

# 金融時系列分析 (I)

一橋大学院経営管理研究科

中村 信弘\*

Sep.28-Oct.5,2018

(学内限)

## 概要

ARMA、GARCH model 等の時系列分析の解説を行い、MATLAB による実装例を紹介する。多変量への拡張として、DCC(Dynamic Conditional Correlation) model を取り上げる。

*Keywords:* ARMA, GARCH, DCC model

## 1 GARCH Model

不均一分散を記述する時系列モデルである GARCH family のうち、代表的な model を取り上げ、それらを用いた時系列の推定・予測・simulation 法を解説する。

### 1.1 Default GARCH Model

return  $y_t$  の時系列に構造を入れない MATLAB GARCH Toolbox の default parametrization は以下の通り [6].

$$\begin{aligned} y_t &= C + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここで、誤差項  $\varepsilon_t$  の条件付き分散を

$$\sigma_t^2 := \text{Var}(y_t) = \mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2] \quad (1.2)$$

と表した。また、推定すべき parameter は次の式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j &< 1, \\ \kappa &> 0, \\ G_i &> 0, \quad i = 1, \dots, P \\ A_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, Q. \end{aligned}$$

---

\*本稿は 2018 度 (平成 30 年度)「投資戦略論」講義資料。問い合わせは以下へ; Email:nnakamura@ics.hit-u.ac.jp, tel:03-4212-3106 (dial-in), fax:03-4212-3069

誤差項が分散不均一 (heteroskedastic) で deterministic な変動過程 ( $GARCH(P, Q)$ ) に従う点が特徴的で、Bollerslev(1986)[2] によって Engle の ARCH model(1982)[3] を拡張する形で考案された。

- (1.1) の  $\sigma_t^2$  の右辺の攪乱項の符号は無視されているため、対称な条件付き分散過程と言える。
- 無条件分散:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \\ &= \frac{\kappa}{1 - \sum_{i=1}^P G_i - \sum_{j=1}^Q A_j}.\end{aligned}$$

- GARCH model の条件付き分散  $h_t$  は、決定論的。
- **Stochastic volatility model** の場合は、条件付き分散  $h_t$  は確率変動する。return の式は同じであるが、条件付き分散  $h_t$  の式に、時点  $t$  の noise  $\eta_t$  が付く。

$$\begin{aligned}y_t &= C + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sigma_v \eta_t.\end{aligned}\tag{1.3}$$

この分散 noise  $\eta_t$  は、リターン noise  $\varepsilon_t$  と負の相関 (leverage paramter と呼ばれる) をもつことが、実証分析で知られている。SV model の推定は、単純な最尤法では推定できず、MCMC、non-linear filtering などの方法が用いられる。推定式も、(1.3) ではなく、 $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \exp(\sigma_t^2))$  とし、分散の式には、過去のリターン noise 項が入らないものがよく使われる。

#### ♠ 最尤推定

次の攪乱項  $\varepsilon_t$

$$\varepsilon_t = -C + y_t\tag{1.4}$$

が正規分布に従うとすると、そのとき log-likelihood function は

$$\log L = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}.\tag{1.5}$$

$\varepsilon_t$  が Student's  $t$  分布に従うとすると、そのとき log-likelihood function は

$$\log L = T \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2}) \sqrt{\pi(v-2)}} \right\} - \frac{v+1}{2} \sum_{t=1}^T \log \left( 1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2(v-2)} \right)\tag{1.6}$$

ここで、自由度  $v$  は  $v > 2$  が満たされていないといけない。  $X \sim T_v(0, 1)$  のとき  $\text{std}(X) = \sqrt{\frac{v}{v-2}}$  であるため、残差は

$$\varepsilon_t = \sigma_t \sqrt{\frac{v-2}{v}} e_t, \quad e_t \sim T_v(0, 1)\tag{1.7}$$

と表されることがわかる。  $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2 \times \frac{v-2}{v} \times \frac{v}{v-2} = \sigma_t^2$  のように整合的となっている。残差  $\varepsilon_t$  から、一様化した確率変数に変換するためには、標準化残差  $z_t := \varepsilon_t / \sigma_t$  にスケール調整のファクター  $\sqrt{\frac{v}{v-2}}$  を掛けた変数を標準  $t$ -分布関数  $T_v(\cdot)$  を用いて

$$u_t = T_v \left( \sqrt{\frac{v}{v-2}} z_t \right)\tag{1.8}$$

と変換すればよい。後述する多変量 GARCH モデルの一つである DCC モデルで、周辺 (marginal) モデルを自由度の異なる  $t$ -分布でモデル化し、(1.8) で一様化した  $\text{data}(u_{1t}, \dots, u_{Nt})$  を DCC で変動する相関行列  $R_t$  をもつ Gaussian copula  $C_{R_t}(u_{1t}, \dots, u_{Nt})$  や Student-t copula  $C_{R_t, v}(u_{1t}, \dots, u_{Nt})$  で接

