图论作业(5.26)

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

P65, T6 若 G 是极大平面图, 则 G 的对偶图 G^* 有下列性质: 每顶皆三次(三次正则图), 且至少删除两条边才能使 G^* 不连通.

证明: (1) 由于 G 是极大平面图, 所以每面次数均为3, 又依据对偶图 G^* 的顶点次数与原平面图 G 的面的次数相等, 故 G^* 每点皆三次.

(2) 因为平面图的对偶图 G^* 一定是连通的, 所以只需要证明 G^* 没有割边. 假若 G^* 有割边, 由于 G^* 的割边对应于原平面图 G 的环, 说明 G 有环, 而这与 G 是极大平面图(也是简单图)矛盾. 所以至少删除两条边才能使 G^* 不连通. $\square$

P66, T13 若多面体两个面的公共棱至多一个, 证明它至少有两个面边数相同.

证明: 设 G 是多面体的一个平面嵌入. 因 G 两个面的公共棱至多有一个, 即 G 的对偶图 G^* 没有重边, 是简单图. 由于多面体至少有四个面, 故 $|V(G^*)| \geq 4$. 而我们有结论: 在 $n(n \geq 2)$ 阶简单图中, 至少有两个顶点有相同的度. 故 G^* 有两个度数相同的点, 即 G 有两个面边数相同. $\square$