离散数学作业(5.6)

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

P23, T1 若关系 R 具有自反性, 求证它的逆关系 R^{-1} 也具有自反性. 类似地, 对于对称性、传递性、反自反性、反对称性进行证明.

证: 设 R 是 X 上的关系.

(1) $\forall x \in X$, 因为 R 具有自反性, 所以 $<x,x>\in R$, 即 $<x,x>\in R^{-1}$, 故 R^{-1} 具有自反性.

(2) 若 $<x,y>\in R^{-1}$, 则 $<y,x>\in R$, 又因为 R 具有对称性, 所以 $<x,y>\in R$, 即 $<y,x>\in R^{-1}$, 故 R^{-1} 具有对称性.

(3) 若 $<x,y>\in R^{-1}$ 且 $<y,z>\in R^{-1}$, 则 $<y,x>\in R$ 且 $<z,y>\in R$, 又因为 R 具有传递性, 所以 $<z,x>\in R$, 即 $<x,z>\in R^{-1}$, 故 R^{-1} 具有传递性.

(4) $\forall x \in X$, 因为 R 具有反自反性, 所以 $<x,x>\notin R$, 即 $<x,x>\notin R^{-1}$, 故 R^{-1} 具有反自反性.

(5) 若 $<x,y>\in R^{-1}$ 且 $<y,x>\in R^{-1}$, 则 $<y,x>\in R$, 且 $<x,y>\in R$, 又因为 R 具有反对称性, 所以 $x=y$, 故 R^{-1} 具有反对称性.

P23, T2 在集合 $\{a,b,c\}$ 上的关系 R 具有关系矩阵

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 R^2, R^3, R^{-1} 和 $R\circ R^{-1}$ 的关系矩阵.

解: $\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R\cdot\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_{R^3} = \mathbf{M}_{R^2}\cdot\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{M}_{R\circ R^{-1}} = \mathbf{M}_R\cdot\mathbf{M}_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

P27, T2 设 R_1, R_2 是集合 X 上的关系, $R_1 \supseteq R_2$, 试证明:

(1) $r(R_1)\supseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1)\supseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1)\supseteq t(R_2)$.

证: (1) 若 $<x,y>\in r(R_2)$, 则 $<x,y>\in R_2\cup I_x$, 即 $<x,y>\in R_2$ 或 $<x,y>\in I_x$. 又因为 $R_1\supseteq R_2$, 故 $<x,y>\in R_1$ 或 $<x,y>\in I_x$, 即 $<x,y>\in R_1\cup I_x$, 也即 $<x,y>\in r(R_1)$. 所以 $r(R_1)\supseteq r(R_2)$.

(2) 若 $<x,y>\in s(R_2)$, 则 $<x,y>\in R_2\cup R_2^{-1}$, 即 $<x,y>\in R_2$ 或 $<x,y>\in R_2^{-1}$. 又因为 $R_1\supseteq R_2$, 故 $<x,y>\in R_1$ 或 $<x,y>\in R_1^{-1}$, 即 $<x,y>\in R_1\cup R_1^{-1}$ 也即 $<x,y>\in s(R_1)$.

(3) 先用归纳法证明 $R_2^n\subseteq R_1^n$:

① $n=1$ 时, $R_2 \subseteq R_1$, 成立;

② 假设 $n=k$ 时有 $R_2^k \subseteq R_1^k$. 对任意 $<x,y>\in R_2^{k+1}=R_2^k\circ R_2$, $\exists u\in R_2$, 使得 $<x,u>\in R_2^k\subseteq R_1^k$ 且 $<u,y>\in R_2\subseteq R_1$, 故 $<x,u>\in R_1^k$ 且 $<u,y>R_1$, 即 $<x,y>\in R_1$. 所以 $R_2^{k+1}\subseteq R_1^{k+1}$. 所以 $s(R_1)\supseteq s(R_2)$.

由 ① ②, 及数学归纳法可知 $R_2^n\subseteq R_1^n$ 对任意正整数 n 都成立.

