图论作业(3.31)

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

P25, T35(a) 证明: 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2 和 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1 不是单图的次数序列.

解. ① 因为 $|V| = 7$, 如果这是一个简单图的度序列, 则 $\Delta(G) \le 6$. 但是 $d(v_1) = 7 > 6$, 故这不是一个简单图的度序列.

② 假设这是一个简单图的度序列. 因为 $d(v_1) = d(v_2) = |V| - 1 = 6$, 所以 v_1, v_2 分别与图中除去本身的所有顶点相邻, 即 $(v_1, v_7) \in E(G)$, $(v_2, v_7) \in E(G)$. 但是这与 $d(v_7) = 1$ 矛盾, 故这不是一个简单图的度序列.

P25, T36 设 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 是非负整数的非增序列, D' 是序列 $d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$, 证明: (a) $d_1, d_2, \dots, d_n$ 是单图次数序列的充要条件是 D' 是单图次数序列. (b) 写出一个由单图次数序列构作单图的算法.

解. **(a)证明:**

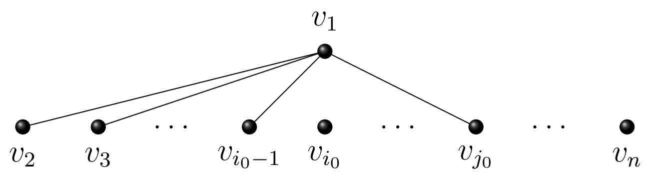
$\Rightarrow$: 设 G 是序列 $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 对应的一个简单图, 分两种情况讨论.

- 情况1. 若点 v_1 与点 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 都相邻, 则图 G 去掉顶点 v_1 以及 v_1 关联的所有边构成的图$(G - v_1)$的度序列就是 D'.

- 情况2. 若点 v_1 与点 $v_{d_1+2}, v_{d_1+3}, \dots, v_n$ 中的某些点相邻, 如图 (a) 所示. 设

  $j_0 = \max\limits_{j}\{j|(v_1, v_j) \in E(G)\} > d_1 + 1$ (即这是"最后邻接点"); 又设

  $i_0 = \min\limits_{i}\{i|(v_1, v_i) \notin E(G)\} \le d_1 + 1$ (即这是"最先不邻接点"). 考察与 v_{i_0} 相邻的 d_{i_0} 个点, 其中一定存在一点 v_m 与 v_{j_0} 不相邻(否则 $d_{j_0} \ge d_{i_0} + 1 > d_{i_0}$, 矛盾). 在图 G 中去掉 (v_1, v_{j_0}) 和 (v_{i_0}, v_m) 两条边, 并增加 (v_1, v_{i_0}) 和 (v_m, v_{j_0}) 两条边, 设形成的新图为 G'. 此时 G' 与 G 具有相同的度序列, 但 G' 的 j_0 小了, i_0 大了. 重复做下去, 就将情况2化为情况1.



(a) 情况2 示意图.

$\Leftarrow$: 结论是显然的. 只要增加一个顶点 v_1, 并将 v_1 与 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 相连即可. □

(b)算法如下:

1. 将度序列排成非增序列后, 标定顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$;
2. 设当前度序列第一项的值为 k, 将其置 0, 并将其后 k 个数分别减 1, 在图上标记这个顶点与前述 k 个顶点相邻, 将得到的新序列再次排成非增序列;
3. 检查是否有负数, 如果有, 不构成简单图;
4. 检查序列是否全为 0, 若是则构造完毕, 否则转2.

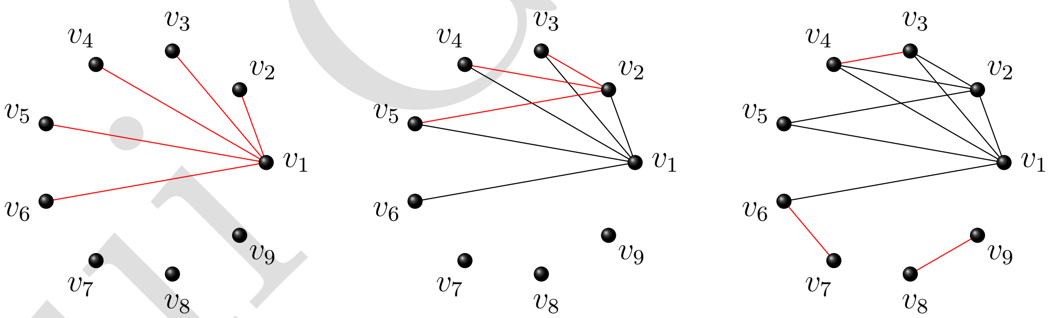
(具体例子请见补充题.)

补充题　判别 (5, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1) 是否是简单图序列, 如果是, 请构造出一个简单图以它为度序列.

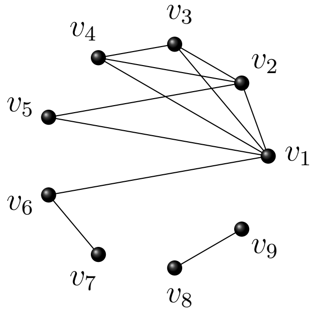
解.　尝试用上题算法构造一个满足条件的简单图:

(前两步严格按照上题算法, 最后一步直接令 $(v_3, v_4), (v_6, v_7), (v_8, v_9)$ 相连即可. 第一行展示度序列的变化; 第二行展示图的变化, 红边表示新加入的边.)

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & v_4 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_1 & v_2 & v_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & v_4 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_1 & v_2 & v_5 \end{pmatrix}$$



最终发现可以构造成功, 故这是一个简单图序列, 一个简单图如图 (b) 所示.



(b) 给定度序列对应的一个简单图.