ВикипедиЯ

Метод Крамера

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Ме́тод Крамера (правило Крамера) — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).[1]

Содержание

Описание метода

Для системы n линейных уравнений с n неизвестными (над произвольным полем)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

с определителем матрицы системы Δ, отличным от нуля, решение записывается в виде

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i-ый столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов).
В другой форме правило Крамера формулируется так: для любых коэффициентов c_1, c_2, …, c_n справедливо равенство:

$$(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n)\cdot\Delta=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n & 0 \end{vmatrix}$$

В этой форме метод Крамера справедлив без предположения, что Δ отличен от нуля, не нужно даже, чтобы коэффициенты системы были бы элементами целостного кольца (определитель системы может быть даже делителем нуля в кольце коэффициентов). Можно также считать, что либо наборы $b_1,b_2,\dots,b_n$ и $x_1,x_2,\dots,x_n$, либо набор $c_1,c_2,\dots,c_n$ состоят не из элементов кольца коэффициентов системы, а какого-нибудь модуля над этим кольцом. В этом виде формула Крамера используется, например, при доказательстве формулы для определителя Грама и Леммы Накаямы.

Пример

Система линейных уравнений с вещественными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

В определителях столбец коэффициентов при соответствующей неизвестной заменяется столбцом свободных членов системы.

Решение:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3=30\\ x_1+3x_2+2x_3=150\\ 2x_1+10x_2+9x_3=110 \end{cases}$$

Определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix}=5,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} 30 & 5 & 4\\ 150 & 3 & 2\\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix}=-760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$

Вычислительная сложность

Метод Крамера требует вычисления $n+1$ определителей размерности $n \times n$. При использовании метода Гаусса для вычисления определителей метод имеет сложность по элементарным операциям сложения-умножения порядка $O(n^4)$, что сложнее, чем метод Гаусса при прямом решении системы. Поэтому метод, с точки зрения затрат времени на вычисления, считался непрактичным. Однако в 2010 году было показано, что метод Крамера может быть реализован со сложностью $O(n^3)$, сравнимой со сложностью метода Гаусса[2].

Литература

- *Мальцев И. А.* Основы линейной алгебры. — Изд. 3-е, перераб., М.: «Наука», 1970. — 400 с.

Примечания

1. *Cramer, Gabriel.* Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques (http://www.europeana.eu/resolve/record/03486/E71FE3799CEC1F8E2B76962513829D2E36B63015) (фр.) 656–659. Geneva: Europeana (1750). Дата обращения 18 мая 2012.
2. *Ken Habgood and Itamar Arel.* 2010. Revisiting Cramer's rule for solving dense linear systems. In Proceedings of the 2010 Spring Simulation Multiconference (SpringSim '10)

См. также

- Метод Гаусса