1 多项式

1. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{R}[x]$, 求证: 若有 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$，则有 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$

2. 设 $d, n \in \mathbf{Z}^+$，求证：在 $\mathbf{P}[x]$ 中，$x^d - 1 | x^n - 1 \iff d | n$

3. 已知 $f(x), g(x) \neq 0$，若存在 $u(x), v(x)$ 使得 $(f(x), g(x)) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$，求证：$(u(x), v(x)) = 1$

4. 设 $g(x) \neq 0$，求证：对任意 $f(x), h(x) \in \mathbf{P}[x]$，成立 $(f(x), g(x), h(x)) = ((f(x), g(x)), (g(x),\ h(x)))$

5. 已知多项式 $f(x), g(x)$，若 $ad - bc \neq 0$ 求证: $(f(x), g(x)) = (af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x))$

6. 若 $(f(x), g(x)) = 1$，求证：对任意 $m \in \mathbf{Z}^+$，有 $(f(x^m), g(x^m)) = 1$

7. 若 $(f(x), g(x)) = 1$，求证：对任意 $m, n \in \mathbf{Z}^+$，有 $(f^m(x), g^n(x)) = 1$

8. 求证: 对任意 $n \in \mathbf{Z}^+$, 有 $(f(x), g(x))^n = (f^n(x), g^n(x))$

9. 设 $g(x) \neq 0$，求证：对任意 $h(x) \in \mathbf{P}[x]$，成立 $(f(x), g(x)) = (f(x) - h(x)g(x), g(x))$

10. 求证：$x | f^k(x) \iff x | f(x)$

11. 数域 P 上次数大于 0 的多项式 $f(x)$ 是某个不可约多项式 $p(x)$ 的方幂的充分必要条件是: 对于任意 $g(x) \in \mathbf{P}[x]$, 或者 $(f(x), g(x)) = 1$, 或者存在正整数 m 使得 $f(x) | g^m(x)$

12. 证明：$g(x) | f(x)$ 的充分必要条件是 $g^2(x) | f^2(x)$

13. 设 $p(x)$ 是不可约多项式, 如果 $p(x) = f(x)\ g(x)$, 求证: $f(x)$ 与 $g(x)$ 有且仅有一个为零次多项式

14. 证明：首项系数为 1 的 n 次多项式 $f(x)$ 可以写成 $f(x) = (x - a)^n$ 的充分必要条件是 $f'(x) | f(x)$

15. 设 $a.b$ 是两个不相等的常数，证明：多项式 $f(x)$ 被 $(x - a)(x - b)$ 除所得的余式是

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

16. 证明：$f(x) = \sin x$ 不是多项式

17. 若多项式 $f(x + y) = f(x)f(y)$，其中 x, y 为任意实数，求证：$f(x) = 0$ 或 $f(x) = 1$

18. 设 $f(x)$ 是整系数多项式, 如果 $f(1), f(0)$ 都是奇数, 证明 $f(x)$ 没有整数根

19. 若已知关于 x 的一元 n 次方程 $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ 有 $n + 1$ 个不同的根，则 $a_i = 0,\ (i = 0, ..., n)$

20. 判断：$p(x)$ 在数域 P 上不可约的充分必要条件是 $p(x)$ 在 P 没有根?

21. 若 -1 是 $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ 的重根，则 a 的值为多少?

22. 已知方程 $x^3 + x^2 + 2x + a = 0$ 的三个根成等比数列，求 a 的值。

23. 设 $1, a_1, ..., a_{2n}$ 是多项式 $x^{2n+1} - 1$ 在复数域内的全部根，证明：

$$(1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_{2n}) = 2n + 1$$

24. 设 $1 - \mathrm{i}$ 是方程 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$ 的一个根，解此方程。

25. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是多项式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ 的根，其中 $r \neq 0$，求下列各式的值:

(1)$\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{1}{\alpha_3}$

(2)$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$

(3)$\dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \dfrac{1}{\alpha_1\alpha_3} + \dfrac{1}{\alpha_2\alpha_3}$

26. 设 $(f(x), g(x)) = 1$，$\partial f(x)$,$\partial g(x)$ 均大于 0，可取 $u(x), v(x)$ 满足 $\partial u < \partial g$，$\partial v < \partial f$ 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

且 $u(x), v(x)$ 是唯一的一对多项式。

27. 设 $p_1, ..., p_s$ 是 s 个互不相同的素数，$n \in \mathbf{Z}^+$，则 $\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_s}$ 为无理数。

28. 设 $f(x) = (f(x), f'(x))g(x)$ 且 $g(x)$ 在复数域内只有根 2，-3，$g(1) = -20$

（1）求 $g(x)$；（2）如果 $f(0) = 1620$，求 $f(x)$

29. 设 $A \in \mathbf{M_n(P)}$，$f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{P[x]}$，记 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. 如果 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 证明 $f(A)X = 0$ 的任一个解都可以分解为 $f_1(A)X = 0$ 的一个解和 $f_2(A)X = 0$ 的一个解之和.

