

金融変動過程のモデル化

- 確率微分方程式と時系列モデル, 共和分性 -

一橋大学院経営管理研究科

中村 信弘*

Sep.21,2018
(学内限)

概要

線形確率微分方程式の解、自己回帰過程、共和分について解説する。

Keywords: linear SDE, AR model, co-integration

1 Linear SDE

Finance でよく現れる線形 1 次元の SDE は

$$dx(t) = (ax(t) + b)dt + \sigma dB(t) \quad (1.1)$$

のような形をしている。 $ax(t) + b = a(x(t) + b/a)$ なので、 $\tilde{x}(t) = x(t) + b/a$ とおくと、この SDE は

$$d\tilde{x}(t) = a\tilde{x}(t)dt + \sigma dB(t) \quad (1.2)$$

と書き換えられる。常微分方程式 $d\tilde{x}(t)/dt = a\tilde{x}(t)$ の一般解は

$$\int \frac{d\tilde{x}(t)}{\tilde{x}(t)} = \int a dt \longrightarrow \log \tilde{x}(t) = at + C$$

より、 $\tilde{x}(t) = e^{at+C} = C'e^{at}$ のような形をしている。SDE(1.2) の解の形を

$$\tilde{x}(t) = y(t)e^{at}$$

と想定してみよう。このとき、 $y(t) = \tilde{x}(t)e^{-at}$ は、次の SDE

$$\begin{aligned} dy(t) &= d\tilde{x}(t)e^{-at} - a\tilde{x}(t)e^{-at}dt \\ &= \sigma e^{-at}dB(t) \end{aligned}$$

*本稿は 2018 年(平成 30 年度)「投資戦略論」講義資料。 著者への問い合わせは以下の通り;
Email:nnakamura@ics.hit-u.ac.jp.

を満たすことがわかる。これは、拡散係数に確率過程を含まない単純な SDE なので、簡単に積分できて

$$y(t) - y(0) = \int_0^t \sigma e^{-as} dB(s)$$

となる。従って、

$$\tilde{x}(t)e^{-at} - \tilde{x}(0) = \int_0^t \sigma e^{-as} dB(s)$$

両辺に e^{at} を掛けて、元の $x(t)$ で表すと、結局、SDE(1.1) の解は

$$x(t) = -\frac{b}{a} + e^{at} \left(x(0) + \frac{b}{a} \right) + \int_0^t \sigma e^{a(t-s)} dB(s) \quad (1.3)$$

となる。

♠ Vasicek model:

確率金利モデルで有名な Vasicek model[14] では、短期金利は次の SDE

$$dr(t) = \kappa(\bar{r} - r(t))dt + \sigma dB(t) \quad (1.4)$$

で表される。これは、SDE(1.1) で $a = -\kappa, b = \kappa\bar{r}$ ととったものなので、(1.5) から

$$r(t) = \bar{r} + e^{-\kappa t} (r(0) - \bar{r}) + \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dB(s) \quad (1.5)$$

となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left(\int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dB(s) \right)^2 \right] &= \int_0^t \sigma^2 e^{-2\kappa(t-s)} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}). \end{aligned}$$

従って、 $r(t)$ は正規分布

$$r(t) \sim \mathcal{N} \left(\bar{r} + e^{-\kappa t} (r(0) - \bar{r}), \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \right) \quad (1.6)$$

に従うことがわかる。 $t \rightarrow \infty$ では $r(\infty)$ は正規分布 (不変分布)

$$r(\infty) \sim \mathcal{N} \left(\bar{r}, \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right) \quad (1.7)$$

に従う。pairs trading の spread return $r(t)$ は OU process に従うものが選択されるが、この long run の収束先が \bar{r} であり、その分散が $\sigma^2/(2\kappa)$ であるため、現在の spread level $r(t)$ が \bar{r} から乖離しており、 σ^2/κ が小さいような pair を選択するとよいことがわかる。

♠ Hull-White model

OU process で drift の定数項が時間依存性をもつように拡張されたものが Hull-White model[5, 6] で、短期金利は次のような SDE

$$dr(t) = (\theta(t) - \kappa r(t))dt + \sigma dB_r(t) \quad (1.8)$$

に従うことが仮定される。短期金利 $r(t)$ を求めるために

$$\Phi_r(t) := e^{-\kappa t}, \quad (1.9)$$

とすると、時点 $s(\geq t)$ で

$$r(s) = r(t)\Phi_r(s-t) + \int_t^s \theta(u)\Phi_r(s-u)du + \sigma_r \int_t^s \Phi_r(s-u)dB_r(u), \quad s > t. \quad (1.10)$$

