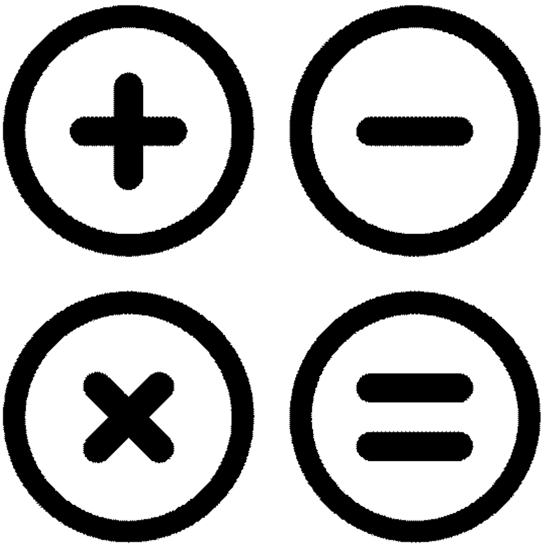
게임개발자가
하나님을 믿는 이유



2022년3월

서진택

머리말

수학이나 과학에 깊은 지식이 없더라도 이해할 수 있는 수학내용에 대해서 감동을 느낄 수는 없을까요? 그래서 그 감동을 주는 수식의 존재가, 절대자의 존재를 변증할 수도 있다는 것을 깨달을 수는 없을까요? 저는 가능하다고 생각합니다.

이 책에서 우리는 **"너무 어렵지 않은, 구체적인 수학적 정보 전달을 통해, 믿기로 작정한 사람에게 주는 확신이 아니라, 믿지 않는 사람에게 의문"**을 던져주고 싶었습니다.

"우주를 만든 누군가가 존재하는 것은 아닐까?"

많은 사람들이, 수학적 지식이나 최신 물리학에 대한 지식을 자신의 신념을 정당화하기 위해 사용합니다. 많은 과학자들은 진화를 주장하기 위해서, 힌두교인은 범신론을 주장하기 위해서, 불교도는 윤회를 주장하기 위해서, 기독교인은 창조를 주장하기 위해서 사용합니다. 놀랍게도 최신 물리학은 어떠한 방식으로 설명하더라도 잘 어울립니다. 최신 물리학은 "어떤 종교가 참이다"는 것은 말해주지 않아도, 최소한 우리의 인식 차원을 넘어서는 절대자가 있다는 것을 말해주는 것 같습니다. 진화를 믿는 과학자는 그 절대자가 "무한에 의한 우연"이라고 믿으며, 저는 그 절대자가 하나님이라고 믿습니다. 이것은 "사실의 문제"가 아니라 "믿음의 문제"입니다. 어떤 과학법칙이나 물리적 사실도 절대자의 존재를 증명하지는 못합니다.

우리는 다양한 경로를 통해 하나님을 만납니다. 이 책에서 이야기하는 방식으로 하나님을 만나는 사람은 극히 적은 수일 것입니다. 하지만 저는 이 방식이 <u>과학(science) 때문에 종교를 부정하는 사람을, ***무신론자(atheism)***에서 ***유신론자(theism)*** 아니 최소한 ***불가***</u>

지론자(agnosticism)<u>로 만들기에는 충분</u>하다고 생각합니다.

절대자에 대한 존재증명을 한다는 많은 주장들이 있지만, 모두 잘못된 주장입니다. 왜 그러한지 수학의 논증(proof)과 명제의 개념으로 설명할 수 있습니다. 참(true)과 거짓(false)을 나눌 수 있는 문장의 전제와 결론을 명제(proposition)라고 합니다. 명제는 필요조건(necessary condition)과 충분조건(sufficient condition)으로 구성됩니다. 전제를 P라고 하고 결론을 Q라고 하면 논증은 다음과 같이 화살표 $\Rightarrow$를 사용한 식으로 표시할 수 있습니다.

$P \Rightarrow Q$ *(논증1)*

위 (논증1)은 "***P이면 Q이다(if P, then Q)***"라고 읽습니다. 예를 들면, "자연수이면 실수이다"라는 논증에서 "자연수이면"이 P에 해당하고, "실수이다"가 Q에 해당합니다. $P \Rightarrow Q$가 참이라고 해서, $Q \Rightarrow P$가 참인 것은 아닙니다. 즉, "실수이면 자연수이다"가 참은 아닙니다. 이때 Q를 P의 필요조건(necessary condition)이라고 합니다. $P \Rightarrow Q$에서 Q가 필요조건이라면, 아래의 문장은 참입니다.

$P \Rightarrow Q$
Q는 P의 필요조건이다.
Q가 참이라면 P일 <u>수도</u> 있다. (논증2)
Q가 아니라면, P도 아니다.
P는 Q의 충분조건이다.

$P \Rightarrow Q$를 이용한 절대자의 존재 증명은 다음과 같이 시작합니다.

절대자가 있다면(P), 창조된 우주는 조화로울 것이다(Q). (논증3)

(논증3)에서 Q는 P의 필요조건입니다. 그러므로 Q가 참인 것을 보인다고 해서, P가 참인 것을 말해주지 않습니다. 우주가 조화로운 것을 관찰한다(Q)고 해서 그것이 절대자가 존재한다(P)는 것을 의미하는 것은 아닙니다. 하지만 여기서 우리가 놓치지 말아야 할 사실은 (논증2)입니다. (논증2)는 항상 참은 아니지만, "참일 가능성"에 대한 것입니다. 우주가 조화로운 것을 관찰한다(Q)면, 절대자가 존재한다(P)는 가능성이 있는 것입니다. 이렇게 여러개의 필요조건 Q를 제시하면서, P가 참이려는 것을 보이려는 시도를 "***변증(apologetics)***"이라고 합니다.

일반적인 수학책은 하나님에 대한 변증을 포함하지 않고, 하나님에 대해서 변증하는 책은 구체적인 수학정보를 포함하고 있지 않습니다. 그런데 이 책은 절대자에 대한 변증을 포함한 수학책입니다. 이 책을 통해, 수학이나 철학을 공부하는 사람은 일반적인 수학정보를 얻고, 어떤 대상을 수학적으로 생각하는 방식에 대한 기초적인 지식을 얻을 수 있을 것입니다. 대학에서 이공계를 전공한 사람들에게는 이 책을 읽는데 문제가 없을 수 있지만, 고등학교 시절 수학이 어려웠던 사람들에게는 책의 내용이 어려울 수 있습니다. 하지만, 필자는 다른 수학책의 참고 없이 책의 내용을 모두 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

(필자는 20년간 게임개발자로 일하면서 무언가를 만들어 내는 작업을 하고 있습니다)

필자는 대학에서 컴퓨터공학을 전공하고 KOG(코그)라는 게임회사의 설립에 참여하여 2015년까지 16년간 일했습니다. 2016년부터는 별도의 게임회사를 창업하여 게임개발과, 부산의 한 사립대

학에서 가르치는 일을 병행하고 있습니다. 게임 개발에 사용하는 게임엔진을 구현하기 위해서는 수학의 ***선형변환(linear transformation)***, ***미적분(calculus)***등의 개념을 이해해야 하므로, 수학이 필수적인 요수입니다. 그러한 배경이 수학의 식에서 아름다움을 찾을 수 있는 바탕이 된 것 같습니다.

꽃이나 그림을 보고 아름다움을 느끼듯, 자신을 희생하며 헌신하는 사람에게서 아름다움을 느끼듯, 수(number)로 구성된 수식에서 아름다움을 느끼는 것이 가능할까요? 이 책을 통해서 리처드 파인만(Richard Phillips Feynman)이 "***수학에서 가장 비범한 식(the most remarkable formula in mathematics)***"이라고 했던 그 수식에 대해, 독자 분들도 “아름다움”을 함께 느낄 수 있었으면 좋겠습니다.

(1965년 노벨물리학상을 수상한 파인만은, 1985년 양자 컴퓨터의 등장을 예견했습니다)

수학의 기본함수를 구성하는 "***다섯 개의 기본 수***"가 있습니다. 이 다섯 개의 기본수로 이루어진 “***아름다운 공식***”은 다음과 같은 사실을 우리에게 알려줍니다.

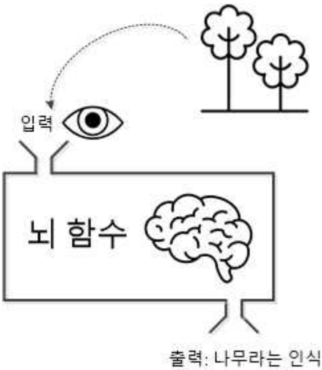
① 우주에는 규칙이 있다.
② 과학에는 한계가 있다.

저는 이 아름다운 공식을 이해하면서, 인간이 가질 수밖에 없는 한계에 대해서 공학적인 이해를 할 수 있었습니다. 또한 공학적인 한계가 있는 우주에 살면서, 수학적으로는 한계가 없는 것을 생각하고 상상한다는 것 자체가 참 놀라웠습니다.

3D 게임에서 물체의 위치, 크기, 회전을 나타내기 위해서 내부적으로 ***변환(transformation)***을 사용합니다. 변환은 성경의 ***삼위일체(trinity)***를 변증하기 위해 사용할 수 입습니다. 변환이 삼위일체를 증명하지는 못합니다. 어떠한 사실도 절대자의 존재를 증명할 수는 없습니다. 하지만, 최소한 변증의 도구는 됩니다. 논의에서 제외시켜 버릴 수는 없다는 의미입니다. 변환은 다음과 같은 사실을 우리에게 알려줍니다.

① 우리는 사물의 본질을 관찰할 수 없다.
② 삼위일체는 참이거나 거짓이다.

사람의 눈(eye)은 곡면 2차원이고 입력은 4차원 이상의 데이터입니다. 또한, 입력을 해석하는 뇌(brain)가 눈의 시신경(optic nerve)과 연결되어 있으므로, 우리는 보는 실재를 인식한다고 생각하지만 그것은 사실이 아닙니다. 뇌가 해석한 결과를 본다고 느끼는 것입니다. 이 사실은 참으로 놀랍습니다. 입력이 먼저이고, 입력을 해석하는 것이 그 다음이 아닙니다. 입력의 해석이 우리 자아의 일부이므로, 입력의 해석이 먼저이고, 입력 자체는 입력의 해석을 통해서 알게 된 것입니다.



(우리는 객관적 사실을 본다고 생각합니다. 하지만, 어느 누구도 어떤 대상의 본질을 볼 수 없습니다. 우리는 뇌(brain)라는 함수가 눈의 입력을 변환한 결과를 사실로 인식하는 것입니다)

과학은 우리 우주가 138억년 되었다고 주장합니다. 이것은 사실입니다. 하지만 시간이 서로 상대적으로 흐르는 현상에 대한 이론인, ***특수상대성이론(Special relativity)***을 이해하면, 우리 우주가 약 6,000년 되었다는 주장이 허튼소리가 아니라는 것을 알게 됩니다. 이 책에서는 수학적인 계산으로 가능성을 보여주고 있습니다. 특수 상대성이론을 이해하면 다음과 같은 사실을 받아들일 수 있습니다.

① 우리 우주는 138억년이면서 동시에 6,000년일 수 있다.
② 하나님의 전지전능과 인간의 자유의지는 모순이 아니다.

이 책은 수학의 ***사칙연산(basic four arithmetic operation)***과 ***집합(set)***의 개념만 알아도 처음부터 끝까지 읽는데 무리가 없도록 구성하였습니다. 하지만 사람마다 차이가 있어서 어떤 사람은 처음부터 끝까지 수식을 이해하는데, 전혀 막힘이 없이 읽을 수 있을 것이고, 어떤 사람은 중간에 막히는 부분이 있을 수 있습니다.

중간에 막히는 부분이 있다면, 이해가되지 않더라도 전체적으로 처음부터 끝까지 읽어볼 것을 추천합니다. 막힌 부분은 다시 읽어보면 이해할 수 있을 것이고, 이 책은 다른 책을 참고하지 않아도 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

이 책은 전반적으로 다음과 같은 이야기 구조를 가집니다.

① 우주에는 규칙이 있고, 과학에는 한계가 있다.
(1장~5장)
② 우리는 사물의 본질을 관찰할 수 없다.
삼위일체는 과학적으로도 틀리지 않다.
(6장)
③ 우주의 나이는 138억년 이면서, 1만년이다.
(7장)
④ 절대자는 인류 모두를 심판할 것이고, 그날은 멀지 않았다.
하지만, 우리는 이 심판을 벗어날 방법이 있다.
(8장)

이 책에서 우리는 고등학교 수준에서 배우는 수학의 구조와 원리에 대해서 배울 것입니다. 우리들 대부분은 수학에 대해서 두려움을 느끼고 있습니다. 그리고 수학이라는 학문에서 배우는 각종 개념들이 왜 필요한지에 대해서, 후에 자신이 일하는 곳에서 어떻게 사용될지에 대해서 잘 알지 못합니다.

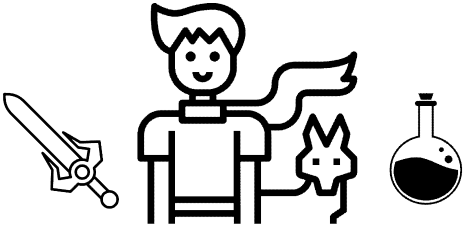
많은 사람들이 한국의 고등학교 수학교육에 대해서 문제점을 이야기하지만, 저는 큰 문제는 없다고 생각합니다. 고등학교 수학이 어려운 한 가지 이유는 시험을 위한 변별력을 위해서, 실제로 수학이 사용되는 상황보다 어려운 문제를 풀어야하기 때문입니다. 제가 대학에서 컴퓨터공학을 전공하면서, 크게 놀랐던 한 부분은, 각 수학적 대상의 원리를 이해하고 간단한 수식을 풀이하는 정도

만 이해하면 컴퓨터공학에 수학을 활용하기에 충분하다는 것입니다. 우리는 고등학교 시절에 수학의 너무 어려운 부분까지 다루었습니다. 왜냐하면, 많은 수의 학생들의 성적을 평가하여 누가 수학을 더 잘하는지에 대한 판단이 필요하기 때문입니다.

어떤 사람들은 시험자체가 '악'이라고 이야기하지만, 그렇지는 않은 것 같습니다. 시험은 누가 더 수학을 잘하는지 드러내고 그것은 필요한 과정입니다. 시험이 교육에 좋지 않게 보이는 이유는 시험결과를 사용하는 사람들의 가치판단 때문입니다. 우리에게 필요한 것은 시험을 폐지하는 것이 아니라, 시험 결과에 대해서 누가 더 우수하고 덜 우수한지 가치를 판단하는 사람들의 태도를 바꾸는 것입니다.

저는 게임 개발자로 일하면서, 고등학교 수학의 대부분이 ***하나의 아름다운 수식***으로 표현된다는 사실을 알게 되었을 때의 그 감격을 잊을 수가 없습니다. 마치 우주의 비밀을 엿본 기분이 들었고, 실제로 그 수식은 우주의 비밀의 일부입니다. 이 책을 읽는 여러분들도 제가 느꼈던 그 감격을 함께 공유했으면 좋겠습니다.

이 책은 수필집이 아니라 실제로 수학책입니다. 그런데 책의 전체를 읽는데 복잡한 수식이 사용된다면, 수학에 흥미를 느끼게 하는데 실패할 수 있습니다. 그래서 필자는 수식을 기술하는데 있어서, 가능한 경우 기존의 수학기호가 아닌 충분히 직관적인 기호를 사용하여 설명하려고 했습니다. 하지만, 이러한 전개는 실제로 수학책의 실제 수학 기호를 이해하는데 어려움을 줄 수도 있습니다. 그래서 필요한 경우, "***표준수학***"이라는 제목으로 실제 수학 기호를 사용한 요약을 제시하였으므로 표준 수학기호와 비교할 수 있습니다. 하지만 독자들은 이 부분을 무시하고 읽지 않으셔도 됩니다.



(이 책을 읽는 우리는 우주의 비밀을 푸는 게임의 주인공입니다. 게임을 시작한 우리의 인벤토리(inventory)는 비워져 있습니다. 인벤토리에 항목을 하나씩 채워가면서, 스토리를 완성해 가면 우리는 정말 아름다운 하나의 수식을 만나게 됩니다)

이 책 전체를 읽을 때에는 우주의 비밀을 알아가는 재미있는 소설이라고 느끼게 될 것입니다. 게임 개발자로 일하면서 알았던 '***하나의 아름다운 수식***'의 아름다움에 대한 감동을, 이 책을 읽는 여러분들이 함께 느낄 수 있었으면 좋겠습니다.

이 책을 읽기 위한 전제 조건이 있습니다. 그것은 수를 대상으로 한 사칙연산(basic four arithmetic operators)을 할 수 있어야 한다는 것입니다. 어떤 임의의 수 a와 b가 주어졌을 때 아래 식들의 의미를 이해하고 있어야 합니다. 각각은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 의미합니다.

$$\begin{array}{ccc} a & + & b \\ a & - & b \\ a & \times & b \\ a & / & b \end{array}$$

그리고 기본적인 집합(set)의 의미를 이해하고 있어야 합니다. 다음과 같은 집합 A와 B를 고려해 봅시다.

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$
$$B = \{2,4,6,8\}$$

A는 0과 10사이의 ***홀수(odd)***를 나타내는 집합이며, ***원소(element)***의 개수는 5입니다. B는 0과 10 사이의 ***짝수(even)***를 나타내는 집합이며 원소의 개수는 4입니다. A와 B의 ***합집합(union)***은 다음과 같이 나타냅니다.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

A와 B의 ***교집합(intersection)***은 다음과 같이 나타냅니다. 이 경우 교집합은 ***공집합(empty set)***입니다.

$$A \cap B = \varnothing$$

수학을 포기한 사람이라는 의미로 우리는 '수포'라는 말을 사용합니다. 참 안타깝고 슬픈 말입니다. 어떤 일을 하든 포기하지만 않으면, 이루어 낼 수 있습니다. 하지만 포기한 사람에게는 어떠한 좋은 방법도 통하지 않습니다. 여러분이 하는 일이 수학이든, 일이든, 사랑이든, 진리에 대한 갈구이든 포기는 하지 않았으면 좋겠습니다.

2022년 3월, 저자 서진택

1. 게임의 시작: 함수

수식, 식, 방정식과 함수

좌표계와 차원

$f(x) = x^2$ 함수그리기

지수의 성질

$f(x) = x^2$ 의 역함수

$f(x) = x^2$ 의 접하는 직선

2. 기본함수: 파워함수

파워함수

파워함수의 역함수

파워함수의 접하는 직선 함수

선, 직선조각, 반직선

벡터

베이시스(기저, Basis)

선형조합(Linear Combination)

복잡한 수(Complex Number)

3. 기본함수: 지수함수

지수함수

희귀한 지구(Rare Earth hypothesis)

지수함수의 역함수

지수함수의 접하는 직선의 기울기 찾기

이상한 수 e

4. 기본함수: 호의 길이에 대한 투영된 선분의 길이 함수

호에서 투영한 선분의 길이 구하기
이상한 수 π(파이)
삼각함수(Trigonometric Function)
선분의 길이에서 호의 길이 구하기
접하는 직선의 기울기 구하기

5. 하나의 아름다운 수식

벡터의 추가적인 연산
복소수의 곱셈
오일러의 공식(Euler's Formula)
수학에서 가장 아름다운 표

6. 변환(transformation)

실세계를 인식하는 방법
선형 조합의 간단한 표기법: 행렬
인식의 한계
변환: 삼위일체에 대한 이해

7. 시간의 상대성

특수상대성 이론
로렌츠 변환(Lorentz Transformation)
종료조건
우주의 역사

천지창조에 걸린 시간

8. 심판, 복음

요한계시록
짐승의 수: 컴퓨팅 장치
본질적인 불가능
창조, 타락, 구속
초대

1장. 게임의 시작: 함수

수식, 식, 방정식과 함수

좌표계와 차원

$f(x) = x^2$ 함수그리기

지수의 성질

$f(x) = x^2$ 의 역함수

$f(x) = x^2$ 의 접하는 직선

수식, 식, 방정식과 함수

함수의 정의를 살펴보기 위하여, 먼저 수식(numerical expression), 식(expression), 방정식(equation) 및 함수(function)의 정의에 대해서 알아봅시다.

