结构力学

Structural Mechanics

MET301

2019年秋季学期

中山大学 海洋工程与技术学院

结构力学 学习内容

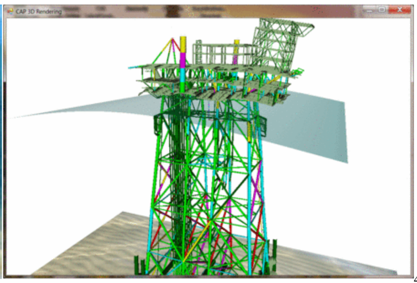
学习内容

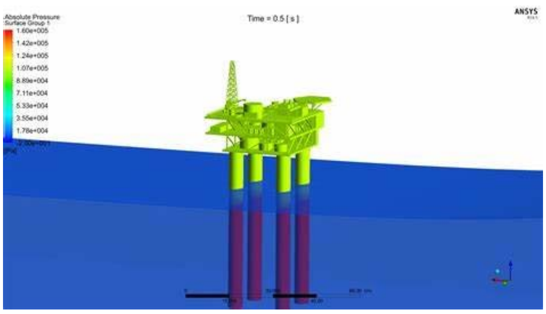
- **6.1 海洋工程中的典型结构动力问题**
- **6.2 结构动力分析基础**
- **6.3 单自由度体系的自由振动**
- **6.4 单自由度体系的强迫振动**
- **6.5 梁的横向弯曲振动分析**
- **6.6 工程应用：悬跨海底管道振动分析**

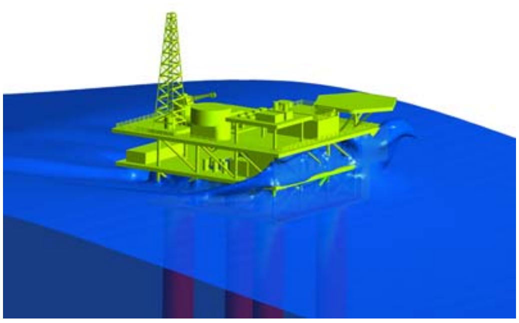
学习要求

- 了解结构动力计算的特点，能够判断动力计算自由度；
- 掌握单体系振动微分方程的建立方法。
- 能够正确计算单自由度体系的固有频率和周期。
- 掌握单自由度体系在不同的动荷载作用下强迫振动
- 的分析方法以及动力特性。
- 理解柔度法和刚度法建立振动微分方程的思路。
- 了解计算频率的几种近似法。
- 了解海洋工程结构动力分析的工程应用

§6.1 海洋工程中的典型结构动力问题





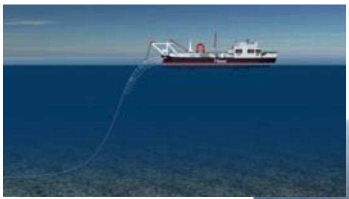


第六章 结构动力分析

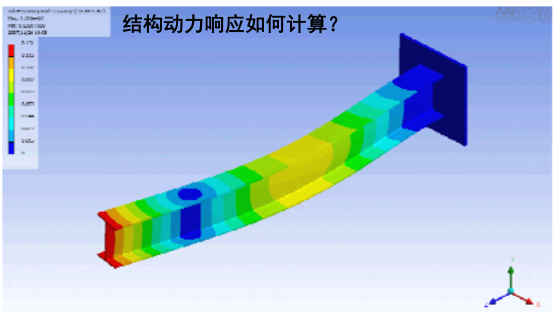
第六章 结构动力分析

8

第六章 结构动力分析



结构自自振频率及共振



§6.2 结构动力分析基础

结构动力分析的特点

1) 特点：静力荷载与动力荷载的特点及其效应。

静力荷载是指其大小、方向和作用位置不随时间而变化的荷载。这类荷载**对结构产生的惯性力可以忽略不计**，由它所引起的内力和变形都是确定的。

动力荷载是指其大小、方向和作用位置随时间而变化的荷载。这类荷载**对结构产生的惯性力不能忽略**，因动力荷载将使结构产生相当大的加速度，由它所引起的内力和变形都是时间的函数。

与静力计算的对比：两者都是建立平衡方程，但动力计算，利用动静法，建立的是形式上的平衡方程。力系中包含了惯性力，考虑的是瞬间平衡，荷载、内力都是时间的函数。建立的**平衡方程是微分方程**。

