5장. 하나의 아름다운 수식

$$e^{i\pi}+1=0$$

벡터의 추가적인 연산: 내적

[표준수학] 내적의 응용

선형조합의 간단한 표기법

행렬(Matrix)

- 행렬과 인공지능

결정요인(Determinant, 행렬식)

벡터의 추가적인 연산: 외적

[표준수학] 외적의 응용

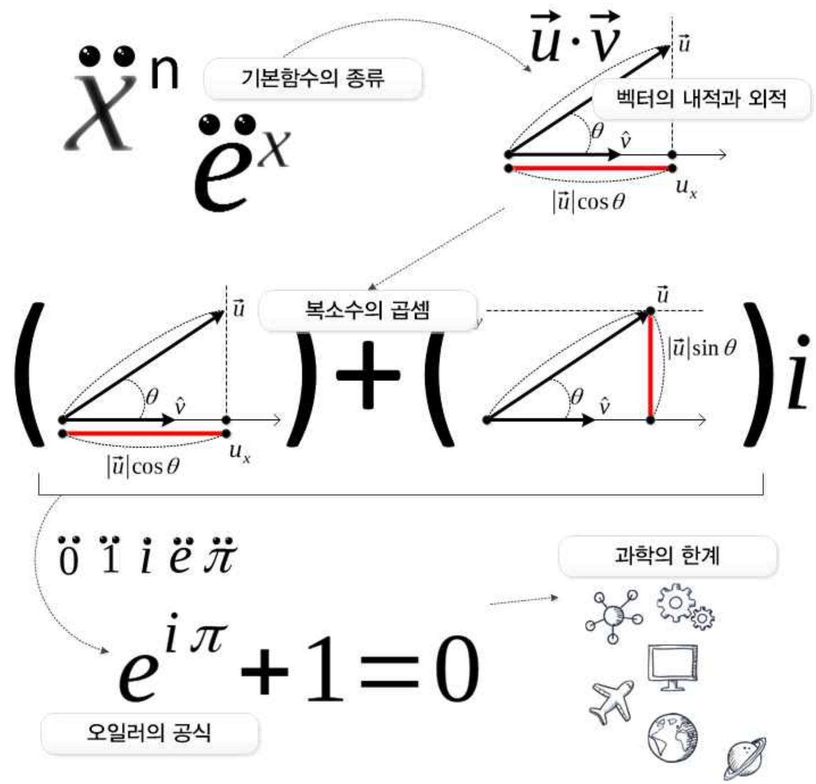
복소수의 곱셈

오일러의 공식(Euler's Formula)

수학에서 가장 아름다운 표

- 수학의 불완전성과 과학의 한계

[표준수학] 벡터미적분(Vector Calculus)



우리는 기본함수의 종류를 모두 파악했습니다. 기본함수를 하나씩 정의할 때마다, 기본수를 하나씩 발견하였습니다. 이제, 벡터의 내적과 외적의 개념을 파악한 이후에, 복소수의 곱셈에 포함된 내적과 외적의 개념을 파악할 것이고, 기본수들이 이루는 완벽한 관계를 기술하는 식을 이해하게 될 것입니다. 이 과정을 통해 자연 법칙을 기술하는 수식의 아름다움과, 필연적으로 존재하는 과학의 한계를 알게 될 것입니다.

기본함수와 기본수를 모두 발견한 지금, 벡터들의 곱이 어떻게 아름다운 공식을 이끌어 내는지 여행을 시작해 봅시다!

벡터의 추가적인 연산: 내적

이제 우리는 이 장에서 기본함수들 간의 관계를 기술하는 아름다운 수식을 살펴보려고 합니다. 그 수식은 복소수의 곱셈(complex number multiplication) 계산과 관계가 있기 때문에 복소수의 곱셈을 좀 더 자세하게 이해할 필요가 있습니다. 그런데 복소수의 곱셈을 전개하면 벡터의 곱과 관계된 항들이 얻어집니다. 그래서 먼저 벡터의 추가적인 연산에 대해서 이해할 필요가 있습니다.

우리는 벡터를 피연산자로 하는 덧셈 연산에 대해서 이미 알아보았습니다. 벡터를 피연산자로 하는 다른 연산자 중에는 곱셈에 해당하는 ***벡터 곱(Vector Product)***이 있습니다. 이것을 벡터 곱셈(multiplication)이라고는 하지 않는데, 전형적인 곱셈과는 약간 차이가 나기 때문입니다. 벡터 곱은 내부적으로 벡터 요소들의 곱셈과 덧셈을 거쳐서 최종적으로 스칼라 값을 계산하는 **내적(inner product, dot product)**과 결과가 벡터가 되는 **외적(outer product, cross product)**이 있습니다. 이것을 내적, 외적이라고 하는 이유는 복소수의 곱셈에서 안쪽(inner)에 나타나는 식과 바깥쪽(outer)에 나타나는 식이기 때문입니다. 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 대해 내적과 외적은 (식5-1), (식5-2)처럼 표시합니다.

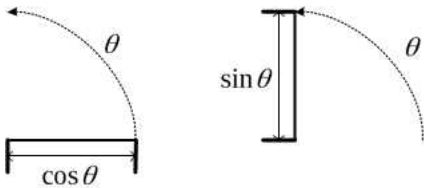
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{(식5-1, 내적)}$$
$$\vec{u} \times \vec{v} \quad \text{(식5-2, 외적)}$$

내적과 외적에 대한 직관을 가지는 것은 많은 도움이 됩니다. (그림5-1)에 내적과 외적에 대한 테이블을 정리하였습니다.

	기호	의미	삼각함수	위치	결과	각의 범위
내적	•	길이	$\cos\theta$	in	실수	$-90 \sim +90$
외적	$\times$	면적	$\sin\theta$	out	벡터	$0 \sim 180$

(그림5-1) 내적과 외적의 비교

내적은 수평 길이와 상관이 있고, 외적은 수직 길이와 상관이 있어서 이차원에서는 면적(area)을 삼차원에서는 부피(volume)를 나타내기 위해서 사용합니다. 내적은 삼각함수 $\cos\theta$와 상관이 있고, 외적은 $\sin\theta$와 상관이 있습니다. 이차원에서 $\cos\theta$가 수평 성분의 길이이고, $\sin\theta$는 수직 성분의 길이라는 것을 생각해 보세요.

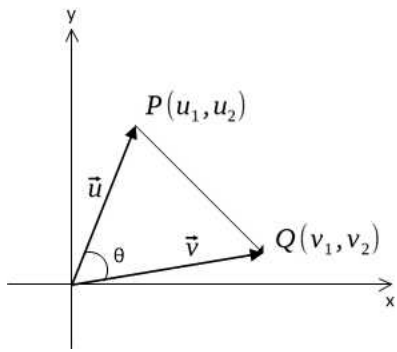


(그림5-1b) 내적은 가로 방향 성분의 길이를, 외적은 가로 방향 성분의 길이에 높이 성분인 $\sin(\theta)$를 곱하기 때문에 면적을 의미합니다.

내적은 복소수 곱셈에서 안쪽(실수부)에 나타나고, 외적은 복소수 곱셈에서 바깥쪽(허수부)에 나타납니다. 내적의 결과는 하나의 수(number)이지만, 외적은 방향과 크기를 가진 벡터입니다. 내적은 두 벡터가 이루는 각이 –90도~+90도 사이에서 양수이지만, 외적

은 두 벡터가 이루는 각이 0도~180도 사이에서 양수입니다. 그래서 내적은 두 벡터가 같은 방향을 가리키는지 판단하기 위해서 사용할 수 있고, 외적은 벡터가 180도 이상 회전해서 ***시계방향(CW, Clock-Wise)인지 반시계방향(CCW, Counter-Clock-Wise)***인지 판단하기 위해서 사용할 수 있습니다.

벡터의 내적은 임의의 차원의 벡터에 대해서도 정의되지만, 설명을 간단하게 하기위해 먼저 이차원 벡터로 내적을 정의해 보겠습니다. 이차원 벡터 $\vec{u}$ = $(u_1,\ u_2)$, $\vec{v}$ = $(v_1,\ v_2)$라 하고 $\vec{u}$의 끝점을 P, $\vec{v}$의 끝점을 Q라고 합시다. 그리고 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각을 θ라고 합시다. (그림5-2)에 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$를 표준 좌표계상에 나타내었습니다.



(그림5-2) 이차원 평면에 $\vec{u}$ = $(u_1,\ u_2)$, $\vec{v}$ = $(v_1,\ v_2)$를 나타내었습니다.

그러면 이차원벡터 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$ 내적은 점(·) 연산자를 사용하여 $\vec{u} \bullet \vec{v}$로 나타내며 다음 (식5-3)과 같이 정의합니다.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (식5\text{-}3)$$

(식5-3)을 보면 각 벡터의 같은 위치의 요소끼리 곱해서 그것을 더한 것임을 알 수 있습니다. 이것은 어떤 의미일까요? 내적의 기하학적인 의미를 이해하기 위해 내적을 유도한 과정을 살펴볼 필요가 있습니다. (그림5-2)의 삼각형 $\triangle OPQ$에 대해서 ***코사인 법칙 (law of cosines)***에 의해 다음의 (식5-3b)가 성립합니다.

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta \quad \text{(식5-3b)}$$

위 식은 4장 표준수학에서 증명하였으므로 해당 내용을 참고하기 바랍니다. $\overrightarrow{PQ} = (v_1 - u_1,\ v_2 - u_2)$ 이므로 (식5-3c)가 성립합니다.

$$\overrightarrow{PQ} = (v_1 - u_1,\ v_2 - u_2)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 \qquad \text{(식5-3c)} \\ &= \left(v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2\right) + \left(v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2\right) \end{aligned}$$

(식5-3c)를 (식5-3b)의 좌변에 대입합니다.

$$\begin{aligned} &\left(v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2\right) + \left(v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2\right) \quad \text{(식5-3d)} \\ &= |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{u}|^2$과 $|\overrightarrow{v}|^2$을 계산할 수 있으므로, 이 값을 (식5-3d)에 대입합니다.

$$|\overrightarrow{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad \text{(식5-3e)}$$

$$|\overrightarrow{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad \text{(식5-3f)}$$

그러면 (식5-3g)를 얻습니다.

$$\left(v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2\right) + \left(v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2\right) \quad \text{(식5-3g)}$$
$$= \left(u_1^2 + u_2^2\right) + \left(v_1^2 + v_2^2\right) - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

(식5-3g)의 양변에서 $\left(u_1^2 + u_2^2\right)$와 $\left(v_1^2 + v_2^2\right)$항은 제거되므로, 간단히 하면 다음과 같은 (식5-4)를 얻습니다.

$$-2v_1u_1 - 2v_2u_2 = -2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad \text{(식5-4)}$$

(식5-4)의 양변에 $1/(-2)$를 곱하여, $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$에 대해서 정리합니다. 그러면 다음과 같은 (식5-5), (식5-6)을 얻습니다. (식5-6)을 보면, 내적은 $\vec{u}$와 $\vec{v}$ 의 크기 및 두 벡터가 이루는 각 θ와 상관이 있음을 알 수 있습니다.