우리는 ***사칙연산(basic four arithmetic operators)***에 대해서 알고 있습니다. 예를 들어서 3을 2번 곱하는 것을 다음과 같은 ***수식(numerical expression)***으로 나타낼 수 있습니다.

$$3 \times 3 \quad \text{(식1-1)}$$

위 (식1-1)의 평가 결과는 9입니다. 우리는 지수(exponential number)를 이용하여 위 (식1-1)을 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있습니다. 지수는 오른쪽 위에 작은 ***첨자(superscript)***로 표현합니다.

$$3^2 \quad \text{(식1-2)}$$

위 (식1-2)에서 3을 ***밑(base)***, 2를 ***지수(exponent)***라고 합니다. 이제 3을 4번 곱하는 것을 식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \quad \text{(식1-3)}$$

수식을 구성하는 일부분이 ***독립변수(independent variable)***가 되면, 이제 수식(numerical expression)은 일반적인 ***표현식(expression)***이 됩니다. (식1-3)에서 밑을 변수 x로 바꾸면 다음과

같은 표현식을 구성할 수 있습니다.

x^4 (표현식1-4)

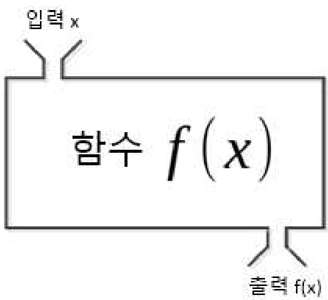
위 (표현식1-4)의 의미는 어떤 변수(variable) x를 4번 곱한다는 의미입니다.

$$x \times x \times x \times x$$

표현식에 등호(=) 기호를 사용하여 식을 만족해야 할 조건을 명시하면, ***방정식(equation)***이라고 합니다. 다음에서 (표현식1-5)를 이용해서 (방정식1-6)을 나타낼 수 있습니다.

x^2 (표현식1-5)
$x^2 = 9$ (방정식1-6)

(방정식1-6)의 의미는 어떤 수 x를 ***제곱(square)***하면 9가 된다는 의미입니다. (방정식1-6)을 풀이하면 x의 값이 3이 되어야 하므로, (방정식1-6)의 ***해(정답, solution)***는 3입니다.



(그림1-1) 함수 $f(x)$는 입력으로 x를 받아, x를 이용한 계산 결

과 $f(x)$를 리턴(return)합니다.

표현식이 주어졌을 때, 각 독립변수의 입력값(input)에 대응하는 표현식의 출력값(output)을 ***대응(사상, mapping)***시킨 것을 ***함수 (function)***라고 합니다.

(그림1-1)은 함수 f가 입력값 x에 대해서 출력값 $f(x)$를 가지는 것을 그림으로 표현한 것입니다. 일반적으로 함수를 적을 때 영문 function의 첫 글자에 해당하는 f를 사용하는 경우가 많습니다. (표현식1-5)를 이용해서 함수 f를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$f(x) = x^2 \quad \text{(함수1-7)}$$

위와 같이 함수를 정의했을 때 f를 ***함수 이름(function name)***, x를 ***인자(파라미터, parameter)***라고 하고 등호(=)뒤에 정의된 부분을 ***함수 몸체(function body)***라고 합니다. 그리고 함수의 계산 결과를 평가하는 동작을 "***함수가 값을 돌려준다(리턴, return)***"고 합니다. 함수가 실수 값을 리턴하며, 그 함수는 실수가 사용되어야 하는 곳에 사용할 수 있습니다. 예를 들면 (식1-7b) $f(x)+2$처럼 사용할 수 있는데, $f(x)$의 ***리턴값(returned value)***과 2를 더한다는 의미입니다.

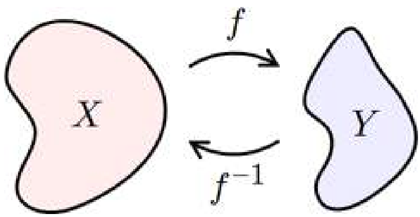
$$f(x)+2 \quad \text{(식1-7b)}$$

어떤 함수가 주어졌을 때, 함수의 성질을 이해하기 위해 세 가지 분석을 할 수 있어야 합니다. 첫 번째는 함수를 그리는(drawing) 것입니다. 두 번째는 함수의 ***역함수(inverse function)***를 찾고 의미를 이해하는 것입니다. 마지막으로, 함수의 임의의 입력 독립변수에 대해서 그 위치에서의 ***접하는 직선(접선, tangent line)***

을 계산하는 식을 찾고, 접하는 직선의 기울기의 의미를 이해하는 것입니다.

① 함수를 그린다.
② 함수의 역함수를 찾는다.
③ 함수의 접하는 직선을 구하는 식을 찾는다.

왜 이와 같은 특징을 파악해야 할까요? 함수를 그린다는 것은 함수의 전체적인 의미를 시각적으로 이해할 수 있기 때문입니다. 또한, 이 과정을 역으로 적용하면, 어떤 분석 결과를 그려서 표현했을 때, 그림으로 표현된 결과의 원래 식을 유도하기 위해서 사용할 수 있습니다.

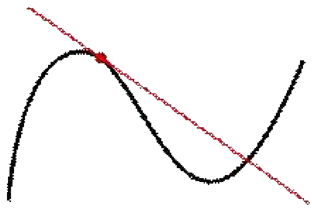


(그림1-1b) 역함수는 출력에 대한 입력을 찾는 함수입니다. f^{-1}은 f의 역함수를 의미합니다.(그림: 한글위키피디아)

함수의 역함수는 함수의 출력을 알고 있을 때, 출력을 이끌어내기 위한 입력 독립변수의 값을 찾는 일반적인 함수를 구한다는 것을 의미합니다. (함수1-7) $f(x)=x^2$에서 x가 주어지면 $f(x)$를 구할 수 있습니다. 예를 들어 x가 3이라면, $3^2=3\times3$이므로 $f(x)$는 9입니다. 그런데 우리가 함수의 출력 $f(x)$를 알고 있을 때, 입력 x를 구해야 하는 경우가 있습니다. 이것을 함수로 구할 수 있다고 가정하고, 그 함수를 g라고 합시다. 그러면 역함수 $g(9)$의 의

미는 $f(x)$ 즉 x^2의 출력값이 9일 때, 입력값 x를 찾는 함수입니다. $3 \times 3 = 3^2 = 9$이므로 $g(9) = 3$입니다. 역함수는 일반적으로 위첨자 -1을 표시하여 나타냅니다. 그러므로 $f(x)$의 역함수는 $f^{-1}(x)$라고 적을 수 있습니다.

$$f^{-1}(9) = g(9) = g(3^2) = 3 \quad \text{(방정식1-8)}$$



(그림1-1c) 그래프의 접하는 직선을 찾는 문제는 매우 빈번하게 이용됩니다.

함수의 접하는 직선을 구하는 것은 모든 공학 분야에서 아주 빈번하게 사용합니다. 주어진 함수의 정의가 명확하면, 접하는 직선의 의미는 수학적으로 명확하게 정의될 수 있습니다. 예를 들어서 $f(x)$가 시간 x에 대해서 특정한 방향에 대한 위치를 나타낸다고 가정해 봅시다. 그러면 시간 x에 대한 그래프의 접하는 직선을 구한다는 것은, 시간 x에서 ***순간 속도(instantaneous velocity)***를 구한다는 의미입니다. 왜냐하면 시간에 따라서 위치가 변하는 정도를 속도라고하고 접선(tangent line)은 아주 짧은 간격을 의미하기 때문입니다.

좌표계와 차원

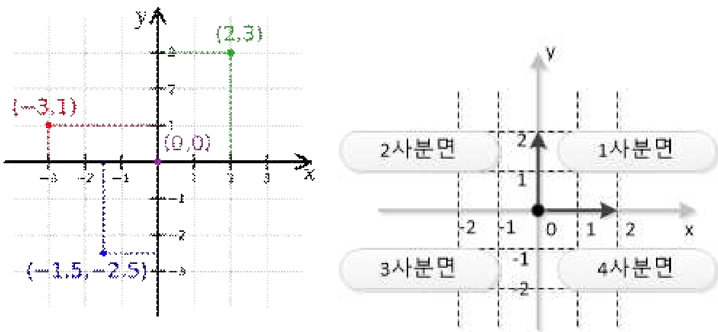
먼저 함수를 그리는 것을 이해하기 위해서 ***좌표계(Coordinate system)***와 ***차원(dimension)***의 개념에 대해서 살펴보도록 하겠습니다.

(그림1-2) 르네 데카르트(출처: 한글위키피디아)

함수를 그리기 위해서 철학자이자 수학자였던 르네 데카르트(프랑스어, René Descartes)가 고안한 직교 좌표계(Orthogonal Coordinate System)를 사용할 수 있습니다. 데카르트의 라틴어 이름은 Renatus Cartesius인데, 이러한 이유로 그가 고안한 좌표계를 ***데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)***라고 합니다. 영어로 읽을 때는 "카티전"이라고 읽습니다. 데카르트 좌표계를 ***표준 좌표계(Standard coordinate system)***라고도 하는데, 표준 좌표계에서는 각 좌표축은 서로 직각(orthogonal)입니다. 2차원(2 dimension)인 경우 가로축(horizontal axis)을 x-축, 세로축(vertical axis)을 y-축으

로 나타냅니다.

$f(x)$함수처럼 독립변수가 한 개뿐이면, 독립변수 x를 가로축에, 출력값 $f(x)$를 세로축에 표시하여 ***그래프(Graph)***로 나타낼 수 있습니다. $f(x)=x^2$함수에 대해서 $f(x)$를 y로 나타내면, $y=x^2$이므로, 각 x값에 대응하는 y값을 얻을 수 있고 이것을 표준 좌표계상에 점으로 그릴 수 있습니다. 모든 x값에 대해서 대응하는 y값을 점(point)으로 그리면 선(line)으로 된 그래프를 얻습니다.

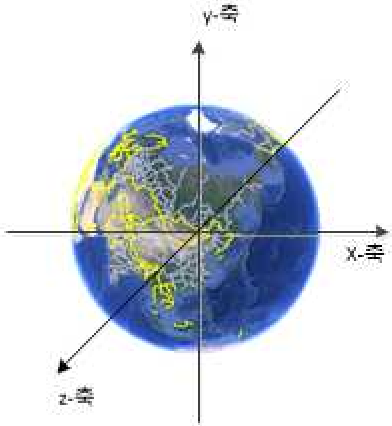


(그림1-3) 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)와 사분면(quadrant).

(그림1-3)은 2차원 표준좌표계의 예입니다. 표준좌표계에서 ***특정한 지점(좌표, coordinate)***을 나타내기 위해서 순서가 있는 ***수쌍(ordered number of pair)***을 사용할 수 있습니다. 예를 들어 (2,3)은 표준 2차원 좌표계에서 x-축 방향으로 2단위, y-축 방향으로 3단위에 위치한 점을 나타냅니다. x-축과 y-축은 한 곳에서 만나는데, 만나는 지점을 ***원점(origin)***이라고 하며, 원점의 좌표는 (0,0)입니다. x-축이 반시계 방향으로 90도(degree)회전할 때마다 나타내는 평면을 ***사분면(quadrant)***이라고 합니다.

좌표계상에서 위치를 기술하는데 필요한 최소 파라미터의 개수를 ***차원(dimension)***이라고 정의할 수 있습니다. 함수를 이용하여

차원을 정의해보면, 위치를 결정하기 위해 필요한 입력의 개수 즉, 위치 함수(position function)의 최소 인자의 수가 차원입니다. 예를 들면 지구상에서 특정한 사람의 위치를 나타내기 위해서는 우리는 지구의 중심을 표준좌표계의 원점으로 가정해서 위치를 나타낼 수 있습니다. *만약 시간이 흐르지 않는다고 가정하면* 서로 직각인 세 개의 축을 이용해서 위치를 나타내므로 3차원 좌표계를 사용한 것이 됩니다.



(그림1-4) 표준 3차원 좌표계: 시간이 흐르지 않는 지구에서는 3차원 좌표계를 사용하여 위치를 나타낼 수 있습니다.

하지만 실제로 ***우리가 사는 우주(Our Universe)***는 3차원이 아니어서 보다 높은 차원을 나타내는 좌표계가 필요합니다.

우리가 사는 우주에는 시간이 흐르고 있어서, 위치를 나타내기 위해서는 시간 t를 포함하여, 4개의 파라미터가 필요한 것 같습니다.

$$(x, y, z, t)$$

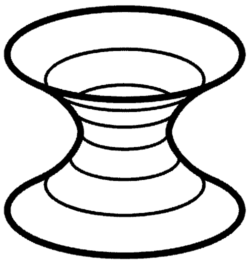
(x,y,z,t)에서 t는 시간을 나타냅니다. 그렇다고 우리 우주가 4차원이라는 결론을 내려서도 안 됩니다. 알베르트 아인슈타인(Albert Einstein)에 의해서 움직이는 물체는 서로 시간이 다르게 흐른다는 것이 밝혀졌는데, 이것을 ***특수상대성이론(Special relativity)***이라고 합니다. 현대물리학에서는 ***로렌츠 변환(Lorentz transformation)***을 이용하면 서로 다르게 흐르는 시간을 사용하는 물체의 움직임을 정확하게 기술할 수 있습니다. 로렌츠 변환은 우리가 이 책에서 배울 기본함수로만 구성되며, 그것은 로렌츠 변환을 이해하는 것이 그렇게 어렵지 않다는 것을 의미합니다. 로렌츠 변환을 이해하면, 우리 ***관성계(Inertial system)*** 에서 138억년처럼 보이는 우리 우주가 다른 관성계에서는 1만년일 수 있다는 결론을 내릴 수 있습니다. 우리는 "로렌츠 변환"을 다룰 때, **우리 우주가 138억년이면서 동시에 1만년이라는 것을 변증(dialectic)**하도록 하겠습니다. 변증은 어떤 사실에 대한 증명이 아니라, 참 일수도 있는 것에 대한 제안이라는 것을 염두에 두세요.

(그림1-5) 알베르트 아인슈타인(출처: 영문위키피디아)

만약 특수상대성이론만 성립하는 우주라면, 우리의 우주는 4차

원인 것이 맞습니다. 하지만 놀랍게도 우리 우주는 ***일반상대성 이론(Theory of General Relativity)***도 성립합니다. 일반상대성 이론은 사실이며 이것은 우리가 사는 우주의 ***시공간(spacetime)***이 굽어있다는 것을 말해 줍니다.

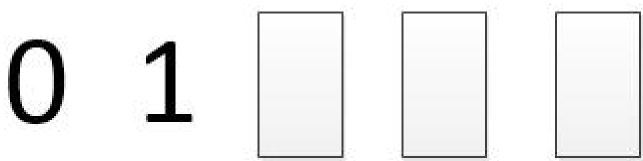
2차원 표준좌표계가 평평한 종이에서의 위치를 기술한다면 문제가 없지만, 종이가 굽어있다면 2차원이 굽었다는 것을 인식하는 보다 높은 공간 차원이 필요합니다. 우리가 인식하는 4차원 시공간이 굽어있다면, 보다 더 높은 차원을 필요로 합니다. 그러므로 우리는 우리 우주가 최소한 5차원이상이라고 생각하며, 최신 우주론은 우리 우주가 11차원이라고 이야기합니다.



(그림1-6) 굽은 시공간: 우리 우주의 시공간은 굽어 있으며, 그것은 우리 우주가 5차원보다는 높다는 의미입니다.

필자가 머리말에서 이야기했듯이 이 책의 목표중 하나는 고등학교 수준의 수학을 기술하는 ***하나의 아름다운 수식***을 이해하는 것입니다. 놀랍게도 이 수식은 방정식이 아니라 수식(numerical expression)입니다. 그것은 변수 없이 수로만 구성된 식이라는 의미입니다. 이 수식은 필자가 ***기본수(Elementary numbers)***라고 부르는 5개의 수로 구성되어 있으며, 과학기술이 첨단으로 발전된

지금도 그 수를 무한대로 정확하게 아는 것은 불가능하며, 이것은 인간 과학기술의 한계가 있음을 보여주는 것입니다. 물론 무한의 시간을 사용하면 그 수 값을 정확하게 알 수 있으므로 수식자체는 수학적으로 정확하게 기술되지만, 구현에 있어서 공학적인 한계가 반드시 존재한다는 의미입니다.



(그림1-6b) 기본수(elementary number) 다섯개 중 우리는 이미 0과 1을 알고 있습니다.

(그림1-6b)에 다섯 개의 기본 수 중에 2개를 나타내었습니다. 그것은 0과 1입니다. 필자가 이것을 기본수라고 부르는 이유는 다섯 개의 수에 규칙을 정하면 이 세상의 모든 수를 나타낼 수 있으며, 나머지 세 개의 수가 ***기본함수(elementary function)***를 정의하면서 하나씩 발견할 수 있기 때문입니다. 우리는 이제부터 세 개의 추가적인 기본수를 발견할 것인데, 이 과정을 통해 우리는 수학의 규칙과 과학의 한계를 알 수 있습니다.

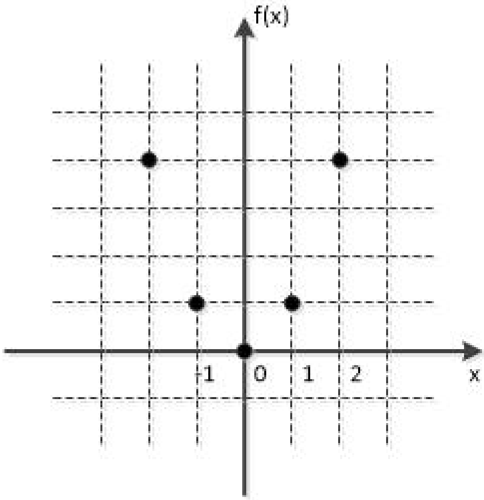
사실 기본함수는 네 가지 입니다. 하지만 네 번째 기본함수는 세 번째 기본함수와 매우 유사하기 때문에 이 책에서는 세가지 기본함수만 고려할 것입니다. 기본함수에 대한 정의는 아래 위키 링크에서 얻을 수 있습니다.

https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_function

$f(x) = x^2$ 함수 그리기

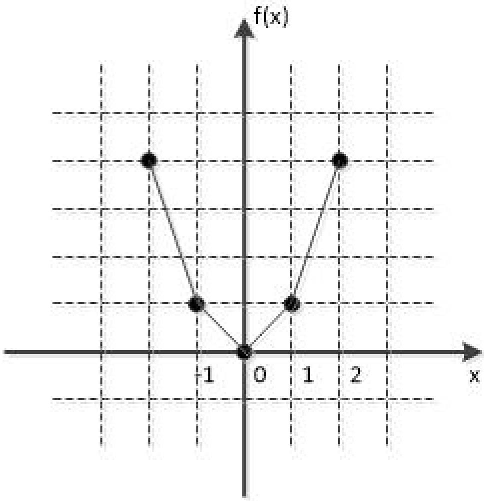
이제 $f(x)=x^2$ (함수1-7)에 대해서 ①함수를 그리고, ②역함수를 찾고, ③접하는 직선을 찾아보도록 하겠습니다. 먼저 함수를 그리는 방법을 알아보겠습니다.

x가 -2, -1, 0, 1, 2 일 때 $f(x)$는 4, 1, 0, 1, 4입니다. 이것을 표준 좌표계에 점으로 그려보면 다음과 같습니다.



(그림1-7) x에 대응하는 값을 y축에 점으로 표시합니다.

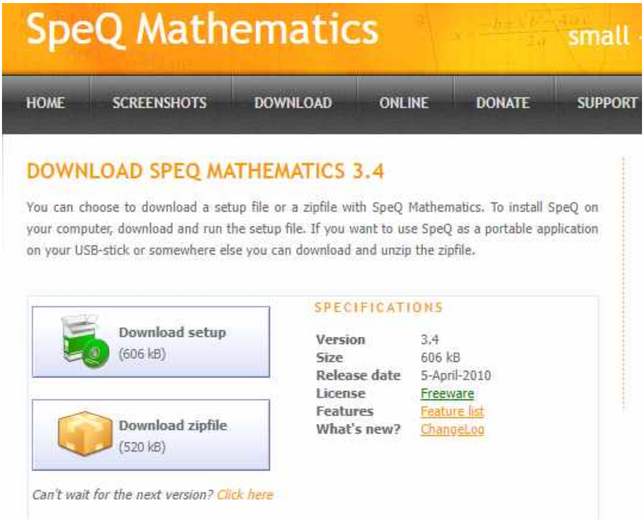
이제 이 점들 사이를 선으로 이어보면 다음 (그림1-8)과 같은 그림을 얻습니다.



(그림1-8)연속하는 점들을 선으로 이어서 그리면 그래프를 얻을 수 있습니다.

컴퓨터를 이용하면 함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있습니다. 필자의 경우는 SpeQ라는 도구를 사용하는데 독자들이 이 공개 소프트웨어를 다운받아서 그래프를 그리는데 사용하면 됩니다. SpeQ의 다운로드 사이트는 다음과 같습니다.

https://speqmath.com/download.html



(그림1-9) SpeQ를 사용하면 다양한 그래프를 손쉽게 그릴 수 있습니다.

이제 SpeQ를 사용해서 $f(x)=x^2$ (함수1-7)을 그려보도록 하겠습니다. SpeQ를 설치하고 프로그램을 실행합니다. 그러면 (그림1-10)과 같은 실행화면을 볼 수 있습니다.

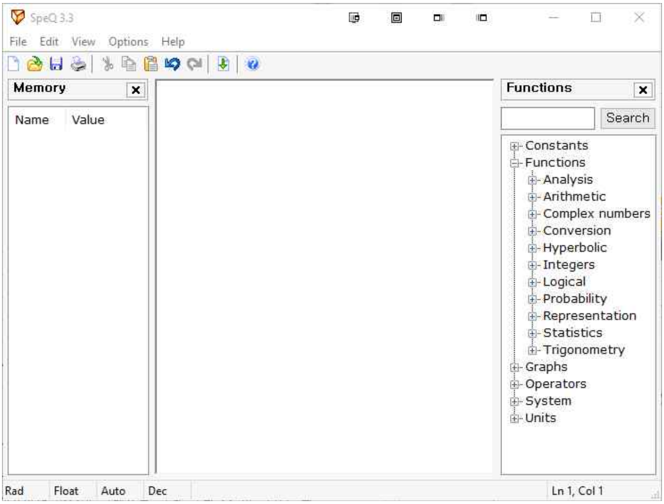
이제 (그림1-11)처럼 프로그램의 텍스트 박스에 다음과 같이 입력합니다.

