中国人民大学 2019-2020 秋季学期 数学分析III 期末考试

Edited by G.Cui

一.

(1)设 $p>0$, 记 $J(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x$. 证明: $J(y)$ 对 $y\in[0,1]$ 一致收敛, 并求出 $J(y)$.

(2)求反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的值.

二.

(1)设 D 是由 $y=1, y=1+x, x=\pi$ 围成的平面图形, 求 $\iint_D\frac{y\sin x}{2+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2)设 Ω 是由上半球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成的区域, 求

$\iiint_\Omega 2z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

三.

(1)设 L 为方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2,(R>0) \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

确定的曲线, 正方向为曲线投影到 xoy 平面上逆时针方向. 求 $\oint_L ay\mathrm{d}x+bz\mathrm{d}y+cx\mathrm{d}z$ 的值.

(2)设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1, 0\le z\le 1$ 的外侧, 求 $\iint_\Sigma xzy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的值.

四.

(1)简单光滑闭曲线 L 围成的单连通区域记为 D, 设 D 可表示成 $a\le x\le b$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, 且 $P(x,y)$ 在 $D\cup L$ 上具有连续偏导数.

证明格林公式: $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x=-\iint_D P_y'(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2)设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 证明线性微分 $f(x-2y+z)(\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$ 是全微分式, 并求 $\int_{(0,0,0)}^{(0,-1,-1)}\mathrm{e}^{x-2y+z}(\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$ 的值.

参考思路

一.证明思路:

(1)$|\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)| \le \mathrm{e}^{-px}$, 而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x = \frac{1}{p}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知其一致收敛. 用两次分部积分列方程, 求得 $J(y) = \frac{y}{y^2+p^2}(p>0)$. (注意: 依据分部积分的选择, 可能需要讨论 y 是否等于0.)

(2)注意到 $\frac{1-\cos x}{x} = \int_0^1 \sin(xy)\mathrm{d}y$. 故 $I = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin(xy)\mathrm{d}y$. 又因为(1)的特殊情况, 一致收敛, 故积分可以交换顺序, 所以 $I = \int_0^1 [J(y)_{p=1}]\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{y^2+1} = \frac{\ln 2}{2}$.

二.思路:

(1)(可积性说明略.) $I = \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_1^{1+x}\frac{y\sin x}{2+x}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

(2)(可积性说明略.) $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}\sigma\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}2z(x^2+y^2)\mathrm{d}z$

$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}2z\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2r^3-r^5-r^7)\mathrm{d}r = \frac{5}{12}\pi$.

三.思路:

(1)(符合 Stokes 公式说明略.) 设 D 是 L 围成的区域, $\mathbf{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 D (向上)的单位法向量. 注意到 D 是大圆, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 使用 Stokes 公式, $I = \iint_D -\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\mathrm{d}S = -\frac{\sqrt{3}(a+b+c)\pi R^2}{3}$.

(2)(给圆柱补上底(向下) Σ_1 和盖(向上) Σ_2 后, 符合 Gauss 公式的使用条件, 说明略.) 记 $\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 围成的二维单连通区域为 V, 使用 Gauss 公式得

$I = \iiint_V \frac{\partial(xzy^2)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_1}xzy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_2}xzy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V zy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(因为第二项、第三项中 $\mathrm{d}z = 0$.) 使用柱坐标系, $I = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^1 z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8}$.

四.思路:

(1)书上有证明, 老师也讲过, 略.

(2) $f(x-2y+z)(\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z) = f(x-2y+z)\mathrm{d}(x-2y+z) = \mathrm{d}(F(x-2y+z))$ 是一个全微分(F 是 f 的原函数, 可微性由 Newton-Leibniz 定理保证). 取 $f(u) = \mathrm{e}^u$, 由积分路径无关性, 原式 $= \mathrm{e}^{x-2y+z}\Big|_{(0,0,0)}^{(0,-1,-1)} = \mathrm{e}-1$.