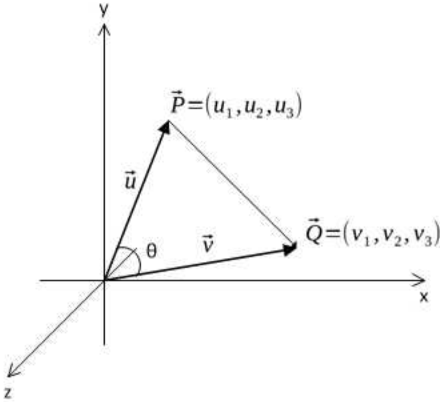
$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2 \quad \text{(식5-5)}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad \text{(식5-6)}$$

(식5-5)는 임의의 n차원 벡터에 대해서도 성립합니다. 삼차원인 경우 (식5-7)과 같이 정의됩니다.

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \text{(식5-7)}$$

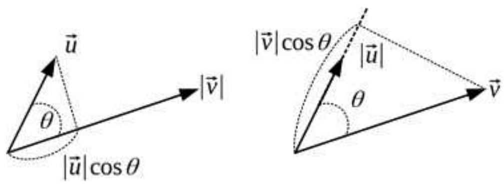
내적을 사용하여 벡터의 길이를 (식5-7b)와 같이 구할 수 있습니다.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (식5\text{-}7b)$$



(그림5-3) 코사인 법칙은 삼차원 공간의 벡터에 대해서도 성립합니다. $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$가 성립합니다.

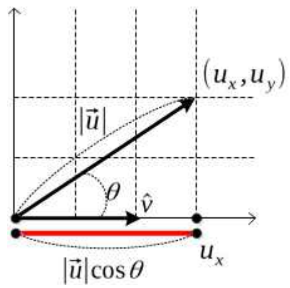
내적 $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$는 어떤 의미를 가지는 것일까요? 다음 그림을 통해서 내적의 기하학적인 의미를 유추해 볼 수 있습니다.



(그림5-4) 두 벡터의 내적: 벡터의 내적은 한 벡터를 두번째 벡터에 직교 투영했을 때의 길이와 두번째 벡터의 길이를 곱한 값입니다.

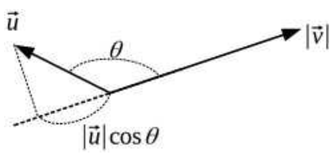
$\vec{u}$와 $\vec{v}$의 내적 $\vec{u}\cdot\vec{v}$는 벡터 $\vec{u}$를 벡터 $\vec{v}$에 투영했을 때의 길이 $|\vec{u}|\cos\theta$와 $\vec{v}$의 길이 $|\vec{v}|$를 곱한 값입니다. $|\vec{v}|$가 길이가 1로 정

규화되었다고 가정해 보세요. 그러면, (그림5-5)처럼 내적을 통해서, $\vec{u}$벡터의 $\vec{v}$벡터 방향 성분을 구할 수 있는 것을 알 수 있습니다.



(그림5-5) 내적 $\vec{u}\cdot\vec{v}$를 이용하면 $\vec{u}$벡터의 $\vec{v}$방향으로의 성분을 구할 수 있습니다. $|\vec{v}|$가 1이라면, $\vec{u}\cdot\vec{v}$는 $\vec{u}$벡터의 $\vec{v}$성분의 길이입니다.

내적은 한 벡터를 다른 벡터에 투영했을 때의 벡터를 구하거나, 두 벡터가 이루는 각을 구하기 위해서 사용할 수 있습니다. 내적은 $\cos\theta$성분을 가지므로, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각이 90도보다 크면 음수 값을 가집니다.



(그림5-6) 내적이 음수(negative number)인 경우: 내적이 음수라면 두 벡터는 $\pi/2$(90도)보다 큰 각으로 벌어져 있음을 나타냅니다.

삼차원 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 대해서 내적의 정의를 다시 적어보겠습니다.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$ (식5-8)

(식5-8)의 양변에 $1/(|\vec{u}||\vec{v}|)$를 곱하면, 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 코사인 성분을 구할 수 있는 것을 알 수 있습니다. 그리고 $acos$함수를 사용하면 두 벡터가 이루는 각을 구할 수 있습니다.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$ (식5-9)

$$acos\left(\frac{u \cdot v}{|u||v|}\right) = \theta$$ (식5-9b)

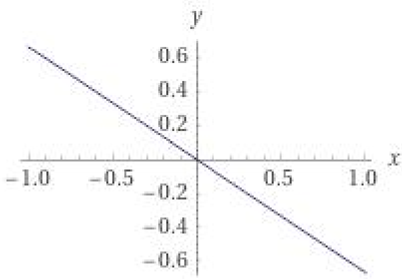
$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 0이면, $\cos\theta = 0$이므로 두 벡터는 서로 직각(orthogonal)입니다. 이차원 공간에서 주어진 $\vec{n} = (a,\ b)$에 대해, 임의의 점 $\vec{p} = (x,y)$와의 내적을 다음 (식5-10)처럼 적을 수 있습니다.

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = (a,b) \cdot (x,y) = ax + by$$ (식5-10)

(식5-10)이 0이 되면, $ax+by=0$인데 이것은 $\vec{n}$과 직교하는 모든 점 $\vec{p} = (x,y)$를 의미합니다. 이차원 공간에서 $\vec{n} = (a,\ b)$과 직교하는 모든 점은 선(line)을 결정합니다. 그러므로 (식5-10)은 원점을 지나는 선의 방정식(line equation)이며, $\vec{n} = (a,\ b)$은 선과 직교하는 벡터를 의미합니다.

이 개념은 삼차원 공간으로 확대하면 $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$에 대해서, $ax+by+cz=0$ 평면(plane)에 수직인 벡터는 $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$인 것을 알 수 있습니다. 이렇게 평면(plane)에 수직인 벡터를 **법선 벡터(normal vector, 노멀벡터)**라고 하는데, 내적이 선과 평면을 정의하

기 위해서 사용된 것을 알 수 있습니다.



(그림5-7) $2x+3y=0$의 직선 그래프는 벡터 (2,3)과 직각입니다.

(그림5-7)에 직선의 방정식 $2x+3y=0$를 그래프로 나타내었습니다.

$$2x+3y=0 \quad \text{(식5-11)}$$

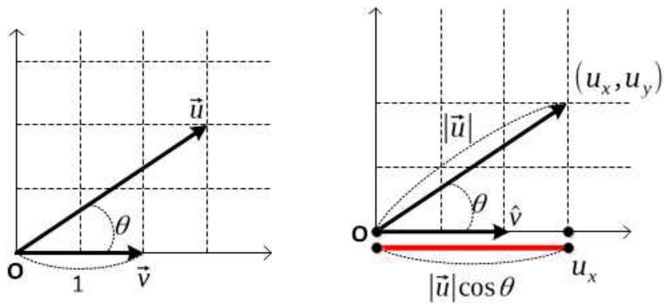
$2x+3y=0$ (식5-11)의 의미는 $(2,3)$과 직교하는 모든 (x,y)를 의미하므로 직선을 나타냅니다. 필자가 처음 내적과 외적을 배웠을 때, 내적과 외적이 의미하는 직관을 완벽하게 파악하지 못하고 뒤이어 나오는 개념들을 이해해야 했으므로 어려움이 있었습니다. 독자분들은 지금 반복적인 연습을 통해서 내적이 의미하는 직관을 완전하게 이해하고 책을 계속 읽을 것을 추천합니다.

(그림5-8)의 내적과 외적의 비교표를 보면서 각 항목의 직관을 다시 설명하도록 하겠습니다.

	기호	의미	삼각함수	위치	결과	각의 범위
내적	•	길이	$\cos\theta$	in	실수	$-90 \sim +90$
외적	$\times$	면적	$\sin\theta$	out	벡터	$0 \sim 180$

(그림5-8) 내적에 대한 직관

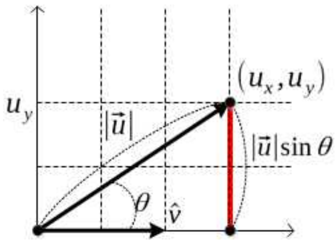
벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 주어졌다고 가정합니다. 직관을 얻기 위해 $\vec{v}$의 방향이 x-축과 일치하고, $\vec{v}$의 길이가 1이라고 가정해 봅시다. 이것을 (그림5-9)에 나타내었습니다. (그림5-9)의 $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 대해 내적을 수행하면, $\vec{u}$의 끝점에서 $\vec{v}$방향으로 투영한 점과 원점이 이루는 선분 $\overline{OU_x}$의 길이를 의미합니다.



(그림5-9) $\vec{u}$ • $\vec{v}$의 직관을 얻기 위해 $\vec{v}$의 방향을 x-축과 일치시킨 후 내적 계산을 수행합니다.

그러므로 $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{OU_x}| = |\vec{u}|\cos\theta$ 입니다. 선분의 길이가 $\cos\theta$를 사용하여 표현된 것을 기억하세요. $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$이므로 $|\vec{v}|$가 1

이 아니라면, $|\overline{OU_x}|$와 $|\vec{v}|$를 곱한 값이 내적인데, 직관을 위해서 $|\vec{v}|=1$이라고 가정한 것입니다.

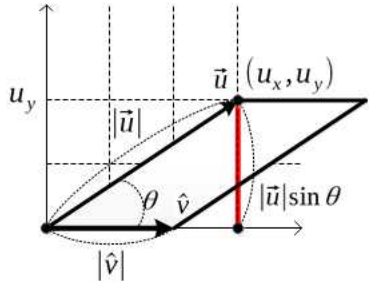


(그림5-10) 외적은 $\vec{u}$의 수직 성분인 $|\vec{u}|\sin\theta$와 상관이 있습니다.

반면에 외적은 수직성분의 길이인 $|\vec{u}|\sin\theta$와 상관이 있습니다. 외적인 (식5-13)처럼 곱하기 심벌($\times$)을 사용하여 $\vec{u}\times\vec{v}$ 처럼 나타냅니다. 내적은 수평 성분의 길이인 $|\vec{u}|\cos\theta$와 $|\vec{v}|$를 곱한 값인데, 외적은 수직성분의 길이인 $|\vec{u}|\sin\theta$와 $|\vec{v}|$를 곱한 값입니다. 사실 외적의 결과는 벡터인데, 이차원에서 외적의 결과는 하나의 실수 (real number)로 나타낼 수 있습니다. 이차원에서 외적을 하나의 실수로 나타내는 것을 이해하는 것은 외적에 대한 직관의 중요한 단계인데 이 부분은 외적을 다룰 때 설명하겠습니다.

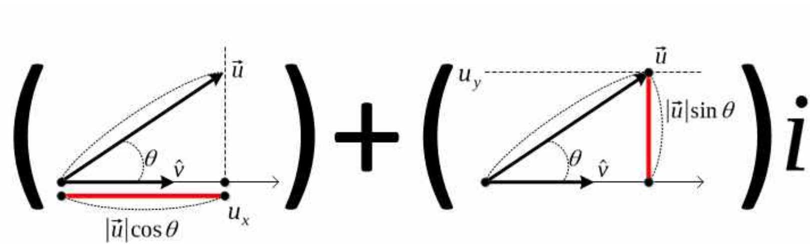
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(|\vec{u}|\cos\theta)|\vec{v}| \quad \text{(식5-12)}$$
$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\sin\theta)|\vec{v}| \quad \text{(식5-13)}$$

(식5-13)이 의미하는 것은 무엇일까요? $|\vec{v}|$가 밑변의 길이이고, $|\vec{u}|\sin\theta$가 높이이므로, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 결정하는 ***평행사변형 (parallelogram)의 면적***을 의미합니다.



(그림5-11) $\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\sin\theta)|\vec{v}|$는 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 결정하는 평행 사변형의 면적입니다.

