高等代数 I 结论梳理

龚舒凯 2022202790 应用经济-数据科学实验班

线性相关性结论梳理

1. 线性相关的等价定义

$\iff k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$，其中 $k_1,k_2,...,k_n$ 不全为 0.

$\iff x_1\alpha_1+...+x_n\alpha_n=0$ 有非零解（此处 α_i 是 n 维向量）

$\iff \alpha_1,...,\alpha_n$ 中存在 α_i 使得：$\alpha_i=k_1\alpha_1+...+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+...+k_n\alpha_n$.

$\iff \alpha_1,...,\alpha_n$ 中存在 α_i 使得：$\alpha_i=k_1\alpha_1+...+k_{i-1}\alpha_{i-1}$.

(提示 1：必要性显然)

(提示 2：充分性时，对于 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$，假设 k_i 是从 k_n 到 k_0 的第一个非零系数，则 $\alpha_i=k_1\alpha_1+...+k_{i-1}\alpha_{i-1}$)

$\iff r(\alpha_1,...\alpha_n)<n$

* 另：n 维向量组 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性相关 $\iff \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=0$（注：只有 $n\times n$ 时适用）

* 另：对任意的 β，$x_1\alpha_1+...+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 $\iff \beta$ 能被 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表出.

2. 线性无关的等价定义

$\iff$ 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$，则 $k_1=k_2=...=k_n=0$

$\iff x_1\alpha_1+...+x_n\alpha_n=0$ 只有零解（此处 α_i 是 n 维向量）

$\iff \alpha_1,...,\alpha_n$ 中任一向量不能被其他向量线性表示

$\iff \alpha_1,...,\alpha_n$ 中任意 α_i 不能被之前向量线性表示

$\iff r(\alpha_1,...\alpha_n)=n$

n 维向量组 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性无关 $\iff \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$（注：只有 $n\times n$ 时适用）

3. 任意有零向量的向量组一定是线性相关的

4. 向量组一部分线性相关 $\Rightarrow$ 向量组线性相关
向量组线性无关 $\Rightarrow$ 向量组任何一部分线性无关

5. n 维单位向量 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ 线性无关

6. 唯一性定理：
$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性无关而 $\alpha_1, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 能被 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ **唯一** 线性表示
$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性无关 $\iff \beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$ 表示法唯一

7. $\alpha_1, ..., \alpha_r$ 可由 $\beta_1, ..., \beta_s$ 线性表示，若 $r > s$，则 $\alpha_1, ..., \alpha_r$ 线性相关
$\alpha_1, ..., \alpha_r$ 可由 $\beta_1, ..., \beta_s$ 线性表示，$\alpha_1, ..., \alpha_r$ 线性无关，则 $r \leq s$(逆否命题)
$\alpha_1, ..., \alpha_r$ 与 $\beta_1, ..., \beta_s$ 等价且都线性无关，则 $r = s$

8. $m > n$ 时，m 个 n 维向量必线性相关，特别地，$n+1$ 个 n 维向量必线性相关
n 维向量线性无关，则 $n+1$ 维向量必线性无关（增加一个维度, 延伸组）
$n+1$ 维向量线性相关，则 n 维向量必线性相关（减少一个维度）

9. 设 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关 $\iff$ 任一 n 维向量都可以经它们线性表出

10. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关，$\alpha_{n+1} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$，$k_i$ 全不为 0，则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中任取 n 个向量都线性无关.（习题）

11. 极大线性无关组

(1) 一个线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身.
（提示：线性向量组的任一部分线性无关）

(2) 任意一个极大线性无关组都与这个向量组本身等价.

(3) 一个向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.
（提示：任一两个极大线性无关组都等价，那么秩相同）

(4) 含有非零向量的向量组 $\alpha_1, ...\alpha_s$ 一定有极大线性无关组.
（提示：设 α_{i_1} 是 $\alpha_1, ...\alpha_s$ 的第一个非零向量，考虑 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}, ..., \alpha_s$, 再设 α_{i_2} 是第一个

不能被 α_{i_1} 表示的向量，考虑 $\alpha_{i_2}, \alpha_{i_2+1}, ..., \alpha_s$，再设 α_{i_3} 是第一个不能被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$ 表示的向量，以此类推，取出来的这个向量组是极大线性无关组.）

(5) 一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.

