1 Матрица перехода между базисами

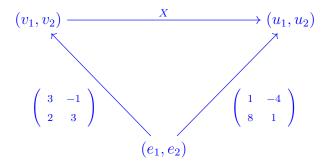
Непосредственно используя определение, найдите матрицу перехода от базиса (v_1, v_2) к базису (u_1, u_2) , если

1.
$$v_1 = (1,3), v_2 = (-2,1)$$
 и $u_1 = (4,5), u_2 = (-3,5)$.

2.
$$v_1 = (-2, 3), v_2 = (3, 1)$$
 и $u_1 = (-5, 2), u_2 = (7, 6)$.

Выполните проверку.

Непосредственное использование определения — не самый удобный способ. Легче решать матричные уравнения. Приведём пример: найдите матрицу перехода от базиса (v_1, v_2) к базису (u_1, u_2) , если $v_1 = (3, 2)$, $v_2 = (-1, 3)$ и $u_1 = (1, 8)$, $u_2 = (-4, 1)$. Рассмотрим третий базис $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Нарисуем диаграмму



Умножая матрицы по стрелочкам, получаем матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{array}\right) X = \left(\begin{array}{cc} 1 & -4 \\ 8 & 1 \end{array}\right).$$

Решаем её и получаем

$$X = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right).$$

Проверяем: читаем первый столбец $u_1=v_1+2v_2$ — это верно. Читаем второй столбец $u_2=-v_1+v_2$ — это тоже верно.

Найдите матрицу перехода от базиса (v_1, v_2, v_3) к базису (u_1, u_2, u_3) , если

3.
$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, -1, 2), v_3 = (-1, 1, 1)$$
 if $u_1 = (5, 0, 4), u_2 = (-1, 4, 5), u_3 = (-2, 6, 5)$.

4.
$$v_1 = (-1, 2, 3), v_2 = (1, -3, 1), v_3 = (2, 4, 1)$$
 и $u_1 = (-1, -8, 4), u_2 = (-6, -3, 0), u_3 = (2, -5, -2).$

2 Матрицы линейных отображений

Вычислите матрицы отображений (базисы в угловых скобках)

5.
$$\varphi: \langle 1, x, x^2 \rangle \to \langle 1, x, x^2 \rangle$$
, где $\varphi(f) = f - 2(x+1)f'$.

6.
$$\varphi: \langle 1, x+1, (x+1)^2 \rangle \to \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$$
, где $\varphi(f) = (x-1)f - f' + f''$.

7.
$$\varphi:\langle 1,x,x^2,x^3\rangle \to \langle 1,x-2,(x-2)^2\rangle,$$
 где $\varphi(f)=f'-(x-2)f''+(x^2-x)f'''.$

8.
$$\varphi:\langle 1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3\rangle \to \langle 1,x+2,(x+2)^2,(x+2)^3\rangle,$$
 где $\varphi(f)=f+(x+2)f'-(x^2+1)f''.$

3 Формула преобразования матрицы оператора в новом базисе

Пусть $\varphi:V\to V$ — линейный оператор (преобразование) и A — матрица этого оператора в базисе $v=(v_1,\ldots,v_n)$ пространства V. Пусть $u=(u_1,\ldots,u_n)$ — ещё один базис пространства V и S — матрица перехода от v к u. Тогда матрица оператора φ в базисе u равна

$$S^{-1}AS$$
.

Задачи.

9. Матрица оператора в базисе (v_1, v_2) , где $v_1 = (4, 1), v_2 = (1, -2)$, равна

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{array}\right).$$

Вычислите чему равна матрица этого оператора в базисе (u_1, u_2) , где $u_1 = (5, -1), u_2 = (7, 4)$. Проверьте результат.

10. Матрица оператора в базисе (v_1, v_2) , где $v_1 = (-2, 1), v_2 = (3, -2)$, равна

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{array}\right).$$

Вычислите чему равна матрица этого оператора в базисе (u_1, u_2) , где $u_1 = (-1, 0), u_2 = (7, -5)$. Проверьте результат.

11. Матрица оператора в базисе (v_1, v_2, v_3) , где $v_1 = (1, 3, 2), v_2 = (2, 1, -2), v_3 = (-1, 1, 2),$ равна

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычислите чему равна матрица этого оператора в базисе (u_1, u_2, u_3) , где $u_1 = (2, 5, 2), u_2 = (-2, 3, 6), u_3 = (6, 4, -4)$. Проверьте результат.