结构动力分析的内容

结构动力学就是研究结构系统在激励力作用下产生的响应规律的科学，研究激励力、结构和响应三者关系的科学。

现代结构动力学主要研究以下三个方面的内容

第一类问题：**响应分析（结构动力计算）**

输入（动力荷载） → 结构（系统） → 输出（动力反应）

已知结构的物理特性，激励力的特性，求响应的变化规律，称**响应预估，或响应分析、振动分析**

第二类问题：**参数（或称系统）识别**

输入（动力荷载） → 结构（系统） ← 输出（动力反应）

激励力特性已知，响应特性也可观测到，求结构特性，即求系统参数或求系统的数学模型，称为**参数识别或系统辩识**。也称为**系统设计**。即：在外激励力作用下，要求响应控制在一定的范围，对系统进行设计。

第三类问题：**荷载识别**。

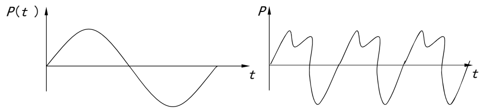
输入（动力荷载） ← 结构（系统） ← 输出（动力反应）

响应特性和结构系统特性已知，求激励力，称为**载荷识别**，**振动环境预测**

前一个问题为正问题，后二个为反问题

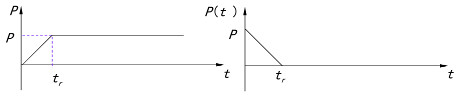
动力荷载分类 按起变化规律及其作用特点可分为：

1）周期荷载：随时间作周期性变化。（转动电机的偏心力）

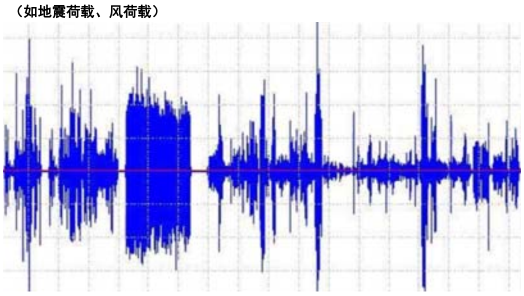


简谐荷载（按正余弦规律变化） 一般周期荷载

2）冲击荷载：短时内剧增或剧减。（如爆炸荷载）



3）随机荷载：（非确定性荷载）荷载在将来任一时刻的数值无法事先确定。（如地震荷载、风荷载）



动力计算中体系的自由度

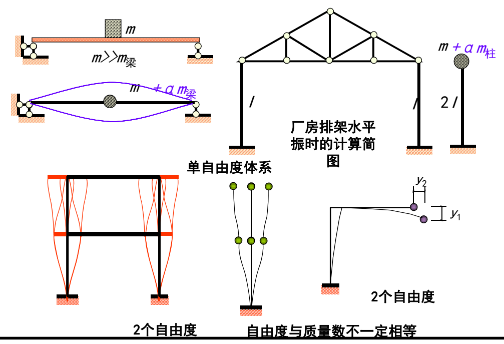
确定体系上全部质量位置所需独立参数的个数称为体系的振动自由度。

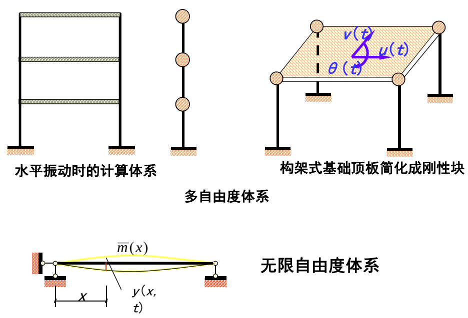
实际结构的质量都是连续分布的，严格地说来都是无限自由度体系。

计算困难，常作简化如下：

集中质量法

把连续分布的质量集中为几个质点，将一个无限自由度的问题简化成有限自由度问题。

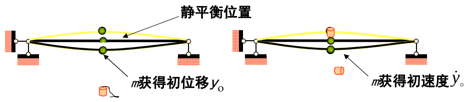




§6.3 单自由度体系的自由振动

自由振动：体系在振动过程中没有动荷载的作用。

自由振动产生原因：体系在初始时刻（t=0）受到外界的干扰。



研究单自由度体系的自由振动重要性在于：

1) 它代表了许多实际工程问题，如水塔、单层厂房等。

2) 它是分析多自由度体系的基础，包含了许多基本概念。

自由振动反映了体系的固有动力特性。

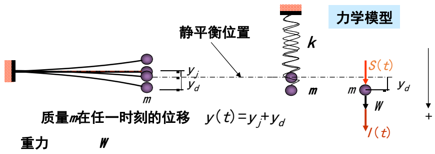
要解决的问题包括：

建立运动方程、计算自振频率、周期和阻尼………

1、运动微分方程的建立

方法：达朗伯尔原理　应用条件：微幅振动（线性微分方程）

1)刚度法：研究作用于被隔离的质量上的力，建立平衡方程。



质量m在任一时刻的位移　$y(t)=y_j+y_d$

重力　W

弹性力　$S(t)=-ky(t)=-k(y_j+y_d)$　恒与位移反向

惯性力　$I(t)=-m\ddot{y}(t)=-m(\ddot{y}_j+\ddot{y}_d)$

$$m(\ddot{y}_j+\ddot{y}_d)+k(y_j+y_d)=W \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$m(\ddot{y}_j+\ddot{y}_d)+k(y_j+y_d)=W \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