Plot(x^(2))

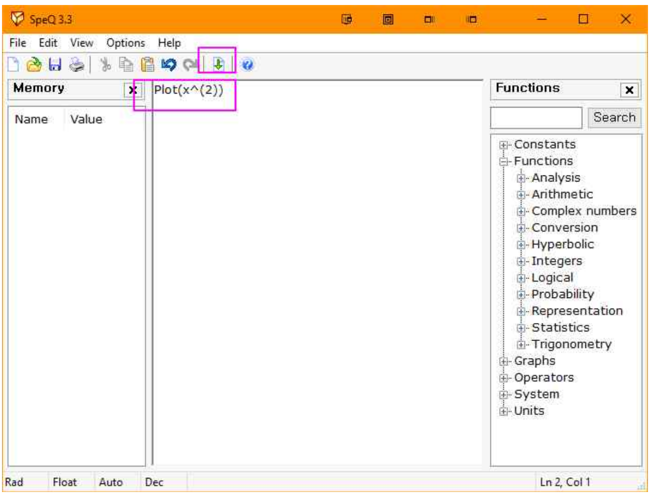
Plot은 그림을 그리라는 명령이고, 그려야할 함수를 괄호 안에 명시합니다. x^2에 해당하는 표현이 x^(2)입니다. 컴퓨터 툴에서는 일반적인 텍스트로 지수를 표현할 수 없으므로, 일반적으로 ***캐럿(^, caret)***기호를 사용하여 지수를 나타냅니다.

그리고 툴바에 있는 초록색화살표 계산버튼(Recalculate sheet)을

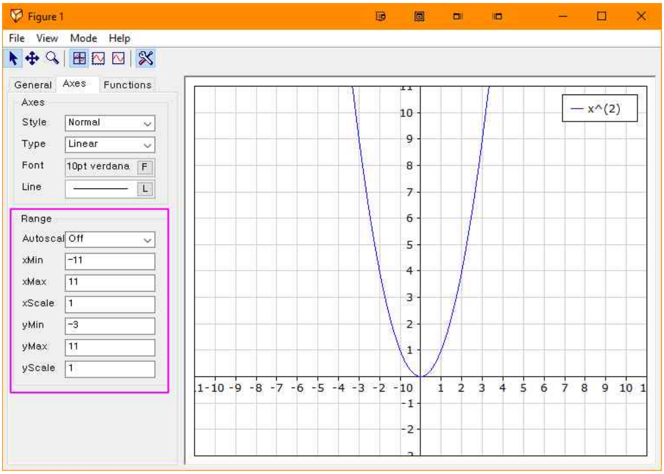
선택합니다.



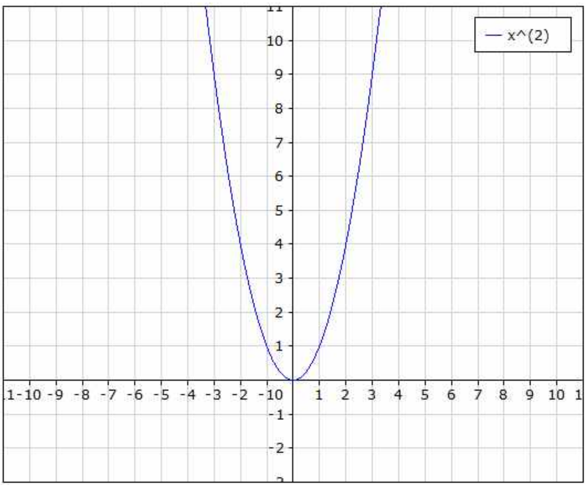
(그림1-10) SpeQ실행화면



(그림1-11) Plot(x^(2))를 입력합니다.



(그림1-12) Axes탭을 선택하여 범위값을 조정할 수 있습니다.



(그림1-12b) $f(x) = x^2$의 그래프입니다

(그림1-12)처럼 [Axes]탭을 선택해서 x와 y의 범위 및 격자선의

간격을 설정할 수 있습니다.

(그림1-12b)는 $f(x)=x^2$의 그래프를 보여줍니다. 그래프를 보면 다음과 같은 매핑이 성립한다는 것을 알 수 있습니다.

$$
\begin{gathered}
\cdots \\
x=-3 \ \Rightarrow \ f(-3)=9 \\
x=-2 \ \Rightarrow \ f(-2)=4 \\
x=-1 \ \Rightarrow \ f(-1)=1 \\
x=0 \ \Rightarrow \ f(0)=0 \\
x=1 \ \Rightarrow \ f(1)=1 \\
x=2 \ \Rightarrow \ f(2)=4 \\
x=3 \ \Rightarrow \ f(3)=9 \\
\cdots
\end{gathered}
$$

그래프는 주어진 범위에서 매핑을 표현하는 훌륭한 툴(tool)입니다. 기본함수를 모두 배우고 나면, 기본함수가 어떤 그래프 모양을 가지는지를 알 수 있습니다. 반대로 그래프가 주어졌을 때, 어떤 기본함수가 가장 비슷하게 그래프를 나타내는 함수인지를 파악할 수 있어야 합니다.

지수의 성질

역함수를 정의하기에 앞서, ***지수(exponent)***의 성질에 대해서 살펴보도록 하겠습니다.

$$x^1 = x \quad \text{(지수의성질1-9)}$$
$$x^0 = 1 \quad \text{(지수의성질1-10)}$$
$$x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5 \quad \text{(지수의성질1-11)}$$
$$(x^2)^3 = (x^2)(x^2)(x^2) = x^6 \quad \text{(지수의성질1-12)}$$

먼저 지수표현식에서 임의의 베이스 x를 1번 곱한 것은 x^1이며 이것은 x자신입니다. x를 0번 곱한 것은 x^0이며 이것은 1이라고 정의합니다. $x^0 = 1$이라는 것이 직관적이지 않아 보이지만, 이러한 정의는 일반적인 지수의 성질이 만족되도록 합니다.

$$X^{n} \times X^{m} = X^{n+m}$$

(그림1-13) 밑이 같은 두 수를 곱하면, 지수 부분은 합해야 합니다. 지수를 포함한 식의 곱셈과 덧셈의 성질입니다.

$x^2 x^3$는 x를 2번 곱하고, 연속해서 3번 곱한 것이므로 지수부분을 더하면 $2+3=5$이므로 x^5가 됩니다. (지수의성질1-11)은 매우 중요합니다. 지수를 포함한 두 식을 곱하면, 지수 부분은 합이 된다는 사실을 기억하도록 하세요. 이제 다음과 같은 식을 고려해

봅시다.

$$x^0 x^3 \quad \text{(식1-13)}$$

(식1-13)은 (지수의성질1-11)에 의해서 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$x^0 x^3 = x^{0+3} = x^3 \quad \text{(식1-14)}$$

(식1-14)에서 $x^0 x^3 = x^3$이므로 $x^0 = 1$이 되어야 함을 알 수 있습니다.

$$X^0 = 1$$

(그림1-13b) $x^0 = 1$ 식은 직관적이지는 않지만, 증명될 수 있습니다.

0이 아닌 x의 역수 $1/x$를 고려해 봅시다. 어떤 수와 ***역수(reciprocal number)***의 곱은 ***곱셈에 대한 항등원(multiplication identity)***인 1이 됩니다. 아래 (식1-15)를 보세요.

$$x \times (1/x) = 1 \quad \text{(식1-15)}$$

$1/x$의 지수형태를 구하기 위해 $1/x = x^n$이라고 가정해 봅시다. 이제 (식1-15)를 지수 형태로 나타내 보면 다음과 같습니다.

$$x^1 \times (x^n) = x^{1+n} = 1 = x^0 \quad \text{(식1-16)}$$

(식1-16)에서 $1+n=0$이므로 $n=-1$인 것을 알 수 있습니다. 그러므로 역수의 지수 형태는 (식1-18)과 같습니다.

$$1/x = x^{-1} \quad \text{(식1-17)}$$

$$1/x^n = x^{-n} \quad \text{(식1-18)}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

(그림1-14) x^n의 역수는 x^{-n}으로 나타낼 수 있습니다.

$f(x) = x^2$의 역함수

함수 $f(x) = x^2$의 독립변수는 x이므로, 각 입력 x에 대해서 $f(x)$를 결정합니다. ***역함수(inverse function)***는 입력과 출력이 역전됩니다. 함수 $f(x)$에 대해서 역함수를 표시하는 일반적인 방법은 역수를 나타내기 위해서 사용한 위첨자(superscript) -1을 함수 이름에 첨자로 붙이는 것입니다. 그러므로 $f(x)$의 역함수는 다음과 (식1-19)와 같이 나타낼 수 있습니다.

$f(x) = (f(x))^{-1} = f^{-1}(x)$ (식1-19)

역함수를 나타내기 위해 f^{-1}을 사용하는 이유는, 함수의 곱셈을 의미하는 ***합성함수(composite function)***의 지수표현과 자연스럽게 어울리기 때문입니다. x를 $f(x)$를 계산하기 위해서 사용하고, 이 결과를 다시 $f^{-1}(x)$의 파라미터로 전달하는 함수를 생각해 봅시다. 그러면 (식1-19b)와 같이 적을 수 있습니다.

$f^{-1}(f(x))$ (식1-19b)

(식1-19b)의 결과는 얼마일까요? $f(x)$의 결과가 $f(x)$의 역함수인 $f^{-1}(x)$에 입력으로 사용되었으므로 결과는 항상 x입니다.

$f^{-1}(f(x)) = x$ (식1-19c)

(식1-19c)는 입력 x를 f를 사용해 변환(transformation)하고, 연속해서 f^{-1}를 사용해서 변환하는 과정으로 생각할 수 있습니다.

그러면 함수의 곱셈 형태로 (식1-19d)처럼 적을 수 있습니다.

$$f^{-1}f^{1}(x)\ \text{(식1-19d)}$$

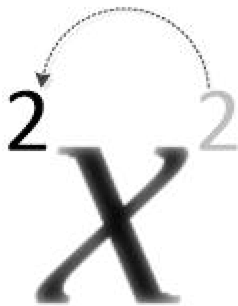
(지수의성질1-11)에 의해서 $f^{-1}f^{1}=f^{-1+1}=f^{0}=1$로 간주하면 (식1-19d)는 (식1-19e)처럼 표현됩니다.

$$f^{-1}f^{1}(x)=1(x)=x\ \text{(식1-19e)}$$

이것이 역함수를 표현할 때 위첨자 -1을 사용하는 이유입니다.

제곱함수 x^2을 정의할 때, 독립변수의 제곱을 나타내기 위해서 첨자 2를 오른쪽위에 표시했는데, 제곱함수의 역함수를 나타내기 위해서 첨자를 왼쪽 위에 표시하도록 합시다. 그러면 다음과 같이 함수를 표시할 수 있습니다.

$$^{2}x\ \text{(식1-20)}$$



(그림1-15) 제곱의 역함수를 나타내기 위해 첨자의 위치를 왼쪽으로 옮깁니다. ^{2}x는 제곱하면 x가 되는 수를 의미합니다.

그러면 함수 $f(x)=x^2$의 역함수를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$f^{-1}(x)={}^2x \quad \text{(함수1-21)}$$

(함수1-21)이 정의되었을 때, x가 9면 다음과 같은 식으로 적을 수 있습니다.

$$f^{-1}(9)={}^2 9 \quad \text{(식1-22)}$$

${}^2 9$의 의미는 “어떤 수 a를 제곱해서 9가 나왔다면, 그 수 a는 무엇인가?”를 묻는 식입니다.

$$a\times a=a^2=9 \quad \text{(식1-23)}$$

(식1-23)의 해는 $a=3$입니다. 그러므로 (식1-22)는 다음과 같이 적을 수 있습니다.

$$f^{-1}(9)={}^2 9=3 \quad \text{(식1-24)}$$

g함수가 다음과 같이 x를 3번 곱하는 함수로 정의되었다고 가정해 봅시다.

$$g(x)=x\times x\times x=x^3 \quad \text{(식1-25)}$$

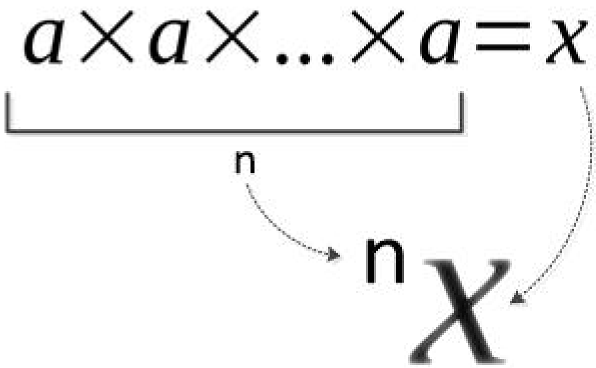
그러면 $g(x)$의 역함수는 다음과 같이 적을 수 있습니다.

$$g^{-1}(x) = {}^{3}x \quad \text{(식1-26)}$$

$g^{-1}(x) = {}^{3}x$는 어떤 수 a를 세제곱하면 결과가 x가 나오도록 하는 a를 찾는 문제입니다. 그러므로 ${}^{3}8$은 $a \times a \times a = 8$을 만족하는 a를 찾는 문제이므로 ${}^{3}8 = 2$입니다.

$${}^{3}8 = {}^{3}(2 \times 2 \times 2) = {}^{3}(2^3) = 2 \quad \text{(식1-27)}$$

(식1-27)은 세제곱했을 때 8이 되는 수는 2라는 의미입니다. (그림1-16)은 ${}^{n}x$의 의미를 설명합니다. ${}^{n}x$는 어떤 수를 n번 곱했더니 x가 되는 수를 의미합니다.

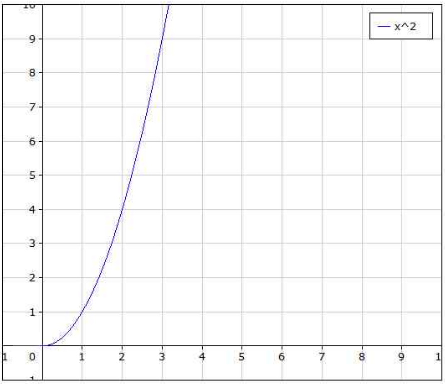


(그림1−16) ${}^{n}x$는 n번 곱해서 x가 되는 수를 의미합니다.

역함수 그리기

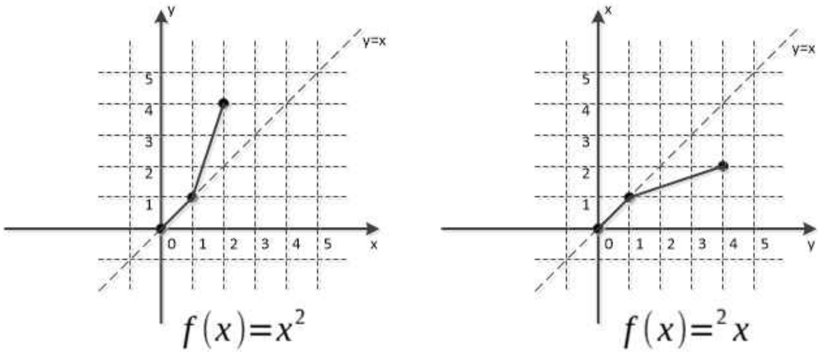
역함수도 독립변수에 대한 출력 값을 가지므로, 그래프로 그릴 수 있습니다. 그러면 표준 좌표축에 역함수를 그렸을 때, 본 함수

와 역함수는 어떤 관계가 있을까요? $y=f(x)$가 정의되었을 때, 역함수는 y에 대한 x값을 그립니다. 그것은 표준 좌표계에서 $y=x$로 표현되는 직선에 ***대칭(symmetry)***된다는 것을 의미합니다. 설명을 간단하게하기 위해 함수 $f(x)=x^2$를 ***1사분면(first quadrant)***에만 그려보도록 하겠습니다. (그림1-16b)는 1사분면에 그려진 $f(x)=x^2$를 보여줍니다.



(그림1-16b) 1사분면에 그린 $f(x)=x^2$ 그래프

역함수의 그래프는 가로축을 y-축으로 하고, 세로축을 x-축으로 하는 모양이 되는데, 설명을 간단하게 하기 위해 $f(x)=x^2$ 함수에 대해, x값이 0, 1, 2일 때만 고려하여 이 점들을 직선으로 연결한 그래프를 그려보겠습니다. 그것은 (그림1-16c)의 왼쪽 그림과 같습니다.



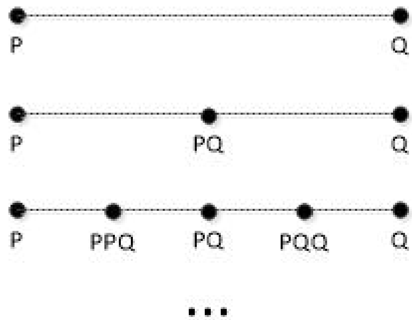
(그림1-16c) $f^{-1}(x) = {}^{2}x$의 그래프는 오른쪽과 같습니다.

$f(x) = x^2$의 역함수 $x = f^{-1}(y) = {}^{2}y$함수는 y가 1일 때 x는 1, y가 4 일 때 x는 2값을 가집니다. (그림1-16c)를 보면, ${}^{2}x$함수는 $y = x$라는 선을 중심으로 x^2함수와 대칭인 것을 알 수 있습니다.

무한에 대한 직관

이 절에서는 "***무한에 대한 직관(intuition on infinity)***" 개념을 살펴보겠습니다. 이 개념은 주어진 함수의 "접하는 직선의 방정식"을 찾기 위해서나 다른 목적으로 매우 유용하게 사용합니다. 사실 이것은 직관적이지 않습니다. 하지만, 연습을 통해 직관을 기르자는 의도입니다.

먼저 두 점이 주어졌을 때, 두 점 사이에 하나의 점을 그리는 동작을 고려해 봅시다.



(그림1-17) 두 점 P와 Q에 대해서 중간에 점을 생성하는 것을 재귀적으로(recursively) 반복합니다.

(그림1-17)을 보면 처음에는 두 점 P와 Q가 주어집니다. 두 점 사이의 중점 PQ에 점을 그립니다. 이제 점은 세 개인데 세 점이 이루는 각 선분에 대해서 이 동작을 반복합니다. 이제 새로운 점 PPQ, PQQ를 얻습니다. 이 동작을 백만번 정도 반복하면 두 점 P와 Q사이에 빈 공간이 없이 점으로 채울 수 있을까요? 그렇지 않습니다. 아무리 많은 횟수를 반복하더라도 빈 공간은 항상 남아

있습니다. 하지만 이 동작을 ***무한히(infinitely)*** 반복하면 어떻게 될까요? "무한히" 라는 말에 주의해야 합니다. 우리가 막연히 미래 어느 시점에 종료된다고 가정하면 그것은 무한(infinite)이 아닙니다. 이 동작을 무한히 반복하면 우리는 (그림1-17b)와 같은 ***선분(line segment)***을 얻습니다.

(그림1-17b) P와 Q사이에 무한개의 점이 있다면 선분이 됩니다.

(그림1-17b)의 선분 $\overline{PQ}$를 아주 많이 확대하면, 중간에 공백이 있을 것이라고 가정해서는 안 됩니다. 왜냐하면 P와 Q사이에 무한개의 점이 있으므로, $\overline{PQ}$는 거의 선분(approximately line segment)이 아니라 ***완벽한 선분(perfect line segment)***입니다. <u>현재 시점부터 미래의 방향으로 무한의 시간을 들여야 하는 어떤 사건이, 현 시점에 즉시 일어난다고 생각하는 것</u>이 "***무한에 대한 직관***"입니다.

(그림1-17c) 현재 시점부터 무한의 시간을 들여야 계산 가능한 수식이 즉시 계산가능하다고 가정하는 것이 무한에 대한 직관입니다.

다른 예로 소수(decimal) 부분에 9가 반복되는 수를 더하는 동작을 고려해 봅시다. (식1-28)은 순환하는 무한소수의 네 항만 적은 것입니다. "0 점 순환마디 9"라고 읽습니다.

$$0.\dot{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 \approx 1$$ (식1-28)

(식1-28)의 값은 1에 근접하지만 1은 아닙니다. 그러므로 ***근접한(approximately)***을 의미하는 $\approx$ 기호를 사용합니다. 하지만 이 동작을 무한히 반복하면 어떻게 될까요? (식1-28b)의 $0.\dot{9}$가 의미하는 것을 이해하기 위해서는 "무한에 대한 직관"을 사용해야 합니다.

$$0.\dot{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \ldots = 1$$ (식1-28b)

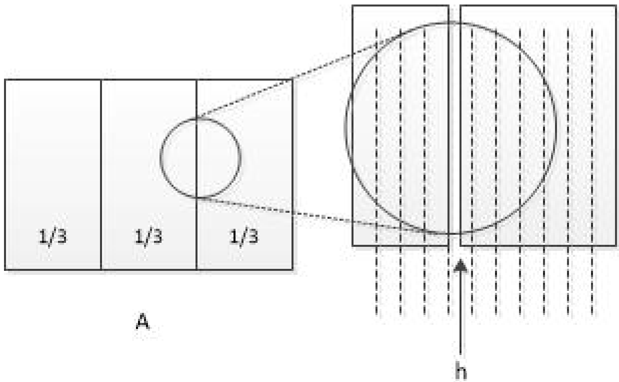
(식1-28b)에서 ***순환하는 무한소수(recursive infinite decimal)***의 합이 1이 된다는 것은 놀랍습니다. 아무리 계속해서 합하더라도, 약간씩은 작으니까, 1이 될 것 같지는 않습니다. 하지만, 여기에 무한의 비밀이 있습니다. 그 작은 부분이 무한히 채워지므로, $0.\dot{9}$ ***는 약 1(approximately 1)이 아니라, 정확하게 1(exactly 1)***입니다. 이 사실은 너무 중요해서 다시 한 번 적겠습니다.

