Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)
Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

В.В.Щиголев

Алгебра и геометрия 2

Учебное пособие
по дисциплине «Алгебра и геометрия»

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»,
(программа подготовки бакалавра).

Рассмотрено и одобрено на заседании Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий
(протокол № от «» 2020 г.)

Москва, 2020

УДК 512
ББК 22.1я73
Щ76

Автор: Щиголев В.В., доктор физико-математических наук, профессор департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий Финансового университета при Правительстве Российской Федерации

Рецензент: Зададаев С.А., кандидат физико-математических наук, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Алгебра и геометрия 2: Учебное пособие по дисциплине «Алгебра и геометрия» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах», (программа подготовки бакалавра). - М.: Финансовый университет, департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2020. 32 с.

Учебное пособие предназначено для использования студентами в часы самостоятельной работы с целью освоения теоретических понятий высшей и линейной алгебры. Материал пособия может быть также полезен студентам-бакалаврам других направлений и профилей, магистрантам и аспирантам, осваивающим линейную алгебру.

УДК 512
ББК 22.1я73

Учебное издание

Щиголев Владимир Викторович

Алгебра и геометрия 2

Учебное пособие
по дисциплине «Алгебра и геометрия»

Компьютерный набор, верстка В.В.Щиголев
Формат 60x90/16. Гарнитура Times New Roman
Усл. п.л. 1. Изд. № - 2020.
Заказ № ______
Электронное издание

Содержание

1 Комплексные числа

1.1 Построение поля комплексных чисел

Мы рассмотрим расширение поля действительных чисел, построив поле *комплексных чисел*. По определению комплексное число — это пара действительных чисел (a, b). Комплексные числа можно складывать и умножать по следующим правилам:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1}$$

Множество всех таких пар мы обозначим через $\mathbb{C}$, имея ввиду, что на нём действуют вышеопределённые бинарные операции.

Теорема 1.1 *Множество $\mathbb{C}$ является полем относительно операций сложения и умножения (1).*

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathbb{C}$ — коммутативное кольцо с единицей. Для этого существует два способа.

Способ 1. Проверим вручную выполнение свойств из определения кольца. Сложение комплексных чисел ассоциативно и коммутативно, так как таково сложение на множестве действительных чисел, а операция сложения в $\mathbb{C}$ определена независимо по каждой координате. Нулём является пара $(0,0)$, противоположным к паре (x, y) является пара $(-x, -y)$.

Ассоциативность умножения следует из следующих вычислений:

$$\begin{aligned}((a, b)(c, d))(f, g) &= (ac - bd, ad + bc)(f, g) = \\ &= ((ac - bd)f - (ad + bc)g, (ac - bd)g + (ad + bc)f) = \\ &= (acf - bdf - adg - bcg, acg - bdg + adf + bcf).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, b)((c, d)(f, g)) &= (a, b)(cf - dg, cg + df) = \\ &= (a(cf - dg) - b(cg + df), a(cg + df) + b(cf - dg)) = \\ &= (acf - adg - bcg - bdf, acg + adf + bcf - bdg).\end{aligned}$$

Как легко видеть, эти выражения совпадают. Проверим дистрибутивность:

$$\begin{aligned}&(a, b)((c, d) + (f, g)) = \\ &= (a, b)(c + f, d + g) = (a(c + f) - b(d + g), a(d + g) + b(c + f)) = \\ &= (ac + af - bd - bg, ad + ag + bc + bf).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, b)(c, d) + (a, b)(f, g) &= (ac - bd, ad + bc) + (af - bg, ag + bf) = \\ &(ac - bd + af - bg, ad + bc + ag + bf).\end{aligned}$$

Эти выражения тоже совпадают. Кроме того, в кольце $\mathbb{C}$ существует единица — это элемент $(1,0)$:

$$(1,0)(a,b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b),$$

$$(a,b)(1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b),$$

и это кольцо коммутативно:

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc), \qquad (c,d)(a,b) = (ca - db, cb + da).$$

Способ 2. Отождествим пару (a,b) со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Используя правила умножения матриц, легко проверить, что такое отождествление сохраняет сумму и произведение:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}.$$

При этом единице $(1,0)$ в кольце $\mathbb{C}$ соответствует единичная матрица E, а противоположному элементу соответствует противоположная матрица. Теперь тот факт, что $\mathbb{C}$ — кольцо следует из того, что $M_2(\mathbb{R})$ — кольцо. Фактически мы отождествили $\mathbb{C}$ с подкольцом кольца $M_2(\mathbb{R})$.

Теперь остаётся доказать, что $\mathbb{C}$ — поле. Это следует из следующего вычисления:

$$(a,b)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (1,0),$$

верного для любых действительных a и b одновременно не равных нулю. □

Теперь мы можем ввести обозначение $i = (0,1)$. Легко проверить, что $i^2 = (-1,0)$.

Лемма 1.2 *Отображение* $\iota: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *заданное правилом* $\iota(a) = (a,0)$ *является инъективным гомоморфизмом колец.*

Доказательство. Отображение ι инъективно по определению. Остаётся доказать, что ι сохраняет операции сложения и умножения. Это следует из следующих вычислений:

$$\iota(a) + \iota(b) = (a,0) + (b,0) = (a+b,0) = \iota(a+b),$$

$$\iota(a)\iota(b) = (a,0)(b,0) = (ab - 00, a0 + 0b) = (ab,0) = \iota(ab).$$

□

Теперь мы можем отождествить каждое действительно число a с его образом $\iota(a)$. При этом мы получаем $i^2 = -1$. Так как для любого комплексного числа (a, b) выполнено

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0,1) = (a, 0) + (b, 0)i,$$

то мы можем представить любое комплексное число z (с использованием вышеупомянутого отождествления) в виде

$$z = a + bi$$

для соответствующих действительныхa и b. Такое представление называется *алгебраической формой записи* комплексного числа. Мы будем использовать обозначения $a = \operatorname{Re} z$ и $b = \operatorname{Im} z$. Эти числа называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью комплексного числа z.

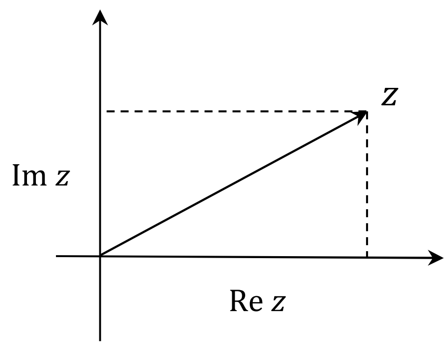
Замечание. Мы ввели комплексные числа как пары действительных чисел. Существуют и альтернативные способы. Например, мы могли бы ввести поле комплексных чисел как подкольцо кольца матриц $M_2(\mathbb{R})$ как в доказательстве теоремы 1.1. Наверное, самым естественным способом введения поля комплексных чисел было бы присоединение к полю действительных чисел $\mathbb{R}$ элемента i, удовлетворяющего свойству $i^2 = -1$. Эту интуитивную идею можно превратить в строгое определение, если рассмотреть фактор-кольцо

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

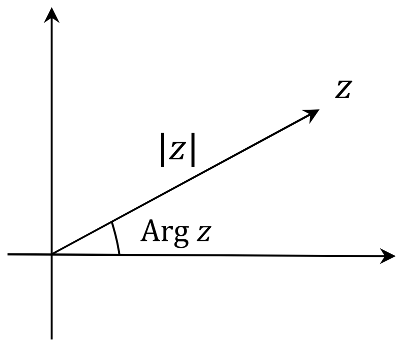
и обозначить через i образ элемента x при естественном гомоморфизме $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$. Остаётся ещё обсудить вопрос, почему $\mathbb{R}$ вкладывается в $\mathbb{C}$ как подкольцо и почему любой элемент из $\mathbb{C}$ можно единственным образом представать в виде $a + bi$ для $a, b \in \mathbb{R}$. Обсуждение этих вопросов увело бы нас слишком далеко от основного содержания этих лекций. Поэтому мы остановились на более наглядном определении поля комплексных чисел в виде множества пар действительных чисел с операциями (1).

