计算理论导论

习题一: 有限状态自动机

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

1. Design DFAs: **1.6** (d)(i)(n).

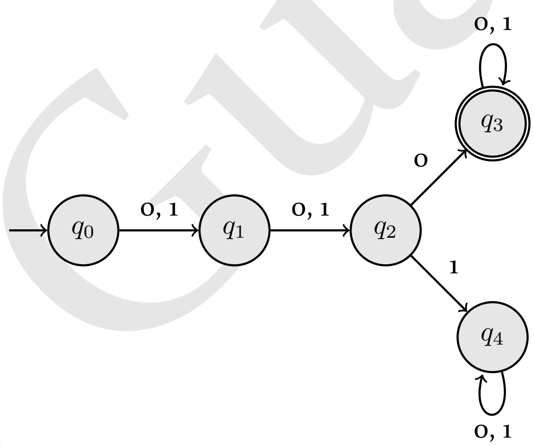
(d) $\{w|\ w$ has length at least 3 and its third symbol is a $0\}$,

(i) $\{w|$ every odd position of w is a $1\}$,

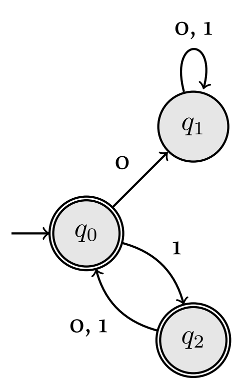
(n) All strings except the empty string.

解:

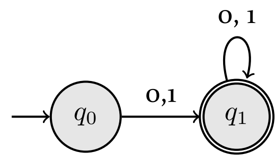
(d) 思路: 前两个字符无论为何都会进入下一个状态，到第三个字符处根据 0、1 进行分类。结果如图所示。



(i) 思路: 按奇偶位置分类，在进入奇数位置时按字符为 0、1 分类；同时根据"蕴涵式前件为假，则蕴涵式为真"，ε 也应被接受。结果如图所示。



(n) 思路: 只要读到字符就可以接受。结果如图所示。



2. Design NFAs: **1.7** (b)(c)(e).

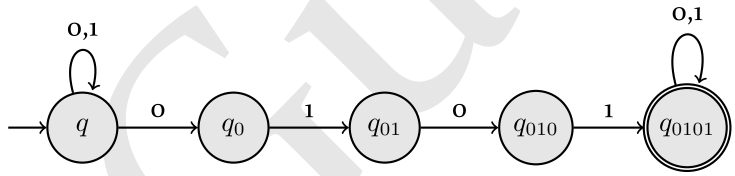
(b) $\{w|\ w$ contains substring $0101\}$ with five states,

(c) $\{w|\ w$ contains an even number of 0s, or contains exactly two 1s$\}$ with six states,

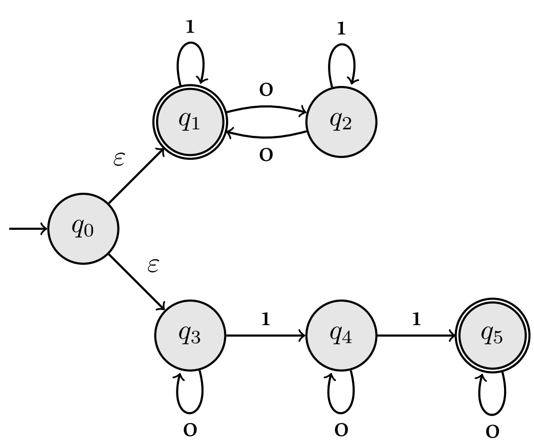
(e) $\{w|\ w = 0^*1^*0^+\}$ with three states.

