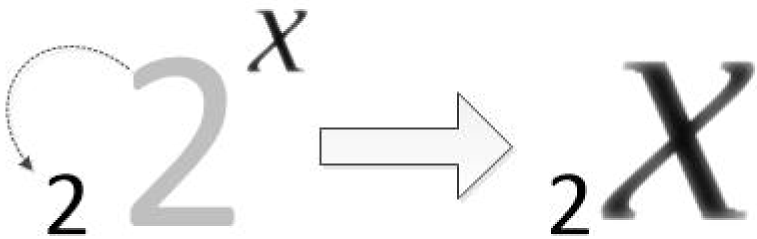
# 3장. 기본함수: 지수함수



지수함수(Exponential Function)

- 희귀한 지구(Rare Earth hypothesis)

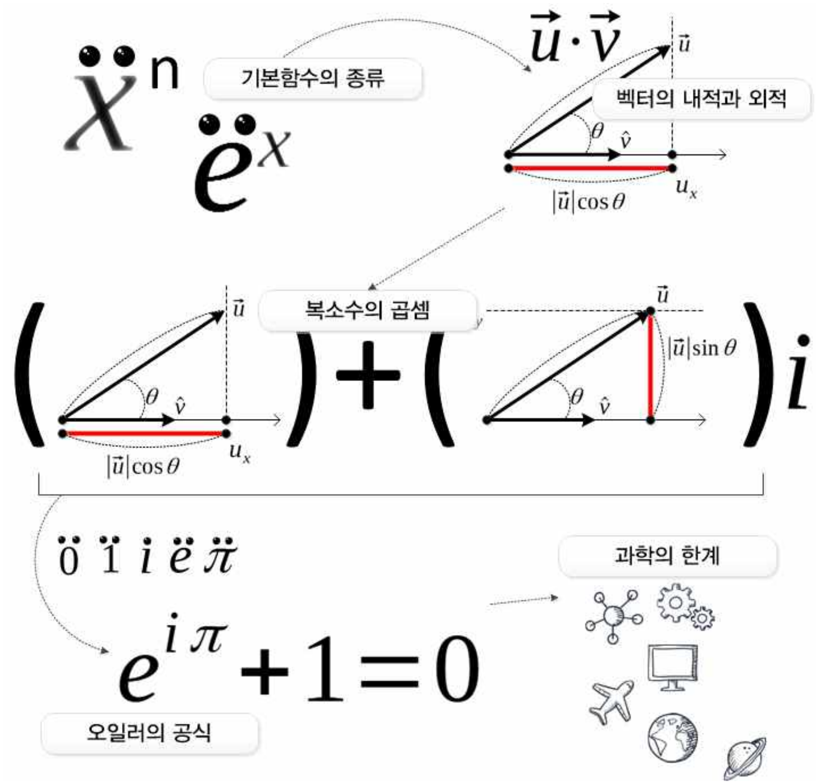
지수함수의 역함수

지수함수의 접하는 직선의 기울기 찾기

이상한 수 $e$

[표준수학] 그래프의 종류

[표준수학] 로그함수와 로그의 성질




우리는 기본함수의 종류를 모두 파악할 것입니다. 기본함수를 하나씩 정의할 때마다, 기본수를 하나씩 발견하게 될 것입니다. 그리고, 벡터의 내적과 외적의 개념을 파악한 이후에, 복소수의 곱셈에 포함된 내적과 외적의 개념을 파악할 것이고, 기본수들이 이루는 완벽한 관계를 기술하는 식을 이해하게 될 것입니다. 이 과정을 통해 자연법칙을 기술하는 수식의 아름다움과, 필연적으로 존재하는 과학의 한계를 알게 될 것입니다.

이제 두 번째 기본함수를 위한 여행의 시작입니다.

# 지수함수(Exponential Function)

파워함수(power function)는 밑(base)이 변수이고 지수(exponent)가 상수인 형태입니다. (그림3-1)은 변수 $x$를 $n$번 곱한 파워 함수 $x^n$의 의미를 설명합니다.

$$\underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n} = x^n$$

(그림3-1) $x$를 $n$번 곱한 것을 $x^n$이라고 적습니다. 밑 $x$가 변수이고, 지수 $n$이 상수(constant)이면 파워함수라고 합니다.

지수 형태의 식에서 밑이 상수이고 지수가 변수인 형태의 새로운 함수를 고려해 볼 수 있습니다. 이러한 함수를 ***지수 함수 (exponential function)***라고 합니다.

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{x} = a^x$$

(그림3-2) $a$를 $x$번 곱한 지수 함수를 $a^x$로 정의합니다. 지수 부분 $x$가 변수입니다.

파워 함수와 지수함수는 비슷한 형태이지만 동작은 다릅니다. (식3-1)은 지수부분이 2인 파워함수이고, (식3-2)는 밑이 2인 지수

함수입니다. $f(64)$는 $64 \times 64 = 4{,}096$ 이지만, $g(64) = 2^{64}$은 현실에서는 거의 볼 수 없는 엄청나게 큰 수입니다.

$$f(x) = x^2 \text{ (식3-1)}$$
$$g(x) = 2^x \text{ (식3-2)}$$

밑이 2인 지수함수는, 2진수를 사용하는 컴퓨터가 다룰 수 있는 메모리의 크기를 나타낼 수 있습니다. 예를 들면, $2^{64}$은 64bit 운영체제인 Windows 10이 다룰 수 있는 메모리(memory)의 크기입니다. $2^{64}$이 얼마나 큰 수인지 이해하기 위해 우주의 나이와 비교해 보겠습니다.

우주의 밤하늘을 관측하면, 가장 멀리서 오는 별빛은 지구에서 138억 광년 떨어져있습니다. 그것은 우리가 속한 ***관성계(inertial frame)***에서 우주의 나이는 138억년이라는 의미입니다. 138억년을 초(second) 단위로 변환해보겠습니다. 1년은 365일, 1일은 24시간, 1시간은 60분, 1분은 60초입니다. 그러므로 1년을 초단위의 시간으로 계산하면 (식3-3)과 같습니다.

365일×24시간×60분×60초 = 31,536,000 (식3-3)

이제 (식3-3)에서 구한 값을 138억과 곱하면 우주의 나이를 초단위로 구할 수 있습니다. 그것은 (식3-4)와 같습니다.

31,536,000×13,800,000,000년 = 435,196,800,000,000,000
(식3-4)

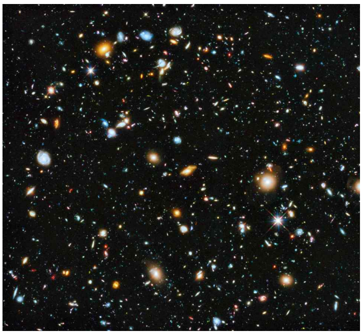
$10^{17}$ < 435,196,800,000,000,000 < $10^{18}$

계산을 간단하게 하기 위해 (식3-4)의 값을 $10^{18}$과 비교해 보겠

습니다. 우주의 나이는 $10^{18}$보다는 많이 작습니다. 1,000은 약 $2^{10}=1,024$입니다. 그러면 (식3-5)에 의해 $10^{18}$은 약 $2^{60}$인 것을 알 수 있습니다.

$$10^3 = 1,000 \approx 2^{10} = 1,024$$
$$10^{18} = (10^3)^6 \approx (2^{10})^6 = 2^{60} \quad \text{(식3-5)}$$

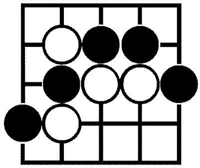
넉넉하게 시간을 계산하여, $2^{60}$을 초 단위의 우주의 역사라고 가정하면, $2^{64}=2^4 2^{60}=16\times 2^{60}$이므로, $g(64)=2^{64}$은 우리 우주 역사의 16배에 해당하는 시간입니다!



(그림3-2b) 허블 망원경이 촬영한 우주: 관측 가능한 우주의 크기는 $8.8\times 10^{26}m$입니다. 지수가 얼마나 큰 수인지 가늠해 볼 수 있습니다.