1.2 Модуль и аргумент

Мы будем изображать комплексные числа на плоскости, считая первую компоненту абсциссой, а вторую ординатой.



Рассмотрим, что произойдёт, если задать туже точку z на плоскости в полярной системе координат.



Формулой мы можем записать

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Это число называется *модулем* комплексного числа z. Рассмотрим теперь случай $z \neq 0$. Как известно угол в полярных координатах определён не однозначно, а с точностью до $2\pi k$. Используя наши знания о факторкольцах, мы можем определить *аргумент* $\operatorname{Arg} z$ как элемент из факторгруппы $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, каждый представитель $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ которого удовлетворяет соотношениям

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Впрочем, мы будем понимать сами функции cos и sin как функции из $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}$, получаемые из обычных тригонометрических функций следующим образом:

$$\cos(\varphi + 2\pi\mathbb{Z}) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2\pi\mathbb{Z}) = \sin\varphi.$$

Тогда мы можем записать

$$\cos \operatorname{Arg} z = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \operatorname{Arg} z = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Мы получили, что любое комплексное число z можно записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z|$ и $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, если $z \neq 0$. Эта запись не однозначна по двум причинам: во первых даже если $z \neq 0$, то φ определён с точностью до $2\pi k$; если $z = 0$, то в качестве φ можно взять любое число. Эта запись называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа

1.3 Сложение и умножение

Обе формы записи комплексного числа: алгебраическая и тригонометрическая имеют свои преимущества. В первой форме легко складывать числа, а во второй их умножать:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=rr'(\cos(\varphi+\varphi')+\sin(\varphi+\varphi')).$$

Последняя формула следует из формул косинуса и синуса суммы. Таким образом, мы заключаем, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей. При этом, если оба числа ненулевые, то аргумент их произведения равен сумме их аргументов. В качестве следствия из последней формулы получаем формулу *Муавра*

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)).$$

Кроме того, полезно (и легко запомнить) формулу *Эйлера*

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Из этой формулы легко “получить” формулы косинуса и синуса суммы, если считать, что экспонента суммы равна произведению экспонент (что выглядит вполне естественно и известно из школьного курса математики). Здесь кавычки стоят потому, что как раз формулы косинуса и синуса суммы позволяют установить правило для экспоненты суммы. Однако такое соображение бывает полезно тем, кто забыл тригонометрические формулы, но помнит формулу Эйлера (что, согласитесь, гораздо проще).

Теперь мы можем определить

$$e^{a+ib}=e^ae^{ib}=e^a(\cos b+i\sin b).$$

Таким образом может быть записано любое комплексное число, кроме нуля. Такая форма записи комплексного числа называется *экспоненциальной*.

1.4 Сопряжение

Сопряжённым к комплексному числу $z=a+ib$ называется число $\bar{z}=a-ib$. В тригонометрической форме получаем

$$\overline{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

Через сопряжённое число удобно выразить действительную и мнимые части, модуль и обратное число:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}, \qquad |z| = \sqrt{z\bar{z}}, \qquad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Кроме того $\bar{\bar{z}} = z$ и $|\bar{z}| = |z|$.

Теорема 1.3 *Любой автоморфизм поля* $\mathbb{R}$ *тождественный.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — автоморфизм поля $\mathbb{R}$. Докажем последовательно следующие утверждения:

(1) $\varphi(x) > 0$, если $x > 0$.
(2) φ монотонное.
(3) $\varphi(n) = n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.
(4) $\varphi(q) = q$ для любого $q \in \mathbb{Q}$.
(5) $\varphi(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

(1) $\varphi(x) = \varphi(\sqrt{x}^2) = \varphi(\sqrt{x})^2 > 0$.

(2) Пусть $x < y$. Тогда $y - x > 0$. Согласно пункту 1 получаем $\varphi(y-x) > 0$. Отсюда $\varphi(y) - \varphi(x) > 0$ и $\varphi(y) > \varphi(x)$.

(3) Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\varphi(n) = \varphi(1 + \dots + 1) = \varphi(1) + \dots + \varphi(1) = n\varphi(1) = n.$$

Отсюда $\varphi(-n) = -\varphi(n) = -n$. Остаётся заметить, что $\varphi(0) = 0$.

(4) Пусть $q = a/b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$. Согласно пункту 3, получаем

$$a = \varphi(a) = \varphi(qb) = \varphi(q)\varphi(b) = \varphi(q)b.$$

Отсюда $\varphi(q) = a/b = q$.

(5) Пусть $s < x < r$ для $r, s \in \mathbb{Q}$. Согласно пунктам 2 и 3 получаем

$$s = \varphi(s) < \varphi(x) < \varphi(r) = r.$$

Так как эти неравенства верны для любых рациональных r и s удовлетворяющих неравенствам $s < x < r$, то $\varphi(x) = x$. □

Теорема 1.4 *Отображение из* $\mathbb{C}$ *в себя, заданное формулой* $z \mapsto \bar{z}$, *является единственным нетождественным авторморфизмом поля* $\mathbb{C}$ *переводящим* $\mathbb{R}$ *в себя.*

Доказательство. Докажем сначала, что сопряжение — автоморфизм. Для этого заметим, что

$\overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = a-ib+c-id = \overline{a+ib}+\overline{c+id}.$

$\overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac-bd+i(ad+bc)} = ac-bd-i(ad+bc) =$
$= ac-(-b)(-d)+i(a(-d)+(-b)c) = (a-ib)(c-id) = \overline{(a+ib)(c+id)}.$

Пусть теперь $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм, переводящий $\mathbb{R}$ в себя. Применяя теорему 1.1 к ограничению φ на $\mathbb{R}$, получаем, что $\varphi(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Теперь мы можем заметить, что

$$\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1.$$

Так как уравнение $z^2+1=0$ имеет в $\mathbb{C}$ только два решения $z=i$ или $z=-i$, то $\varphi(i)=i$ или $\varphi(i)=-i$. В первом случае получаем

$$\varphi(a+ib) = \varphi(a)+\varphi(i)\varphi(b) = a+ib$$

для любых $a,b \in \mathbb{R}$, и φ — тождественный автоморфизм. Во втором случае получаем

$$\varphi(a+ib) = \varphi(a)+\varphi(i)\varphi(b) = a-ib$$

для любых $a,b \in \mathbb{R}$, и φ — автоморфизм сопряжения. □

1.5 Основная теорема алгебры

Поле $\mathbb{F}$ называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$ степени больше нуля (непостоянный многочлен) имеет хотя бы один корень в $\mathbb{F}$.

Лемма 1.5 *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда любой многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$ представляется в виде $c(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ для некоторых $c, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$.*

Доказательство. Если $f=0$, то такое представление существует при $c=0$ и любых n и $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Теперь предположим, что $\deg f > 0$ и докажем утверждение индукцией по этой степени. База индукции, это случай $\deg f = 1$. В это случае $f = a_1x - a_0 = a_1(x - a_0/a_1)$ и утверждение выполнено.

Пусть теперь $\deg f > 1$. По определению f имеет корень, скажем α_1. По теореме Безу $f = (x-\alpha_1)g$ для некоторого $g \in \mathbb{F}[x]$. Мы знаем, что

$$\deg f = \deg(x-\alpha_1) + \deg g = 1 + \deg g,$$

откуда $\deg g = \deg f - 1$ и $1 \le \deg g < \deg f$. Поэтому к g применимо утверждение леммы:

$$g = c(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

для некоторых $c, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Выражая отсюда f, получаем требуемое разложение. □

Теорема 1.6 (Основная теорема алгебры) *Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.*

Существует много доказательств этой теоремы от чисто топологических до почти полностью алгебраических. Мы не будем приводить их здесь.

