Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Пусть у нас есть квадратичная форма. Например, $\Phi = 5x^2+30xy+5y^2$. Мы хотим выяснить, какая геометрическая фигура задаётся уравнением $\Phi = 0$. Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения и собственные векторы этой матрицы и запишем их в столбцы:

$$\lambda_1 = -10, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 20, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что эти векторы образуют ортогональный базис $\mathbb{R}^2$. Но не ортонормированный. Исправим это. Поделим первый вектор v_1 на его длину $\sqrt{2}$. Получаем

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Он останется собственным для значения -10. Аналогично поступим со вторым вектором;

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь u_1 и u_2 образуют ортонормированный базис. Если мы составим из них матрицу

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

то она получится ортогональной в следующем смысле:

$$P^T P = P P^T = E.$$

Теперь мы можем написать замену:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Не забывайте транспонировать матрицу P.

Теперь запишем ответ:

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \Phi = -10(x')^2 + 20(y')^2.$$

Подставьте x' и y' в Φ и получите исходную форму.

Приведите квадратичную форму к каноническому виду.

1. $\Phi = 10x^2 - 40xy + 10y^2$.
2. $\Phi = 19x^2 - 4xy + 16y^2$.
3. $\Phi = -17x^2 + 18xy + 7y^2$.
4. $\Phi = 25x^2 - 120xy + 90xz + 34y^2 + 24yz + 41z^2$.