となる。これは次のように導出することができる。SDE(1.8) を解くためには、 $e^{\kappa t}r(t)$ に対する SDE を考える。

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t}r(t)) &= \kappa e^{\kappa t}r(t)dt + e^{\kappa t}dr(t) \\ &= \theta(t)e^{\kappa t}dt + e^{\kappa t}\sigma dB_r(t) \end{aligned}$$

drift が deterministic になったので、両辺を $[t, s]$ の範囲で積分する。

$$\int_t^s d(e^{\kappa u}r(u))du = \int_t^s \theta(u)e^{\kappa u}du + \int_t^s e^{\kappa u}\sigma dB_r(u)$$

左辺は $e^{\kappa s}r(s) - e^{\kappa t}r(t)$ であるから、上式の両辺に $e^{-\kappa s}$ を掛けて、式を $r(s)$ について解くと、(1.10) が得られる。

次に、累積 interest rate は

$$\begin{aligned} R(t, T) &:= \int_t^T r(s)ds \\ &= \int_t^T ds r(t)\Phi_r(s-t) + \int_t^T ds \int_t^s \theta(u)\Phi_r(s-u)du + \sigma_r \int_t^T ds \int_t^s \Phi_r(s-u)dB_r(u) \\ &= r(t)V_r(T-t) + \int_t^T du \theta(u) \left\{ \int_u^T ds \Phi_r(s-u) \right\} + \sigma_r \int_t^T dB_r(u) \left\{ \int_u^T ds \Phi_r(s-u) \right\} \\ &= r(t)V_r(T-t) + \Theta_r(t, T) + \sigma \int_t^T V_r(T-u)dB_r(u). \end{aligned} \quad (1.11)$$

ここで

$$\begin{aligned} V_r(T-t) &:= \int_t^T ds \Phi_r(s-t) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}, \\ \Theta_r(T-t) &:= \int_t^T du \theta(u) V_r(T-u) = \int_t^T \theta(u) \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} du, \\ m_r(T-t) &:= r(t)V_r(T-t) + \Theta_r(T-t), \\ \sigma_r^2(T-t) &:= \sigma^2 \int_t^T V_r^2(T-u)du, \end{aligned} \quad (1.12)$$

とおく。これから、discount bond price は

$$\begin{aligned} P(t, T) &:= \mathbf{E}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}^*[e^{-R(t, T)} | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-m_r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_r^2(T-t)} \\ &= e^{-V_r(T-t)r(t) - \Theta_r(T-t)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

となる。

♣ Variance swap

Variance swap (long) は、満期時点 $t + \tau$ において、現時点 t で約定した variance swap rate $VS_{t,t+\tau}$ を払って、 $[t, t + \tau]$ で実現した分散

$$RV_{t,t+\tau} = \frac{252}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2 \quad (1.14)$$

を受け取る forward 契約 (short は逆の取引) である。実際には満期で

$$RV_{t,t+\tau} - VS_{t,t+\tau} \quad (\text{long position}) \quad (1.15)$$

のように差金決済される。従って、現時点では、通常の先渡し契約と同様にお金のやり取りはない。また、通常の swap のように繰り返し swap することも可能であるが、実際の variance swap は 1 回きりの取引である。

$Y_t := \log(S_t)$ とし、variance swap rate を計算するために、次のような変動過程 (Stochastic volatility model) を考えてみよう。

$$\begin{aligned} dY_t &= \kappa_y(\bar{Y} - Y_t)dt + \sqrt{V_t}dB_{Y,t}, \\ dV_t &= \kappa_v(\bar{V} - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dB_{V,t}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

このとき、variance swap rate は

$$\begin{aligned} VS_{t,t+\tau} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{E}_t^Q \left[\left(\int_t^{t+\tau} \sqrt{V_s} dB_{Y,s} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \mathbf{E}_t^Q \left[\int_t^{t+\tau} V_s ds \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

を計算すればよい。

問題 1.1 $SDE(1.16)$ の B_Y, B_V は独立とし、Vasicek model の SDE の解法を参考にして、variance swap rate (1.17) を計算せよ。martingale part の期待値は 0、つまり、 $\mathbf{E}_t^Q \left[\int_t^{t+\tau} f(s) \sqrt{V_s} dB_s \right] = 0$ であることに注意せよ。

2 自己回帰過程

前節の OU process は離散時間にとすると

$$r_t - r_{t-1} = \kappa(\bar{r} - r_{t-1})\Delta t + \sigma\Delta B_t, \quad \Delta B_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \quad (2.1)$$