> $0.\dot{9}$는 정확하게 1입니다. 그렇다고 가정하자는 것이 아니라,
> $0.\dot{9} = 1$입니다.

$0.\dot{9}$라는 수가 아주 예외적인 수라고 생각하지 마세요. 예를 들면 평범한 ***이성적인 수(rational number, 유리수)*** $1/3$에도 무한에 대한 직관이 사용되었습니다. $1/3$이라는 수가 평범한 수 같지만, 사실 이 수는 현대 과학이 아무리 발달하더라도 정확한 실수 값을 얻을 수 없습니다. 계산기를 사용해서 계산해 보면 근사 값 $0.333\ldots$만 얻을 수 있을 뿐입니다. 그것은 우주에 존재하는 어떤 물체를 완벽하게 삼등분하는 것은 불가능하다는 것을 의미합니다.

어떤 물체를 완벽하게 삼등분하기 위해서는 무한에 대한 직관을 사용해야 합니다. 이 사실도 중요하므로 한 번 더 적겠습니다.

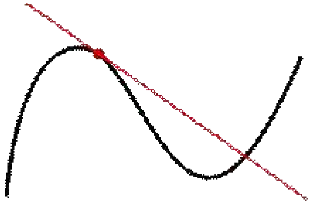
우리는 어떤 물체를 정확하게 삼등분 할 수 없습니다.



(그림1-17d) 어떤 물체를 정확하게 3등분 하는 것은 불가능합니다. 왼쪽의 사각형 A를 정확하게 삼등분했다고 가정합시다. 하지만 경계부분을 무한대로 확대하면, 유한한 수로는 표현할 수 없는 경계 h가 반드시 있습니다.

다른 추가적인 예로 그래프에 접하는 직선을 그리는 작업에 대해서 생각해 봅시다.

(그림1-17e)는 굽은 곡선(bent curve)의 특정한 점에 그려진 접하는 직선을 보여줍니다. 이러한 작업이 실제로 가능할까요? 특정한 점이 곡선을 이루는 부분이라면, 곡선인 부분은 백만 배 확대하더라도 여전히 곡선입니다. 그래서 접하는 직선을 그리는 것은 불가능합니다. 하지만 특정한 점 주위를 무한하게 확대했다고 가정하면 어떻게 될까요? 그러면 우리는 "접하는 거의 직선"이 아니라 "***접하는 완벽한 직선***"을 얻을 수 있습니다. 이처럼 접하는 직선을 이해하기 위해서는 "무한에 대한 직관"이 필요합니다.



(그림1-17e) 그래프에 접하는 직선을 그리는 작업은 직관적입니다.

“무한에 대한 직관”을 나타내기 위해 우리는 기호를 사용할 수 있습니다. 예를 들면 어떤 변수 h가 특정한 상수 a에 가까워지는 조건을 (식1-28c)와 같이 나타낼 수 있습니다.

$$h \to a \quad \text{(식1-28c)}$$

(식1-28c)의 조건을 만족하는 식을 함께 명시하면, 우리는 특정한 조건을 가지는 식을 수학적으로 나타내는 것이 가능합니다.

$$_{h \to a}(h) \quad \text{(식1-28d)}$$

(식1-28d)는 식 (h)를 평가하는 조건으로, h가 a로 접근하는 조건 $h \to a$를 사용하라는 의미입니다. 그러면, $_{h \to a}(h)$는 “a는 아니지만, a에 근접한 값” $_{h \to a}(h) \approx a$를 의미합니다. 이제 h가 a로 그냥 접근하는 것이 아니라, “무한대로” 가깝게 접근하다고 가정합시다. 무한대로 접근을 나타내기 위해서 ***무한기호*** ∞를 사용하여, (식1-28e)처럼 나타내었습니다.

$$\infty_{h \to a}(h) \quad \text{(식1-28e)}$$

$$\infty_{h \to a}(h) = a$$

<u>$\infty_{h \to a}(h)$는 h의 값이 무한하게 a로 접근하므로 약 a가 아니라 "정확하게 a"</u>입니다. 이처럼 수학적인 정의를 사용하면, 현실에서는 불가능한 무한에 대한 개념을 표현하는 것이 가능합니다.

무한의 시간을 들여야 정의할 수 있는 개념을 하나의 수학적 대상(mathematical object)으로 정의하는 것은 매우 유용합니다. 그러면 그것은 이제 수학이 다룰 수 있는 대상이 되기 때문입니다. 실제 수학에서 이것을 어떻게 정의하는지는 "표준수학" 절(section)을 참고하시기 바랍니다.

"정확한 값을 알 수 있다"는 것을 "완전하다"고 정의하면 공학(engineering)은 완전하지 않습니다. 무한에 대한 직관은 수학이 공학보다는 완전하다는 것을 말해주는 것 같습니다. 우리가 "과학"이라고 하면, 그것은 일반적으로 "수학"+"공학"을 의미합니다. 우주와 자연계의 다양한 현상들을 설명하는 과학법칙들은 수식으로 기술되고, 우리가 살아가는 현재에서 그 수식은 일관성을 가집니다. 하지만 과학법칙들은 후에 오류가 발견되어 수정되기도 하는데, 예를 들면 뉴튼(Sir Isaac Newton)의 ***고전역학(Classical Mechanics)***은 오류가 없는 것처럼 보였지만, 20세기 이후 등장한 상대성이론(Relativity)과 양자역학(Quantum Mechanics)에 의해서, 고전역학은 미시세계에서는 성립하지 않는 것이 밝혀졌습니다. 하지만, 현대 공학에서 무시할만한 오차 범위에서 고전역학은 여전히 잘 사용되고 있습니다. 현재의 과학적 발견도 후에 어떻게 수정될지는 모릅니다. 예를 들면, 현재의 과학법칙은 우주의 팽창을 설명하지 못합니다. 그래서 과학자들은 현재의 우주를 설명하는, 우리가 관측하지 못하는 보이지 않는 물질과 에너지를 각각 ***암흑에너지(Dark Energy), 암흑물질(Dark Matter)***이라고 부릅니다. 놀랍

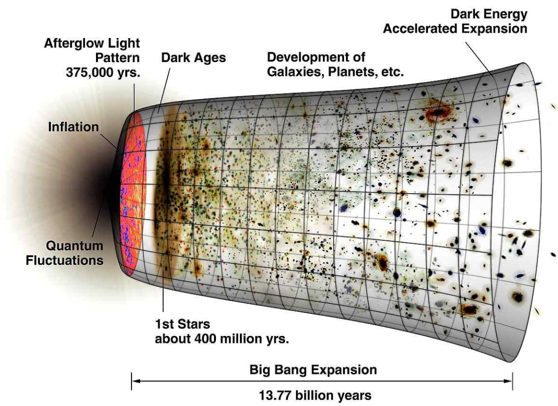
게도 관측 가능한 우주에서 암흑에너지는 69%, 암측물질은 26%를 차지합니다. 우리가 알고 있는 물질들은 고작 5%에 불과하며, 현재의 상대성이론과 양자역학은 5% 범위에서만 동작하는 법칙인 셈입니다.

하지만 우리 인류는 발전을 계속할 것이고, 우주의 개척자가 될 것입니다. 현재 인류가 살고 있는 지구에서 우리는 계속 살 수 없습니다. 빠르면 10,000년 늦더라도 100,000년 이후로는 인류가 살 수 있는 다른 곳을 찾아야 합니다. 우리가 자연을 적절하게 다스리지 않는 다면 어쩌면 1,000년 내로 인류가 거주할 다른 행성을 찾아야 할 수도 있습니다.

1,000년이 지나서 이제 우리 인류가 95%에 해당하는 암흑에너지와 암흑물질의 정체와 법칙을 모두 알아냈다고 가정합시다. 그러면 우리가 우주의 비밀을 모두 이해할 수 있을까요? 빅뱅 이전에 무엇이 있었는지, 우리는 다중우주(Multiverse)의 한 우주인지 아니면 창조자의 존재가 있어야 하는지 결론 내릴 수 있을까요? 필자는 그렇지 않을 것이라고 생각합니다.

(그림1-17f) 쿠르트 괴델(Kurt Gödel)

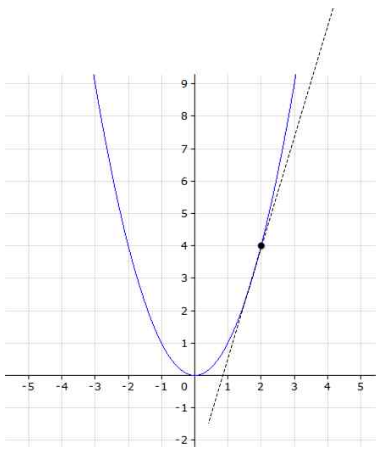
"참이라고 주장하는 연관된 문장들의 집합"에는 참임에도 불구하고 참인지 거짓인지를 증명할 수 없는 주장이 존재합니다. 이것을 수학에서 괴델(Kurt Gödel)의 ***불완전성 정리(incompleteness theorems)***라고 합니다. 우주의 일부인 우리가 우주를 관측하고 있으므로, 우리가 우주의 모든 것을 낱낱이 알게 되었다고 하더라도, 여전히 그 곳에는 "참 임에도 불구하고, 참과 거짓을 증명할 수 없는 주장"이 존재할 것입니다. 필자는 "빅뱅이론"과 "창조론"이 그 주장의 후보라고 생각합니다. 현재의 관측되는 우주 밖에서, 객관적으로 우리 우주를 관측할 수 있는 그 순간에, 우리는 완전하게 우주의 비밀을 이해하게 되겠지요. 필자는 우리 모두에게 그 순간이 오고 있다고 믿고 있습니다.



(그림1-17g) 우리 우주를 100%이해하기 위해서는 우주 밖에서 우주를 관측해야 합니다.(출처: 영문위키피디아)

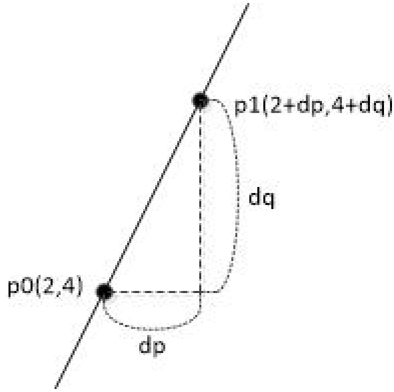
$f(x) = x^2$의 접하는 직선

"***무한에 대한 직관***"을 이용하면, 주어진 함수의 ***접하는 직선(접선, tangent line)***의 기울기를 구할 수 있습니다. 이제 $f(x) = x^2$ 함수의 $x = 2$에서의 접하는 직선을 찾는다고 가정해 봅시다.



(그림1-18) $f(x) = x^2$ 함수의 $x = 2$에서의 접하는 직선

접하는 직선을 찾기 위해서는 직선의 ***기울기(slope)***를 계산해야 합니다. 한 점과 기울기를 알면 직선의 방정식을 유도할 수 있기 때문입니다.



(그림1-18b) $f(x)=x^2$ 함수의 $x=2$에서의 접하는 직선을 무한대로 확대한 그림

이제 $f(x)=x^2$ 함수의 $x=2$에서의 직선을 구하기 위해 $x=2$에서 $f(x)=x^2$ 그래프를 **무한대로 확대**해 보겠습니다. 그러면 확대된 부분은 "거의 직선"이 아니라 정말로 "완벽한 직선"이 됩니다. 이것을 이해하기 위해서는 무한에 대한 직관을 사용해야 합니다.

(그림1-18b)에서 p0(2,4)에서 기울기를 구하기 위해, x-축 방향으로 dp만큼, y-축 방향으로 dq만큼 이동한 새로운 점 p1의 좌표는 (2+dp, 4+dq)입니다. 여기서 d는 무한히 작은 수이며, p와 q는 각각 x-축, y-축으로 움직인 정도라고 가정합니다.

우리가 $f(x)=x^2$의 그래프를 무한히 확대했다는 것에 주목하세요. 그러므로 dp와 dq는 무한히 작은 양입니다. 무한히 작은 양을 나타낼 때 d를 사용하는 이유는 ***차이(differentiation)***를 의미하는 영문자의 d를 사용하기 때문입니다. 이제 기울기를 구해보겠습니다.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \qquad \text{(식1-29)} \\ y &= x^2 \\ (4+dq) &= (2+dp)^2 \\ 4+dq &= 4+4dp+d^2p^2 \end{aligned}$$

$$dq = 4dp + d^2p^2 \quad \text{(식1-30)}$$

$dq = 4dp + d^2p^2$ (식1-30)에서 d는 0이 아니므로 양변에 $1/d$를 곱하면 ***계수(coefficient)*** d를 제거할 수 있습니다. 그러므로 (식1-31)을 유도할 수 있습니다.

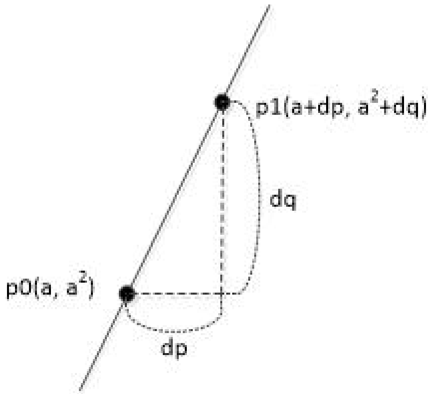
$$q = 4p + dp^2 \quad \text{(식1-31)}$$

$q = 4p + dp^2$ (식1-31)에 다시 무한에 대한 직관을 사용하면 d는 무한히 작은 수이므로(p와 q는 무한히 작은 수가 아닙니다) $dp^2 = 0$입니다. 그러므로 (식1-31)은 다음과 같이 정리됩니다.

$$\begin{aligned} q &= 4p + dp^2 \quad \text{(식1-32)} \\ q &= 4p \\ q/p &= 4 \end{aligned}$$

마침내 직선의 기울기 q/p를 구했습니다. 함수 $f(x) = x^2$에 대해서 $x = 2$에서 접하는 직선의 기울기는 4입니다.

이제 특정한 위치 (2,4)에서의 기울기가 아니라 임의의 점 (a, a^2)에서의 기울기를 구해 봅시다.



(그림1-19) $f(x)=x^2$ 함수에 대해 임의의 점 (a,a^2)의 기울기

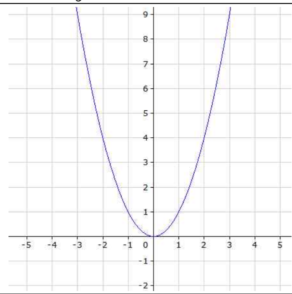
(그림1-19)에는 x값이 $a+dp$일 때, y값은 a^2+dq입니다. $f(x)=x^2$ 함수에 $(a+dp,a^2+dq)$를 대입해서 식을 ***전개(develop)*** 하면 (식1-33)과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \qquad\qquad\qquad \text{(식1-33)} \\
(a^2+dq) &= (a+dp)^2 \\
a^2+dq &= a^2+2adp+d^2p^2 \\
dq &= 2adp+d^2p^2 \\
q &= 2ap+dp^2 \\
q &= 2ap \\
q/p &= 2a
\end{aligned}
$$

(식1-33)을 통해서 점 (a,a^2)에서의 기울기는 $2a$인 것을 알 수 있습니다. 우리는 방금 $f(x)=x^2$ 함수에 대해 임의의 점에서 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수를 계산했습니다! 이 함수를 f^{slope}로 나타내 봅시다. 그러면 $f(x)=x^2$함수의 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수는 다음 (식1-34)와 같이 적을 수 있습니다.

$$f^{slope} = 2x \quad \text{(식1-34)}$$

필자는 이 장의 초반에서, 함수가 주어지면 (1) 그리기, (2) 역함수, (3) 접하는 직선의 함수를 찾는 것이 기본적인 세 가지 작업이라고 이야기했습니다. 이제 $f(x) = x^2$에 대해서 이 세 가지를 (그림1-20)과 같이 나타낼 수 있습니다.

함수	$f(x) = x^2$
① 그리기	
② 역함수	$f^{-1}(x) = {}^{2}x$
③ 접하는 직선	$f^{slope} = 2x$

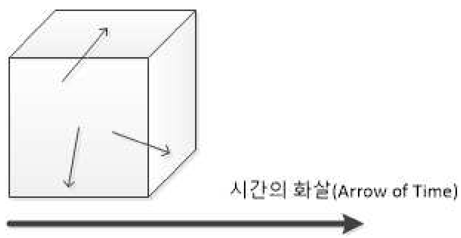
(그림1−20) $f(x) = x^2$에 대한 (1) 그리기, (2) 역함수, (3) 접하는 직선 함수

$$x^2,\ {}^{2}x,\ 2x \quad \text{(식1-35)}$$

$x^2,\ {}^{2}x,\ 2x$ (식1-35)에 무언가 규칙이 숨어 있는 것 같습니다.

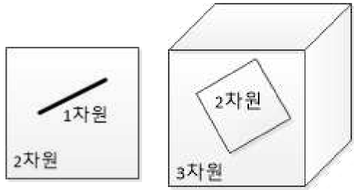
시간에 대한 직관

“무한에 대한 직관”에 대한 거부감이 있지만, 우리가 이러한 사고를 할 수 있는 이유는 무엇일까요? 그것은 우리의 4차원 시공간(space-time)에서 시간 t가 하나의 축을 이루는 구성요소이기 때문인 것 같습니다. 우리가 인식하는 4차원 시공간의 *하나의 요소*이므로, 무한으로 시간을 들여서 계산해야 하는 식에 대한 결과를 개념화 할 수 있는 것이지요. 그런데 우리 시공간에서 네 번째 축인 이 **시간 축(time-axis)은 한 방향으로만 진행**하는 특징을 가지고 있습니다. 공간에서 임의의 벡터 방향을 지시하는 것이 가능하지만, 시간 축은 항상 벡터 방향이 고정되어 있는 것입니다.



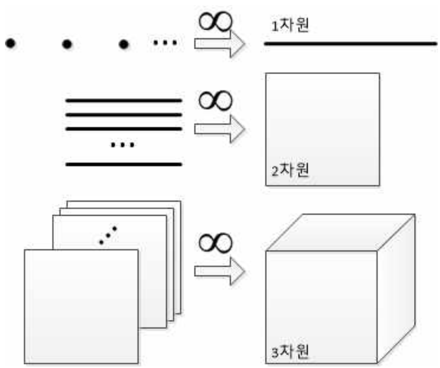
(그림1-21) 우리는 공간에서 자유롭게 어느 방향으로도 볼 수 있습니다. 하지만, 시간의 방향은 항상 같은 방향입니다.

하지만, “무한에 대한 직관”과 비슷하게 시간에 대학 직관을 연습하면, 이 시간 축을 앞뒤로 자유롭게 이동하는 것이 가능합니다. 그것을 “***시간에 대한 직관(intuition on time)***”이라고 부르도록 하겠습니다.



(그림1-22) 2차원의 존재는 1차원을 인식할 수 있지만, 2차원을 객관적으로 인식할 수는 없습니다. 2차원을 객관적으로 인식하기 위해서는 3차원에 관찰자가 있어야 합니다.

공간을 자유롭게 이동하듯이, 시간 축에 대해서도 과거와 미래를 자유롭게 이동하는 보다 높은 차원에 대한 직관을 어떻게 가질 수 있을까요? 이것이 필요한 이유는 만약 우리 시공간이 4차원이라면, 4차원 시공간을 만든 공간은 4차원보다는 더 높은 차원을 가지거나, 차원 자체를 정의할 수 있는 곳이어야 하기 때문입니다. 그러면 우리는 우리가 인식하는 현실을 그들은 어떻게 인식하는지 파악할 수 있습니다. 그 공간을 완벽하게 인식하는 것은 불가능하지만, "무한에 대한 직관"과 비슷한 방식으로 "시간에 대한 직관"을 연습하고 희미하게 이해하는 것이 가능합니다.

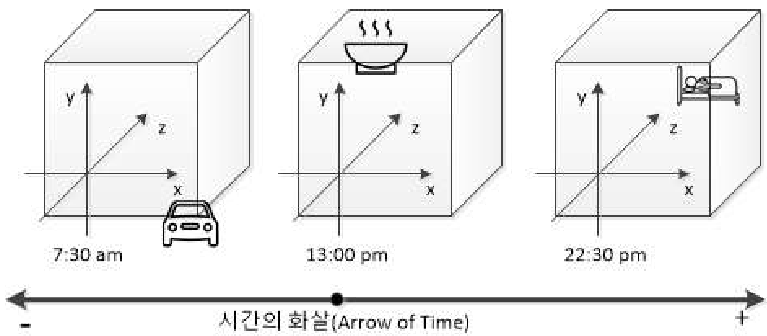


(그림1-23) 점(0차원)의 무한 연속이 1차원, 1차원의 무한 연속이

2차원 평면, 2차원의 무한 연속이 3차원 공감을 결정합니다.