한 가지 더 컴퓨터 바둑(Computer Go)의 예를 들어보겠습니다. 2016년 구글(Google)의 알파고(AlphaGo)가 컴퓨터 바둑(Go)에서 이세돌 기사를 이긴 사건이 있었습니다. 인공지능의 우수성을 보여주기 위해 컴퓨터 바둑을 선택하는 이유는, 일반적인 컴퓨터 알고리즘으로 풀 수는 있지만, ***다룰 수 없는 문제(intractable problem)***의 범주에 속하기 때문입니다. "다룰 수 없는 문제"란 정

답을 찾을 수 있지만, 시간이 너무 많이 걸린다는 의미입니다.



(그림3-3) 컴퓨터 바둑은 19개의 행과 19개의 열로 구성된 바둑판에 흰 돌과 검은 돌을 번갈아 놓는 게임입니다.

컴퓨터 바둑이 나타낼 수 있는 경우의 수는, 바둑판의 크기가 $19 \times 19 = 361$이고, 각 위치에 흰 돌과 검은 돌을 배치할 수 있으므로 $2^{361}$입니다. $2^{60}$과 비교해 보더라도, $2^{361}$은 정말 엄청나게 큰 수임을 알 수 있습니다. 그래서, 이러한 복잡성을 가지는 문제에서 컴퓨터가 사람을 이긴 것은 AI(인공지능, Artificial Intelligence)의 큰 진보인 것입니다.

$$19 \times 19 = 361 \quad \text{(식3-6)}$$

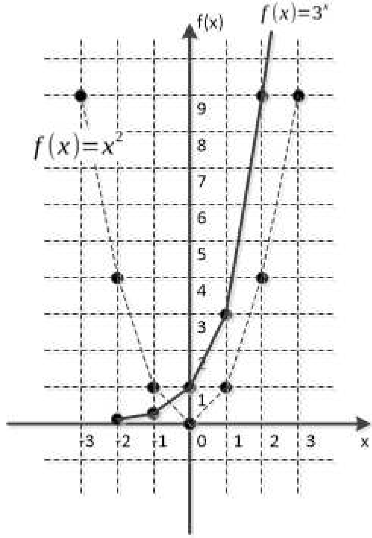
$$2^{361} \quad \text{(식3-7)}$$

지수함수는 입력 변수 $x$가 선형적(linear)으로 증가할 때, 정말 빠르게 함수의 값이 증가하는 함수입니다. 이러한 특징 때문에 지수적으로 증가한다는 표현은 엄청나게 빠르게 증가한다는 의미로 사용합니다. 이제 우리는 기본함수를 구성하는 테이블에 (그림3-4)처럼 지수함수를 추가하겠습니다. 지수함수가 밑을 2로 사용하는 것이 아니라, 임의의 상수 $a$를 사용한다고 가정하고 $a^x$로 나타내었습니다.

| | 원함수 | 접하는 직선 | 역함수 | 이상한 수 |
|---|---|---|---|---|
| 파워함수 | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | ${}^{n}x$ | $i$ |
| 지수함수 | $a^x$ | | | |
| 투영된 선분길이 함수 | | | | |

(그림3-4) 기본함수 테이블: 지수함수 $a^x$를 기본함수 테이블에 추가합니다.

함수를 정의하면 (1) 그리기, (2) 역함수, (3) 접하는 직선의 함수를 찾는 것이 기본적인 작업이라고 했습니다. 이제 지수함수를 그려보겠습니다.



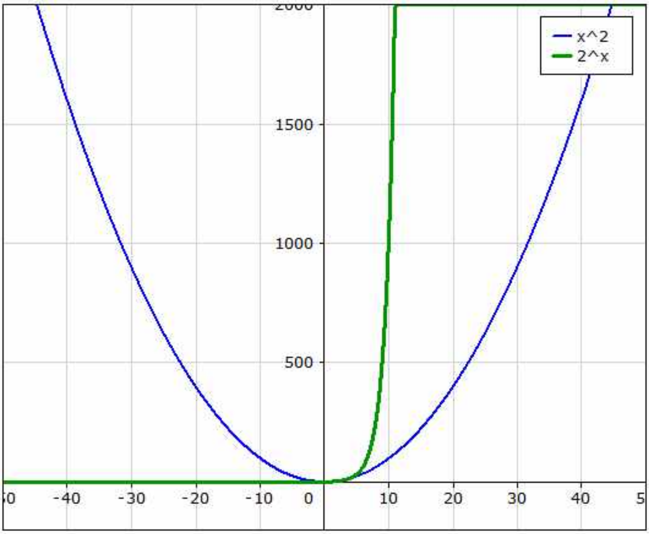

(그림3-5) 지수함수 $3^x$는 파워함수 $x^2$보다는 빠르게 $y$값이 증가합니다.

(그림3-5)는 파워함수 $x^2$과 지수함수 $3^x$를 그린 것입니다. $x$값이 적은 경우, 지수함수는 그렇게 빨리 증가하는 것처럼 보이지는 않습니다. 하지만, 파워함수보다는 빠르게 경사가 증가하는 것을 볼 수 있습니다. 또한 2사분면에서 $x$값이 작아짐에 따라, 지수함수는 0에 접근합니다. 왜냐하면 (식3-8)과 같은 성질을 가지기 때문입니다.

$$3^{-x} = \frac{1}{3^x} \quad \text{(식3-8)}$$

(식3-8)은 $x$의 값이 커지면 분모(denominator)가 빠르게 증가하므로 0으로 접근합니다. 지수함수가 얼마나 빠르게 증가하는지 비교하기 위해, (그림3-6)처럼 좀 더 큰 $x$값에 대해서 그래프를 그려

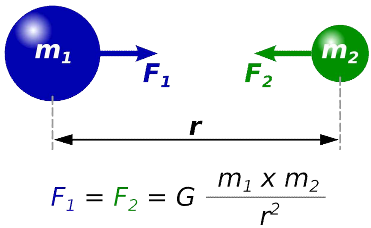
볼 수 있습니다.




(그림3-6) $x^2$그래프와 $2^x$그래프의 비교: 지수함수(y축에 가까운 그래프)는 $x$값이 커짐에 따라, $y$값이 급격하게 증가하는 것을 확인할 수 있습니다.

(그림3-6)을 보면, $x$값이 커질 때는 지수함수는 급격하게 $y$값이 증가하여 곡선이 거의 수직선의 형태를 가지며, $x$값이 작아질 때는 거의 수평선의 형태를 가지는 것을 알 수 있습니다. 이처럼 지수를 이용하면 엄청나게 큰 수뿐만 아니라, 엄청나게 작은 수를 나타낼 수 있습니다.

작은 수가 물리학에서 어떻게 사용되는지 살펴보기 위해, ***만유인력의 법칙(Law of universal gravity)***을 예로 들어 봅시다.




(그림3-6b) 만유인력의 법칙: 질량 $m_1$인 물체와 $m_2$인 물체가 서로 $r$ 만큼 떨어져 있을 때 두 물체는 서로를 끌어당깁니다.

