1 Однородные дифференциальные уравнения

Эти уравнения имеют вид

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

где существует такое n, что

$$M(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n M(x,y), \quad M(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n N(x,y)$$

выполнено для любых x, y и α. В этом случае говорят, что M и N однородные функции степени n.

Пример: $(x^2 - xy)y' = y^2$. Выполним подстановку $y' = dy/dx$. Получаем

$$(x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0.$$

Здесь $M(x,y) = -y^2$ и $N(x,y) = x^2 - xy$. Проверим на однородность

$$M(\alpha x, \alpha y) = -(\alpha y)^2 = \alpha^2(-y^2) = \alpha^2 M(x,y),$$

$$N(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 - (\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2(x^2 - xy) = \alpha^2 N(x,y).$$

Следовательно, степень однородности 2.

Далее мы выполним замену $y = tx$. Здесь t — функция от x. По правилу Лейбница

$$dy = dt\, x + tdx.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$(x^2 - xtx)(dt\, x + tdx) - (tx)^2 dx = 0.$$

Сокращая на x^2, получаем

$$(1-t)(dt\, x + tdx) - t^2 dx = 0.$$

Раскрое скобки и сгруппируем слагаемые относительно dt и dx:

$$dt\, x(t-1) = (t - 2t^2)dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его

$$\frac{(t-1)dt}{t-2t^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{(t-1)dt}{t-2t^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\int \left(\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \ln|x|.$$

$$\frac{1}{2}\ln|2t-1| - \ln|t| + C_0 = \ln|x|.$$

Умножая на 2 и экспоненциируя, получаем

$$x^2 = C\left(\frac{2t-1}{t^2}\right).$$

Теперь можно вспомнить про то, что $y = tx$. Выразим отсюда $t = y/x$ и подставим. Получаем

$$x^2 = C\left(\frac{x^2(\frac{2y}{x} - 1)}{y^2}\right) = \frac{2xy - x^2}{y^2}.$$

В общем это уже ответ. Однако можно выразить

$$y = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - x^2 C}}{x}.$$

Решите однородные уравнения (проверьте на однородность и определите степень):

1. $xy' = x + 2y$.
2. $(x + y)y' + x = y$.
3. $x^2 y' + y^2 = 2xy$.
4. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.
5. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

2 Линейные уравнения первого порядка.

Такое уравнение имеет вид

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение с нулевой правой частью

$$y' + a(x)y = 0.$$

Оно с разделяющимися переменными. Его решение должно получиться в виде $y = Cf(x)$, где C — константа, а f — некоторая функция.

Теперь мы считаем, что C — это некоторая функция от x и подставляем $y = C(x)f(x)$ в исходное уравнение. Если мы всё сделали правильно, то получится уравнение вида $C' = g(x)$. Интегрируя, мы найдём C, а следовательно и y.

Пример: $y' + xy = x$.

Шаг 1: найдём замену. Для этого решим уравнение $y' + xy = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int xdx,$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C_0.$$

Экспоненциируя, получаем

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Шаг 2: решим исходное уравнение. Подставляем $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ в исходное уравнение

$$(Ce^{-\frac{x^2}{2}})' + xCe^{-\frac{x^2}{2}} = x,$$

$$C'e^{-\frac{x^2}{2}} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}} + xCe^{-\frac{x^2}{2}} = x,$$

$$C'e^{-\frac{x^2}{2}} = x,$$

$$C' = xe^{\frac{x^2}{2}},$$

$$C = \int xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \int e^{\frac{x^2}{2}}\,d\frac{x^2}{2} = e^{\frac{x^2}{2}} + D.$$

Отсюда

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} = (e^{\frac{x^2}{2}} + D)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + De^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Здесь D — константа.

Решите линейные уравнения первого порядка:

6. $xy' - 2y = 2x^4$.
7. $(2x+1)y' = 4x + 2y$.
8. $xy' = xy + e^x$.
9. $x^2y' + xy + 1 = 0$.
10. $y = x(y' - x\cos x)$.