Estimação por Máxima Verossimilhança - Exercício 7

Considere que a variável aleatória X representa o comprimento (em cm) dos ovos de uma dada espécie de pássaro e que pode ser modelada pela função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},$$

para $x > 0$, onde α e λ são parâmetros com valores positivos desconhecidos e

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

denota a função Gama.
Ao deduzir as estimativas de máxima verossimilhança de α e λ, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$, constatará que $\hat{\lambda}$ se pode escrever como função de $\hat{\alpha}$ mas que não existe uma solução explícita para $\hat{\alpha}$. No entanto, $\hat{\alpha}$ pode ser obtida numericamente por recurso à função `uniroot` do R. Use o intervalo $[62.2, 77.8]$ como intervalo inicial de pesquisa e não utilize qualquer outro argumento opcional dessa função.
Assuma que $(X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de X e que a observação de $n = 16$ ovos dessa espécie de pássaro resultou em $\sum_{i=1}^n x_i = 120.68$ e $\sum_{i=1}^n \log x_i = 32.2$.
Determine a estimativa de máxima verossimilhança de $(\alpha - 1)/\lambda$, o comprimento modal dos ovos dessa espécie de pássaro, indicando-a arredondada a 2 casas decimais.

Código R

```r
# Given data
n <- 16
sum_x <- 120.68
sum_log_x <- 32.2

# Sample statistics
x_bar <- sum_x / n
log_x_bar <- sum_log_x / n

cat("Dados:\n")
cat("n =", n, "\n")
cat("sum(x_i) =", sum_x, "\n")
cat("sum(log(x_i)) =", sum_log_x, "\n")
cat("x_bar =", x_bar, "\n")
cat("log_x_bar =", log_x_bar, "\n\n")

# For Gamma distribution with pdf f(x) = (lambda^alpha / Gamma(alpha)) * x^(
    alpha-1) * exp(-lambda*x)
# The MLE equations are:
# 1) lambda_hat = alpha_hat / x_bar
# 2) digamma(alpha_hat) - log(alpha_hat) + log(x_bar) - log_x_bar = 0

# Define the equation to solve for alpha_hat
# digamma(alpha) - log(alpha) + log(x_bar) - log_x_bar = 0
equation_for_alpha <- function(alpha) {
  digamma(alpha) - log(alpha) + log(x_bar) - log_x_bar
}

# Use uniroot to find alpha_hat in the interval [62.2, 77.8]
alpha_hat <- uniroot(equation_for_alpha, interval = c(62.2, 77.8))$root

# Calculate lambda_hat using the relationship lambda_hat = alpha_hat / x_bar
lambda_hat <- alpha_hat / x_bar
```

```r
# Calculate the modal length: (alpha - 1) / lambda
modal_length <- (alpha_hat - 1) / lambda_hat

cat("Estimativas de Maxima Verossimilhanca:\n")
cat("alpha_hat =", alpha_hat, "\n")
cat("lambda_hat =", lambda_hat, "\n")
cat("Comprimento modal (alpha_hat - 1) / lambda_hat =", modal_length, "\n")
cat("Comprimento modal arredondado a 2 casas decimais =", round(modal_length, 2)
    , "\n")

# Verification: check if our alpha_hat satisfies the equation
cat("\nVerificacao:\n")
cat("Valor da equacao em alpha_hat:", equation_for_alpha(alpha_hat), "\n")
```

Resultados

Solução

Para a estimação por máxima verossimilhança da distribuição Gama com os dados observados:

Estatística/Estimativa	**Valor**
n	16
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	120.68
$\sum_{i=1}^{n} \log x_i$	32.2
$\bar{x}$	7.5425
$\overline{\log x}$	2.0125
$\hat{\alpha}$	62.24955
$\hat{\lambda}$	8.253173
Comprimento modal $\frac{\hat{\alpha}-1}{\hat{\lambda}}$	**7.421334**

Resposta final: A estimativa de máxima verossimilhança de $\frac{(\alpha-1)}{\lambda}$, arredondada a 2 casas decimais, é $\boxed{7.42}$.

Observação: A verificação confirma que $\hat{\alpha}$ satisfaz a equação de verossimilhança com erro numérico praticamente nulo (1.285×10^{-9}).