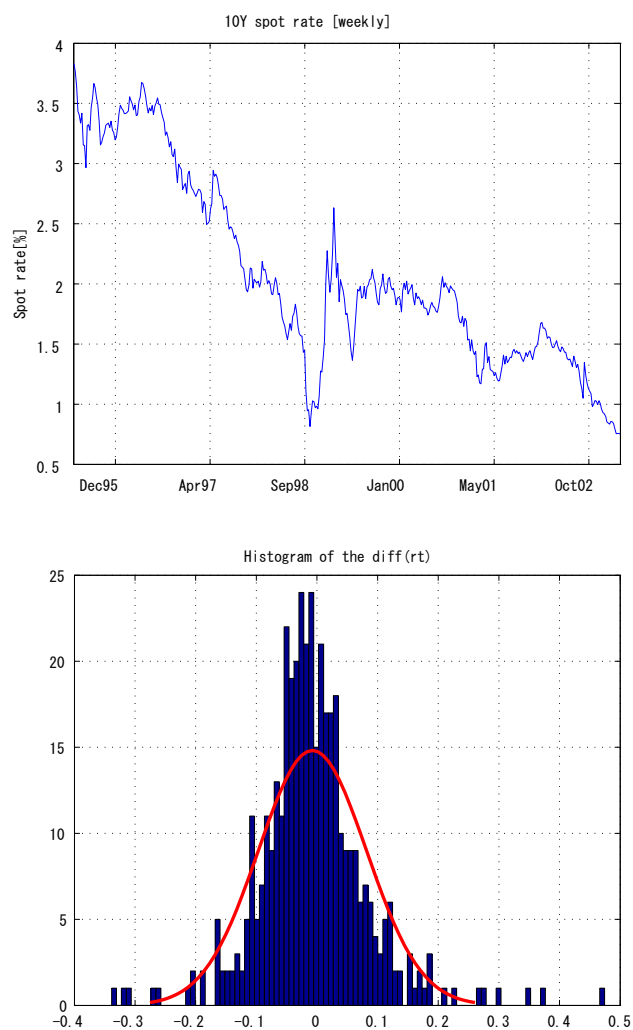


図 1: spot rate 10Y の時系列とその  $dr(t)$  の histogram.

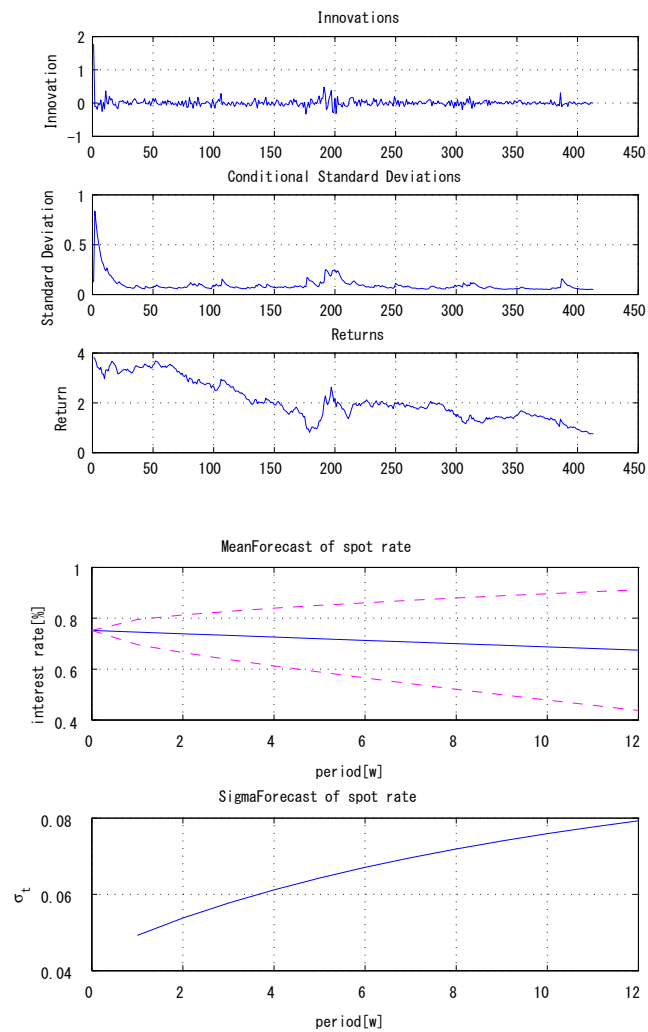


図 2: spot rate 10Y の時系列を ARMA(1,1)+GARCH(1,1)  $t$ -分布で推定した結果とその推定結果に用づく 12 期間 (week) 先までの予測結果.