12. 向量组的秩

(1) 向量组线性无关 $\iff$ 它的秩与它所含的向量组个数相同.

(2) 等价的向量组 $\Rightarrow$ 相同的秩.

（注：反过来不成立，反例：$\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$，则两者秩相同但不等价）

加条件 1：$r(\alpha_1, ...\alpha_n) = r(\beta_1, ...\beta_n)$，且 $\alpha_1, ...\alpha_n$ 可以由 $\beta_1, ...\beta_n$ 线性表示，则 $\alpha_1, ...\alpha_n$ 与 $\beta_1, ...\beta_n$ 等价.

加条件 2：$r(\alpha_1, ..., \alpha_r) = r(\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_s)$，则 $\alpha_1, ...\alpha_r$ 与 $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_s$ 等价

(3) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的秩为 r，则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大无关组.(提示：先证明向量组 α_i 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关）

(4) 重要秩不等式 1：如果向量组 (I) 可以经向量组 (II) 线性表出，那么 $r(I) \leq r(II)$

(5) 重要秩不等式 2：设向量组 $r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) = r_1$，$r(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t) = r_2$，
$r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_t) = r_3$，则 $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$（习题）

(6) 重要秩不等式 3：设向量组 $r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) = r$，在其中任选 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_m}$，则子向量组的秩 $r' \geq r + m - s$（即 $r \leq r' + (s-m)$)(习题)

（不妨记 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 拆成了 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_m}$ 和 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_{s-m}}$，且这两个拆分组的秩分别为 r', r''，这是重要秩不等式 2 的推论:$r \leq r' + r'' \leq r' + (s-m)$）

矩阵的秩结论梳理

(1-3 的整体逻辑：阶梯形矩阵 $\xrightarrow{extention}$ 任意矩阵，任意矩阵 $\xrightarrow{transformation}$ 阶梯形矩阵)

1. 阶梯形矩阵 J 的行秩 = 列秩 = 非零行个数
且 J 的主元所在的列构成列向量组的极大无关组

2. 任一矩阵的行秩 = 列秩

3. 矩阵 A 通过初等行变换变为阶梯形矩阵 J，则 r(A) 等于 J 的非零行个数，J 主元所在的列构成 A 列向量组的极大无关组

注：用这个求：1. 矩阵 A 的秩；2. 向量组的秩（将向量组拼成一个矩阵）3. 找向量组的极大无关组（将向量组竖着拼成一个矩阵）

4. 初等行/列变换不改变秩
5. 初等行/列变换不改变列/行的相关性，进而不改变列秩/行秩

6. 矩阵的秩的行列式定义：
$r(A) = r \iff$ A 中存在一个不为 0 的 r 阶子式，而所有的 $r+1$ 阶子式全为 0

(1) $r(A) = r \Rightarrow$A 中一个不为 0 的 r 阶子式所在的列（行）构成 A 的列（行）向量组的极大无关组.

(2) $n \times n$ 阶矩阵 $r(A) = n \iff |A| \neq 0$

7. 消元法求一个向量组的极大无关组：
Step1：将每个向量竖着排成一个矩阵 A.
Step2：把矩阵 A 消成阶梯型矩阵.
Step3：观察非零行个数，有几个非零行，秩 r 就是多少.
Step4：挑出 r 个向量，这 r 个向量能组成阶梯型矩阵且非零行 =r.

线性方程组有解的充分必要条件结论梳理

1. 方程组有解性的判断

1. 对于任意一个线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \text{无解} \iff r(A) + 1 = r(\bar{A}) \\ \text{有解} \iff r(A) = r(\bar{A}) \begin{cases} \text{唯一解} \iff r(A) = n \\ \text{无穷解} \iff r(A) < n \end{cases} \end{cases}$$

2.Cramer 法则及其逆定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

有**唯一解** $\iff |A| \neq 0$

* 弱化命题：线性方程组 (II) **有解** $\iff |A| \neq 0$（习题）
(这个证明过程与上面「有唯一解」有一点不同。方程组 (II) 有解
$\iff$ **任意** β 能被列向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性表出
$\iff$ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性无关（这里用到了线性相关性/结论 9）
$\iff |A| \neq 0$)