30. 非零多项式 $f(x), g(x) \in \mathbf{P[x]}$ 不互素的充分必要条件是：存在 $u(x), v(x) \neq 0$ 满足 $f(x)u(x) = g(x)v(x)$ 且 $\partial u(x) < \partial g(x)$，$\partial v(x) < \partial f(x)$

31. 给定 $h(x) \in \mathbf{P}[\mathbf{x}]$，对任意 $f(x), g(x) \in \mathbf{P}[\mathbf{x}]$，若 $h(x)|(f(x)-g(x))$ 则称 $f(x), g(x)$ 模 $h(x)$ 同余，记为 $f(x) \equiv g(x) \mod h(x)$.

若 $f_i(x) \equiv g_i(x) \mod h(x)$，$(i=1,2)$ 求证：

（1）$f_1(x)+f_2(x) \equiv g_1(x)+g_2(x) \mod h(x)$

（2）$f_1(x)f_2(x) \equiv g_1(x)g_2(x) \mod h(x)$

32. 求 x^m-1 和 x^n-1 的最大公因式

33. 如果 $(f(x), m(x))=1$，证明：对于任意 $g(x) \in \mathbf{P}[\mathbf{x}]$，都存在 $h(x)$ 使得：

$$h(x)f(x) \equiv g(x) \mod m(x)$$

34. 数域 $\mathbf{P}$ 上次数大于 0 的多项式 $f(x)$ 是某个不可约多项式 $p(x)$ 的方幂的充分必要条件是：对于任意 $g(x) \in \mathbf{P}[\mathbf{x}]$，或者 $(f(x), g(x))=1$，或者存在正整数使得 $f(x)|g^m(x)$

35. 对任意 $f(x), p(x) \in \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$, $p(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，且 $f(x)$ 与 $p(x)$ 有一个公共复根，求证：$p(x)|f(x)$

36. 设 $a_1, ...a_n$ 为互异的整数，则 $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)-1$ 在有理数域上不可约.

37. 如果 $f(x), g(x) \in \mathbf{P}[\mathbf{x}]$，求证：

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}=[f(x), g(x)]$$

38. 设 $f(x)$ 是最高次数为 n 的整系数多项式，若存在正整数 m，满足 $m \nmid f(0), ..., m \nmid f(n-1)$，则 $f(x)$ 没有整数根.

39. 设 $f(x)$ 是最高次数为 n 的整系数多项式，a 是一个整数，$f(a)=f(a+1)=f(a+2)=1$，求证：对任意整数 b，$f(b) \neq -1$

2 线性空间

1.$V=\mathbf{P}^{2\times 2}$ 中，$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ $A_4=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，求 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 到 A_1, A_2, A_3, A_4 的过渡矩阵.

2.$V=\mathbf{P}[\mathbf{x}]_4$ 表示数域 $\mathbf{P}$ 上次数小于等于 3 的多项式和零多项式构成的集合。

（1）证明：V 是一个线性空间.

（2）证明：$\{x+1, x-1, x^2+2, x^3+2\}$ 和 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 是两组基.

（3）求 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 到 $\{x+1, x-1, x^2+2, x^3+2\}$ 的过渡矩阵.