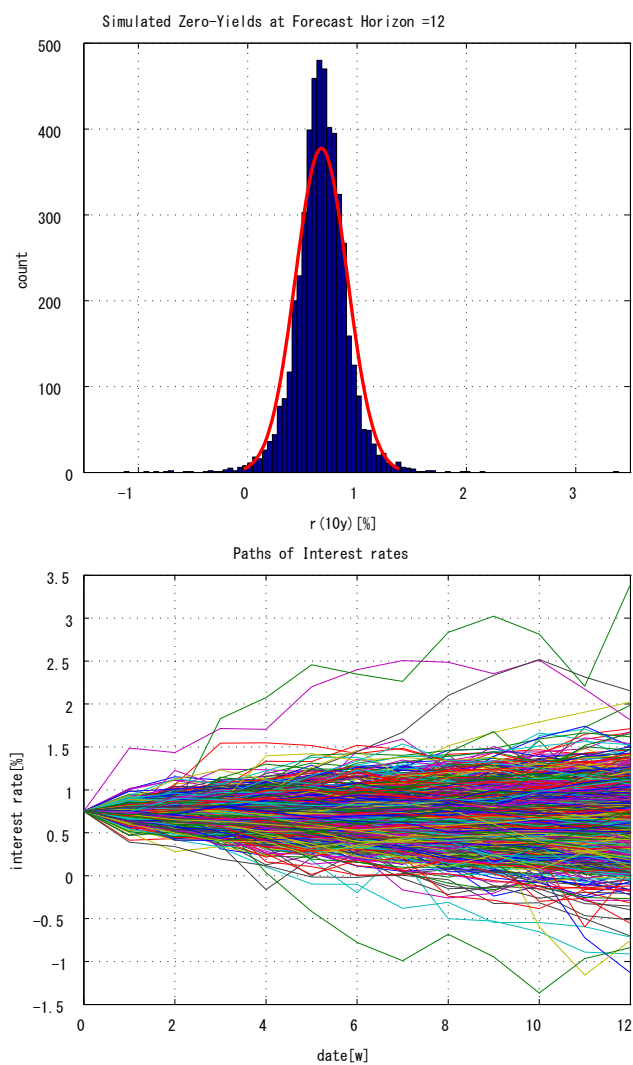


図 3: spot rate 10Y の時系列を  $\text{ARMA}(1,1)+\text{GARCH}(1,1)$   $t$ -分布で推定した結果を用いて Monte-Carlo simulation を行い描いた horizon=12 期間 (week) 先の histogram(上段) と path(下段). ここで、Path の数は 5000 とした.

合すると、DCC-copula model を構築することができる。Serban et al.(2007)[9] ではモデリングと実証分析の結果が報告されている。

図 1 は推定に用いた実際の data の時系列. 図 1 の histogram から正規分布に従っていないことは明らかであろう。

♠ **実証分析:**  $t = 10Y$  の zero-yield  $r(10Y)$  の GARCH model による推定を行う。

- **推定:** 以下は MATLAB による推定の sample code.  $r(t)$  に対して ARMA(1,1)+GARCH(1,1) model を当てはめ、攪乱項の分布には  $t$ -分布を選択している. 図 2 は推定結果。

### Program 1.1 MATLAB 実装例

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   MODELING
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ToEstMdl = arima(2,0,1);% AR(2), no difference, MA(1)
EstMdl = estimate(ToEstMdl,rt);% ARIMA 推定の実行
et = infer(EstMdl,rt);% 推定した結果から残差を取り出す。

% ToEstMdl = garch('Offset',NaN,'GARCH',NaN,'ARCH',NaN,'Distribution','t');
% GARCH model の設定.
% Offset は y=mu+e で、mu (Offset) を指す。et は mu=0 なので、Offset を設定しない。

ToEstMdl = garch('GARCH',NaN,'ARCH',NaN,'Distribution','t');% GARCH model の
設定
EstMdl = estimate(ToEstMdl,et);% GARCH 推定の実行

nux=EstMdl.Distribution.DoF;
ht = infer(EstMdl,et);% 推定値の構造体から条件付き分散 ht を取り出す。

res = et./sqrt(ht);
% standardized residuals. MATLAB では std(res)=1 に標準化されている！
% 正規分布ではこれでよいが、
% Student-t に従う et の std(de)=(nu/(nu-2))^0.5(=:scale) であるため、
% y=sqrt(ht)*res=sqrt(ht/scale)*(scale*res) としないといけない。
% このとき scale*res \sim T(0,1,nu)

nu=EstMdl.Distribution.DoF;
scale=(nu/(nu-2))^0.5;