其中　$ky_j=W$　　$\ddot{y}_j=0$　　上式可以简化为

$$m\ddot{y}_d+ky_d=0$$

或　$m\ddot{y}+ky=0$　……………………………(b)

2)柔度法：研究结构上质点的位移，建立位移协调方程。

$$y(t)=I(t)\delta=-m\ddot{y}(t)\delta \quad \cdots\cdots\cdots(c)$$

$$m\ddot{y}(t)\delta+y=0$$

$\because \delta=\frac{1}{k}$　可得与（b）相同的方程

$$m\ddot{y}+ky=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

自由振动微分方程的解

改写为　$\ddot{y}+\frac{k}{m}y=0$　➡　$\ddot{y}+\omega^2 y=0$

其中　$\omega^2=\frac{k}{m}$

它是二阶线性齐次微分方程，其一般解为：

$$y(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

积分常数C_1，C_2由初始条件确定

设　$t=0$　时　$\begin{cases} y(0)=y_0 \\ \dot{y}(0)=v_0 \end{cases}$　➡　$\begin{cases} C_2=y_0 \\ C_1=\frac{v_0}{\omega} \end{cases}$

（d）式可以写成

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

由上式可知，位移是由初位移y_0引起的余弦运动和由初速度v_0引起的正弦运动的合成.

为了便于研究合成运动,

令 $y_0 = A\sin\alpha,\quad \dfrac{v_0}{\omega} = A\cos\alpha$

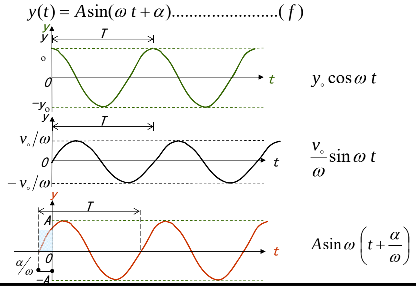
(e)式改写成 $y(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$......................$(f)$

它表示合成运动仍是一个简谐运动。其中A和α可由下式确定

$$\left.\begin{aligned} &\text{振幅} \quad A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ &\text{相位角} \quad \alpha = tg^{-1}\frac{y_0\omega}{v_0} \end{aligned}\right\}\text{..............................}(g)$$

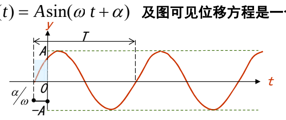
$$y(t) = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\text{................}(e)$$

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha)\text{.......................}(f)$$



3、结构的自振周期和频率

由式 $y(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ 及图可见位移方程是一个周期函数。



周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, 工程频率 $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ (Hz),

圆频率 $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

计算频率和周期的几种形式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{st}}{g}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{W\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}}$$

其中：

δ——是沿质点振动方向的结构柔度系数，它表示在质点上沿振动方向加单位荷载使质点沿振动方向所产生的位移。

k——使质点沿振动方向发生单位位移时，须在质点上沿振动方向施加的力。

$\Delta_{st}=W\delta$——在质点上沿振动方向施加数值为W的荷载时质点沿振动方向所产生的位移。

计算时可根据体系的具体情况，视 δ、 k、 Δ_{st} 三参数中哪一个最便于计算来选用。

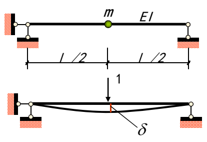
一些重要性质：

（1）自振周期与且只与结构的质量和结构的刚度有关，与外界的干扰因素无关。干扰力只影响振幅。

（2）自振周期与质量的平方根成正比，质量越大，周期越大（频率越小）；自振周期与刚度的平方根成反比，刚度越大，周期越小（频率越大）；要改变结构的自振周期，只有从改变结构的质量或刚度着手。

（3）两个外形相似的结构，如果周期相差悬殊，则动力性能相差很大。反之，两个外形看来并不相同的结构，如果其自振周期相近，则在动荷载作用下的动力性能基本一致，是结构动力特性的重要数量标志。

例：计算图示结构的频率和周期。



$$\delta=\frac{l^3}{48EI}\quad \omega=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{48EI}}$$