特别地，对于一个有 n 个方程的**齐次**线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

满足 $\begin{cases} \text{零解（也是唯一解）} \iff |A| \neq 0 \\ \text{非零解（即无穷解）} \iff |A| = 0 \end{cases}$

3. 矩阵方程的解

（复旦线代 ppt）矩阵方程 $\boldsymbol{AX=B}$ 有解的充分必要条件是 $\boldsymbol{r(A)=r(A,B)}$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times l$ 矩阵，X 为 $n\times l$ 矩阵

4. 方程组同解问题

（1）记 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ ...\\ \alpha_s\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ ...\\ \beta_t\end{bmatrix}$，方程组 (I)$AX=0$ 的解都是方程组 (II)$BX=0$ 的解

$\iff \beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出

$\Rightarrow r(A)\geq r(B)$

$\iff AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 同解

$\iff r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$

（因为 $\iff AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 同解，所以两方程基础解系所含向量数相同，进而能得到此结论）

（2）方程组 (I)$AX=0$ 与方程组 (II)$BX=0$ 同解 $\iff r(A)=r(B)$

线性方程组解的结构结论梳理

1.n 元非齐次线性方程组有解时，其解唯一 $\iff$ 它的导出组只有零解.
（提示：解唯一 $\iff$ $U = \gamma_0 + W = \{\gamma_0\}$，其中 U 是非齐次线性方程组的解空间，W 是对应导出组的解空间）

逆否命题：n 元非齐次线性方程组有解，其有无穷解 $\iff$ 它的导出组有非零解.

2. 与基础解系等价的向量组也是基础解系.
（提示：$\beta_1, ..., \beta_m$ 与 $\eta_1, ..., \eta_{n-r}$ 等价 $\Rightarrow \beta_i = k_1\eta_1 + ... + k_{n-r}\eta_{n-r} \Rightarrow \beta_i$ 也是方程组的解，又 $\beta_1, ..., \beta_m$ 线性无关 $\Rightarrow \beta_1, ..., \beta_m$ 是基础解系)

3. 设齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其系数矩阵 A 的秩为 r，**则方程组任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的基础解系.**
（提示：先证明任意 $n-r$ 个线性无关的解形成的向量组与基础解系等价；在证明与基础解系等价的向量组也是基础解系）

矩阵结论梳理

1. 零因子：

A,B 都不为 0 而 AB=0，则称 A 为 B 的左零因子；若 A,B 都不为 0 而 AB=BA=0，则称 A 与 B 互为零因子

2. 矩阵方幂（用数学归纳法证明）：

（1）$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

（2）$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

3. 矩阵多项式：

$f(x), g(x)$ 均为数域 K 上的多项式，则 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$

4. 矩阵等价关系

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，$A^TA = 0 \iff A = 0$
（提示：A^TA 对角线上的元素都是平方和 =0，因此每一项都 =0）

5. 反称矩阵的性质：

（1）若 $A^T = -A$，则 $|A| = (-1)^n|A^T|$，因此当 $n = 2k-1$ 时，$|A| = 0$.
（2）任一 $n \times n$ 矩阵都能表示为一对称矩阵 $\dfrac{A+A^T}{2}$ 与反称矩阵 $\dfrac{A-A^T}{2}$ 之和.

6. 对角矩阵的性质：

(1) 用一个对角矩阵左乘/右乘一个矩阵 A，相当于用对角矩阵的主对角元分别去乘 A 对应的行/列

$$\begin{bmatrix}d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & ... & \\ & & & & d_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{s1} & a_{s2} & ... & a_{sn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & ... & a_{1n}d_1\\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & ... & a_{2n}d_2\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{s1}d_s & a_{s2}d_s & ... & a_{sn}d_s\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{s1} & a_{s2} & ... & a_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & ... & \\ & & & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & ... & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & ... & a_{2n}d_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{s1}d_1 & a_{s2}d_2 & ... & a_{sn}d_n \end{bmatrix}$$

（2）两个 n 级对角矩阵的乘积仍是对角矩阵，并且是把相应的主对角元相乘

（3）与对角线上元素互不相同的对角矩阵交换的矩阵只能是对角矩阵（提示：AB=BA，对比元素做）

7. 基本矩阵的性质:

