Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MS211 - Calculo Numérico

Relatório - Projeto SIR

Alunos
Guido Neulaender - 217100
Heloisa Pimentel Lins de Silva - 236510
João Francisco Figueiredo Miranda - 218592
Rodrigo Ryan Oliveira da Silva - 244024
Silas Leonel Pereira Miranda - 258984

Professor
Dr. Maicon Ribeiro Corrêa

16 de Julho de 2020

Introdução

Esse projeto foi feito com intuito de compreender a evolução do coronavírus no Estado de Minas Gerais. Nele foi utilizado o modelo compartimental SIR (Suscetíveis-Infectados-Removidos), que divide a população (N) em 3 grupos: suscetíveis a infecção (S); os que já foram infectados e que podem infectar os (I); e os que já foram removidos (R), seja por terem sido curados ou pelo óbito. É sabido que esses 3 grupos interagem segundo o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\gamma r_0 \frac{IS}{N}, \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(r_0\frac{IS}{N} - I\right) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

onde $r_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ é constante ou dado em função do tempo. Para simulação desse sistema foi utilizado o método numérico de Runge-Kutta, que foi escolhido por ser um método bastante flexível, o que permite que sejam simulados diversos cenários com diversas condições iniciais. Vale ressaltar que foram utilizadas como base de dados as seguintes referências: o painel coronavírus, organizado pelo Professor Alberto Saa [4]; o site da Wikipédia sobre *Compartmental models in epidemiology* [5] e o livro Cálculo Numérico de Marcia A. G. Ruggiero e Vera L. R. Lopes [2]. Ao final da pesquisa, conseguimos obter alguns resultados, disponibilizados em anexo ao final do relatório, que iremos discutir brevemente o que eles querem dizer e com toda implementação do código podendo ser encontrada no GitHub do grupo [1].

Para compreensão da evolução do coronavírus a partir do sistema de EDOs, dito anteriormente, foi-se avaliada duas possibilidades em relação ao r_0, a primeira com o seu valor constante e a segunda com seu valor variando em relação ao tempo. Possivelmente, a principal diferença entre as duas possibilidades deve-se ao fato de que a segunda terá valores mais exatos do que a primeira, já que ela estará mudando sempre com o tempo devido a variação da taxa de infecção, enquanto a primeira terá sempre o mesmo valor independente das condições.

Para a primeira possibilidade, em que o r_0 é dito constante, adotamos seu valor como $r_0 \approx 2,6$, dado pela simples razão entre a taxa de infecção ($\beta \approx 0,34$) e a taxa de remoção ($\gamma \approx 0,13$). Já a segunda possibilidade, que seria o r_0 em função do tempo, foi calculado a partir da seguinte fórmula, dados γ e α:

$$r_0(t) = \frac{1}{1-\mu} + \frac{\ddot{C}}{\gamma\dot{C}(1-\mu)}, \text{ com } \quad \mu(t) = \frac{\alpha}{\gamma N}(\gamma C + \dot{C})$$

sendo C o número de casos acumulados até o dia t, $\dot{C}$ são o número de casos novos e $\ddot{C}$ é a variação do crescimento dos casos. A constante α (entre $10 < \alpha < 20$) é uma estimativa da relação entre o valor real R de indivíduos removidos e o número de casos acumulados, isto é, $R = \alpha C$. Tendo feito isso percebemos que o gráfico dos casos novos estava com muitos ruídos, principalmente pelo atraso dos diagnósticos, e para solucionar esse problema fizemos uma suavização do gráfico utilizando o filtro de média móvel:

$$\overline{C}_t = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=t-n}^{t+n} C_k$$

onde n delimita uma vizinhança simétrica de tamanho $2n+1$ em volta de um termo C_t. No nosso caso, seguimos o mesmo procedimento adotado em "Análise automática do Painel Coronavírus"do Prof. Alberto Saa [3], aplicando uma suavisação de $n = 3$ quatro vezes. Para tanto, usamos a seguinte extensão de dados em cada uma das aplicações

$$C_{1-j} = C_1 \quad \text{e} \quad C_{k+j} = C_k + C_{k-n+j} - C_{k-n},$$

adicionando $2n$ novos elementos para não perdemos dados após a aplicação do filtro. Finalmente obtida uma suavisação satisfatória para o gráfico, calculamos os valores de r_0 e pudemos substituir seu valor no sistema de EDOs para ambas as possibilidades e finalmente aplicamos o método de Runge-Kutta, com a simulação podendo ser encontrada em anexo ao final do relatório.

