

离散数学作业(5.20)

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

P47, T1 作出集合 A 和 B 的一一对应, 并写出这个对应的解析表达式.

(1) $A = (-1, 1), B = (-\infty, +\infty)$;

(2) $A = (0, 1), B = (0, 2)$;

(3) $A = [0, 1), B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

解: (1) $f : A \rightarrow B, f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$.

(2) $g : A \rightarrow B, g(x) = 2x$.

(3) $h : A \rightarrow B, h(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

容易验证, 以上都是一一对应.

P47, T2 证明: $(0, 1)$ 和 $[0, 1)$ 等势.

$$\text{证: } f : [0, 1) \rightarrow (0, 1), f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{i+1}, & x = \frac{1}{i}, i = 2, 3, \dots \\ x, & \text{其它.} \end{cases}$$

容易验证, f 是一一对应, 故 $(0, 1) \sim [0, 1)$. \square

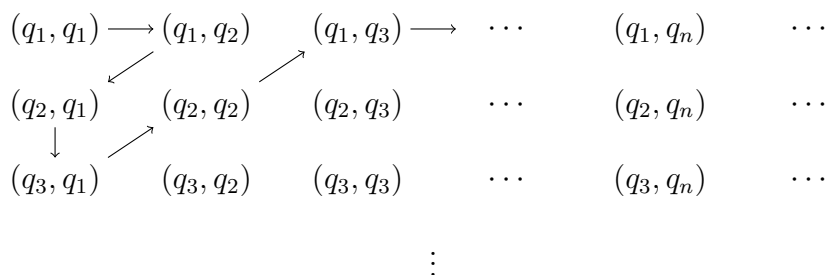
P47, T3 若 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, 且 $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, 证明 $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

证: 因为 $A_1 \sim B_1$, 所以存在 $f : A_1 \rightarrow B_1$ 是双射; 同理, 存在 $g : A_2 \rightarrow B_2$ 是双射. 又因为 $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, 所以 $f \cup g$ 仍然是函数, 且为一一对应. (因为 $\forall (x, y) \in f \cup g \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$, 若 $x \in A_1$, 则 $\exists! y \in B_1$ 使得 $(x, y) \in f \subseteq f \cup g$; 若 $x \in A_2$, 则 $\exists! y \in B_2$ 使得 $(x, y) \in g \subseteq f \cup g$. 二者不可兼, 容易看出这是函数, 而且是双射.) 即 $f \cup g : (A_1 \cup A_2) \rightarrow (B_1 \cup B_2)$ 是双射, 所以 $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

\square

P49, T1 证明平面上坐标为有理数的点组成的集合是一个可列集.

证: 因为 \mathbb{Q} 可列, 所以可以排成 $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$. 将有理点坐标按类似矩阵的方式排成下图:

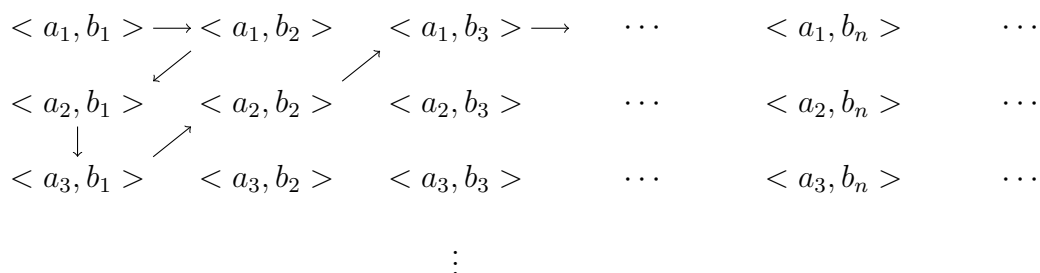


按照上图方式, 可将平面上坐标为有理数的点组成的集合排成一列: $\mathbb{Q}^2 = \{(q_1, q_1), (q_1, q_2), (q_2, q_1), (q_3, q_1), (q_2, q_2), \dots\}$, 所以可列. \square

P50, T3 证明: 如果 A_1 和 A_2 是两个可列集, 则 $A_1 \times A_2$ 也是可列集.

证: (证法类似上题.) 因为 A_1, A_2 可列, 所以可以排成 $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $A_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$.

将 $A_1 \times A_2$ 中的元素按类似矩阵的方式排成下图:



按照上图方式, 可将 $A_1 \times A_2$ 排成一列: $A_1 \times A_2 = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, \langle a_2, b_1 \rangle, \langle a_3, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots\}$, 所以可列. \square

P50, T4 若 x_i 是有理数, $i = 1, 2, \dots$, 证明 n 元组的集合 $\{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle\}$ 是可列集.

证: 利用上题结论. 因为 \mathbb{Q} 可列, 令 $A_1 = A_2 = \mathbb{Q}$, 所以 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ 可列. 再取 $A_1 = \mathbb{Q}^2, A_2 = \mathbb{Q}$, 可得 \mathbb{Q}^3 可列. 归纳地做下去, 可得有理数 n 元组的集合 \mathbb{Q}^n 可列. \square

P51, T1 S 是所有无理数组成的集合, 证明 S 的基数是 \aleph .

证: 显然 S 是无限集, \mathbb{Q} 是可列集, 所以 $S \cup \mathbb{Q}$ 的基数与 S 的基数相同. 但是 $S \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 所以 $\text{Card}(S) = \text{Card}(\mathbb{R}) = \aleph$. \square

P51, T2 证明定理 4.3.3 (对于任何数 a, b , 若 $a < b$, 则区间 $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ 以及 $(0, \infty), [0, \infty)$ 都具有连续基数 \aleph).

证: ① 书上已经证明了: $(0, 1) \sim [0, 1]$, 在上面的习题中, 我们证明了 $(0, 1) \sim [0, 1]$, 下面先证明: $[0, 1) \sim (0, 1]$.

令 $f: [0, 1) \rightarrow (0, 1], f(x) = 1 - x$. 显然 f 是一一对应, 所以 $[0, 1) \sim (0, 1]$. 因为等势是等价关系, 所以我们有: $(0, 1), [0, 1], [0, 1)$ 以及 $(0, 1]$ 两两等势, 基数均为 \aleph .

② 下面通过证明 $(0, 1) \sim (a, b), [0, 1] \sim [a, b], [0, 1) \sim [a, b)$ 以及 $(0, 1] \sim (a, b]$ 说明 $(a, b), [a, b], (a, b), [a, b)$ 的基数均为 \aleph .

令 $f(x) = (b - a)x + a$. 容易验证: f 是四组中的前面的集合到后面的集合的一一对应, 所以四组集合等势. 又因为 ① 中证明了前四组集合 $((0, 1), [0, 1], [0, 1)$ 以及 $(0, 1])$ 等势, 基数均为 \aleph , 所以 $(a, b), [a, b], (a, b), [a, b)$ 这四个集合的基数为 \aleph , 得证.

③ 下面证明: $(0, 1) \sim (0, \infty)$ 以及 $[0, 1) \sim [0, \infty)$.

取 $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$. 容易验证: f 是这两组集合中前面的集合到后面的集合的一一对应, 所以两组集合等势, 再由 ①, 知上述所有区间都等势, 基数为 \aleph . \square