Hamilton-Cayley 定理的证明与简单应用

Edited by G.Cui

定理. *(**Hamilton-Cayley**, 1878).*

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则 $f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})=0$.

证明: 令 $f_{\mathbf{A}}(\lambda)=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$,

$B(\lambda)=(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^*=\mathbf{B}_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\mathbf{B}_1\lambda+\mathbf{B}_0$. 其中 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^*$ 是 $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{B}_i(i=0,1,\ldots,n-1)$ 是 n 阶方阵.

则: $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^*=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|\mathbf{E}$, 即 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})B(\lambda)=f_{\mathbf{A}}(\lambda)\mathbf{E}$.

比较两侧系数, 得:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{n-1}&=\mathbf{E}\\
\mathbf{B}_{n-2}-\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1}&=a_{n-1}\mathbf{E}\\
\mathbf{B}_{n-3}-\mathbf{A}\mathbf{B}_{n-2}&=a_{n-2}\mathbf{E}\\
&\cdots\\
\mathbf{B}_{1}-\mathbf{A}\mathbf{B}_{2}&=a_{2}\mathbf{E}\\
\mathbf{B}_{0}-\mathbf{A}\mathbf{B}_{1}&=a_{1}\mathbf{E}\\
-\mathbf{A}\mathbf{B}_{0}&=a_{0}\mathbf{E}
\end{aligned}
$$

将各式自上而下分别左乘 $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{A}^{n-1}$, $\ldots$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, 然后再相加, 得: $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})=0$. □

定理的应用:

1. 求 $\mathbf{A}^{-1}$. 设 $\mathbf{A}$ 可逆, (待续...)

2. 求 $\mathbf{A}^k$. (待续...)