

计算理论导论

习题五: 下推机

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

1. Let G be the context-free grammar with the productions

- $S \rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon$
- $A \rightarrow a \mid C$
- $B \rightarrow b \mid C$
- $C \rightarrow CDE \mid \varepsilon$
- $D \rightarrow ab \mid A \mid B$

Simplify this grammar by removing useless symbols, unit productions and ε -productions (in the right order); finally, obtain a grammar in the Chomsky normal form.

解:

1. 去掉无用的符号:

(a) 计算能产生终结符的状态: $S(S \rightarrow \varepsilon)$, $A(A \rightarrow a)$, $B(B \rightarrow b)$, $C(C \rightarrow \varepsilon)$, $D(D \rightarrow ab)$ 。因此删除非终结符 E 及其所有出现, 得:

- $S \rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon$
- $A \rightarrow a \mid C$
- $B \rightarrow b \mid C$
- $C \rightarrow \varepsilon$
- $D \rightarrow ab \mid A \mid B$

(b) 计算从起始符号 S 可达的状态: S (自反性), $A(S \rightarrow aAa)$, $B(S \rightarrow bBb)$, $C(A \rightarrow C)$ 。因此删除非终结符 D 及其所有出现, 得:

- $S \rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon$
- $A \rightarrow a \mid C$
- $B \rightarrow b \mid C$
- $C \rightarrow \varepsilon$

2. 增加一个新的开始符号 S_0 , 以及新产生式 $S_0 \rightarrow S$, 得

- $S_0 \rightarrow S$
- $S \rightarrow aAa \mid bBb \mid \varepsilon$
- $A \rightarrow a \mid C$
- $B \rightarrow b \mid C$
- $C \rightarrow \varepsilon$

3. 按下列步骤去除 ε -产生式:

- 对 $S \rightarrow \varepsilon$, 对每一个 S 在产生式右侧的出现, 增加用 ε 进行替换后得到的串, 得

- $S_0 \rightarrow S \mid \varepsilon$
- $S \rightarrow aAa \mid bBb$
- $A \rightarrow a \mid C$
- $B \rightarrow b \mid C$
- $C \rightarrow \varepsilon$

- 对 $C \rightarrow \varepsilon$, 对每一个 C 在产生式右侧的出现, 增加用 ε 进行替换后得到的串, 得 (由于产生式左部不再有 C , 可以删去)

- $S_0 \rightarrow S \mid \varepsilon$

$$- S \rightarrow aAa \mid bBb$$

$$- A \rightarrow a \mid \varepsilon$$

$$- B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

- 对 $A \rightarrow \varepsilon$ ，对每一个 A 在产生式右侧的出现，增加用 ε 进行替换后得到的串，得

$$- S_0 \rightarrow S \mid \varepsilon$$

$$- S \rightarrow aAa \mid aa \mid bBb$$

$$- A \rightarrow a$$

$$- B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

- 对 $B \rightarrow \varepsilon$ ，对每一个 B 在产生式右侧的出现，增加用 ε 进行替换后得到的串，得

$$- S_0 \rightarrow S \mid \varepsilon$$

$$- S \rightarrow aAa \mid aa \mid bBb \mid bb$$

$$- A \rightarrow a$$

$$- B \rightarrow b$$

4. 按下列步骤去除 unit-productions:

- 对 $S_0 \rightarrow S$ ，对每一个 S 在产生式左侧的出现，增加 S_0 导出右侧符号的产生式，得: (由于产生式左部不再有 S ，可以删去)

$$- S_0 \rightarrow aAa \mid aa \mid bBb \mid bb \mid \varepsilon$$

$$- A \rightarrow a$$

$$- B \rightarrow b$$

5. 通过引入符号来改写成 Chomsky 范式:

$$\bullet S_0 \rightarrow AU_1 \mid AA \mid BU_2 \mid BB \mid \varepsilon$$

$$\bullet U_1 \rightarrow AA$$

- $U_2 \rightarrow BB$
- $A \rightarrow a$
- $B \rightarrow b$

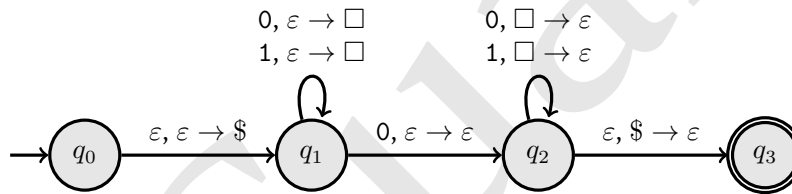
2. Give pushdown automata for recognizing the languages in 2.4(d) and 2.9 respectively.

2.4(d): $\{w \mid \text{the length of } w \text{ is odd and its middle symbol is a } 0\}$;

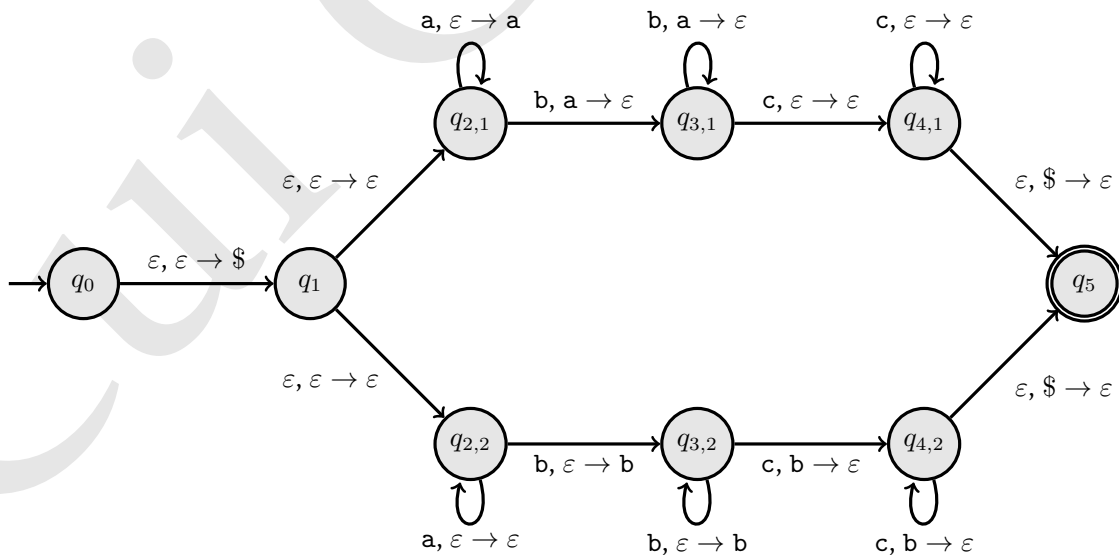
2.9: $A = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ or } j = k \text{ where } i, j, k \geq 0\}$.

解:

(1) 思路: 猜测何处的 0 为中间, 在左侧对读到的任意字符压栈, 在右侧无论读到什么字符都弹出栈顶字符, 若最后得到空栈则接受。状态转移图如下:



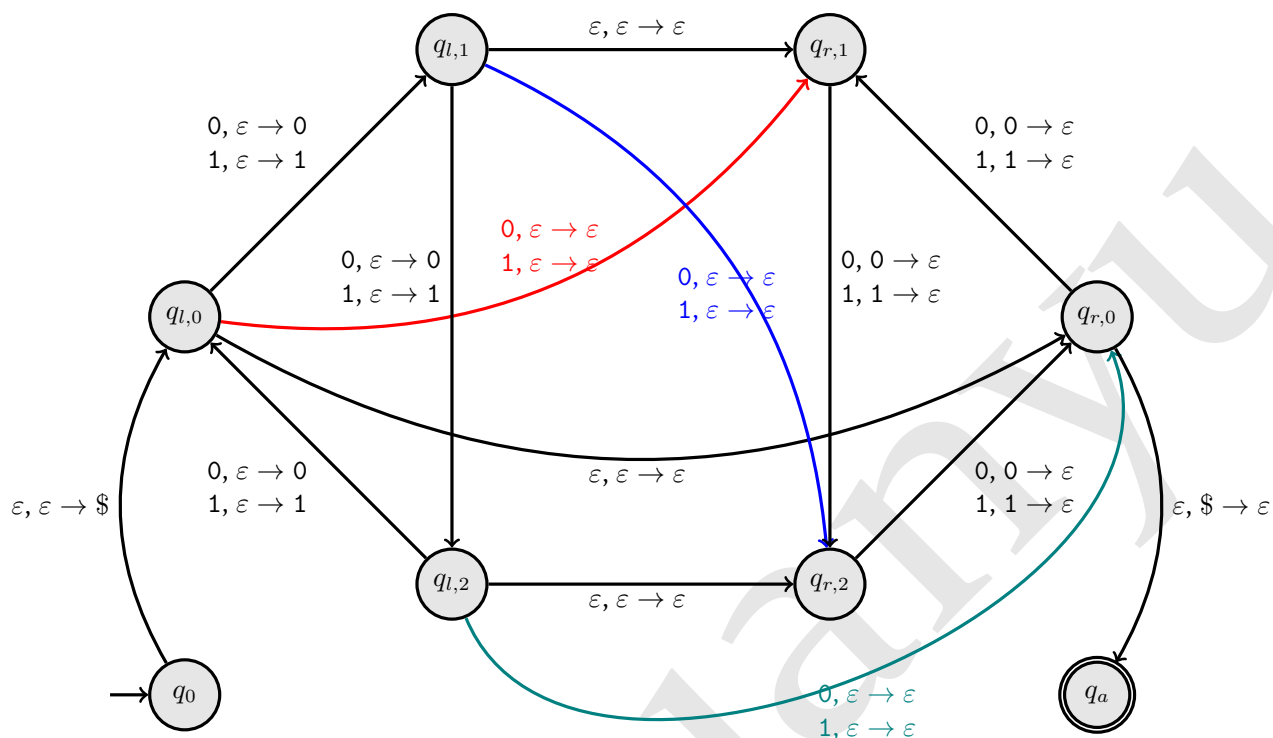
(2) 思路: 利用不确定性, 只需要分别考虑两种可能性即可。状态转移图如下:



3. Let $\Sigma = \{a, b\}$. Let $L = \{x \in \Sigma^* : x \text{ is a palindrome and } |x| \text{ is a multiple of } 3\}$, give a PDA that recognizes L .

解:

思路: 需要同时考虑两个因素, 字符串的长度以及是否读到了中间位置。状态转移图如下所示:



4. 2.11 Convert the CFG G_4 given in **Exercise 2.1** to an equivalent PDA, using the procedure given in **Theorem 2.20**.

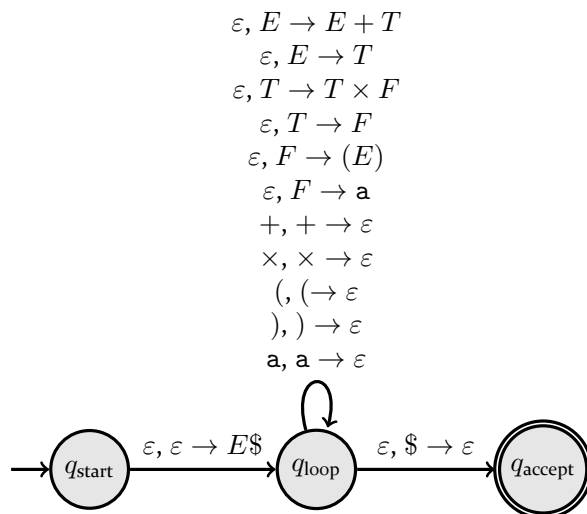
Exercise 2.1:

- $E \rightarrow E + T \mid T$
- $T \rightarrow T \times F \mid F$
- $F \rightarrow (E) \mid a$

