离散数学作业 (6.17)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

P104, T1　给出 $<Z_8,+_8>$ 的全部子群, 并确定左陪集.

解: 根据拉格朗日定理, 子群元素个数只可能为 1,2,4,8.

① 一元子群 (以下均省略群上的运算 $+_8$), 共一个: $H_1=\{[0]\}$; 对应的左陪集共八个: $[0]H_1=H_1=\{[0]\}$, $[1]H_1=\{[1]\},\dots,[7]H_1=\{[7]\}$.

② 二元子群, 共一个: $H_2=\{[0],[4]\}$; 对应的左陪集共四个: $[0]H_2=[4]H_2=H_2=\{[0],[4]\}$, $[1]H_2=[5]H_2=\{[1],[5]\}$, $[2]H_2=[6]H_2=\{[2],[6]\}$, $[3]H_2=[7]H_2=\{[3],[7]\}$.

③ 四元子群, 共一个: $H_3=\{[0],[2],[4],[6]\}$; 对应的左陪集共两个:
$[0]H_3=[2]H_3=[4]H_3=[6]H_3=H_3=\{[0],[2],[4],[6]\}$, $[1]H_3=[3]H_3=[5]H_3=[7]H_3=\{[1],[3],[5],[7]\}$.

④ 八元子群, 共一个: $H_4=Z_8=\{[0],[1],\dots,[7]\}$; 对应的左陪集共一个:
$[0]H_4=[1]H_4=\cdots=[7]H_4=H_4=\{[0],[1],\dots,[7]\}$.

P104, T5　证明一个有限群中任何一个元的次数都是这个群的阶数的因子.

证: 设 G 是群, $|G|=n$ 是有限数, $a\in G$. 由于群是有限的, 故 $e,a,a^2,\dots$ 中一定存在 $i\neq j, a^i=a^j$, 也即 $a^{i-j}=e$, 所以 a 的次数一定存在. 设 a 的次数为 r, 所以 $\{e,a,a^2,\dots,a^{r-1}\}$ 是 r 阶循环群, 而且是 G 的子群. 由拉格朗日定理及其推论, r 是 n 的因子. □

P105, T6　若 $<G,\circ>$ 是有限群, $|G|=n$, $x\in G$, 求证 $x^n=e$.

证: 设 x 的次数为 r, 有 $x^r=e$, 结合上题有 $r|n$, 即 n/r 为正整数, 所以 $x^n=(x^r)^{n/r}=e^{n/r}=e$. □

P105, T7　证明循环群的子群仍是循环群.

证: 设 $G=<a>$ 是循环群, 再设 H 是 G 的子群, 所以 H 中的一切元素均为 a 的幂.

① 若 $H=\{e\}$, 显然是循环群.

② 否则, 取 H 中 a 的最小正方幂的元素 a^m, 往证 a^m 是 H 的生成元. 显然 $<a^m>\subseteq H$, 下面证明另一方向也成立. 任取 $a^l\in H$, 由带余除法, 存在整数 q,r, 使得 $l=mq+r, 0\le r\le m-1$. 则 $a^r=a^{l-mq}=a^l(a^m)^{-q}\in H$, 由于 m 的最小性, 必有 $r=0$, 所以 a^l 是 a^m 的整数次幂, 即 $a^l\in<a^m>$. 综上有 $H=<a^m>$, 即 H 是循环群. □

P105, T8　在阶数为 p 的群中, 若 p 是质数, 则它是 p 阶循环群.

证: 设 G 是群, 且 $|G|=p$ 是素数. 由拉格朗日定理及其推论, G 的子群只可能是 1 阶群 $\{e\}$ 或 p 阶群 G. 因为 $p\ge 2$, 任取 $a\neq e$, $<a>=\{e,a,a^2,\dots,a^{r-1}\}$ 是由 a 生成的循环子群. 由前面的论证, 因 $a\neq e$, 故 $|<a>|\ge 2$, 即 $<a>=G$, 所以 G 是循环群. □