广义积分 练习题

Edited by G.Cui

Ex 1. 计算下列广义积分.

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ \mathrm{d}x$;
2. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$;
3. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|^{\frac{1}{2}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\ \mathrm{d}t$.

Ex 2. 设 $f(x)$ 是一个实连续函数, 对所有 x, 有 $f(x)\geq 0$, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)\ \mathrm{d}x<+\infty$. 求证:

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty).$$

Ex 3. 证明: 积分 $\int_0^1(x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x$ 有意义.

Ex 4. 讨论下列广义积分的收敛性与绝对收敛性.

$$1)\int_0^{+\infty}\sin(x^p)\mathrm{d}x.$$

$$2)\int_0^{+\infty}|\ln x|^p\frac{\sin x}{x^q}\mathrm{d}x.$$

Ex 5. 积分 $\int_0^{+\infty}[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1]\mathrm{d}x$是否收敛? 是否绝对收敛?

练习题参考解答:

Ex 1. 解:

1. 令 $x=2t$, $I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(2t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\mathrm{d}t=I_1+I_2+I_3$.

   I_3: 令 $u=\frac{\pi}{2}-t$, $I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\mathrm{d}u$. 即 $I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$, $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$;

2. 令 $t=\frac{1}{x}$, 化简得 $I=-I$, 所以 $I=0$;

3. 令 $u=t-x$, 则 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{1}{2}}\frac{y}{u^2+y^2}\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}\frac{y}{u^2+y^2}\mathrm{d}u$. 再令 $v=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}}$, 得 $I=4\sqrt{y}\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{v^4+1}\mathrm{d}v=\sqrt{2y}\int_0^{+\infty}(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1})\mathrm{d}x=\sqrt{2y}\pi$.

Ex 2.

证明*:* 由于 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 根据 Cauchy 收敛准则, $\forall\epsilon>0$, $\exists A>0$, s.t. $\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{2}$. 固定 A, 有 $\frac{1}{n}\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x\to 0(n\to+\infty)$, 即 $\exists N>0$, s.t. $\forall n>N$, 有 $\frac{1}{n}\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{2}$. 原式 $=\frac{1}{n}(\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x+\int_A^n xf(x)\mathrm{d}x)<\epsilon$. □

Ex 3.

证明*:* 记 $I=I_1+I_2$.

考察I_1: $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$. 所以 I_1 是常义积分, 故收敛.

考察I_2: $I_2=\int_0^1 x\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x\le\int_0^1\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=-\int_0^1\cos(\frac{1}{x^2})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$. 再令 $t=\frac{1}{x}$, 得 $I_2=\int_1^{+\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t$. 由课本[1]相关内容知, I_2 收敛.

综上, 原积分收敛. □

Ex 4. 这里只给出结果, 详细过程暂缺(实际上是崔老师太懒).

1. 当 $p>1$ 时, 积分条件收敛; 当 $p<-1$ 时绝对收敛.

[1]复旦大学数学系.《数学分析(第三版)》下册 P63 例9.

2. 当 $p > -1$, $1 < q < 2$ 时绝对收敛; 当 $-1 < p < 0$, $q = 0$ 时条件收敛; 当 $p > -1$, $0 < q < 1$ 时条件收敛. 其它情况发散.

Ex 5. 解: 考虑 Taylor 展开.

$I = \int_0^{+\infty}[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1]\mathrm{d}x = \int_0^1(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x - \int_0^1 1\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1]\mathrm{d}x$

$= I_1 - \int_0^1 1\mathrm{d}x + I_2$.

考察 I_1: $x=0$ 是奇点. $(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} = (\frac{1}{6}x^2+o(x^2))^{-\frac{1}{3}}$. 即 $(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} = O(x^{-\frac{2}{3}})$, 由 Cauchy 判别法, I_1绝对收敛.

考察 I_2: $(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1 = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}+o(\frac{1}{x^2})$. 即 $I_2 = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}o(\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x$, 第一部分条件收敛, 第二部分绝对收敛, 故 I_2条件收敛.

综上, 原积分条件收敛.