Собственные значения матрицы

Для того, чтобы найти собственные значения квадратной матрицы A надо решить следующее уравнение относительно переменной λ:

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E — единичная матрица такого же размера как A. В матрице E стоят нули на всех местах, кроме диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол, где стоят единицы.

Пример: найдите собственные числа матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Сначала считаем матрицу:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

а затем решаем уравнение:

$$0 = |A - \lambda E| = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4.$$

Ответ: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$.

Найдите собственные значения следующих матриц:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -7 & 28 & 12 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -39+i & 100-60\,i \\ -11-7\,i & 39+2\,i \end{pmatrix}$.

После того, как найдены собственные значения можно переходить к нахождению собственных векторов. По определению — это такие векторы столбцы $v \neq 0$, что $Av = \lambda v$. Здесь λ — найденное ранее собственное значение. Удобно эту систему записать так $(A - \lambda E)v = 0$ и затем искать ненулевое решение.

Пример: найти собственные векторы для матрицы из первого примера. Берём первое собственное значение $\lambda_1 = -1$. Решаем систему

$$0 = (A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 3 & 2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Получаем фактически одно уравнение $x+y=0$. Берём одно решение $x=1$, $y=-1$. Все остальные решения ему пропорциональны: все собственные векторы для собственного значения имеют вид

$$v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Проверяем

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Верно: вектор умножился на $\lambda_1 = -1$.

Аналогично для значения $\lambda_2 = 4$, получаем

$$v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

Проверяем

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Верно: вектор умножился на $\lambda_2 = 4$.

5. Найдите собственные векторы в задачах 1–4.

Мы разберём ещё примеры, когда собственные векторы для одного собственного значения зависят от более чем одного параметра.

Пример: найдите собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$\begin{pmatrix} 23 & -12 & 6 \\ 21 & -10 & 6 \\ -42 & 24 & -10 \end{pmatrix}$$

Находим собственные числа по ранее разобранной схеме. Получаем $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$. Для λ_1 решаем как раньше. Получаем ответ

$$v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Решаем уравнение

$$0 = (A - \lambda E)v = \begin{pmatrix} 21 & -12 & 6 \\ 21 & -12 & 6 \\ -42 & 24 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Получаем единственное уравнение $7x - 4y + 2z = 0$. Это однородное уравнение. Его решения образуют линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$. Что бы получить базис выразим

$$x = \frac{4}{7}y - \frac{2}{7}z.$$

Подставляя сначала $y = 7, z = 0$, а затем $y = 0, z = 7$, получаем ответ

$$v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц.

6. $\begin{pmatrix} 44 & -9 & 24 \\ 90 & -19 & 48 \\ -45 & 9 & -25 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 29 & -4 & 23 \\ -14 & 3 & -9 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -12 & -9 & -12 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$