若 $<x,y>\in t(R_2)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_2^i$, 必存在某正整数 m 使得 $<x,y>\in R_2^m\subseteq R_1^m\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_1^i=t(R_1)$, 即 $<x,y>\in t(R_1)$, 所以 $t(R_1)\supseteq t(R_2)$.

P28, T3 设 R_1, R_2 是集合 X 上的关系, 试证明:

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证: (1) $r(R_1)\cup r(R_2)=(R_1\cup I_x)\cup(R_2\cup I_x)=(R_1\cup R_2)\cup I_x=r(R_1\cup R_2)$.

(2) $s(R_1)\cup s(R_2)=(R_1\cup R_1^{-1})\cup(R_2\cup R_2^{-1})=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^{-1}=s(R_1\cup R_2)$.

(3) 若 $<x,y>\in t(R_1)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_1^i$, 必存在某正整数 m 使得 $<x,y>\in R_1^m$, 也即存在 $e_1,e_2,\ldots,e_{m-1}\in X$, 使得 $xR_1e_1,e_1R_1e_2,\ldots,e_{m-1}R_1y$, 即有 $x(R_1\cup R_2)e_1,\ldots,e_{m-1}(R_1\cup R_2)y$,

所以 $<x,y>\in(R_1\cup R_2)^m\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(R_1\cup R_2)^i=t(R_1\cup R_2)$, 即 $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)$, 同理 $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_2)$, 所以 $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

P28, T4 设 R 是集合 X 上的关系, 试证明:

(1) $r(s(R))=s(r(R))$; (2) $r(t(R))=t(r(R))$.

证: (1) $r(s(R))=r(R\cup R^{-1})=(R\cup R^{-1})\cup I_x$.

$s(r(R))=s(R\cup I_x)=(R\cup I_x)\cup(R\cup I_x)^{-1}=R\cup I_x\cup R^{-1}\cup I_x$.

所以左边=右边.

(2) 因为 $t(r(R))=t(R\cup I_x)\supseteq t(R)\cup t(I_x)=t(R)\cup I_x=r(t(R))$, 故只需证 $t(r(R))\subseteq r(t(R))=t(R)\cup I_x$.

若 $<x,y>\in t(r(R))=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(R\cup I_x)^i$, 必存在正整数(取最小的) m, 使得 $<x,y>\in(R\cup I_x)^m$.

① 若 $x=y$, 则 $<x,y>\in I_x\subseteq t(R)\cup I_x=r(t(R))$.

② 若 $x\neq y$, 则存在互不相同的 $e_1,e_2,\ldots,e_{m-1}\in X$, 使得 $xRe_1,\ldots e_{m-1}Ry$, 即 $<x,y>\in R^m\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i=t(R)\subseteq t(R)\cup I_x=r(t(R))$.

所以 $(r(R))\subseteq r(t(R))=t(R)\cup I_x$.

综上: 左边=右边.

P28, T5 设 $X=\{a,b,c,d\}$, 令 $R=\{<a,b>,<b,d>,<b,c>,<c,d>\}$, 求出 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

解: 由题意, R 的关系矩阵 $\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) $r(R) = R \cup I_x = \{<a,b>, <b,d>, <b,c>, <c,d>, <a,a>, <b,b>, <c,c>, <d,d>\}$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1} = \{<a,b>, <b,d>, <b,c>, <c,d>, <b,a>, <d,b>, <c,b>, <d,c>\}$;

(3) $\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R \cdot \mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_{R^3} = \mathbf{M}_{R^2} \cdot \mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{M}_{R^4} = \mathbf{M}_{R^3} \cdot \mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_{R^4} = \mathbf{M}_{R^5} = \cdots = \mathbf{O}$.

因为, $R^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$, 故 $\mathbf{M}_{R^+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$R^+ = \{<a,b>, <a,c>, <a,d>, <b,c>, <b,d>, <c,d>\}$.