질량 $m_1$인 물체와 $m_2$인 물체가 서로 $r$만큼 떨어져 있을 때, 두 물체는 질량의 곱에 비례하고, 거리의 제곱에 반비례하는 힘으로 서로를 끌어당깁니다. (그림3-6b)에서 대문자 $G$는 ***중력상수 (gravitational constant)***라고 하는데, 관찰과 실험을 통해서 경험적으로 정해진 값입니다. 현재 $G$값은 다음과 같습니다.

$$G \approx 6.674 \times 10^{-11} \quad \text{(식3-8b)}$$

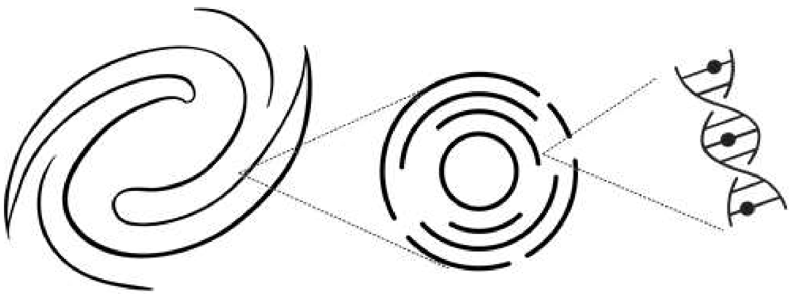
$G$값은 매우 작아 보이지만, 매우 정교한 값입니다. 이 값이 $1/10^{40} = 10^{-40}$ 정도만 달라도, 빅뱅 이후에 우리 우주는 생겨날 수 없었습니다. 10은 $2^3 = 8$보다는 크고, $2^4 = 16$보다는 작으므로 (식3-8c)가 성립합니다.

$$16^{-40} < 10^{-40} < 8^{-40} \quad \text{(식3-8c)}$$
$$8^{-40} = (2^3)^{-40} = 2^{-120} \quad \text{(식3-8d)}$$

(식3-8d)를 보면 $10^{-40}$을 $2^{-120}$으로 간주하더라도, 우주의 나이가 $2^{60}$초 인 것을 가정하면, $10^{-40}(\approx 2^{-120})$이 얼마나 작은 값인지 짐작할 수 있습니다. 우리 우주는 이렇게 정교하게 설정된 것처럼

보이는 상수를 수십 개 가지는데, 이 상수 값들은 너무나 정교해서 우주가 하나뿐이라면 우연은 아닌 것 같습니다. 그렇다면 우주는 창조된 것이 분명해 보이지만, 만약 우리가 관측하지 못하는 우주가 무한개 있으며, 우리 우주는 그 중 하나라고 가정하면, 우연이라고 해도 "무한에 대한 직관"에 의해 합리적인 설명이 가능합니다.

## 희귀한 지구



(그림3-6c) 우리은하(Milky way)의 꼭 필요한 위치에 태양계가, 태양계의 꼭 필요한 위치에 지구가, 생명에 꼭 필요한 것들이 모두 갖춰진 환경에 우리는 살고 있습니다.

지구와 지구에 존재하는 생명이, 일어날 것 같지 않은 사건과 환경의 조합을 필요로 한다는 것을 "***희귀한 지구 가설(Rare Earth hypothesis)***"이라고 합니다. 희귀한 지구 가설의 몇 주장은 다음과 같습니다.

1. 적절한 은하 종류에서 적절한 위치의 지구
2. 적절한 종류의 태양 주위를 적절한 거리에서 도는 지구
3. 행성들의 적절한 배치

4. 지구의 지속적이고 안정적인 궤도
5. 적절한 크기의 거주 가능한 행성
6. 판구조론(Plate tectonics)
7. 적절한 크기의 달
8. 대기(An atmosphere)
9. 복잡한 생명체를 발생시킨 적절한 진화
10. 진화 역사에서의 적절한 타이밍

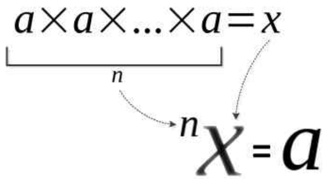
이와 같은 희귀한 조건에서 우리 지구가 존재하고, 우리 생명이 존재하지만, 지구가 희귀하지 않다는 반론도 존재합니다. 다음 링크 https://en.wikipedia.org/wiki/Rare_Earth_hypothesis에서 희귀한 지구에 대한 반론을 확인할 수 있습니다. 반론의 내용에 상관없이, 최신 우주론이 주장하는 것처럼, 무한개의 다중 우주(multiple universe)가 존재한다면, "인류원리"에 의해 지구는 희귀한 것이 아니라, 그저 무한개의 우주 가운데 하나의 우주일 뿐입니다.

그런데 만약 밝혀지지 않은 과학적 사실 때문에 다중 우주라는 가설이 필요하고, 실제 우주는 하나뿐이라면, 온 우주가 지구와 지구에 살고 있는 인간을 위해 설정된 것처럼 보입니다. 이것은 우주의 크기가 의미하는 것을 알기에, 창조자께 경외심을 가지게 합니다.

필자는 온 우주가 인류를 위해 설정된 것이라고 믿습니다. 이것은 왜 성경이 한 사람의 생명을 구원하는 것이 온 우주보다 귀하다고 주장하는 근거이기도 합니다. C.S. Lewis가 "***영광의 무게(The Weight of Glory)***"에서 이야기 하듯이, 우주가 아무리 크더라도 그것은 유한하여 시작과 끝이 있으므로, "영원"을 살아야 하는 존재에게 우주의 역사는 한낱 먼지일 뿐이기 때문입니다.

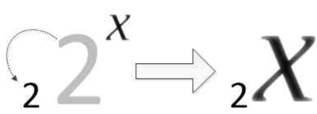
# 지수함수의 역함수

이제 지수함수의 역함수를 정의해 보겠습니다. 파워함수의 역함수를 정의하기 위해, 우리는 오른쪽 위첨자의 위치를 왼쪽 위첨자로 변경했습니다.




(그림3-7) 파워함수의 역함수: $a$를 $n$번 곱했을 때 결과가 $x$라면, a를 $^{n}x$(= $\sqrt[n]{x}$ )로 나타내었습니다.

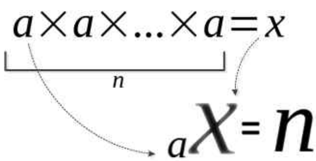
(그림3-7)에서 파워함수의 역함수는 $x$와 $n$을 알 때, $a$를 구하는 함수이고, 지수함수의 역함수는 <u>$x$와 $a$를 알 때, $n$을 구하는 함수</u>입니다. 예를 들면 파워함수의 역함수를 의미하는 $^{2}9$는 제곱하면 9가 되는 수이므로, $^{2}9 = {}^{2}(3 \times 3) = 3$입니다. 지수함수의 역함수를 나타내기 위해서, 밑을 왼쪽 아래 첨자로 적도록 하겠습니다. 예를 들면 지수함수 $2^x$가 정의되었을 때, $2^x$의 역함수를 나타내기 위해 밑 2를 독립변수 $x$의 왼쪽 아래첨자로 적는 것입니다.




(그림3-8) 지수 함수의 역함수를 나타내기 위해, 독립변수의 왼쪽 아래 첨

자를 사용합니다.

예를 들면 ${}_2 8$은 "2를 몇 번 곱하면 8이 되는가?"를 묻는 것입니다. 2를 3번 곱하면 8이므로, ${}_2 8 = {}_2(2 \times 2 \times 2) = {}_2(2^3) = 3$입니다. (그림3-9)처럼 $a$를 $n$번 곱해서 $x$를 얻었다면, $n$을 ${}_a x$라고 적는 것입니다.




(그림3-9) 지수함수의 역함수: 곱하는 수를 독립변수의 왼쪽 아래첨자로 나타냅니다. ${}_a x$는 $x$를 결과로 가지려면, $a$를 몇 번 곱해야하는지 묻습니다.

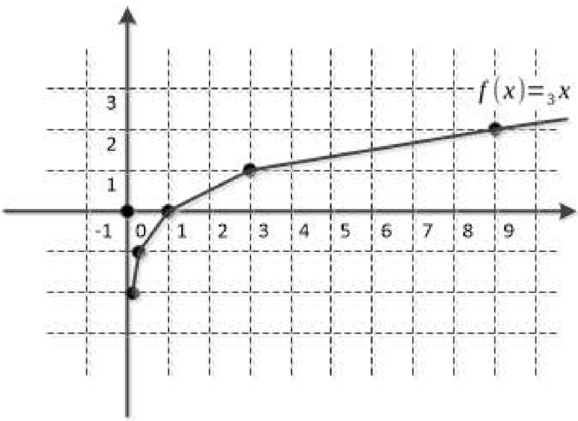
지수함수의 역함수를 ***로그(log)함수***라고 합니다. 로그는 로그리즘(logarithm)의 약자인데, 이 영어 단어는 그리스어의 "계산"을 뜻하는 λόγος(lŏgŏs)의 어간 log-와 "수"를 뜻하는 ἀριθμός (arithmŏs)의 합성어입니다. (식3-9)는 몇 가지 로그 함수의 예들입니다.

$$
\begin{array}{l}
{}_2 4 \\
{}_2 8 \\
{}_{10} 100 \\
{}_{10} 1000
\end{array}
\qquad \text{(식3-9)}
$$

(식3-9)의 결과는 (식3-9b)와 같습니다.

