数据结构与算法 II 作业 (9.22)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

P69, T5.2-5　设 $A[1..n]$ 是由 n 个不同数构成的数列。如果 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$，则称 (i, j) 对为 A 的一个逆序对 (inversion)。假设 A 的元素构成 $< 1, 2, \cdots, n >$ 上的一个均匀随机排列。请用指示器随机变量来计算其中逆序对的数目期望。

解: 设事件 $A_{ij}(i < j)$ 为"$A[i]$ 与 $A[j]$ 构成逆序对"，则定义指示器随机变量 $I\{A_{ij}\}$ 为

$$I\{A_{ij}\} = \begin{cases} 1, & A_{ij}\text{发生} \\ 0, & A_{ij}\text{不发生}. \end{cases}$$

用古典概型可计算 $Pr\{A_{ij}\}$：固定 $A[j]$ 为第 k 小的元素（$k = 1, 2, \cdots, n$），要使 A_{ij} 发生，$A[i]$ 有 $n - k$ 种选择，此时其它 $n - 2$ 个位置上的数可任意排列。所以

$$\begin{aligned} Pr\{A_{ij}\} &= \frac{(n-2)!\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k)}{n!} \\ &= \frac{(1+n-1)(n-1)}{2n(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

记 X 为排列中的逆序对数，$X_{ij} = I\{A_{ij}\}$，则 $X = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n} X_{ij}$。根据期望的线性性质与引理一，有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}(X_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Pr\{A_{ij}\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{4}. \end{aligned}$$

所以逆序对的数目期望为 $\frac{n(n-1)}{4}$。