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ E_{il} & k = j \end{cases}$$

8. 上下三角形矩阵的性质：

（1）两个 n 级上三角矩阵 A, B 的乘积仍为上三角矩阵，且 AB 的主对角元等于 A, B 相应主对角元的乘积

（2）A, B 的 (i, l) 元等于 $\sum\limits_{j=i}^{l} a_{ij} b_{jl}$

9. 矩阵等价与初等矩阵的性质（初等矩阵相当于对 E 作一系列变换得到的矩阵）

（1）矩阵的等价：若矩阵 A 经过一系列初等变换化为 B，那么 A 与 B 等价
即存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P_1, ..., P_s, Q_1, ..., Q_t}$ 满足：$\boldsymbol{B = P_1 ... P_s A Q_1 ... Q_t}$

（2）任意矩阵 A 都能通过初等矩阵化为等价标准型 $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

即 $\boldsymbol{A = P_s^{-1} ... P_1^{-1} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q_t^{-1} ... Q_1^{-1}}$

（2）的推论：秩为 r 的矩阵能写为 r 个秩为 1 的矩阵

（3）同型矩阵 A, B 等价 $\iff$ 存在可逆阵 P, Q 使得 $B = PAQ \iff r(A) = r(B) \iff$ A, B 具有相同的标准型

（右推左显然。左推右：A, B 都能通过初等变换化为 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，说明 A 能初等变换为 B）

(4)初等矩阵的逆为同类型的初等矩阵:$P(i,j)^{-1}=P(i,j), P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c})), P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$

(5) 初等矩阵的转置仍为初等矩阵

(6) 初等矩阵行列式的值: $P(i,j)\ =-1,\ P(i(c))\ =c, |P(i,j(k))|=1$

10. 运算后的矩阵与行列式:

(1) $|kA|=k^n|A|$

(2) $|A_1A_2...A_s|=|A_1||A_2|...|A_s|$

(3) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

(5) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(6) $\begin{vmatrix} A_{kk} & O \\ C & B_{rr} \end{vmatrix}=|A||B|, \begin{vmatrix} O & A_{kk} \\ B_{rr} & C \end{vmatrix}=(-1)^{rk}|A||B|$

(7) (复旦高代) 列满秩矩阵 $A_{m\times n}$ 满足左消去律，即 $AD=AE\Rightarrow D=E$

行满秩矩阵 $A_{m\times n}$ 满足右消去律，即 $DA=EA\Rightarrow D=E$

11. 可逆矩阵的相关结论:

(1) A 可逆 $\Longleftrightarrow r(A)=n$(满秩) $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$（非奇异阵）$\Longleftrightarrow A$ 的列向量组线性无关 $\Longleftrightarrow A$ 的行向量组线性无关 $\Longleftrightarrow Ax=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow$ 对任意 n 维向量 β，方程组 $Ax=\beta$ 有解 $\Longleftrightarrow$ 存在一个 n 阶矩阵 B，使得 $AB=E \Longleftrightarrow$ 存在一个 n 阶矩阵 B，使得 $AB=E\Longleftrightarrow$ 存在一个 n 阶矩阵 C，使得 $CA=E\Longleftrightarrow A$ 非退化

(2) 求可逆阵的方法：1.$AB=E$ 待定系数；2. 伴随矩阵；3.$(A,E)->(E,A^{-1})$；4. 分块后对小块求逆.

(3) 可逆矩阵经过初等行变换后一定是单位矩阵.（因为可逆矩阵是满秩的）

(4) A^{-1} 存在 $\Longleftrightarrow$ A 能写为一些初等矩阵的乘积.

