数据结构与算法 II 作业 (9.8)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

P30, T3.1-1　假设 $f(n)$ 与 $g(n)$ 都是渐近非负函数. 使用 Θ 记号的基本定义来证明 $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n)+g(n))$.

证明: 由于 $f(n)$ 渐近非负, 则 $\exists N_1 > 0$, 使得 $\forall n \geq N_1$ 时, 有 $f(n) \geq 0$; 同理, $\exists N_2 > 0$, 使得 $\forall n \geq N_2$ 时, 有 $g(n) \geq 0$.

取 $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$, 下面只需要证明: 对 $\forall n \geq n_0$, 有 $0 \leq \frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq (f(n) + g(n))$.

$\forall n \geq n_0$, 分类讨论:

① 若 $f(n) \geq g(n)$, 则 $0 \leq \frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \leq \frac{1}{2}(f(n) + f(n)) = f(n) = \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$.

② 若 $f(n) < g(n)$, 则 $0 \leq \frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \leq \frac{1}{2}(g(n) + g(n)) = g(n) = \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$.

综上, 不等式对 $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 恒成立, 所以有

$$\boxed{\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))}$$

P30, T3.1-7　证明: $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ 为空集.

证明: 反证法，假设 $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) \neq \emptyset$, 则取 $f(n) \in o(g(n)) \cap \omega(g(n))$.

根据 o 记号和 ω 记号的含义, f 应该满足:

$\forall c > 0$, $\exists N_1, N_2 > 0$, 使得 $\forall n \geq N_1$ 时, 有 $0 \leq f(n) < cg(n)$ 以及 $\forall n \geq N_2$ 时, 有 $0 \leq cg(n) < f(n)$.

于是当 $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时，同时有 $f(n) < cg(n)$ 和 $cg(n) < f(n)$, 矛盾. 故假设不成立, $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$.

P35, T3.2　（相对渐近增长）为下表中的每对表达式 (A, B) 指出 A 是否是 B 的 O、o、Ω、ω 或 Θ. 假设 $k \geq 1$、$\varepsilon > 0$ 且 $c > 1$ 均为常量. 回答应该以表格的形式, 将“是”或“否”写在每个空格中.

解: 此处题干含义不太明确, 下面按照 $A = \square(B)$ 来理解 ($\square$ 代表 O、o、Ω、ω 或 Θ).

先对各对函数进行分析, 然后完成表格.

a. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg^k n}{n^\varepsilon} = \frac{k!}{\varepsilon^k \ln^k 10} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} = 0$, 所以 $\lg^k n = o(n^\varepsilon) = O(n^\varepsilon)$, 但不是 $\Omega(n^\varepsilon)$、$\omega(n^\varepsilon)$ 或 $\Theta(n^\varepsilon)$;

b. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$, 所以 $n^k = o(c^n) = O(c^n)$, 但不是 $\Omega(c^n)$、$\omega(c^n)$ 或 $\Theta(c^n)$;

c. 因为 $\sin n$ 是值域为 $[-1, 1]$ 的周期函数,

① 当 $\sin n = 1$ 时, $\frac{\sqrt{n}}{n^{\sin n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$;

② 当 $\sin n = -1$ 时, $\frac{\sqrt{n}}{n^{\sin n}} = \frac{\sqrt{n}}{n^{-1}} = n^{3/2} > 1$;

满足上面两个不等式的 n 有无穷多个, 所以 $\sqrt{n}$ 不是 $O(n^{\sin n})$、$o(n^{\sin n})$、$\Omega(n^{\sin n})$、$\omega(n^{\sin n})$ 或 $\Theta(n^{\sin n})$ 的;

d. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n/2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{n/2} = +\infty$, 所以 $2^n = \omega(2^{n/2}) = \Omega(2^{n/2})$, 但不是 $O(2^{n/2})$、$o(2^{n/2})$ 或 $\Theta(2^{n/2})$;

e. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\lg c}}{c^{\lg n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^{\lg c \lg n}}{10^{\lg n \lg c}} = 1$, 所以 $n^{\lg c} = \Theta(c^{\lg n}) = O(c^{\lg n}) = \Omega(c^{\lg n})$, 但不是 $o(c^{\lg n})$ 或 $\omega(c^{\lg n})$;

f. 因为 $\lg(n^n) = n\lg n$, 根据《算法导论》P33 关于阶乘的结论: $\lg(n!) = \Theta(n\lg n)$, 所以 $\lg(n!) = \Theta(\lg(n^n)) = O(\lg(n^n)) = \Omega(\lg(n^n))$, 但不是 $o(\lg(n^n))$ 或 $\omega(\lg(n^n))$;

表 1: **P35, T3.2 表**

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^{ε}	是	是	否	否	否
n^k	c^n	是	是	否	否	否
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	否	否	否	否	否
2^n	$2^{n/2}$	否	否	是	是	否
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	是	否	是	否	是
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	是	否	是	否	是

附录: 使用 Mathematica 验证结果.