AR(1) 過程となる。 $r_t \rightarrow x_t$ とすると

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \sigma_x \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (2.2)$$

ここで

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \kappa\bar{r}\Delta t, \\ \phi_1 &= 1 - \kappa\Delta t, \\ \sigma_x &= \sigma\sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

(2.2) は、繰り返し代入していくと

$$\begin{aligned} x_t &= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 x_{t-2} + \sigma_x \varepsilon_{t-1})x_{t-1} + \sigma_x \varepsilon_t \\ &= \phi_0(1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \cdots) + \phi_1^n x_{t-n} + \sigma_x(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots) \\ &\sim \mathcal{N}\left(\frac{\phi_0}{1 - \phi_1}, \frac{\sigma_x^2}{1 - \phi_1^2}\right) \end{aligned}$$

のように、 x_∞ の定常分布は平均 $\frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$ 、分散 $\frac{\sigma_x^2}{1 - \phi_1^2}$ の正規分布になることがわかる¹。

¹金融時系列の参考書は沢山あるが、例えば、[13, 3]などを挙げておく。

♣ sample data が等間隔の、例えば、daily data の場合は、 $\{x_t\}$ を $\{x_{t-1}\}$ に単回帰することで、parameter $\Theta = (\kappa, \bar{r}, \sigma)$ を推定することができる。

しかし、sample data が間隔が不規則であったり、欠測値があったりと、irregular である場合にはこの方法は使えない。この場合は、(1.6) を利用して、最尤推定を行う。

従って、観測データ $(r_{t_0}, \dots, r_{t_{i-1}}, r_{t_i}, \dots, r_{t_n})$ があるとき、 $r_{t_{i-1}} \rightarrow r_{t_i}$ の推移確率は正規分布

$$r(t_i) \sim \mathcal{N}(m(r_{i-1}), V_{t_{i-1}}), \quad m(r_{i-1}) := \bar{r} + e^{-\kappa(t_i - t_{i-1})} (r(t_{i-1}) - \bar{r}), \quad V_{t_{i-1}} := \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t_i - t_{i-1})}\right). \quad (2.3)$$

に従うため、尤度関数の最大化

$$\max_{\Theta} \left\{ n_1(r_{t_1}; m(r_{t_0}), V_{t_0}) \times \dots \times n_1(r_{t_i}; m(r_{t_{i-1}}), V_{t_{i-1}}) \times \dots \times n_1(r_{t_n}; m(r_{t_{n-1}}), V_{t_{n-1}}) \right\} \quad (2.4)$$

を行い、推定することができる。

data が等間隔で密なときには、離散近似式 (2.1) から、尤度 (2.4) で

$$n_1(r_{t_i}; m(r_{t_{i-1}}), V_{t_{i-1}}) \rightarrow n_1(r_{t_i}; r_{t_{i-1}} + \kappa(\bar{r} - r_{t_{i-1}})\Delta t, \sigma^2\Delta t)$$

と近似することが正当化されるが、そうでないときには、尤度 (2.4) を使わなければならない。

3 Multivariate OU Process

3.1 Solution of the Stochastic Differential Equation

multivariate OU process ²

$$d\mathbf{X}_t = -\mathbf{K}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})dt + \mathbf{S}d\mathbf{B}_t \quad (3.1)$$

この解は

$$\mathbf{X}_{t+\tau} = (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{K}\tau})\boldsymbol{\mu} + e^{-\mathbf{K}\tau}\mathbf{x}_t + \int_t^{t+\tau} e^{-\mathbf{K}(\tau-u)}\mathbf{S}d\mathbf{B}_u \quad (3.2)$$

ここで

$$\boldsymbol{\epsilon}_{t,\tau} \equiv \int_t^{t+\tau} e^{-\mathbf{K}(\tau-u)}\mathbf{S}d\mathbf{B}_u \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\tau).$$

Proof.

$$\mathbf{Y}_t \equiv e^{\mathbf{K}t}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})$$

と変数変換すると、(3.1) は

$$d\mathbf{Y}_t = e^{\mathbf{K}t}\mathbf{S}d\mathbf{B}_t$$

となる。この式を区間 $[t, t+\tau]$ で積分すると

$$\mathbf{Y}_{t+\tau} - \mathbf{Y}_t = \int_t^{t+\tau} e^{\mathbf{K}u}\mathbf{S}d\mathbf{B}_u.$$