2 Эрмитовы пространства

Определение 2.1 *Эрмитовым пространством называется линейное пространство E над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, наделённое отображением $(\_|\_) : E \times E \to \mathbb{C}$, которое удовлетворяет следующим свойствам:*

(Э1) $(u|v) = \overline{(v|u)}$ для любых $u, v \in E$;

(Э2) $(\alpha u + \beta v|w) = \alpha(u|w) + \beta(v|w)$ для любых $u, v, w \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(Э3) $(u|u) \in \mathbb{R}$ и $(u|u) > 0$ для любого $u \in E \backslash \{0\}$.

Заметим, что свойство (Э1) доказывает аналог свойства (Э2) для второго аргумента

(Э2′) $(w|\alpha u + \beta v) = \bar{\alpha}\,(w|u) + \bar{\beta}\,(w|v)$.

Действительно,

$(w|\alpha u + \beta v) = \overline{(\alpha u + \beta v|w)} = \overline{\alpha(u|w) + \beta(v|w)} = \bar{\alpha}\,\overline{(u|w)} + \bar{\beta}\,\overline{(v|w)} = \bar{\alpha}\,(w|u) + \bar{\beta}\,(w|v)$.

Кроме того, из свойства (Э2) получаем $(0|v) = (0 + 0|v) = (0|v) + (0|v)$. Сокращая на $(0|v)$, получаем $(0|v) = 0$. Отсюда $(v|0) = 0$.

Отображение в $(\_|\_) : E \times E \to \mathbb{C}$ в определении 2.1 называется *скалярным произведением*. Для каждого вектора $v \in E$ определим его *длину*

$$|v| = \sqrt{(v|v)}.$$

Извлечение корня корректно, так как $(v|v)$ — неотрицательное действительное число. Возводя это равенство в квадрат, получаем

$$|v|^2 = (v|v).$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v \in E$. Пользуясь свойствами (Э2) и (Э2′), мы получаем

$$|\lambda v| = \sqrt{(\lambda v|\lambda v)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(v|v)} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(v|v)} = |\lambda||v|.$$

В последней формуле $|\lambda|$ обозначает модуль комплексного числа, а $|v|$ обозначает длину вектора.

Основным примером конечномерных эрмитовых пространств является пространство $\mathbb{C}^n$ со следующим скалярным произведением:

$$((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)) = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n.$$

Легко проверить, что свойства (Э1)–(Э3) выполняются. Проверим, например, свойства (Э1) и (Э3):

$$\overline{((y_1, \dots, y_n)|(x_1, \dots, x_n))} = \overline{y_1\bar{x}_1 + \dots + y_n\bar{x}_n} = \bar{y}_1\bar{\bar{x}}_1 + \dots + \bar{y}_n\bar{\bar{x}}_n = \\ = \bar{y}_1 x_1 + \dots + \bar{y}_n x_n = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n = ((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)).$$

$$((x_1, \dots, x_n)|(x_1, \dots, x_n)) = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}.$$

Последнее число строго положительно, если $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Лемма 2.2 *Пусть* a, b, c *— действительные числа такие, что* $a \geq 0$ *и* $at^2 + bt + c \geq 0$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда* $b^2 - 4ac \leq 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $a = 0$. Тогда мы получаем $bt + c \geq 0$. Отсюда $b = 0$ и $b^2 - 4ac = 0 \leq 0$. Пусть теперь $a > 0$. Вычисляя дискриминант D, получаем $D = b^2 - 4ac$. Если бы $D > 0$, то парабола $y = at^2 + bt + c$ с ветвями вверх имела бы два различных корня. Между этими корнями она бы проходила ниже нуля, что невозможно по условию. Приходим к противоречию. □

Теорема 2.3 (Неравенство Коши-Буняковского) $|(u|v)| \leq |u||v|$ *для любых* $u, v \in E$. *При этом равенство достигается только при пропорциональных* u *и* v.

Доказательство. В случае, когда $u = 0$, векторы u и v пропорциональны и обе части неравенства обращаются в ноль. Поэтому достаточно доказывать теорему в случае $u \neq 0$.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$f(t) = (tu + (u|v)v|tu + (u|v)v).$$

По свойству 2.1 эта функция неотрицательная. Раскрывая скобки по свойствам 2.1 и 1 и пользуясь свойством 2.1, получаем

$$\begin{gathered}
f(t)=t^2(u|u)+((u|v)v|tu)+(tu|(u|v)v)+((u|v)v|(u|v)v)= \\
=|u|^2t^2+t(u|v)\overline{(v|u)}+t\overline{(u|v)}(u|v)+(u|v)\overline{(u|v)}(v|v)= \\
=|u|^2t^2+t(u|v)\overline{(u|v)}+t\overline{(u|v)}(u|v)+(u|v)\overline{(u|v)}|v|^2= \\
=|u|^2t^2+2t|(u|v)|^2+|(u|v)|^2|v|^2\geq 0.
\end{gathered}$$

Применяя лемму 2.2, получаем

$$4|(u|v)|^4-4|(u|v)|^2|u|^2|v|^2\leq 0.$$

Если $(u|v)=0$, то доказываемое неравенство автоматически выполнено. В противном случае, сокращая на положительное число $4|(u|v)|^2$, получаем $|(u|v)|^2\leq |v|^2|u|^2$. Извлекая квадратный корень, получаем требуемое неравенство.

Если выполнено равенство $|(u|v)|=|u||v|$, то мы получаем, либо $u=0$, либо $|u|>0$ и $D=0$. В первом случае u уже пропорционально v (как и любому другому вектору). Во втором случае квадратное уравнение $f(t)=0$ имеет решение $t=t_0\in\mathbb{R}$. По свойству 2.1 это означает, что $t_0u+(u|v)v=0$. Пропорциональность векторов u и v можно считать установленной, если $(u|v)\neq 0$. В противном случае получаем $0=|u||v|$. Отсюда $|v|=0$ и $v=0$. Этот вектор пропорционален вектору u.

Пусть наоборот $v=\lambda u$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{C}$. В этом случае получаем

$$|(u|v)|=|(u|\lambda u)|=|\bar\lambda(u|u)|=|\bar\lambda|(u|u)=|\lambda||u|^2=|u|(|\lambda||u|)=|u||\lambda u|=|u||v|.$$

В этой записи важно внимательно следить, где $|\ |$ обозначают модуль действительного числа, а где длину вектора. □

Для любого подпространства U эрмитова пространства E положим

$$U^\perp=\{e\in E|(e|u)=0\ \forall\, u\in U\}.$$

Заметим, что $U\cap U^\perp=0$. Это следует из части (Э3) определения эрмитового пространства. Кроме того, выполнено

$$0^\perp=E,\quad E^\perp=0. \tag{2}$$

Первое равенство следует из свойства (Э2), а второе может быть доказано, например, так:

$$0=E\cap E^\perp=E^\perp.$$

Определение 2.4 *Пусть* E *— эрмитово пространство и* $(e_1,\dots,e_n)$ *— его базис. Этот базис называется ортогональным, если* $(e_i|e_j)=0$ *для различных* i *и* j*. Если дополнительно* $|e_i|=1$ *для любого* i*, то этот базис называется ортонормированным.*

В ортонормированном базисе $(e_1, \dots, e_n)$ легко записать координаты вектора. Действительно, пусть

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Умножая на e_i обе части, получаем

$$(v|e_i) = \alpha_1(e_1|e_i) + \dots + \alpha_{i-1}(e_{i-1}|e_i) + \alpha_i(e_i|e_i) + \alpha_{i+1}(e_{i+1}|e_i) + \dots + \alpha_n(e_n|e_i) = \alpha_i(e_i|e_i).$$

Отсюда $\alpha_i = (v|e_i)/(e_i|e_i)$. Используя символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

мы можем записать условие ортонормированности базиса $e_1, \dots, e_n$ следующим образом

$$(e_i|e_j) = \delta_{i,j}.$$

Если у нас имеется ортогональный базис $(f_1, \dots, f_n)$ пространства, то из него легко получить ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_n)$, положив $e_i = f_i/(f_i|f_i)$.

