幂级数 练习题

Edited by G.Cui

Ex. 在 $x=0$ 点展开 $f(x)=\ln^2(1-x)$ 为幂级数, 并确定收敛范围.

解法一: 已知 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 在 $x\in(-1,1)$ 绝对收敛.

则 $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 在 $x\in(-1,1)$ 绝对收敛.

由 Cauchy (乘积) 定理知: $f(x)=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n)(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n)$, 按对角线方法作乘积, 得

$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\cdot 1]x^{n+1}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(1+\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{n+1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1})\cdot\frac{1}{n+1}+\cdots+(\frac{1}{n}+1)\cdot\frac{1}{n+1}]x^{n+1}$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $x\in(-1,1)$.

下面考察端点的收敛情况:

1) 当 $x=1$ 时, 得到 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n+1}>\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散;

2) 当 $x=-1$ 时, 得到 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n+1}$, 这是一个交错级数. 其中, 对于调和级数的部分和, 我们有[1]: $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\Theta(\ln n)$, 所以 $\frac{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}{n+1}=\frac{\Theta(\ln n)}{n+1}$, 当 n 充分大时单调递减趋于 0, 所以这是一 Leibniz 级数, 故收敛.

综上: $f(x)$ 收敛域是 $[-1,1)$.

解法二: $|x|<1$ 时, $f'(x)=2\frac{1}{1-x}\ln(\frac{1}{1-x})=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})x^n$,

故当 $|x|<1$ 时, $f(x)=f(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})t^n\mathrm{d}t$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})\frac{x^{n+1}}{n+1}$. 之后步骤与解法一相同.

[1] $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln n-\ln(n-1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1$. 其中第一个等号使用了 O.Stolz 公式.