Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Пусть у нас есть квадратичная форма. Например, $\Phi = 5x^2+30xy+5y^2$. Мы хотим выяснить, какая геометрическая фигура задаётся уравнением $\Phi = 0$. Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения и собственные векторы этой матрицы и запишем их в столбцы:

$$\lambda_1 = -10, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 20, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что эти векторы образуют ортогональный базис $\mathbb{R}^2$. Но не ортонормированный. Исправим это. Поделим первый вектор v_1 на его длину $\sqrt{2}$. Получаем

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Он останется собственным для значения -10. Аналогично поступим со вторым вектором;

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь u_1 и u_2 образуют ортонормированный базис. Если мы составим из них матрицу

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

то она получится ортогональной в следующем смысле:

$$P^T P = PP^T = E.$$

Теперь мы можем написать замену:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Не забывайте транспонировать матрицу P.

Теперь запишем ответ:

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \Phi = -10(x')^2 + 20(y')^2.$$

Подставьте x' и y' в Φ и получите исходную форму.

Приведите квадратичную форму к каноническому виду.

1. $\Phi = 10x^2 - 40xy + 10y^2$.

2. $\Phi = 19x^2 - 4xy + 16y^2$.

3. $\Phi = -17x^2 + 18xy + 7y^2$.

4. $\Phi = 25x^2 - 120xy + 90xz + 34y^2 + 24yz + 41z^2$.

Приведите кривую $5x^2 + 30xy + 5y^2 - 50x - 30y + 5 = 0$ к каноническому виду преобразованием движения. Сначала, выделим квадратичную форму $\Phi = 5x^2 + 30xy + 5y^2$. С ней мы уже имели дело. Поэтому применим полученную замену:

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \Phi = -10(x')^2 + 20(y')^2.$$

Выразим отсюда x и y:

$$x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{y'-x'}{\sqrt{2}}.$$

Теперь запишем исходное уравнение

$$5x^2 + 30xy + 5y^2 - 50x - 30y + 5 = -10(x')^2 + 20(y')^2 - 50x - 30y + 5 =$$
$$= -10(x')^2 + 20(y')^2 - 50\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - 30\left(\frac{y'-x'}{\sqrt{2}}\right) + 5 = -10(x')^2 + 20(y')^2 - 10\sqrt{2}x' - 40\sqrt{2}y' + 5 =$$
$$= -10((x')^2 + \sqrt{2}x') + 20((y')^2 - 2\sqrt{2}y') + 5 =$$
$$= -10\left((x')^2 + 2\cdot x'\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{2} + 20((y')^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot y' + 2) - 20\cdot 2 + 5 =$$
$$= -10\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 20(y' - \sqrt{2})^2 - 30.$$

Таким образом полагая

$$x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x-y+1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y' - \sqrt{2} = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}},$$

получаем уравнение

$$-10(x'')^2 + 20(y'')^2 = 30.$$

Это гипербола.

Приведите кривые к каноническому виду преобразованием движения:

6. $10\,x^2 - 40\,xy + 10\,y^2 - 70\,x + 50\,y + 15 = 0$.

7. $19\,x^2 - 4\,xy + 16\,y^2 + 14\,x - 52\,y + 3 = 0$.

8. $-17\,x^2 + 18\,xy + 7\,y^2 - 38\,x - 34\,y + 11 = 0$.

9. $25\,x^2 + 34\,y^2 + 41\,z^2 - 120\,xy + 90\,xz + 24\,yz - 50\,x - 32\,y - 26\,z + 6 = 0$.