Теорема 2.5 (1) В произвольном конечномерном эрмитовом пространстве существует хотя бы один ортогональный базис. Более того, любой ненулевой вектор из E является элементом одного из таких базисов.

(2) Для любого подпространства U конечномерного эрмитова пространства E выполнено $E = U \oplus U^{\perp}$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему при помощи процесса ортогонализации. Пусть $(v_1, \dots, v_n)$ — произвольный базис пространства E. Мы построим базис $(e_1, \dots, e_n)$ по индукции следующим образом:

$$e_1 = v_1, \quad e_i = v_i - \alpha_{i,1} e_1 - \dots - \alpha_{i,i-1} e_{i-1},$$

где

$$\alpha_{i,j} = \frac{(v_i|e_j)}{(e_j|e_j)}$$

В этом определение есть одна проблема: мы делим на возможно нулевое число $(e_j|e_j)$. Мы разрешим эту проблему следующим образом: индукцией по $i = 1, \dots, n$ мы докажем, что

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle. \tag{3}$$

Действительно, $e_1 = v_1$, что доказывает утверждение для $i = 1$. Пусть теперь $1 < i \leq n$ и утверждение выполнено для $i - 1$ вектора, то есть

$$\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle.$$

Докажем равенство (3). Во первых заметим, что если бы $e_j = 0$ для некоторого $j = 1, \dots, i - 1$, то мы получили бы, что векторы линейно независимого набора $(v_1, \dots, v_{i-1})$ принадлежат линейной оболочке $i - 2$ векторов $e_1 \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{i-1}$. По лемме 4.8 из [3] получаем противоречие $i - 2 \geq i - 1$. Из доказанного факта $e_1, \dots, e_{i-1} \neq 0$ следует, что e_i — корректно определённый вектор. Отсюда

$$v_i = e_i + \alpha_{i,1} e_1 + \dots + \alpha_{i,i-1} e_{i-1} \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle.$$

Так как $v_1, \dots, v_{i-1} \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle \subset \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, то по лемме 4.13 из [3] получаем $\langle v_1, \dots, v_i \rangle \subset \langle e_1, \dots, e_i \rangle$.

Наоборот, по предположению индукции $e_1, \dots, e_{i-1} \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ и $v_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$. Следовательно,

$$e_i = v_i - \alpha_{i,1} e_1 - \dots - \alpha_{i,i-1} e_{i-1} \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle.$$

Поэтому по лемме 4.13 из [3] получаем $\langle e_1, \dots, e_i \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_i \rangle$. Таким образом, равенство (3) доказано и наш алгоритм может продолжаться, пока не будут построены все n векторов $e_1, \dots, e_n$. Из этого равенства для $i = n$ следует, что $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$. Если бы набор $(e_1, \dots, e_n)$ был линейно зависимым, то $V = \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, e_n \rangle$ для некоторого i. Так как $(v_1, \dots, v_n)$ линейно независим, то по лемме 4.8 из [3], получаем противоречие $n - 1 \geq n$.

Остаётся доказать, что $(e_i | e_j) = 0$ для различных $i \neq j$. Без ограничения общности можно считать, что $i > j$. Мы докажем это утверждение индукцией по i. Для $i = 1$ это утверждение очевидно, так как не существует j меньшего i. В противном случае по индуктивному предположению получаем

$$(e_i | e_j) = (v_i | e_j) - \alpha_{i,1}(e_1 | e_j) - \dots - \alpha_{i,j-1}(e_{j-1} | e_j) - \alpha_{i,j}(e_j | e_j) -$$

$$-\alpha_{i,j+1}(e_{j+1} | e_j) - \dots - \alpha_{i,i-1}(e_{i-1} | e_j) = (v_i | e_j) - \alpha_{i,j}(e_j | e_j)$$

$$= (v_i | e_j) - \frac{(v_i | e_j)}{(e_j | e_j)}(e_j | e_j) = 0.$$

Наконец, заметим, что если v — ненулевой вектор из E, то набор, состоящий из одного вектора v линейно независим. Отсюда по следствию 4.11 из [3] получаем, что существует базис $(v_1, \dots, v_n)$ пространства E такой, что $v_1 = v$. В процессе ортогонализации мы получим ортогональный базис $(e_1, \dots, e_n)$ для которого $e_1 = v_1 = v$.

Часть (1) автоматически следует из этой конструкции. Докажем теперь часть (2). По следствию 4.11 из [3] существует такой базис $(v_1, \dots, v_n)$ пространства E, что набор $(v_1, \dots, v_m)$ образует базис пространства U, где $m = \dim U$. Применим процесс ортогонализации к набору $(v_1, \dots, v_n)$ и получим ортогональный базис $(e_1, \dots, e_n)$. По уравнению (3) получаем $\langle e_1, \dots, e_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle = U$. Мы утверждаем, что $U^\perp = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$. Действительно, в силу ортогональности базиса $(e_1, \dots, e_n)$ получаем $e_{m+1}, \dots, e_n \in U^\perp$. Следовательно, $\langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle \subset U^\perp$. Наоборот, пусть $v \in U^\perp$. Разложим этот вектор по базису $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Предположим, что $\alpha_i \neq 0$ для какого-нибудь $i = 1, \dots, m$. Умножая на e_i, получаем

$$
\begin{aligned}
&(v|e_i) = \alpha_1(e_1|e_i) + \cdots + \alpha_{i-1}(e_{i-1}|e_i) \\
&\quad + \alpha_i(e_i|e_i) + \alpha_{i+1}(e_{i+1}|e_i) + \cdots + \alpha_n(e_n|e_i) = \\
&\qquad = 0 + \cdots + 0 + \alpha_i(e_i|e_i) + 0 + \cdots + 0 = \alpha_i(e_i|e_i) \neq 0,
\end{aligned}
$$

что противоречит тому, что $v \in U^\perp$. Таким образом $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ и $v = \alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n \in \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$. Отсюда получаем

$$E = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle \oplus \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle = U \oplus U^\perp.$$

□

2.1 Пространство $\boldsymbol{l_2}$

.

По определению эрмитово пространство $\boldsymbol{l_2}$ — это множество всех счётных последовательностей комплексных чисел $(z_1, \dots, z_n, \dots)$, для которых ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |z_i|^2$$

сходится со скалярным произведением

$$(z_1, \dots, z_n, \dots)(w_1, \dots, w_n, \dots) = \sum_{i=1}^{+\infty} z_i \overline{w}_i.$$

Мы утверждаем, что последний ряд сходится абсолютно. Для этого рассмотрим (действительный) ряд модулей

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |z_i \overline{w}_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} |z_i||\overline{w}_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} |z_i||w_i| \,. \tag{4}$$

Теперь заметим, что

$$|z_i||w_i| \leq \frac{|z_i|^2 + |w_i|^2}{2}.$$

Так как ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z_i|^2 + |w_i|^2}{2}$$

сходится как полусумма сходящихся рядов, то ряд модулей (4) тоже сходится.

Мы собираемся использовать пространство $\boldsymbol{l}_2$ для того, чтобы показать необходимость условия конечномерности для равенств

$$E = U \oplus U^{\perp}, \quad (U^{\perp})^{\perp} = U, \quad U + V = (U^{\perp} \cap V^{\perp})^{\perp}. \tag{5}$$

Чтобы построить подпространство U, для которого нарушены эти равенства, мы определим его как множество последовательностей $(z_1, \dots, z_n, \dots) \in E$, для которых множество $\{i \in \mathbb{N} \mid z_i \neq 0\}$ конечно. Мы утверждаем, что $U^{\perp} = 0$. Действительно, предположим, что $w = (w_1, \dots, w_n, \dots) \in U^{\perp}$. Возьмём последовательность $z = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, в которой 1 стоит на i-м месте. Эта последовательность, очевидно, принадлежит подпространству U. Беря скалярное произведение, получаем $0 = (w|z) = w_i$. Так как это равенство верно для любого i, то $w = 0$. Таким образом, $U \oplus U^{\perp} = U$. Последнее подпространство не равно всему E, так как E содержит, например, последовательность

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

.