この両辺に $e^{-\mathbf{K}(t+\tau)}$ を掛けて得られる式

$$(\mathbf{X}_{t+\tau} - \boldsymbol{\mu}) - e^{-\mathbf{K}\tau}(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}) = \int_t^{t+\tau} e^{-\mathbf{K}(\tau-u)}\mathbf{S}d\mathbf{B}_u.$$

を整理すると SDE の解 (3.2) が導かれる。□

²SDE の参考書としては、例えば、[1] など。

\mathbf{X}_t の条件付き平均 $\mathbf{E}_t[\mathbf{X}_{t+\tau}]$ は、

$$\Sigma := \mathbf{S}\mathbf{S}'$$

とすると、(3.2) から

$$\mathbf{x}_{t+\tau} \equiv (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{K}\tau})\boldsymbol{\mu} + e^{-\mathbf{K}\tau}\mathbf{x}_t \quad (3.3)$$

となる。また、条件付き共分散は、

$$\text{vec}(\Sigma_\tau) \equiv (\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})^{-1} \left(\mathbf{I} - e^{-(\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})\tau} \right) \text{vec}(\Sigma) \quad (3.4)$$

となる。

Proof. \mathbf{X}_t の条件付き共分散は、まず、(3.2) から

$$\Sigma_t \equiv \text{Cov}\{\mathbf{X}_t | \mathbf{x}_0\} = \int_0^t e^{-\mathbf{K}(t-u)} \Sigma e^{-\mathbf{K}'(t-u)} du$$

となる [11, 12]. 次の公式³

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{ABC}) &\equiv (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B}), \\ e^{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}} &= e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

を用いて、更に、計算を進める。ここで、 vec は stack operator, \otimes は Kronecker product, \oplus は Kronecker sum である。従って

$$\begin{aligned} \text{vec} \left(e^{-\mathbf{K}(t-u)} \Sigma e^{-\mathbf{K}'(t-u)} \right) &= \left(e^{-\mathbf{K}(t-u)} \otimes e^{-\mathbf{K}(t-u)} \right) \text{vec}(\Sigma) \\ &= \left(e^{-(\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})(t-u)} \right) \text{vec}(\Sigma) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Sigma_t) &= \left(\int_0^t e^{-(\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})(t-u)} du \right) \text{vec}(\Sigma) \\ &= (\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})^{-1} \left(\mathbf{I} - e^{-(\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})t} \right) \text{vec}(\Sigma) \end{aligned}$$

が得られる。この式の Kronecker sum の部分は次の定義式

$$\mathbf{A}_{M \times M} \oplus \mathbf{B}_{N \times N} \equiv \mathbf{A}_{M \times M} \otimes \mathbf{I}_{N \times N} + \mathbf{I}_{M \times M} \otimes \mathbf{B}_{N \times N}$$

を使って、Kronecker product の計算に帰着させることができる。□

(3.4) の MATLAB command は例えば、以下のように coding すればよい。

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
TsT=kron(Th,eye(N))+kron(eye(N),Th);
VecSig=reshape(Sig,N^2,1);
VecSig_t=inv(TsT)*(eye(N^2)-expm(-TsT*t))*VecSig;
Sig_t=reshape(VecSig_t,N,N);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

不変分布の mean, variance は、(3.3), (3.4) で $\tau \rightarrow \infty$ とすることで次のように式で得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\infty &= \boldsymbol{\mu}, \\ \text{vec}(\Sigma_\infty) &= (\mathbf{K} \oplus \mathbf{K})^{-1} \text{vec}(\Sigma). \end{aligned} \quad (3.5)$$

³例えば、[8, 4] などが参考図書。Kronecker sum については、<http://mathworld.wolfram.com/KroneckerSum.html>

問題 3.1 Spread S_t の長期平均 m_t が確率変動するモデル、

$$\begin{aligned} dS_t &= \kappa_S(m_t - S_t)dt + \sigma_S dB_S(t), \\ dm_t &= \kappa_m(\bar{m} - m_t)dt + \sigma_m dB_m(t), \quad d\langle B_S, B_m \rangle = \rho dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

は、SDE(3.1) の形をしている。解 $X_t := (S_t, m_t)'$ とし、SDE(3.1) の K にあたる量を求め、それを対角化し、 $e^{-K\tau}$ を計算せよ。(3.3) より、将来の Spread $S_{t+\tau}$ や長期平均 $m_{t+\tau}$ の値が、現時点の (S_t, m_t) から求められるので、投資に活用することができる。