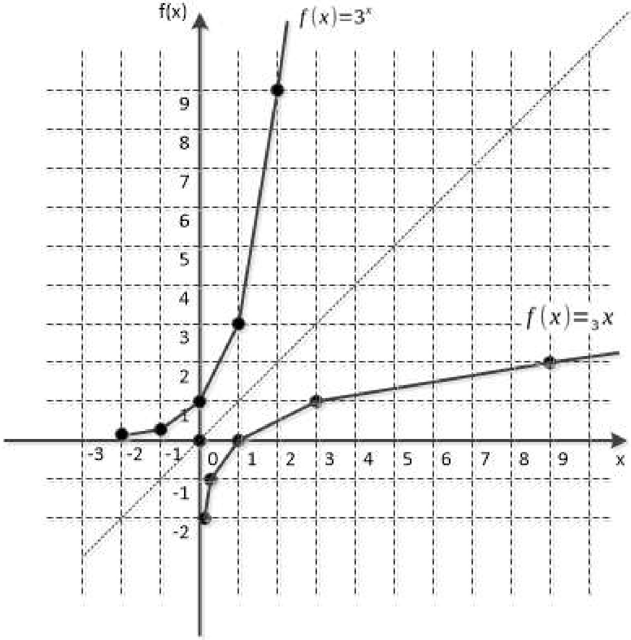
$$
\begin{aligned}
{}_{2}4 &= {}_{2}(2^2) = 2 \qquad \text{(식3-9b)} \\
{}_{2}8 &= {}_{2}(2^3) = 3 \\
{}_{10}100 &= {}_{10}(10^2) = 2 \\
{}_{10}1000 &= {}_{10}(10^3) = 3
\end{aligned}
$$

(식3-9b)의 식들은 로그(log)문자를 사용하여, $\log_2 4$, $\log_2 8$, $\log_{10} 100$ 및 $\log_{10} 1000$으로 나타낼 수 있습니다. (그림3-10)은 $3^x$의 역함수인 ${}_3x$함수($\log_3 x$)를 그린 것입니다.




(그림3-10) $3^x$의 역함수 ${}_3x$를 그렸습니다. $x$값이 증가하더라도 $y$값은 거의 증가하지 않습니다. 이러한 성질 때문에 큰 $x$값에 대해서 로그함수는 상수로 간주할 수 있습니다.

(그림 3-11)은 지수함수와 로그함수가 서로 역함수임을 보여줍니다. $3^x$함수와 ${}_3x$함수는 역함수 관계이므로, $y=x$식에 대해서 대칭되게 그려지는 것을 확인할 수 있습니다.




(그림3-11) $3^x$함수와 ${}_3x$함수는 역함수 관계이므로, $y = x$식에 대해서 대칭되는 성질을 가집니다.

이제 기본함수 테이블에서 지수함수의 역함수 부분을 채우면 (그림3-12)와 같은 기본함수 테이블을 구성할 수 있습니다.

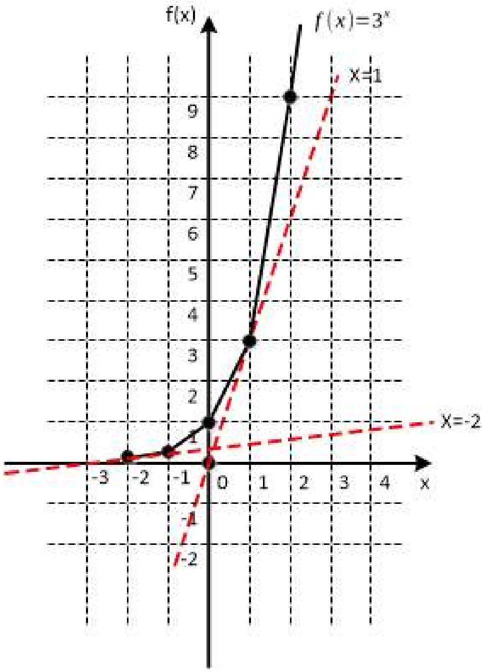
| | 원함수 | 접하는 직선 | 역함수 | 이상한 수 |
|---|---|---|---|---|
| 파워함수 | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | ${}^{n}x$ | $i$ |
| 지수함수 | $a^x$ | | ${}_{a}x$ | |
| 투영된 선분길이 함수 | | | | |

(그림3-12) 기본함수 테이블: 지수함수의 역함수 ${}_{a}x$를 채웠습니다.

다음으로 지수함수의 접하는 직선 함수를 찾아보도록 하겠습니다. 접하는 직선의 기울기를 찾기 위해, ***무한에 대한 직관(intuition on infinity)***을 의미하는 $\lim$기호를 사용한 것을 기억하세요.

# 지수함수의 접하는 직선의 기울기 찾기

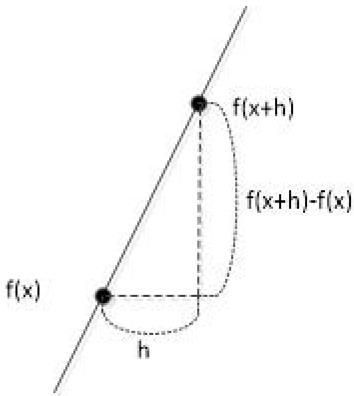
이제 지수함수의 접하는 직선의 기울기를 계산하는 함수를 찾아 보겠습니다.




(그림3-13) $3^x$함수에 대해서 $x=-2$일 때, $x=1$일 때 접선을 그렸습니다.

(그림3-13)에 $3^x$함수에 대해서 $x=-2$일 때, $x=1$일 때 접선을 그렸습니다. $x=-2$일 때 접선의 기울기는 약 0.1정도이고, $x=1$일 때 기울기는 약 3입니다. $x$가 증가함에 따라, 기울기가 급격하

게 증가하는 것을 알 수 있습니다. (그림3-13b)에 다시 무한에 대한 직관을 적용하여 지수함수 $f(x)=a^x$의 접하는 직선을 그렸습니다.




(그림3-13b) 함수의 특정한 부분이 굽어 있더라도, 무한에 대한 직관을 사용하면, 완벽한 접하는 직선을 찾을 수 있습니다.

(식3-10)은 일반적인 함수 $f(x)$에 대해, 접하는 직선의 기울기를 찾는 일반적인 공식입니다. $\lim$기호는 $h$가 무한대로 0에 접근하는 것을 나타낸다는 것을 상기하세요.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{(식3-10)}$$

이제 함수 $a^x$를 (식3-10)에 대입하면 (식3-11)을 얻습니다.

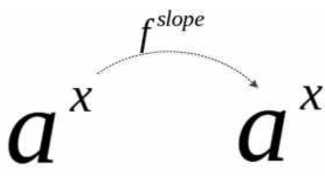
$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{(x+h)}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h-a^x}{h} = a^x(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}) \quad \text{(식3-11)}$$

(식3-11)에서 $a^x$를 제외한 부분을 특정한 상수 $c$로 치환하면 접하는 직선의 기울기를 함수를 (식3-13)과 같이 적을 수 있습니다.

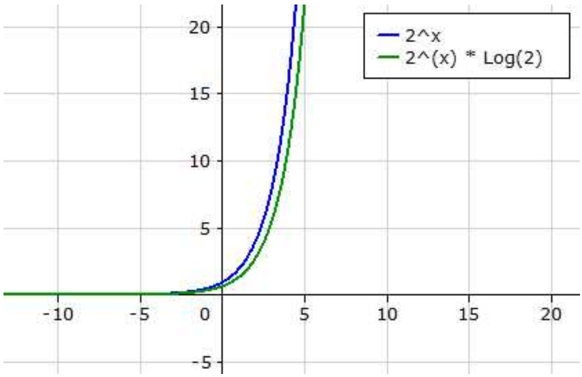
$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = c \quad \text{(식3-12)}$$

$$a^x (\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}) = ca^x \quad \text{(식3-13)}$$

(식3-12)는 $h$가 무한히 0에 수렴할 때, 분자 $a^h - 1$도 0에 수렴하고, 분모 $h$도 0에 수렴하는 $\frac{0}{0}$형태입니다. (식3-12)는 수렴한다고 알려진 식이므로, 이 값을 특정한 상수 $c$로 치환하여 (식3-13) $ca^x$를 얻을 수 있습니다. (식3-13)의 흥미로운 점은 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수가, 원본 함수 $a^x$를 포함한다는 것입니다. 그런데 $ca^x$에서 $c$가 1이 되면 $ca^x = 1a^x = a^x$가 되어 기울기 함수가 원함수와 같아지는 특별한 일이 발생합니다. 이러한 $a$는 어떤 수일까요?