Чтобы опровергнуть второе из равенств (5) заметим, что

$$(U^{\perp})^{\perp} = 0^{\perp} = E \neq U.$$

Наконец, чтобы опровергнуть третье равенство, возьмём то же самое U и $V = 0$. Получаем

$$U + V = U \neq E = 0^{\perp} = (0 \cap E)^{\perp} = (U^{\perp} \cap V^{\perp})^{\perp}.$$

3 Линейные операторы

Линейным оператором называется линейное отображение φ из векторного пространства в само себя. Таким образом, мы имеем возможность рассматривать один и тот же базис v на области определения и на области значений оператора. Матрицу оператора относительно этого базиса мы обозначим через $M_v(\varphi)$.

3.1 Собственные значения и векторы операторов

Пусть $\varphi: V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Вектор $\lambda \in V$ называется *собственным*, если он ненулевой и

$$\varphi(\lambda) = t\lambda \tag{6}$$

для некоторого $t \in \mathbb{F}$. В этом случае элемент поля t называется *собственным значением* оператора φ, соответствующим собственному вектору λ. Далее мы будем рассматривать только тот случай, когда пространство V конечномерно.

Пусть $v = (v_1, \dots, v_n)$ — какой-нибудь базис пространства V. Запишем наш собственный вектор в виде

$$\lambda = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n,$$

а результат действия оператора φ на него в виде

$$\varphi(\lambda) = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

для соответствующих $a_i, b_i \in \mathbb{F}$. В координатах векторов получаем

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M_v(\varphi) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, раскладывая обе части равенства (6), по базису v мы получаем

$$M_v(\varphi) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = tE \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Перенося всё в левую сторону, мы получаем

$$(M_v(\varphi) - tE) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Таким образом матрица $M_v(\varphi) - tE$ вырожденная и мы получаем $\det(M_v(\varphi) - tE) = 0$. С другой стороны, если это уравнение выполняется некоторого $t \in \mathbb{F}$, то матрица $M_v(\varphi) - tE$ вырожденная и существует некоторый ненулевой набор $(a_1, \dots, a_n)$ элементов поля $\mathbb{F}$ для которого выполнено уравнение (7). Полагая $\lambda = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, мы получаем $\varphi(\lambda) = t\lambda$.

Заметим, что многочлен $\det(M_v(\varphi) - tE)$ не зависит от выбора базиса v. Действительно, пусть v' — ещё один базис пространства V. По формуле замены матрицы оператора при изменении базисов получаем

$$\det(M_{v'}(\varphi) - tE) = \det(T_{v,v'}^{-1} M_v(\varphi) T_{v,v'} - tE) = \det(T_{v,v'}^{-1} (M_v(\varphi) - tE) T_{v,v'}) =$$
$$= \det(T_{v,v'})^{-1} \det(M_v(\varphi) - tE) \det(T_{v,v'}) = \det(M_v(\varphi) - tE).$$

Получившийся многочлен называется *характеристическим многочленом* оператора φ и обозначается $\chi(\varphi)$ или $\chi(\varphi, t)$, если мы хотим указать переменную.

Наряду с собственными векторами значениями операторов мы можем рассматривать собственные значения квадратных матриц. Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим оператор на арифметическом пространстве $\mathbb{F}^n$, заданный формулой $\varphi(\lambda) = A\lambda$. Его собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен назовём собственными векторами, собственными значениями и характеристическим значением матрицы A. Выбирая стандартный базис в $\mathbb{F}^n$, получаем, что характеристический многочлен матрицы A равен $\det(A - tE)$.

3.2 Сопряжённые операторы в евклидовых пространствах

Определение 3.1 *Пусть E — евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и φ и ψ — операторы на E. Мы будем говорить, что эти операторы сопряжённые, если $(\varphi(v), u) = (v, \psi(u))$ для любых $u, v \in E$.*

Сопряжённые операторы легко характеризовать на языке их матриц.

Лемма 3.2 *Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис евклидова пространства E. Операторы φ и ψ на пространстве E сопряжены тогда и только тогда, когда $M_e(\psi) = M_e(\varphi)^T$.*

Доказательство. Запишем

$$M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m,1} & \cdots & \varphi_{m,n} \end{pmatrix}, \quad M_e(\psi) = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{m,1} & \cdots & \psi_{m,n} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{i,j} e_i, \quad \psi(e_k) = \sum_{l=1}^{m} \psi_{l,k} e_l.$$

Предположим сначала, что операторы φ и ψ сопряжены. Получаем

$$\big(\varphi(e_j), e_k\big) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{i,j} (e_i, e_k) = \varphi_{k,j}.$$

С другой стороны,

$$\big(e_j, \psi(e_k)\big) = \sum_{l=1}^{m} \psi_{l,k} (e_j, e_l) = \psi_{j,k}$$

Так как $\big(\varphi(e_j), e_k\big) = \big(e_j, \psi(e_k)\big)$, то $\varphi_{k,j} = \psi_{j,k}$. Это означает, что $M_e(\psi) =$

$M_e(\varphi)^T$

Предположим теперь, что $M_e(\psi) = M_e(\varphi)^T$. Рассуждения выше, прочитанные в обратном порядке, означают, что

$$(\varphi(e_j), e_k) = (e_j, \psi(e_k)). \tag{8}$$

Возьмём теперь два произвольных вектора $v, u \in E$ и разложим их по базису

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \quad u = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k.$$

Отсюда, используя формулу (8) получаем

$$(\varphi(v), u) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi(e_j), \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k (\varphi(e_j), e_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k (e_j, \psi(e_k)) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \sum_{k=1}^{n} b_k \psi(e_k) \right) = (v, \psi(u)).$$

□

Оператор сопряжённый сам себе (это означает, что φ и φ — сопряжённые операторы) называется *самосопряжённым*. Согласно предыдущей лемме, самосопряжённые операторы и только они имеют симметрическую матрицу в любом ортонормированном базисе. Более того для того, чтобы оператор был самосопряжённым достаточно, чтобы он имел симметрическую матрицу в одном из ортонормированных базисов.

3.3 Сопряжённые операторы в эрмитовых пространствах

Пусть E — эрмитово пространство со скалярным произведением $(\cdot \mid \cdot)$ и φ и ψ — операторы на E. Мы будем говорить, что эти операторы *сопряжённые*, если $(\varphi(v)|u) = (v|\psi(u))$ для любых $u, v \in E$.

Мы не приводим доказательство следующей леммы, так как оно почти полностью совпадает с доказательством леммы 3.2. Надо лишь использовать свойства (Э2) и (Э2′) для выноса коэффициентов с первого и второго места произведения $(\cdot \mid \cdot)$ соответственно.

Лемма 3.3 *Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис эрмитова пространства E. Операторы φ и ψ на пространстве E сопряжены тогда и только тогда, когда $M_e(\psi) = \overline{M_e(\varphi)}^T$.*

Оператор на эрмитовом пространстве сопряжённый сам себе (это означает, что φ и φ — сопряжённые операторы) называется *самосопряжённым*.