%%% 一様化確率変数に変換 %%%%%%%%%

ut=tcdf(scale*res,nu);% Student-t 分布を誤差項に仮定しているため、scale 調整が必要！

figure(1);
subplot(2,2,1)
plot(res);
T=length(xt);
xlim([0,T])
title('Standardized Residuals of rt')

subplot(2,2,2)
histogram(res,10)

subplot(2,2,3)
autocorr(res)
```

各推定係数は `Coeff` に格納されて返される<sup>1</sup>.

- **予測:** 推定結果を用いた予測は以下の通り。予測したい期間、ここでは4期先までを設定している。図2の下図が、zero-yield とその conditional std. の予測結果を plot したものである。

### Program 1.2 MATLAB 実装例

```
%%%%%%%%%%%%%% 予測 %%%%%%%%%%%%%%%
% sample の end の値を初期値として、条件付き分散を予測
%%%%%%%%%%%%%%
numPeriods=12;
Vf = forecast(EstMdl,numPeriods,'Y0',yt);
plot(Vf);
```

- **simulation:** 推定結果を用いた Monte-Carlo simulation による将来の paths の生成法は以下の通り。

### Program 1.3 MATLAB 実装例

```
%%%%%%%%%%%%%% Simulation %%%%%%%%%%%%%%%
[V,Y] = simulate(EstMdl,100,'NumPaths',500);%100 期間、500 回の simulation
figure(1);
subplot(2,1,1);plot(V);title('Conditional Variance');
subplot(2,1,2);plot(Y);title('Residual Retruns');
```

図3は simulation 結果. 図1 の実際の zero-yield の histogram と同様に、正規分布から乖離した kurtosis をもつ graph となっている。

## 1.2 検定

残差の自己相関に関して

- **Ljung-Box Q-statistic:**<sup>2</sup>

$$Q = N(N+2) \sum_{k=1}^L \frac{r_k^2}{N-k}$$

ここで、 $N$  = 標本数,  $L$  = 検定統計量に含まれる自己相関のラグ数,  $r_k^2$  はラグ  $k$  の標本自己相関の2乗. 時系列として典型的に用いられるのは、モデルフィットしたときの残差項である。モデルのフィットが十分である、即ち、各ラグで系列相関がないという帰無仮説のもとで、この検定統計量は漸近的に自由度  $L$  の  $\chi^2$  分布に従う。

- **Engle ARCH Test:**<sup>3</sup> この検定では、残差項  $u_t$  を定数項+過去  $M$  個の残差項の2乗に回帰することで、 $M$  次の ARCH 効果をテストする。

$$u_t^2 = \alpha + \beta_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \beta_M u_{t-M}^2 + \varepsilon_t. \quad (1.9)$$

この帰無仮説は  $H_0: \beta_1 = \cdots = \beta_M = 0$ 、つまり、時系列の残差項が i.i.d. normal で、ARCH 効果がないということ。(1.9) の決定係数  $R^2$  に標本数  $T$  をかけた  $TR^2$  は漸近的に自由度  $M$  の  $\chi^2$  分布に従うことが知られている。この検定統計量  $TR^2$  の  $\chi^2$  検定により誤差項の分散に自己相関が有るか無いかを検定することができる。

<sup>1</sup>Errors は推定誤差、LLF は最大尤度、Innovations は残差  $\varepsilon_t$ , Sigma は条件付き標準偏差を出力している。

<sup>2</sup>MATLAB command は lbqtest

<sup>3</sup>MATLAB command は archtest.

- **Jarque-Bera Test for normality:**<sup>4</sup> 標本数  $N$  の標本の skewness を  $s$ , kurtosis を  $k$  として、その正規性を検定する Jarque-Bera 検定統計量は次の式で定義される。

$$JB = \frac{N}{6} \left( s^2 + \frac{(k-3)^2}{4} \right). \quad (1.10)$$

標本が正規分布に従うという帰無仮説のもとで、この量は漸近的に自由度 2 の  $\chi^2$  分布に従う。GARCH model の残差項として正規分布以外に  $t$ -分布や一般誤差分布などが用いられるが、その際の正規性の検定に利用される。

### 1.3 Conditional Mean Models with Regression Components

return  $y_t$  の時系列に構造,  $ARMAX(R, M, N_x)$  を入れた GARCH model を MATLAB の中では取り扱うことができる [6].

$$\begin{aligned} y_t &= C + \sum_{i=1}^R AR_i y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^M MA_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^{N_x} \beta_k X(t, k), \\ \sigma_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

ここで、(1.11) の  $X(t, k)$  は、 $y$  の変動を説明する何らかの外生的 factor であり、その係数である  $\beta_k$  を同時推定することができる。

### 1.4 GJR model

GARCH(p,q) model (1.1) の variant として以下のような GJR model (Glosten, Jagannathan and Runkle (1993) [5]<sup>5</sup>) が考案された。

$$\begin{aligned} y_t &= C + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q L_j \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{t-j} < 0\}} \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

ここで、(1.12) の  $\sigma_t$  の最後の項  $\sum_{j=1}^Q L_j \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{t-j} < 0\}} \varepsilon_{t-j}^2$  は leverage 項と呼ばれ、非対称な攪乱項の条件付き分散  $\sigma_t$  への寄与度の持続性を表している。 $L_j$  は leverage と呼ばれている。誤差項の符号が正のときは条件付き分散  $\sigma_t^2$  に係数  $A_j$  をもつ 2 乗誤差項  $\varepsilon_{t-j}^2$  の形で寄与し、誤差項の符号が負のときは係数  $A_j + L_j$  をもつ 2 乗誤差項  $\varepsilon_{t-j}^2$  の形で寄与することがわかる。このような非対称な定式化の動機は、悪い news ほど良い news より条件付き分散により大きなインパクトを与えるという観察結果による [5].

- 式 (1.12) で、推定すべき parameter は次の式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q L_j &< 1, \\ \kappa &> 0, \\ G_i &> 0, \quad i = 1, \dots, P \\ A_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, Q \\ A_j + L_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, Q. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>MATLAB command は `jbttest`

<sup>5</sup>threshold をもつため TGARCH model と呼ばれたりする。



- 無条件分散:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \\ &= \frac{\kappa}{1 - \sum_{i=1}^P G_i - \sum_{j=1}^Q A_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q L_j}.\end{aligned}$$

#### Program 1.4 MATLAB 実装例