(그림3-13b) 기울기 함수가 원함수와 같아지는 $a$를 찾으려고 합니다.




(그림3-13c) $2^x$와 $2^x$의 직선의 기울기를 구하는 함수의 그래프: 직선의 기울기를 구하는 함수도 지수함수입니다.

이제 ***우리는*** $ca^x$ ***에 대해*** $c$***를 1로 만드는*** $a$***를 찾아보도록*** 하겠습니다. 만약 그러한 $a$를 찾을 수 있다면 (식3-14)의 지수함수에 대해, 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수는 (식3-15)로 원래 지수함수와 같은 함수가 될 것입니다.

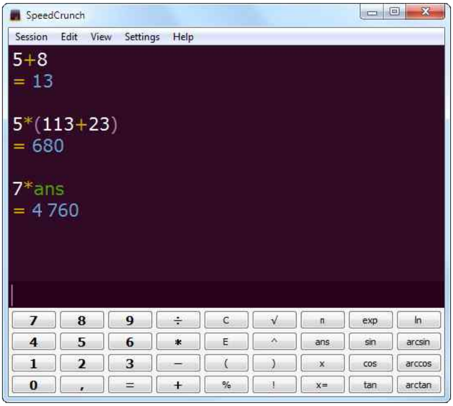
$$f(x) = a^x \quad \text{(식3-14)}$$

$$f^{slope} = f'(x) = a^x \quad \text{(식3-15)}$$

근사값을 찾기 위해 (식3-12)에서 $h = 0.0001$이라고 가정하면 (식3-16)을 구성할 수 있습니다. $h$를 0.0001로 가정하는 이유는 소수점 이하 4째 자리 정도만 고려해서 $a$를 찾겠다는 의미입니다.

$$\frac{a^{0.0001} - 1}{0.0001} \quad \text{(식3-16)}$$

이제 $\frac{a^{0.0001}-1}{0.0001}$ (식3-16)에 대해서 $a$값을 1부터 차례대로 넣어서 (식3-16)의 값을 계산기로 계산해 보도록 하겠습니다. 필자는 수식을 지원하는 계산기 중에서 SpeedCrunch를 사용하였습니다.




(그림3-14) https://speedcrunch.org/에서 SpeedCrunch를 다운받아서 수식을 계산할 수 있습니다.

(식3-16)은 $a$값 1,2,3 및 4에 대해서 다음과 같은 계산 결과를 확인할 수 있습니다. 수식을 지원하는 계산기에서 텍스트로 위첨자를 입력할 수 없으므로, 지수를 나타내기 위해서는 캐릿(caret, ^기호)을 사용합니다. 예를 들면 $2^{0.0001}$은 2^(0.0001)처럼 적습니다.

$a=1$

(1^(0.0001)-1)/0.0001 = 0

$a=2$

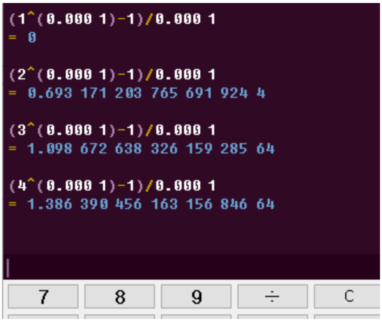
(2^(0.0001)-1)/0.0001 = 0.6931712037656919244

$a=3$

(3^(0.0001)-1)/0.0001 = 1.0986726383261592856 4

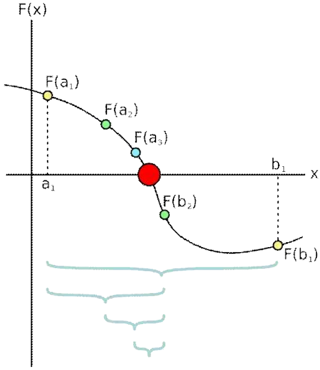
$a = 4$

(4^(0.0001)-1)/0.0001 = 1.3863904561631568466 4




(그림3-15) SpeedCrunch에 수식을 입력하여 $\dfrac{a^{0.0001}-1}{0.0001}$의 값을 계산할 수 있습니다.

(그림3-15)의 계산 결과를 보면 (식3-16)을 1로 만드는 가장 근사값은 3입니다. $a=2$일때 0.6931로 1보다는 작으므로, 우리가 찾는 $a$값은 2와 3사이에 존재해야 합니다. 이 값을 찾기 위해 ***이분법(bisection methods)***을 사용할 수 있습니다.




(그림3-16) $f(x)=0$을 만족하는 $x$를 찾기 위해 특정한 범위에서 이분법을 적용할 수 있습니다.(그림출처: 영문위키피디아)

(그림3-16)은 이분법이 어떻게 동작하는지 설명합니다. $f(x)=0$을 만족하는 $x$를 찾는 문제를 고려해 봅시다. 그런데 $a_1$에서 $f(x)$는 0보다 크고, $b_1$에서 $f(x)$는 0보다 작다는 것이 알려져 있다면, 다음 후보로 $a_1$과 $b_1$을 정확하게 이등분하는 위치의 $b_2$값을 대입하여 시도해 보는 것입니다. 이 과정을 계속반복하면, 우리는 $f(x)=0$을 만족하는 근사값 $x$를 찾을 수 있습니다.

$a=3$ 일 때 1.0986로 1보다 약간 크므로, $a=2.5$에서 시작해서 ***이분법(bisection method)***으로 값의 오차를 줄여나가 보도록 하겠습니다.

(**2.5**^(0.0001)-1)/0.0001 = **0.9163**3271259162927612

2.5에 대해서 0.9163은 1보다 작으므로, 2.5와 3의 중간값인 2.75에 대해서 계산합니다.

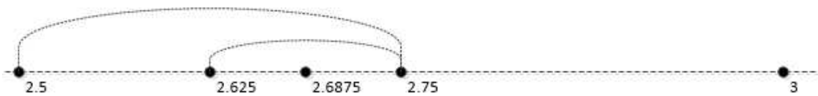
(**2.75**^(0.0001)-1)/0.0001 = **1.0116**5208022409572968

2.5+(2.75-2.5)/2 = **2.625**

2.75에 대해서 1.0116은 1보다 크므로, 2.5와 2.75의 중간값 2.625에 대해서 $\dfrac{a^{0.0001}-1}{0.0001}$ (식3-16)을 평가합니다.

(**2.625**^(0.0001)-1)/0.0001 = **0.9651**2746659851553021

2.625+(2.75-2.625)/2 = **2.6875**




(그림3-17) 2.5와 3에 대해 이분법으로 $a$를 1로 만드는 근사값을 찾을 수 있습니다. 2.75 → 2.625 → 2.6875의 순서대로 원하는 값에 근접하고 있습니다.

0.9651은 1보다 작으므로, 2.625와 2.75의 중간값 2.6875에 대해서 $\dfrac{a^{0.0001}-1}{0.0001}$ (식3-16)을 계산합니다.

(**2.6875**^(0.0001)-1)/0.0001 = **0.9886**6026268855399257

2.6875+(2.75-2.6875)/2 = **2.71875**

0.9886은 1보다 작으므로, 2.6875와 2.75의 중간값 2.71875에 대해서 $\dfrac{a^{0.0001}-1}{0.0001}$ (식3-16)을 계산합니다.