4、简谐自由振动的特性

由式 $y(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$

可得，加速度为：$\ddot{y}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$

惯性力为：$I(t) = -m\ddot{y}(t) = mA\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$

在无阻尼自由振动中，位移、加速度和惯性力都按正弦规律变化，且作相位相同的同步运动，即它们在同一时刻均达极值，而且惯性力的方向与位移的方向一致。

它们的幅值产生于 $\sin(\omega t + \alpha) = 1$ 时，其值分别为：

$$y^{\circ} = A \qquad \ddot{y}^{\circ} = -A\omega^2 \qquad I^{\circ} = mA\omega^2$$

既然在运动的任一瞬时质体都处于平衡状态，在幅值出现时间也一样，于是可在幅值处建立运动方程，此时方程中将不含时间 t，结果把微分方程转化为代数方程了，使计算得以简化。

5、阻尼对振动的影响

1）阻尼的存在

实验证明，振动中的结构，不仅产生与变形成比例的弹性内力，还产生非弹性的内力，非弹性力起阻尼作用。在不考虑阻尼的情况下所得出的某些结论也反应了结构的振动规律，如：

忽略阻尼的振动规律	考虑阻尼的振动规律
结构的自振频率是结构的固有特性，与外因无关。	
简谐荷载作用下有可能出现共振。	
自由振动的振幅永不衰减。	自由振动的振幅逐渐衰减。
共振时的振幅趋于无穷大。	共振时的振幅较大但为有限值。

事实上，由于非弹性力的存在，自由振动会衰减直到停止；共振时振幅也不会无限增大，而是一个有限值。非弹性力起着减小振幅的作用，使振动衰减，因此，为了进一步了解结构的振动规律，就要研究阻尼。

阻尼对自振频率的影响.

$$y = e^{-\xi\omega t} a\sin(\omega_r t + \alpha)$$

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \xi\omega y_0)^2}{\omega_r^2}}$$

$$tg\alpha = \frac{y_0\omega_r}{v_0 + \xi\omega y_0}$$

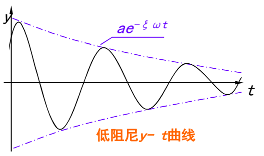
$$\omega_r = \omega\sqrt{1-\xi^2} < \omega, \quad 随\xi\uparrow而\downarrow$$

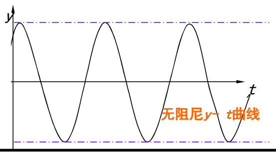
当 $\xi<0.2$，

则存在 $0.96<\omega_r/\omega<1$。

在工程结构问题中，

$0.01<\xi<0.1$，可近似取：$\omega_r = \omega, \quad T_r = T$





②阻尼对振幅的影响.

振幅 $ae^{-\xi\omega t}$ 随时间衰减，相邻两个振幅的比

$$\frac{y_{k+1}}{y_k}=e^{-\xi\omega T}=\text{常数}$$ 振幅按等比级数递减.

经过一个周期后，相邻两振幅 y_k 和 y_{k+1} 的比值的对数为：

$$\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}=\ln e^{\xi\omega T}=\xi\omega T=\xi\omega\frac{2\pi}{\omega_r}$$ 称为振幅的对数递减率.

$$\text{如}\,\xi<0.2\ \text{则}\ \frac{\omega_r}{\omega}\approx1,\quad\therefore\xi=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_r}{\omega}\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}$$

设 y_k 和 y_{k+n} 是相隔 n 个周期的两个振幅则：

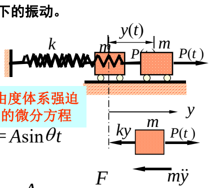
$$\xi=\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}}$$

§ 6.4 单自由度体系的受迫振动

受迫振动（强迫振动）：结构在动力荷载作用下的振动。

弹性力 $-ky$、惯性力 $-m\ddot{y}$

和荷载 $P(t)$ 之间的平衡方程为：



$$m\ddot{y}+ky=P(t)\cdots\cdots(a)$$

单自由度体系强迫振动的微分方程

1、简谐荷载： $$\ddot{y}+\omega^2y=\frac{P(t)}{m}$$

$$\ddot{y}+\omega^2y=\frac{F}{m}\sin\theta t$$

特解： $y=A\sin\theta t$

$$-\theta^2A\sin\theta t+\omega^2A\sin\theta t=\frac{F}{m}\sin\theta t$$

$$(-\theta^2+\omega^2)A\sin\theta t=\frac{F}{m}\sin\theta t$$

$$A=\frac{F}{m(-\theta^2+\omega^2)}$$

$$y=\frac{F}{m\omega^2(1-\theta^2/\omega^2)}\sin\theta t=y_{st}\frac{1}{(1-\theta^2\ \omega^2)}\sin\theta t\qquad y_{st}=\frac{F}{m\omega^2}=F\delta$$

