1. 求递推公式:

（1）$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

（2）$I_n=\int(\arcsin x)^n\mathrm{d}x$

（3）$I_n=\int\tan^n x\mathrm{d}x$

（4）$I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$

2. 求 $e^{|x|}$ 的不定积分

3. 求 $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$

4. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 的原函数，$F(0)=1$，且对任意 $x>-1$，$F(x)>0$

$$F(x)f(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$$

求 $f(x)$

5. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$

6.（反函数的不定积分）设 $f(x)$ 具有可微的反函数 $f^{-1}(x)$，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，证明:

$$\int f^{-1}(x)=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C$$

7. 求形如 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 的积分

8.$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$

9.$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对于任意一个使得 $\lambda_k\to0$ 的分割序列 $\{\Delta_k\}$，所作积分和

$$\sum_{\Delta_k}f(\xi_i)\Delta x_i$$

的极限

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{\Delta_k}f(\xi_i)\Delta x_i$$

恒存在且相同。

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：$g(x)=e^{f(x)}$ $x\in[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上可积

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且对任给的 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $[a+\delta,b]$ 上可积。证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，记

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\ f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$$

证明：$f\in\mathbf{R}([a,b])$ 的充要条件是 $f^+\in\mathbf{R}([a,b])$ 且 $f^-\in\mathbf{R}([a,b])$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界且对任意正整数 n，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ 上可积，请问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可积?

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，记

$$h(x)=\inf\{f(t):t\in[a,x]\},\ x\in[a,b]$$
$$H(x)=\sup\{f(t):t\in[a,x]\},\ x\in[a,b]$$

证明：$h(x)$ 和 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的可积函数 $g(x)$ 使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\ x\in[a,b]$$

证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

16. 设 $h(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个阶梯函数：即有 $[a,b]$ 上的分割 Δ 使得 $h(x)$ 在 Δ 所属的每个小区间 (x_{i-1},x_i) 上都是常数（$i=1,2...n$）。证明:

（1）若 $f\in\mathbf{R}([a,b])$，则对于任给 $\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $h_1(x)\le f(x)$（$h_2(x)\ge f(x)$），使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

$$\int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

（2）若对任给 $\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 使得 $h_1(x)\le f(x)\le h_2(x)$，$x\in[a,b]$ 且

$$\int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

则 $f\in\mathbf{R}([a,b])$

17. 设 $f\in \mathbf{R}([a,b])$ 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$$

证明：存在 $[r,s]\subset[a,b]$ 使得 $f(x)>0,\ x\in[r,s]$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点处的极限存在且皆为 0，证明：$f\in \mathbf{R}([a,b])$ 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$$

19.(**Newton-Leibniz 公式**) 设 $f(x),F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，求证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

20. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明存在折线函数列 $\varphi_n(x)(n=1,2,...)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

折线函数 $\varphi(x)$ 是指，对区间 $[a,b]$ 的分法 $a=x_0<...<x_m=b$，在每一个部分区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,...,m)$ 上，$\varphi(x)$ 是线性函数，并且 $\varphi(x_{i-1})=f(x_{i-1})$，$\varphi(x_i)=f(x_i)$.

21. 若函数 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 可积，证明：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

，其中 $A<a<b<B$.

22. 设 $\varphi(x)(x\geq 0)$ 是严格单调增加的连续函数，$\varphi(0)=0$，$x=\psi(y)$ 是它的反函数，证明：

$$\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^b\psi(y)dy\geq ab\ (a\geq 0,\ b\geq 0)$$

23. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=0$$

24. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

25. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$$

26. 证明 Riemann 引理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$$

27. 计算

$$\int_0^1(\int_0^1\max\{x,y\}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$$

28. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，

$$F(x)=\int_0^x(x-t)^n e^t\mathrm{d}t$$

求 $F^{(n)}(0)$.

29. 设 $a>0$，$f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：

$$|f(0)|\leq\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x$$

30. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

31. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，

$$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 递减，证明：$f(x)=0\ (x\in(-\infty,+\infty))$

32. 利用积分第二中值定理证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t=0$$

33. 设 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

（1）$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是否可积?

（2）$F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处是否可导?

34. 设 $f(x)=\begin{cases}\int_0^x\sin\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$

35. 计算：

$$I_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\quad(n\in\mathbf{Z}^+)$$

36. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的非负周期函数且 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上可积，证明：

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

37. 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，$A<a<b<B$，证明：

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

38. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，以 T 为周期，求证：$f(x)$ 的任一原函数均为以 T 为周期的周期函数与线性函数之和。

39. 设 $f\in\mathbf{R}([a,b])$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调且连续可微，又 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，求证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

40. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围的面积为 S_2.

（1）确定 a 的值使 S_1+S_2 最小，并求最小值.

（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

41. 求由曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 所确定的图形面积.