(**2.71875**^(0.0001)-1)/0.0001 = **1.0002**2223474549516269

(식3-17)


(그림3-18) 이분법을 무한대로 적용하면, 우리는 정확하게 값을 찾을 수 있습니다. 2.71875에서 소수점 이하 세자리까지가 1.000인 값을 얻었습니다.

$a = 2.71875$에 대해서 1.0002를 얻었으니 소수점 이하 네자리까지 거의 1인 셈입니다. 이러한 방식으로 $a$값의 정밀도를 계속 높일 수 있습니다. 우리가 찾는 $a$값은 소수점 이하 유효자리 세 째 자리까지 약 2.718인 것을 알 수 있습니다.

$$e \approx 2.718\ldots$$

(그림3-19) 특별한 수 $e$는 자연에서 자연스럽게 관찰되어, 자연 현상을 기술하는데 사용되므로, 자연상수라고 합니다.

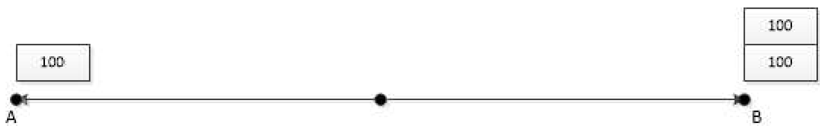
이 특별한 수는 놀랍게도 소수점 이하의 유효자리가 규칙을 가지지 않는 무한 소수입니다. 이 수는 자연에서 일반적으로 관찰되는 수이므로 "***자연상수(Natural Constant)***" 혹은 수학자 오일러(Euler)의 이름을 기념하여 "***오일러 수(Euler Number)***"라고 하고 $e$라고 적습니다.

# 이상한 수 e

왜 이상한 수 $e$를 알아야 할까요? 그것은 $e$가 복리계산(compound interest), 표준정규분포(standard normal distribution), 최적 계획 문제(optimal planning problems) 등 많은 곳에서 나타나기 때문입니다.

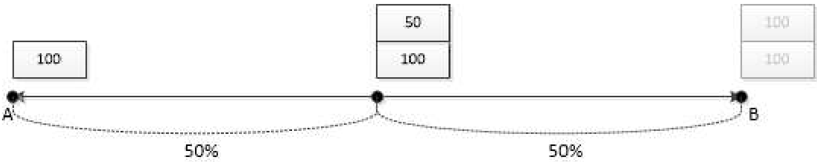
(그림3-19b) 자연상수 $e$는 물리법칙을 구성하는 기본수 중의 하나입니다.

예를 들어서 복리계산에서 어떻게 $e$가 나타나는지 살펴보도록 하겠습니다. 1년 단위로 100%씩 성장하는 가상의 회사를 생각해 봅시다. 시작 A시점에 자산이 100이었는데, 1년 정도가 지난 B시점에 100%성장하여 자산이 200이 되었습니다.




(그림3-20) 가상의 회사가 A에서 시작해서 1년뒤인 B에 100%의 성장을 이루었습니다.

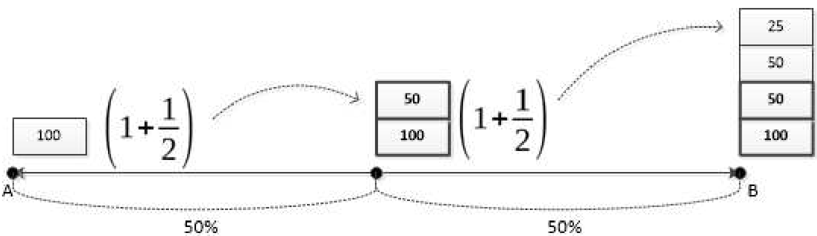
회사는 1년이 지난 시점에 100% 성장했지만, 성장은 어느 순간 갑자기 이루어지지 않습니다. (그림3-21)처럼 기간을 반으로 나누어 6개월마다 50%씩 성장했다고 가정해 봅시다.




(그림3-21) 전반기 6개월이 지난 시점에 50%의 성장을 이루었다면, 후반기 6개월은 50%의 성장에 대한 50%의 성장을 이루게 될 것입니다.

$$100 \times (1 + \frac{1}{2}) = 100 + 50 \quad \text{(식3-18)}$$

그러면 100으로 시작한 회사는 6개월이 지났을 때, 50%성장했으므로 자산은 (식3-18)처럼 150이 될 것입니다. 그 다음 6개월의 50% 성장은 현재 시점의 자산 100+50에 대한 50%의 성장이므로 (그림3-22)처럼 나타낼 수 있습니다.

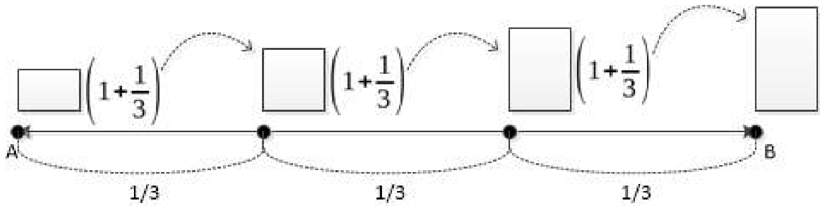



(그림3-22) 6개월마다 50%씩 성장한다고 가정하면, 1년 뒤 자산은 225가 되었습니다.

60개월마다 50%씩 성장하면 1년 뒤에 자산은 (식3-19)처럼 225가 되어, 1년에 100%성장보다는 더 성장한 것을 알 수 있습니다.

$$100 \times (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) \quad \text{(식3-19)}$$

이 과정을 더 잘게 나누면 회사는 더 성장하게 되는 것일까요? (그림3-23)은 1/3 단위로 성장한다고 가정한 것입니다.




(그림3-23) 세단계로 나누어 성장을 가정하면 2단계 성장보다는 높은 자산을 가지게 될 것입니다.

“무한에 대한 직관”을 사용하면 회사가 성장할 수 있는 정도를 (식3-20)처럼 나타낼 수 있습니다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{(식3-20)}$$

(식3-20)은 특정한 값에 수렴하는데, 이 값이 ***“오일러 수(Euler number)”*** $e$입니다. 은행에서 1년 단위로 이자를 지급하는데, 다음 이자는 원금과 이자를 합친 돈에 대한 이자(interest), 즉 복리로 이자를 계산합니다. 이자 지급 기간을 한 달, 하루 혹은 무한대로 나누더라도, 총 금액이 $e \approx 2.718$배을 넘지는 못할 것이라는 의미입니다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{(식3-21)}$$

필자가 고등학교 시절 (식3-21)을 처음 보았을 때, “왜 이런 이

상한 수를 정의하는 것일까?"라고 생각했고 전혀 감동적이지 않았습니다.

(그림3-24) 오일러(Leonhard Euler)

하지만 이 수 $e$는 파워함수에서 찾았던 $i$와도 상관이 있고, 뒤에서 다룰 추가적인 기본수와 상관이 있고, 소수(prime number)와도 상관이 있으며, 양자역학(Quantum mechanics)의 전자(electron) 궤도와도 상관이 있습니다. 즉 자연계의 현상을 기술하기 위해서는 반드시 필요한 수(number)인 것입니다.

이제 $e$를 찾았으므로 지수함수의 밑을 항상 $e$를 사용하여 나타내도록 하겠습니다. 그러면 (식3-22)처럼 지수함수를 정의할 수 있습니다.

$$f(x) = e^x \quad \text{(식3-22)}$$

밑이 $e$가 아닌 다른 지수함수는 밑이 $e$가 되는 지수함수로 바꾸어 적을 수 있으므로, 수학에서 ***지수함수(exponential function)*** 라고 하면 ***밑이 $e$인 지수함수***를 말합니다. 이제 $f(x) = e^x$ (식3-22)에 대해, 역함수는 $_e x$가 되고, 접하는 직선의 기울기를 구하

는 함수는 $e^x$ 입니다.

| | 원함수 | 접하는 직선 | 역함수 | 이상한 수 |
|---|---|---|---|---|
| 파워함수 | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | ${}^{n}x$ | $i$ |
| 지수함수 | $e^x$ | $e^x$ | ${}_{e}x$ | $e$ |
| 투영된 선분길이 함수 | | | | |

(그림3-25) 기본함수테이블에 지수함수를 구성하는 행이 모두 완성되었습니다.