```
ToEstMdl = gjr('Offset',NaN,'GARCHLags',[1 2 3 4],'ARCLags',[1 2 3 4],...
    'LeverageLags',[1 2 3 4],'Distribution','t');
EstMdl = estimate(ToEstMdl,yt);
ht = infer(EstMdl,yt); % Infer conditional variances
```

## 1.5 EGARCH(p,q) model

GARCH(p,q) model (1.1) の variant として以下のような EGARCH model が考案された, Nelson(1991)[8].

$$\begin{aligned}y_t &= C + \varepsilon_t, \\ \log \sigma_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \mathbb{E} \left[ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right] \right\} + \sum_{j=1}^Q L_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ ,  $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  より

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{|z_{t-j}|}{1} \right] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{Gaussian,} \\ \sqrt{\frac{v-2}{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{v-1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} & \text{Student's } t. \end{cases}\quad (1.14)$$

で自由度  $v > 2$ .

- 無条件分散:

$$\log \sigma^2 = \frac{\kappa}{1 - \sum_{i=1}^P G_i}.$$

- GARCH model の parameter の制約は非負の  $\sigma_t^2$  に由来するが、EGARCH model では  $\log \sigma_t^2$  を扱うため、parameter 制約は緩やか.
- (1.13) の  $\log \sigma_t^2$  の項  $\sum_{j=1}^Q L_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}}$  は leverage terms,  $\sum_{j=1}^Q A_j \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \mathbb{E} \left[ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right] \right\}$  は攪乱項の絶対値の innovation の寄与度を取り出している部分.
- EGARCH, GJR model は return と volatility の間の negative correlation や innovation の符号の影響度を説明、記述するために考え出された非対称分散過程. 株式の return と異なり、為替の変動過程にはこのような非対称性があまりないことが報告されている.

## 2 Model Selection

- 尤度比検定 (likelihood ratio test)[7] 観測 data  $x$  とする.

$$\begin{array}{l} \text{帰無仮説 (null hypothesis) } H_0 : \bar{\theta} \in \Theta_0 \\ \text{対立仮説 (alternative hypothesis) } H_1 : \bar{\theta} \in \Theta_1 \end{array}$$

尤度比を次のように定義しよう.

$$\lambda(x) := \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; x)}{\max_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1} L(\theta; x)} \quad (2.1)$$

(2.1) の分子は帰無仮説の尤度、分母は帰無仮説と対立仮説を含めた広い parameter 空間で最大値を探索するため、尤度は大きくなる。従って、尤度比  $\lambda$  は  $0 \leq \lambda(x) \leq 1$  を満たし、この値が 0 に近いほど帰無仮説が data に適合しないといえる。

検定統計量 (test statistic) を

$$-2\log(\lambda(x)) = -2\log \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = 2(l(\theta_1) - l(\theta_0)) \approx \chi^2(m) \quad (2.2)$$

とする.  $\theta_0$  は  $\theta_1$  に比べて  $m$  だけ制約を課された狭い領域での推定量であるとする. この検定統計量は漸近的に自由度  $m$  の  $\chi^2$ -分布に従うことが知られている.<sup>6</sup> 帰無仮説が data に適合しなくなると、この検定統計量は大きくなり、予め定めた有意水準  $\alpha = 1 - P$  の棄却域を越えると、有意水準  $\alpha$  で帰無仮説は棄却されたという.

- MATLAB で GARCH(1,1) と GARCH(2,1) の model 選択を行う例では、有意水準 5% で