(5) 若 P,Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(提示：$r(A)=r(P^{-1}(PA))\leq r(PA)$，且 $r(PA)\leq r(A)$)

(根据（4)，这本质上是：初等变换不改变矩阵的秩)

12. 分块矩阵的相关结论（常见分块方式：按行/列分块）

（1）分块矩阵的转置：$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}$，则 $A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & ... & A_{n1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & ... & A_{n2}^T \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n}^T & A_{2n}^T & ... & A_{nn}^T \end{bmatrix}$

（2）对角分块矩阵的逆：$A=\begin{bmatrix} A_1 & O & ... & O \\ O & A_2 & ... & O \\ ... & ... & ... & ... \\ O & O & ... & A_n \end{bmatrix}$，那么 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & ... & O \\ O & A_2^{-1} & ... & O \\ ... & ... & ... & ... \\ O & O & ... & A_n^{-1} \end{bmatrix}$

$\mathrm{A}^k=\begin{bmatrix} A_1^k & O & ... & O \\ O & A_2^k & ... & O \\ ... & ... & ... & ... \\ O & O & ... & A_n^k \end{bmatrix}$

(3)副对角分块矩阵的逆:$A=\begin{bmatrix} O & ... & O & A_1 \\ O & ... & A_2 & O \\ ... & ... & ... & ... \\ A_n & ... & O & O \end{bmatrix}$,那么 $A^{-1}=A=\begin{bmatrix} O & ... & O & A_n^{-1} \\ O & ... & A_{n-1}^{-1} & O \\ ... & ... & ... & ... \\ A_1^{-1} & ... & O & O \end{bmatrix}$

（4）分块下三角矩阵的逆：$A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix}$，那么 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ -A_2^{-1}A_3A_1^{-1} & A_2^{-1} \end{bmatrix}$

分块上三角矩阵的逆：$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}$，那么 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_3A_2^{-1} \\ O & A_2^{-1} \end{bmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=\left|E_n-AB\right|=\left|E_m-BA\right|$(提示：对最左边矩阵作分块初等变换）

（6）$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix}=\left|\lambda E_n-AB\right|=\lambda^{n-m}\left|\lambda E_m-BA\right|$

13. 设 A 是数域 P 上任意一个方阵，$\beta\in P^n$，且 $A^k\beta=0$ 但 $A^{k-1}\beta\neq 0$，则 $\beta, A\beta, A^2\beta, ..., A^{k-1}\beta$ 线性无关.

证明：若存在 $l_1, l_2, ..., l_n$ 使得 $l_1\beta+l_2A\beta+...+l_nA^{k-1}\beta=0$（*），那么：
对 (*) 左乘 A^{k-1}，那么 $l_1A^{k-1}\beta+l_2A^k\beta+...+l_nA^{2k-2}\beta=l_1A^{k-1}\beta=0$，又 $A^{k-1}\beta\neq 0$，因此只能 $l_1=0$

对（*）左乘 A^{k-2}，那么 $l_1A^{k-2}\beta+l_2A^{k-1}\beta+...+l_nA^{2k-3}\beta=l_1A^{k-2}\beta+l_2A^{k-1}\beta=l_2A^{k-1}\beta=0$，又 $A^{k-1}\beta\neq 0$，因此只能 $l_2=0$
以此类推，容易得到 $l_1=l_2=...=l_n$，因此 $\beta,A\beta,A^2\beta,...,A^{k-1}\beta$ 线性无关.

14. 矩阵的秩相关不等式：

（1）$\boldsymbol{|r(A)-r(B)|\leq r(A+B)\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)}$
证明：设 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 和 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$，分别取他们的极大无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 和 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_t}$，那么列向量组 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n$ 可以由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_t}$ 线性表出，因此 $r(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)\leq r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_t})\leq r+t=r(A)+r(B)$

（2）若 $\boldsymbol{AB=O}$，那么 $\boldsymbol{r(A)+r(B)\leq n}$
证明：B 的每个列向量都是 $AX=0$ 的解向量，因此 B 的列向量能被 $AX=0$ 的基础解系 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-r(A)}$ 线性表出，因此 $r(B)\leq r(\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-r(A)})=n-r(A)$，移项后得证（Sylvester 秩不等式的特例）

（3）Sylvester 秩不等式：$\boldsymbol{r(A_{m\times n}B_{n\times l})\geq r(A)+r(B)-n}$

（4）$\boldsymbol{r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}}$

证明：设 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，那么 $AB=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}$
可以注意到 AB 的列向量组能被 A 的列向量组线性表出，因此 $r(AB)\leq r(A)$
同理地，$r(AB)=r((AB)^T)=r(B^TA^T)\leq r(B^T)=r(B)$，因此 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

（5）$\boldsymbol{\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)}$

（6）$\boldsymbol{r(A)\geq r(A^2)\geq ...\geq r(A^n)\geq r(A^{n+1})\geq ...}$
证明：这是由 [矩阵的秩相关不等式（4）] 得到的.