4 共和分と OU process

4.1 ADF 検定、共和分

参考書は Hamilton[3] の Ch.19 など。

ある 2 つの株価の対数 $s_t := \log(S_t)$ が $I(1)$ 過程に従うとする。pairs trading では、これらに共和分関係があるかどうかを検出するため、次のような（見せかけの）回帰を行う。

$$s_{yt} = \alpha + \beta s_{xt} + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

次に、推定した係数を用いて

$$z_t := s_{yt} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}s_{xt}) \quad (4.2)$$

と定義した spread 過程に、平均回帰性があるかどうかを以下のような変動過程でテストする。

$$z_t = \gamma z_{t-1} + \sigma_S \varepsilon_t, \quad (4.3)$$

ここでは、(4.1) の残差項の平均を 0 と仮定しているので spread 過程の平均回帰先は 0 となる。定常性を満たすものを考えるので、 $|\gamma| < 1$ の制約を満たさなければならない。

その差分 $\Delta z_t := z_t - z_{t-1}$ に対する式に直すと

$$\Delta z_t = -(1 - \gamma)z_{t-1} + \sigma_S \varepsilon_t, \quad (4.4)$$

となる。平均回帰性の強さを表す parameter $\kappa := 1 - \gamma (> 0)$ が大きいものが、pairs trading では望ましい組み合わせとなる。Augmented-Dickey-Fuller(ADF) 検定は (4.4) の係数 $-(1 - \gamma) = 0$, 即ち、 $\gamma = 1$ を帰無仮説 (単位根; unit root) として検定を行う⁴。この連続時間の極限は OU process となる。

平均回帰の半減期は

$$\tau_H = \frac{\log 2}{1 - \gamma} \quad (4.5)$$

で定義される。

Program 4.1 MATLAB では `adftest` という command で ADF 検定を行うことができる⁵。(大和証券、野村証券) の株価 [20160401, 20170915]⁶ を用いた ADF 検定の sample program と分析結果 (図 1 参照) を以下に示す。

```
% regress Sy to Sx; Sy=a+b*Sx+e; resid=Sy-(a+b*Sx)
% MATLAB では回帰分析は [b,bint,r,rint,stats] = regress(y,x);
% stats=regstats(responses,data,model) などで行うことができる。
% ADF 検定は以下の command が用意されている (古い version では dfARDTest) .
```

⁴残差項の系列相関を考慮して、原系列 z_t の階差系列 Δz_t のラグ付の線形和項 $\sum_{i=1}^p \phi_i \Delta z_{t-i}$ が付け加えられる。

⁵Econometrics Toolbox の command.

⁶20180920 までの data を使うと、共和分性は消えている。野村を target にして、証券業の中で ADF 検定を行うと、岡三などが共和分 pair として検出される。

```

[h,pValue,stat,cValue,reg] = adftest(resid,'model','TS','lags',0:2);

% 'model' -> 'TS'
%   y(t) = c + y(t-1) + b1*(1-L)y(t-1)
%               + b2*(1-L)y(t-2)
%               + ...
%               + bp*(1-L)y(t-p)
%               + e(t)
% is tested against the alternative model
%   y(t) = c + d*t + a*y(t-1) + b1*(1-L)y(t-1)
%               + b2*(1-L)y(t-2)
%               + ...
%               + bp*(1-L)y(t-p)
%               + e(t)

%以下は [20160401,20170915] の（大和証券、野村証券）の分析結果

unit root rejected for Lag=0
stat = -4.7227
cValue= -3.4240
pValue= 0.0010

unit root rejected for Lag=1
stat = -5.0015
cValue= -3.4240
pValue= 0.0010

unit root rejected for Lag=2
stat = -5.0399
cValue= -3.4240
pValue= 0.0010

kappa = 29.12329
rbar = -0.26056
sigma = 104.39113[per annum]
R^2 = 0.78529
half-life[days] = 6.00

```

問題 4.1 共和分 *pair* を見つけ、その *spread return* の *mean reversion* の強さ, *long-run mean*, *volatility* を推定せよ。その結果から半減期を計算せよ。共和分 *pair* の *portfolio* を作り、推移を観察してみよ。

4.2 Error correction model

$y_t := (S_x, S_y)'$ or $(\ln S_x, \ln S_y)'$ とし、(4.2) から定数項を除いた長期均衡関係 $z_t = S_{yt} - \beta S_{xt} = \bar{\beta}' y_t$ とする。ここで、共和分 vector は $\bar{\beta} := (-\beta, 1)'$ である。平均回帰の speed parameter matrix α とする。これは、rank 落ちしており、

$$\alpha = \gamma \bar{\beta}' \quad (4.6)$$

のように分解できるとする。長期均衡関係からの乖離があると、 z_t は 0 でない値をもつ。Error correction model (ECM) の一般形は以下のようなになる。