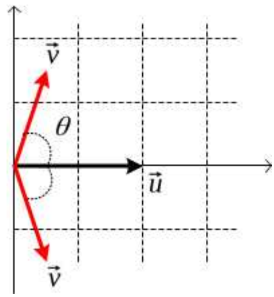
외적이 $\sin\theta$성분을 포함하므로, 면적이 음수(negative)값을 가질 수 있습니다. 그래서 ***부호를 가진 면적(signed area)***이라고 하는데, $\vec{u}$의 방향이 반대로 된 경우라고 생각하면 됩니다. 우리는 내적과 외적을 모두 이해하고 나서, 복소수의 곱셈의 의미를 살펴볼 것입니다. 그러면 복소수의 곱셈의 결과가 (그림5-12)와 같이 $A+Bi$ 형태를 취하는 것을 알 수 있습니다. 여기서 A와 B는 임의의 상수이고 i는 허수(imaginary number)입니다.



(그림5-12) 복소수의 곱셈에서 안쪽에는 $\cos\theta$가 바깥쪽에는 $\sin\theta$가 나타납니다. 안쪽에 나타나는 식이 내적(inner product) 바깥쪽에 나타나는 식이 외적(outer product)입니다.

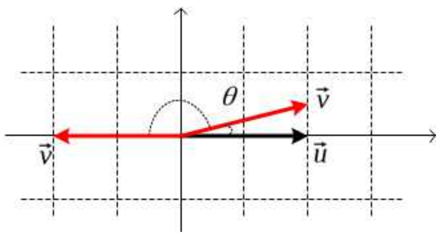
복소수는 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)를 가지는

데, 복소수를 곱하면 ***안쪽(inner)에는*** $\cos\theta$***를 포함한 내적(inner product, dot product)***이 나타나고, ***바깥쪽(outer)에는*** $\sin\theta$***를 포함한 외적(outer product, cross product)***이 나타납니다. 이것이 내적과 외적에 이름을 붙인 이유입니다. 영어로는 내적보다는 ***점곱(dot product)***, ***십자곱(cross product)***이라는 용어를 선호합니다.



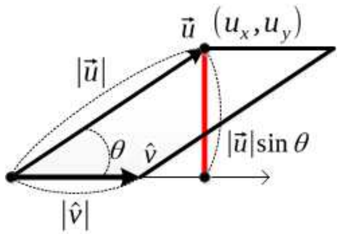
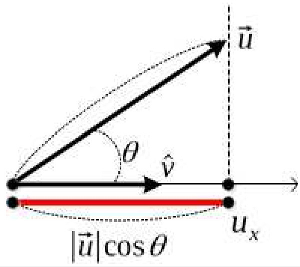
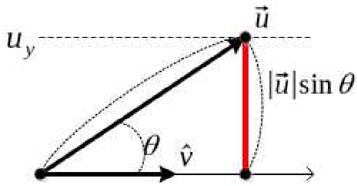
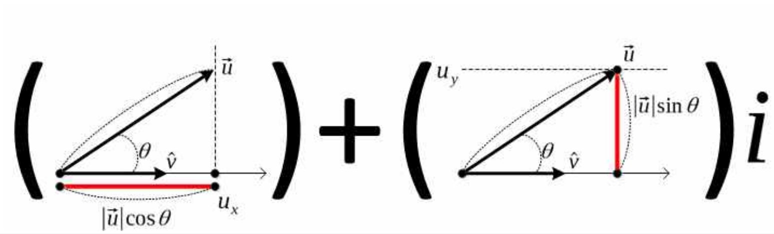
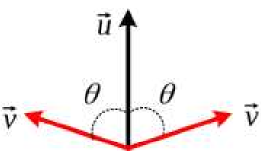
(그림5-13) 내적 $\vec{u}\cdot\vec{v}$는 $\vec{v}$가 $\vec{u}$에 대해 -90도에서 +90도의 범위에 있으면 양수(positive)값을 가집니다.

내적은 $\cos\theta$성분이 있으므로, 두 벡터가 이루는 각이 $-\pi/2$에서 $+\pi/2$의 범위에서 양수(positive number)값을 가집니다. 그러므로 $\vec{v}$가 $\vec{u}$에 대해 -90도에서 +90도의 범위에 있는지 어떤지를 판단하기 위해 사용할 수 있습니다.



(그림5-14) 외적 $\vec{u}\times\vec{v}$는 $\vec{v}$가 $\vec{u}$에 대해 0도에서 +180도의 범위에 있으면 양수(positive)값을 가집니다.

외적은 $\sin\theta$성분이 있으므로, 두 벡터가 이루는 각이 0에서 π사이에서 양수값을 가집니다. 그러므로 $\vec{v}$가 $\vec{u}$에 대해 0도에서 +180도의 범위에 있는지 어떤지를 판단하기 위해 사용할 수 있습니다. 외적이 양수(positive number)이면 $\vec{v}$가 $\vec{u}$에 대해 반시계 방향(CCW)에 있다는 의미입니다. (그림5-15)에 내적과 외적을 비교한 그림을 제시하였습니다.

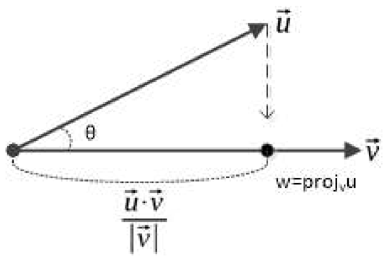
<table>
<tr><th>내적 ·</th><th>외적 ×</th></tr>
<tr><td>길이
</td><td>면적
</td></tr>
<tr><td>$\cos\theta$
</td><td>$\sin\theta$
</td></tr>
<tr><td>안쪽(inner)</td><td>바깥쪽(outer)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$-\pi/2 \sim +\pi/2$
</td><td>$0 \sim \pi$
</td></tr>
<tr><td>스칼라(Scalar)</td><td>벡터(Vector)</td></tr>
</table>

(그림5-15) 내적과 외적에 대한 직관테이블

표준수학
내적의 응용

벡터 분해(vector decomposition)

어떤 벡터 $\vec{u}$가 주어졌을 때, 그 벡터를 다른 벡터 $\vec{v}$와 평행한 성분 및 $\vec{v}$와 수직인 성분으로 분해하는 것이 필요한 경우가 있습니다. 다음 (그림5-16)처럼 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 주어졌을 때, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각을 θ라고 하겠습니다.



(그림5-16) 벡터 $\vec{u}$를 $\vec{v}$와 수평인 성분과 수직인 성분으로 분해하려고 합니다.

이제 벡터 $\vec{u}$의 끝점에서 벡터 $\vec{v}$로 투영했을 때의 점 w를 구하려고 합니다. w는 $\vec{u}$를 $\vec{v}$에 투영한 벡터이므로, 다음과 같이 적도록 하겠습니다.

$$w = proj_v \vec{u} \quad \text{(식5-14)}$$

우리는 벡터 w의 길이가 삼각함수의 정의에 의해서 $|\vec{u}|\cos\theta$라는 것을 알고 있습니다. 그리고 내적의 정의에 의해서

$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$입니다. 그러므로 w의 길이는 다음과 같습니다.

$$|\vec{w}| = |\vec{u}|\cos\theta = \frac{|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{(식5-15)}$$

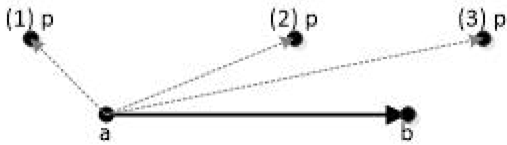
이제 방향 $\vec{v}$를 알고, 크기 $|\vec{w}|$를 구했으므로, 벡터 $\vec{w}$를 구할 수 있습니다. (식5-16)은 $|\vec{w}|$에 정규화된 $\vec{v}$벡터 $\vec{v}/|\vec{v}|$를 곱한 것입니다.

$$proj_v\vec{u} = \vec{w} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} \quad \text{(식5-16)}$$

이제 $\vec{w}$와 $proj_v\vec{u}$를 구했으므로, $\vec{v}$와 수직인 성분의 벡터 $perp_v\vec{u}$는 다음 (식5-17)과 같이 구할 수 있습니다.

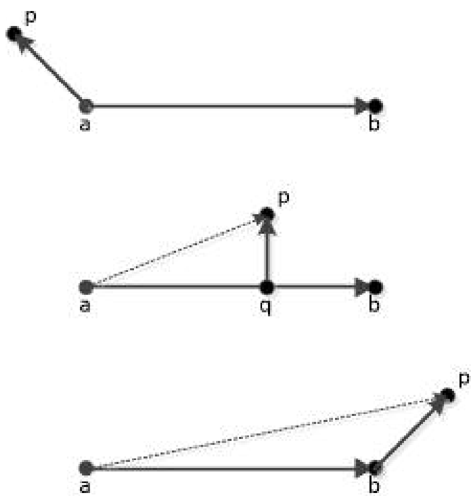
$$perp_v\vec{u} = \vec{u} - proj_v\vec{u} \quad \text{(식5-17)}$$

벡터 분해는 많은 기하 알고리즘의 기본 도구로 사용되므로, 유도하는 과정을 이해하고 나서는 최종 결과식을 암기하는 것이 좋습니다. 벡터 분해를 응용하면 점과 선분 사이의 거리를 구할 수 있습니다. 다음 그림과 같이 점 p와 선분 $\overline{ab}$ 사이의 거리를 구하는 문제를 생각해 봅시다.



(그림5-17) 점 p와 선분 $\overline{ab}$사이의 거리: (1) 점 p가 a의 왼쪽에 있는 경우, (2) 점 p가 a와 b의 사이에 있는 경우, (3) 점 p가 b의 오른쪽에 있는 경우로 나누어 생각할 수 있습니다.

먼저 (1) 점 p가 왼쪽 점 a에서 오른쪽 점 b로 향하는 선분에서 a보다 왼쪽에 있는 경우에는 p와 a의 거리를 구하면 됩니다. (2) 점 p가 a와 b사이에 위치한 경우는 p에서 선분 $\overline{ab}$로 수선의 발(foot of perpendicular)을 내렸을 때, 교점과의 거리를 구해야 합니다. (3) 점 p가 b보다 오른쪽에 있는 경우는 p와 b사이의 거리를 구해야 합니다.



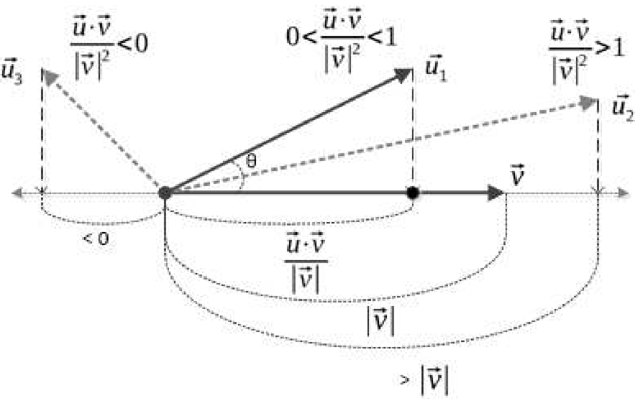
(그림5-18) 점 p와 선분 $\overline{ab}$ 의 관계에 따라 거리는 달라집니다.

(식5-16)에서 얻은 결과를 이용하여, $\overrightarrow{ab}$와 $\overrightarrow{ap}$에 대해서 내적을 적용하고, 이 값을 $|\overrightarrow{ab}|^2$로 나누어주면, p와 선분 $\overline{ab}$사이의 관계를 파악할 수 있습니다.