最大静位移 y_{st}（是把荷载幅值当作静荷载作用时结构所产生的位移）。

特解可写为： $$y=y_{st}\frac{1}{1-\theta^2/\omega^2}\sin\theta t$$

通解可写为： $$y=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t+y_{st}\frac{1}{1-\theta^2/\omega^2}\sin\theta t$$

设 t=0时的初始位移和初始速度均为零，则：

$$C_1=-y_{st}\frac{\theta/\omega}{1-\theta^2/\omega^2},\quad C_2=0$$

$$y=y_{st}\frac{1}{1-\theta^2/\omega^2}(\sin\theta t-\frac{\theta}{\omega}\sin\omega t)$$

按自振频率振动

按荷载频率振动

过渡阶段：振动开始两种振动同时存在的阶段；

平稳阶段：后来只按荷载频率振动的阶段。（由于阻尼的存在）

第六章 结构动力分析

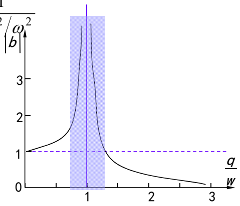
平稳阶段：$y=y_{st}\dfrac{1}{1-\theta^2/\omega^2}\sin\theta t$

最大动位移（振幅）为：$[y]_{\max}=y_{st}\dfrac{1}{1-\theta^2/\omega^2}$

动力系数 β 为：$\beta=\dfrac{[y]_{\max}}{y_{st}}=\dfrac{1}{1-\theta^2/\omega^2}$

重要的特性：

- 当 $\theta/\omega\to0$时，$\beta\to1$，荷载变化得很慢，可当作静荷载处理。
- 当$0<\theta/\omega<1$时，$\beta>1$，并且随θ/ω的增大而增大。
- 当 $\theta/\omega\to1$时，$\beta\to\infty$。即当荷载频率接近于自振频率时，振幅会无限增大。称为“共振”。通常把$0.75<\theta/\omega<1.25$称为共振区。



- 当 $\theta/\omega>1$时，β的绝对值随θ/ω的增大而减小。当θ很大时，荷载变化很快，结构来不及反应。

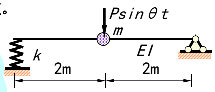
37

第六章 结构动力分析

当动荷载作用在单自由度体系的质点上时，由于体系上各截面的内力、位移都与质点处的位移成正比，故各截面的最大动内力和最大动位移可采用统一的动力系数，只需将干扰力幅值乘以动力系数按静力方法来计算即可。

例11：已知m=300kg，EI=90×10^{5}N.m^2，k=48EI/l^3，P=20kN，θ=80s^{-1}

求梁中点的位移幅值及最大动力弯矩。



解：1) 求 ω $\delta=\delta_1+\delta_2=\dfrac{l^3}{48\ldots}+\ldots$

$\delta=\dfrac{l^3}{48EI}+\dfrac{l^3}{192EI}=\dfrac{5l^3}{192\ldots}$

$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{m\delta}}=\sqrt{\dfrac{192EI}{5ml^3}}=\ldots$

如何求最大位移和最大弯矩？

2) 求 β

$$\beta=\frac{1}{1-\theta^2/\omega^2}=1.552$$

3) 求$y_{\max}$，$M_{\max}$

$$y_{\max}=\beta P\delta=\beta P\frac{5l^3}{192EI}=\frac{1.552\times20\times10^3\times5\times4^3}{192\times90\times10^5}5.75\times10^{-3}m$$

$$M_{\max}=\frac{1}{4}(\beta P)l=\frac{1}{4}\times1.552\times20\times4=31.04kN.m$$

38

第六章 结构动力分析

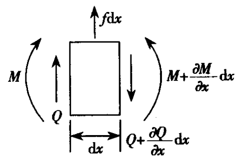
§6.5 梁的横向弯曲振动分析

- 讨论梁在主平面内的平面弯曲振动。
- 这种振动只有当梁存在主平面的情形才能发生。
- 符合材料力学中梁弯曲的小变形假设和平面假设。

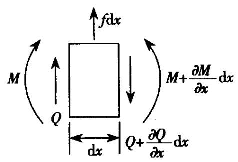
39

1、运动微分方程

在梁的主平面上取坐标xoz，原点位于梁的左端截面的形心，x轴与梁平衡时的轴线重合。假设梁在振动过程中，轴线上任一点的位移$u(x, t)$均沿z轴方向。



取微段梁dx，截面上的弯矩与剪力为M和Q，其正负号的规定和材料力学一样。



则微段梁dx沿z方向的运动方程为：

$$Q-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)+fdx=\rho Adx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