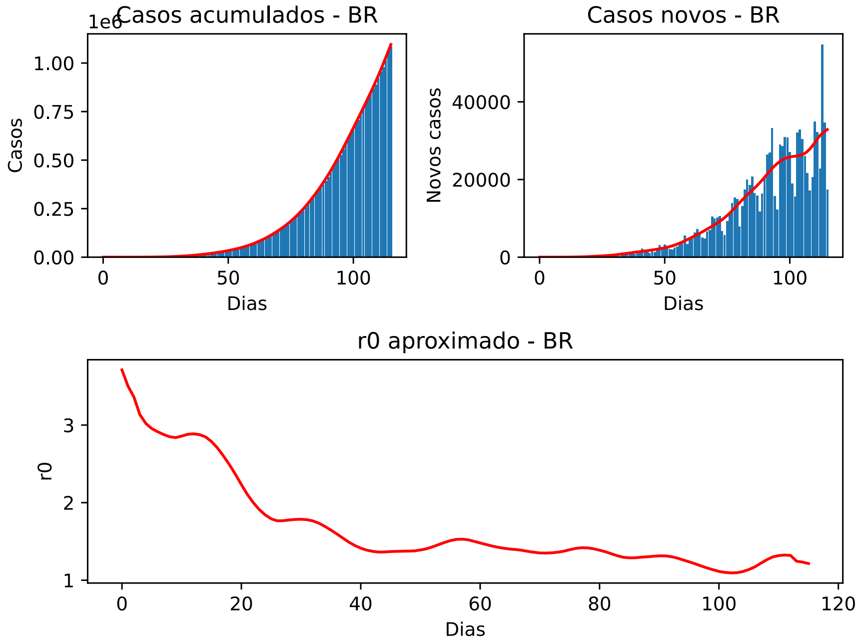
Com r_0 constante, e iniciando a partir de um dia onde haviam 7 casos no estado de Minas Gerais, 17 de março de 2020, e usando como período total da incidência do vírus em torno de 140 dias, chegamos ao gráfico que está no anexo 3. Nele, podemos perceber que com o avanço do vírus no estado, o grupo de infectados, aumenta abruptamente tendo um pico em torno de 70 dias e, após o dobro de tempo, tende a zero. qui, podemos perceber que o vírus tende a rapidamente atingir um grande número de pessoas, fazendo o número de pessoas suscetíveis a infecção diminuir junto com o aumento de infectados, tendendo zero. Ainda, o número de removidos, aumenta a partir do ápice de infectados, mostrando que caso a doença acometer quase toda a população em pouco tempo teria um número de removidos maior que o de infectados.

Esta simulação mostra um cenário onde há a ausência da prevenção do vírus. Neste caso, rapidamente haveria um enorme número de infectados atingindo milhares de pessoas em poucos dias. E, também, o número de removidos, por considerar além de pessoas curadas e imunes ao vírus, considera também o número de óbitos, ou seja, não se sabe ao certo a porcentagem da população que criou imunidade ao vírus e a que não resistiu. Isso mostra que num quadro assim, poderiam haver danos irreparáveis à população geral.

Anexos

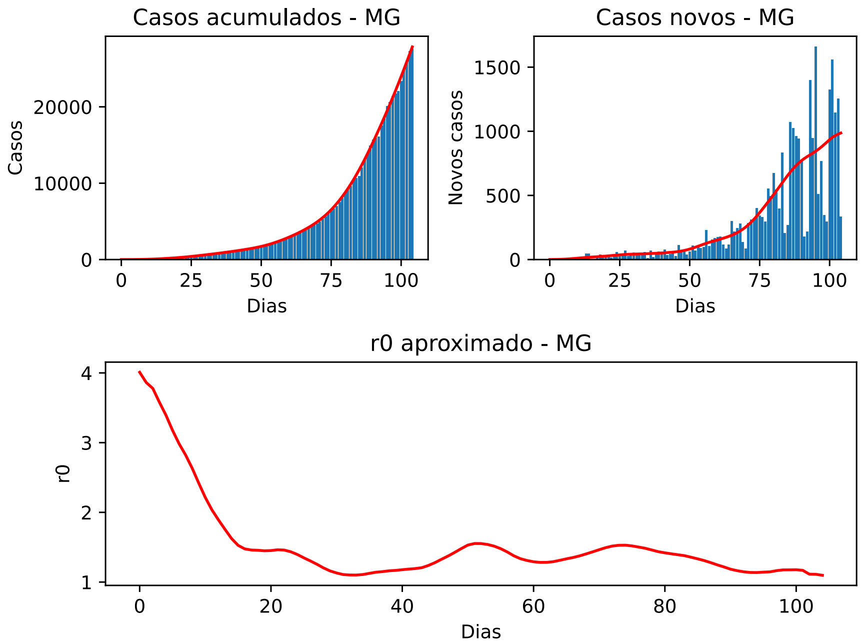
1. Dados preliminares do coronavírus no Brasil.

