中国人民大学 2018-2019春季学期 高等代数II 期末考试

Edited by G.Cui

一. (每题5分)判断下列说法是否正确并说明理由.

1. 设 $p(x), f(x), g(x) \in P[x]$, 若 $p(x)|f(x)g(x)$, 则 $p(x)|f(x)$, 或 $p(x)|g(x)$.

2. n 维线性空间可以拆分成 n 个一维子空间的直和.

3. 设 ξ_1, ξ_2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 属于不同特征值的特征向量, k_1, k_2 是非零实数, 则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

4. n 维欧氏空间的第一类正交变换必有特征值1.

二. (每题5分)填空.

1. 以 $1, i, 1+i$ 为根的次数最低的首一多项式是________.

2. 三维线性空间 $V = \{$(某个含有a, b, c的3阶方阵, 具体忘了)$|a, b, c \in \mathbb{R}\}$, 则 V 的一组基为________.

3. 设 $\mathbf{A}$ =(某个含有 x, y 的3阶方阵), $\alpha = (*, *, *)^{\mathrm{T}}$ 是其对应于特征值 λ 的一个特征向量, 则 $x =$________, $y =$________, $\lambda =$________ .

4. 设三阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值是 $1, -1, 0$, 其中 1 对应的特征向量是 $(1, a, 1)^{\mathrm{T}}$, 0 对应的特征向量是 $(a, a+1, 1)^{\mathrm{T}}$, 则 -1 对应的特征向量是________.

三. (15分)

1. 若 $x^2 - 2ax + 2$ 能整除 $x^4 + 3x^2 + ax + b$, 求 a, b 的值.

2. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, $p(x)$ 是不可约多项式, $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. 证明 $f(\mathbf{A})$ 可逆当且仅当 $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}$.

四. (15分)实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a+1)x_1^2+(a+4)x_2^2+(a+1)x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

1. 正交替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型.

2. 讨论二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定, 半正定, 负定, 不定时 a 的取值范围.

五. (15分)证明

1. n 阶矩阵 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\\ \mathbf{M}_2\end{pmatrix}$ 可逆当且仅当 $P^n=\mathcal{N}(\mathbf{M}_1)\oplus\mathcal{N}(\mathbf{M}_2)$.

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2\end{pmatrix}$ 在 P 上可对角化当且仅当 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2$ 可在 P 上可对角化.

六. (15分)设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维线性空间的两个线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$. 证明:

1. $\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k=k\mathscr{A}^k$($k$ 是正整数).

2. $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 有公共的特征向量, 且 $\mathscr{A}$ 所对应的特征值为0.

3. $\mathscr{A}$ 是幂零变换.