即 $$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f$$

利用材料力学中的关系

$$Q=\frac{\partial M}{\partial x} \qquad M=EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

得到梁的弯曲振动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f$$

边界条件

和一维波动方程一样，要使弯曲振动微分方程成为定解问题，必需给出边界条件和初始条件。

梁的每一端必须给出两个边界条件(以左端为例)。

（1）固定端：挠度和转角为0，即

$$u(0,t)=0, \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

（2）简支端：挠度和弯矩为0，即

$$u(0,t)=0, EI\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0$$

（3）自由端：弯矩和剪力为0，即

$$EI\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0, \left.\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]\right|_{x=0}=0$$

其它边界条件用类似的方法给出。

2、梁弯曲自由振动的解

令振动方程中的干扰力为0，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

对于均匀梁，振动方程为

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

其中

$$a=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

假定有分离变量形式的解存在，令

$$u(x,t)=\boldsymbol{\Phi}(x)q(t)$$

代入方程得到

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[q(t)\frac{d^2\boldsymbol{\Phi}(x)}{dx^2}\right]=-\boldsymbol{\Phi}(x)\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

写为

$$a^2\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{d^2\boldsymbol{\Phi}(x)}{dx^2}\right]}{\boldsymbol{\Phi}(x)}=\frac{-\frac{d^2q(t)}{dt^2}}{q(t)}=\omega^2$$

则有

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\omega^2q(t)=0$$

$$\frac{d^4\boldsymbol{\Phi}(x)}{dx^4}=\beta^4\boldsymbol{\Phi}(x)$$ （称为特征方程）

其中

$$\beta^4=\frac{\omega^2}{a^2}$$

方程的通解为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x+C_3\,\mathrm{sh}\,\beta x+C_4\,\mathrm{ch}\,\beta x$$

$$q(t)=C_5\sin\omega t+C_6\cos\omega t$$

由特征方程，利用边界条件即可求出振型函数$F(x)$和频率方程，进一步确定系统的固有频率w_i。用四个边界条件只能确定四个积分常数之间的比值。

例： 求简支梁弯曲振动的固有频率与固有振型。

解：边界条件为挠度和弯矩为0。

$$\Phi(0)=0,\left.\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right|_{x=0}=0 \qquad \Phi(l)=0,\left.\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right|_{x=l}=0$$

代入特征方程的解

$$\varphi(x)=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x+C_3\,\mathrm{sh}\,\beta x+C_4\,\mathrm{ch}\,\beta x$$

以及

$$\Phi''(x)=-C_1\beta^2\sin\beta x-C_2\beta^2\cos\beta x+C_3\beta^2\,\mathrm{sh}\,\beta x+C_4\beta^2\,\mathrm{ch}\,\beta x$$

得到 $\quad C_2+C_4=0,\quad \beta^2(-C_2+C_4)=0$

则 $\quad C_2=C_4=0$

以及 $\quad C_1\sin\beta l+C_3\,\mathrm{sh}\,\beta l=0$

$$-C_1\beta^2\sin\beta l+C_3\beta^2\,\mathrm{sh}\,\beta l=0$$

则 $\quad C_3=0$

以及频率方程 $\quad \sin\beta l=0$

由此解得 $\quad \beta_i=\dfrac{i\pi}{l},\quad (i=1,2\cdots)$

所以固有频率 $\quad \omega_i=\beta_i^2 a=\dfrac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}},\quad (i=1,2\cdots)$

振型为

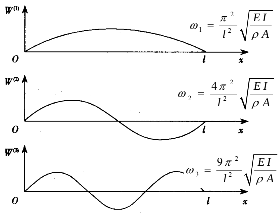
$$\Phi^{(i)}(x)=C\sin\beta_i x=C\sin\frac{i\pi}{l}x$$

