幂级数与 Fourier 级数 练习题

Edited by G.Cui

Ex 1. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{3n})(x^2+x+1)^n$ 的收敛区间.

Ex 2. 讨论级数

$$1+\frac{1}{2x\sqrt{2}}+\frac{1}{4x^2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2^n x^n\sqrt{n+1}}+\cdots$$

的收敛性, 并求出它的收敛区域与一致收敛区域.

Ex 3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{n^2}x^{n^3}$ 的收敛范围.

Ex 4. 设 $a_n \geq 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0$, 试证:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$$

Ex 5. 把下列函数展成 x 的幂级数, 并说明收敛范围.

1. $f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$;
2. $\phi(x)=\sin^3 x$.

Ex 6. 求 $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$ 的幂级数展开.

Ex 7. 证明: 若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n (a_n>0, n=0,1,2,\ldots)$ 的收敛半径为 $+\infty$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n n!$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 且 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n n!$.

Ex 8. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0\le x\le 1)$.

求证: 当 $0<x<1$ 时, 有 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$.

Ex 9. 设 $f(x)=\pi-x$, $x\in(0,\pi)$.

1. 将 $f(x)$ 展开为正弦级数;
2. 写出和函数的表达式, 绘出和函数的图形;
3. 该级数在 $(0,\pi)$ 上是否一致收敛.

Ex 10.

1. 将周期为 2π 的函数 $f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x)(x\in[0,2\pi])$ 展开为 Fourier 级数, 并由此求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
2. 通过 Fourier 级数逐项积分求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

参考答案

Ex 1. **解:** 令 $t = x^2 + x + 1$, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3n} t^n$. 记 $a_n = \sin \frac{1}{3n}$, $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 所以 $R = 1$. 考察端点处的收敛情况: $t = -1$ 时, 有 $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{3n}$, 容易看出是一 Leibniz 型级数, 故收敛; $t = 1$ 时, 有 $\sum \sin \frac{1}{3n} \sim \sum \frac{1}{3n}$, 发散. 所以收敛范围 $t \in [-1, 1)$, 解得 $x \in (-1, 0)$

Ex 2.

解*:* $\square$

Ex 3.

解*:* $\square$

Ex 4.

解*:* $\square$

Ex 5.

解*:* $\square$

Ex 6.

解*:* $\square$

Ex 7.

证明*:* $\square$

Ex 8.

证明: $\square$

Ex 9.

解: $\square$

Ex 10.

解: $\square$