벡터 $\overrightarrow{u}$와 $\overrightarrow{v}$에 대해서, $(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})/|\overrightarrow{v}|$가 벡터 $\overrightarrow{u}$를 벡터 $\overrightarrow{v}$에 투영했을 때의 길이이므로, 이 값을 $|\overrightarrow{v}|$로 나누어주면 이 값은 벡터 $\overrightarrow{v}$에 대해서 정규화 됩니다.

$$\frac{\frac{(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})}{|\overrightarrow{v}|}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})}{|\overrightarrow{v}|^2} \quad \text{(식5-17b)}$$

그러므로 $(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})/|\overrightarrow{v}|^2$ 값이 0보다 작다면, 벡터 $\overrightarrow{u}$의 끝점이 $\overrightarrow{v}$의 시작점보다 왼쪽에 위치한다는 의미이며, 이 값이 0과 1사이의 값이라면, 벡터 $\overrightarrow{u}$의 끝점이 벡터 $\overrightarrow{v}$ 사이에 위치한다는 의미이며, 이 값이 1보다 크다면 벡터 $\overrightarrow{u}$의 끝점이 벡터 $\overrightarrow{v}$의 끝점보다 오른쪽에 위치한다는 의미입니다.



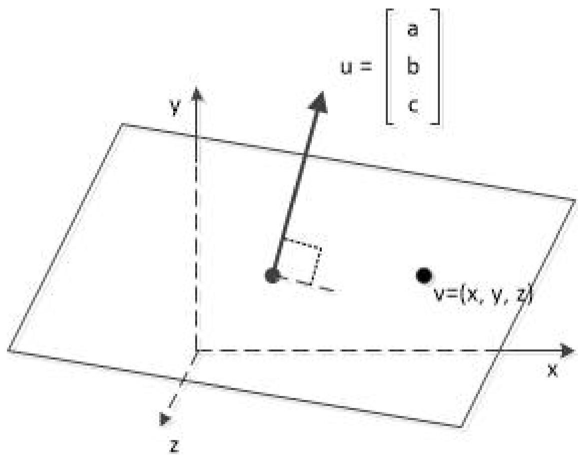
(그림5-19) $(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})/|\overrightarrow{v}|$를 $|\overrightarrow{v}|$로 나누어준 값 $(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})/|\overrightarrow{v}|^2$가 0보다 작다면 $\overrightarrow{u_3}$의 위치에, 0과 1사이라면 $\overrightarrow{u_1}$의 위치에, 1보다 크다면 $\overrightarrow{u_2}$의 위치에 있게 됩니다.

내적을 사용하는 다음 예로 점과 평면 사이의 거리를 구하는 방법을 알아보겠습니다.

평면의 정의(plane definition)

벡터 분해에 사용한 개념을 이용하면, 평면(plane)을 정의하고, 평면과 점(point) 사이의 거리를 구할 수 있습니다. 다음 (그림 5-20)처럼 삼차원 공간에 평면을 정의합니다.

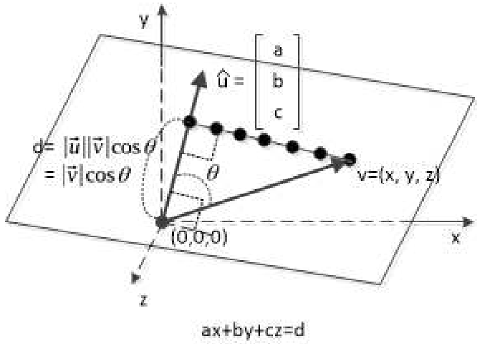
평면은 임의의 점 v를 $\vec{u}$에 직교 투영했을 때의 위치가 같은 모든 점들의 집합입니다.



(그림5-20) 평면상의 임의의 점 v에서 벡터 $\vec{u}$로 직교 투영했을 때의 벡터 $\vec{u}$에서 점의 위치는 같습니다.

위 그림에서 $\vec{u}$는 평면의 법선 벡터입니다. 그리고 v는 평면상의 임의의 점입니다. 이제 벡터 $\vec{v}$를 $\vec{u}$와 평행한 성분으로 분리했을 때의 벡터의 크기가 항상 d가 되는 모든 점들을 고려해 볼 수 있

습니다. 다음 (그림5-21)을 보세요.



(그림5-21) 임의의 점 v를 $\vec{u}$와 평행한 성분으로 벡터 분해했을 때 벡터의 길이가 일정한 모든 점들을 구하면, 무한개의 점을 얻습니다. 이것이 평면입니다.

위 그림에서 벡터 $\vec{u}$가 정규화(normalization)되었다고 가정하여 $\hat{u}$으로 나타내었습니다. 그리고 벡터 $\vec{v}$와 $\hat{u}$이 이루는 각을 θ라고 하겠습니다. 그러면 $|\hat{u}|=1$이므로, $\vec{v}$를 $\hat{u}$에 투영했을 때의 길이는 다음과 같습니다.

$$d=|\vec{v}|\cos\theta \quad \text{(식5-18)}$$

그러면, (a,b,c)를 정규화된 법선 벡터로 가지고, 원점에서 거리가 d인 평면의 방정식은 다음 (식5-19)과 같습니다.

$$ax+by+cz=d \quad \text{(식5-19)}$$

비슷한 방식으로, 위와 같이 평면의 방정식이 주어졌을 때, 평면 $ax+by+cz-d=0$과 임의의 점 $w=(x_1,y_1,z_1)$ 사이의 거리 D는

다음 (식5-20)과 같습니다.

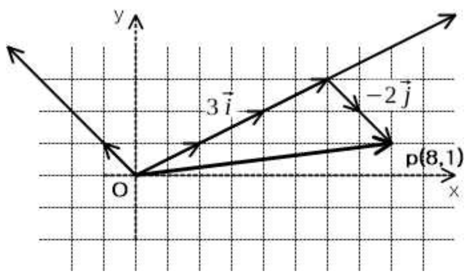
$$D = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{(식5-20)}$$

평면의 정의에 의해서 각 변수의 계수 벡터 (a, b, c)가 정규화되어 있으면, d 성분이 길이를 나타냅니다. 하지만 일반적으로 계수 벡터 (a, b, c)가 정규화되어 있지 않으므로 거리를 구하는 식에서 분모(denominator)에 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 를 적어서 법선벡터를 정규화해 주어야 합니다.

선형 조합의 간단한 표기법

우리는 2장에서 벡터들의 선형조합의 의미와 선형조합을 이용하여 복소수를 나타내는 방법을 알아보았습니다.

벡터 $\vec{i}=(2,1)$, $\vec{j}=(-1,1)$을 베이시스로 하는 좌표계상에 (0,0)을 시작점으로 하고, (3,-2)를 끝점으로 하는 벡터를 (그림5-22)에 나타내었습니다.



(그림5-22) 벡터 $\vec{i}=(2,1)$와 $\vec{j}=(-1,1)$를 베이시스로 가지는 축에서의 벡터 (3,-2)의 의미

위의 (그림5-22)에서 선 $\overline{Op}$가 의미하는 벡터는 표준 좌표계에서 벡터 (8,1)을 의미합니다. 그것은 $\vec{i}$와 $\vec{j}$를 열벡터 사용하여 아래의 선형조합 (식5-21)로 나타낼 수 있습니다.

$$3\vec{i}-2\vec{j}=3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix} \quad \text{(식5-21)}$$

이차원에서 표준 베이시스는 $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$입니다. 그러므로 (식5-21)은 다음과 같이 표준 베이시스를 사용하여 (식5-22)로

쓸 수 있습니다.

$$8\vec{i}+1\vec{j}=8\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix} \quad \text{(식5-22)}$$

선형조합을 나타내는 (식5-21)을 보다 간단하게 표시할 방법이 없을까요? (식5-21)을 보면, 선형조합은 스칼라값과 벡터를 곱한 것의 합으로 표현됨을 알 수 있습니다. 이제 스칼라 값과 벡터를 분리해서 식의 좌측에 벡터를 모두 차례대로 적고, 식의 우측에 스칼라 값을 열 벡터 $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$로 적어 봅시다. 그러면 (식5-21)은 아래와 같이 (식5-23)으로 적을 수 있습니다.

$$\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\vec{i}3+\vec{j}(-2) \quad \text{(식5-23)}$$

(식5-23)을 계산할 때, 좌측 두 개의 벡터 묶음 $\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j}\end{bmatrix}$에서 첫 번째 벡터 $\vec{i}$와 우측 벡터 $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$의 첫 번째 요소 3과 곱하고, 좌측에서 두 번째 벡터 $\vec{j}$와 우측 벡터 $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$의 두 번째 요소 -2를 곱하도록 연산을 정의하면, (식5-21)과 같은 결과를 얻을 수 있습니다.

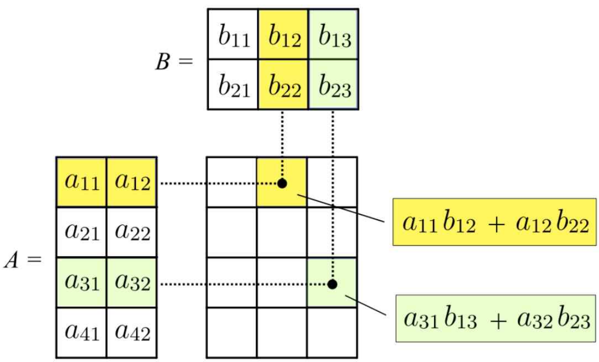
좌측에서 $\vec{i}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$와 $\vec{j}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$는 벡터라는 것을 주의하세요. 그러면 테이블을 이용해서 (식5-23)를 다음과 같이 (식5-24)로 정의할 수 있습니다.

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}3+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(-2)=\begin{bmatrix}2\times3+(-1)\times(-2)\\1\times3+1\times(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$$

(식5-24)

위의 (식5-24)가 **행렬(매트릭스, matrix)**에 대한 기본적인 아이디어의 출발점입니다. 좌측 부분 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$을 행렬이라고 정의하면, ***행렬은 각 열(column)이 베이시스의 축을 이루는 각 벡터들***입니다. 그러면 위 (식5-23)은 ***행렬*** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ***과 열벡터*** $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ***의 곱셈 (matrix vector multiplication)***을 의미하는 식이 됩니다.

벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$를 두개의 행, 하나의 열을 가지는 행렬로 간주할 수 있습니다. 그러면 결과로 얻어지는 벡터의 x-성분은 첫 번째 행렬의 첫 행(row)과 두 번째 행렬의 첫 번째 열을 곱해서 얻고, y-성분은 첫 번째 행렬의 두 번째 행과 두 번째 행렬의 첫 번째 열을 곱해서 얻는다는 것을 알 수 있습니다. (그림5-23)은 4×2 행렬 A와 2×3 행렬 B의 곱셈이 어떻게 동작하는지 보여줍니다.



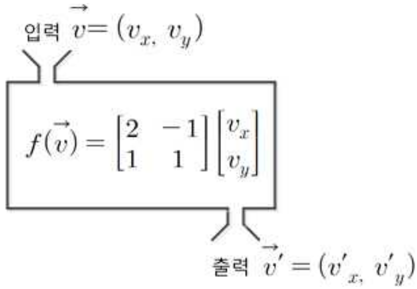
(그림5-23) 행렬 A와 B의 곱셈은 A의 각 행에 대해 B의 각 열을 요소별로 곱해서 합한 것으로 요소를 구성합니다.(그림출처: 영문위키피디아)

(그림5-23)에서 A는 4행 2열 행렬이고, B는 2행 3열 행렬입니다. A와 B를 곱하면 새로운 4행 3열로 구성된 새로운 행렬을 얻습니다. 그림은 새로운 행렬의 각 요소(element)를 어떻게 구하는지 설명합니다.