3.4 Диагонализируемость самосопряжённого оператора

Сначала мы докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.4 *Пусть E — конечномерное ненулевое евклидово пространство и φ — самосопряжённый оператор на E. Тогда φ имеет хотя бы один собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $v = (v_1, \dots, v_n)$ — ортонормированный базис евклидова пространства E. По лемме 3.2 матрица $M_e(\varphi)$ симметрическая. Рассмотрим эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\cdot \mid \cdot)$ и оператор ψ на нём, заданный формулой $\psi(v) = M_e(\varphi)v$, где $v \in \mathbb{C}^n$ воспринимается как столбец высоты n. Матрица $M_e(\varphi)$ является матрицей оператора ψ в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$:

$$e_1 = (1,0,\dots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0), \ \dots, e_n = (0,\dots,0,1).$$

Матрица $M_e(\varphi)$ вещественная, поэтому

$$\overline{M_e(\varphi)}^{\,T} = M_e(\varphi)^T = M_e(\varphi).$$

По лемме 3.3 оператор ψ самосопряжённый. Как любой оператор на конечномерном ненулевом комплексном пространстве ψ имеет собственный вектор, скажем, v. Следовательно, $\psi(v) = \lambda v$ для соответствующего $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда по свойствам (Э2) и (Э2′) получаем

$$\lambda(v|v) = (\lambda v|v) = (\psi(v)|v) = (v|\psi(v)) = (v|\lambda v) = \bar{\lambda}(v|v).$$

Сокращая на ненулевое число $(v|v)$, получаем $\lambda = \bar{\lambda}$. Следовательно, λ — вещественное число.

Согласно нашим рассуждениям в § 3.1 мы получаем $\det(M_e(\varphi) - \lambda E) = 0$, откуда следует, что λ — собственное значение оператора φ, а, следовательно, существует и собственный вектор оператора φ (соответствующий этому собственному значению). □

Теорема 3.5 *Пусть E — конечномерное евклидово пространство и φ — самосопряжённый оператор на E. Тогда оператор φ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности E. В случае $\dim E = 0$ утверждение очевидно. Пусть теперь $\dim E > 0$. Тогда по лемме 3.4 существует собственный вектор v оператора φ. Запишем $\varphi(v) = \lambda v$ для соответствующего $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим $U = \langle v \rangle^{\perp}$. Мы утверждаем, что U инвариантно относительно φ. Действительно, пусть $u \in U$. Тогда

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v)) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v) = 0.$$

Следовательно, мы можем рассмотреть ограничение $\varphi|_U$. Мы получаем $E = \langle v \rangle \oplus U$. Этот факт может быть доказан также как часть (2) теоремы 2.5, если рассуждать о евклидовых вместо эрмитовых пространствах. По лемме 4.16 из [3] мы получаем

$$\dim E = \dim\langle v \rangle + \dim U = 1 + \dim U.$$

Отсюда $\dim U = \dim E - 1 < \dim E$. Следовательно, к ограничению $\varphi|_U$ применимо предположение индукции и этот оператор диагонализируем, скажем, в ортонормированном базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Тогда, как легко видеть, оператор φ диагонализируем в ортонормированном базисе $(e_1, \dots, e_n, v)$. □

4 Квадратичные формы

4.1 Определение

Сначала мы дадим определение квадратичной формы над произвольным полем, а затем сосредоточимся на случае, когда это поле имеет характеристику не равную двум.

Определение 4.1 *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле и* V *— векторное пространство над* $\mathbb{F}$. *Квадратичной формой на* V *называется отображение* $q: V \to \mathbb{F}$ *такое, что* $q(cv) = c^2 q(v)$ *для любых* $c \in \mathbb{F}$ *и* $v \in V$ *и отображение* $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{F}$, *заданное формулой* $(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$, *билинейное.*

Заметим, что $(u, v) = (v, u)$ вне зависимости от того, билинейная ли эта форма. Форму $(\cdot,\cdot)$ назовём *ассоциированной* с q.

Мы можем описать квадратичные формы на конечномерных векторных пространствах более явно.

Лемма 4.2 *Пусть* $(v_1, \dots, v_n)$ *— базис векторного пространства* V. *Квадратичные формы и только они определяются формулой*

$$q(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{i,j} x_i x_j \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \qquad (9)$$

для некоторых $a_{i,j} \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Проверим сначала, что отображение q, заданное таким образом, является квадратичной формой. Для произвольного $c \in \mathbb{F}$, получаем

$$q(c(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)) = q((cx_1)v_1 + \dots + (cx_n)v_n) = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(cx_i)(cx_j)$$

$$= c^2 \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}x_ix_j = c^2 q(x_1v_1 + \dots + x_nv_n).$$

Теперь вычислим отображение $(v,u) = q(v+u) - q(v) - q(u)$. Для $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ и $u = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$ Получаем

$$\begin{aligned}(v,u) &= q(u+v) - q(u) - q(v) = q((x_1+y_1)v_1 + \dots + (x_n+y_n)v_n) - \\ &-q(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) - q(y_1v_1 + \dots + y_nv_n) = \\ &= \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(x_i+y_i)(x_j+y_j) - \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}x_ix_j - \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}y_iy_j \qquad (10)\\ &= \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(x_ix_j + y_ix_j + x_iy_j + y_iy_j) - \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}x_ix_j - \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}y_iy_j \\ &= \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(y_ix_j + x_iy_j).\end{aligned}$$

Возьмём произвольный элемент $c \in \mathbb{F}$. Тогда получаем $cv = cx_1v_1 + \dots + cx_nv_n$ и

$$(cv,u) = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(y_icx_j + cx_iy_j) = c\sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(y_ix_j + x_iy_j) = c(v,u).$$

Теперь возьмём ещё один вектор $v' = cx'_1v_1 + \dots + cx'_nv_n$. Тогда $v + v' = (x_1 + x'_1)v_1 + \dots + (x_n + x'_n)v_n$. Отсюда получаем

$$(v+v',u) = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(y_i(x_j + x'_j) + (x_i + x'_i)y_j) =$$

$$= \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(y_ix_j + x_iy_j) + \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}(y_ix'_j + x'_iy_j) = (v,u) + (v',u).$$

Линейность по второму аргументу отображения $(\cdot,\cdot)$ следует из симметричности этого отображения.

Теперь пусть $q\colon V \to \mathbb{F}$ — квадратичная форма и $(\cdot,\cdot)$ — билинейная форма ассоциированная с q. Положим $a_{i,i} = q(v_i)$ и $a_{i,j} = (v_i, v_j)$ для $i < j$. Мы докажем индукцией по $k = 1, \dots, n$, что

$$q(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) = \sum_{1 \le i \le j \le k} a_{i,j} x_i x_j.$$

Базой индукции является случай $k = 1$. Получаем

$$q(x_1 v_1) = x_1^2 q(v_1) = x_1^2 a_{1,1} = a_{1,1} x_1^2 = \sum_{1 \le i \le j \le 1} a_{i,j} x_i x_j.$$

Теперь предположим, что $1 \le k < n$ и что доказываемая формула верна для k. Используя билинейность формы $(\cdot,\cdot)$ и предположение индукции, мы получаем

$$q(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1}) =$$

$$= (x_1 v_1 + \dots + x_k v_k, x_{k+1} v_{k+1}) + q(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) + q(x_{k+1} v_{k+1}) =$$

$$= \sum_{1 \le i \le k} x_i x_{k+1} (v_i, v_{k+1}) + \sum_{1 \le i \le j \le k} a_{i,j} x_i x_j + x_{k+1}^2 q(v_{k+1}) =$$

$$= \sum_{1 \le i \le k} a_{i,k+1} x_i x_{k+1} + \sum_{1 \le i \le j \le k} a_{i,j} x_i x_j + a_{k+1,k+1} x_{k+1}^2 = \sum_{1 \le i \le j \le k+1} a_{i,j} x_i x_j.$$

Требуемый результат получается при $k = n$. □

Заметим, что представление квадратичной формы q в виде (9) единственно. Действительно, сначала мы получаем

$$q(v_i) = q(0 v_1 + \dots + 0 v_{i-1} + 1 v_i + 0 v_{i+1} + \dots + 0 v_n) = a_{i,i}.$$

Теперь применим формулу (10) в случае, когда $i < j$, $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$, $x_i = 1$ и $y_1 = \dots = y_{j-1} = y_{j+1} = \dots = y_n = 0$, $y_j = 1$. Получаем

$$(v_i, v_j) = a_{i,j}(y_i x_j + x_i y_j) = a_{i,j}.$$

Отождествляя матрицы размера 1×1 с элементами поля, мы получаем

$$q(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = X^T A X, \tag{11}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для произвольной квадратной матрицы B с элементами из поля $\mathbb{F}$ отображение $q: V \to \mathbb{F}$, заданное формулой

$$q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = X^T B X,$$

является квадратичной формой. В этом можно убедиться непосредственными вычислениями аналогичными вычислениям доказательства леммы 4.2. С другой стороны, можно заметить, что

$$X^T B X = X^T A X,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} + b_{2,1} & b_{1,3} + b_{3,1} & \cdots & b_{1,n} + b_{n,1} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} + b_{3,2} & \cdots & b_{2,n} + b_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Отсюда и из леммы 4.2 следует, что q является квадратичной формой.