우리는 기본함수테이블에서 지수함수에 해당하는 항목을 모두 수집했습니다. 그리고 지수함수의 접하는 직선의 기울기를 구하는 과정에서 또 하나의 기본수 $e$, 즉 ***자연상수(Natural Constant)***를 발견했습니다.

(그림3-26) 우리는 지금까지 0, 1, $i$, $e$ 네 개의 기본수를 찾았습니다.

우리는 지금까지 네 개의 기본수를 찾았습니다. 그것은 (그림 3-26)과 같습니다. 이 수를 ***기본수(Elementary Number)***라고 부르는 이유는 이 수들의 조합으로 모든 다른 수를 나타낼 수 있고,

우리 우주의 물리법칙을 기술하는데 필수적으로 사용되기 때문입니다. (그림3-25)에서 파워함수의 역함수를 ***루트함수(root function)*** 라고 하고, 지수함수의 역함수를 ***로그함수(log function)***라고 하며, 표준 수학기호로는 아래 (식3-23), (식3-24)로 적습니다.

$${}^{n}x = \sqrt[n]{x} \quad \text{(식3-23)}$$
$${}_{e}x = \log_{e}x = \ln x \quad \text{(식3-24)}$$

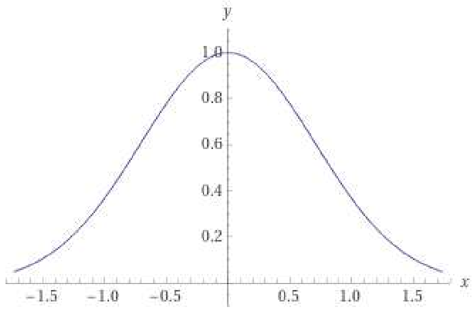
밑을 자연상수 $e$로 하는 로그를 "***자연로그(Natural Logarithm)***" 라고 하는데, $\log_e$대신에 Natural의 n을 사용하여 $\ln$으로 적을 수 있습니다. 로그함수의 경우, 밑을 e, 10 및 2로 하는 로그는 특별한 이름을 가집니다. 각각을 ***자연로그(natural logarithm)***, ***상용로그(common logarithm)*** 및 ***이진로그(binary logarithm)***라고 합니다.

$$\log_{e}x = \ln(x) \quad \text{(식3-24b, 자연로그)}$$
$$\log_{10}x = \log(x) \quad \text{(식3-24c, 상용로그)}$$
$$\log_{2}x = \lg(x) \quad \text{(식3-24d, 이진로그)}$$

수학에서는 $\log_{e}x = \ln(x)$ (식3-24b, 자연로그)를 대부분 사용하고, 컴퓨터공학에서는 컴퓨터가 이진수를 사용하고, 알고리즘(algorithm)의 시간 복잡도(time complexity)가 분할 후 정복(divide and conquer)로 이루어지는 경우가 많으므로, 이진로그를 많이 사용합니다.

우리는 지금까지 함수를 찾을 때마다 함수를 그려서 모양을 파악했습니다. 이제 이러한 함수의 변형된 형태나 조합된 형태가 어떤 모양을 나타내는지 파악하는 것은 많은 도움이 됩니다. 예를 들면 수집된 자료들의 분포를 분석하기 위해서 사용하는 표준정규

분포(Standard Normal Distribution)는 (그림3-26)처럼 지수함수와 파워함수가 결합된 형태를 가집니다.




(그림3-26) $e^{-x^2}$의 그래프는 종(bell) 모양의 그래프로 표현되는데, 정규분포의 기본식을 구성합니다.

지금까지 발견한 기본함수를 (그림3-27)에 정리해 보았습니다.


(그림3-27) 위첨자와 아래첨자를 이용하여 기본함수를 표현합니다.

$x^2$은 $x$를 2회 곱하는 것을 의미합니다.

${}^2x$는 2회 곱해서 $x$가 되는 수를 의미합니다.

$2^x$는 2를 $x$회 곱하는 것을 의미합니다.

${}_2x$는 $x$를 만들기 위해 2를 곱하는 횟수를 의미합니다.

$$x^{2} \quad \sqrt[2]{x} \quad 2^{x} \quad \log_{2} x$$

(그림3-28) 기본함수의 표준수학 표기법

지금부터 3장의 뒷부분은 지금까지 발견함 기본함수의 그래프를 그리는 방법 및 그래프의 특징, 그리고 로그 함수의 성질에 대해서 설명합니다. 하지만, 이 부분은 책의 전체적인 주제를 이해하는데 상관없으므로 읽지 않고 건너뛰어도 됩니다.

# 표준수학

# 그래프의 종류

함수 $f(x)$가 주어지면, 그래프를 그릴 때 $f(x)$의 변형된 형태에 대해서 그래프의 모양을 생각하는 것은 많은 도움이 됩니다. 첫 번째 변형된 형태는 함수의 역수 형태이고, 두 번째 변형된 형태의 역수 형태에서 분모에 1을 더한 형태입니다.

$f(x)$ (식3-25)

$1/f(x)$ (식3-26)

$1/(1+f(x))$ (식3-27)

$1/f(x)$ (식3-26)은 $f(x)$의 값이 커지면 0에 접근하고, $f(x)$의 값이 작아지면, 무한에 접근하는 형태를 가집니다. $1/f(x)$은 분모가 0이면 값을 가지지 않으므로, 그래프를 그리면 분모가 0일 때 값을 가지지 않는 그래프가 그려집니다. 이러한 ***특이점(singularity)***을 없애기 위해서 $1/f(x)$ 형태의 식에서 분모에 1을 더해서 $1/(1+f(x))$ (식3-27)처럼 만들어서 그래프를 그릴 수 있습니다.

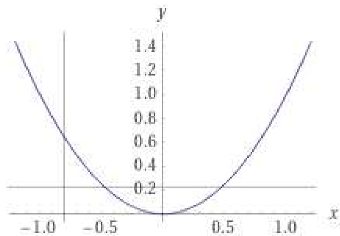
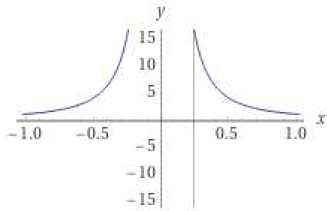
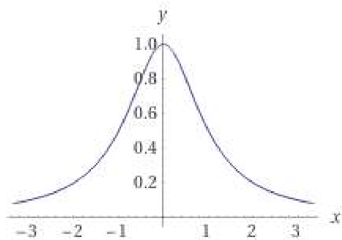
먼저 파워함수 $x^2$과 변형된 형태에 대해서 그래프를 그려보겠습니다. 함수들은 $x^2$, $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 및 $\frac{1}{1+x^2}$ 입니다.

$x^2$ (식3-28)

$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ (식3-29)

$\frac{1}{1+x^2}$ (식3-30)

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$식은 $x \to 0$이면 무한에 가까워집니다. 이러한 특이점을 없애기 위해 분모에 1을 더하면, $\frac{1}{1+x^2}$가 되는데, 이제 $x \to 0$이면 함수는 1에 접근합니다. (그림3-29)는 파워함수와 변형된 형태의 그래프를 그린 것입니다.