```
[H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF21,LLF11,1,0.05);
[H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
1.0000 0.0218 5.2624 3.8415
```

というような結果を返す. 引数は (*BaseLLF, NullLLF, DoF, Alpha*) の順で対立仮説の対数尤度 (この場合は GARCH(2,1)) と帰無仮説の対数尤度 (この場合は GARCH(1,1)), parameter 数の差は 1 なので、自由度は 1、有意水準を 5% に設定している. (2.2) の検定統計量がこの場合、Stat=5.2624 で棄却域の CriticalValue=3.8415 を超えているため、flag  $H = 1$  は帰無仮説 (restricted model) の GARCH(1,1) が棄却され、対立仮説 (unrestricted alternative model) の GARCH(2,1) を採択することを示唆している. pValue=0.0218 は p-値、即ち、検定統計量の値 Stat=5.2624 を超える  $\chi^2$ -分布の確率が 0.0218 であることを示している.<sup>7</sup>

- 一方、有意水準 2% では

```
[H,pValue,Stat,CriticalValue] = lratiotest(LLF21,LLF11,1,0.02);
[H,pValue,Stat,CriticalValue]
ans =
0 0.0218 5.2624 5.4119
```

$H = 0$  からは帰無仮説の GARCH(1,1) が棄却されないことを示唆している.

- **AIC 基準** :  $T$  個の data,  $m$  個の parameter に依存する likelihood function を  $L$ ,  $l := \log(L)$  とする. AIC(Akaike's Information Criterion), Bayes 統計に基づく BIC(Schwarz's Information Criterion) は

$$AIC(m, p) = -2l(\theta^*) + 2m, \quad (2.3)$$

$$BIC(m, p) = -2l(\theta^*) + m \log T \quad (2.4)$$

と定義される. 様々な model  $p$  で AIC (BIC) 値を計算し、これを最小とする model  $p$  をもって AIC (BIC) 選択基準で最も適切なモデルとするモデル選択法. (2.3) からわかるように、parameter の数が尤度を下げる penalty として入っているため、parameter の節約原理からのモデル選択とも言える.

<sup>6</sup>MATLAB では `chi2inv(P,V)`,  $P$ : 確率 ( $1-P$  が有意水準となる) と  $V$ : 自由度. で  $\chi^2$  分布の確率点を計算することができる. 例えば、`chi2inv(0.95,1)` = 3.84145882069415, `chi2inv(0.98,1)` = 5.41189443105436.

<sup>7</sup>ここで `1-chi2cdf(5.2624,1)` = 0.0217909494540138 である.

**Program 2.1** *MATLAB* 実装例