3. 在由次数不超过 $n-1$ 的多项式和零多项式构成的线性空间 $V=\mathbf{P}[x]_n$ 中，求基 $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ 到基 $\{1, (x-a), (x-a)^2, ..., (x-a)^{n-1}\}$ 的过渡矩阵。

4.$V=\{X|AX=0\}$，其中 A, X 为 $n \times n$ 的矩阵，如果 $\text{rank}(A)=r$，求 V 的维数

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: (1) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T)$; (2) 若 $A^2=A$, 则 $\mathbb{P}^n=\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$

6. 证明：$V=\mathbf{P}[x]$，$W_1=\mathbf{P}$，$W_2=\{xf(x)|f(x) \in V\}$，则 $V=W_1 \oplus W_2$

7. 设 $A \in \mathbf{M_n}(\mathbf{P})$, $f(x), g(x) \in \mathbf{P}[\mathbf{x}]$, 如果 $(f_1(x), g(x))=1$, $A=f(M)$, $B=g(M)$, 证明: $\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B)$, 并运用此结论证明: $A^2=A \iff \text{rank}(A)+\text{rank}(E-A)=n$

8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的两两可交换的 n 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{E_n}$, 求证: n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=0$ 的解空间是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 和 $\boldsymbol{Bx}=0$ 两个解空间的直和.

9. 设 $\mathbb{P}^n$ 的子空间 $V=\{(x_1, ...x_n)^T|x_1=x_2, x_n=0\}$，证明 V 与 $\mathbb{P}^{n-2}$ 同构

10. 设线性同构映射 $\sigma: V \longmapsto W$，V_1 是 V 的子空间，求证：$\sigma(V_1)$ 是 W 的子空间，且 V_1 与 $\sigma(V_1)$ 同构

11. 设 W 是 $\mathbf{P}^n$ 的一个非零子空间，若对于 W 的每一个向量 $(a_1, a_2, a_n)^T$ 来说，或者每个 $a_i=0$，或者每一个 a_i 都不等于零，证明：$\dim W=1$

12. 设 $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 且 A 可逆，令 $A=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}$，证明:$n$ 元齐次线性方程组 $A_1X=0$,$A_2X=0$ 的两个解空间的直和是 $\mathbb{P}^n$

13. 设 V_1, V_2 是两个线性空间，$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 和 $\beta_1, ..., \beta_s$ 分别是 V_1 和 V_2 的线性无关向量组，证明：存在 V_1 到 V_2 的同构映射 σ 使得 $\sigma(\alpha_i)=\beta_i, (i=1,2,...,s)$

14. 设 $V_1, V_2, ..., V_s$ 是 V 的 s 个非平凡子空间，证明：存在 V 中的向量 α 不属于任何 V_i

15. 设 V_1,V_2 是 n 维空间 V 的两个子空间，且

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$$

证明：$V_1\subset V_2$ 或 $V_2\subset V_1$

16. 若 U,V,X,Y 是子空间且满足 $U\oplus V=X,X\supset Y$，是否一定有 $Y=(U\cap Y)\oplus(V\cap Y)$?

17. 证明: $\mathbb{F}^n$ 的任一子空间 (除自身以外) 都是若干个 $n-1$ 维子空间的交

18. 设 A,B 分别为数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 与 $n\times s$ 矩阵，又 $W=\{B\alpha|\alpha\in\mathbb{F}^s,\ AB\alpha=0\}$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的子空间，证明：$\dim W=\operatorname{rank}(B)-\operatorname{rank}(AB)$

19. 线性空间 V 的子空间 $V_1,...,V_s$ 是直和的充要条件是

$$V_1\cap V_2=0,(V_1+V_2)\cap V_3=0,...,(V_1+...+V_{s-1})\cap V_s=0$$

20. 设 $\mathbb{F}$ 为数域，n 为一固定正整数，$\mathbf{F}[\mathbf{x}]$ 为多项式空间，令

$$V_k=\{\sum a_ix_i|a_i\in\mathbb{F},\ i\geq 0,i\equiv k(\mathrm{mod}n)\}$$

$k=1,...,n-1$，证明：V_k 为 $\mathbf{F}[\mathbf{x}]$ 的子空间，且 $\mathbf{F}[\mathbf{x}]=V_0\oplus...\oplus V_{n-1}$ 21. 多项式空间 $\mathbf{F}[\mathbf{x}]$ 可以同它的无穷多个真子空间同构

22. 设 V 是数域 P 上的无限维线性空间,V_1,V_2 都是 V 的子空间，σ 是 V 到自身的一个同构映射，证明: 如果 $V=V_1\oplus V_2$, 那么 $V=\sigma(V_1)\oplus\sigma(V_2)$

23. 设 $A,B\in P^{s\times n}$，且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$。用 U,W 分别表示 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$,$\boldsymbol{BX}=0$ 的解空间，证明:

(1)$U\cong W$;

(2) 存在数域 P 上的 n 阶方阵 H，使得 $\sigma(\eta)=\boldsymbol{H}\eta(\forall\eta\in U)$ 是 U 到 W 的一个同构映射。