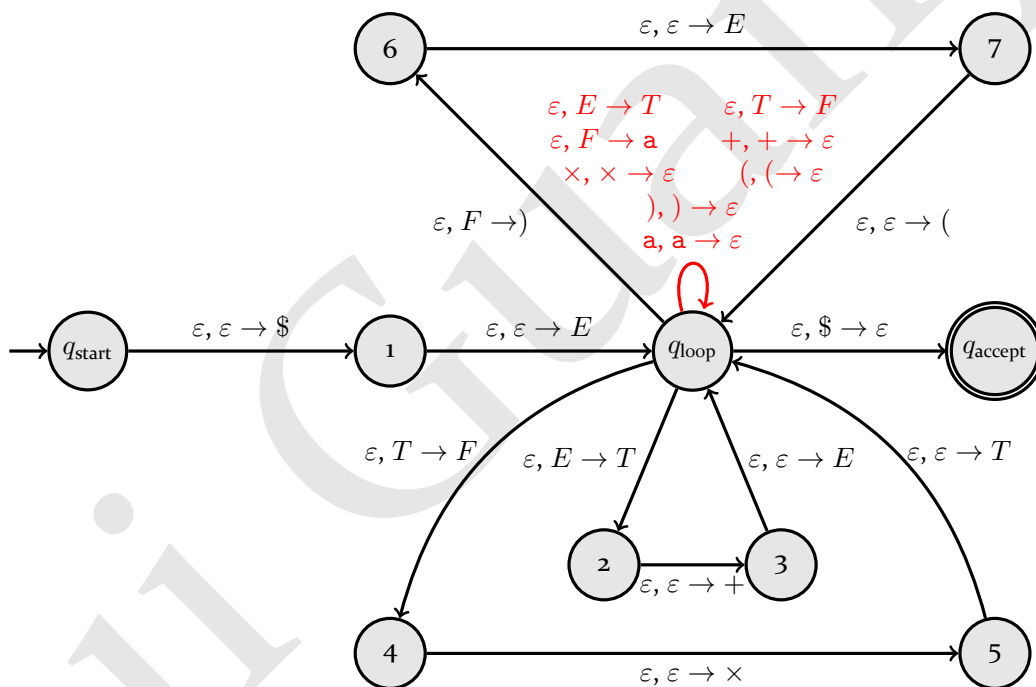
解:

思路: 根据 **Theorem 2.20** 即可。

(1) 首先画出 q_{start} , q_{loop} , q_{accept} 三个状态, 以及在边上填入未展开的产生式:



(2) 对于右边多于两个符号的产生式，添加中间状态以展开产生式：



5. 【选做】 For a positive integer i , let $N(i)$ denote its decimal representation (the usual string we write when writing the number i , with no leading zeros). Let $N^R(i)$ denote the string $N(i)$ written in reverse order (least-significant digit first). Show that the language $L = \{N(i)\#N^R(i+2) \mid i \geq 1\}$ over the alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \#\}$ is recognizable by a pushdown automaton.

解：

思路：这是验证十进制加法的过程，利用栈和辅助符号 $\#$ 读入前半部分（注意处理前导 0），之后逐个

符号弹出，与加二后的结果从低位到高位比对，同时还需要记录进位。设计好的 PDA $A = (Q, \Sigma, \Gamma = \Sigma \cup \{\$, \delta, q_{\text{start}}, F = \{q_{\text{accept}}\})$ ，其中：

$$Q = \{q_{\text{start}}, q_{\text{read}}, q_{\text{add}}, q_{\text{verify},0}, q_{\text{verify},1}, q_{\text{accept}}\}$$

q_{start} 表示开始状态， q_{read} 表示读取 $N(i)$ 的状态， q_{add} 表示加二的状态， $q_{\text{verify},0}$ 表示进位为 0 的从低位到高位验证状态， $q_{\text{verify},1}$ 表示进位为 1 的验证状态， q_{accept} 表示接受状态。

• δ 如下图所示：

