# 中国人民大学 2018-2019春季学期 数学分析II 期末考试

Edited by G.Cui

## 一.

(1)写出 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式, 并证明: 若 $0<p<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}[(2n+1)^p-(2n)^p]=0$.

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 具有相同的敛散性.

(3)若 $0<p<1$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^p+(-1)^n}$ 的敛散性. (若收敛, 写出是绝对收敛还是条件收敛.)

## 二.

(1)已知函数列 $\{f_n(x)\}$, $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$, $(n=1,2,3,\dots)$.

证明: $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(2)设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 又有数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$. 并举例说明当 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛则结论不正确.

**三.** 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(x^n+1)}$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 连续可导. (即 $S(x)$ 的导函数在 $(1,+\infty)$ 连续.)

## 四.

(1)求幂级数 $\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}x^n$ 的收敛半径, 收敛域以及和函数.

(2)用绝对收敛级数的柯西乘积求 $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ 的麦克劳林级数.

**五.**设 $f(x)=x(x-2)$, $x\in[0,2]$. 把 $f(x)$ 展成周期为4的正弦级数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

## 参考思路

一.

(1)$(1+x)^\alpha = f(x) = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots (x \in \mathbb{R})$.

$(2n+1)^p - (2n)^p = (2n)^p[(1+\frac{1}{2n})^p - 1] = (2n)^p[\frac{p}{2n} + o(n^{-1})] = p(2n)^{p-1} + o(1)$

$\to 0 (n\to\infty)$. $(\because 0<p<1)$

(2)记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$. 显然有 $S_{2n} = T_n, S_{2n+1} = T_n + a_{2n+1}$.
$\because a_n \to 0(n\to\infty)$, 显然 $S_n$ 与 $T_n$ 同收敛或发散.

(3)$|\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^p+(-1)^n}| = \frac{1}{(n+1)^p+(-1)^n} \sim \frac{1}{(n+1)^p}$, 又 $0<p<1$, 所以非绝对收敛.

注意到该级数符合(2)的条件, 于是与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n)^p-1} - \frac{1}{(2n+1)^p+1}]$ 有相同的敛散性,
又$[\frac{1}{(2n)^p-1} - \frac{1}{(2n+1)^p+1}] = \frac{(2n+1)^p-(2n)^p+2}{[(2n)(2n+1)]^p-(2n+1)^p+(2n)^p-1} \sim \frac{1}{n^{2p}}(\because (1))$, 故 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时发散,
$\frac{1}{2}<p<1$ 时收敛.

综上: $0<p<\frac{1}{2}$ 时, 级数发散; $\frac{1}{2}<p<1$ 时, 级数条件收敛.

二.

(1)易知极限函数 $f(x)=0$, 取 $x_n = \frac{1}{n}(n=1,2,\dots)$, 则$|f_n(x_n)-f(x_n)| = \frac{1}{2} \neq 0$.

(2)因为 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f(x)$, 故 $\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}_+$, s.t. $n>N(\varepsilon), \forall x\in [a,b], |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 特别地, $|f_n(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon$. 由题设条件, $f(x)$ 连续, 由 Heine 归结原理, 对上述 $\varepsilon>0, \exists N'\in\mathbb{N}_+$, s.t $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取 $N^* = \max\{N(\varepsilon), N'\}$,
当 $n>N$ 时, $|f_n(x_n)-f(x_0)| \le |f_n(x_n)-f(x_n)| + |f(x_n)-f(x_0)| < 2\varepsilon$.

三. $|\frac{x^n}{n^2(x^n+1)}| < \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(x^n+1)}$ 在 $(1,+\infty)$ 一致收敛. 又每一项连续, 且具有连续导数 $\frac{x^{n-1}}{n(x^n+1)^2}$, 下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(x^n+1)^2}$ 的一致收敛性.

$\forall x_0>1$, $|\frac{x^{n-1}}{n(x^n+1)^2}| < \frac{x^{n-1}}{nx^{2n}} < \frac{1}{nx_0^{n+1}}$, 易知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{nx_0^{n+1}}} = \frac{1}{x_0} < 1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(x^n+1)^2}$ 在

$[x_0,+\infty)$ 一致收敛, 又每一项连续, 故由逐项微分定理 $S(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 有连续导数, 再结合 $x_0$ 的任意性, 即得结论.

**四.**

(1)$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}}=3$, 故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$.

易知 $x=\frac{1}{3}$ 级数发散(调和级数与收敛级数的和); $x=-\frac{1}{3}$ 级数收敛(Leibniz级数与收敛级数的和), 故收敛域 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$, 得 $-\ln(1-x)-x=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$. 和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n+1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n+1}=\frac{1}{3x}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n}+\frac{1}{-2x}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n}(x\neq 0)$

$=\frac{1}{3x}(-\ln(1-3x)-3x)-\frac{1}{2x}(-\ln(1+2x)+2x)=\frac{\ln(1+2x)}{2x}-\frac{\ln(1-3x)}{3x}-2.$

$x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\backslash\{0\}$, $x=0$ 补充定义 $S(0)=0$.

(2)$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $x\in(-1,1)$.

$\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, $x\in(-1,1]$.

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$.

**五.**由题设条件, 作奇延拓.

$$f^*(x)=\begin{cases}-x(x+2) & ,x\in[-2,0).\\ x(x-2) & ,x\in(0,2].\end{cases}$$

再令 $t=\frac{\pi}{2}x, x=\frac{2}{\pi}t, t\in[-\pi,\pi]$. 得

$$\varphi^*(t)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}t(\frac{2}{\pi}t+2) & ,t\in[-\pi,0).\\ \frac{2}{\pi}t(\frac{2}{\pi}t-2) & ,t\in(0,\pi].\end{cases}$$

$\therefore f^*(x)=\varphi^*(t)\sim \frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx.$

易知 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^*(t)\cos nt\mathrm{d}t=0$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^*(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{-32}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]$.

由收敛判别法知 $x(x-2)=-\frac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)$.

令 $x=1$, 得 $-1=-\frac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.