# 1 Матрица перехода между базисами

Непосредственно используя определение, найдите матрицу перехода от базиса $(v_1, v_2)$ к базису $(u_1, u_2)$, если

1. $v_1 = (1, 3), v_2 = (-2, 1)$ и $u_1 = (4, 5), u_2 = (-3, 5)$.

2. $v_1 = (-2, 3), v_2 = (3, 1)$ и $u_1 = (-5, 2), u_2 = (7, 6)$.

Выполните проверку.

Непосредственное использование определения — не самый удобный способ. Легче решать матричные уравнения. Приведём пример: *найдите матрицу перехода от базиса $(v_1, v_2)$ к базису $(u_1, u_2)$, если $v_1 = (3, 2), v_2 = (-1, 3)$ и $u_1 = (1, 8), u_2 = (-4, 1)$.* Рассмотрим третий базис $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Нарисуем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(v_1, v_2) \arrow[rr, "X"] & & (u_1, u_2) \\
& (e_1, e_2) \arrow[ul, "\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}"'] \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}"] &
\end{tikzcd}$$

Умножая матрицы по стрелочкам, получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решаем её и получаем

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем: читаем первый столбец $u_1 = v_1 + 2v_2$ — это верно. Читаем второй столбец $u_2 = -v_1 + v_2$ — это тоже верно.

Найдите матрицу перехода от базиса $(v_1, v_2, v_3)$ к базису $(u_1, u_2, u_3)$, если

3. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, -1, 2), v_3 = (-1, 1, 1)$ и $u_1 = (5, 0, 4), u_2 = (-1, 4, 5), u_3 = (-2, 6, 5)$.

4. $v_1 = (-1, 2, 3), v_2 = (1, -3, 1), v_3 = (2, 4, 1)$ и $u_1 = (-1, -8, 4), u_2 = (-6, -3, 0), u_3 = (2, -5, -2)$.

# 2 Матрицы линейных отображений

Вычислите матрицы отображений (базисы в угловых скобках)

5. $\varphi : \langle 1, x, x^2 \rangle \to \langle 1, x, x^2 \rangle$, где $\varphi(f) = f - 2(x + 1)f'$.

6. $\varphi : \langle 1, x + 1, (x + 1)^2 \rangle \to \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$, где $\varphi(f) = (x - 1)f - f' + f''$.

7. $\varphi : \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle \to \langle 1, x - 2, (x - 2)^2 \rangle$, где $\varphi(f) = f' - (x - 2)f'' + (x^2 - x)f'''$.

8. $\varphi : \langle 1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3 \rangle \to \langle 1, x + 2, (x + 2)^2, (x + 2)^3 \rangle$, где $\varphi(f) = f + (x + 2)f' - (x^2 + 1)f''$.

# 3 Формула преобразования матрицы оператора в новом базисе

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор (преобразование) и $A$ — матрица этого оператора в базисе $v = (v_1, \ldots, v_n)$ пространства $V$. Пусть $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — ещё один базис пространства $V$ и $S$ — матрица перехода от $v$ к $u$. Тогда матрица оператора $\varphi$ в базисе $u$ равна

$$S^{-1}AS.$$

Задачи.

9. Матрица оператора в базисе $(v_1, v_2)$, где $v_1 = (4, 1), v_2 = (1, -2)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислите чему равна матрица этого оператора в базисе $(u_1, u_2)$, где $u_1 = (5, -1), u_2 = (7, 4)$. Проверьте результат.

10. Матрица оператора в базисе $(v_1, v_2)$, где $v_1 = (-2, 1), v_2 = (3, -2)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите чему равна матрица этого оператора в базисе $(u_1, u_2)$, где $u_1 = (-1, 0), u_2 = (7, -5)$. Проверьте результат.

11. Матрица оператора в базисе $(v_1, v_2, v_3)$, где $v_1 = (1, 3, 2), v_2 = (2, 1, -2), v_3 = (-1, 1, 2)$, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите чему равна матрица этого оператора в базисе $(u_1, u_2, u_3)$, где $u_1 = (2, 5, 2), u_2 = (-2, 3, 6), u_3 = (6, 4, -4)$. Проверьте результат.