（7）设 $\boldsymbol{A_{n\times n}}$ 是数域上任意一个方阵，则 $\boldsymbol{r(A^n)=r(A^{n+1})}$
证明：构造矩阵方程 $A^nX=0,A^{n+1}X=0$，要证题目结论，只需证两方程同解（同解

则具有相同的基础解系解向量个数，消掉 n 即得到）
显然，$A^nX=0$ 的解都是 $A^{n+1}X=0$，下证 $A^{n+1}X=0$ 的解都是 $A^nX=0$ 的解.
假设结论不成立，那么若 $A^{n+1}\eta=0$，则 $A^n\eta\neq 0$.
由于 $A^{n+1}\eta=0$，$A^n\eta\neq 0$，运用结论 12，$\eta, A\eta, A^2\eta, ..., A^n\eta$ 线性无关. 这显然是不成立的，因为 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.
因此假设不成立，原命题得证，即 $A^{n+1}X = 0$ 的解都是 $A^nX = 0$ 的解，那么有 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

[注]：这说明不等式（6）中，A^n 以后的等号是能取到的，但前面的等号不一定取得到，这是因为证明中用到了“$n+1$ 个 n 维向量必线性相关”这个结论.

（8）$r(kA)=r(A)$（显然成立）

（9）$\boldsymbol{r(A^TA)=r(A)}$
(提示：只需证 $A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解，$AX=0$ 显然是 $A^TAX=0$ 的解，反过来，若 η 满足 $A^TA\eta=0$，则左乘 η^T 得到 $\eta^TA^TA\eta=0$，整理得到 $(A\eta)^TA\eta=0$, 由结论 5，$A^TA=0 \iff A=0$, 因此 $A\eta=0$

（10）Frobenius 秩不等式：设 $A\in P^{s\times l}, B\in P^{l\times m}, C=P^{m\times t}$,那么 $\boldsymbol{r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)}$

（11）$\boldsymbol{r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B\end{pmatrix} \geq r(A)+r(B)}$ （11）$\boldsymbol{r\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} \leq r(A)+r(B)}$

二次型结论梳理

0. 对称初等变换

（1）交换 A 的第 i 行和第 j 行，再交换第 i 列和第 j 列

（2）第 i 行乘 k 倍加到第 j 行，再第 i 列乘 k 倍加到第 j 列

（3）第 i 行乘 k 倍，再第 i 列乘 k 倍

1. 合同: 合同变换的本质是「对称初等变换」

（1）秩为 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

(对比：秩为 r 的矩阵可以表成 r 个秩为 1 的矩阵之和.）

（2）$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & . \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$ 合同，其中 $i_1,...,i_n$ 为 $1,...,n$ 的排列.

（提示：对 n 元二次型 $\lambda_1 x_1^2+...+\lambda_n x_n^2$，作非退化线性替代 $y_1=x_{i_1},...,y_n=x_{i_n}$ 即可）

（注：对对角分块矩阵也适用）

（3）A 是反称矩阵 $\iff$ 对任意一个 n 维向量 X，有 $X^TAX=0$.

（4）(i)n 阶复二次型矩阵 A,B 合同 $\iff$ $r(A)=r(B)$

(ii)n 阶实二次型矩阵 A,B 合同 $\iff$ $r(A)=r(B)$ 且正惯性指数相同.

