sabe-se que:

$$P(X = 0) = 0.027$$

Para determinar o valor de λ , utilize-se a função de probabilidade da Poisson:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= e^{-\lambda} = 0.027 \\ \lambda &= -\ln(0.027) \end{aligned}$$

Utilizando a função \ln da calculadora Casio fx-CG50:

$$\lambda \approx 3.6119$$

A probabilidade $P(X = 4)$ pode ser calculada utilizando a função

PoissonPD da calculadora:

$$\begin{aligned}P(X = 4) &= \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^4}{4!} \\&= \frac{e^{-3.6119} \times (3.6119)^4}{24} \\&\approx 0.1915\end{aligned}$$

Aplicando a probabilidade condicional:

$$\begin{aligned}P(X = 4 \mid X \geq 1) &= \frac{P(X = 4)}{P(X \geq 1)} \\&= \frac{0.1915}{1 - P(X = 0)} \\&= \frac{0.1915}{1 - 0.027} \\&= \frac{0.1915}{0.973} \\&\approx 0.1968\end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade de serem fabricadas 4 peças numa hora, sabendo que foi fabricada pelo menos uma peça, é 0.1968.

4. A quantidade mensal de certa matéria-prima usada num estaleiro naval é representada pela variável aleatória X com distribuição uniforme contínua com valor esperado 35 e desvio padrão 3. Obtenha $E(50 + 30\sqrt{X})$, o custo mensal esperado de tal matéria-prima. Indique o resultado com pelo menos três casas decimais.

Resolução:

Sabe-se que $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ com $E[X] = 35$ e $\sigma_X = 3$.

Para uma distribuição uniforme, tem-se:

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{a+b}{2} = 35 \quad \Rightarrow \quad a+b = 70 \\ \text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} = 9 \\ \Rightarrow (b-a)^2 &= 108 \\ \Rightarrow b-a &= \sqrt{108} \approx 10.3923\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para a e b :

$$\begin{cases} a+b = 70 \\ b-a \approx 10.3923 \end{cases}$$

Utilizando a função **solve** da calculadora Casio fx-CG50:

$$\begin{aligned}b &\approx 40.1962 \\ a &\approx 29.8039\end{aligned}$$

Para calcular $E[\sqrt{X}]$ para $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$:

$$\begin{aligned}E[\sqrt{X}] &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{1}{10.3923} \times \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_a^b \\ &= \frac{2}{3 \times 10.3923} \times (b^{3/2} - a^{3/2})\end{aligned}$$

Calculando com a calculadora Casio fx-CG50:

$$E[\sqrt{X}] \approx 5.91063$$

O custo esperado é:

$$\begin{aligned}E(50 + 30\sqrt{X}) &= 50 + 30 \times E[\sqrt{X}] \\ &= 50 + 30 \times 5.91063 \\ &\approx 227.319\end{aligned}$$

Resposta: O custo mensal esperado é 227.319.

5. O tempo de vida de lasers de um dado tipo possui distribuição normal com valor esperado igual a 7197 horas e desvio padrão igual a 609 horas. A probabilidade de o tempo de vida de um desses lasers ser inferior a 5090 horas é:

Resolução:

Considere-se a variável aleatória X como o tempo de vida dos lasers:

$$X \sim N(\mu = 7197, \sigma = 609)$$

Pretende-se calcular:

$$P(X < 5090)$$

Para isso, padronize-se a variável X calculando o Z-score:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{5090 - 7197}{609} \\ &= -3.4599... \end{aligned}$$

Utilizando a função `NormalCD` da calculadora Casio fx-CG50:

$$P(X < 5090) = P(Z < -3.46) \approx 0.00027$$

Resposta: A probabilidade de o tempo de vida de um desses lasers ser inferior a 5090 horas é aproximadamente 0.0003 ou 0.03%.