计算理论导论

习题八: 可归约性 (1)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

1. **5.7** Show that if A is Turing-recognizable and $A \leq_m \overline{A}$, then A is decidable.

证明: 因为 $A \leq_m \overline{A}$，因此存在归约函数 f，使得 $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in \overline{A}$，即 $w \in \overline{A} \Leftrightarrow w \notin A \Leftrightarrow f(w) \notin \overline{A} \Leftrightarrow f(w) \in A$，因此 $\overline{A} \leq_m A$。又因为 A 是 RE 的，因此 $\overline{A}$ 也是 RE 的，即 A 是 co-RE 的，从而 A 是可判定的。

2. **5.9** Let $T = \{\langle M\rangle | M$ is a TM that accepts $w^{\mathcal{R}}$ whenever it accepts $w\}$. Show that T is undecidable.

证明: 用 Rice's Theorem，

1. 先说明 T 是一个性质 (property)：

   若有两个 TM M_1 和 M_2 满足 $L(M_1) = L(M_2)$，则 $\langle M_1\rangle \in T \Leftrightarrow (\forall w(w \in L(M_1) \rightarrow w^{\mathcal{R}} \in L(M_1))) \Leftrightarrow (\forall w(w \in L(M_2) \rightarrow w^{\mathcal{R}} \in L(M_2))) \Leftrightarrow \langle M_2\rangle \in T$，因此 T 是性质。

2. 再说明 T 是非平凡 (non-trivial) 的，只需要说明 $\exists M_1(\langle M_1\rangle \in T)$ 且 $\exists M_2(\langle M_2\rangle \notin T)$：

   显然，可以取 M_1 判定 0^*1^*，M_2 判定 0^*。

根据 Rice's Theorem，T 是不可判定的。

3. **5.22** Show that A is Turing-recognizable iff $A \leq_m A_{\mathsf{TM}}$。

证明:

(⇒) 设 A 是可识别的，因此存在 TM M 识别 A。将 A 归约到 A_{TM}，归约函数 f 满足 $f(w) = \langle M, w\rangle$，显然 f 是可计算的，而且 $w \in A \Leftrightarrow f(w) = \langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$。

(⇐) 因为 A_{TM} 是可识别的，根据 [Sipser, P237, **Theorem 5.28**]，A 也是可识别的。

4. Prove that the following language L is not recursively enumerable:

$$L = \{\langle M_1, M_2\rangle | L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$$

The strings in L encode two Turing machines M_1 and M_2 such that the language of M_1 is a subset of the language of M_2. To prove this result you may use the fact that the language L_{ALL} is not recursively enumerable, where $L_{\text{ALL}} = \{\langle M\rangle | L(M) = \Sigma^*\}$.

证明: 将 L_{ALL} 归约到 L。

首先很容易构造 L 的一个实例 M_{ALL} 接受所有输入 w，于是满足 $L(M_{\text{ALL}}) = \Sigma^*$。归约函数 f 定义为 $f(\langle M\rangle) = \langle M_{\text{ALL}}, M\rangle$，显然 f 是可计算的，而且

1. $\langle M\rangle \in L_{\text{ALL}} \Leftrightarrow L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow \Sigma^* = L(M_{\text{ALL}}) \subseteq L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow f(\langle M\rangle) \in L$;
2. $\langle M\rangle \notin L_{\text{ALL}} \Leftrightarrow L(M) \neq \Sigma^* \Leftrightarrow L(M_{\text{ALL}}) \not\subseteq L(M) \Leftrightarrow f(\langle M\rangle) \notin L$。

因此 $L_{\text{ALL}} \leq_m L$，但是因为 L_{ALL} 不是 RE 的，于是 L 同样不是 RE 的。

5. Let $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}} = \{\langle D, M\rangle | D$ is a DFA and M is a TM and $L(D) \cap L(M) \neq \emptyset\}$.

(a) Prove that $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$ is undecidable.

(b) Prove that $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$ is Turing-recognizable.

(c) Is $\overline{\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}}$ Turing-recognizable? Prove or disprove.

