Distribuição de Irwin-Hall - Exercício 6

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias contínuas independentes e identicamente distribuídas a $X \sim \text{uniforme}(0,1)$. Então $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ possui distribuição de Irwin-Hall e

$$P(S_n \leq x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^k \binom{n}{k}(x-k)^n,$$

para $0 \leq x \leq n$ e onde $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira do real x.

1. Obtenha o valor exato de $p_n = P(S_n \leq x)$, para $n = 12$ e $x = 6.25$.
2. Calcule dois valores aproximados de p_n recorrendo aos métodos seguintes:
   (a) **Teorema do limite central** ($p_{n,\text{TLC}}$)
   Recorra ao TLC, apesar de n ser inferior a 30.
   (b) **Simulação** ($p_{n,\text{sim}}$)
      i. Fixando a semente em 4469, gere $m = 100$ amostras de dimensão $n = 12$ da distribuição de X.
      ii. Calcule um valor simulado de S_n para cada uma das amostras geradas.
      iii. Obtenha a proporção de valores simulados de S_n que não excedem 6.25.
3. Determine o desvio absoluto entre o valor exato calculado em 1., p_n, e o valor aproximado obtido em 2a., $p_{n,\text{TLC}}$.
4. Calcule o desvio absoluto entre p_n e $p_{n,\text{sim}}$.
5. Calcule o quociente entre os desvios calculados em 3. e 4. e apresente o resultado arredondado a 4 casas decimais.

Código R

```r
# Parameters
n <- 12
x <- 6.25
m <- 100  # number of samples for simulation

# 1. Exact value using Irwin-Hall distribution formula
# P(S_n <= x) = (1/n!) * sum_{k=0}^{floor(x)} (-1)^k * choose(n,k) * (x-k)^n

exact_probability <- function(n, x) {
  floor_x <- floor(x)
  sum_term <- 0

  for (k in 0:floor_x) {
    term <- (-1)^k * choose(n, k) * (x - k)^n
    sum_term <- sum_term + term
  }

  return(sum_term / factorial(n))
}

p_n <- exact_probability(n, x)
cat("1. Valor exato p_n =", p_n, "\n")
```

```r
# 2a. Central Limit Theorem approximation
# For X ~ Uniform(0,1): E(X) = 0.5, Var(X) = 1/12
# For S_n: E(S_n) = n * 0.5 = 6, Var(S_n) = n * (1/12) = 1

mean_sn <- n * 0.5
var_sn <- n * (1/12)
sd_sn <- sqrt(var_sn)

# Standardize and use normal approximation
z <- (x - mean_sn) / sd_sn
p_n_tlc <- pnorm(z)
cat("2a. Aproximacao TLC p_n_TLC =", p_n_tlc, "\n")

# 2b. Simulation
set.seed(4469)

# Generate m samples of size n from Uniform(0,1)
sn_values <- numeric(m)

for (i in 1:m) {
  # Generate n uniform random variables and sum them
  sample_x <- runif(n, 0, 1)
  sn_values[i] <- sum(sample_x)
}

# Calculate proportion of S_n values <= 6.25
p_n_sim <- mean(sn_values <= x)
cat("2b. Aproximacao por simulacao p_n_sim =", p_n_sim, "\n")

# 3. Absolute deviation between exact and CLT
desvio_tlc <- abs(p_n - p_n_tlc)
cat("3. Desvio absoluto |p_n - p_n_TLC| =", desvio_tlc, "\n")

# 4. Absolute deviation between exact and simulation
desvio_sim <- abs(p_n - p_n_sim)
cat("4. Desvio absoluto |p_n - p_n_sim| =", desvio_sim, "\n")

# 5. Ratio of deviations
quociente <- desvio_tlc / desvio_sim
cat("5. Quociente dos desvios =", quociente, "\n")
cat("5. Quociente arredondado a 4 casas decimais =", round(quociente, 4), "\n")

# Additional information
cat("\nInformacoes adicionais:\n")
cat("Media de S_n (teorica):", mean_sn, "\n")
cat("Desvio padrao de S_n (teorico):", sd_sn, "\n")
cat("Media das simulacoes de S_n:", mean(sn_values), "\n")
cat("Desvio padrao das simulacoes de S_n:", sd(sn_values), "\n")
```

Resultados

Solução

Para a distribuição de Irwin-Hall com $n = 12$ e $x = 6.25$:

Método	**Valor**
1. Valor exato p_n	0.5975144
2a. Aproximação TLC $p_{n,\text{TLC}}$	0.5987063
2b. Aproximação por simulação $p_{n,\text{sim}}$	0.6
3. Desvio absoluto $\lvert p_n - p_{n,\text{TLC}} \rvert$	0.001191937
4. Desvio absoluto $\lvert p_n - p_{n,\text{sim}} \rvert$	0.002485612
5. Quociente dos desvios	**0.4795348**

Resposta final: O quociente entre os desvios calculados em 3. e 4., arredondado a 4 casas decimais, é $\boxed{0.4795}$.

Observação: O Teorema do Limite Central proporcionou uma melhor aproximação que a simulação com apenas 100 amostras, resultando num quociente inferior a 1.