24. 设 $a,b\in\mathbb{R}$，集合 $V_a=\{f(x)\in\mathbf{R}[\mathbf{x}]_n:f(a)=0\}$，$V_b=\{g(x)\in\mathbf{R}[\mathbf{x}]_n:g(b))=0\}$，证明：对于多项式的加法及数与多项式的乘法，$V_a$ 与 V_b 均构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，并给出 V_a 到 V_b 的一个同构映射来证明这两个线性空间同构。

3 线性变换

1. 如果 $A\sim B$，$C\sim D$，求证：$\begin{pmatrix}A&O\\O&C\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B&O\\O&D\end{pmatrix}$

2. 设 V 是 n 维线性空间，证明：V 上与全体线性变换可以交换的线性变换是数乘变换.

3.$\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 一组基，线性变换 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的另一组基，且 $(\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2})=(\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2})\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$

（1）求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

（2）求 $\boldsymbol{A^k}$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

5. 求 Fibonacci 数列 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的通项.

6. 证明：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

7. 已知 $\boldsymbol{A}==\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A^n}$

8. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

9. 已知三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,1$，$(0,1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 -1 的特征向量，求 $\boldsymbol{A}$.

10. 设 $\mathbb{C}$ 上线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换 $\mathcal{T}$ 在某组基 $\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\boldsymbol{\varepsilon_3}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 问 $\mathcal{T}$ 是否可以对角化. 若可以对角化，写出基变换的过渡矩阵.

11. 证明: n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的对合变换 $\mathcal{T}$ (满足 $\mathcal{T}^2=\mathcal{E}$) 一定可以对角化.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵，其中 $n\geq 2$，若存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A^k}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 一定不可对角化.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，$\boldsymbol{A^2}=\boldsymbol{A}$, 证明:$\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E_r}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

14. 设 $\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\boldsymbol{\varepsilon_3},\boldsymbol{\varepsilon_4}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，已知线性

变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在此基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$

（1）求 $\mathrm{Im}\boldsymbol{\sigma}$ 及 $\ker\boldsymbol{\sigma}$.

（2）在 $\ker\boldsymbol{\sigma}$ 中选一组基，把它扩充为 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，并求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在这组基下的矩阵.

（3）在 $\mathrm{Im}\boldsymbol{\sigma}$ 中选一组基，把它扩充为 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，并求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在这组基下的矩阵.

15. 设 3 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

证明：$\boldsymbol{W=L(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_3)}$

16. 设 $\boldsymbol{V}$ 是复数域上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 在某组基下的矩阵

$$\begin{pmatrix}a&1&0&...&0&0\\0&a&1&...&0&0\\...&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&a&1\\0&0&0&...&0&a\end{pmatrix}$$

证明：$\boldsymbol{V}$ 不能分解为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的两个非平凡不变子空间的直和

17. 对角化 $\begin{pmatrix}a&a&...&a\\a&a&...&a\\...&...&\ddots&...\\a&a&...&a\end{pmatrix}$

18. 设线性变换

$$\begin{aligned}\mathcal{A}:\mathbf{P}[\mathbf{x}]_3 &\longmapsto P[x]_3\\ p(x)&\longmapsto xp''(x)+(x+1)p'(x)+p(x)\end{aligned}$$

则该线性变换能否对角化？如果能，请将其对角化.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A^2+2A=O}$，已知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=2$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

20. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,...,a_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,...,b_n)^T$ 都是非零向量，且 $\boldsymbol{\alpha^T\beta}$，求证：$\boldsymbol{\alpha\beta^T}$ 可对角化.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为对合矩阵（$\boldsymbol{A^2=E}$），则 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}\boldsymbol{E_r}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{-E_{n-r}}\end{pmatrix}$，其中 $r=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+E})$.

22. 设 $\boldsymbol{A,B,C}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB=2B,AC=C}$，证明：如果 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，并求出其对角形矩阵.

23.$\boldsymbol{W}$ 是 $\mathcal{A}-$ 子空间，$f(x)\in\mathbf{P}[\mathbf{x}]$，证明：$\boldsymbol{W}$ 是 $f(\mathcal{A})-$ 子空间.