행렬은 다양한 목적으로 사용할 수 있는데, 행렬이 입력 벡터의 좌표를 변경할 목적으로 구성되었다면, 행렬의 구성 요소는 베이시스와 관련된 값들을 가집니다. 이러한 용도로 구성된 행렬을 "***변환행렬(transform matrix)***"이라고 합니다. 입력 벡터를 열벡터로 표현하면, 열벡터의 변환을 위해, ***행렬(Matrix)***과 곱셈 연산을 할 때, ***변환 행렬(transform matrix)***은 벡터의 왼쪽에 위치해야 합니다. 벡터를 입력으로 받고 벡터를 리턴하는 두 함수 $f(\vec{v})$함수와 $g(\vec{v})$ 함수가 있다고 생각해 봅시다. 예를 들면 $\vec{v}=(v_x,\ v_y)$가 정의되었을 때, $f(\vec{v})$를 (식5-25)처럼 정의할 수 있습니다.

$$f(\vec{v})=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix} \quad \text{(식5-25)}$$

(식5-25)의 결과는 벡터입니다. $f(\vec{v})$가 리턴하는 벡터를 $\vec{v}'=(v'_x,\ v'_y)$라고 하면, ***벡터 함수(vector valued function)***는 (그림5-24)처럼 나타낼 수 있습니다.



(그림5-24) $\vec{v}=(v_x, v_y)$라고 가정하면 $f(\vec{v})$는 벡터를 입력으로 받아 벡터를 리턴하는 함수입니다.

이제 $f(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix})$의 결과를 또 다른 벡터 함수 g에 적용하는 ***합성 함수(composite function)***는 (식5-26)과 같이 적을 수 있습니다. g는 첫 번째 베이시스를 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 두 번째 베이시스를 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$로 하는 변환 함수입니다.

$$g(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$g(f(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix})) \quad \text{(식5-26)}$$

(식5-26)은 벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$에 대해서 먼저 f 함수를 적용하고, 그 결과 벡터(f가 리턴한 값)에 대해서 g함수를 적용한 것입니다. 괄호를 생략하고 표현해 보면 (식5-27)과 같습니다.

$$gf\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{(식5-27)}$$

(식5-27)로 표현된 합성함수는 함수 이름자체가 gf인 것처럼 보입니다. 이러한 모호함을 해결하기 위해서 g와 f사이에 점(dot, •)을 추가하여 (식5-28)과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$g \bullet f(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}) \quad \text{(식5-28)}$$

(식5-28)에 대해서 f와 g의 변환 행렬을 이용해서 적으면 다음 (식5-28b)와 같습니다.

$$\begin{aligned} g \bullet f(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}) &= g\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}\right) \qquad \text{(식5-28b)} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(식5-28b)를 보면 <u>행렬의 곱셈이 연속적인 변환을 나타내기 위해 사용</u>될 수 있다는 것을 보여줍니다.

함수 f와 g가 변환(transform) 함수를 나타낸다면, (식5-28)에서 입력 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$에 대한 변환이 오른쪽에서 왼쪽으로 f를 먼저 적용하고, g를 적용했다는 사실에 주목하세요. 이러한 수학적 특징 때문에 행렬을 이용해서 변환을 나타낼 때, 열벡터를 사용해서 행렬의 오른쪽에 적음으로써, 수학적 특징과 같이 변환의 순서가 일관되게 유지 되도록 합니다. 이처럼 벡터를 열벡터로 표현하면, 점(point)과의 모호함을 없앨 수 있고, 합성 변환이 수학의 표현과 잘 어울린다는 이점이 있습니다.

열벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$을 대괄호(bracket) 대신에 괄호를 사용해서 $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

로 나타낼 수 있다고 했습니다. 그러면 변환 행렬 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$과 벡터의 곱셈은 (식5-29)처럼 적을 수 있습니다.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (식5-29)}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$는 벡터를 행렬처럼 취급한 것이고, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$는 열벡터로 취급한 것입니다. 벡터를 나타내기 위해 $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$를 사용하면 (식5-29) 처럼 곱셈의 피연산자의 종류가 다른 것처럼 보입니다. 이러한 혼란을 피하고, 일관된 행렬 간의 곱셈 연산으로 표현하기 위해 벡터를 열벡터로 나타내는 경우 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$처럼 행렬 형식으로 나타내는 것을 선호합니다.

행렬(Matrix)

숫자들의 직사각형 배열(rectangular array of numbers)을 ***행렬(matrix)***이라고 하고, 배열에 있는 각 숫자를 ***요소(엘리먼트, element, entry)***라고 합니다. 아래 (식5-30)은 행렬의 예입니다.

$$[1\ 2\ 3\ 4],\ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\sin(x) & 2 & 3\\ \cos(x) & 4 & 5\end{bmatrix}\quad \text{(식5-30)}$$

행렬을 이루는 행(row)의 수가 m개이고, 열(column)의 수가 n개 일 때, 이 행렬을 $m\times n$ 행렬(m by n matrix)이라고 읽습니다. (식5-30)은 각각 1×4 행렬, 3×1 행렬 및 2×3 행렬입니다.

(a,c), (b,d)를 베이시스로 하는 변환은 행렬을 이용해서 (식5-31)과 같이 적을 수 있습니다.

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}\quad \text{(식5-31)}$$

(식5-31)은 (a,c)와 (b,d)벡터의 선형조합을 의미합니다. 그래서 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$행렬을 ***선형변환 행렬(Linear Transform Matrix)***이라고 합니다. 행렬의 곱셈은 각 요소를 구하기 위해 내적 연산을 수행합니다. (식5-31)의 첫 번째 요소는 (a,b)와 (x,y)의 내적이며, 두 번째 요소는 (c,d)와 (x,y)의 내적입니다.

$$(a,b)\cdot(x,y)=ax+by\quad \text{(식5-32)}$$
$$(c,d)\cdot(x,y)=cx+dy\quad \text{(식5-33)}$$

행렬의 요소를 나타내기 위해, 오른쪽 아래첨자에 행과 열을 명시합니다. A의 요소 a_{23}은 행렬의 2행 3열의 요소입니다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{(식5-34)}$$

행렬의 A의 요소를 나타내기 위해서, a_{23}이 일반적인 표현법이지만, A[2,3] 혹은 $[A]_{23}$처럼 나타낼 수도 있습니다. 행과 열을 명확하게 구분하기 위해 $[A]_{2,3}$처럼 사용할 수도 있습니다.

행렬의 여러 성질을 표현하기 위해 ***크로네커 델타(Kronecker delta)***를 (식5-35)와 같이 정의할 수 있습니다. 이 기호는 행과 열에 의해 결정되는 요소의 부호를 표현하기 위해 사용할 수 있습니다. 레오폴트 크로네커(독일어: Leopold Kronecker)는 독일의 수학자이며 논리학자입니다.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \mathrm{if} \;\; i = j \\ 0, & \mathrm{if} \;\; i \neq j \end{cases} \quad \text{(식5-35)}$$

수학적 대상을 정의하면, 이 대상에 대한 사칙연산을 정의할 수 있습니다. A,B,C,D를 행렬이라 할 때 행렬의 합 A+B를 계산하기 위해서 행렬의 각 요소를 합(sum)합니다. 합은 행렬의 행과 열의 수가 같은 경우에만 성립합니다. 아래 행렬을 고려해 봅시다.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

위 행렬이 주어졌을 때, A + B = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 이며, A+C와 B+C는 행렬 덧셈을 할 수 없습니다.

실수 c와 행렬 A의 곱 cA는 행렬의 각 요소에 c를 곱해서 얻습니다. 행렬간의 곱은 약간 복잡합니다. m, r 및 n이 실수일 때, A가 m×r 행렬이고, B가 r×n 행렬일 때, **행렬의 곱(product)** AB는 m×n 행렬이며, (i,j) 요소는 A 행렬의 i행과 B 행렬의 j열의 내적으로 결정합니다. 예를 들어, (식5-36)에 주어진 행렬 A, B를 고려해 봅시다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(식5-36)}$$

행렬의 곱 AB의 (2,3) 요소는 A의 2행 $(2,\ 6,\ 0)$과 B의 3열 $(4,\ 3,\ 5)$의 내적 $2 \times 4 + 6 \times 3 + 0 \times 5 = 26$입니다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix} \quad \text{(식5-37)}$$

이와 같은 방식으로 모든 요소를 구해보면, AB의 결과는 $\begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$입니다. 행렬의 합은 교환법칙(commutative law)이 성립하지만, <u>곱은 교환법칙이 성립하지 않는 다는 것</u>을 주의해야 합니다. 즉 행렬 곱은 아래의 성질이 있습니다.

$$AB \neq BA \quad \text{(식5-38)}$$

m과 n이 같은 ***정방 행렬(square matrix)***에서 왼쪽위에서 오른쪽 아래 방향의 대각 요소가 모두 1, 나머지는 0인 행렬을 특별히 ***항등 행렬(identity matrix)***이라고 하고, I라고 적습니다. 다음은 4×4 항등 행렬입니다.

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \text{(식5-39)}$$

크로네커 델타를 이용해 항등행렬을 나타내면, $[I]_{ij}=\delta_{ij}$입니다. I를 변환 행렬이라고 가정하면, I의 모든 열은 표준 베이시스로 구성되어 있습니다. 그것은 임의의 벡터 $\vec{v}$를 I를 사용하여 변환했을 때, $\vec{v}$의 값이 바뀌지 않는다는 의미입니다. 즉 $I\vec{v}=\vec{v}$ 입니다. 이러한 성질을 갖는 I를 곱셈에 대한 항등원(identity)이라고 합니다.

이와 비슷하게 임의의 정방 행렬에 대해서도, I는 행렬 곱셈의 항등원이 됩니다. 즉 $m\times m$ 행렬 A는 $m\times m$ 항등행렬 I에 대해 아래의 성질을 만족합니다.

$$AI=IA=A \quad \text{(식5-40)}$$

$AB=BA=I$를 만족하는 B가 존재할 때, B를 A의 **역(inverse)**이라고 하고, A^{-1}로 나타냅니다. 일반적인 곱셈에서 항등원은 1이므로 임의의 수 n에 대해 $nn^{-1}=n^1n^{-1}=n^{1-1}=n^0=1$입니다. n의 역수(reciprocal) n^{-1}과 비슷하게 A의 ***역행렬(inverse matrix)***을 A^{-1}로 나타내는 것입니다. n이 수인 경우, $n^{-1}=\dfrac{1}{n}$입니다.

하지만, A^{-1}을 $\frac{1}{A}$로 적을 수는 없습니다. 수(number)를 행렬로 나누는 연산은 정의하지 않습니다. 행렬의 역의 존재 여부는 매우 중요한데, 예를 들면, 역의 존재는 선형방정식(linear equation)의 해(solution)가 존재함을 의미합니다.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \text{ (식5-41)}$$

역행렬은 다음과 같은 성질이 있습니다.

