计算机组成原理 Homework6 (9.30)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

1. 用原码一位乘法、补码一位乘法 (booth) 计算 $x \cdot y$:

(1) $x = 0.11011, y = 0.10111 \quad n = 6$

(2) $x = 0.10101, y = -0.10101 \quad n = 6$

解:

(1) $|x| = 0.11011$, $|y| = 0.10111$. 原码一位乘法计算过程如下 (采用两位符号位. 由于 $n = 6$, 最高位符号写在括号内):

操作	部分积	乘数 (竖线分隔低位与乘数)	说明
	(0)0.00000	|0.10111	
$+\|x\|$	(0)0.11011		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)0.11011		
$\rightarrow$	(0)0.01101	1|0.1011	右移一位
$+\|x\|$	(0)0.11011		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)1.01000		
$\rightarrow$	(0)0.10100	01|0.101	右移一位
$+\|x\|$	(0)0.11011		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)1.01111		
$\rightarrow$	(0)0.10111	101|0.10	右移一位
$+0$	(0)0.00000		最低位为 0, $+0$
	(0)0.10111		
$\rightarrow$	(0)0.01011	1101|0.1	右移一位
$+\|x\|$	(0)0.11011		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)1.00110		
$\rightarrow$	(0)0.10011	01101|0.	右移一位

符号 $P_s = x_s \oplus y_s = 0$, 所以 $x \cdot y = 0.1001101101$.

$[x]_{补} = 0.11011$, $[-x]_{补} = 1.00101$, $[y]_{补} = 0.10111$. 补码一位乘法 (booth 法, 采用两位符号位. 由于 $n = 6$, 最高位符号写在括号内) 计算过程如下:

操作	部分积	乘数 (竖线分隔低位与乘数)	附加位	说明
	(0)0.00000	|0.10111	0	附加位置 0
$+[-x]$	(1)1.00101			$0-1=-1, +[-x]_{补}$
	(1)1.00101			
$\rightarrow$	(1)1.10010	1|0.1011	1	右移一位
$+0$	(0)0.00000			$1-1=0, +0$
	(1)1.10010			
$\rightarrow$	(1)1.11001	01|0.101	1	右移一位
$+0$	(0)0.00000			$1-1=0, +0$
	(1)1.11001			
$\rightarrow$	(1)1.11100	101|0.10	1	右移一位
$+[x]$	(0)0.11011			$1-0=1, +[x]_{补}$
	(0)0.10111			
$\rightarrow$	(0)0.01011	1101|0.1	0	右移一位
$+[-x]$	(1)1.00101			$0-1=-1, +[-x]_{补}$
	(1)1.10000			
$\rightarrow$	(1)1.11000	01101|0.	1	右移一位
$+[x]$	(0)0.11011			$1-0=1, +[x]_{补}$
	(0)0.10011	01101|0.		

所以 $x \cdot y = 0.1001101101$.

(2) $|x| = 0.10101$, $|y| = 0.10101$. 原码一位乘法计算过程如下 (采用两位符号位. 由于 $n=6$, 最高位符号写在括号内):

操作	部分积	乘数 (竖线分隔低位与乘数)	说明
	(0)0.00000	|0.10101	
$+\|x\|$	(0)0.10101		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)0.10101		
$\rightarrow$	(0)0.01010	1|0.1010	右移一位
$+0$	(0)0.00000		最低位为 0, $+0$
	(0)0.01010		
$\rightarrow$	(0)0.00101	01|0.101	右移一位
$+\|x\|$	(0)0.10101		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)0.11010		
$\rightarrow$	(0)0.01101	001|0.10	右移一位
$+0$	(0)0.00000		最低位为 0, $+0$
	(0)0.01101		
$\rightarrow$	(0)0.00110	1001|0.1	右移一位
$+\|x\|$	(0)0.10101		最低位为 1, $+\|x\|$
	(0)0.11011		
$\rightarrow$	(0)0.01101	11001|0.	右移一位

符号 $P_s = x_s \oplus y_s = 1$, 所以 $x \cdot y = -0.0110111001$.