4.2 Представление с помощью симметрической матрицы

Предположим теперь, что $\mathbb{F}$ — поле характеристики не равной двум. В представлении (11) мы использовали верхнетреугольную матрицу A. Однако часто нам удобнее использовать симметрическую матрицу. В данном случае мы можем добиться такого представления следующим приёмом. Транспонируя равенство (11) и используя тот факт, что матрица размера 1×1 всегда симметрическая, получаем

$$q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)^T = (X^T A X)^T =$$

$$= X^T A^T (X^T)^T = X^T A^T X.$$

Теперь складывая это равенство с равенством (11), получаем

$$2q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = X^T A X + X^T A^T X = X^T (A + A^T) X.$$

Деля на 2 (что мы можем сделать в поле характеристики не равной 2), получаем

$$q(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=X^T\frac{A+A^T}{2}X.$$

Теперь замечаем, что

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T=\frac{A^T+(A^T)^T}{2}=\frac{A^T+A}{2}=\frac{A+A^T}{2}.$$

Следовательно, матрица $(A+A^T)/2$ симметрическая.

Лемма 4.3 *Пусть $(v_1,\dots,v_n)$ — базис векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$ характеристики не равной двум. Представление квадратичной формы $q\colon V\to\mathbb{F}$ в виде*

$$q(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=X^TAX,$$

с симметрической матрицей A существует и единственно.

Доказательство. Существование уже доказано непосредственно перед этой леммой. Поэтому докажем единственность. Запишем равенство из формулировки более подробно

$$q(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=\sum_{i,i=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{i,j}x_ix_j.$$

Отсюда получаем $q(v_i)=a_{i,i}$. Для $i<j$ получаем

$$(v_i,v_j)=q(v_i+v_j)-q(v_i)-q(v_j)=(a_{i,i}+a_{j,j}+2a_{i,j})-a_{i,i}-a_{j,j}=2a_{i,j}.$$

Так как 2 обратима в $\mathbb{F}$, то отсюда мы можем вычислить $a_{i,j}$. □

Мы обозначим матрицу A из этой леммы относящуюся к базису $v=(v_1,\dots,v_n)$ через q_v. Наша следующая цель — понять, как меняется эта матрица при замене базиса.

Лемма 4.4 *Пусть $v=(v_1,\dots,v_n)$ и $u=(u_1,\dots,u_n)$ — базисы векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$ характеристики не равной двум. Тогда*

$$q_v=(T_{u,v})^Tq_uT_{u,v}$$

(напоминаем, что $T_{u,v}$ — матрица перехода от базиса u к базису v).

Доказательство. Пусть w — произвольный вектор из V. Запишем его в обоих базисах

$$w=x_1v_1+\dots+x_nv_n,\qquad w=y_1u_1+\dots+y_nu_n.$$

Введём следующие обозначения для столбцов координат
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$
По определению матриц q_v и q_u выполнены равенства

$$q(w) = X^T q_v X, \tag{12}$$

$$q(w) = Y^T q_u Y, \tag{13}$$

С другой стороны, по формуле (9) из [3] получаем $Y = T_{u,v} X$. Подставляя Y в формулу (13), получаем

$$q(w) = (T_{u,v} X)^T q_u T_{u,v} X = X^T (T_{u,v})^T q_u T_{u,v} X.$$

Сравнивая получившееся выражение с формулой (12), замечая, что матрица $(T_{u,v})^T q_u T_{u,v}$ симметрическая, и пользуясь единственностью леммы 4.3, получаем требуемое равенство. □

4.3 Ортогональные матрицы

Квадратная матрица P над полем $\mathbb{F}$ называется *ортогональной* тогда и только тогда, когда $P^T P = E$. Напомним, что E обозначает единичную матрицу такого же размера как P.

Лемма 4.5 *(1) Если матрица P ортогональная, то $det\, P = 1$ или $det\, P = -1$.*

(2) Матрица P ортогональная тогда и только тогда, когда P обратима и $P^{-1} = P^T$.

(3) Матрица P ортогональная тогда и только тогда, когда $PP^T = E$.

Доказательство. (1) Получаем

$$1 = \det(P^T P) = \det(P^T) \det(P) = \det(P)^2.$$
Заметим, что уравнение $x^2 = 1$ имеет только два решения $x = 1$ и $x = -1$ над любым полем. Это следует из разложения $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Следовательно, $\det P = 1$ или $\det P = -1$.

(2) Если P ортогональная матрица, то согласно части (1) получаем $\det P \neq 0$. Поэтому матрица P обратима. Умножая равенство $P^T P = E$ справа на P^{-1}, получаем

$$P^{-1} = EP^{-1} = (P^T P) P^{-1} = P^T (PP^{-1}) = P^T E = P^T.$$

Наоборот, пусть P обратима и $P^{-1} = P^T$. По определению обратной матрицы $P^TP = P^{-1}P = E$.

(3) Пусть матрица P ортогональна. Согласно части (2) получаем $P^{-1} = P^T$. Отсюда $PP^T = PP^{-1} = E$. Пусть, наоборот, $PP^T = E$. Переписывая наши рассуждения частей (1) и (2) задом наперёд, получаем, что P обратима и $P^{-1} = P^T$. Поэтому $P^TP = P^{-1}P = E$. □

Заметим, что уравнение $PP^T = E$ эквивалентно тому, что строки $r_1, \dots, r_n$ матрицы P удовлетворяют соотношению $(r_i, r_j) = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера и $(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ — стандартное произведение

$$(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Аналогично равенство $P^TP = E$ эквивалентно тому, что столбцы $c_1, \dots, c_n$ матрицы P удовлетворяют соотношению $(c_i, c_j) = \delta_{i,j}$.

Нам потребуются ортогональные матрицы над полем вещественных чисел. В этом случае ортогональные матрицы можно описать, как матрицы перехода.

Лемма 4.6 *(1) Пусть $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ — два ортонормированных базиса евклидова пространства E. Тогда матрица перехода $T_{u,v}$ от базиса u к базису v ортогональная.*

(2) Пусть $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ — два базиса евклидова пространства E такие, что u ортонормированный и матрица перехода $T_{u,v}$ от базиса u к базису v ортогональная. Тогда v тоже ортонормированный.

Доказательство. (1) Запишем матрицу $T_{u,v}$ в виде

$$T_{u,v} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

При этом выполнено уравнение

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}u_i.$$

В силу ортонормированности базисов u и v получаем

$$\delta_{j,k} = (v_j, v_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}u_i, \sum_{l=1}^{n} a_{l,k}u_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{i,j}a_{l,k}(u_i, u_l) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{i,j}a_{l,k}\delta_{i,l} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k}$$

Это уравнение эквивалентно тому, что $(T_{u,v})^T T_{u,v} = E$. Следовательно, матрица $T_{u,v}$ ортогональная.

