Nós sabemos resolver pelo método de Runge-Kutta PVIs da forma

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

usando a formula de quarta ordem:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \quad \text{onde} \\ k_1 &= \Delta x \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Precisamos, então, reescrever as equações do modelo SIR

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\gamma r_0 \frac{IS}{N}, \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(r_0 \frac{IS}{N} - I\right) \text{ e } \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

de forma que consigamos aplicar Runge-Kutta. Para isso, vamos vetorizar!

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix} \text{ e } \quad \vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \text{com} \quad f_1 = -\gamma r_0 \frac{IS}{N}, \quad f_2 = \gamma \left(r_0 \frac{IS}{N} - I\right) \text{ e } \quad f_3 = \gamma I$$

Dessa forma temos que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{u}) \text{ e } \quad \vec{u}(t_0) = u_0$$

e portanto podemos aplicar Runge-Kutta:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_n + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4\right), \quad \text{onde} \\ \vec{k}_1 &= \Delta t \cdot f(t_n, \vec{u}_n) \\ \vec{k}_2 &= \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t/2, \vec{u}_n + k_1/2) \\ \vec{k}_3 &= \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t/2, \vec{u}_n + k_2/2) \\ \vec{k}_4 &= \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t, \vec{u}_n + k_3) \end{aligned}$$