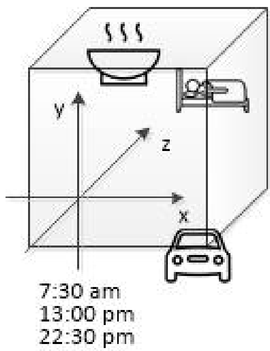
우리는 1차원과 2차원을 쉽게 관념화하거나 이해할 수 있습니다. 왜냐하면 우리가 사는 공간이 최소한 4차원의 시공간이기 때문입니다. 1차원(선)의 무한 된 연속이 2차원(평면)이고, 2차원의 무한 된 연속이 3차원(공간)입니다. 3차원의 무한 된 연속이 4차원이어야 하는데, 아쉽게도 네 번째 축인 시간에 제한된 우리는 3차원의 무한 된 연속을 직관적으로 이해할 수 없습니다. 왜냐하면, 3차원의 매 한 순간(instant time)이 우리가 경험하는 현실이기 때문입니다. 그럼에도 불구하고, 과거와 미래를 포함하는 3차원의 무한 된 연속에 대한 직관을 어떻게 가질 수 있을까요?

3차원의 무한 연속을 생각하는 방법은 어떤 공간에서 과거, 현재, 미래의 일이 모두 영원한 현재라고 생각하는 것입니다. (그림 1-24)의 예를 봅시다. 철수가 13시00분에 식당에서 점심을 먹고 있습니다(현재). 철수는 오전 7시30분에 집에서 자동차를 타고 회사로 출근을 했습니다(과거). 철수는 오후 22시30분에 집의 침대에서 잠을 자게 될 것입니다(미래). 시간의 화살은 미래로 과거로 향해 있으며, 철수는 현실에서 화살의 매 한 순간을 경험할 수 있습니다.



(그림1-24) 7시30분에 차를 타고 회사로 출근한 철수는 현재 13시00분에 점심을 먹고, 밤 10시30분에 다시 집에서 잠자리에 듭니다.

이제 이 모든 것이 한 순간에 일어났다고 가정해 보겠습니다. 철수가 오전 7시30분에 출근한 것, 13시00분에 점심을 먹는 것, 22시30분에 잠을 청할 것이 “지금 이 순간”에 동시에 일어난다고 가정하는 것입니다. 그러한 세상에서는 과거와 현재와 미래의 구분은 없고 모든 사건들이 영원한 현재가 될 것 입니다. 그것을 (그림1-25)에 나타내 보았습니다.



(그림1-25) 시간에 대한 직관은 오전 7시30분에 차를 타고 출발하는 것(과거), 13시00분에 점심을 먹는 것(현재), 22시30분에 잠자리에 드는 것(미래)이 모두 동시에 일어난 것이라고 생각합니다.

시간에 대한 직관이 존재하는 그 곳에서 우리 우주를 보면, 우리 우주의 역사 138억년은 사실 찰나이고, 과거와 현재와 미래는 사실 영원한 현재이며, 다음과 같은 말이 사실이 될 것입니다.

① 철수의 운명은 정해져 있었다.

② 철수는 자신의 미래를 자신이 결정한 것이다.
③ 철수는 태어나기 전에 이미 존재했다.

“시간에 대한 직관”은 모순이지만 사실인 개념들을 이해하는데 많은 도움이 됩니다. 위의 문장에서 ①과 ②는 우리 우주에서는 모순입니다. 하지만, “시간에 대한 직관”이 자연스러운 어떤 곳에서는 모순이 아닐 것입니다. “시간에 대한 직관”은 필자가 “영원”을 대하거나 “무한한” 어떤 것을 대할 때 사용하는 방법입니다. 만약 우리가 현재의 인식체계를 가지고 갑자기 “시간에 대한 직관”이 존재하는 그곳에 가면, 우리는 다음과 같이 될 것입니다.

① 우리는 갑자기 지혜로워졌다고 느낄 것입니다.
→ 시간을 들여야 하는 지식을 모두 가지게 될 것이기 때문입니다.
② 우리는 묻는 즉시 대답을 듣게 될 것입니다.
→ 미래가 현재이기 때문입니다.
③ 사랑도 고통도 모두 무한한 것이 될 것입니다.
→ 시간이 흐르지 않기 때문입니다.
④ 우리 우주의 시작과 끝을 동시에 보게 될 것입니다.
→ 모두 영원한 현재이기 때문입니다.

그곳이 어떤 곳인지 모든 것을 이해한 어떤 사람이 있다면, 우리 인생이 죽음을 맞이할 때 그곳에 가야한다는 것을 아는 사람이 있다면, 그 분은 “이 세대가 가기 전에 모든 미래의 역사가 이루어질 것이다”고 말씀하실 것입니다.

표준수학

루트(root, $\sqrt{\ }$)

표준수학에서 ***변수를 여러 번 곱한 함수(파워함수, power function)***의 역함수를 나타내기 위해서 왼쪽위 첨자와 밑 사이에 ***루트(root, $\sqrt{\ }$)***기호를 사용하여 나타냅니다. ${}^{2}x$, ${}^{3}x$, ${}^{n}x$는 (식1-27b)처럼 나타낼 수 있습니다.

$$
\begin{aligned}
{}^{2}x &= \sqrt[2]{x} \\
{}^{3}x &= \sqrt[3]{x} \\
{}^{n}x &= \sqrt[n]{x}
\end{aligned}
\quad \text{(식1-27b)}
$$

(식1-27b)에서 $\sqrt[2]{x}$는 일반적으로 왼쪽 위첨자 2를 생략하여 $\sqrt{x}$처럼 나타냅니다. $\sqrt[2]{x}$를 읽을 때는 “제곱 루트 x”(영어로는 square root of x)라고 읽습니다. ${}^{n}x$은 “n승 루트 x(n-th root of x)”라고 읽습니다.

표준수학

극한, 입실론-델타($\varepsilon - \delta$) 논법

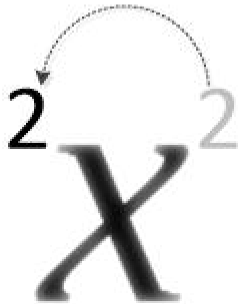
무한에 대한 직관에서 사용한 (식1-36)의 무한 기호 ∞는 극한(limit)기호 $\lim$을 사용하여 (식1-37)처럼 나타낼 수 있습니다.

$$\infty_{h \to a}(h) \text{ (식1-36)}$$

$$\lim_{h \to a}(h) \text{ (식1-37)}$$

(식1-37)은 "리미트 h가 a로 갈 때(limit when h approaches a)" 라고 읽습니다. "무한에 대한 직관"에서 설명했듯이, $\lim$기호에는 h가 끊임없이 a로 접근하는 동작이 포함되어 있습니다. 대학에서 이공대 학생들이 배우는 대학수학 교재에서는 이러한 끊임없는 동작 개념을 제거하고 극한이 수렴하는 수 개념으로 설명하는데 이것을 입실론-델타($\varepsilon - \delta$) 논법이라고 합니다. 그러면 무한은 이제 동작이 제거된 보다 구체적인 ***수학적 대상(mathematical object)***이 됩니다. 아무튼 $\lim_{h \to a}(h)$ (식1-37)이 "a에 가까운 어떤 값"이 아니라, "정확하게 a"를 의미한다는 것을 기억하도록 하세요.

2장. 기본함수: 파워함수



파워함수
파워함수의 역함수
파워함수의 접하는 직선 함수
선, 직선조각, 반직선
벡터
베이시스(기저, Basis)
선형조합(Linear Combination)
복잡한 수(Complex Number)

파워함수(Power Function)

고등학교 수학에서 배우는 모든 함수(function)는 ***기본함수 (elementary function)***의 범주에 속합니다. 실제로 컴퓨터 프로그래밍을 해 보면, 일반적인 프로그래밍에 사용되는 대부분의 함수들은 기본함수로 표현할 수 있습니다.

놀랍게도 기본함수는 모두 여섯 종류(본함수 세 개 + 역함수 세 개)입니다. 그리고 우리의 첫 번째 목표는 기본함수와 그들의 관계를 이해하는 것입니다. 기본 함수는 다음과 같이 (그림2-1)로 나타낼 수 있습니다.

	원래함수	역함수 (inverse function)
파워함수(power function)	(1)	(1)의 역함수
지수함수(exponential function)	(2)	(2)의 역함수
투영된 선분길이함수	(3)	(3)의 역함수

(그림2-1) 기본함수표: 이 인벤토리를 구성하는 모든 항목을 수집하면, 우리는 첫 번째 목표를 이룬 것입니다.

(그림2-1)을 보면 기본함수의 형태는 모두 세 가지이며, 나머지 세 가지는 기본 형태의 역함수로 구성됩니다. 우리는 (그림2-1)의 비워진 부분을 계속 채워나갈 것입니다. (그림2-1)은 우주의 비밀을 풀어나가는 게임에서 주인공이 갖춘 인벤토리(inventory)라고 생각하면 됩니다. 우리가 인벤토리의 비워진 곳을 모두 원하는 아

이템으로 채웠을 때, 이 게임은 끝나게 될 것입니다.

우리가 제일 먼저 살펴볼 함수는 ***파워함수(멱함수, 누승함수, power function)***입니다. 파워함수는 지수 형태의 함수 몸체에서 밑(base)이 독립변수이고 지수 부분이 ***상수(constant)***인 함수를 말합니다.

우리는 이미 1장에서 ***제곱함수(square function)***을 살펴보았는데, 제곱함수는 파워함수의 간단한 예입니다.

$$f(x) = x \times x = x^2$$ (식2-1)

(식2-1)은 독립변수 x를 두 번 곱하는 일을 합니다. 이제 x를 세 번 곱하는 일을 하는 함수를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$f(x) = x \times x \times x = x^3$$ (식2-2)

x를 n번 곱하는 함수를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$f(x) = x^n$$ (식2-3)

기본함수의 덧셈에 의한 조합 역시 기본함수이므로, 아래 (식2-4) 역시 기본함수 입니다.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2$$ (식2-4)

(식2-4)를 보면 $2x^3$처럼 곱셈(나눗셈)으로만 구성된 덩어리를 ***항(term)***이라고 합니다. 항에서 상수부분을 ***계수(coefficient)***라고 합니다. $2x^3$ 항의 계수는 2입니다. (식2-4)는 두개의 항으로 구성된 함수입니다.

$$f(x)=\underbrace{2x^3}_{\text{항(term)}}+\underbrace{3x^2}_{\text{항(term)}} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{계수(coefficient)}}}{2}x^3$$

(그림2-1b) $f(x)$는 2개의 항으로 이루어져있습니다. 항을 이루는 구성 요소에서 상수인 부분을 계수(coefficient)라고 합니다. $2x^3$ 항의 계수는 2입니다.

이 책에서는 설명을 간단하게하기 위해, 기본함수를 설명할 때, 두개 이상의 항으로 구성된 함수는 다루지 않겠습니다. 이제 우리는 기본 함수표의 첫 번째 함수를 찾았습니다. 그래서 (그림2-2)를 얻었습니다. (그림2-2)에서 x는 변수(variable)이고 n은 상수(constant)입니다.

	원래함수	역함수 (inverse function)
파워함수(power function)	x^n	(1)의 역함수
지수함수(exponential function)	(2)	(2)의 역함수
투영된 선분길이함수	(3)	(3)의 역함수

(그림2-2) 기본함수표: 파워함수를 찾았습니다.

파워함수의 역함수

우리는 1장에서 함수가 정의되면 (1) 함수를 그리고, (2) 함수의 역함수를 찾고, (3) 함수의 접하는 직선의 함수를 찾는 것을 이해할 수 있어야 한다고 했습니다.

이제 x^n의 역함수를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$${}^{n}x \quad \text{(식2-5)}$$

(식2-5)는 "***n번 곱해서*** x***가 되는 수***"를 의미합니다. 예를 들면 ${}^{4}16$은 4번 곱해서 16이 되는 수이므로, 2를 의미합니다.(${}^{4}16$의 실제 수학 표현은 $\sqrt[4]{16}$ 입니다)

$${}^{4}16 = {}^{4}(2^4) = 2 \quad \text{(식2-6)}$$

$${}^{2}4 = 2$$
$${}^{2}9 = 3$$
$${}^{3}8 = 2$$
$${}^{3}27 = 3$$

파워 함수의 역함수를 정의하다 보면, 실수(real number)로는 답을 구할 수 없는 이상한 상황이 발생합니다. (식2-7)을 만족하는 실수는 존재하지 않습니다.

$${}^{2}(-1) \quad \text{(식2-7)}$$

$$\square \times \square = -1$$

(그림2-3) ${}^{2}(-1)$은 제곱하면 -1이 되는 이상한 수를 의미합니다. 표준 수학기호 $\sqrt{\ }$ 를 사용하여 나타내면 $\sqrt[2]{-1} = \sqrt{-1}$ 이 됩니다.

(식2-7)은 ***제곱해서 -1이 되는 수***를 의미합니다. 실수에는 이러한 수가 없으므로, 우리는 새로운 수에 대한 개념을 정의할 필요를 느낍니다. 일단 이상한 수를 무시하고 기본함수표의 역함수 부분을 채우면 (그림2-3b)와 같습니다.

	원래함수	역함수 (inverse function)
파워함수 (power function)	x^n	${}^{n}x$
지수함수 (exponential function)	(2)	(2)의 역함수
투영된 선분길이함수	(3)	(3)의 역함수

(그림2-3b) 기본함수표: 파워함수의 역함수 ${}^{n}x$를 추가했습니다.

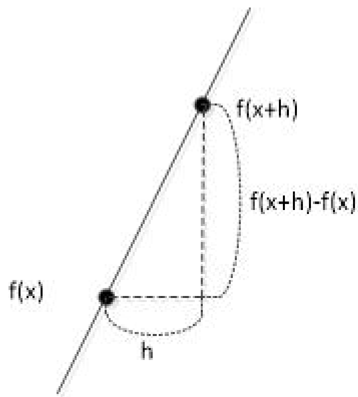
파워함수의 접하는 직선 함수

함수가 주어지면 역함수를 찾는 것뿐만 아니라, 접하는 직선을 정의하는 함수를 찾는 것이 중요하다고 했습니다. 우리는 1장에서 이미 x^2에 대해서는 접하는 직선을 정의하는 함수를 찾았습니다. 그것을 (식2-8)과 같이 f^{slope}로 나타내었습니다.

$$f(x) = x^2$$
$$f^{slope} = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x \quad \text{(식2-8)}$$

비슷한 방식으로 x^n에 대해서 "접하는 직선을 정의하는 함수"를 찾을 수 있습니다. $f(x) = x^n$ (식2-3)에 대한 접하는 직선을 정의하는 함수는 (식2-9)와 같습니다.

$$f^{slope} = nx^{n-1} \quad \text{(식2-9)}$$



(그림2-4) 임의의 함수 $f(x)$에 대해서 접하는 직선의 기울기

$f^{slope} = nx^{n-1}$ (식2-9)를 구하기 위해서, 임의의 함수 $f(x)$에 대해서 접하는 직선의 기울기를 구하는 과정을 살펴봅시다. (그림 2-4)는 $f(x)$에 대해서 x의 변화량 h가 무한대로 작아질 때, $(f(x+h)-f(x))/h$를 구하는데, 이것은 접하는 직선의 기울기입니다. 왜냐하면 분모(denominator) $h=(x+h)-x$는 x의 변화량을 의미하고, 분자(numerator)는 y의 변화량을 의미하기 때문입니다. (식2-9)를 찾기 위해서 우리는 “무한에 대한 직관”을 사용하여, 무한대로 작아지는 h에 대해서 다음과 같은 (식2-10)을 풀어야 합니다.

$$\text{무한대로 작아지는 } h\text{에 대해 } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (식2-10)

(식2-10)은 임의의 값 x에서 직선의 기울기를 구한다는 의미입니다. “무한대로 작아지는 h에 대해”를 수학적인 기호를 사용하여 다음과 같이 (식2-11)처럼 $\lim$으로 나타내도록 합시다.

$$\infty_{h\to 0}$$ (식2-10b)

$$\lim_{h\to 0}$$ (식2-11)

$\lim_{h\to 0}$ (식2-11)은 “***리미트 h가 0으로 갈 때***” 영어로는 “limit when h approaches 0"라고 읽습니다.

그러면 (식2-10)은 다음과 같이 (식2-12)로 적을 수 있습니다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{(식2-12)}$$

$f(x) = x^n$을 (식2-12)에 대입하면 다음과 같이 (식2-13)을 얻습니다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - (x)^n}{h} \quad \text{(식2-13)}$$

(식2-13)은 ***이항정리(binomial theorem)***를 이용하면 nx^{n-1}이 되는 것을 알 수 있는데, 결과를 유도하는 과정은 별도로 설명하지는 않습니다.(시그마(sigma, Σ) 표기법, 조합(combination, C_k^n)등의 추가적인 개념 설명이 필요하기 때문입니다)

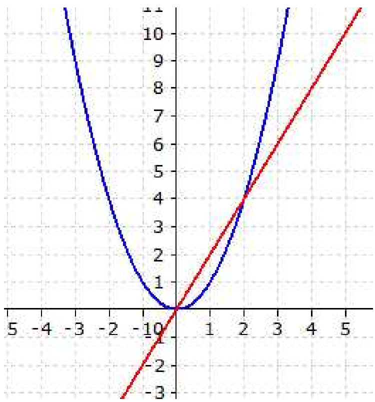
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - (x)^n}{h} = nx^{n-1}$$

이제 기본함수표에 "접하는 직선을 정의하는 함수"와 이상한 수(weird number)를 같이 표시해 보도록 하겠습니다. 그것은 (그림 2-4)와 같습니다.

	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	$^n x$	$^2(-1)$
지수함수				
투영된 선분길이 함수				

(그림2-4) 기본함수표: 파워함수에 해당하는 줄을 모두 완성했습니다.

원함수와 접하는 직선 함수를 함께 그래프로 그리는 것은 종종 도움이 됩니다. x^2과 대응하는 접하는 직선 $2x$를 그리면 (그림 2-4b)와 같습니다.



(그림2-4b) x^2과 접하는 직선 $2x$의 그래프

이제 우리는 기본함수표에서 파워함수 부분을 모두 완성했습니니

다. 다음 함수를 알아보기 전에, 제곱하면 -1이 되는, 이상한 수 $^2(-1)$을 이해할 필요가 있습니다. 그러기 위해서는 1차원에 머물러 있는 수의 개념을 보다 높은 차원으로 확장해야 합니다.

표준수학

미분연산자

$f^{slope}(x)$의 표준 수학기호는 $f'(x)$이며 ***"에프 프라임 오브 x(f prime of x)"***라고 읽습니다. ***미분 연산자(differentiation operator)***를 도입하면 (식2-13b)처럼 적을 수 있습니다.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{(식2-13b)}$$

(식2-13b)가 의미하는 것은 x값 위치에서 무한히 작게 x값이 증가했을 때, $f(x)$가 변화된 정도에 대한 비율입니다. $(x,\ f(x))$에서 접하는 직선의 기울기를 구한다는 의미입니다.

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{(식2-13c)}$$

미분 연산자를 (식2-13b)와 같이 정의하는 것은 매우 유용합니다. 다음과 같은 식을 고려해 봅시다.

$$t = f(x) \quad \text{(식2-13d)}$$
$$y = g(t) \quad \text{(식2-13e)}$$

$t = f(x)$ (식2-13d)는 x에 대한 t의 함수입니다. t함수의 접하는 직선의 기울기를 다음과 같이 구할 수 있습니다.

$$\frac{dt}{dx} \quad \text{(식2-13f)}$$

$y=g(t)$ (식2-13e)는 t에 대한 y의 함수입니다. y함수의 접하는 직선의 기울기를 다음과 같이 구할 수 있습니다.

$$\frac{dy}{dt} \quad \text{(식2-13g)}$$

이제 입력 x에 대해 y를 구하는 합성함수(composite function) $g \bullet f(x)$를 고려해 봅시다.

$$\begin{aligned} &y=g(t) \qquad \text{(식2-13h)} \\ &y=g(f(x)) \\ &y=g \bullet f(x) \end{aligned}$$

(식2-13h)가 정의한 함수에 대해 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수는 다음과 같이 구할 수 있습니다.

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{(식2-13i)}$$

미분연산자의 ***분자(numerator)와 분모(denominator)***를 순수한 실수라고 가정하면 $\frac{dy}{dx}$를 아래 (식2-13j)와 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \quad \text{(식2-13j)}$$

(식2-13j)에서 보면 분모와 분자에 사용된 dt가 수(number)를 다

루듯이 ***약분(simplifying fraction)***된 것을 알 수 있습니다. 이러한 특징 때문에 (식2-13b)와 같이 미분 연산자를 정의하는 것입니다. (식2-13j)는 ***체인 룰(chain rule, 합성함수의 미분)***로 알려진 미분 규칙인데 다양한 공학 분야에서 매우 중요하고 빈번하게 사용합니다.