(2) Если прочитать цепочку равенств выше справа налево, то мы получим $\delta_{j,k} = (v_j, v_k)$, что означает ортонормированность базиса v. □

4.4 Канонический вид квадратичной формы в евклидовом пространстве

Теорема 4.7 *Пусть E — конечномерное евклидово пространство и $q: E \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Тогда существует такой ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ пространства E и вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что*

$$q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

Доказательство. Обозначим скалярное произведение на E через $(\cdot,\cdot)$. Выберем произвольный ортонормированный базис $v = (v_1, \dots, v_n)$ пространства E. Запишем матрицу квадратичной формы q в этом базисе в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $a_{i,j} = a_{j,i}$. Пусть φ — оператор на E с матрицей q_v. По лемме 3.5 оператор φ самосопряжённый. Мы утверждаем, что

$$(\varphi(u), u) = q(u) \tag{14}$$

для любого вектора $u \in E$. Действительно, по построению

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} v_i.$$

Используя ортонормированность базиса v, получаем $(\varphi(v_j), v_k) = a_{k,j}$. Пусть теперь $u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Тогда

$$(\varphi(u), u) = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \varphi(v_j), \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \right) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k (\varphi(v_j), v_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k a_{k,j} = q(u).$$

Этим равенство (14) доказано. По теореме 3.5 оператор φ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$. Пусть $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Согласно формуле (14) мы получаем

$$\begin{gathered} q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = (\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n), x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \\ = (x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n), x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \\ = (x_1 \lambda_1 e_1 + \dots + x_n \lambda_n e_n, x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2. \end{gathered}$$

Заметим, что мы получили

$$q_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Для доказательства единственности предположим, что существует другой ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_n)$ пространства E и вещественные числа $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, что

$$q(x_1 e'_1 + \dots + x_n e'_n) = \lambda'_1 x_1^2 + \dots + \lambda'_n x_n^2$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. В этом случае

$$q_{e'} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

По лемме 4.4 получаем $q_{e'} = (T_{e,e'})^T q_e T_{e,e'}$. Согласно части (1) леммы 4.6 матрица перехода $T_{e,e'}$ ортогональная. Следовательно, $q_{e'} = (T_{e,e'})^{-1} q_e T_{e,e'}$ и матрицы $q_{e'}$ и q_e сопряжены. Согласно единственности жордановой нормальной формы, эти матрицы имеют одинаковые с точностью до перестановки собственные значения, что и доказывает утверждение единственности этой теоремы. □

Конструкция первой части доказательства позволяет выписать формулы для координат. Пусть $v \in E$ и $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ и $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. Запишем координаты в столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

по формуле (9) из [3] получаем $X = T_{v,e}Y$. Отсюда

$$u = vX,\ u = eY \Rightarrow Y = (T_{v,e})^T X,\ q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \qquad (15)$$

Следствие 4.8 *Пусть E — конечномерное евклидово пространство и $q\colon E \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Тогда существует такой ортогональный базис $(f_1, \dots, f_n)$ пространства E и целые числа i и j, что $1 \le i \le j \le n$ и*

$$q(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) = x_1^2 + \cdots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \cdots - x_j^2$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Числа i и j определены однозначно.

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — такой ортонормированный базис пространства E, который требуется в теореме 4.7. Переставляя, если необходимо, элементы базиса, мы можем добиться того, что

$$\lambda_1, \dots, \lambda_i > 0, \quad \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_j < 0, \quad \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Положим

$$f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, f_i = \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}},\ f_{i+1} = \frac{e_{i+1}}{\sqrt{-\lambda_{i+1}}}, \dots, f_j = \frac{e_j}{\sqrt{-\lambda_j}},\ f_{j+1} = e_{j+1}, \dots, f_n = e_n.$$

Мы получаем

$$q(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) =$$

$$= q\left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1 + \cdots + \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}} e_i + \frac{x_{i+1}}{\sqrt{-\lambda_{i+1}}} e_{i+1} + \cdots + \frac{x_j}{\sqrt{-\lambda_j}} e_j + x_1 e_{j+1} + \cdots + x_n e_n\right)$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \cdots + \lambda_1 \left(\frac{x_i}{\sqrt{\lambda_\mathrm{i}}}\right)^2 + \lambda_{i+1} \left(\frac{x_{i+1}}{\sqrt{-\lambda_{i+1}}}\right)^2 + \cdots + \lambda_j \left(\frac{x_j}{\sqrt{-\lambda_j}}\right)^2$$

$$= x_1^2 + \cdots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \cdots - x_j^2.$$

Предположим теперь, что $(f_1', \dots, f_n')$ — ещё один ортогональный базис такой, что

$$q(x_1 f_1' + \cdots + x_n f_n') = x_1^2 + \cdots + x_{i'}^2 - x_{i'+1}^2 - \cdots - x_{j'}^2$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим соответствующий ортонормированный базис $(e_1', \dots, e_n')$, где $e_k' = f_k'/|f_k'|$. Мы получаем

$$q(x_1 e_1' + \cdots + x_n e_n') = q\left(\frac{x_1}{|f_1'|} f_1' + \cdots + \frac{x_n}{|f_n'|} f_n'\right)$$

$$= \frac{x_1^2}{|f_1'|^2} + \cdots + \frac{x_{i'}^2}{|f_{i'}'|^2} - \frac{x_{i'+1}^2}{|f_{i'+1}'|^2} - \cdots - \frac{x_{j'}^2}{|f_{j'}'|^2} + 0\, x_{j'+1}^2 + \cdots + 0\, x_n^2.$$

Из теоремы 4.7 следует, что последовательности чисел (длины n) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и

$$\frac{1}{|f_1'|^2}, \dots, \frac{1}{|f_{i'}'|^2}, -\frac{1}{|f_{i'+1}'|^2}, \dots, -\frac{1}{|f_{j'}'|^2}, 0, \dots, 0$$

получаются одна из другой перестановкой. Учитывая знаки, получаем, что это возможно только, если $i = i'$ и $j = j'$. □

4.5 Пример для $\mathbb{R}^n$

Пусть квадратичная форма q на $\mathbb{R}^3$ задана формулой

$$q(x_1, x_2, x_3) = 23\, {x_1}^2 + 20\, x_1 x_2 - 18\sqrt{3}\, x_1 x_3 - 4\, {x_2}^2 + 20\sqrt{3}\, x_2 x_3 + 5\, {x_3}^2.$$

Запишем её матрицу в стандартном базисе $v = (v_1, v_2, v_3)$, где

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$q_v = \begin{pmatrix} 23 & 10 & -9\sqrt{3} \\ 10 & -4 & 10\sqrt{3} \\ -9\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая оператор с такой матрицей в базисе v мы находим следующие собственные значения: $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = -24$, $\lambda_3 = 32$ и следующие собственные векторы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Записывая эти столбцы в одну матрицу, получаем

$$T_{v,e} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$(x_1, x_2, x_3) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3.$$

Тогда согласно формулам (15) получаем

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{6}x_3}{4} \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 + \sqrt{6}x_3}{4} \\ y_3 = \frac{-\sqrt{3}x_1 + x_3}{2}, \end{cases} \qquad q(x_1, x_2, x_3) = 16y_1^2 - 24y_2^2 + 32y_3^2.$$

Читатель может подставить y_1, y_2, y_3 из левой части в правую и проверить, что в действительности получается исходная формула для q.

5 Список литературы

1. Математика в экономике. Ч.1: Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование: Учебник для студ. экономич. спец. вузов / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2011.
2. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». В 3-х ч. Ч.1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование: учеб. пособие / под ред. В.А. Бабайцева и В.Б. Гисина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2013.
3. Щиголев В.В., Алгебра и геометрия 1, Учебное пособие по дисциплине «Алгебра и геометрия», Финансовый Университет при правительстве Российской Федерации, Москва, 2018.