解:

(b) 思路: 起始状态占用一个状态，NFA "猜测"进入 0101 子串的位置，其他四个状态用于识别子串。结果如图所示。

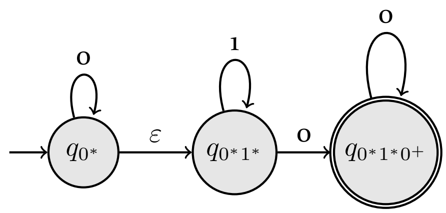


(c) 思路: 该语言是两个语言的并，所以分别设计二者的 NFA，然后再将其合成一个机器。对于偶数个 0 的部分，可以用两个状态的机器识别；对于仅含两个 1 的部分，可以用三个状态的机器识别。结果如图所示。

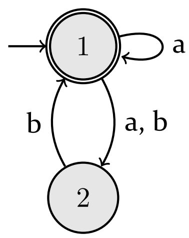


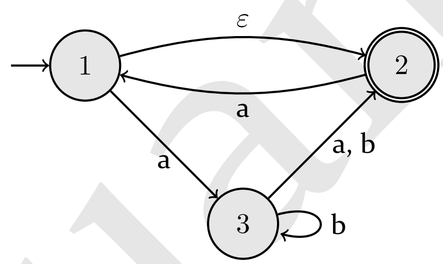
(e) 思路: 这是一个正则表达式描述的正则语言，可以用课本上的设计方法，先设计三个小的 NFA，再

将其拼接起来。结果如图所示。



3. NFA $\rightarrow$ DFA: **1.16** Use the construction given in Theorem **1.39** to convert the following two nondeterministic finite automata to equivalent deterministic finite automata.





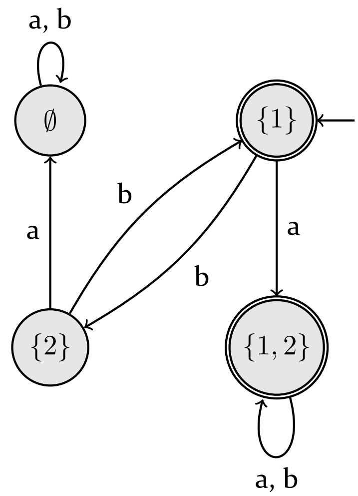
解: 设对 NFA $N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$，它应用 Theorem **1.39** 所对应的 DFA 记作 $D=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$；再记某状态集合 R 的 ε-闭包 $E(R)=\{q|q$ 能从R 中某状态经过 0 个或更多 ε 边直接到达$\}$。

(a) 这是一个无 ε 边的 NFA，因此 $Q'=\mathcal{P}(Q)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，$q_0'=\{q_0\}=\{1\}$，$F'=\{q\in Q'|q\cap F\neq\emptyset\}=\{\{1\},\{1,2\}\}$，$\delta'(R,w)=\bigcup_{r\in R}\delta(r,w)$，结果如表所示：

	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

表 1: $\delta'(R,w)$

画出对应的 DFA 的图表示，如下所示：



从起始状态开始遍历，发现每一个状态都可达，因此无法进行进一步化简。

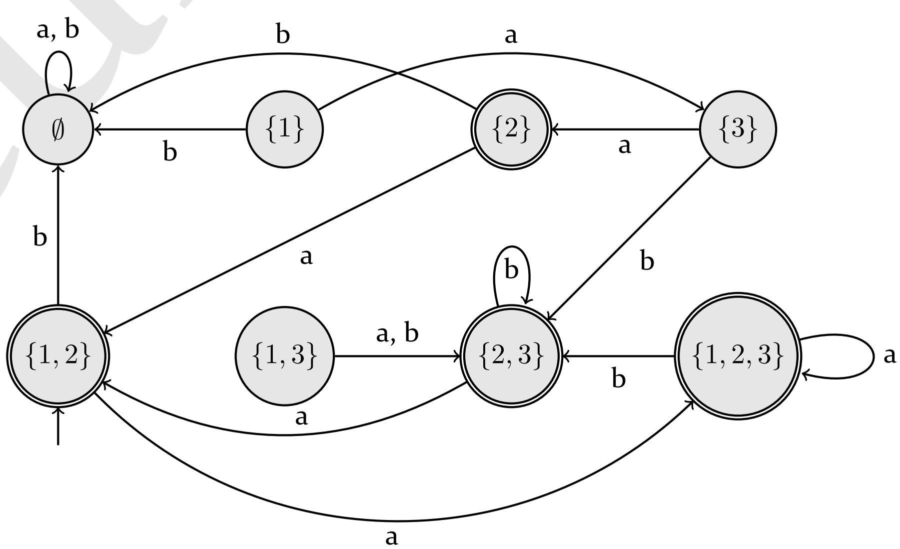
(b) 这是一个有 ε 边的 NFA，因此 $Q' = \mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$，

