离散数学作业(5.20)

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

P47, T1 作出集合 A 和 B 的一一对应, 并写出这个对应的解析表达式.

(1) $A=(-1,1), B=(-\infty,+\infty)$;

(2) $A=(0,1), B=(0,2)$;

(3) $A=[0,1), B=(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$.

解: (1) $f: A\to B$, $f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x)$.

(2) $g: A\to B$, $g(x)=2x$.

(3) $h: A\to B$, $h(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

容易验证, 以上都是一一对应.

P47, T2 证明: $(0,1)$ 和 $[0,1)$ 等势.

证: $f:[0,1)\to(0,1)$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{1}{i+1}, & x=\frac{1}{i}, i=2,3,\dots\\ x, & \text{其它.}\end{cases}$

容易验证, f 是一一对应, 故 $(0,1)\sim[0,1)$. □

P47, T3 若 $A_1\sim B_1, A_2\sim B_2$, 且 $A_1\cap A_2=B_1\cap B_2=\emptyset$, 证明 $A_1\cup A_2\sim B_1\cup B_2$.

证: 因为 $A_1\sim B_1$, 所以存在 $f: A_1\to B_1$ 是双射; 同理, 存在 $g: A_2\to B_2$ 是双射. 又因为 $A_1\cap A_2=B_1\cap B_2=\emptyset$, 所以 $f\cup g$ 仍然是函数, 且为一一对应. (因为 $\forall(x,y)\in f\cup g\subseteq(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)$, 若 $x\in A_1$, 则 $\exists! y\in B_1$ 使得 $(x,y)\in f\subseteq f\cup g$; 若 $x\in A_2$, 则 $\exists! y\in B_2$ 使得 $(x,y)\in g\subseteq f\cup g$. 二者不可兼, 容易看出这是函数, 而且是双射.) 即 $f\cup g:(A_1\cup A_2)\to(B_1\cup B_2)$ 是双射, 所以 $A_1\cup A_2\sim B_1\cup B_2$.

□

P49, T1 证明平面上坐标为有理数的点组成的集合是一个可列集.

证: 因为 $\mathbb{Q}$ 可列, 所以可以排成 $\mathbb{Q}=\{q_1,q_2,\dots,q_n,\dots\}$. 将有理点坐标按类似矩阵的方式排成下图:

$$
\begin{tikzcd}
(q_1,q_1) \arrow[r] & (q_1,q_2) \arrow[dl] & (q_1,q_3) \arrow[r] & \cdots & (q_1,q_n) & \cdots \\
(q_2,q_1) \arrow[d] & (q_2,q_2) \arrow[ur] & (q_2,q_3) & \cdots & (q_2,q_n) & \cdots \\
(q_3,q_1) \arrow[ur] & (q_3,q_2) & (q_3,q_3) & \cdots & (q_3,q_n) & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$\vdots$$

按照上图方式, 可将平面上坐标为有理数的点组成的集合排成一列: $\mathbb{Q}^2 = \{(q_1,q_1),(q_1,q_2),(q_2,q_1),(q_3,q_1),(q_2,q_2),\ldots\}$, 所以可列. $\square$

P50, T3 证明: 如果 A_1 和 A_2 是两个可列集, 则 $A_1 \times A_2$ 也是可列集.

证: (证法类似上题.) 因为 A_1, A_2 可列, 所以可以排成 $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$. 将 $A_1 \times A_2$ 中的元素按类似矩阵的方式排成下图:

$$
\begin{tikzcd}
< a_1, b_1 > \arrow[r] & < a_1, b_2 > \arrow[dl] & < a_1, b_3 > \arrow[r] & \cdots & < a_1, b_n > & \cdots \\
< a_2, b_1 > \arrow[d] & < a_2, b_2 > \arrow[ur] & < a_2, b_3 > & \cdots & < a_2, b_n > & \cdots \\
< a_3, b_1 > \arrow[ur] & < a_3, b_2 > & < a_3, b_3 > & \cdots & < a_3, b_n > & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$\vdots$$

按照上图方式, 可将 $A_1 \times A_2$ 排成一列: $A_1 \times A_2 = \{< a_1, b_1 >, < a_1, b_2 >, < a_2, b_1 >, < a_3, b_1 >, < a_2, b_2 >, \ldots\}$, 所以可列. $\square$

P50, T4 若 x_i 是有理数, $i = 1, 2, \ldots$, 证明 n 元组的集合 $\{< x_1, x_2, \cdots, x_n >\}$ 是可列集.

证: 利用上题结论. 因为 $\mathbb{Q}$ 可列, 令 $A_1 = A_2 = \mathbb{Q}$, 所以 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ 可列. 再取 $A_1 = \mathbb{Q}^2, A_2 = \mathbb{Q}$, 可得 $\mathbb{Q}^3$ 可列. 归纳地做下去, 可得有理数 n 元组的集合 $\mathbb{Q}^n$ 可列. $\square$

P51, T1 S 是所有无理数组成的集合, 证明 S 的基数是 $\aleph$.

证: 显然 S 是无限集, $\mathbb{Q}$ 是可列集, 所以 $S \cup \mathbb{Q}$ 的基数与 S 的基数相同. 但是 $S \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 所以 $\mathrm{Card}(S) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \aleph$. $\square$

P51, T2 证明定理 4.3.3 (对于任何数 a, b, 若 $a < b$, 则区间 $(a,b), [a,b], (a,b], [a,b)$ 以及 $(0,\infty), [0,\infty)$ 都具有连续基数 $\aleph$.).

证: ① 书上已经证明了: $(0,1)\sim[0,1]$, 在上面的习题中, 我们证明了 $(0,1)\sim[0,1)$, 下面先证明: $[0,1)\sim(0,1]$.

令 $f:[0,1)\to(0,1], f(x)=1-x$. 显然 f 是一一对应, 所以 $[0,1)\sim(0,1]$. 因为等势是等价关系, 所以我们有: $(0,1),[0,1],[0,1)$ 以及 $(0,1]$ 两两等势, 基数均为 $\aleph$.

② 下面通过证明 $(0,1)\sim(a,b),[0,1]\sim[a,b],[0,1)\sim[a,b)$ 以及 $(0,1]\sim(a,b]$ 说明 $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ 的基数均为 $\aleph$.

令 $f(x)=(b-a)x+a$. 容易验证: f 是四组中的前面的集合到后面的集合的一一对应, 所以四组集合等势. 又因为 ① 中证明了前四组集合($(0,1),[0,1],[0,1)$ 以及 $(0,1]$)等势, 基数均为 $\aleph$, 所以 $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ 这四个集合的基数为 $\aleph$, 得证.

③ 下面证明: $(0,1)\sim(0,\infty)$ 以及 $[0,1)\sim[0,\infty)$.

取 $f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x)$. 容易验证: f 是这两组集合中前面的集合到后面的集合的一一对应, 所以两组集合等势, 再由 ① , 知上述所有区间都等势, 基数为 $\aleph$. □