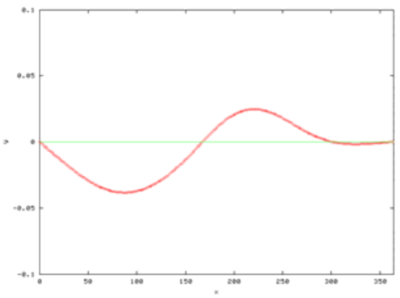
第 i 阶振型有 $i-1$ 个节点。节点坐标

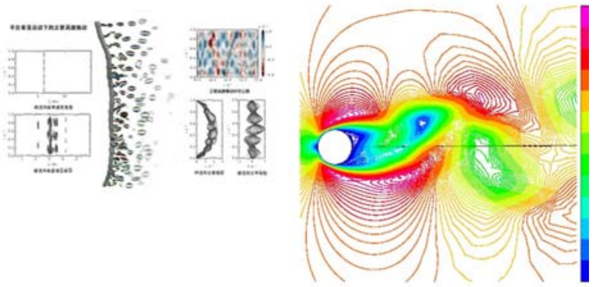
$$\frac{i\pi}{l}x_k=k\pi$$

即

$$x_k=\frac{kl}{i},\quad (k=1,2\cdots i-1)$$







【例2】求两端固定梁弯曲振动的固有频率与固有振型。

解：边界条件为挠度和转角为0，即

$$\Phi(0)=0,\Phi'(0)=0 \qquad \Phi(l)=0,\Phi'(l)=0$$

代入特征方程的解得到

$$C_2+C_4=0, \qquad \beta(C_1+C_3)=0$$

以及

$$C_1\sin\beta l+C_2\cos\beta l+C_3\,\mathrm{sh}\,\beta l+C_4\,\mathrm{ch}\,\beta l=0$$

$$C_1\beta\cos\beta l-C_2\beta\sin\beta l+C_4\beta\,\mathrm{sh}\,\beta l+C_3\beta\,\mathrm{ch}\,\beta l=0$$

求得 $C_3=-C_1$

$$C_2=-C_4=\frac{\sin\beta l-\mathrm{sh}\,\beta l}{\mathrm{ch}\,\beta l-\cos\beta l}C_1$$

化简后得到频率方程

$$\cos\beta l\,\mathrm{ch}\,\beta l=1$$

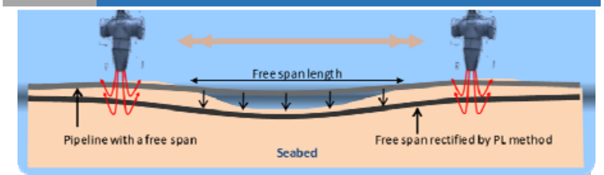
求出*b*后得到固有频率

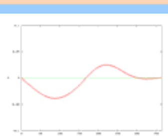
$$\omega_i=\beta_i^2 a=\beta_i^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}},\quad (i=1,2\cdots)$$

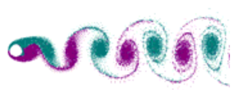
振型为

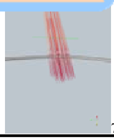
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(x)&=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x+C_3\,\mathrm{sh}\,\beta x+C_4\,\mathrm{ch}\,\beta x\\&=C_1\sin\beta x+\frac{\sin\beta l-\mathrm{sh}\,\beta l}{\mathrm{ch}\,\beta l-\cos\beta l}C_1\cos\beta x\\&\quad-C_1\,\mathrm{sh}\,\beta x-\frac{\sin\beta l-\mathrm{sinh}\,\beta l}{\mathrm{ch}\,\beta l-\cos\beta l}C_1\,\mathrm{ch}\,\beta x\\&=C\left[\sin\beta x-\mathrm{sh}\,\beta x+\frac{\sin\beta l-\mathrm{sh}\,\beta l}{\mathrm{ch}\,\beta l-\cos\beta l}(\cos\beta x-\mathrm{ch}\,\beta x)\right]\end{aligned}$$