```
Mdl = arima(10,0,5);  
% model の設定 AR=5,MA=3 ; AIC で次数を変えてモデル選択を行う。  
  
[EstMdl,EstParamCov,logL,info] = estimate(Mdl,rt); % model の推定  
[aic,bic] = aicbic(logL, EstMdl.P+EstMdl.Q+2, length(rt))
```

### 3 多変量 GARCH Model

#### 3.1 Dynamic Conditional Correlation GARCH

資産価値の変動過程を、Dynamic Conditional Correlation(DCC) GARCH[4] を用いて推定する方法について、簡単に解説する。

まず、個々の資産価値の return  $y_t$  の時系列分析であるが、ここでは、外生変数の依存構造をもたない単純な GARCH model(MATLAB GARCH Toolbox の default parametrization) を考える [6]。

$$\begin{aligned} y_t &= C + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、誤差項は分散不均一 (heteroskedastic) で deterministic な変動過程 ( $GARCH(P, Q)$ ) に従う点特徴的である。

$N$  資産の return は平均  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  を差し引いたものを、以下では考える。

$$r_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_t), \quad \Sigma_t = D_t R_t D_t \quad (3.2)$$

ここで、 $R$  は time varying correlation matrix であり、 $D_t$  は univariate GARCH model から推定された条件付き標準偏差  $\sigma_{it}, (i = 1, \dots, N)$  を対角成分にもつ次のような行列である：

$$D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{2t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{Nt} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \sum_{p=1}^{P_i} A_{ip} \varepsilon_{i,t-p}^2 + \sum_{q=1}^{Q_i} B_{ip} \sigma_{i,t-q}^2, \quad \left( \sum_{p=1}^{P_i} A_{ip} + \sum_{q=1}^{Q_i} B_{ip} < 1, \forall i \right). \quad (3.4)$$

Dynamic Conditional Correlation(DCC) GARCH では、相関行列  $R_t$  が、次式のように、動的に変動する（無条件の共分散行列  $\bar{Q}$  に回帰するような変動構造）ことを仮定する<sup>8</sup>：

$$\begin{aligned} R_t &= \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2}, \\ Q_t &= \bar{Q} + \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varepsilon_{t-m} \varepsilon'_{t-m} - \bar{Q}) + \sum_{n=1}^N \beta_n (Q_{t-n} - \bar{Q}) \\ &= \bar{Q} \left( 1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n \right) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \varepsilon_{t-m} \varepsilon'_{t-m} + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t-n}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

このとき、DCC-GARCH model の対数尤度は

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + \log(|\Sigma_t|) + r_t' \Sigma_t^{-1} r_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + \log(|D_t R_t D_t|) + r_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log(|D_t|) + \log(|R_t|) + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

推定すべき parameter は

$$\Theta = (\omega_i, A_{1i}, \dots, A_{P_i}, B_{1i}, \dots, B_{Q_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_M, \beta_1, \dots, \beta_N) =: (\theta_1; \theta_2). \quad (3.7)$$

★ 2 段階推定:  $\theta_1$  を推定した後、 $\theta_2$  を推定する。

<sup>8</sup>成分表示をすると、 $R_{tij} = Q_{tij} / \sqrt{Q_{tii} Q_{tjj}}$  ということ。

- (i) 1 変量 GARCH: 各々の資産価格過程に対して推定を行う。(3.6) の  $R_t$  を単位行列  $I_t$  に置き換えた式を用いることができる。

$$\begin{aligned}
L(\theta_1|r_t) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log(|D_t|) + \log(|I_t|) + \varepsilon_t' I_t^{-1} \varepsilon_t) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log(|D_t|) + \log(|I_t|) + r_t' D_t^{-1} I_t D_t^{-1} r_t) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log(|D_t|) + r_t' D_t^{-2} r_t) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \log(2\pi) + \sum_{i=1}^N \left( \log(\sigma_{it}^2) + \frac{r_{it}^2}{\sigma_{it}^2} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( T \log(2\pi) + \sum_{t=1}^T \left( \log(\sigma_{it}^2) + \frac{r_{it}^2}{\sigma_{it}^2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