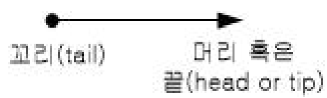
선, 직선조각, 반직선 (line, line segment, ray)

이상한 수 $^{2}(-1)$를 이해하기 위해 우리는 ***벡터(vector)***를 이해하고, 벡터의 ***선형독립(linearly independence)***과 ***스팬(span)***의 개념을 이해해야 합니다. 벡터의 개념을 이해하기 위해 먼저 필요한 용어를 정의하도록 하겠습니다.

선에 대해서 양끝점이 정해지지 않은 선을 ***직선(line)***이라고 합니다. 직선의 한쪽 끝점이 정해지면 ***반직선(광선, ray)***이라고 하며, 양 끝점이 모두 정해지면 ***직선 조각(라인 세그먼트, line segment)***이라고 합니다.

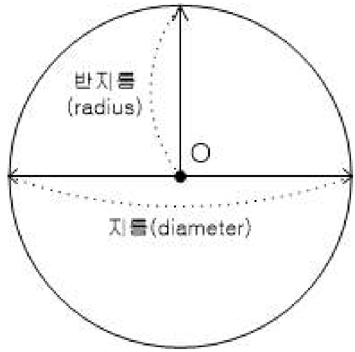
(그림2-5) 직선 조각, 반직선과 직선

직선 조각의 경우 양 끝점을 시작점(begin point), 끝점(end point)이라고 하며, 반직선의 경우 시작하는 끝점을 ***테일(꼬리, tail)***이라고 하고, 반직선이 진행하는 방향의 끝점을 ***헤드(머리, head)***라고 합니다. 헤드는 화살표의 머리(head)가 진행하는 방향을 의미합니다.



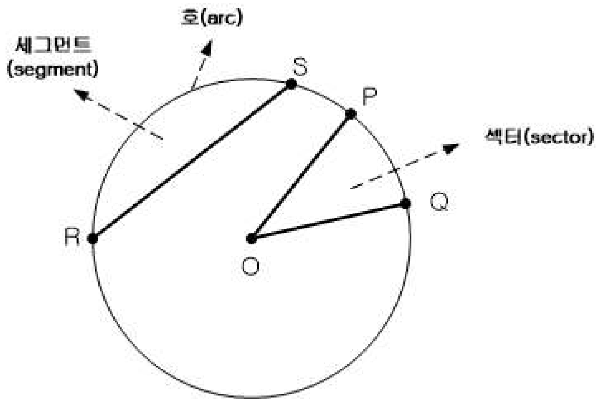
(그림2-6) 반직선의 테일과 헤드: 반직선의 시작점을 테일(tail)이라고 하며, 방향이 진행하는 끝점을 헤드(head)라고 합니다.

이제 원(circle)과 관련된 용어를 살펴보도록 하겠습니다.



(그림2-7) 원의 지름과 반지름

원의 중심 O를 지나는 직선이 원의 두 점과 만나서 이루는 반 직선의 길이를 ***지름(diameter)***이라고 합니다. 지름의 절반 길이를 ***반지름(radius)***이라고 합니다.

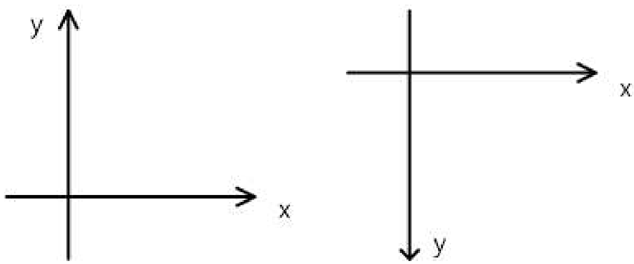


(그림2-8) 섹터(부채꼴, sector), 세그먼트와 원호(아크, arc)

(그림2-8)의 원의 지름에서 시작하는 두 개의 반직선이 원과 만나는 점을 각각 P와 Q라고 하면, O,P,Q가 이루는 원의 일부를 ***섹터(부채꼴, sector)***라고 합니다.

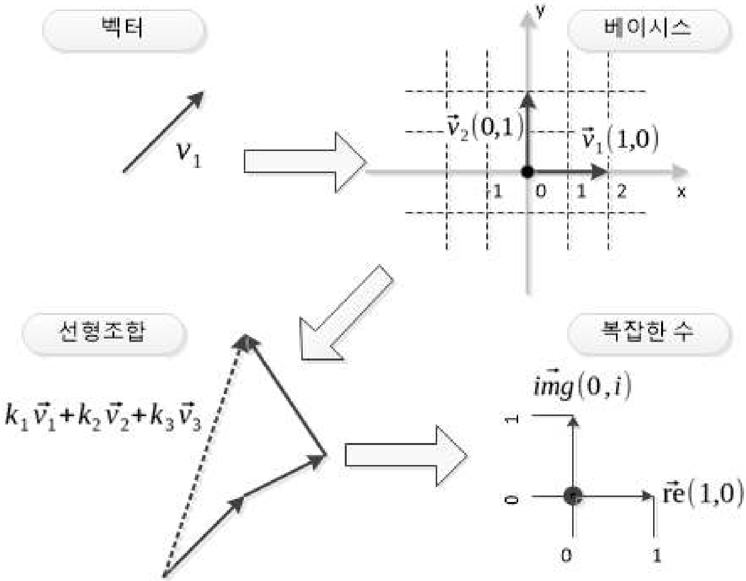
임의 직선이 원을 가로지를 때, 만나는 두 점을 R과 S라고 하면, R과 S가 잘라내는 원의 일부를 ***세그먼트(segment)***라고 합니다. 그리고 세그먼트 혹은 섹터를 이루는 원 둘레의 곡선 일부를 ***아크(원호, arc)***라고 합니다.

우리는 2차원에 대해서 다음 (그림2-9)와 같은 축을 사용할 수 있습니다.



(그림2−9) 2차원 축: 왼쪽의 2차원 축은 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)로 알려진 대표적인 축입니다. 오른쪽의 2차원 축은 y의 방향이 바뀐 것을 알 수 있습니다.

현재 우리의 목표는 이상한 수 $^{2}(-1)$을 이해하는 것인데, 이상한 수 $^{2}(-1)$과 일반적인 수(real number)를 모두 표현할 수 있는 새로운 수 체계를 정의하려는 것입니다. 이러한 수 체계를 정하려면, 수를 나타내는 방법, 수에 대한 연산을 정의해야 합니다. 수를 나타내고 수에 대한 연산을 정의하기 위해서 우리는 벡터(vector)를 사용할 것인데, 그러기 위해서는 (그림2-10)과 같은 절차로 진행될 내용을 이해해야 합니다.



(그림2-10) 벡터 → 베이시스 → 선형조합 → 새로운 수

이제부터 차례대로 벡터 → 베이시스 → 선형조합을 설명할 예정입니다. 약간 어려울 수도 있는데, 한 번 읽어보고 막힌다면, 계속해서 읽어서 이해한 후에 진행할 것을 권고합니다. 왜냐하면 이 부분이 "변환", "로렌츠 변환"을 이해하기 위한 필수적인 단계이기 때문입니다.

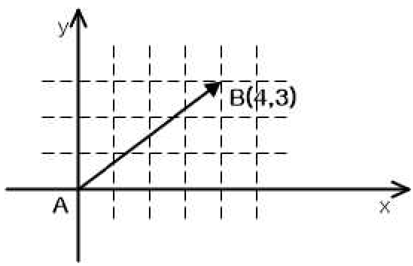
"벡터"에서는 크기와 방향을 나타내는 방법에 대해서 배웁니다. "베이시스"에서는 좌표축이 아니라, 벡터를 이용해서 좌표를 나타내는 방법을 배웁니다. "선형조합"에서는 벡터 덧셈의 기하학적인 의미를 이해합니다. 그리고 마침내 "복잡한 수"를 정의합니다.

벡터(Vector)

실수(real number)와는 다르게 ***벡터(vector)***는 ***크기(magnitude)와 방향(direction)***을 가집니다. 크기만을 가지는 값을 ***스칼라(스케일러, scalar)***라고 하는데, 한글로 번역된 "스칼라"라는 발음이, 학자를 의미하는 Scholar를 연상시켜서 필자는 원래 영어 발음인 "***스케일러(scalar)***"라고 부르는 것을 좋아합니다. 스케일(scale, 크기)에서 파생된 scalar라는 단어는 "크기와 관계된 양"를 의미합니다.

예를 들어 자동차가 ***속력(speed)*** 100km/h로 달리고 있을 때 속력은 스칼라 값입니다. 속력은 방향을 고려하지 않습니다. 자동차가 부산에서 대구 방향으로 ***속도(velocity)*** 100km/h로 달린다면 이는 벡터입니다. 속도의 크기는 100이며 방향은 부산에서 대구를 나타냅니다.

시작점(initial point) A와 끝점(terminal point) B로 표현되는 벡터 v는 $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$로 나타냅니다. 변수나 상수로 사용하는, 일반 영문자 v와 구분하기 위해 화살표(→)를 v의 위에 명시해서 $\vec{v}$처럼 나타냅니다.



(그림2-11) 벡터의 표현: 벡터 $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$는 (4,3) 혹은 $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$이라고 나타냅니다.

벡터 $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$는 ***행벡터(row vector)*** (4,3) 혹은 ***열벡터(column vector)*** $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$으로 나타냅니다. $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$표현에서 대괄호 대신에 괄호를 사용해서 $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$으로 나타낼 수도 있습니다. 일반적으로 $(4,\ 3)$보다는 $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$을 선호합니다. 왜냐하면 (4, 3)이라는 표현은 점(point)을 표현하는 것인지, 벡터를 표현하는 것인지 모호함이 발생할 수 있기 때문입니다.

이 책에서는 (4, 3)과 $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$을 혼용해서 사용할 것입니다. 그리고 점과의 구분이 명확히 필요한 경우 (4, 3)이 아니라, ***벡터 (4, 3)*** 혹은 $\vec{v}(4,3)$으로 표현할 것입니다. 그렇게 하는 이유는 벡터 (4, 3)은 문장의 일부로 사용할 때 높이가 다르지 않아 자연스럽게 문장의 일부로 표현되기 때문입니다.

수(number)가 주어지면, 수에 대한 연산을 정의할 수 있습니다. 기본적인 사칙연산은 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기 이며 각각을 다음과 같은 기호로 표시합니다.

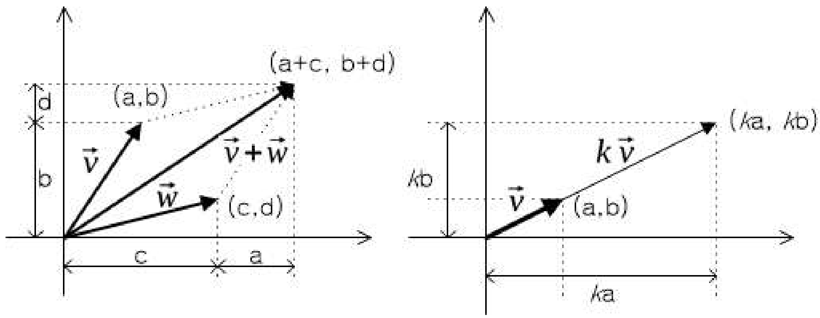
$$+,\ -,\ \times,\ /$$

위의 ***사칙연산자(basic four arithmetic operator)***는 ***피연산자(operand)***로 수(number)를 가집니다. 마찬가지로 벡터가 주어지면, 벡터에 대한 연산을 (식2-14)와 같이 정의할 수 있습니다. 벡터의 곱셈은 (식2-15)와 같이 다양한 목적을 위하여 정의할 수 있는데, 이 부분은 “변환”을 설명할 때 다루도록 하겠습니다.

$$\vec{v} + \vec{w},\ \vec{v} - \vec{w},\ \vec{v} \times \vec{w},\ \vec{v} \,/\, \vec{w} \quad (식2-14)$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w},\ \vec{v} \times \vec{w},\ \vec{v} \otimes \vec{w} \quad (식2-15)$$

벡터에는 여러 가지 연산이 있지만, 가장 간단한 연산은 ***덧셈(vector addition)***과 ***스칼라 곱셈(scalar vector multiplication)***입니다.



(그림2-12) 벡터의 덧셈: 벡터의 합은 각 요소(component)를 합한 것입니다. 벡터와 스칼라 k의 곱은 벡터의 각 요소에 k를 곱한 것입니다.

벡터 $\vec{v} = (a,b)$와 $\vec{w} = (c,d)$가 주어졌을 때, $\vec{v} + \vec{w}$의 의미는 $\vec{v}$만큼 이동 한 후에, $\vec{v}$의 끝점에서 $\vec{w}$만큼 이동하라는 의미입니다. 이것은 위 (그림2-12)에서 보듯이 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

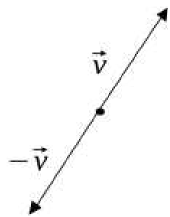
$$\vec{v} + \vec{w} = (a,\ b) + (c,d) = (a+c,\ b+d) \quad (식2-16)$$

벡터 $\vec{v} = (a,b)$와 임의의 실수값 k에 대해서 곱셈을 정의할 수

있습니다. 그것은 $\vec{v}$방향은 유지한 채로 크기를 k배 변경시킨다는 의미로 다음과 같이 정의합니다.

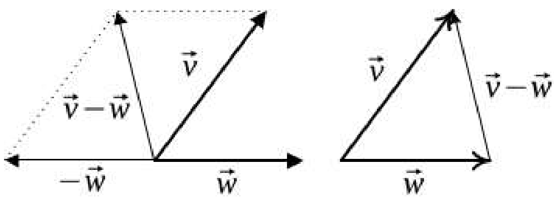
$$k\vec{v} = k(a,\ b) = (ka,\ kb) \quad \text{(식2-17)}$$

k가 -1이면 $\vec{v}$의 ***음 벡터(negative vector)***를 이해할 수 있습니다. 음 벡터는 크기는 유지한 채로 방향이 반대가 되는 벡터입니다. (그림2-13)은 $\vec{v}$와 $-\vec{v}$의 관계를 보여줍니다.



(그림2-13) 음(negative)벡터

$\vec{v} = (a,b)$ 일 때 $-\vec{v} = -1(a,\ b) = (-1a,\ -1b) = (-a,\ -b)$입니다.

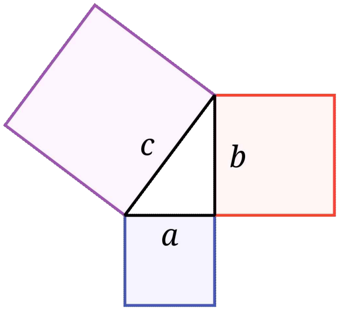


(그림2-14) 벡터의 뺄셈(subtraction): 벡터의 뺄셈 $\vec{v}-\vec{w}$는 $\vec{v}$에 $-\vec{w}$를 더한 것과 같습니다

벡터 덧셈의 정의에 의해서, $\vec{v}-\vec{w} = (a-c,\ b-d)$입니다.

벡터 $\vec{v} = (a,b)$의 ***길이(length, norm)***는 $|\vec{v}|$로 나타내며, 다음 (식2-18)과 같습니다. (식2-18)은 ***피타고라스의 정리(Pythagorean theorem)***에 의해서 유도 가능합니다.

$$|\vec{v}| = {}^{2}(a^2+b^2) = \sqrt{(a^2+b^2)} \quad \text{(식2-18)}$$



(그림2-14b) 직각삼각형의 빗변(hypotenuse), 반대 변(opposite), 인접한 변(adjacent)를 c, b, a라고 하면 $c^2 = a^2 + b^2$가 성립합니다.

피타고라스의 정리는 (그림2-14b)처럼 직각 삼각형(right triangle)의 빗변(hypotenuse), 반대 변(opposite), 인접한 변(adjacent)을 c, b, a라고 했을 때, 각 변이 이루는 정사각형(square)의 넓이의 관계를 나타냅니다. (그림2-14b)에서 관계는 다음 (식2-18b)와 같습니다.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(식2-18b)}$$

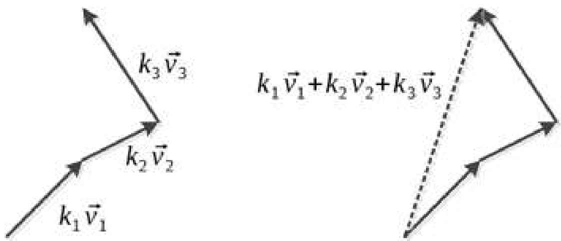
벡터의 방향 성분만을 고려하기 위해서 $|\vec{v}|$가 1이 되게 $\vec{v}$를 바꿀 수 있는데, 이러한 과정을 ***정규화(노멀라이즈, normalize)***라고

합니다. 임의의 수 n을 n으로 나누면 $n/n=1$이 됩니다. 마찬가지로, 벡터 $\vec{v}$를 정규화하기 위해서는 (식2-19)처럼, 벡터의 각 성분을 $|\vec{v}|$로 나누어 주어야 합니다. 정규화된 벡터는 화살표 대신에 ***햇(^, hat)***기호를 사용해서, $\hat{v}$("브이 햇"이라고 읽습니다)이라고 나타냅니다.

$$\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(a,b)}{|\vec{v}|}=(\frac{a}{|\vec{v}|},\ \frac{b}{|\vec{v}|})\ \text{(식2-19)}$$

$|\vec{v}|$와 정규화에 대한 추가적인 설명은 마지막 기본함수를 설명할 때 하려고 합니다.

주어진 수식을 직관적으로 이해하는 것은 많은 도움이 됩니다. 벡터의 덧셈과 스칼라 곱셈을 직관적으로 어떻게 이해해야 할까요?



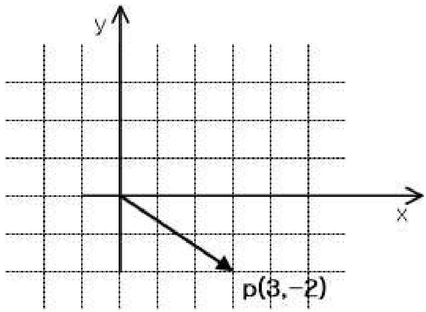
(그림2-14c) 벡터의 덧셈의 의미

(그림2-14c)를 보면 벡터의 덧셈은 벡터가 이루는 직선(line)의 끝점을 이어서 새로운 직선을 만드는 과정이라고 생각할 수 있습니다. 이것을 ***선들의 조합(linear combination)***이라고 부르도록 하겠습니다.

베이시스(기저, Basis)

우리는 이제 ***베이시스(기저, basis)***와 ***선형 조합(linear combination)***에 대해서 이해할 준비가 되었습니다.

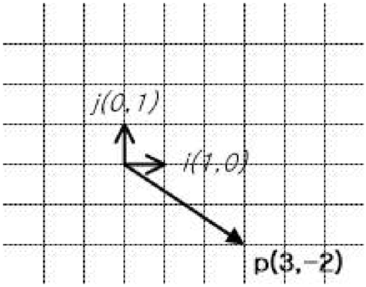
데카르트 표준 좌표계에 벡터 $\vec{p}(3,-2)$를 나타내어 봅시다. 그러면 $\vec{p}(3,-2)$는 아래 (그림2-15)와 같이 나타낼 수 있습니다.



(그림2−15) 벡터 p(3,−2)

위 그림에서 x와 y는 벡터가 아니라 좌표축입니다. $\vec{p}(3,-2)$ 벡터의 3이 의미하는 것은 x-축을 따라 3단위(unit) 만큼, y-축을 따라 –2단위 만큼 이동한 위치가 벡터의 끝(tip)이 된다는 의미입니다.

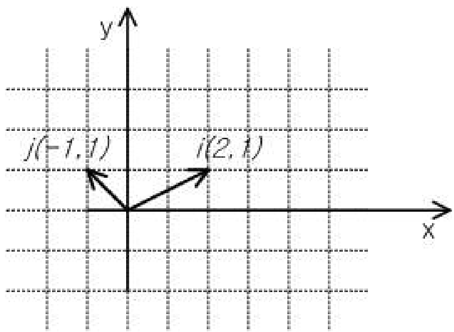
이제 축(axis) 대신에 x-축을 따라 단위 길이가 1인 벡터 i(1,0)와, y-축을 따라 단위 길이가 1인 벡터 j(0,1)를 생각해 볼 수 있습니다. 이것을 각각 $\hat{i}$, $\hat{j}$으로 나타낸다고 합시다. 그러면 이제 벡터 $\vec{p}(3,-2)$를 $\hat{i}$와 $\hat{j}$의 덧셈으로 나타내는 것이 가능합니다.



(그림2-16) 베이시스 벡터 i(1,0)와 j(0,1)

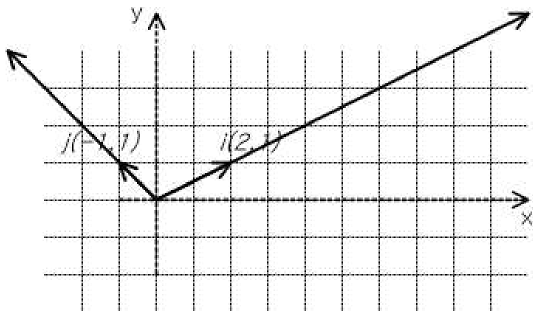
$$3\hat{i}-2\hat{j}=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{(식2-20)}$$

$3\hat{i}$는 스칼라 값 3과 벡터 $\hat{i}(1,0)$의 곱셉을 의미합니다. $-2\hat{j}$는 스칼라 값 –2와 벡터 $\hat{j}(0,1)$의 곱셉을 의미합니다. $\hat{i},\hat{j}$와 벡터의 덧셈을 이용하면 2차원 평면의 모든 벡터를 나타내는 것이 가능합니다. 이렇게 주어진 좌표계의 각 축을 구성하는 기본적인 벡터를 ***베이시스(basis, 기저)***라고 합니다. 이제 $\hat{i}(1,0)$과 $\hat{j}(0,1)$이 아니라 다른 베이시스 벡터를 고려해 볼 수 있습니다. 아래 (그림2-17)을 봅시다.



