Estimação por Máxima Verossimilhança - Exercício 7

Considere que a variável aleatória X representa o comprimento (em cm) dos ovos de uma dada espécie de pássaro e que pode ser modelada pela função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x},$$

para x > 0, onde α e λ são parâmetros com valores positivos desconhecidos e

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha - 1} e^{-t} \, dt$$

denota a função Gama.

Ao deduzir as estimativas de máxima verossimilhança de α e λ , $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$, constatará que $\hat{\lambda}$ se pode escrever como função de $\hat{\alpha}$ mas que não existe uma solução explícita para $\hat{\alpha}$. No entanto, $\hat{\alpha}$ pode ser obtida numericamente por recurso à função uniroot do R. Use o intervalo [62.2, 77.8] como intervalo inicial de pesquisa e não utilize qualquer outro argumento opcional dessa função.

Assuma que (X_1,\ldots,X_n) é uma amostra aleatória de X e que a observação de n=16 ovos dessa espécie de pássaro resultou em $\sum_{i=1}^n x_i = 120.68$ e $\sum_{i=1}^n \log x_i = 32.2$.

Determine a estimativa de máxima verossimilhança de $(\alpha - 1)/\lambda$, o comprimento modal dos ovos dessa espécie de pássaro, indicando-a arredondada a 2 casas decimais.

Código R

```
# Given data
n <- 16
sum_x <- 120.68
sum_log_x <- 32.2</pre>
# Sample statistics
x_bar <- sum_x / n
log_x_bar <- sum_log_x / n</pre>
cat("Dados:\n")
cat("n =", n, "\n")
cat("sum(x_i) =", sum_x, "\n")
cat("sum(log(x_i)) =", sum_log_x, "\n")
cat("x_bar =", x_bar, "\n")
cat("log_x_bar =", log_x_bar, "\n\n")
# For Gamma distribution with pdf f(x) = (lambda^alpha / Gamma(alpha)) * x^(
   alpha-1) * exp(-lambda*x)
# The MLE equations are:
# 1) lambda_hat = alpha_hat / x_bar
# 2) digamma(alpha_hat) - log(alpha_hat) + log(x_bar) - log_x_bar = 0
# Define the equation to solve for alpha_hat
# digamma(alpha) - log(alpha) + log(x_bar) - log_x_bar = 0
equation_for_alpha <- function(alpha) {
  digamma(alpha) - log(alpha) + log(x_bar) - log_x_bar
# Use uniroot to find alpha_hat in the interval [62.2, 77.8]
alpha_hat <- uniroot(equation_for_alpha, interval = c(62.2, 77.8))$root
# Calculate lambda_hat using the relationship lambda_hat = alpha_hat / x_bar
lambda_hat <- alpha_hat / x_bar</pre>
```

Resultados

Solução

Para a estimação por máxima verossimilhança da distribuição Gama com os dados observados:

Estatística/Estimativa	Valor
n	16
$\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\sum_{i=1}^{n} \log x_i$	120.68
$\sum_{i=1}^{n} \log x_i$	32.2
\bar{x}	7.5425
$\overline{\log x}$	2.0125
\hat{lpha}	62.24955
$\hat{\lambda}$	8.253173
Comprimento modal $\frac{\hat{\alpha}-1}{\hat{\lambda}}$	7.421334

Resposta final: A estimativa de máxima verossimilhança de $\frac{(\alpha-1)}{\lambda}$, arredondada a 2 casas decimais, é $\boxed{7.42}$.

Observação: A verificação confirma que $\hat{\alpha}$ satisfaz a equação de verossimilhança com erro numérico praticamente nulo (1.285×10^{-9}) .