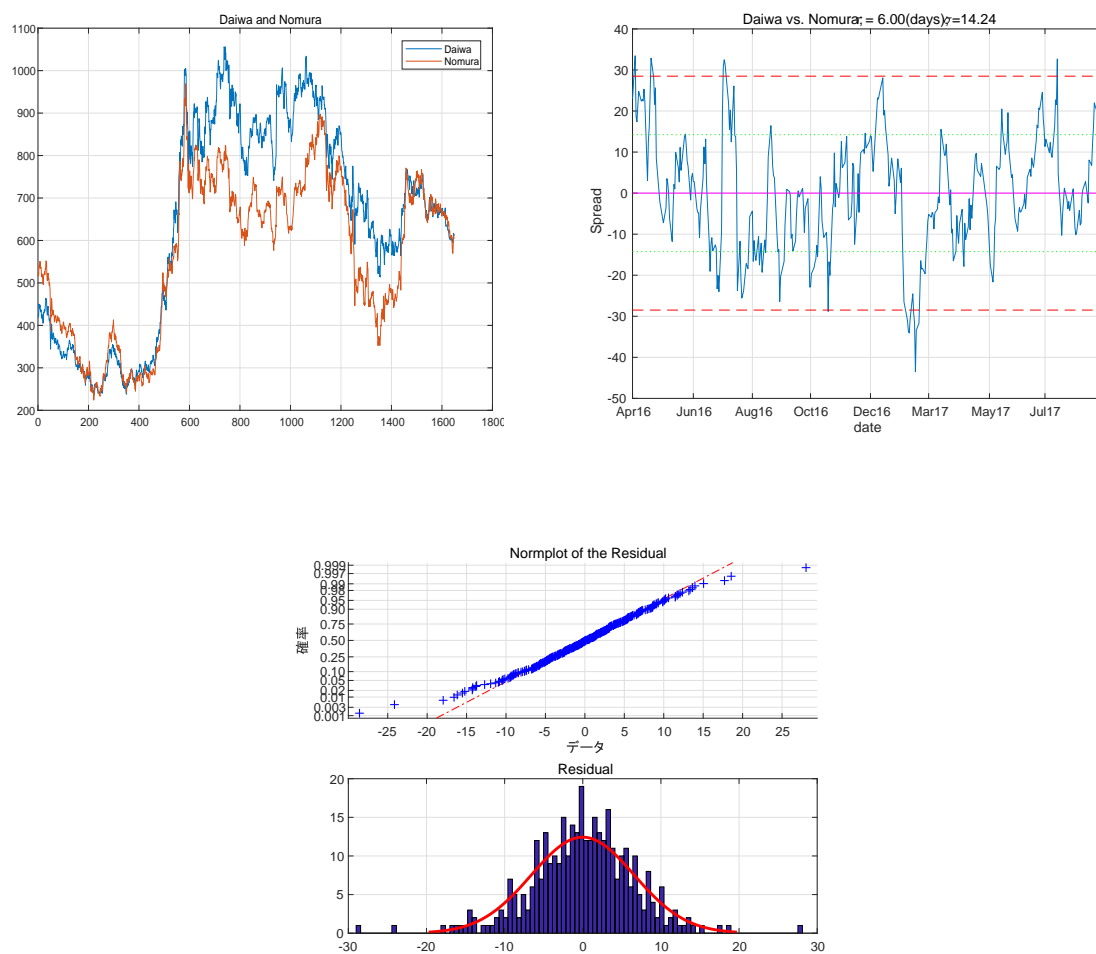


図 1: [20160401,20170915] の (大和証券、野村証券) の株価, spread process, そしてその分布. 株価の回帰係数 $\beta = 0.6542$ であるため、この分析期間では $S_{Daiwa}(t) - 0.6542 \times S_{Nomura}(t)$ が定常な均衡関係となっていることがわかる。

$$\Delta y_t = \mu_t + \alpha y_{t-1} + A(l)\Delta y_t + \varepsilon_t \quad (4.7)$$

ここで、 $A(l)\Delta y_t$ は過去のラグ付の階差時系列である。 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)'$ は、誤差、つまり、長期均衡関係からの乖離が修正される方向を表している。

