函数项级数与一致收敛 练习题

Edited by G.Cui

Ex 1. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数, $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$, 证明: 函数列 $f_n(x)(n=1,2,3,\dots)$ 在任何有限区间上一致收敛.

Ex 2. 求证: 级数

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots$$

在 $x=0$ 的邻域内非一致收敛.

Ex 3. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

在任何有穷区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 但在任何一点 x_0 处不绝对收敛.

Ex 4. 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $(-1,1)$ 内连续.

Ex 5. 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$ 在 $[0,1]$ 内不一致收敛, 但在 $[0,1]$ 上可逐项积分.

Ex 6. k 取何值时,

1)$f_n(x)=n^kxe^{-nx}(n=1,2,\dots)$ 在 $[0,1]$ 上收敛;

2)$f_n(x)$在 $[0,1]$ 上一致收敛;

3)$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$可在积分号下取极限.

Ex 7. 计算积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Ex 8. 对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n}x^n$,

1)求出收敛半径; 2)讨论在收敛域端点上的收敛性.

参考答案

Ex 1. (定积分定义的逆用, Cantor 定理)

证明: $|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t| = |\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n}) - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)\mathrm{d}t|$

$= |\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+\frac{k}{n})\mathrm{d}t - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)\mathrm{d}t| = |\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)]\mathrm{d}t|$

$\le \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)|\mathrm{d}t.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 故在任何有限闭区间连续. 由 Cantor 定理, 在其上一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, s.t. $\forall|x'-x''|<\delta$, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

注意到 $|(x+t)-(x+\frac{k}{n})|<\frac{1}{n}$, $t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$.

对于上述 ε 和 δ, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, s.t. $\forall n>N$, $\frac{1}{n}<\delta$, 故 $|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)|<\varepsilon$.

所以(1)式 $<\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon$. 即题目中左右之差为无穷小量. □

Ex 2. (和的估计)

证明: 已知: (1) $\sum\frac{1}{n}$ 发散, 且 $\sum\limits_{n+1}^{2n}\frac{1}{k}\ge n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$; (2) $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{4}$.

当 n 充分大, 在 0 的邻域内, $\sin(nx)\ge\sin\frac{\pi}{4}$.

所以 $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx}{k}\ge\sin\frac{\pi}{4}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n}\ge\frac{\sqrt{2}}{4}\ge\varepsilon_0$. □

Ex 3. (一致收敛判别法)

证明: (一).

(1) $|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k|\le 2$; (2) 固定 x_0, $\frac{e^{x_0^2}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 关于 n 单调递减趋于 0.

由 Dirichlet 判别法, 一致收敛.

(二).

$|(-1)^n\frac{e^{x_0^2}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}|=\frac{e^{x_0^2}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}\sim\frac{1}{n}$, 故非绝对收敛. (注: 是 Leibniz 型级数, 条件收敛). □

Ex 4. (一致收敛级数性质, 内闭一致收敛)

证明: $\forall 0<q<1$, $[-q,q]\subset[-1,1]$. $|(x+\frac{1}{n})^n|\le|(|x|+\frac{1}{n})^n|\le(q+\frac{1}{n})^n$.

得到 $\sum(q+\frac{1}{n})^n$. 而 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{(q+\frac{1}{n})^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(q+\frac{1}{n})=q<1$. 由 Cauchy 比较法知其绝对收敛, 再由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-q,q]$ 上一致收敛. 又由 q 的任意性, 原级数在 $[-1,1]$ 内闭一致收敛, 故在 $(-1,1)$ 内连续. □

Ex 5. (一致收敛级数的一个反例)

证明: $\forall x_0\in(0,1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_0^{2n}\ln x_0=\ln x_0\frac{x_0^2}{1-x_0^2}$. $x_0=0$ 或 $x_0=1$ 时, 通项为 0, 级数的和为 0. 但和函数 $S(x)=\ln x_0\frac{x_0^2}{1-x_0^2}$ 在 $x=0$ 处的(左)极限为 0, 在 $x=1$ 处的(右)极限为 $-\frac{1}{2}$, 故不一致收敛.

考察级数的余和 $R_n(x)=\sum\limits_{n+1}^{\infty}x^{2k}\ln x=\frac{x^{2n+2}\ln x}{1-x^2}=\ln x\frac{x^2}{1-x^2}x^{2n}$, 其中 $\ln x\frac{x^2}{1-x^2}$ 在 $(0,1)$ 连续, 且在 0, 1 处存在单侧极限, 故 $\exists M>0$, s.t. $|\ln x\frac{x^2}{1-x^2}|\le M(\forall x\in[0,1])$.

$|\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x|\le\int_0^1|R_n(x)|\mathrm{d}x\le M\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{M}{2n+1}\to 0(n\to\infty)$. 即余和趋于 0. □

Ex 6. (收敛与一致收敛)

解: (1) $\forall x\in[0,1]$, $\forall k\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{n^kx}{e^{nx}}\to 0$.

(2) $||f_n(x)-0||=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|\frac{n^kx}{e^{nx}}|$.

令 $f_n'(x)=\frac{n^k(1-nx)}{e^{nx}}=0$, 得 $x=\frac{1}{n}$. 代入得 $f_n(\frac{1}{n})=n^{k-1}e^{-1}$, 使之趋于 0, 得 $k<1$.

(3) 因为 $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}n^{k-2}[1-(1+n)e^{-n}]$. 故 $k<2$ 时二者相等.

Ex 7. (用一致收敛级数计算积分)

解: $I=\int_0^1\frac{\ln x(1-x^2+x^2)}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-1+\int_0^1(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x)\mathrm{d}x$.

由第五题知, 第二项可逐项积分.

$\int_0^1(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n+1}\int_0^1\ln x\mathrm{d}(x^{2n+1})]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{(2n+1)^2}$.

于是原积分 $I=-1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=-\frac{\pi^2}{8}$.

(注: 在 $[0,\pi]$ 上用 Fourier 展开, 把 $f(x)=x$ 展开成余弦级数, 再令 $x=0$ 即可.)

Ex 8. (幂级数)

解: (1)由 d'Alembert 判别法, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2$, 所以收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

(2) $x=\frac{1}{2}$ 时, 得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. 当 $n>3$ 时, $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$. 由比较判别法知发散.

$x=-\frac{1}{2}$ 时, 得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. 这是一 Leibniz 型级数, 故收敛.