42. 求参数方程 $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=2t^2-t^3\end{cases}$ 表示的曲线所围成的图形的面积

43. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

44. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$

45. 设 $a>0,b>0,f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$ 存在有限，证明：$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$

46. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内可微且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 单调递减趋于 0，又

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$$

均收敛，证明：$\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 亦收敛

47. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x=1$

48. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$，又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=\lambda$$

证明：$\lambda<-1$ 时 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

$\lambda>-1$ 时 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

49. 讨论以下积分的敛散性：

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p\ln x}\mathrm{d}x(p>0)$$

50. 设 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明：$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛

51. 讨论以下积分的敛散性：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$$

52. 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调且 $x=0$ 为瑕点，证明：若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，并由此计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

53. 计算 $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

54. 判断如下反常积分的敛散性：

（1）$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^q}\mathrm{d}x(p>0,q>0)$

（2）$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x(p\neq q,p>0,q>0)$

55. 求 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

56. 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内连续且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，又设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，证明：

（1）$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

（2）$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$

（3）存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

57. 讨论：$\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\mathrm{d}x$ 的敛散性

58. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，讨论：$\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\sin(x^{\beta})\mathrm{d}x$ 的敛散性

59. 求 m,n 的范围使得 $\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}\ln x\mathrm{d}x$ 收敛

60. 判断敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{n^p}(p>0)$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}(a>0)$

（3）$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$

61（1）.（对数判别法）证明：若存在 $\alpha>0$ 使得当 $n\geq n_0$ 时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geq 1+\alpha$ $(a_n>0)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

若 $n\geq n_0$ 时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leq 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

（2）判断 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 和 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 的敛散性

62. 讨论

$$\sum_{n=1}^{\infty}[1-(\frac{n-1}{n+1})^k]^p\ (k>0,p>0)$$

的敛散性

63. 设 $F_1=1,F_2=2,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n=3,4,...)$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}$ 收敛

64. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，其中

$$a_n=\frac{\ln 2...\ln(n+1)}{\ln(2+a)...\ln(n+1+a)}\ a>0$$

65. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减且非负，$a>1$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^nf(a^n)$ 具有相同的敛散性

66. 判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，其中

$$a_n=(2-\sqrt{a})...(2-\sqrt[n]{a}),\ a>0$$

67. 求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{a^n\cdot n!}}$ $(a>0,a\neq e)$

68. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散且 $\{a_n\}$ 为正的不增数列，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+...+a_{2n}}{a_1+a_3+...+a_{2n-1}}=1$$

69. 讨论

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+...+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}+...$$

的敛散性，其中 $p,q>0$

70. 证明：

$$I=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p\leq 0)$$

发散

71. 设 $a_n>0$，$S_n=a_1+...+a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$，证明

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

72. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})\frac{\sin nx}{n}$ 收敛，$x\in(0,\pi)$

73. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(n^2+1)\pi}{n}}{\sqrt[4]{n}}$$

的敛散性

74. 设 a_n 为一个数项级数，$\varphi:\mathbb{Z}^+\longmapsto\mathbb{Z}^+$ 为一个双射，又存在 $M>0$ 使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，$|\varphi(n)-n|\leq M$，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$ 收敛，且当他们收敛时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$$

75. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛

76. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 且对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

77. 设 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛且对任意正整数 n，$f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 在 I 上有界，证明：$\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛

78. 设 $f_n(x)=\dfrac{x(\ln n)^a}{n^x}, n=2,3,...$，当 a 取何值时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

79. 设 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，记

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b],\ n=1,2,...$$

证明：$\{F_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

80. 设 $f_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负可积函数列，$g\in R([a,b])$ 且对任意 $c\in(a,b)$，$f_n(x)\rightrightarrows 0,\ n\to\infty,\ x\in[c,b]$，又

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=1,\ \lim_{x\to a^+}g(x)=A$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)f_n(x)\mathrm{d}x=A$$

81. 设 $f\in C^1(a,b+1)$，$a<b$，且 $f_n(x)=n(f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)), x\in[a,b], n=1,2...$，证明：函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内闭一致收敛于 $f'(x)$

82. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 I 上的函数列，且满足

$$|f_0(x)|\le M,\sum_{n=0}^{m}|f_n(x)-f_{n+1}(x)|\le M, m=1,2...$$

其中 $M>0$ 为常数，证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nf_n(x)$ 在 I 上一致收敛

83. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{(1+x)...(1+nx)}$ 在 $(0,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上的一致收敛性 $(a>0)$

84. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $x=0$ 的邻域内非一致收敛

85. 设 $b>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}\mathrm{d}t$$

在 $[0,b]$ 上一致收敛

86. 证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 内一致收敛

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $[0,1)$ 内一致收敛

87. 求

$$I=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)}$$

88. 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}(\frac{1+x}{1-x})^n$$

的收敛域

89. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$，并由此证明

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

90. 求数项级数

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+...$$

91. 证明

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$$

在 $(0,+\infty)$ 内收敛但不一致收敛，而和函数在 $(0,+\infty)$ 无穷次可微

92. 设区间 I 上函数列 $\{f_n(x)\}$ 以及函数 $f(x)$ 满足：$\{f_n(x)\}$ 的任意子列都存在子子列在 I 上一致收敛到 $f(x)$，证明：$\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛到 $f(x)$

93. 证明：如果对任意趋于 0 的数列 $\{x_n\}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定绝对收敛

自我练习

1. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geq 0$，$g'(x)\geq 0$. 证明：对任意 $a\in[0,1]$，都有：

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq f(a)g(1)$$

1. 求 Descarte 叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 所围成的图形面积

2. 求 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ 所围成的面积

3.(上交 22-23 数分期末) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，对于区间 $[a,b]$ 作任意分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<...<x_n=b$$

定义

$$S_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

则可定义 $V_f(a,b)=\sup\{S_\Delta(f)|\ \forall\Delta\}$ 为函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的全变差。若 $V_f(a,b)<+\infty$，称函数 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的**有界变差函数**。证明：

（1）区间 $[a,b]$ 上的单调函数必为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

（2）若 $f(x)\in D([a,b])$ 且 $f'(x)\in R([a,b])$，则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

（3）区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数一定可以写成 $[a,b]$ 上两个单调函数的差.