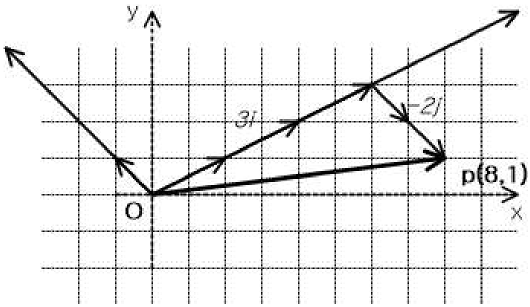
(그림2-17) 베이시스 벡터 i(2,1)와 j(−1,1)

위 (그림2-17)에서는 벡터 i(2,1)과 벡터 j(1,-1)을 축에 대응하는 베이시스 벡터로 사용하려고 합니다. 이 벡터들은 이제 서로 직교하지도 않고, 단위 길이를 가지지 않습니다. 이러한 i(2,1), j(1,-1)가 나타내는 좌표축은 아래 (그림2-18)과 같습니다.



(그림2-18) 베이시스 벡터 i(2,1)와 벡터 j(−1,0)가 이루는 좌표계

이제 벡터 i(2,1)와 벡터 j(1,-1)가 이루는 좌표계에서 (3,-2)는 어떤 의미를 가지는 것일까요? 그것은 벡터 i(2,1)을 따라 3 단위만큼, 벡터 j(1,-1)을 따라 –2 단위만큼 움직인 위치를 나타냅니다. 그것을 식으로 나타내면 $3\vec{i}-2\vec{j}$를 의미합니다.



(그림2-19) 새로운 축에서의 (3,-2)의 의미

이제 $\vec{i}$와 $\vec{j}$대신에 좌표축 단위를 의미하는 실제 값을 넣어서 계산해 보겠습니다.

$$3\vec{i}-2\vec{j}=3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix} \quad \text{(식2-21)}$$

그러면 (8,1)이라는 값을 얻는데, 이 좌표는 베이시스 i(1,0)과 j(0,1)을 사용하는 표준좌표계에서 벡터를 의미합니다.

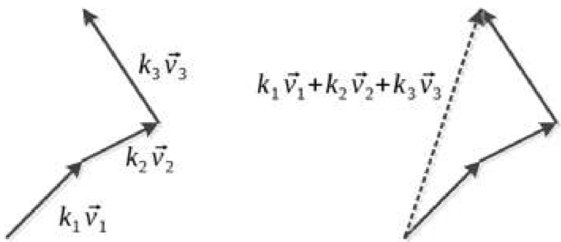
우리가 i(1,0), j(0,1)을 사용하든, i(2,1), j(-1,1)을 사용하든 2차원 상의 모든 벡터를 나타낼 수 있습니다. 그러면 벡터를 하나만 사용해서 2차원의 모든 벡터를 나타낼 수 있을까요? 아니면 벡터를 세 개 사용하는 것은 어떤가요? 이것을 알아보기 위해 좀 더 형식적인 수학적 정의를 이해할 필요가 있습니다.

선형 조합(Linear Combination)

벡터 $\overrightarrow{w}$가 다음과 같이 표현된다고 합시다.

$$\overrightarrow{w} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + k_r\overrightarrow{v_r} \quad \text{(식2-22)}$$

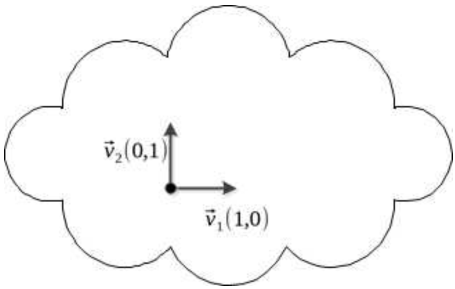
여기서, k_1, k_2, ... ,k_r은 모두 스칼라 값입니다. 이 때, $\overrightarrow{w}$를 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_r}$의 ***선형 조합(linear combination)***이라고 합니다. 선형 조합의 의미는 $\overrightarrow{w}$가 다른 벡터의 조합(선들의 조합)에 의해 표현될 수 있다는 의미입니다. 가능한 모든 벡터가 존재하는 공간을 ***벡터 공간(vector space)***이라고 하는데, 2차원에서 벡터 공간은 평면을 의미하고, 3차원에서 벡터 공간은 3차원 공간을 의미합니다.



(그림2-20) 선형조합은 벡터가 나타내는 선(line)들의 조합(combination)을 의미합니다.

임의의 벡터 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_r}$에 대해, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_r}$의 선형 조합이 모든 벡터 공간상의 벡터를 표현할 수 있다면, 이 벡터들이 벡터 공간을 ***스팬(span)***한다고 합니다. 2차원 평면의 예를 들면,

$(1,0)$, $(0,1)$벡터의 선형 조합 $k_1(1,0)+k_2(0,1)$은 임의의 k_nk값들을 대입함에 따라 모든 평면상의 점들을 표현할 수 있으므로, 2차원 평면 벡터 공간을 스팬합니다.

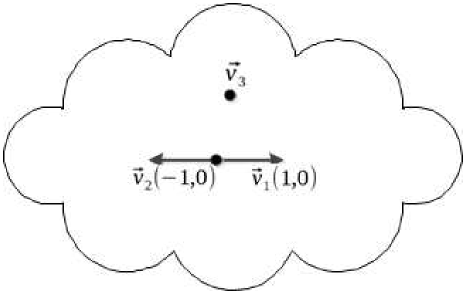


(그림2-20b) $v_1(1,0)$과 $v_2(0,1)$의 선형 조합은 2차원 평면의 모든 벡터를 스팬합니다.

우리는 2차원 평면을 스팬하는 무수히 많은 벡터들을 선택할 수 있습니다. 하지만, $k_1(1,0)+k_2(-1,0)$은 벡터 $(1,0)$과 벡터 $(-1,0)$이 동일한 일직선상에 위치하므로, 어떤 k_n값을 대입하더라도 직선을 벗어난 평면상의 다른 점들을 표현할 수 없습니다. (그림2-20c)에서 $\overrightarrow{v_1}(1,0)$과 $\overrightarrow{v_2}(-1,0)$의 선형조합은 $\overrightarrow{v_3}$을 나타낼 수 없습니다.

$k_1(1,0)+k_2(-1,0)$**은** 2차원 **벡터 공간을 스팬하지 않습니다.**

짐작하듯이 우리가 2차원 평면상에서 점의 위치를 표현하기 위해 좌표축을 고를 때에는 2차원 평면을 스팬하는 좌표축 벡터(베이시스)를 선택해야 합니다. 예를 들면 우리는 2차원 평면의 벡터를 표현하기 위해 벡터 (1,0), (0,2)를 선택하는 것은 타당하지만, 벡터 (1,0), (-1,0)을 선택하는 것은 타당하지 않습니다.



(그림2-20c) $\overrightarrow{v_1}(1,0)$과 $\overrightarrow{v_2}(-1,0)$의 선형 조합은 2차원 평면의 모든 벡터를 스팬하지 못합니다. $\overrightarrow{v_1}(1,0)$과 $\overrightarrow{v_2}(-1,0)$이 모두 1차원 직선 위에 존재하기 때문입니다.

S = $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{v_r}\}$가 벡터들의 집합 일 때, 아래의 벡터 방정식 (식2-23)을 고려해 봅시다.

$$k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + k_r\overrightarrow{v_r} = 0 \quad \text{(식2-23)}$$

위 (식-23)은 최소한 k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_r = 0의 ***당연한 해 (trivial solution)***를 가집니다. 이 해의 의미는 벡터의 종류에 상관없이 모든 k가 0이라면 방정식이 성립한다는 의미입니다. 만약 이 해가 유일한 해라면 S를 ***선형 독립(linearly independent)*** 집합이라고 합니다. 만약 다른 해가 존재한다면 ***선형 종속(linearly dependent)*** 집합이라고 합니다. 선형 독립의 의미는 S에 속한 특정한 벡터가 다른 벡터들의 선형 조합에 의해 표현 불가능함을 의미합니다. 예를 들면, S = { (0,1), (1,0), (0,2) }을 고려해 봅시다.

-2(0,1) + 0(1,0) + 1(0,2) = 0 (식2-23b)

(식2-23b)는 $k_1 = 0, \ k_2 = 0, \ k_{3=0}$을 해로 가집니다. 하지만, 이 외에도 $k_1 = -2, \ k_2 = 0, \ k_3 = 1$의 해를 가지므로, 선형 종속입니다.

(0,2) = 2(0,1) + 0(1,0) (식2-23c)

(식2-23c)에서 보듯이 S의 원소 (0,2) 벡터는 다른 벡터의 선형 조합(linear combination)으로 표현이 가능합니다. 그러므로 S는 선형종속(linearly dependent)입니다. 즉, 선형 독립인 벡터의 집합은 쓸데없는 벡터가 없어야 합니다. 2차원 평면의 예를 들면, 우리는 2차원 벡터 공간을 표현하기 위해 적절한 2개의 축만을 사용하면 됩니다. 만약 3개의 축을 사용한다면 필요 없는 여분의 축을 사용하는 결과 즉 선형 종속이 되는 것입니다.

이제 차원(dimension)과 차원상의 위치를 표현하기 위해 사용해야 하는 ***축 벡터(axis vector)***를 수학적으로 정의할 준비가 되었습니다.

벡터 공간 V에 대해 S = $\{\overrightarrow{v_1}, \ \overrightarrow{v_2}, \ \ldots, \ \overrightarrow{v_r}\}$이 V의 ***유한 집합(finite set)***이고 아래의 두 조건을 만족하면 S를 ***베이시스(기저, basis)***라고 합니다.

1) S는 선형 독립이다.
2) S는 V를 스팬(span)한다.

베이시스의 의미는 벡터 공간을 모두 표현할 수 있는 최소한의 벡터 집합이라는 의미입니다. 우리는 어떤 r-차원의 벡터 공간에 대해서도 쉽게 한 베이시스를 다음과 같이 선택할 수 있습니다.

$$\overrightarrow{v_1} = (1,0, ..., 0), \ \overrightarrow{v_2} = (0,1,0, ..., 0), ..., \ \overrightarrow{v_r} = (0, ..., 0,1)$$

우리는 이러한 베이시스를 ***표준 베이시스(standard basis)***라고 합니다. 그리고 베이시스의 벡터의 개수를 ***차원(dimension)***이라고 합니다.

$$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \ (식2\text{-}23d)$$

(식2-23d)에 표시된 벡터 집합은 3차원에 대한 표준 베이시스입니다. 벡터 집합의 모든 벡터 쌍이 서로 직각(orthogonal)이라면, 우리는 그 집합을 **직교 집합(orthogonal set)**이라고 합니다. 또한, 직교 집합의 모든 벡터의 길이가 1이라면 우리는 그 집합을 ***정규직교(올소노멀, orthonormal)***라고 합니다. 예를 들면 아래의 벡터들은 정규직교입니다.

$$\overrightarrow{v_1} = (0,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{v_2} = (\frac{1}{{}^{2}2},\ 0,\ \frac{1}{{}^{2}2}),\ \overrightarrow{v_3} = (\frac{1}{{}^{2}2},\ 0,\ -\frac{1}{{}^{2}2})$$

우리는 어떤 차원에 대해 베이시스를 선택할 때 여러 가지 이점 때문에 선형독립인 ***정규직교 베이시스(orthonormal basis)***를 선택합니다. ***표준 베이시스(standard basis)***는 항상 정규직교입니다. 그래서 우리는 2차원 평면과 3차원 공간에 대해서 표준 정규직교 베이시스를 선택합니다. 3차원 공간의 경우 그것은 다음과 같습니다.

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$$

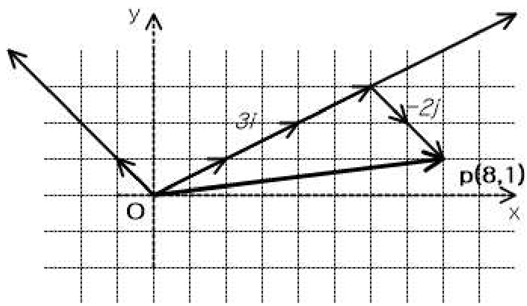
그리고 각각을 x-축, y-축, z-축 ***단위 벡터(unit vector)***라 부릅니다. 우리는 x-축, y-축, z-축 단위 벡터의 선형 조합식을 아래와 같

이 구성할 수 있습니다.

$$k_1(1,0,0)\ +\ k_2(0,1,0)\ +\ k_3(0,0,1) \quad \text{(식2-24)}$$

(식2-24)에 의해서 3차원 공간상의 모든 점을 표현(span, 스팬) 할 수 있습니다. 그래서 우리는 3차원 공간의 물체의 위치를 기술하기 위해서 서로 직각인 길이가 1인 세 개의 벡터를 사용하는 것입니다.

벡터 i(2,1), j(-1,1)을 베이시스로 하는 좌표계상에 (0,0)을 시작점으로 하고, (3,-2)를 끝점으로 하는 벡터를 (그림2-21)에 나타내었습니다.



(그림2−21) 벡터 i(2,1)와 j(−1,1)를 베이시스로 가지는 축에서의 벡터 (3,−2)의 의미

위의 그림에서 선 $\overline{Op}$가 의미하는 벡터는 표준 좌표계에서 벡터 (8,1)을 의미합니다. 그것은 아래의 (식2-25)로 유도할 수 있습니다.

$$3\vec{i}-2\vec{j}=3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix} \quad \text{(식2-25)}$$

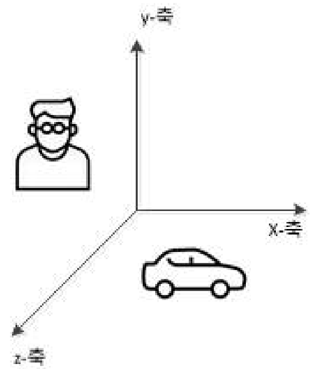
2차원에서 표준 베이시스는 i(1,0), j(0,1)입니다. 그러므로 (식 2-25)는 다음과 같이 표준 베이시스를 사용하여 (식2-26)으로 쓸 수 있습니다.

$$8\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$$ (식2-26)

우리는 공간을 정의하기 위해, 베이시스를 정의하고, 베이시스를 구성하는 벡터의 선형조합으로 공간을 정의할 수 있다는 것을 살펴보았습니다. 이렇게 정의된 공간에 어떤 인식 대상이 존재하면, 우리는 그 대상을 공간을 통해서 인식합니다. 그런데 우리는 공간 자체를 어떻게 인식할 수 있을까요?

공간은 물리적 대상인가?

베이시스와 선형조합의 개념을 이해했으므로, 우리가 인지하는 3차원 공간 자체에 대해서 살펴봅시다. 우리가 자연스럽게 인식하는 공간은 3차원이므로, 3차원에 놓여있는 자동차의 위치를 기술하기 위해서는 세 개 요소를 가지는 베이시스를 사용합니다. 우리가 3차원 공간에 놓여 있는 자동차를 인식하는 과정을 생각해 봅시다.

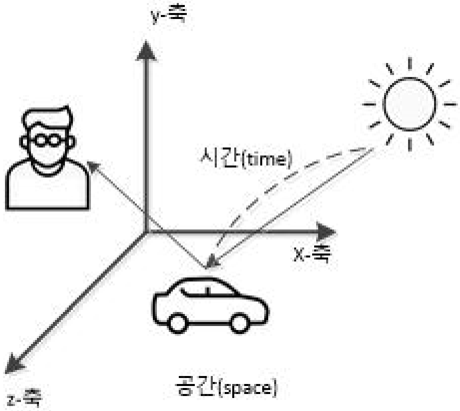


(그림2-22) 3차원 공간에 놓여 있는 자동차를 인식합니다.

우리는 공간 자체를 자동차를 인식하듯이 인식하지 않습니다. 우리는 공간을 통해서 자동차를 인식한다고 생각합니다. 하지만 본질은 그렇지 않습니다. 공간이 특별하기는 해도 그것은 물리적 대상입니다. 우리가 자동차를 인식하기 위해서는 (그림2-22)의 구성요소로는 충분하지 않습니다. 빛(light)과 시간(time)이 추가적으로 필요합니다.

자동차처럼 공간과 시간과 빛은 모두 만들어진 물리적 대상인

데, 우리 우주에서 만들어진 것은 모두 시작과 끝이 있습니다. 공간과 시간과 빛은 모두 언젠가 시작이 있었고, 미래 어느 시점에 끝이 있을 것입니다.



(그림2-23) 우리가 자동차를 인식하기 위해서는 공간(space), 시간(time)과 빛(light)이 필요합니다.

(그림2-23)은 사람이 자동차를 인식하는 과정을 보여줍니다. 우리는 어딘가에서 출발한 ***빛 알갱이(광자, photon)***가 공간(space)을 거쳐서(time) 자동차의 표면에 닿아 반사되어서, 우리 눈에 들어온 광자의 양을 가지고 자동차를 인식합니다. ***빛의 속도(speed of light)***는 일정하며 정보를 포함한 광자는 일정한 시간을 지나야 우리 눈에 도착합니다.

만약 우리 우주에 4차원 시공간(space-time)만 존재하면, 우리는 사물을 인식할 수 없습니다. ***3차원 공간에 존재하는 물체를 1차원 시간을 통해 우리에게 정보를 전달해 줄 매개체인 빛(Light)이 있어야 하는 것***입니다. 만약 우주 제작방법에 대한 매뉴얼이 있다면, 그 매뉴얼의 첫 문장은 다음과 같이 시작해야 할 것입니다.

"태초에 무언가가 빛을 만들었다." (주장2-27)

(주장2-27)의 빛은 우리가 아는 전등 빛이나 태양 빛이 아닙니다. 빛 그 자체가 되어야 합니다. 빛 그 자체가 만들어지면, 빛을 만들어 내는 태양이나 전등이 태양 빛이나 전등 빛을 만들어 낼 수 있습니다. 필자가 알기로는 (주장2-27)과 같이 시작하는 매뉴얼은 두 가지 인데, 하나는 ***빅뱅이론(Big Bang Theory)***이고 하나는 ***성경(Bible)***입니다. 백빙이론에서 무언가는 "***인류 원리(ahthropic principle)***"이고, 성경에서 무언가는 "***하나님***"이십니다.

어떤 분들은 빅뱅이론이 엉터리라는 주장을 하면서 "우연"은 복잡한 구조를 만들 수 없다고 주장합니다. 맞습니다. 하지만, 인류원리는 우연과는 다릅니다. 인류원리는 우연히 질서 있는 특별한 우주가 만들어졌다고 주장하지 않고, 특별한 우주에 살고 있는 우리가, 무한한 다른 우주가 우연임을 인식한다고 주장합니다. 우주의 개수가 무한개이므로 창조자를 가정하지 않고도 존재를 설명할 수 있게 됩니다. 필자의 주장은 둘 모두 가능성이 있다는 것입니다. 어떤 과학자가 빅뱅이론이 맞다 생각해서 창조를 믿지 않는다면, 혹은 창조론이 맞다 생각해서 빅뱅은 무조건 틀렸다고 한다면, **정답일 가능성이 있는 한 후보를 정답의 가능성에서 제외시켜 버리는 잘못**을 범하는 것입니다.

우리 우주에서 우리가 무언가를 인식하는 과정에서 "변환"이 발생합니다. 필자는 6장 "변환"을 설명할 때, (그림2-23)에 숨어 있는 변환에 대해서 설명할 것입니다. 현대 물리학은 예전에 모순처럼 보였던 것들이 사실은 같은 것이었다는 결론을 내리는 경우가 있습니다. 예를 들면 ***파동(wave)***과 ***입자(particle)***가 그렇습니다. 그래서 지금은 파동과 광자를 구분하지 않고, ***양자(quantum)***라고 합니다.

필자는 "로렌츠변환"을 설명할 때, 빅뱅이론과 성경의 주장이 하나의 현상에 대한 두 가지 해석이라고 주장할 것입니다. "변환"을 이해하면, 두 가지 독립적인 것처럼 보였던 것들이, 사실은 같은 하나임을 인정할 수 있는데, 꼭 이것이 물리적인 현상에 국한된 것은 아닙니다. 예를 들면 성경에서 모순처럼 보이는 "***행함***"과 "***믿음***"이 사실은 같은 대상에 붙여진 다른 이름인 것 같습니다. 그러므로 이것을 구분하려는 시도는 "본질적으로 불가능"한 것일 수 있습니다.

(식2-27)

(식2-28)

(식2-29)

(식2-30)

(식2-31)

(식2-32)

(식2-33)

(식2-34)

(식2-27)부터 (식2-34)는 편집상의 이유로 존재하지 않습니다.

