数据结构与算法 II 作业 (11.17)

中国人民大学　信息学院　崔冠宇　2018202147

T17.1-3　假定我们对一个数据结构执行一个由 n 个操作组成的操作序列，当 i 严格为 2 的幂时，第 i 个操作的代价为 i，否则代价为 1。使用聚合分析确定每个操作的摊还代价。

解: 为了方便观察规律，先列出前几个 i 的操作的代价表格：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
代价 c_i	1	2	1	4	1	1	1	8	1	1	1	1	1	1	1	16	$\cdots$
总代价	1	3	4	8	9	10	11	19	20	21	22	23	24	25	26	42	$\cdots$

n 次操作的总代价

$$
\begin{aligned}
C(n) &\leq n + \sum_{i=0}^{\lceil \log_2 n \rceil} \frac{n}{2^i} \\
&\leq n + (n + \frac{n}{2} + \cdots + 1) \\
&\leq n + \frac{n - 1/2}{1 - 1/2} \\
&= 3n - 1
\end{aligned}
$$

所以总代价 $C(n) = O(n)$，摊还代价 $O(1)$。

T17.2-2　用核算法重做练习 17.1-3。

解:（根据上一问的结果，）设每一次操作的摊还代价 $\hat{c}_i = 3$，每次操作的实际代价 c_i 与原题相同。与上一问相同，可以得出 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i < 3n = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{c}_i$，所以信用 $= \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{c}_i - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \geq 0$ 非负，因此摊还代价是总代价的一个上限，所以总代价 $C(n) = O(n)$，每次操作的摊还代价 $O(1)$。

T17.3-2　使用势能法重做练习 17.1-3。

解: 定义如下势能函数 $\Phi(D_i)$：

$$
\Phi(D_i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 2i - 2^{1+\lfloor \log_2 i \rfloor}, & i > 0 \end{cases}
$$

可以算出 $\Phi(D_i) \geq 0$，于是用 $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ 可以计算出：

$$
\hat{c}_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 3, & i > 1 \text{且} i \text{不是 2 的幂} \\ 2, & i > 1 \text{且} i \text{是 2 的幂} \end{cases}
$$

所以每次操作的摊还代价为 $O(1)$。