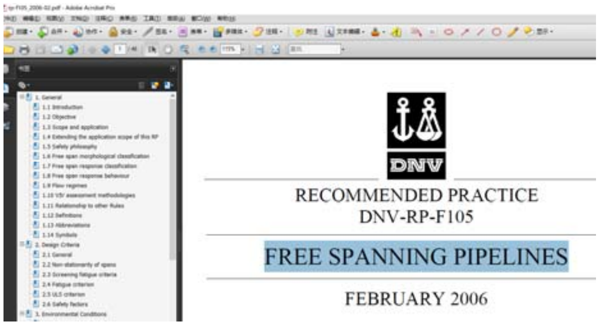
§6.6 工程应用：悬跨海底管道的涡激振动





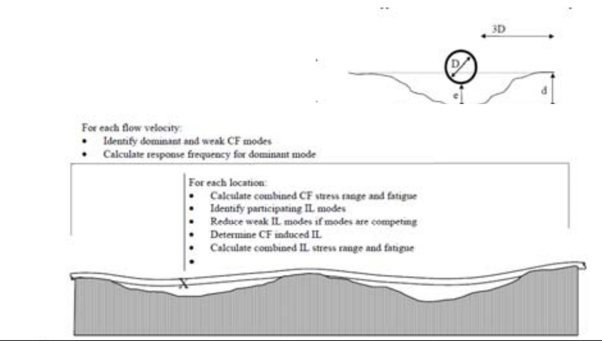






58

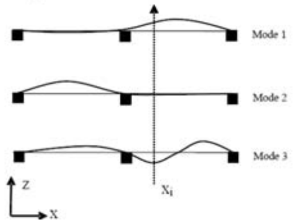
第六章 结构动力分析



第六章 结构动力分析

A.5 Pure in-line VIV

A.5.1 When two modes are very close in frequency, they are both strong candidate for responding at the same current velocities, i.e. lock-in ranges overlap. The result being that one mode only obtains full response, i.e. a response following the response models given in Sec.4. The other modes have a reduced response.



2.3.3 The in-line natural frequencies $f_{n,IL}$ must fulfil:

$$\frac{f_{n,IL}}{\gamma_{IL}} > \frac{U_{c,100year}}{V_{R,onset}^{IL} \cdot D} \cdot \left(1 - \frac{L/D}{250}\right) \cdot \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

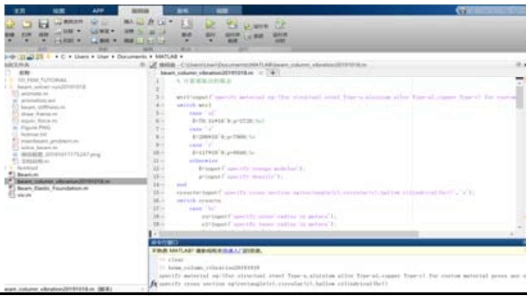
where

γ_{IL}	Screening factor for in-line, see 2.6
$\bar{\alpha}$	Current flow ratio $= \frac{U_{c,100year}}{U_{w,1year} + U_{c,100year}}$ Minimum value of 0.6.
D	Outer pipe diameter incl. coating
L	Free span length
$U_{c,100year}$	100 year return period value for the current velocity at the pipe level, see Sec.3
$U_{w,1year}$	Significant 1 year return period value for the wave-induced flow velocity at the pipe level corresponding to the annual significant wave height $H_{s,1year}$, see Sec.3
$V_{R,onset}^{IL}$	In-line onset value for the reduced velocity, see Sec.4.

60

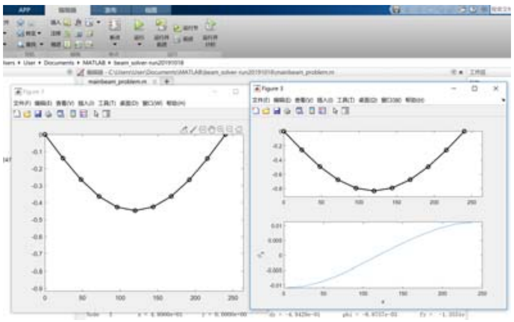
第六章 结构动力分析

§ 6.7 程序设计



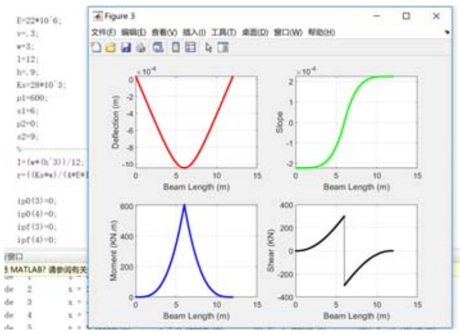
61

第六章 结构动力分析

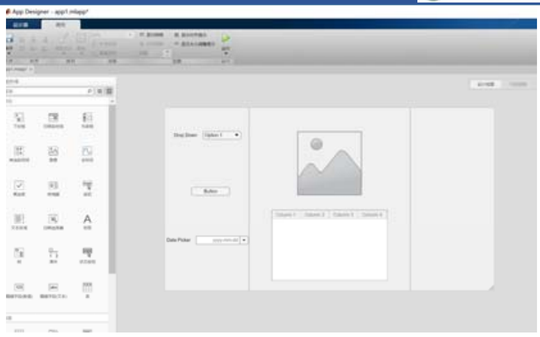


62

第六章 结构动力分析



63



选题：

1. 振动模态分析及GUI
2. 欧拉杆的轴向屈曲分析
3. 绘制弯矩图、剪力图
4. 位移法求解结构内力
5. 海底管道壁厚设计、强度校核
6. 海底管道允许悬跨长度设计（DNV-F101）
7. ············

要求：完成matlab程序（GUI）并撰写说明文档

展示：电子邮件打包/最后一节课展示

时间：11月6日