$[x]_{补} = 0.10101$, $[-x]_{补} = 1.01011$, $[y]_{补} = 1.01011$. 补码一位乘法 (booth 法, 采用两位符号位. 由于 $n=6$, 最高位符号写在括号内) 计算过程如下:

操作	部分积	乘数 (竖线分隔低位与乘数)	附加位	说明
	(0)0.00000	|1.01011	0	附加位置 0
$+[-x]$	(1)1.01011			$0-1=-1, +[-x]_{补}$
	(1)1.01011			
$\rightarrow$	(1)1.10101	1|1.0101	1	右移一位
$+0$	(0)0.00000			$1-1=0, +0$
	(1)1.10101			
$\rightarrow$	(1)1.11010	11|1.010	1	右移一位
$+[x]$	(0)0.10101			$1-0=1, +[x]$
	(0)0.01111			
$\rightarrow$	(0)0.00111	111|1.01	0	右移一位
$+[-x]$	(1)1.01011			$0-1=-1, +[-x]_{补}$
	(1)1.10010			
$\rightarrow$	(1)1.11001	0111|1.0	1	右移一位
$+[x]$	(0)0.10101			$1-0=1, +[x]_{补}$
	(0)0.01110			
$\rightarrow$	(0)0.00111	00111|1.	0	右移一位
$+[-x]$	(1)1.01011			$0-1=-1, +[-x]_{补}$
	(1)1.10010	00111|1.		

所以 $[x\cdot y]_{补}=1.1001000111, x\cdot y=-0.0110111001.$

2. 用原码两位乘法、补码两位乘法计算 $x\cdot y$:

(1) $x=0.11011, y=-0.10111 \quad n=6$

(2) $x=0.010111, y=0.010101 \quad n=7$

解:

(1) $|x|=00.11011, 2|x|=01.10110, [-x]_{补}=11.00101, |y|=00.101110.$ 原码两位乘法计算过程如下 (采用两位符号位. 由于 $n=6$, 高位写在括号内, 乘数最低位补 0):

操作	部分积	乘数 (竖线分隔低位与乘数)	欠位	说明
	(0)0.00000	|.101110	0	欠位置 0
$+2\|x\|$	(0)1.10110		0	低位为 10, $+2\|x\|$
	(0)1.10110		0	
$\rightarrow 2$	(0)0.01101	10|.1011	0	右移两位
$+[-x]$	(1)1.00101		1	低位为 11, $+[-x]$, 欠位置 1
	(1)1.10010		1	
$\rightarrow 2$	(1)1.11100	1010|.10	1	右移两位
$+[-x]$	(1)1.00101		1	低位为 10, 欠位为 1, $+[-x]$, 欠位置 1
	(1)1.00001		1	
$\rightarrow 2$	(1)1.11000	011010|.	1	右移两位
$+\|x\|$	(0)0.11011		0	补欠位
	(0)0.10011	011010|.	0	

符号 $P_s=x_s\oplus y_s=1$, 所以 $x\cdot y=-0.10011011010.$

$[x]_{补}=000.11011, [-x]_{补}=111.00101, [2x]_{补}=001.10110, [-2x]_{补}=110.01010, [y]_{补}=1.01001.$ 补码两位乘法计算

过程如下 (采用三位符号位. 由于 $n=6$, 高位写在括号内, 乘数最低位补 0):

<table>
<tr><th>操作</th><th>部分积</th><th>乘数 (竖线分隔低位与乘数)</th><th>附加位</th><th>说明</th></tr>
<tr><td></td><td>(00)0.00000</td><td>|1.01001</td><td>0</td><td>附加位置 0</td></tr>
<tr><td>$+[x]$</td><td>(00)0.11011</td><td></td><td></td><td>低位为 010, $+[x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(00)0.11011</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(00)0.00110</td><td>11|1.010</td><td>0</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+[-2x]$</td><td>(11)0.01010</td><td></td><td></td><td>低位为 100, $+[-2x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(11)0.10000</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(11)1.10100</td><td>0011|1.0</td><td>1</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+[-x]$</td><td>(11)1.00101</td><td></td><td></td><td>低位为 101, $+[-x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(11)0.11001</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to$</td><td>(11)1.01100</td><td>10011|1.</td><td>0</td><td>右移一位</td></tr>
</table>

所以 $[x\cdot y]=1.0110010011=-0.1001101101$.