(iii)n 阶复对称矩阵能按合同分为 $(n+1)$ 类（根据 $r(A)=0,1,...,n$）

(iv)n 阶实对称矩阵能按合同分为 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类（正惯性指数能取 $0,1,...,r$，而 r 能取 $0,1,...,n$，因此总和为 $1+2+...+(n+1)$）

（5）对称矩阵只能与对称矩阵合同

2. 非退化线性替换的利用

一个实二次型 X^TAX 能分解为两个实系数的**一次齐次多项式的乘积** $\iff$ $r(A)=2$ 且符号差为 0，或 $r(A)=1$

3. 正定矩阵与惯性系数

（1）对任意 n 维向量 X，$X^TAX>0 \iff A$ 正定 $\iff A$ 的正惯性指数为 $n \iff A$ 合同于正定矩阵 $\iff A$ 合同于 $E \iff$ 存在可逆矩阵 C 使得 $A=C^TC \iff A$ 的顺序主子式 $|P_k|$ 全大于 $0 \iff A$ **的主子式全大于 0.**
（注：最后一个充要条件的充分性，设 A_k 为正定矩阵 A 的主子式，只需要取 $X=(a_{i_1i_1},0,...,a_{i_2i_2},...,a_{i_ki_k})\neq 0$，那么 $X^TAX=X_k^TAX_k>0$，因此 A_k 正定，进而 $|A_k|>0$。必要性是显然的，因为主子式大于 0 必然顺序主子式也都大于 0）

（2）对任意 n 维向量 X，$X^TAX<0 \iff A$ 负定 $\iff A$ 的负惯性指数为 $n \iff A$ 合同于负定矩阵 $\iff A$ 合同于 $-E \iff$ 存在可逆矩阵 C 使得 $A=-C^TC \iff A$ 的顺序主子式 $|-P_k|=(-1)^k|P_k|$ 全大于 $0 \iff -A$ **的主子式全大于 0**.

（3）对任意 n 维向量 X，$X^TAX\geq 0 \iff A$ 半正定 $\iff A$ 的正惯性指数 $p=r \iff A$ 合同于半正定矩阵 $\iff A$ 合同于 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff$ 存在矩阵 C 使得 $A=C^T\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}C \iff A$ **的主子式全大于等于 0.**
（注 1：这里“A 的顺序主子式 $|P_k|$ 全大于等于 0 是不对的！）
（注 2：这里不要求 C 是可逆矩阵，取 $C=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}C_1$，则 $A=C^TC$）

（4）对任意 n 维向量 X，$X^TAX\leq 0 \iff A$ 半负定 $\iff A$ 的负惯性指数 $r-p=r \iff A$ 的正惯性指数 $p=0 \iff A$ 合同于半负定矩阵 $\iff A$ 合同于 $\begin{bmatrix} -E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff$ 存在矩阵 C 使得 $A=C^T\begin{bmatrix} -E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}C \iff -A$ **的主子式全大于等于 0.**

（5）若 A 正定，则 kA, A^{-1}, A^* 均正定
A 为任意 n 阶实可逆矩阵，则 A^TA 必正定
A 为任意 $m\times n$ 阶实矩阵，则 A^TA 正定 $\iff A$ 列满秩（$r(A)=n$）
A 为任意 $m\times n$ 阶实矩阵，则 AA^T 正定 $\iff A$ 行满秩（$r(A)=m$）

（6）正定矩阵的介值性：
设 X^TAX 为一实二次型. 已知有 n 维实向量 X_1,X_2，使得 $X_1^TAX_1>0, X_2^TAX_2<0$，

则必存在 n 维实向量 $X_0 \neq 0$ 使得 $X_0^T A X_0 = 0$
(提示：通过非退化线性变化 $X = CY$ 化为规范形后，由条件知正惯性系数 $p > 0$, 负惯性系数 $r - p > 0$，取向量 $Y = (y_1, ..., y_{p+1}, ..., y_n) = (1, ..., 1, ...0)$, 那么取 $X_0 = CY$)

(7) 设 A 是实对称矩阵，则当 t 充分大时，$tE + A$ 是正定矩阵.
(注：因为 $tE + A$ 的第 k 个顺序主子式为 $\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & t+a_{nn} \end{vmatrix}$, 行列式最高次数为 t^n，显然当 t 充分大时 t^n 占主导，那么顺序主子式大于 0，那么 $tE + A$ 正定)

(8) ((7) 的推论) 设 A 是实对称矩阵，则存在一正实数 c 使得对任意向量 X 都有 $|X^T A X| \leq c X^T X$.
(注：当 c 充分大时，$cE + A$ 和 $cE - A$ 都是正定矩阵)

(9)A, B 正定，则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 也正定