$q_0' = E(q_0) = \{1,2\}$，$F' = \{q \in Q' | q \cap F \neq \emptyset\} = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$，

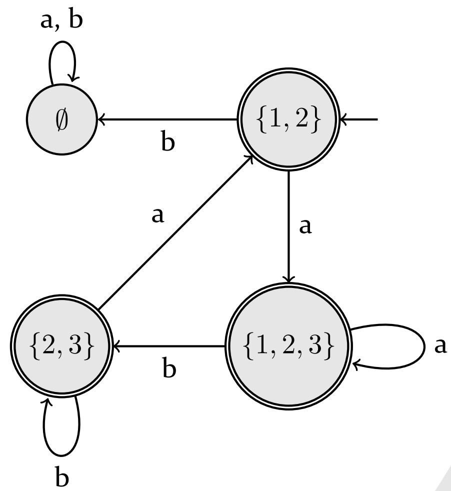
$\delta'(R, w) = \bigcup_{r \in R} E(\delta(r, w))$，具体结果如表所示:

	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{3\}$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$
$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$

画出对应的 DFA 的图表示，如下所示:



从起始状态开始遍历，发现仅有 $\emptyset$、$\{1,2\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$ 可达，因此可以删去其他状态。化简后的 DFA 如图所示:

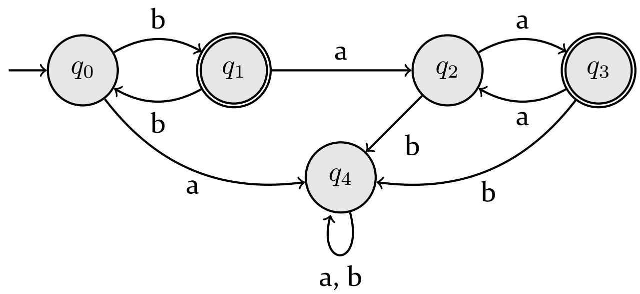


4. Design DFA and RE: **1.12** Let $D = \{w|\ w$ contains an even number of a's and an odd number of b's and does not contain the substring ab$\}$. Give a DFA with five states that recognizes D and a regular expression that generates D. (Suggestion: Describe D more simply.)

解: 仅考虑条件"不含子串 ab"，可以推出串具有 b^*a^* 的形式。下面证明这一事实:

1. 当字符串不含 a 时，显然成立;
2. 当字符串含有 a 时，设 a_0 是第一个出现的 a，
   (a) 若 a_0 后面没有出现 b，结论得证;
   (b) 若 a_0 后面出现了 b，取出现的第一个 b，记作 b_0。因为是第一个，所以 b_0 前面紧跟的字符是 a，出现了 ab 子串，矛盾。所以此种情况不会出现。

综上，结论成立，即条件"不含子串 ab"蕴含串具有 b^*a^* 的形式。综合前面两个条件，可得 $D = \{w|w = \text{b}^i\text{a}^j, i$ 为奇数, j 为偶数$\}$。设计识别它的 DFA 如下:（q_0 为前面有连续偶数个 b，q_1 为前面有连续奇数个 b，q_2 为连续奇数个 b 后有连续奇数个 a，q_3 表示连续奇数个 b 后有连续偶数个 a，q_4 为死状态）



容易写出 D 的正则表达式: b(bb)*(aa)*。