证明:

(a) 将 $\overline{E_{\mathsf{TM}}}$ 归约到 $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$。

归约函数 f 为 $f(\langle M\rangle) = \langle D_{\text{ALL}}, M\rangle$，其中 DFA D_{ALL} 满足 $L(D_{\text{ALL}}) = \Sigma^*$。显然 f 是可计算的，而且 $\langle M\rangle \in \overline{E_{\mathsf{TM}}} \Leftrightarrow L(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(D_{\text{ALL}}) \cap L(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow f(\langle M\rangle) = \langle D_{\text{ALL}}, M\rangle \in \text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$，从而 $\overline{E_{\mathsf{TM}}} \leq_m \text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$。由于 $\overline{E_{\mathsf{TM}}}$ 不可判定，因此 $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$ 不可判定。

(b) 构建识别器 M_{OVERLAP} 识别 $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$。

M_{OVERLAP} = "

1. 设 Σ^* 上的所有字符串被排成 $w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots$;
2. 在第 i 轮，模拟 D 和 M 分别运行 $w_1 \sim w_i$ 至多 i 步;
3. 若有字符串同时被 D 和 M 接受，则 M_{OVERLAP} 接受。"

(c) $\overline{\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}}$ 不是可识别的。若它是可识别的，则 $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$ 是补-可识别 (co-RE) 的，又因为 $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$ 是可识别的，从而 $\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}$ 是可判定的，矛盾，因而 $\overline{\text{OVERLAP}_{\mathsf{DFA,TM}}}$ 不是可识别的。

6. Prove or disprove each of the following claims.

(a) $A \leq_m A$.

(b) If $A \leq_m B$ and $B \leq_m C$, then $A \leq_m C$.

(c) If $A \leq_m B$ then $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

(d) If A is recursive, then $A \leq_m \texttt{a}^*\texttt{b}^*$.

(e) If $A \leq_m B$ then $B \leq_m A$.

(f) If $A \leq_m B$ and $B \leq_m A$ then $A = B$.

解:

(a) 正确。取恒等映射 $f(x) = x$，显然 f 是可计算的，而且 $x \in A \Leftrightarrow f(x) = x \in A$。

(b) 正确。设 f 和 g 是 A 到 B 以及 B 到 C 的归约，断言 $g(f)$ 是 A 到 C 的归约，因为 $g(f)$ 显然是可计算的，而且 $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$。

(c) 正确。设 f 是 A 到 B 的一个归约，根据定义它是可计算的，而且 $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$，从而有 $w \in \overline{A} \Leftrightarrow w \notin A \Leftrightarrow f(w) \notin B \Leftrightarrow f(w) \in \overline{B}$，因此 f 本身就是 $\overline{A}$ 到 $\overline{B}$ 的一个归约。

(d) 正确。因为 A 是可判定的，设 M 是它的判定器，构造函数

$$f(w) = \begin{cases} \texttt{a} & \text{如果 } M \text{ 接受 } w \\ \texttt{ba} & \text{如果 } M \text{ 拒绝 } w \end{cases}$$

显然 f 是可计算的，而且 $w \in A \Leftrightarrow f(w) = \texttt{a} \in \texttt{a}^*\texttt{b}^*$。

(e) 不一定。考虑反例 $A = A_{\mathsf{DFA}} = \{\langle D, w\rangle | D$ 是一台 DFA，且 D 接受 $w\}$ 以及 $B = A_{\mathsf{TM}}$。

1. 显然有 $A_{\mathsf{DFA}} \leq_m A_{\mathsf{TM}}$，归约函数 f 满足 $f(\langle D, w\rangle) = \langle M, w\rangle$，其中 M 是模拟 D 的 TM。因为 f 是可计算的，而且 $\langle D, w\rangle \in A_{\mathsf{DFA}} \Leftrightarrow f(\langle D, w\rangle) = \langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}$。
2. 但是却有 $A_{\mathsf{TM}} \not\leq_m A_{\mathsf{DFA}}$，因为 A_{TM} 是不可判定的，而 A_{DFA} 是可判定的。

(f) 不一定。考虑反例 $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$，$A = \{\texttt{a}^n | n \geq 0\}$，$B = \{\texttt{b}^n | n \geq 0\}$，$f(w) =$"将 w 中的 a 与 b 互换"。显然 f 是可计算的，而且

1. $A \leq_m B$，因为 $w = \texttt{a}^n \in A \Leftrightarrow f(w) = \texttt{b}^n \in B$。
2. $B \leq_m A$，因为 $w = \texttt{b}^n \in B \Leftrightarrow f(w) = \texttt{a}^n \in A$。

但 $A \neq B$。