24. 设 n 维空间 V 为非零子空间 $V_1,...,V_s$ 的直和,$\mathcal{A}_i$ 为 $\boldsymbol{V_i}$ 的线性变换，证明:$\boldsymbol{V}$ 有唯一的线性变换 $\mathcal{A}$，使得每个 $\boldsymbol{V_i}$ 都是 $\mathcal{A}$ 子空间，并且 $\mathcal{A}$ 在 $\boldsymbol{V_i}$ 中诱导的变换就是 $\mathcal{A}_i$.

25. 设 n 维空间 $\boldsymbol{V}$ 为非零子空间,$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\bar{\boldsymbol{V}}$，且 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$，那么：

（1）$\mathcal{A}$ 的特征子空间是 $\mathcal{B}-$ 子空间.

（2）$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 至少有一个公共特征向量.

26. 设 $\boldsymbol{V}$ 是 $[0,1]$ 上连续函数全体构成的实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，$\mathcal{I}$ 为变上限积分：

$$\mathcal{I}f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

（1）$\boldsymbol{W_1}=\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ 是否为 $\mathcal{I}-$ 子空间?

（2）记 $\boldsymbol{W_2}$ 为 $[0,1]$ 上可导函数全体构成的子空间，则 $\boldsymbol{W_2}$ 是否为 $\mathcal{I}-$ 子空间?

（3）以 $x=\dfrac{1}{2}$ 为零点的函数全体构成的子空间是否为 $\mathcal{I}-$ 子空间?

27. 设 $\boldsymbol{V}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，则 $\mathcal{A}$ 有任意 r 维的不变子空间.

28. 证明：

（1）$\boldsymbol{J(\lambda,k)}$ 与其转置相似.

（2）任意方阵与其转置相似.

29. 求出所有满足条件的 Jordan 标准型：

（1）$\boldsymbol{J}$ 是一个五阶矩阵，且只有一个特征值 3，

$\dim\ker\boldsymbol{(J-3E)}=2$，$\dim\ker\boldsymbol{(J-3E)^2}=3$，

$\dim\ker\boldsymbol{(J-3E)^3}=4$，$\dim\ker\boldsymbol{(J-3E)^4}=5$

（2）$\boldsymbol{J}$ 的特征多项式为 $(x+2)^3(x-1)$，最小多项式为 $(x+2)^2(x-1)$

（3）$\boldsymbol{J}$ 的特征多项式为 $(x+2)^4(x-1)$，最小多项式为 $(x+2)^2(x-1)$

30.$\boldsymbol{J}$ 是 $n(n\geq 2)$ 阶的特征值为 0 的 Jordan 块，证明：

（1）$\boldsymbol{J^{n-1}}\neq \boldsymbol{O},\boldsymbol{J^n}=\boldsymbol{O}$

（2）不存在 $\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{A^2}=\boldsymbol{J}$

31. 求 $\mathbf{P}[\mathbf{x}]_n$ 中微商变换的最小多项式.

32. 设 $\boldsymbol{V}$ 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n}$ 下的矩阵是一 Jordan 块。证明：

（1）$\boldsymbol{V}$ 中包含 $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ 的 $\mathcal{A}-$ 子空间只有 $\boldsymbol{V}$ 自身.

（2）$\boldsymbol{V}$ 中任一非零 $\mathcal{A}-$ 子空间都包含 $\boldsymbol{\varepsilon_n}$.

（3）$\boldsymbol{V}$ 不能分解成两个非平凡的 $\mathcal{A}-$ 子空间的直和.

33. 设 n 阶可逆矩阵的每一行元素之和为 $a(a\neq 0)$，则 $4a^3+3a^2+5a+1$ 是矩阵多项式 $\boldsymbol{4A^3+3A^2+5A+E}$ 的特征值

34. 设 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A^{-1}},\boldsymbol{A+A^{-1}},\boldsymbol{A^*}$ 均可对角化

35. 设 $\boldsymbol{A^2=E}$，证明矩阵 $\boldsymbol{A+3E}$ 可逆

4 Euclid 空间

1. 证明：上三角正交矩阵必为对角矩阵，且对角线元素为 ± 1

2.$\boldsymbol{\varepsilon_1,...,\varepsilon_s}$ 是 n 维 Euclid 空间中两两正交的单位向量组，证明：对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$ 有

$$\sum_{i=1}^{s}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon_i})^2\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$$