2 銘柄の共和分関係のある変動過程を ECM で書くと、以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} \Delta S_{1,t} \\ \Delta S_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{1,t-1} \\ S_{2,t-1} \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,t} \\ \sigma_2 \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ここで、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は i.i.d Normal. 対数株価を使う場合は、上記の $S_i \rightarrow \log S_i, i = 1, 2$ に置き換えればよい。共和分関係 $\bar{\beta}_1 S_{1,t} + \bar{\beta}_2 S_{2,t} = 0$ からの乖離がある場合に、共和分関係に引き戻される dynamics を記述する式になっている。pairs trading はこの関係を利用した投資戦略といえる。

4.3 OU process と共和分構造

多次元の OU process(3.1) で拡散項を 0 とした deterministic system で共和分の関係がどのようにして現れるのかを説明する⁷。

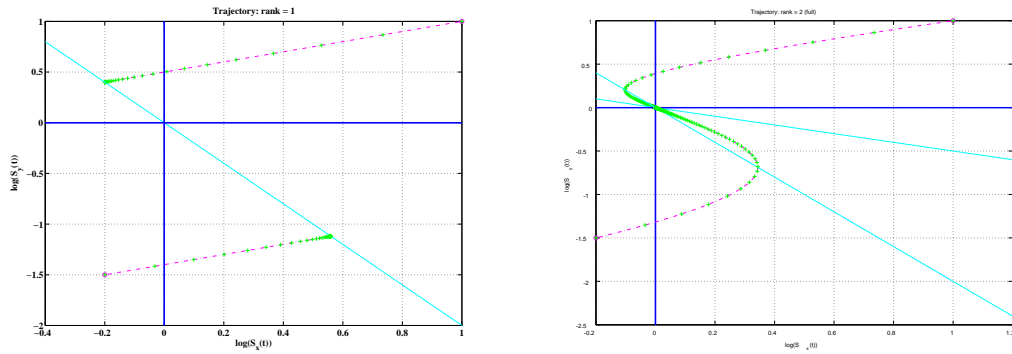


図 2: ODE の 1 次の係数行列 K が $rank = 1, rank = 2(full)$ のそれぞれの場合の解の trajectory. $x = \log S_x(t), y = \log S_y(t)$ とすると $rank=1$ のほうは、 $2x + y = 0$, $rank=2$ のほうは $2x + y = 0$ と $x/2 + y = 0$ の連立解 $(0, 0)$ に、初期値を変えた解が吸い込まれていく様子を観察することができる。この図では、初期値として適当に 2 点 $(1, 1), (-0.2, -1.5)$ をとってみた。

(3.1) の $X - \mu \rightarrow X$ と置き換え、 $S = 0$ とすると次の ODE

$$\frac{dX(t)}{dt} = -KX(t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} \log S_x(t) \\ \log S_y(t) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

が得られる。図 2 では、

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad rank = 1$$

と

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad rank = 2$$

とした場合のそれぞれの解の trajectory を描いている。

特に、 $rank=1$ の場合の K は

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \gamma \beta', \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

⁷共和分については original paper[2] または時系列の参考書 [13, 3] などを見よ。

と分解できることに注意しよう。この β を共和分ベクトルという。

ODE(4.9) の形式的な解は

$$X(t) = e^{-Kt} X(0) \quad (4.10)$$

である。

♣ ODE(4.9) に noise を加えたものが OU 過程 (3.1) である。small noise を加えていくと、共和分構造が次第に不明瞭になっていくことを観察することができる。

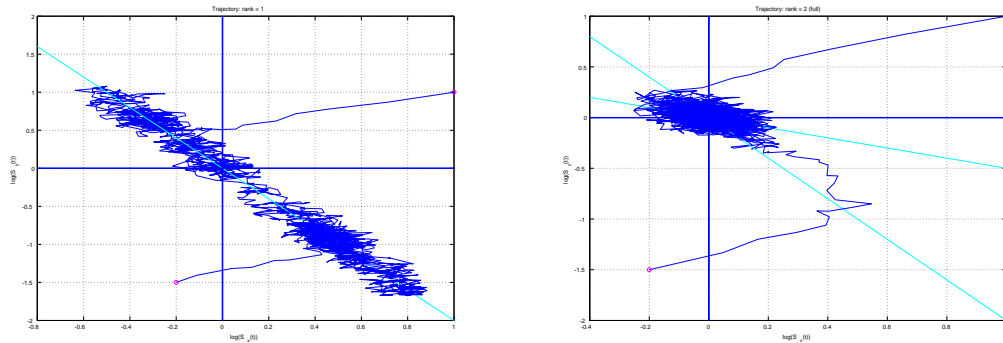


図 3: 図 2 に small noise を加えた OU process の simulation 結果. 左図は rank one, 右図は full rank.