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}\end{aligned} \quad \text{(식5-42)}$$

첫 번째 성질은 직관적입니다. 두 번째 성질은 다음과 같이 증명할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}&(AB)(AB)^{-1} = I \\ &(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AIA^{-1} = AA^{-1} = I\end{aligned} \quad \text{(식5-43)}$$

임의의 벡터 $\vec{v}$에 대해서 $AB\vec{v}$는 무엇을 의미하는 것일까요? A와 B가 3×3 행렬이고 $\vec{v}$는 삼차원 열벡터라고 가정해 봅시다. 이것은 $\vec{v}$를 B 변환 이후에, 다시 A 변환을 적용한다는 의미입니다. $\vec{v}$가 행벡터라면 $\vec{v}AB$는 v를 A 변환 이후에, 다시 B 변환을 적용한다는 의미입니다. 둘은 완전히 다른 결과이므로 행렬과 벡터의 곱셈에서 벡터의 위치는 중요합니다.

전치 행렬(transpose matrix)은 i행 j열의 요소를 j행 i열로 구성한 새로운 행렬입니다. 행렬 A에 대해서 전치행렬은 A^T로 나타내고, 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \quad \text{(식5-44)}$$

행과 열의 위치가 바뀌므로 전치 행렬의 행과 열의 성질이 유지되지 않을 수도 있습니다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(식5-45)}$$
$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(식5-45)를 보면 A는 2×3 행렬이지만, A^T는 3×2 행렬입니다. 전치행렬은 다음과 같은 성질을 가집니다.

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \qquad \text{(식5-46)} \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \end{aligned}$$

행렬의 곱셈의 특징에 의해서, 두 행렬을 곱할 때는 첫 번째 행렬의 열(column)의 수와, 두 번째 행렬의 행(row)의 수가 같아야 합니다. 4×2 행렬 A와 2×3 행렬 B의 곱셈은 가능하지만, 4×3 행렬 C와 2×3 행렬 B의 곱셈은 불가능합니다.

$$row-column(AB) = (4\times2)(2\times3) = (4\times3) \quad \text{(식5-47, 가능)}$$
$$row-column(CB) \neq (4\times3)(2\times3) \quad \text{(식5-48, 불가능)}$$

행렬 곱셈의 이러한 특징은 벡터를 행렬과 곱할 때, 모호한 상황이 발생할 수 있습니다. 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$와 벡터 $\vec{v} = (x,y)$를 곱

하는 연산을 고려해 봅시다. 벡터 $\vec{v}=(x,y)$를 행렬로 변환할 때, 열벡터라고 가정하면, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$가 되지만, 행벡터라고 가정하면 $[x,y]$가 됩니다. 그런데, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$와 $[x,y]$의 곱셈은 불가능합니다.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ (식5-49, 가능한 행렬 곱셈)}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}[x,y] \text{ (식5-50, 불가능한 행렬 곱셈)}$$

그런데 벡터는 일반적으로 행벡터라고 간주되므로 A와 $\vec{v}$의 곱을 $A\vec{v}$라고 적으면 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}[x,y]$형태로 간주되므로 연산이 불가능합니다. 그래서 행렬과 벡터가 혼합된 경우, 행벡터 $[x,y]$를 열벡터 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$로 변환해 주어야 합니다. $\vec{v}=[x\ \ y]$의 전치행렬 v^T는 (식 5-51)과 같습니다.

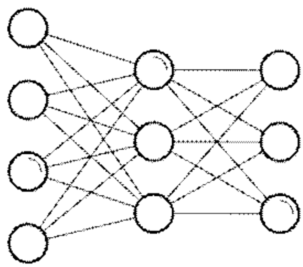
$$v^T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ (식5-51)}$$

그러므로 행렬 A와 행벡터 $\vec{v}$의 곱셈은 다음 (식5-52)처럼 나타냅니다.

$$A\vec{v} = Av^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ (식5-52)}$$

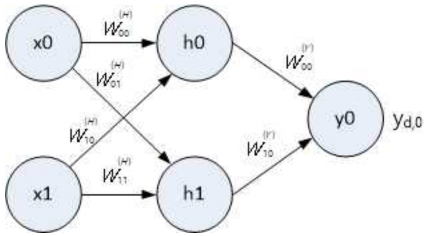
행렬과 인공지능

행렬 곱셈이, 첫 번째 행렬의 행과 두 번째 행렬의 열의 내적을 계산하는 특징은 많은 곳에서 사용합니다. 예를 들면 인공지능(AI, Artificial Intelligence)의 한 분야인 ***딥러닝(Deep Learning)***에서는 입력의 가중치 합(weighted sum)을 구하기 위해서 행렬을 사용합니다. (그림5-25)는 딥러닝의 일반적인 ***인공신경망(artificial neural network)*** 구조입니다. 왼쪽의 4개 동그라미가 입력에 해당하고, 오른쪽의 3개 동그라미가 출력에 해당합니다. 왼쪽과 오른쪽의 ***입력층(input layer)***과 ***출력층(output layer)***을 제외한 ***숨겨진 층(hidden layer, 은닉층, 중간층)***의 개수는 인공신경망을 설계하는 사람에 의해서 깊이가 정해지는데, 인공지능이 학습한다는 것은 은닉층과 연결된 ***간선(edge)***의 가중치를 결정하는 것이기 때문에 딥러닝이라고 합니다.



(그림5-25) 딥러닝에서는 가중치 합을 구하기 위해서 행렬을 사용합니다.

행렬의 유용성을 이해하기 위해, 간단한 딥러닝 구조에 대해서 행렬이 어떻게 사용되는지 알아보도록 하겠습니다.



(그림5-25b) 인공신경망은 행렬의 곱셈 계산을 수행합니다.

(그림5-25b)를 보면 입력 $(x0, x1)$에 대해서 ***가중치 합(weighted sum)***이 각각 은닉층인 h0와 h1의 값을 결정합니다. 예를 들면 h0와 h1은 각각 (식5-52b), (식5-52c) 처럼 결정합니다.

$$h0 = x0 \times W_{00}^{(H)} + x1 \times W_{10}^{(H)} \quad \text{(식5-52b)}$$

$$h1 = x0 \times W_{01}^{(H)} + x1 \times W_{11}^{(H)} \quad \text{(식5-52c)}$$

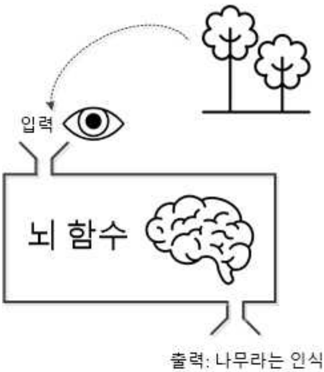
(식5-52b)와 (식5-52c)를 보면 내적형태인 것을 알 수 있습니다. 그러므로, 은닉층의 노드 값 계산을 (식5-52c)처럼 행렬 곱셈으로 적을 수 있습니다.

$$\begin{bmatrix} h0 \\ h1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{00}^{(H)} & W_{10}^{(H)} \\ W_{01}^{(H)} & W_{11}^{(H)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \end{bmatrix} \quad \text{(식5-52d)}$$

(식5-52d)의 행렬곱셈 계산이 인공지능(artificial intelligence)의 인공신경망의 기본적인 계산입니다. 현재 우리가 접하고 있는, ***얼굴인식(face recognition), 음성인식(voice recognition)*** 등의 인공지능은 내부적으로 (식5-52d)를 항상 수행하고 있습니다. 그런데 인공신경망은 사람의 뇌(brain)에 기초한 인공적인 모델이므로, 우리의 뇌도 (식5-52d)의 계산을 끊임없이 수행하고 있는 것입니다.

(그림5-25c) 우리의 뇌는 끊임없이 행렬곱셈을 수행하고 있습니다.

인공지능 뿐만 아니라, 우리는 사물을 인식하기 위해서도 끊임없는 행렬 곱셈 연산을 수행하고 있습니다. 눈으로 물체를 보고 그것을 인식하기 위한 데이터를 준비하는 과정에서도 변환(transformation)이라는 행렬연산을 수행하는데 이것은 6장 변환에서 자세히 살펴보도록 하겠습니다.



(그림5-25d) 뇌가 신경망을 이용해서 인식이라는 작업을 위한 데이터를 준비할 때도, 행렬 곱셈이 필요합니다.

많은 사람들이 사람과 구분할 수 없는 인공지능을 가진 로봇을 개발하는 것이 가능한지 질문하고는 합니다. 예를 들면 영화 터미네이터(Terminator) 시리즈에 나오는 T-800정도의 로봇을 만드는

것이 가능할까요?

터미네이터 영화의 T-800 모델을 실제로 제작 가능할까요?
(질문5-52e)

우리는 이 질문에 답하기 위해 T-800보다는 아주 초기모델인 영화에 등장하는 T-1을 만드는 것이 가능한지 질문할 수 있습니다.

(그림5-25e) 터미네이터 시리즈에 등장하는 비행형 T-1 공격형 드론의 모습입니다.(그림출처: 영화 터미네이터3 캡쳐)

필자는 대학에서 컴퓨터공학을 전공하고, 딥러닝을 이용하여 게임의 AI를 제작하는 등 최신 AI기술들의 동향을 이해하고 있습니다. 이미 미공군은 T-1과 비슷한 MQ-9 리퍼라는 공격형 드론을 운영하고 있습니다. 이 드론에 AI 기술은 탑재되어 있지 않지만, 그것은 시간 문제일 뿐입니다. (질문5-52e)에 대한 필자의 대답은 Yes입니다. 이것은 7장 로렌츠 변환에서 좀 더 자세하게 다루도록 하겠습니다.

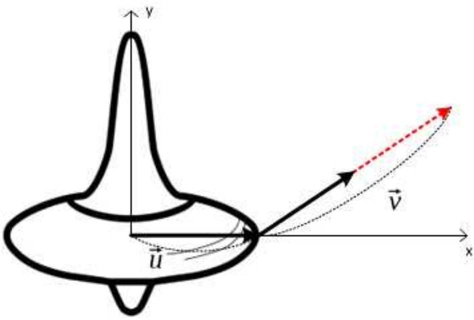
(그림5-25f) 미공군의 MQ-9 리퍼(Reaper)는 T-1보다는 초기모델이지만, 영화에서 보여주는 것이 가능한 미래임을 간접 증명합니다.(그림출처: 영문위키피디아)

우리 인류는 외부 행성을 식민지로 개척하기 위해 AI 로봇을 효과적으로 사용하게 될 것입니다. 또한 지금은 불가능하게 보이는 외부 은하로의 이동도 ***암흑물질(dark matter)***등의 비밀이 차츰 밝혀지면서, 가능하게 될 것이라고 생각합니다. 반면에 AI 로봇을 전쟁에 이용하게 될 것이고 끔찍한 미래가 한편으로는 진행될 것입니다. 이러한 미래에 대한 자세한 내용은 8장 복음에서 자세히 다루도록 하겠습니다.

우리 후손들이 살아가 미래를 준비하는 것은 우리가 반드시 해야 할 일입니다. 그 미래가 끔찍한 미래가 아니라, 밝은 미래가 되도록 우리는 지금부터 준비해야 합니다.

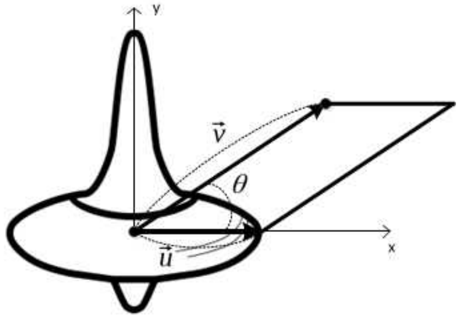
결정요인(Determinant, 행렬식)

두 벡터가 이루는 면적이 중요한 물리량을 결정하는 경우가 있습니다. 아래 (그림5-26)에서 팽이(spinning top)의 회전축에서 가장자리까지의 거리를 벡터 $\vec{u}$라고 합시다. $\vec{u}$의 끝 부분에 팽이의 회전축과 수직인 방향으로 힘 $\vec{v}$를 가하면, 팽이는 회전을 시작합니다.



