中国人民大学 2018-2019春季学期 数学分析期中考试

Edited by G.Cui

一. 设k是正整数.

1. 证明: $\int_0^{2\pi}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x=0$, $\int_0^{2\pi}x\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\pi}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$;

2. 计算: $\int_0^{\pi}x\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$.

二.

1. 记 D_1: $y=e^x-1$. 求 D_1, $y=x$, $x=1$ 围成的图形的面积以及 D_1 在 $[0,1]$ 上的弧长.

2. 记 D_2: $y=-\sqrt{x}$. 求 D_2, $y=x$, $x=1$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周形成的几何体的体积和侧面积.

三. 设函数$f(x)$, $g(x)$在 $[a,b]$ 可积. 对于 $[a,b]$ 的任意划分Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 记$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(k=1,2,\ldots,n)$, $\lambda(\Delta)=\min\limits_k\{\Delta x_k\}$. 求证:

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+g(x_k)]^2\Delta x_k=\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x.$$

并求下列极限:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}[|\frac{k-1}{n}-\frac{1}{2}|-\mathrm{sgn}(\frac{k}{n}-\frac{1}{2})]^2\frac{1}{n}.$$

四. 判断下列广义积分敛散性.

$$\int_0^{+\infty}\sin(\frac{1}{x^\alpha})\ln x\mathrm{d}x.$$

参考答案

一.

1. **证明**. 先考察 $\int_0^{2\pi}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$. 原式 $=\{\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$.

   在后一积分中令 $x=2\pi-t$, 得 $I_2=\int_{\pi}^{0}\sin^{2k-1}(2\pi-t)\mathrm{d}(2\pi-t)=-\int_0^{\pi}\sin^{2k-1}t\mathrm{d}t$.

   所以原式 $=0$.

   再考察 $\int_0^{2\pi}x\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$. 原式 $=\{\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\}x\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$.

   在后一积分中令 $x=\pi+t$, 得 $I_2=\int_0^{\pi}(\pi+t)\sin^{2k-1}(\pi+t)\mathrm{d}(\pi+t)=-\int_0^{\pi}(\pi+t)\sin^{2k-1}t\mathrm{d}t$. 所以原式 $=-\pi\int_0^{\pi}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$. □

2. **解:** 原式 $=\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\}x\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$. 在后一积分中令 $x=\pi-t$, 得 $I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)\sin^{2k-1}(\pi-t)\mathrm{d}(\pi-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)\sin^{2k-1}t\mathrm{d}t$. 所以原式 $=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x$.

   由课本例题[1]知, 原式 $=\pi\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$.

二.

1. **解:** $S=\int_0^1(e^x-1-x)\mathrm{d}x=e-\frac{5}{2}$.

   $l=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}[1+\frac{1}{2(u-1)}-\frac{1}{2(u+1)}]\mathrm{d}u=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1})-\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})$.

2. **解:** 注意到: 在 $[0,1]$ 上, 有 $\sqrt{x}\geq x$. 结合对称性知, 旋转几何体与 $y=-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$ 绕 x 轴旋转一周形成的几何体完全相同. 所以 $V=\pi\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi$.

   $F=2\pi\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$.

三.

证明. 等式右侧积分 $\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}[f(\xi_k)+g(\xi_k)]^2\Delta x_k$.

作差:

$$|\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+g(x_k)]^2\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_k)+g(\xi_k)]^2\Delta x_k|$$

[1]《数学分析》(第三版 上册) 复旦大学数学系. 欧阳光中 等 编. pp.310. 例7

$$= |\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(\xi_k)+g(x_k)+g(\xi_k)][f(x_{k-1})-f(\xi_k)+g(x_k)-g(\xi_k)]\Delta x_k|. \quad (1)$$

分别记 f, g 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅为 $\omega_k(f)$ 和 $\omega_k(g)$. 又因为 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积, 所以 $|\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k| \to 0$, $|\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k| \to 0$, $(\lambda(\Delta)\to 0)$,

并且 $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|<M$, $|g(x)|<M$.

于是(1)式 $< |4M\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}[\omega_k(f)+\omega_k(g)]\Delta x_k| \to 0$, $(\lambda(\Delta)\to 0)$

这就证明了左右相等. □

下面考察 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}[|\frac{k-1}{n}-\frac{1}{2}|-\mathrm{sgn}(\frac{k}{n}-\frac{1}{2})]^2\frac{1}{n}$. 令 $f(x)=|x-\frac{1}{2}|$, $g(x)=\mathrm{sgn}(x-\frac{1}{2})$. 考虑把 $[0,1]$ 区间 n 等分, 于是 $x_i=\frac{i}{n}$, $i=0,1,\ldots,n$. 显然 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 都可积, 则由上面的证明得:

原式 $=\int_0^1[|x-\frac{1}{2}|+\mathrm{sgn}(x-\frac{1}{2})]^2\mathrm{d}x=\{\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\}[|x-\frac{1}{2}|+\mathrm{sgn}(x-\frac{1}{2})]^2\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(x+\frac{1}{2})^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x+\frac{1}{2})^2\mathrm{d}x=\frac{13}{12}$.

四. 解: 令 $x=\frac{1}{t}$, 原积分 $=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t^\alpha)\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$, 所以只需考察 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^\alpha)\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^\alpha)\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\{\int_0^1+\int_1^{+\infty}\}\frac{\sin(x^\alpha)\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

先考察 I_1: 由于 $sin(x^\alpha)\sim x^\alpha$, $(x\to 0)$, 所以 $\frac{\sin(x^\alpha)\ln x}{x^2}\sim x^{\alpha-2}\ln x$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-\alpha+\varepsilon}x^{\alpha-2}\ln x=\lim\limits_{x\to 0}x^\varepsilon\ln x=0$.

由 Cauchy 比较法以及 ε 的任意性得, 当 $2-\alpha+\varepsilon<1$, 即 $\alpha>1+\varepsilon>1$ 时, I_1(绝对)收敛; 当 $\alpha\le 1$ 时, I_1 发散.

考察 I_2: 当 x 充分大时, $|\frac{\sin(x^\alpha)\ln x}{x^2}|\le|\frac{\ln x}{x^2}|\le|\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}|=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. 由 Cauchy 比较法知, 对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, I_2 都(绝对)收敛.

综上: 当 $\alpha>1$ 时, 原积分绝对收敛; 当 $\alpha\le 1$ 时发散.