♣ 行列の指数計算は、例えば、MATLAB command では

```
K=[2 1;1 0.5];
expm(-K)
```

```
ans =
```

```
0.2657    -0.3672
-0.3672    0.8164
```

となる。

$n = 2$ 次元のこの場合は、まとめると、

- K が rank 落ちして 1 の場合は、共和分関係は $2x + y = 0$ の一つしか出てこない。この関係式に向かって、解は吸引されていく。
- K が full rank の場合は、共和分関係は $2x + y = 0$ と $x/2 + y = 0$ の 2 つが存在し、これらの共通集合である $(0,0)$ に解は吸引されていく。

$n = 3$ 次元の場合は

- K の rank=3 \implies 3 つの共和分関係、すなわち、ある点に収束⁸
- K の rank=2 \implies 2 つの共和分関係、すなわち、ある直線に収束
- K の rank=1 \implies 1 つの共和分関係、すなわち、ある平面に収束

⁸(3.5) の x_∞ にあたる。

5 Dynamic Pair Trading

spread return process $s(t)$ が OU process に従うとする。

$$ds(t) = \kappa(\bar{s} - s(t))dt + \sigma dB(t) \quad (5.1)$$

このとき、spread asset に $\pi(t)$ 投資し、残りを riskless asset に投資する portfolio process $W(t)$ は

$$dW(t) = W(t)\pi(t)ds(t) + W(t)(1 - \pi(t))rdt \quad (5.2)$$

となる。そして、次のような最適化問題 [9, 10, 7] を考えてみよう。

$$\max_{\{\pi(t)\}_{t \in [0, T]}} \mathbf{E}[U(W(T))] \quad (5.3)$$

ここで、 $U(x)$ はある効用関数とする。この目的関数 $V(t, w, s)$ (value function という) は dynamic programming principle(DP) によると HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式に従う。

注意 5.1 3 銘柄以上の場合には共和分関係が 1 つだけとは限らないことに注意しよう。3 銘柄で、共和分関係が 2 つある (共和分 *vector* が 2 本ある) 場合には、 $z_1 = \bar{\beta}_1 S_{1,t} + \bar{\beta}_2 S_{2,t} + \bar{\beta}_3 S_{3,t}$, $z_2 = \bar{\beta}'_1 S_{1,t} + \bar{\beta}'_2 S_{2,t} + \bar{\beta}'_3 S_{3,t}$ はいずれも 0 に回帰する定常過程であり、投資に利用することができる。ECM(4.7) の $\alpha = \gamma \bar{\beta}'$ は、 γ が (3×2) の行列、共和分 *vector* $\bar{\beta}$ は 2 つの 3 次元 *vector* から成る。

参考文献

- [1] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Dover Books on Mathematics.
- [2] Engle, Robert F. and Granger, Clive W. J., “Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing,” *Econometrica*, **55**(2)(1987), 251-276.
- [3] Hamilton, J. D., *Time Series Analysis*, Princeton Univ Pr. 1994.
- [4] Horn, R. A. and Johnson, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1994.
- [5] Hull, J., and A. White, “Numerical Procedures for Implementating Term Structure Models I: Single-Factor Models,” *Journal of Derivatives*, **2**(1994)7-16.
- [6] Hull, J., and A. White, “Numerical Procedures for Implementating Term Structure Models II: Two-Factor Models,” *Journal of Derivatives*, **2**(1994)37-48.
- [7] Ingersoll, J., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987, Ch.13
- [8] Magnus, J. R. and H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley and Sons: Chichester/New York. Second edition (paperback) 1999.
- [9] Merton, R. C., “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case”, *The Review of Economic Studies*, **51**(1969)247-257.
- [10] Merton, R. C., “Optimal Consumption and Portfolio Rules in A Continuous Time Model”, *Journal of Economic Theory*, **3**(1971)373-413.
- [11] Meucci, A., *Risk and Asset Allocation*, Springer, 2005.
- [12] Meucci, A., “Review of Statistical Arbitrage, Cointegration, and Multivariate Ornstein-Uhlenbeck,” working paper, 2010.
- [13] Tsay, R. S., *Analysis of Financial Time Series (Wiley Series in Probability and Statistics)* Wiley; 3rd edition, 2010.
- [14] Vasicek, O., “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, **5** (1977), 177-188.