(그림5-26) $\vec{u}$의 머리에 힘 $\vec{v}$를 가하면 팽이는 회전합니다.

팽이의 회전속도는 어떻게 결정될까요? 직관적으로 살펴보면, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 결정하는 평행사변형(parallelogram)의 면적에 비례할 것이라고 예측할 수 있습니다. 그래서 $\vec{u}$와 $\vec{v}$를 축으로 하는 이차원 베이시스가 행렬의 형태로 주어졌을 때, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 평행사변형의 면적을 구하는 연산을 정의해 보도록 하겠습니다. 이 연산은 많은 곳에서 물리량의 결정 요인으로 사용되기 때문에 ***결정요인(Determinant, 행렬식)***이라고 합니다. 한국말로 행렬식이라고 하는데 용어 선택이 썩 마음에 들지는 않습니다.



(그림5-27) $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 결정하는 평행사변형의 면적에 비례하여 팽이의 회전속도가 결정됩니다.

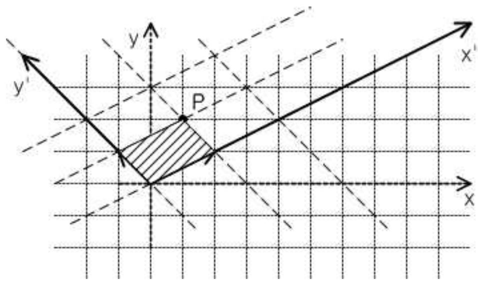
행렬 A에 대해, 행렬식은 $\det(A)$ 혹은 $|A|$라고 적습니다. 행렬식은 ***행렬이 의미하는 선형 변환의 부호있는 스케일 요소(signed scaling factor)***입니다. 변환 전에 단위 면적을 가지는 도형이, A변환 이후에 변경된 면적의 스케일 요소를 $|A|$로 적는 것입니다. 행렬을 통해 선형 변환된 임의의 도형의 면적은 변환 되기 전의 면적에 행렬식 $|A|$을 곱한 만큼의 스케일 변화가 발생합니다. 행렬식이 스케일 요소를 의미하기 때문에 절대값(absolute value) 기호를 사용해서 $|A|$라고도 나타내는 것입니다.

행렬식의 기하학적인 의미를 이해하기 위해서, 2×2행렬이 주어졌을 때, 이 변환이 기존의 면적이 1인 영역의 크기를 얼마만큼 변하게 하는지 구해보도록 하겠습니다. 다음 (식5-53)과 같은 행렬을 고려해 봅시다.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(식5-53)}$$

위 행렬은 주어진 이차원 벡터를 $\vec{u}=(2,1)$과 $\vec{v}=(-1,1)$을 새로

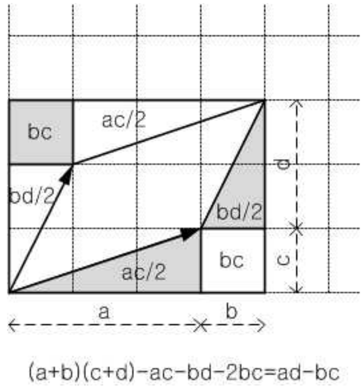
운 베이시스로 하는 변환을 나타내는 행렬입니다. 이 변환 행렬이 표준 베이시스의 면적 1×1을 어떠한 크기로 변환 하는 것일까요? 그것은 아래 (그림5-28)에서 빗금친 사각형의 면적을 구하는 것입니다.



(그림5-28) 변환된 베이시스에 대해서 베이시스가 이루는 사각형의 단위 면적을 구할 수 있습니다. 행렬식의 결과는 변환된 단위 면적의 스케일 요소입니다.

표준 베이시스 $\vec{x}=(1,0)$와 $\vec{y}=(0,1)$가 이루는 평행사변형(정사각형)의 면적은 $1\times1=1$입니다. 이 면적이 새로운 베이시스에서는 (그림5-28)의 빗금친 평행사변형의 면적으로 변환되는 것입니다.

임의의 베이시스에 대해서 베이시스가 이루는 평행사변형의 단위 면적을 구해봅시다. 행렬 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$에 대해 변환된 베이시스가 이루는 단위 면적을 (그림5-29)와 같이 구할 수 있습니다.



(그림5-29) 행렬식의 계산: (a,c)와 (b,d)를 베이시스로 하는 좌표계에서 단위 면적을 구할 수 있습니다.

첫 번째 베이시스 (a,c), 두 번째 베이시스 (b,d)가 이루는 평행사변형의 면적을 구하기 위해서, 먼저 $(a+b)$를 너비(width), $(c+d)$를 높이(height)로 하는 직사각형의 면적을 구합니다. 그리고 왼쪽 위와 오른쪽 아래의 작은 사각형의 면적은 bc로 같으므로 $2bc$를 빼 주어야 합니다. 그리고 (a,c)가 x-축과 이루는 직각 사각형의 면적은 다음 (식5-53b)와 같습니다.

$$\frac{1}{2}ac \quad \text{(식5-53b)}$$

이러한 직각삼각형이 2개 있으므로 ac를 빼주어야 합니다. 비슷한 방식으로 bd를 빼주어야 합니다. 그러면 평행사변형의 면적은 다음 (식5-53c)와 같이 구할 수 있습니다.

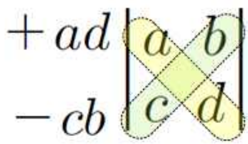
$$\begin{aligned}
&(a+b)(c+d)-ac-bd-2bc \qquad \text{(식5-53c)}\\
&=(ac+ad+bc+bd)-ac-bd-2bc\\
&=(ad+bc)-2bc\\
&=ad-bc
\end{aligned}$$

베이시스 $\vec{u}=(a,c)$와 $\vec{v}=(b,d)$가 이루는 평행 사변형(parallelogram)의 면적은 $ad-bc$입니다. 이것을 다음과 같이 행렬 기반의 식으로 나타낼 수 있는데, 이것을 ***행렬식***이라고 합니다.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \quad \text{(식5-54)}$$

행렬 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$가 주어졌을 때, 행렬식은 $|A|$로 나타내며, 베이시스가 구성하는 기하 도형(geometry)의 크기요소(scale factor)입니다. 이차원에서는 면적, 삼차원에서는 체적(volume)을 의미합니다.

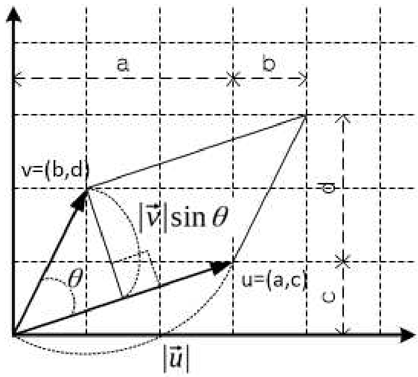
(식5-54)를 보면 ***왼쪽위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선(주대각선, main diagonal)*** 성분을 곱한 것에서, 오른쪽 위에서 왼쪽 밑으로 향하는 대각선***(반대각선, opposite diagonal)*** 성분을 곱한 항을 빼서 값을 결정한 것을 알 수 있습니다. 이것을 (그림5-29b)에 나타내었습니다.



(그림5−29b) 행렬식의 평가할 때, 대각선 성분의 곱을 더하거나 빼서 항을 구성합니다.

(그림5-29b)처럼 행렬식을 평가하는 것은 임의의 n차원에 대해서도 성립하므로 기억해 두시기 바랍니다. 행렬식이 아니라 기하학적인 방법으로도 도형의 면적을 구할 수 있습니다. $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이

루는 각을 θ라고 하면, 단위 면적을 다음 (그림5-30)과 같이 구할 수 있습니다.



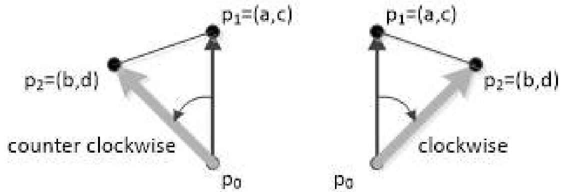
(그림5-30) $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 단위 면적은 $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$입니다. 이 값은 행렬식 $ad-bc$와 같습니다.

$\vec{v}$에서 $\vec{u}$로 직교 투영했을 때의 교점과 $\vec{v}$가 이루는 선분의 길이가 평행사변형의 높이 $|\vec{v}|\sin\theta$이고, 밑면의 길이는 $|\vec{u}|$이므로, 평행 사변형의 면적은 $|\vec{u}|\times(|\vec{v}|\sin\theta)=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$입니다. 다음의 행렬식의 성질은 중요합니다. 아래 식을 외적(cross product)을 정의할 때 다시 보게 될 것입니다.

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \quad \text{(식5-55)}$$

행렬식의 결과는 스칼라인데, 양수나 음수가 모두 될 수 있습니다. 행렬식의 결과가 양수라면, 두 번째 벡터 (b,d)가 첫 번째 벡터 (a,c)의 반시계 방향에 위치한다는 의미입니다. 행렬식의 결과가 음수라면 두 번째 벡터가 시계 방향에 위치한다는 의미입니다.

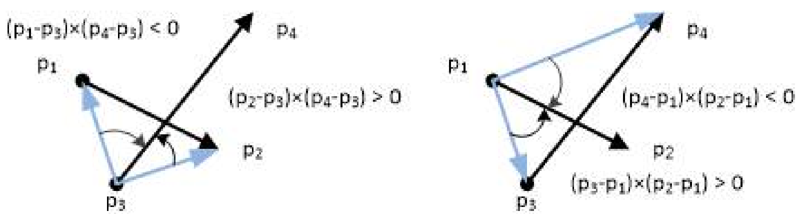
$\sin\theta$의 값이 1,2사분면에서는 양의 값을 가지고, 3,4사분면에서는 음의 값을 가지는 것을 상기하기 바랍니다. 이차원 벡터의 행렬식은 $\sin\theta$의 영향을 받으므로, $\vec{v}$가 $\vec{u}$에 대해 시계 방향(0도와 180도 사이)에 위치하면 양의 값을 가집니다.



(그림5-31) 행렬식을 이용하면 벡터의 상호 위치 관계를 계산할 수 있습니다. 행렬식이 양수이면 두 번째 벡터가 반시계 방향에 위치합니다.

(그림5-31)을 보면, 행렬식이 양수이면 (b,d)는 (a,c)의 반시계 방향에 위치합니다. 음수이면 (b,d)는 (a,c)의 시계방향에 위치합니다.

행렬식은 볼록 다각형(convex hull)을 구하는 알고리즘 등, 각종 기하 알고리즘(geometric algorithm)에 필수적으로 등장합니다. 예를 들면, 행렬식을 이용하면 이차원의 두 선분이 교차하는지 검사할 수 있습니다. 이차원 상에 선분 $\overrightarrow{p_1p_2}$와 $\overrightarrow{p_3p_4}$가 주어졌을 때, 두 선분이 교차하는지 검사하고 싶습니다. 그러면 다음 (그림5-32)와 같이 행렬식을 이용할 수 있습니다.