この推定値を  $\bar{\theta}_1$  とする。

- (ii) DCC-GARCH: (3.6) を  $(\bar{\theta}_1, r_t)$  のもとで最大化する。

$$L(\theta_2|\bar{\theta}_1, r_t) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log(|\hat{D}_t|) + \log(|R_t|) + \hat{\varepsilon}_t' R_t^{-1} \hat{\varepsilon}_t). \tag{3.9}$$

ここで、 $\hat{D}_t, \hat{\varepsilon}_t = \hat{D}_t^{-1} r_t$  は推定値  $\bar{\theta}_1$  を代入して得られた (3.4) の  $\sigma_{it}$  で表わされる。従って、上式の第 1, 2 項めは定数となり、第 2 段階めの最適化問題は、以下の量

$$\begin{aligned}
\hat{L}(\theta_2|\bar{\theta}_1, r_t) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log(|R_t|) + \hat{\varepsilon}_t' R_t^{-1} \hat{\varepsilon}_t) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log(|R_t|) + r_t' \hat{D}_t^{-1} R_t^{-1} \hat{D}_t^{-1} r_t)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

を最大化する問題となる。この解を  $\theta_2$  の推定値  $\bar{\theta}_2$  とする。

**注意 3.1** *DCC parametrization* (3.5) は無条件分散の計算に *bias* をもたらすことが、最近、Aielli(2011)[1] で指摘され、*DCC model* を修正した *consistent DCC(cDCC) model* の研究がされ始めている。この推定では、(3.5) の式が

$$\begin{aligned}
R_t &= \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2}, \\
Q_t &= \bar{Q} \left( 1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n \right) + \sum_{m=1}^M \alpha_m Q_{t-m}^{*1/2} \varepsilon_{t-m} \varepsilon_{t-m}' Q_{t-m}^{*1/2} + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t-n}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

のように修正される。ここで、 $Q_{t-m}^* := \text{diag}(Q_{t-m})$  である。

## 3.2 DCC-GARCH model の推定

図 4 は yield curve 上の 3 つの金利の DCC-GARCH model による推定結果である。ここで、PoetSB の zero-yield の日次 data(2003/04/01-2008/06/30) を用いた。

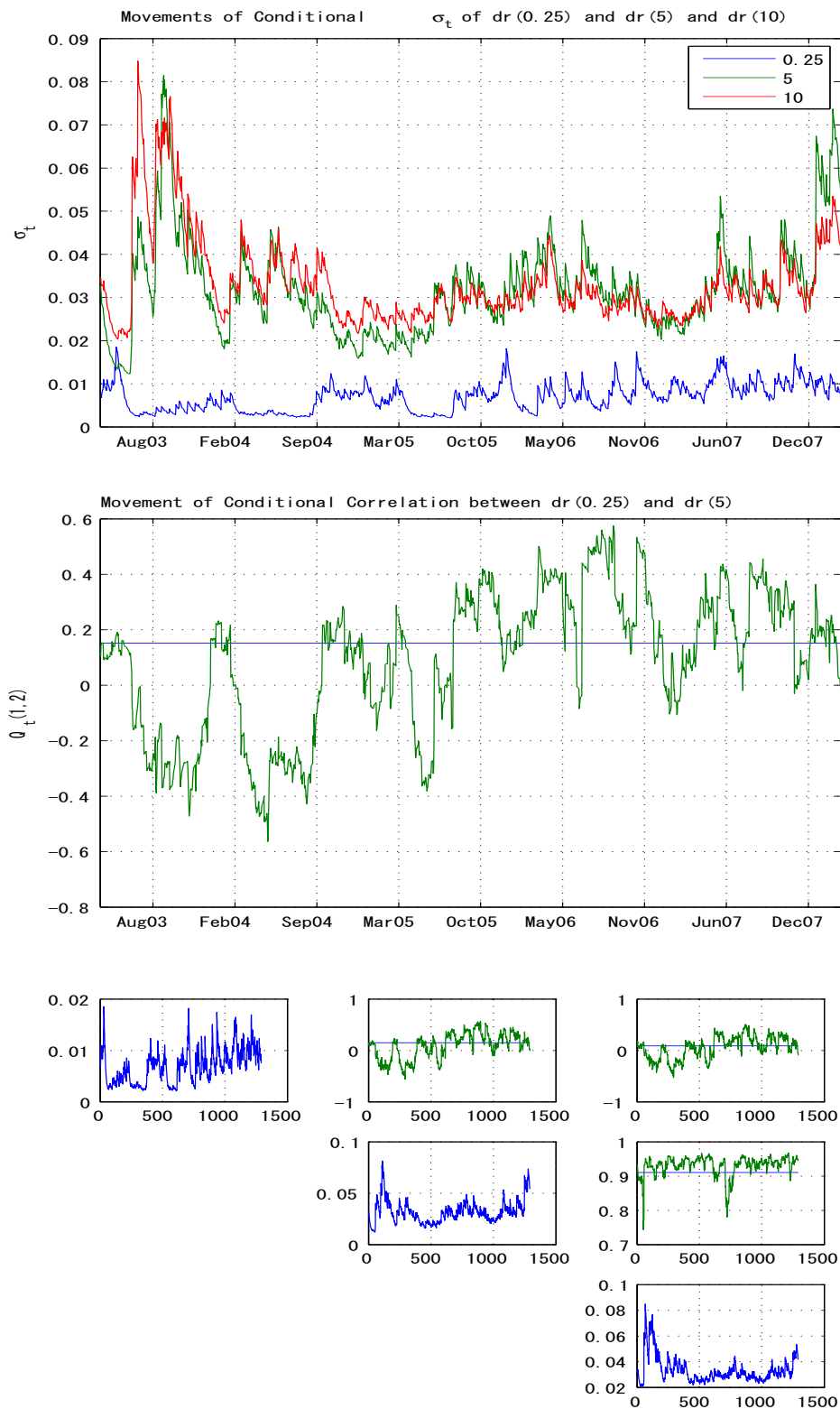


図 4: Trivariate DCC GARCH (GARCH(1,1)+DCC(1,1)) for  $dr(0.25)$ ,  $dr(5)$  and  $dr(10)$ . 上段は条件付き標準偏差のプラット、中段  $dr(0.25)$ ,  $dr(5)$  の条件付き相関をプラット、無条件の相関の値を比較のために描いている。下段は非対角成分は  $dr(0.25)$ ,  $dr(5)$ ,  $dr(10)$  のそれぞれの条件付き相関、対角成分はそれぞれの条件付き標準偏差をプラットしている。

## 参考文献

- [1] Aielli,G.,“Dynamic Conditional Correlation: On Properties and Estimation,” *Journal of Business and Economic Statistics*,**31**(2013), 282-299.
- [2] Bollerslev, T.,“Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, **31**(1986), 307-327.
- [3] Engle, Robert F., “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,”*Econometrica*, **50**(1982), 987-1007.
- [4] Engle,R.F. and K. Sheppard, “Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH”, NBER Working Paper, 2001.
- [5] Glosten, L.R., R. Jagannathan, and D.E. Runkle, “On the Relation between Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks,” *The Journal of Finance*, **48**(1993), 1779-1801.
- [6] MATLAB technical document, GARCH Tool box
- [7] Hamilton, J.D., “Time Series Analysis”, Princeton University Press, 1994.
- [8] Nelson, D.B., “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, **59**(1991), 347-370.
- [9] Serban,M., A. Brockwell, J. Lehoczky and S. Srivastava, “Modelling the Dynamic Dependence Structure in Multivariate Financial Time Series”, *Journal of Time Series Analysis*, **28**(2007), 763-782.