Brasil

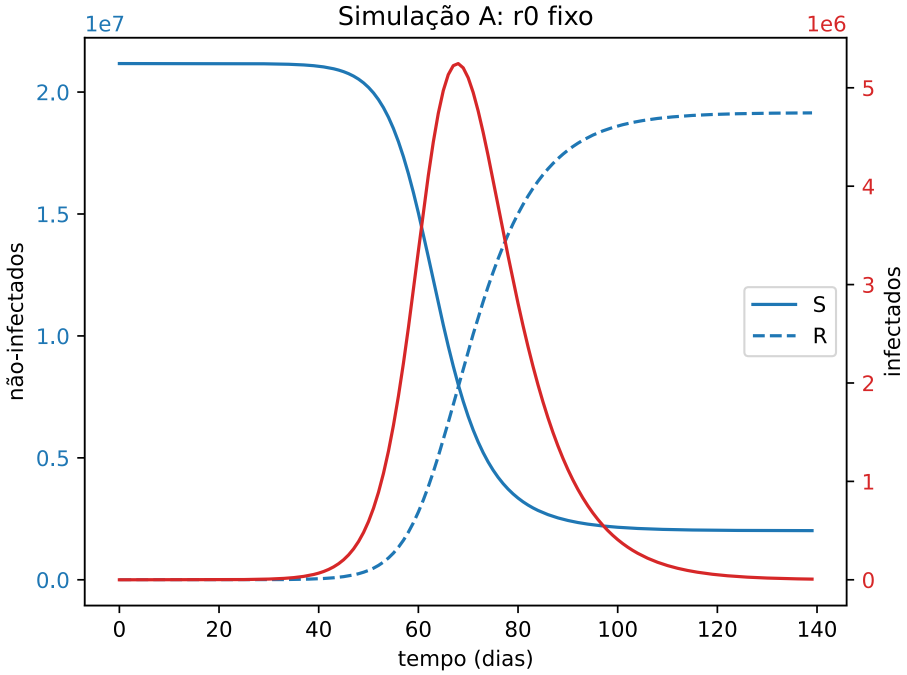


2. Dados preliminares do coronavírus em Minas Gerais.

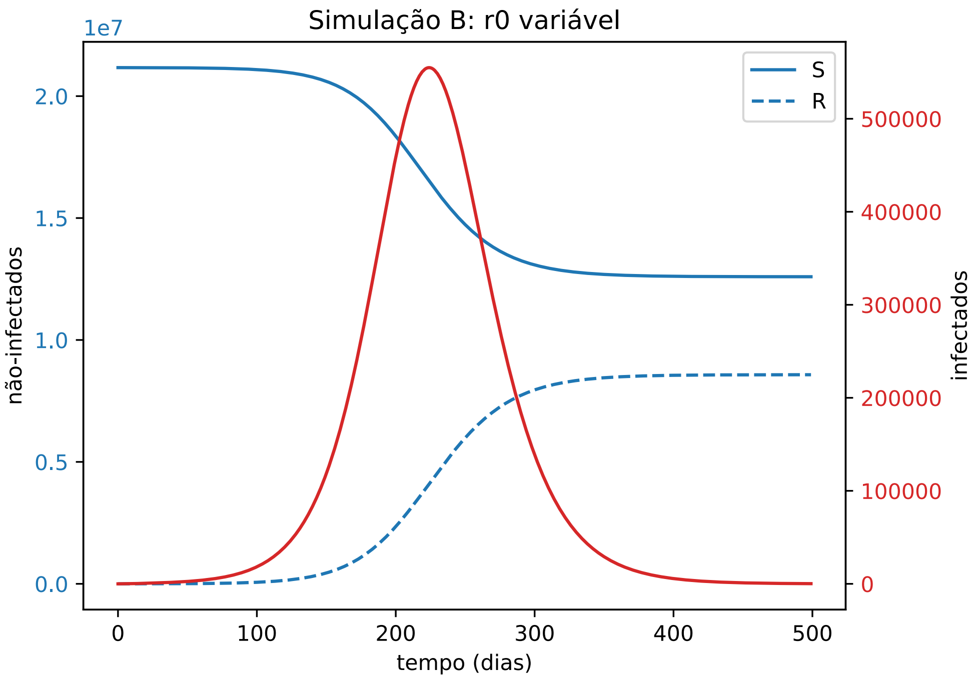
Minas Gerais



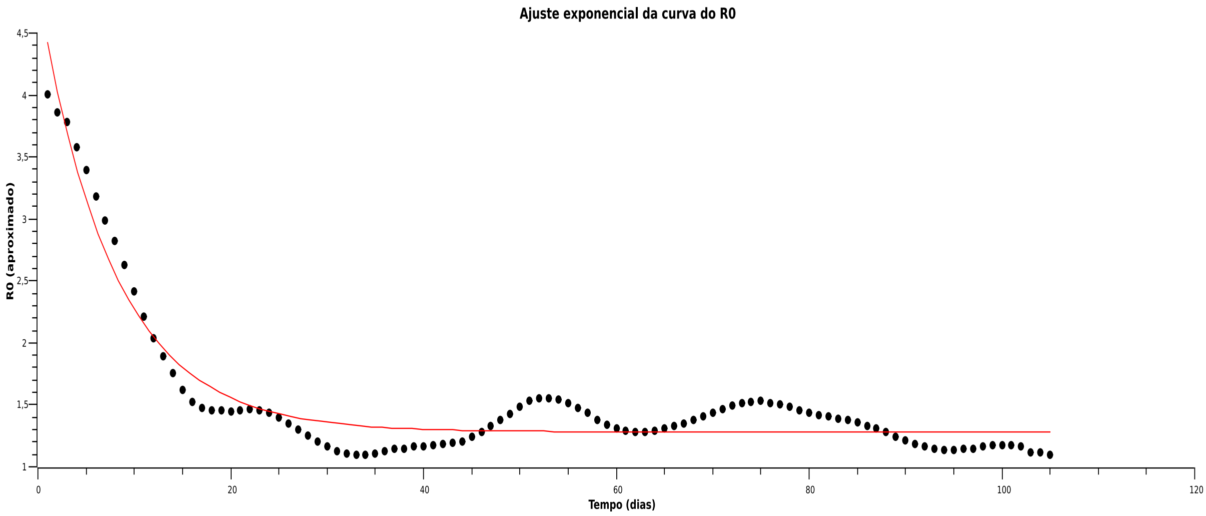
3. Simulação com r_0 constante.



4. Simulação com r_0 variando.



5. Ajuste exponencial da curva do $r_0(t)$ em Minas Gerais no SciDAVis.



6. Aplicação do método de Runge-Kutta no sistema de EDOs.

Nós sabemos resolver pelo método de Runge-Kutta PVIs da forma

$$\begin{cases} y' & = f(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

usando a formula de quarta ordem:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \quad \text{onde} \\ k_1 &= \Delta x \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Precisamos, então, reescrever as equações do modelo SIR

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\gamma r_0 \frac{IS}{N}, \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(r_0\frac{IS}{N} - I\right) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

de forma que consigamos aplicar Runge-Kutta. Para isso, vamos vetorizar!

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{f}(t,\vec{u}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \text{com} \quad f_1 = -\gamma r_0 \frac{IS}{N}, \quad f_2 = \gamma\left(r_0\frac{IS}{N} - I\right) \quad \text{e} \quad f_3 = \gamma I$$

Dessa forma temos que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t,\vec{u}) \text{ e } \quad \vec{u}(t_0) = u_0$$

e portanto podemos aplicar Runge-Kutta:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_n + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4\right), \quad \text{onde} \\ \vec{k}_1 &= \Delta t \cdot f(t_n, \vec{u}_n) \\ \vec{k}_2 &= \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t/2, \vec{u}_n + k_1/2) \\ \vec{k}_3 &= \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t/2, \vec{u}_n + k_2/2) \\ \vec{k}_4 &= \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t, \vec{u}_n + k_3) \end{aligned}$$

Referências

[1] *Calculo-Numerico-SIR*. URL: `https://github.com/GNeulaender/Calculo-Numerico-SIR`.

[2] Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. *Cálculo Numérico, Segunda Edição*. Pearson, 1998.

[3] Alberto Saa. *Análise automática do Painel Coronavírus*. URL: `http://vigo.ime.unicamp.br/COVID/covid.pdf`. (versão atualizada ainda não publicada).

[4] Alberto Saa. *Painel Coronavírus*. URL: `http://vigo.ime.unicamp.br/COVID/`.

[5] Wikipedia. *Compartmental models in epidemiology*. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology`.