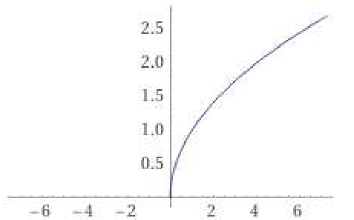
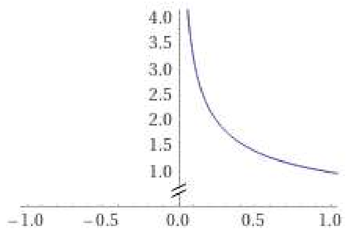
| 수식 | 그래프 |
|---|---|
| $x^2$ |  |
| $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ |  |
| $\frac{1}{1+x^2}$ |  |

(그림3-29) 파워함수 $x^2$과 변형된 형태에 대한 그래프

다음은 루트 함수 ${}^2x = \sqrt[2]{x}$와 역수 형태 $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$을 그립니다. 정의구역이 양수이므로, 분모에 1을 더한 형태는 그리지 않습니다. 그래프는 (그림3-30)과 같습니다.

$${}^2x = \sqrt[2]{x} \quad (식3\text{-}31)$$

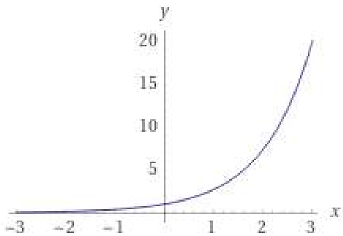
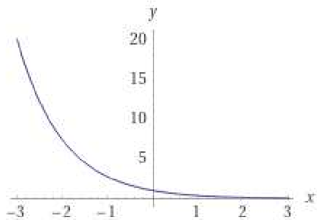
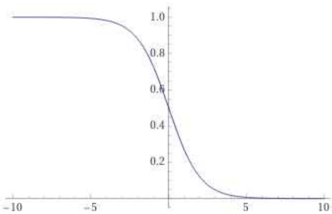
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \quad (식3\text{-}32)$$

| 수식 | 그래프 |
|---|---|
| ${}^2x = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ |  |
| $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ |  |

(그림3-30) 루트함수 $\sqrt[2]{x}$를 반시계방향으로 90도 회전시킨 형태가 루트 함수의 역수 형태의 그래프입니다.

다음으로 지수함수의 그래프를 그려보겠습니다. 우리가 그려볼 그래프는 $e^x$, $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ 및 $\frac{1}{1+e^x}$함수입니다. $e^x$는 $x$값이 커질수록 무한에 접근하고, $x$값 작아질수록 0에 접근합니다. 역수 형태

는 $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$로 지수에 음수를 가지므로, $x$값이 커질수록 0에 접근하고, 작아질수록 무한에 접근합니다. (그림3-31)에 그래프를 나타내었습니다.

| 수식 | 그래프 |
|---|---|
| $e^x$ |   |
| $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ |   |
| $\frac{1}{1+e^x}$ |   |

(그림3-31) 지수함수 $e^x$와 변형된 형태의 함수에 대한 그래프

$\frac{1}{1+e^x}$의 그래프는 S모양을 가지기 때문에 ***시그모이드 함수 (Sigmoid function)***라 하는데, $-\infty$와 $+\infty$와 범위의 수를 0에서 1

사이의 수로 정규화하는 특징을 가지고 있어서 다양한 곳에서 많이 사용합니다.

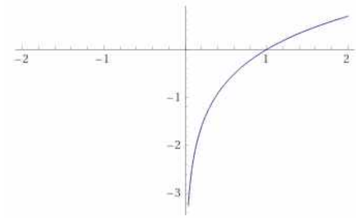
$$e^{x} \quad \text{(식3-33)}$$

$$\frac{1}{e^{x}} = e^{-x} \quad \text{(식3-34)}$$

$$\frac{1}{1+e^{x}} \quad \text{(식3-35)}$$

다음으로 로그함수의 그래프를 그려보겠습니다.

$${}_{e}x = \log_{e}x \quad \text{(식3-36)}$$

| 수식 | 그래프 |
|---|---|
| ${}_{e}x = \log_{e}x$ |  |

(그림3-32) ${}_{e}x = \log_{e}x$의 그래프는 $x$값이 급격하게 커지더라도, $y$값은 커지지 않습니다.

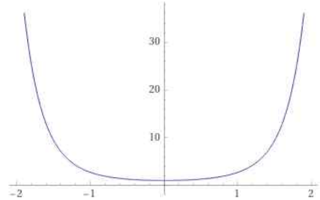
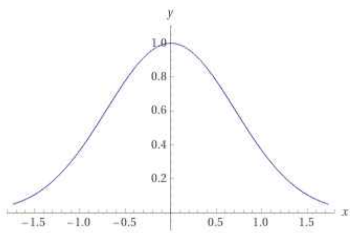
${}_{e}x = \log_{e}x$ 함수는 빅뱅이 시작한 이후 $x$값이 1초마다 1씩 증가했다고 하더라도, $y$값은 고작 60정도입니다.

마지막으로 파워함수와 지수함수가 결합된 형태의 함수의 그래프를 살펴보겠습니다.

$$e^{x^2} \quad (\text{식3-37})$$

$$\frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2} \quad (\text{식3-38})$$

$e^{x^2}$ (식3-37)은 지수함수의 지수부분이 파워함수 $x^2$입니다. 지수값이 음수가 되지 않으므로, $-\infty$와 $+\infty$에 대해서 $y$값이 급격하게 증가합니다.

| 수식 | 그래프 |
| --- | --- |
| $e^{x^2}$ |   |
| $\frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$ |   |

(그림3-33) $\frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$은 표준정규분포를 나타내는 식의 기본형태입니다.

$\frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$ (식3-38)은 ***표준정규분포(Standard Normal Distribution)***를 나타내는 식의 기본 형태인데 종(bell) 모양의 그래프입니다. 함수와 그래프의 종류를 익히면서, 그래프가 주어졌을

때 해당하는 함수가 어떤 것인지를 알면, 수학적인 사고에 많은 도움이 됩니다.

# 표준수학

# 로그함수와 로그의 성질

${}_a x$의 표준수학 표기법은 $\log$를 사용하여 (식3-39)처럼 나타냅니다. 로그 $a$의 $x$, 영어로는 "log base a of x"라고 읽습니다.

$${}_a x = \log_a x \quad \text{(식3-39)}$$

로그함수는 (식3-40)에서 (식3-43)의 다양한 특징을 가집니다.

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad \text{(식3-40, Product)}$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \quad \text{(식3-41, Quotient)}$$

$$\log_b x^p = p log_b x \quad \text{(식3-42, Power)}$$

$$\log_b \sqrt[p]{x} = \frac{1}{p} log_b x \quad \text{(식3-43, Root)}$$

(식3-40)은 로그함수 자체의 특징을 나타냅니다. $b^n = x$이면 정의에 의해 $\log_b x = n$입니다. $b^m = y$이면 정의에 의해 $\log_b y = m$입니다. 이제 $b^n$과 $b^m$을 곱하면 (식3-44)를 얻습니다.

$$b^n b^m = xy = b^{n+m} \quad \text{(식3-44)}$$

지수함수의 성질에 의해 $xy = b^{n+m}$이 됩니다. 이제 이 식에 대해 로그함수의 정의를 적용하면 (식3-45)를 얻을 수 있습니다.

$$\log_b xy = n + m = \log_b x + \log_b y \quad \text{(식3-45)}$$

(식3-41)은 $x/y = xy^{-1}$이므로, (식3-40)을 적용하여 증명하고, (식3-42)는 $x^p$는 $x$를 $p$번 곱한 것이므로, (식3-40)에 의해 $\log_b x$를 $p$번 더한 것이 되므로 증명할 수 있습니다. (식3-43)은 $\sqrt[p]{x} = x^{1/p}$이므로 (식3-42)를 사용하여 증명할 수 있습니다.

(식3-46)은 로그함수의 밑을 임의의 상수 $k$로 치환할 수 있다는 것을 보여줍니다.

$$\log_b x = \frac{\log_k x}{\log_k b} \quad \text{(식3-46)}$$

(식3-46)은 지수함수와 로그함수의 정의에서 출발합니다.

$$x = b^{\log_b x} \quad \text{(식3-47)}$$

지수함수와 로그함수는 역함수관계이므로 $f(f^{-1}(x)) = x$가 성립합니다. (식3-47)은 이것을 보여줍니다. 이제 $\log_k x$식의 $x$에 (식3-47)의 결과를 치환합니다. 그리고 (식3-42, Power)성질을 적용하면 (식3-48)을 얻습니다.

$$\log_k x = \log_k (b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_k b \quad \text{(식3-48)}$$

(식3-48)에서 양변을 $\log_k b$로 나누면 $\log_b x = \dfrac{\log_k x}{\log_k b}$ (식3-46)을 얻습니다.

문서의끝@