图论作业(4.21)

中国人民大学 信息学院 崔冠宇 2018202147

关于上一次作业 T42 的解释. 学长, 我作业上写的是"两个不连通的部分", 而非"两个连通分量", 就是考虑到多个连通分量的情况. 我的意思是, 只要这个图不连通, 我们就可以把它划分为互不连通的两个**部分**, 只需要任取一个连通分量, 将其它部分看为一个整体即可, 而非仅有两个连通分量的情况. 如果可以, 希望能修改一下, 谢谢学长!

补充题 请写出有向图的可达矩阵和邻接矩阵的关系, 并说明或者证明.

引理一. 在有向图 D 中, 若 $u, v(u \neq v)$ 间存在(有向)途径, 则必存在长度小于等于 $|V(D)|-1$ 的途径.

证: 由题意, 设 $P(u,v) = v_1e_1v_2e_2\cdots v_{n-1}e_{n-1}v_n(v_1 = u, v_n = v)$.

- 情况一. 若 $n \leq |V(D)|$, 则结论成立.
- 情况二. 若 $n \geq |V(D)|+1$, 由抽屉原理/鸽笼原理, 其中必存在重复顶点. 去掉这一对重复顶点之间的途径, 则这条途径上的顶点减少了. 不断重复, 必然能化为情况一.

综上, 结论成立. □

引理二. 设 $A = A(D)$ 是有向图 D 的邻接矩阵. 记 $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ (k 为非负整数[1]), 则 $a_{ij}^{(k)}$ 的含义是: v_i 与 v_j 之间长度为 k 的有向途径的条数.

证: 对 k 使用数学归纳法.

1. 当 $k = 0, 1$ 时, 容易验证结论成立.
2. 假设结论对 $k-1$ 成立, 即 $a_{ij}^{(k-1)}$ 表示 v_i 到 v_j 的途径的条数.

   一方面, $A^k = A^{k-1}\cdot A = (a_{i1}^{(k-1)}a_{1j} + a_{i2}^{(k-1)}a_{2j} + \cdots + a_{in}^{(k-1)}a_{nj})_{n\times n}$.

   另一方面, v_i 到 v_j 长度为 k 的途径可以被拆分为 v_1 到 v_l 长度为 $k-1$ 的途径加上从 v_l 到 v_j 长度为 1 的途径 $(l = 1, 2, \ldots, n)$. 由计数原理的乘法原理, v_i 到 v_j 长度为 k 的途径的条数为 $a_{i1}^{(k-1)}a_{1j} + a_{i2}^{(k-1)}a_{2j} + \cdots + a_{in}^{(k-1)}a_{nj} = a_{ij}^{(k)}$. 因此结论对 k 也成立.

故由数学归纳法, 结论对任意非负整数都成立. □

结论. 设有向图 D 的邻接矩阵为 A, 记 $D = (d_{ij})_{n\times n} = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}(+A^n$, 若认为顶点不可

[1] 因为 $A^0 = E$, 而且我们可以认为 v_i 与自身之间存在一条长为 0 的途径, 所以 $k = 0$ 也是有意义的.

直接达自身[2]), 令 $p_{ij}=\begin{cases}1, & d_{ij}>0\\ 0, & d_{ij}=0\end{cases}$, 则可达矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$.[3]

证明. 由引理一可知, 若 v_i 可达 v_j, 则必存在一条长度小于等于 $n-1$ 的途径, 再结合引理二中各 A^k 的含义, 我们只需考虑 $k=0,1,\dots,n-1$ 的情况. 由于各 A^k 都是非负矩阵, 则 $D=(d_{ij})_{n\times n}=E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}$ 也是非负矩阵, 且 $d_{ij}>0$ 当且仅当 v_i 可达 v_j. 所以令 $p_{ij}=\begin{cases}1, & d_{ij}>0\\ 0, & d_{ij}=0\end{cases}$, 则可达矩阵就是 $P=(p_{ij})_{n\times n}$. □

[2]我们认为 v_i 可达自身. 否则可以再令 $p_{ii}=0$, 并且在 D 的等式后增加 A^n, 以计算入回路.

[3]本算法的时间复杂度为 $O(n^4)$ (假定矩阵乘法为 $O(n^3)$). 另有 **Warshall** 算法, 可将时间复杂度降到 $O(n^3)$