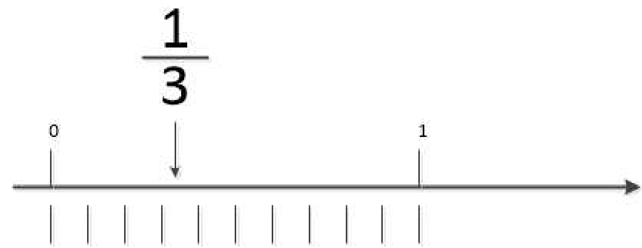
복잡한 수(complex number)

지금부터 이 절(section)에서 이야기하는 내용은 "***하나의 아름다운 수식***“을 이해하기 위한 첫 발자국입니다. ”하나의 아름다운 수식“은 여섯 개의 기본함수의 의미를 모두 이해하고, 주어진 기본함수의 접하는 직선의 기울기를 구하는 과정을 이해한 후에야 ”아름답다“고 느낄 수 있습니다.

이제 다시 파워함수의 성질을 분석하면서 발견한 이상한 수 $^{2}(-1)$를 자세하게 살펴보려고 합니다. 역사를 통해서 수의 개념은 발전해 왔는데, 초반에 모든 수는 수직선 위에 나타낼 수 있을 것이라고 생각했습니다. 즉 수는 1차원에만 존재한다고 생각했습니다.

먼저 우리는 수에 대한 고정관념을 버릴 필요가 있습니다. 우리는 0과 1을 포함한 ***자연수(natural number)***, 음수를 포함한 ***정수(integer)***, 두 정수의 비율로 표시할 수 있는 ***이성적인 수(유리수, rational number, 유리(有理)는 이성이 있다는 뜻입니다)***, 실수(real number)이지만, ***비이성적인 수(무리수, irrational number)***, 0보다 크고 1보다 작은 실수를 의미하는 ***데시멀(소수, decimal)***을 알고 있습니다.

첫 번째 버려야 할 고정관념은 모든 수를 수직선위에 표시할 수 있다고 생각하는 것입니다. 하지만, 위 수들 중 어떤 수는 수직선 위에 정확하게 나타낼 수 없습니다.



(그림2-24) $1/3$은 수직선 위에 정확하게 나타낼 수 없습니다.

어떤 수가 실제라는 것은 어떤 의미일까요? 1은 실제하는 수일까요? 어떤 수를 수직선 위에 나타낼 수 없다는 것은, 그 수를 실수형태로 적었을 때 정확한 값을 계산할 수 없다는 의미입니다. 현재의 어떤 컴퓨터도 $1/3$을 정확하게 계산할 수 없습니다. 지금 컴퓨터에서 계산기 프로그램을 사용하여 $1/3$을 계산해 보세요. 어떤 계산기도 $1/3$의 정확한 값을 출력하지 못하고 근사치만을 출력할 뿐입니다. 그러면 $1/3$을 단지 그것이 자연수의 비율로 표시된다고 해서, 실제하는 수라고 말할 수 있을까요? 마찬가지로 제곱하면 2가되는 수 $^{2}2 = \sqrt[2]{2}$ 도 존재한다고 알고는 있지만, 그 정확한 값을 알지는 못합니다.

(그림2-24)처럼 수직선이 주어졌을 때, 0과 1같은 자연수, 0.5같은 실수는 수직선 위에 정확하게 나타낼 수 있지만, $1/3$은 수직선 위에 정확하게 나타낼 수 없습니다. 이러한 사실은 참으로 놀랍습니다. 우리 주위에는 존재는 알고 있지만, 정확하게 나타낼 수는 없는 수(number)가 존재합니다!

하지만, 우리는 사고실험(thought experiment)을 통해서 1/3을 정확하게 나타낼 수는 있습니다. $1/3 = 0.\dot{3}$인데 "무한에 대한 직관"을 사용하는 것입니다. 수직선의 0과 1사이의 길이는 유한하므로, 이것을 무한으로 나누는 것이 가능하다면, $1/3 = 0.\dot{3}$을 나타내는 것이 가능해 집니다. 그러므로 무한에 대한 직관을 사용하면

$1/3$도 $^{2}2$도 모두 실제하는 수입니다. 다만 $1/3$는 소수(decimal)에 규칙성이 있고, $^{2}2$는 소수에 규칙성이 없다는 것입니다.

우리 우주의 시공간(space-time)을 구성하는 하나의 차원이 "**한 방향으로만 진행하는**" 시간(time)이어서 우리는 시간에 제한되어 살고 있으므로, 무언가를 무한으로 반복하는 수학적 정의는 가능해도, 공학적 구현은 불가능합니다. 공학적 구현이 불가능함에도 불구하고, 무한에 대한 수학적 사고가 가능하다는 것은, 우리의 본질은 아마도 시간을 초월한 더 높은 차원에 존재하는 것 같습니다.

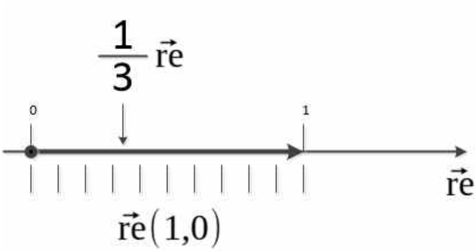
우리 우주는 아주 기묘합니다. 우리는 우주가 본질적으로 아날로그 형태일 것이라고 생각하지만, 실제 우리 우주는 컴퓨터처럼 디지털 우주입니다. 최소의 에너지 단위는 ***플랑크 상수(Pkanck constant)***라고 알려진 엄청나게 작은 값 h보다 작은 형태로 존재할 수 없습니다. 우주가 디지털 형태임에도 불구하고 $1/3 = 0.\dot{3}$과 같은 아날로그(무한대) 수를 인식하고 정의할 수 있는 이유는 무엇일까요? 이 질문에 대한 가장 간단한 대답은 우리의 본질은 시간을 초월한, 무한대를 공학적으로 구현할 수 있는 높은 차원에 존재한다는 대답일 것입니다. 대답이 여러 개 존재할 때, 일반적으로 가장 간단한 대답이 정답입니다.

수에 대해서 두 번째 버려야 할 고정관념은 모든 수가 수직선위에 존재한다고 가정하는 것입니다. 하지만, 어떤 수들은 1차원 수직선을 벗어나 2차원 공간에 존재할 수 있습니다! 그것을 이해하기 위해 수(number)를 나타내기 위해 선형조합(linear combination)을 사용하도록 합시다.

실수(real number)를 의미하는 real의 re를 사용하여, 2차원 $\overrightarrow{re}(1,0)$벡터를 정의하면 모든 1차원 ***실수공간(real number space)***은 $\overrightarrow{re}(1,0)$의 선형조합으로 나타낼 수 있습니다. 그것은 (식2-35)

와 같습니다.

$$k_1\overrightarrow{re} \quad \text{(식2-35)}$$

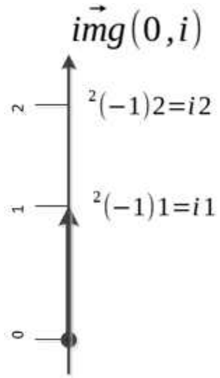


(그림2-25) 모든 1차원 수(실수 공간, real number space)는 $\overrightarrow{re}(1,0)$의 선형 조합으로 나타낼 수 있습니다.

예를 들면, 2는 $2\overrightarrow{re}$, $1/3$는 $(1/3)\overrightarrow{re}$로 나타냅니다. 이제 ${}^{2}(-1)$을 간단하게 표시하기 위해 (식2-36)처럼 심벌 i를 사용하도록 하겠습니다. i는 ***상상의 수(허수, imaginary number)***를 의미합니다.

$${}^{2}(-1) = {}^{2}\sqrt{-1} = \sqrt{-1} = i \quad \text{(식2-36)}$$

그리고 $\overrightarrow{img}(0,i)$를 축으로 사용하는 1차원 세로축을 고려해 보면, 우리는 새로운 i와 연관된 새로운 1차원 ***허수공간(imaginary number space)***을 정의할 수 있습니다.



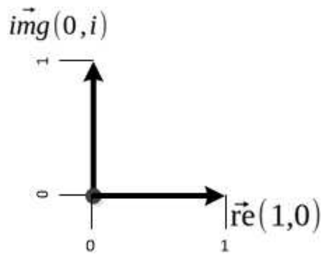
(그림2-26) 1차원 허수공간을 정의합니다.

$\overrightarrow{img}(0,i)$를 베이시스로 하는 1차원 허수공간에서 2는 $2i$를 의미하는데, i가 변수처럼 보일 수 있으므로, $i2$라고 적기도합니다. (식2-37)처럼 $\overrightarrow{img}(0,i)$의 선형조합으로 모든 허수를 나타낼 수 있습니다.

$$k_2\overrightarrow{img} \quad \text{(식2-37)}$$

우리가 원래 알고 있던 1차원 실수와 허수를 모두 나타낼 수 있는 방법은 없을까요? 그것은 새로운 수를 $\overrightarrow{re}(1,0)$와 $\overrightarrow{img}(0,i)$의 선형조합으로 표현하는 것입니다. 즉 새로운 2차원 좌표계를 정의하고, 베이시스로 $\overrightarrow{re}$와 $\overrightarrow{img}$를 사용하는 것입니다. 그러면 새로운 수는 (식2-39)과 같은 선형조합으로 표현 가능합니다.

$$k_1\overrightarrow{re} \ + \ k_2\overrightarrow{img} \quad \text{(식2-39)}$$



(그림2-27) $\overrightarrow{re}$와 $\overrightarrow{img}$를 베이시스로 하는 2차원 좌표계상의 점을 수로 간주하고 “복잡한 수(complex number)"라고 합니다.

(그림2-27)은 $\overrightarrow{re}$와 $\overrightarrow{img}$를 베이시스로 하는 2차원 좌표계를 정의한 것입니다. 우리가 실수를 1차원 좌표계의 점(벡터)으로 생각했듯이, 새로운 수를 (그림2-27)이 나타내는 2차원 좌표계의 점(벡터)으로 나타내면, 기존의 실수와 새로운 허수를 모두 포함하는 수를 정의할 수 있습니다. $\overrightarrow{re}$와 $\overrightarrow{img}$를 베이시스로 가지는 2차원 평면을 ***복잡한 평면(complex plane, 복소평면)***이라고 하고, 복잡한 평면 위의 수를 $\overrightarrow{re}$와 $\overrightarrow{img}$의 선형조합으로 나타내고, 이 수를 “***복잡한 수(complex number, 복소수)***”라고 합니다.

(식2-39)를 벡터의 요소가 모두 나타나도록 표현해 보면 (식2-40)과 같습니다.

$$k_1\overrightarrow{re}+k_2\overrightarrow{img} = k_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\k_2 i\end{bmatrix} \quad \text{(식2-40)}$$

(식2-40)을 보면 실수 부분의 합은 k_1, 허수 부분의 합은 k_2인 것을 알 수 있습니다. 그러면 이 복잡한 수를 선형조합을 이용하지 않고 (식2-41)처럼 식의 형태로 정의할 수 있습니다.

$$\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\k_2 i\end{bmatrix}=k_1+k_2 i$$ (식2-41)

a와 b를 실수라고 가정하고, $^{2}(-1)=i$라고 하면, 우리는 새로운 수를 (식2-42)와 같이 정의할 수 있습니다.

$$a+bi$$ (식2-42)

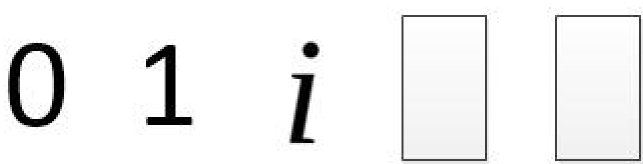
표준 용어인 복소수(複素數, complex number)의 소(素)는 ‘본디’, ‘근본’을 의미합니다. 그런데 이 명칭은 ***프라임 수(소수(素數), prime number, 1과 자신 외에는 약수를 가지지 않는 수)***의 한자와 같고, 1보다 작고 0보다 큰 수를 의미하는 ***소수(小數, decimal)***와는 한글과 같아서 헷갈립니다. complex number의 적절한 번역 이름은 복합수(complex number)인 것 같지만, 복소수와 소수는 헷갈리지 않으므로, “복소수”라는 용어를 그대로 사용하기로 하겠습니다. 새로운 기호 i를 사용하여 기본함수표를 채워보면 (그림2-28)과 같습니다.

	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	^{n}x	i
지수함수				
투영된 선분길이 함수				

(그림2−28) 기본함수표: 파워함수 열(row)을 구성하는 네 개의 요

소는 각각 x^n, nx^{n-1}, ${}^n x$, i입니다.

필자는 고등학교에서 처음으로 허수 i를 배웠을 때, 존재하지도 않는 수를 배워서 도대체 무슨 도움이 될까라고 생각했습니다. 하지만 i는 3차원 공간에서의 자연스러운 회전을 나타내기 위해서, 신호분석을 위한 푸리에 변환(Fourier transform) 등 많은 곳에서 필수적으로 이용되는 실제 수(not an imaginary number)입니다. 그래서 어떤 수학자들은 허수(imaginary number)가 아니라, 2차원 공간에서 수직축에 해당하는 정보를 포함하는 수이므로, ***측면수 (lateral number)***라고 이름을 붙이자고 주장하기도 합니다.



(그림2-28b) 기본함수표의 파워함수를 완성하면서 우리는 추가로 기본수 i를 찾았습니다. 이제 기본수는 $0,1,i$입니다.

다음 종류의 기본함수를 알아보기 전에, 새로운 수 "복소수"를 정의했으므로, 덧셈과 곱셈 등 연산을 정의 할 수 있습니다. 복소수 $a+bi$는 복소평면 상의 벡터 $\vec{v}(a,b)$로 나타낼 수 있으므로, 복소수의 덧셈은 벡터의 덧셈과 같은 의미를 가집니다. 두 번째 복소수 $\vec{w}(c,d)$를 정의하면 복소수의 덧셈은 (식2-43)과 같이 정의합니다.

$$\vec{v}+\vec{w}=(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)=(a+c)+(b+d)i \quad \text{(식2-43)}$$

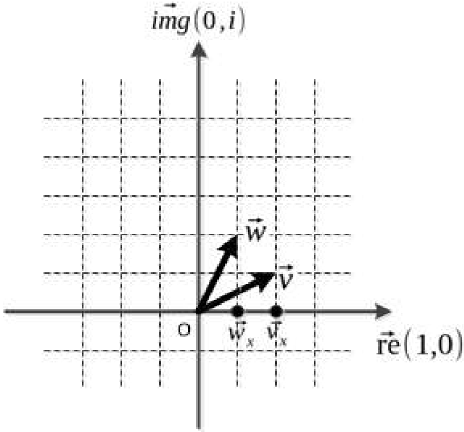
복소수의 곱셈은 두 복소수의 곱을 ***전개(expand out)***하여 결과

를 얻을 수 있습니다. $\vec{v} = a + bi$와 $\vec{w} = c + di$에 대해, 두 복소수의 곱은 (식2-44)와 같이 구할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} &\vec{v}\vec{w} \\ &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci + bd(-1) \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned} \qquad \text{(식2-44)}$$

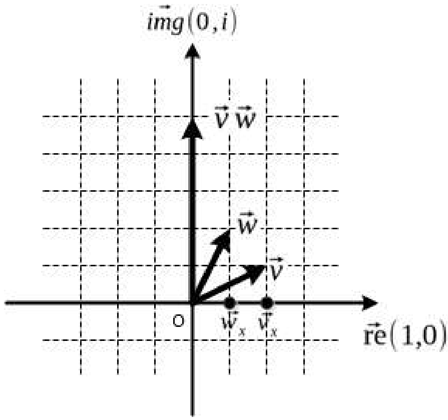
복소수의 곱셈은 우리가 이해하고자 하는 "***아름다운 수식***"의 핵심적인 부분입니다. 복소수의 곱셈의 의미를 이해하기 위해 두 복소수 $\vec{v}(2,1)$와 $\vec{w}(1,2)$를 곱해 봅시다.

$$\vec{v}\vec{w} = (2+i)(1+2i) = (2-2) + (4+1)i = (0,5) \quad \text{(식2-45)}$$



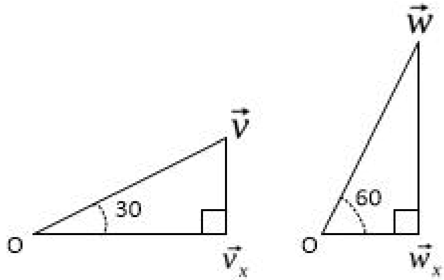
(그림2-29) 복소평면의 두 복소수 $\vec{v}(2,1)$와 $\vec{w}(1,2)$

(식2-45)에서 보듯이 $\vec{v}(2,1)$와 $\vec{w}(1,2)$를 곱하면 $(0,5)$를 얻습니다. (0,5)는 무엇을 의미하며 어떻게 해석해야 할까요? (그림2-30)에 복소수의 곱셈의 결과인 $\vec{v}\vec{w}=(0,5)$를 표시하였습니다.



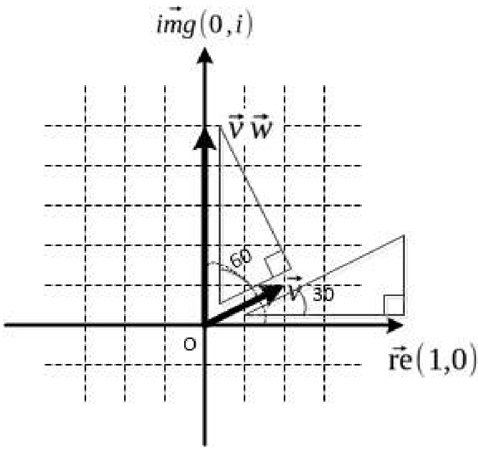
(그림2-30) $\vec{v}(2,1)$와 $\vec{w}(1,2)$의 곱셈의 결과 $\vec{v}\vec{w}=(0,5)$입니다.

곱셈의 결과를 이해하기 위해, $\vec{v}$의 끝점에서 $\overrightarrow{re}$축에 투영한 점의 벡터를 $\overrightarrow{v_x}$라고 하고 $\vec{w}$의 끝점에서 $\overrightarrow{re}$축에 투영한 점의 벡터를 $\overrightarrow{w_x}$라고 합시다. 그러면 (그림2-31)과 같은 삼각형 $\triangle vOv_x$와 $\triangle wOw_x$의 내각을 생각해 볼 수 있습니다. $\triangle vOv_x$의 내각은 30도(degree), $\triangle wOw_x$의 내각은 60도입니다.



(그림2-31) 삼각형 $\triangle vOv_x$와 $\triangle wOw_x$의 내각은 각각 30, 60입니다.

$\vec{v}$,$\vec{w}$및 곱셈의 결과인 $\overrightarrow{vw}$벡터에 대해서 길이를 무시하면, 결과 벡터 $\overrightarrow{vw}$는 "30도 + 60도 = 90도"가 되는 것을 알 수 있습니다.



(그림2-31) 길이를 무시하면 복소수의 곱셈의 결과는 회전을 나타냅니다. $\vec{v}$와 $\overrightarrow{re}$축이 이루는 각은 30입니다. $\overrightarrow{vw}$는 벡터 $\vec{v}$에서 $\vec{w}$가 나타내는 각 60을 더한 위치의 벡터를 의미합니다.

임의의 두 복소수에 대해서도 이 성질이 성립하는데, 두 복소수

의 곱셈은 회전과 관계된 것을 알 수 있습니다. 이 사실은 정말 중요합니다. 다시 한번 적어 보겠습니다.

"***복소수의 곱셈은 각도(degree)의 덧셈을 나타냅니다.***"

복소수에 대해서 이야기할 것이 더 있습니다. 하지만 추가적인 사항은 아직 설명하지 못한 기본함수와 연관되어 있어서, 뒤로 설명을 미루도록 하겠습니다.

벡터의 곱셈을 알고 있다면(5장에서 설명할 것)

우리는 벡터 연산에서 벡터의 곱셈에 대해서 정의하지 않았습니다. 하지만, 벡터 곱셈의 종류인 내적(inner product)과 외적(outer product)을 정의하면, (식2-44)에서 실수 부분은 $\overrightarrow{v}(a,b)$와 $\overrightarrow{w}(c,d)$의 내적의 형태이고, 허수 부분은 $\overrightarrow{v}(a,b)$와 $\overrightarrow{w}(c,d)$의 외적의 형태인 것을 알 수 있습니다. 이것을 고려해서 (식2-44)를 다시 적어보면 곱은 (식2-46)과 같은 성질을 가집니다.

$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}$=($\overrightarrow{v}$와 $\overrightarrow{w}$의 내적 성질) + ($\overrightarrow{v}$와 $\overrightarrow{w}$의 외적 성질) (식2-46)

(식2-46)는 아주 중요한 형태여서, 한 번 더 강조할 필요가 있습니다. 우리가 기본함수를 모두 정의하고 나면, 벡터 $\overrightarrow{v}$와 $\overrightarrow{w}$가 이루는 각(degree)을 x라고 했을 때, $\cos(x)$와 $\sin(x)$를 정의할 수 있습니다. 그리고 내적은 $\cos(x)$와 관계가 있고, 외적은 $\sin(x)$와 관계가 있다는 것을 알 수 있는데, 그러면 (식2-46)은 (식2-47)과 같은 성질을 가지는 것을 알 수 있습니다.

$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}$ = ($\cos(x)$의 성질) + ($\sin(x)$의 성질) (식2-47)

@