(2) $|x|=00.010111$, $2|x|=00.101110$, $[-x]_补=11.101001$, $|y|=00.010101$. 原码两位乘法计算过程如下 (采用两位符号位. 由于 $n=7$, 高位写在括号内, 乘数最低位补 0):

<table>
<tr><th>操作</th><th>部分积</th><th>乘数 (竖线分隔低位与乘数)</th><th>欠位</th><th>说明</th></tr>
<tr><td></td><td>(0)0.000000</td><td>|0.010101</td><td>0</td><td>欠位置 0</td></tr>
<tr><td>$+|x|$</td><td>(0)0.010111</td><td></td><td>0</td><td>低位为 01, $+|x|$</td></tr>
<tr><td></td><td>(0)0.010111</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(0)0.000101</td><td>11|0.0101</td><td>0</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+|x|$</td><td>(0)0.010111</td><td></td><td>0</td><td>低位为 01, $+|x|$</td></tr>
<tr><td></td><td>(0)0.011100</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(0)0.000111</td><td>0011|0.01</td><td>0</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+|x|$</td><td>(0)0.010111</td><td></td><td>0</td><td>低位为 01, $+|x|$</td></tr>
<tr><td></td><td>(0)0.011110</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(0)0.000111</td><td>100011|0.</td><td>0</td><td>右移两位</td></tr>
</table>

符号 $P_s=x_s\oplus y_s=0$, 所以 $x\cdot y=0.000111100011$.

$[x]_补=000.010111$, $[-x]_补=111.101001$, $[2x]_补=000.101110$, $[-2x]_补=111.010010$, $[y]_补=0.0101010$. 补码两位乘法计算过程如下 (采用三位符号位. 由于 $n=6$, 高位写在括号内, 乘数最低位补 0):

<table>
<tr><th>操作</th><th>部分积</th><th>乘数 (竖线分隔低位与乘数)</th><th>附加位</th><th>说明</th></tr>
<tr><td></td><td>(00)0.000000</td><td>|(0).0101010</td><td>0</td><td>附加位置 0</td></tr>
<tr><td>$+[-2x]$</td><td>(11)1.010010</td><td></td><td></td><td>低位为 100, $+[-2x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(11)1.010010</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(11)1.110100</td><td>10|(0).01010</td><td>1</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+[-x]$</td><td>(11)1.101001</td><td></td><td></td><td>低位为 101, $+[-x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(11)1.011101</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(11)1.110111</td><td>0110|(0).010</td><td>1</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+[-x]$</td><td>(11)1.101001</td><td></td><td></td><td>低位为 101, $+[-x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(11)1.100000</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to 2$</td><td>(11)1.111000</td><td>000110|(0).0</td><td>1</td><td>右移两位</td></tr>
<tr><td>$+[x]$</td><td>(00)0.010111</td><td></td><td></td><td>低位为 001, $+[x]_补$</td></tr>
<tr><td></td><td>(00)0.001111</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\to$</td><td>(00)0.000111</td><td>1000110|(0).</td><td>0</td><td>右移一位</td></tr>
</table>

所以 $[x \cdot y] = 0.0001111000110.$

3. 用原码加减交替法、补码加减交替法计算 x/y:

(1) $x = 0.1001, y = -0.1010 \quad n = 5$

(2) $x = -0.1010, y = 0.1101 \quad n = 5$

解:

(1) $|x| = .1001$, $|y| = .1010$, $[-|y|]_{补} = 1.0110$, 取双符号位. 原码加减交替法计算除法过程如下:

操作	余数	商	说明
	(0)0.1001	00000|	开始
$+[-\|y\|]$	(1)1.0110		$-\|y\|$
	(1)1.1111		不够减, 商 0
$\leftarrow$	(1)1.1110	0000|0.	联合左移
$+\|y\|$	(0)0.1010		上次商 0, 本次加
	(0)0.1000		够减, 商 1
$\leftarrow$	(0)1.0000	000|0.1	联合左移
$+[-\|y\|]$	(1)1.0110		上次商 1, 本次减
	(0)0.0110		够减, 商 1
$\leftarrow$	(0)0.1100	00|0.11	联合左移
$+[-\|y\|]$	(1)1.0110		上次商 1, 本次减
	(0)0.0010		够减, 商 1
$\leftarrow$	(0)0.0100	0|0.111	联合左移
$+[-\|y\|]$	(1)1.0110		上次商 1, 本次减
	(1)1.1010		不够减, 商 0
$\leftarrow$	(1)1.0100	|0.1110	联合左移
$+\|y\|$	(0)0.1010		上次商 0, 本次加
	(1)1.1110		

符号: $x_s \oplus y_s = 1$, 所以 $x/y = -0.1110$.

$[x]_{补} = 0.1001$, $[y]_{补} = 1.0110$, $[-y]_{补} = 0.1010$. 补码加减交替法计算如下:

操作	余数	商	说明
	(0)0.1001	00000|	开始
$+[y]$	(1)1.0110		两数异号, $+[y]$
	(1)1.1111		余数与除数同号, 商 1(符号)
$\leftarrow$	(1)1.1110	0000|1.	联合左移
$+[-y]$	(0)0.1010		上次商 1, 本次减
	(0)0.1000		余数与除数异号, 商 0
$\leftarrow$	(0)1.0000	000|1.0	联合左移
$+[y]$	(1)1.0110		上次商 0, 本次加
	(0)0.0110		余数与除数异号, 商 0
$\leftarrow$	(0)0.1100	00|1.00	联合左移
$+[y]$	(1)1.0110		上次商 0, 本次加
	(0)0.0010		余数与除数异号, 商 0
$\leftarrow$	(0)0.0100	0|1.000	联合左移
$+[y]$	(1)1.0110		上次商 0, 本次加
	(1)1.1010		最后一位置 1
$\leftarrow$	(1)1.0100	|1.0001	联合左移

所以 $[x/y]_{补} = 1.0001, x/y = -0.1111.$

(2) $|x| = .1010, |y| = .1101, [-|y|]_{补} = 1.0011.$ 原码加减交替法计算如下:

操作	余数	商	说明
	(0)0.1010	00000|	开始
$+[-\|y\|]$	(1)1.0011		$-\|y\|$
	(1)1.1101		不够减, 商 0
$\leftarrow$	(1)1.1010	0000|0.	联合左移
$+\|y\|$	(0)0.1101		上次商 0, 本次加
	(0)0.0111		够减, 商 1
$\leftarrow$	(0)0.1110	000|0.1	联合左移
$+[-\|y\|]$	(1)1.0011		上次商 1, 本次减
	(0)0.0001		够减, 商 1
$\leftarrow$	(0)0.0010	00|0.11	联合左移
$+[-\|y\|]$	(1)1.0011		上次商 1, 本次减
	(1)1.0101		不够减, 商 0
$\leftarrow$	(1)0.1010	0|0.110	联合左移
$+\|y\|$	(0)0.1101		上次商 0, 本次加
	(1)1.0111		不够减, 商 0
$\leftarrow$	(1)0.1110	|0.1100	联合左移
$+\|y\|$	(0)0.1101		上次商 0, 本次加
	(1)1.1011		

符号: $x_s \oplus y_s = 1$, 所以 $x/y = -0.1100.$

$[x]_{补} = 1.0110, [y]_{补} = 0.1101, [-y]_{补} = 1.0011.$ 补码加减交替法计算如下:

操作	余数	商	说明
	(1)1.0110	00000|	开始
$+[y]$	(0)0.1101		两数异号, $+[y]$
	(0)0.0011		余数与除数同号, 商 1(符号)
$\leftarrow$	(0)0.0110	0000|1.	联合左移
$+[-y]$	(1)1.0011		上次商 1, 本次减
	(1)1.1001		余数与除数异号, 商 0
$\leftarrow$	(1)1.0010	000|1.0	联合左移
$+[y]$	(0)0.1101		上次商 0, 本次加
	(1)1.1111		余数与除数异号, 商 0
$\leftarrow$	(1)1.1110	00|1.00	联合左移
$+[y]$	(0)0.1101		上次商 0, 本次加
	(0)0.1011		余数与除数同号, 商 1
$\leftarrow$	(0)1.0110	0|1.001	联合左移
$+[-y]$	(1)1.0011		上次商 1, 本次减
	(0)0.1001		最后一位置 1
$\leftarrow$	(0)1.0010	|1.0011	联合左移

所以 $[x/y]_{补} = 1.0011, x/y = -0.1101$

4. 浮点数运算, 浮点数阶码取 4 位 (含符号位), 尾数取 8 位 (含符号位), 阶码和尾数均为补码表示, 计算以下各题:

(1) $3.3125 + 6.125$

(2) $14.75 - 2.4375$

解:

(1) ① 浮点数表示:

$3.3125 = 3\frac{5}{16} = (11.0101)_2$, 所以 $[3.3125]_{浮点} = 0.1101010|0010$;

$6.125 = 6\frac{1}{8} = (110.001)_2$, 所以 $[6.125]_{浮点} = 0.1100010|0011$.

② 对阶:

前者阶码小, 将其右移为 0.0110101|0011.

③ 尾数运算 (双符号位):

$00.0110101 + 00.1100010 = 01.0010111$.

④ 规格化:

$0.1001011|0100 = 9.375$.

⑤ 舍入误差与溢出分析:

规格化时右移有一位舍入误差, 没有发生溢出.

综上: $3.3125 + 6.125 = 9.375$.

(2) ① 浮点数表示:

$14.75 = 14\frac{3}{4} = (1110.11)_2$, 所以 $[14.75]_{浮点} = 0.1110110|0100$;

$2.4375 = 2\frac{7}{16} = (10.0111)_2$, 所以 $[2.4375]_{浮点} = 0.1001110|0010$;

② 对阶:

后者阶码小, 将其右移为 $0.0010011|0100$.

③ 尾数运算 (双符号位):

由于是减法, 转化为加法 $00.1110110 + 11.1101101 = 00.1100011$.

④ 规格化:

$0.1100011|0100 = 12.375$.

⑤ 舍入误差与溢出分析:

对阶时右移有一位舍入误差，没有发生溢出.

综上: $14.75 - 2.4375 = 12.375$.

5. 十进制运算, 完成以下十进制数的 BCD 码运算:

(1) $120 + 356$

(2) $18450 + 56801$

解:($'$ 表示每位 BCD 码的分隔)

(1) $120 + 356 = (0001'0010'0000)_{BCD} + (0011'0101'0110)_{BCD}$.

操作	操作数
	0001'0010'0000
+356	0011'0101'0110
	0100'0111'0110

所以 $120 + 356 = (0100'0111'0110)_{BCD} = 476$.

(2) $18450 + 56801 = (0001'1000'0100'0101'0000)_{BCD} + (0101'0110'1000'0000'0001)_{BCD}$.

操作	操作数
	0001'1000'0100'0101'0000
+56801	0101'0110'1000'0000'0001
	0110'1110'1100'0101'0001
修正	0000'0110'0110'0000'0000
	0111'0101'0010'0101'0001

所以 $18450 + 56801 = (0111'0101'0010'0101'0001)_{BCD} = 75251$.