3. 设 $\boldsymbol{e_1,...,e_n}$ 为 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{V}$ 的标准正交基，$\boldsymbol{\alpha_1,...,\alpha_k}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 中 k 个向量，证明：$\boldsymbol{\alpha_1,...,\alpha_k}$ 两两正交的充要条件为 $\sum\limits_{s=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{e_s})(\boldsymbol{\alpha_j},\boldsymbol{e_s})=0,i,j=1,...,k,i\neq j$

4. 写出 $\boldsymbol{V}=\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 的一个内积，并求从 $\boldsymbol{V}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个同构映射

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，则对任意 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，有 $(\boldsymbol{\alpha^T\beta})^2\leq(\boldsymbol{\alpha^TA\alpha})^T(\boldsymbol{\beta^TA^{-1}\beta})$

6. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{V}$ 中两个不同的单位向量，证明：

（1）存在一个镜面反射 $\boldsymbol{\sigma}$ 使得：$\boldsymbol{\sigma(\alpha)=\beta}$

（2）$\boldsymbol{V}$ 的任一正交变换均可表示成若干个镜面反射的乘积

7. 设 $\boldsymbol{\tau}$ 是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{V}$ 的第二类正交变换，则存在镜面反射 $\boldsymbol{\sigma}$ 及第一类正交变换 $\boldsymbol{\theta}$ 使得 $\boldsymbol{\tau=\sigma\theta}$

8. 证明：奇数维 Euclid 空间中的旋转变换一定有特征值 1

9. 证明：第二类正交变换一定有特征值 -1

10. 设 $\boldsymbol{V_1},\boldsymbol{V_2}$ 是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，$\dim\boldsymbol{V_1}<\dim\boldsymbol{V_2}$。证明：$\boldsymbol{V_2}$ 中必有一个非零向量正交于 $\boldsymbol{V_1}$ 的所有向量

11. 设 $\boldsymbol{V}$ 是有限维 Euclid 空间，证明：

（1）$\{0\}^\perp=\boldsymbol{V}$

(2) 对于 $\boldsymbol{V}$ 的子空间 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{W}$，由 $\boldsymbol{W}\subset\boldsymbol{U}$ 可得 $\boldsymbol{W}^\perp\supset\boldsymbol{U}^\perp$

（3）$(\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W})^\perp=\boldsymbol{U}^\perp+\boldsymbol{W}^\perp$

12. 给出 $\mathbb{R}^2$ 上所有的正交变换，并求出求出 $\mathbb{R}^2$ 中所有保持正方形 $(A(1,1),B(-1,1),C(-1,-1),D(1,-1))$ 整体不变 (即正方形四条边上的点经过变换后仍落在四条边上) 的正交变换.

13. 设 $\boldsymbol{\tau}$ 是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{V}$ 的反对称变换，即 $(\boldsymbol{\tau\alpha},\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\tau\beta})$，$\boldsymbol{\mathcal{E}_V}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的恒等变换。证明：

(1)$\boldsymbol{\tau+\mathcal{E}_V}$ 和 $\boldsymbol{\tau-\mathcal{E}_V}$ 都可逆;

(2)$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{(\tau+\mathcal{E}_V)(\tau-\mathcal{E}_V)^{-1}}$ 是正交变换

14. 已知二次曲面：$x^2+y^2+kz^2+2xy+2yz+2xz=4$ 通过正交线性替换 $\boldsymbol{X=PX'}$ 可化为二次曲面 $y'^2+4z'^2=4$，求 k 与正交矩阵 $\boldsymbol{P}$

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于 a，$\boldsymbol{B}$ 的特征值都大于 b，证明 $\boldsymbol{A+B}$ 的特征值都大于 $a+b$

16. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A-B}$ 均正定，求证：$\boldsymbol{B^{-1}-A^{-1}}$ 正定

17. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B=Q^TAQ}\iff\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值完全相同

18. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，存在一个实可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q^TAQ},\boldsymbol{Q^TBQ}$ 都是对角形矩阵。

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，证明：存在 n 阶幂等矩阵 $\boldsymbol{B_i}$ 和 $\lambda_i(1\leq i\leq s)$，使得 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{B_i}$

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，c 是常数，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\beta^T}&c\end{pmatrix}$.

证明二次函数 $p(x)=\boldsymbol{X^TAX}-2\boldsymbol{X^T\beta}+c$ 在 $\boldsymbol{X=A^{-1}\beta}$ 处取得最小值，且其最小值 $p_{\min}=-\boldsymbol{\beta^TA^{-1}\beta}+c$

21/