图论作业 (6.9)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

P136, T2　对于 k 维立方体, k 是何值时, 它是 Euler 图?

结论: 当 k 为偶数时, 它是 Euler 图.

证明: 由于 k 维立方体可以写成 k 个二进制数形成的向量, 其中两点相邻当且仅当二者的向量表示仅有一位不同.

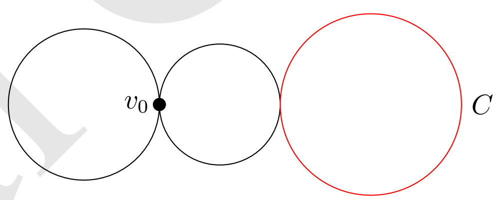
① 连通性. 对 $\forall u, v \in V(G)$, 把它们写成二进制向量形式. 容易看出, 我们可以通过一位位改变 u 的分量将其变为 v, 中间出现的所有向量都对应 k 方体的顶点, 这就构造出二者之间的通路, 所以 k 方体是连通的.

② 对 k 维立方体的任意顶点 v, 容易看出 $d(v) = k$. 由欧拉图判定条件, 当 k 为偶数时, 它是 Euler 图. □

P136, T4　如果 G 是 Euler 图, $v_0 \in V(G)$, 由 v_0 始任取一条与之关联的边 v_0v_1, 再任取一条与 v_1 关联的未用过的边 v_1v_2, 如此继续可以画出一条 Euler 回路, 则称 G 是可由 v_0 起任意行遍的 Euler 图, 试证: Euler 图 G 是由 v_0 起任意行遍的 Euler 图的充要条件是 v_0 在 G 的每个圈上.

证明: 因为 G 是 Euler 图, 所以可以看成边不重的圈的并.

⇒: 若不然, 设 Euler 图 G 是由 v_0 起任意行遍的 Euler 图, 但有圈 C 不经过 v_0. 记 $H = G - E(C)$, 因 G 是 Euler 图, 每个顶点皆为偶次点, 容易看出 H 的每个顶点也皆为偶次点 (因为去掉了一个圈). 所以 H 中含 v_0 的连通分支是 Euler 图, 它有从 v_0 到 v_0 的 Euler 回路 (图中黑色), 但在 G 中看, 这条回路不能继续扩为 Euler 回路 (缺少红色部分), 矛盾.



不能扩为 G 的 Euler 回路示意图.

⇐: 设 Euler 图 G 的所有圈都经过 v_0. 我们转为证明以 v_0 为起点, 在终点处无法扩充的路 P 均为 G 的 Euler 回路. 若不然, 设 P 是这样的一条路, 但它没有经过 G 的所有边. 首先这条路一定回到了 v_0 (否则与最大性和 Euler 图顶点度数为偶数矛盾), 其次 P 一定包括了 v_0 关联的所有边 (否则仍能扩充). 令 $H = G - E(P)$, 因为 P 是回路, 容易看出剩余顶点的度数均为偶数. 根据假设 H 不能是空图, 所以 H 一定存在圈, 但这与条件不符, 矛盾. □