(그림5-32) 두 선분이 서로 겹치는 경우, 한 선분의 양 끝점이 다른 선분의 시계방향 및 반시계방향에 위치합니다.

$\overrightarrow{p_1p_2}$와 $\overrightarrow{p_3p_4}$가 주어졌을 때, (p_1-p_3) 벡터와 (p_4-p_3) 벡터의 행렬식을 구합니다. (그림5-32)를 보면, (p_4-p_3)이 시계방향에 위치하므로 행렬식의 값은 0보다 작아야 합니다. (p_2-p_3) 벡터와 (p_4-p_3) 벡터의 행렬식을 구합니다. (p_4-p_3)이 반시계방향에 위치하므로 행렬식의 값은 0보다 커야 합니다. 이 조건이 (그림5-32)의 왼쪽에 명시되어 있습니다. 그러면 두 선분이 겹칠 가능성이 있습니다. 비슷하게 오른쪽 그림처럼 조건을 검사해서 두 조건이 모두 만족되면 두 선분이 교차한다는 의미입니다.

이차원 벡터 두개가 이루는 면적을 구하기 위해서 행렬식을 정의했습니다. 비슷하게 삼차원 벡터 세 개가 이루는 기하구조(체적)의 부피(volume)을 구하기 위해, 행렬식을 사용할 수 있습니다.

3×3행렬의 행렬식을 이해하기 위해 먼저 소행렬식을 정의합니다. ***소행렬식(minor)***은 행렬 A로부터 행이나 열을 제거한 작은 정방 행렬의 행렬식입니다. 행렬 A가 아래 (식5-56)과 같이 주어졌다고 가정해 봅시다.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{(식5-56)}$$

위 행렬 A에 대해 2행과 3열을 제거한 소행렬식 $M_{2,3}$은 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$M_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \square \\ \square & \square & \square \\ -1 & 9 & \square \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 9-(-4)) = 13 \quad \text{(식5-57)}$$

A에서 2행과 3열을 제거한 부분행렬을 구하고 그것의 행렬식을 계산합니다. 위의 경우 그 값은 13입니다.

3×3행렬의 행렬식을 계산하기 위해 다음과 같은 삼차원 베이시스를 고려해 봅시다.

$$r1 = (a, d, g) \quad \text{(식5-58)}$$
$$r2 = (b, e, h) \quad \text{(식5-58b)}$$
$$r3 = (c, f, i) \quad \text{(식5-58c)}$$

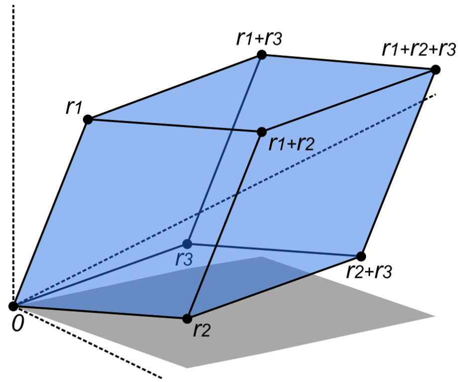
$r1$, $r2$ 및 $r3$을 축으로 하는 변환 행렬을 A라고 하면, 3×3 행렬 A의 행렬식을 다음 (식5-59)와 같이 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= a\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \end{aligned} \quad \text{(식5-59)}$$

(식5-59)에서 b의 계수가 -1인데, 행렬식 계산에서 계수의 부호는 $M_{i,j}$에 대해서 $(-1)^{i+j}$로 결정하기 때문입니다. b는 1행 2열의 요소이므로 부호는 $(-1)^{1+2} = -1$입니다. 변환행렬 A의 각 열이 베이시스를 구성하므로, (식5-58)과 같이 베이시스가 구성된다고 가정했지만, 전치행렬 A^T에 대한 행렬식은 원래 행렬 A의 행렬식과 같습니다. 즉 $|A| = |A^T|$이므로 A에 대해 다음 (식5-59b)와 같은 베이시스를 사용한다고 가정해도 됩니다.

$$r1=(a,b,c)$$ (식5-59b)
$$r2=(d,e,f)$$ (식5-59c)
$$r3=(g,h,i)$$ (식5-59d)

(식5-59)는 삼차원 공간에서 $r1$, $r2$ 및 $r3$가 결정하는 ***평행육면체(parallelepiped)***의 단위부피를 구합니다. 행렬식은 임의의 n차원 공간에서 스케일 요소를 구합니다. 예를 들면, 행렬이 4×4행렬인 경우, 4차원 ***초육면체(hyper cube)***의 부피를 구합니다.

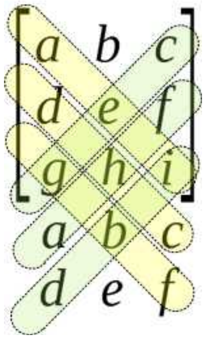


(그림5-33) 3×3행렬의 행렬식은 베이시스 단위가 이루는 체적(volume)입니다.(그림: 영문위키피디아)

행렬식이 스케일 요소이므로, A의 역행렬(inverse matrix)을 구할 때는 스케일 요소를 상쇄시켜 주기 위해, $1/\det(A)$를 곱해주는 과정이 필요하게 됩니다. 이것은 6장 변환에서 살펴보도록 하겠습니다.

행렬식의 값을 구하는 방법 중 ***소러스의 규칙(Rule of Sarras)***이라는 방법이 있습니다. (그림5-34)에 소러스의 규칙을 이용하여 행

렬식을 구하는 방법을 나타내었습니다.



(그림5-34) 소러스의 규칙을 이용하면 행렬식을 평가하는 방법을 쉽게 기억할 수 있습니다. 소러스의 규칙은 사차원 이상에서는 동작하지 않습니다.

주어진 행렬의 첫 번째 줄과 두 번째 줄을 반복해서 4행과 5행에 적습니다. 그리고 주대각선의 요소들을 모두 곱해서 더합니다.

$$aei + dhc + gbf \quad \text{(식5-60)}$$

반대각선의 요소들은 모두 곱해서 이전결과에서 빼 줍니다.

$$-gec - ahf - dbi \quad \text{(식5-61)}$$

그러면 A의 행렬식을 (식5-62)와 같이 얻을 수 있습니다.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \quad \text{(식5-62)}$$

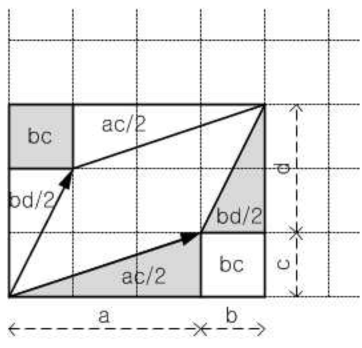
(식5-62)의 값은 (식5-59)과 같은 것을 알 수 있습니다.

벡터의 추가적인 연산: 외적

필자가 대학에서 선형대수와 컴퓨터 그래픽스를 배울 때, 외적에 대해서 직관적인 이해의 어려움이 있었던 이유는, 내적을 배운 이후에 행렬과 행렬식을 배우지 않고, 외적을 바로 배웠기 때문입니다. 그리고 행렬식을 이용한 외적의 유도는 필수적인 과정이 아니라, 보조적인 수단으로 취급되었던 것 같습니다. 그렇지 않습니다. 행렬식이 베이시스가 결정하는 기하도형의 면적 요소라는 것을 이해하는 것이 외적에 대한 직관을 가지는 필요조건입니다.

외적을 이해하기 위해서는 행렬식의 의미를 명확하게 이해할 필요가 있습니다.

행렬 M= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$에 대해 이차원 베이시스 (a,c)와 (b,d)가 이루는 단위 면적을, 다음 그림과 같이 구할 수 있다는 것을 우리는 이미 살펴보았습니다. M의 행렬식은 $ad-bc$입니다.



(그림5-35) 행렬식은 변환의 스케일 요소입니다. 이차원에서는 면적의 변화 정도를, 삼차원에서는 부피의 변화 정도를 나타냅니다.

행렬식은 행렬식을 구성하는 베이시스가 나타내는 변환의 스케일 요소입니다. 이제 다음과 같은 두개의 삼차원 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$를 고려해 봅시다.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a,b,c) \quad \text{(식5-63)}\\ \vec{v} &= (d,e,f)\end{aligned}$$

$\vec{u}$와 $\vec{v}$는 삼차원 상에서 정의된 벡터인데, 각 벡터에서 z-성분을 무시하고 행렬식을 구하면 그것은 무엇을 의미하는 것일까요? 즉 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 모두 xy-평면에 직교 투영(orthogonal projection)되었다고 가정하는 것입니다. 그러면 새로운 $\vec{u}', \vec{v}'$은 다음과 같은 벡터입니다.

$$\begin{aligned}\vec{u}' &= (a,b,0) \quad \text{(식5-64)}\\ \vec{v}' &= (d,e,0)\end{aligned}$$

z-성분을 무시한 (a,b)와 (d,e)의 행렬식은 다음과 같습니다.

$$\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd = z^{ignore} \quad \text{(식5-65)}$$

z-성분을 무시한 이 행렬식을 z^{ignore}이라고 적도록 하겠습니다. z^{ignore}은 xy-평면에 대한 스케일 요소를 의미합니다. 이러한 방식으로 x^{ignore}과 y^{ignore}을 구할 수 있습니다. 표현의 편의를 위해서 ***변형된 행렬식(augmented determinant)***을 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{vmatrix} a & b & 0^{ignore} \\ d & e & 0^{ignore} \end{vmatrix} = ae - bd = z^{ignore} \quad \text{(식5-66)}$$

위 (식5-66)의 변형된 행렬식이 의미하는 것은, z-성분은 모두 무시되었다는 의미입니다. 이러한 방식으로 $x^{ignore}, y^{ignore}, z^{ignore}$을 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\begin{vmatrix} 0^{ignore} & b & c \\ 0^{ignore} & e & f \end{vmatrix} = x^{ignore} \quad \text{(식5-67)}$$

$$-\begin{vmatrix} a & 0^{ignore} & c \\ d & 0^{ignore} & f \end{vmatrix} = y^{ignore} \quad \text{(식5-67b)}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0^{ignore} \\ d & e & 0^{ignore} \end{vmatrix} = z^{ignore} \quad \text{(식5-67c)}$$

y^{ignore}에 대해서는 –부호(minus sign)를 붙이는데, 이것은 면적 요소가 뒤집혔다고(flip) 가정하는 것입니다. 이것은 밑에서 적용할 가짜 행렬식을 위한 준비입니다. 이제 세 개의 성분을 구했으므로, 이것을 하나의 삼차원 벡터로 표현해 보겠습니다.

$$(x^{ignore}, y^{ignore}, z^{ignore}) \quad \text{(식5-68)}$$

위 벡터의 각 요소가 의미하는 것은 명확합니다. 그런데 이 벡터의 방향이 의미하는 것은 무엇일까요? 방향이 의미하는 것을 직관적으로 이해하기 위한 준비 단계로, $(x^{ignore}, y^{ignore}, z^{ignore})$ 벡터를 좀 더 쉽게 구하는 방법을 알아 보겠습니다. 그것은 ***가짜 행렬식(pseudo determinant)***를 이용하는 것입니다.

우리는 3×3 행렬 A의 행렬식을 구하는 방법을 알고 있습니다. 그것은 다음 (식5-69)와 같습니다.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ (식5-69)

$$= a\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

이 행렬식이 삼차원 변환의 부피요소를 의미한다는 것을 기억하세요. 이제 A의 첫 번째 행을 각 축의 베이시스를 의미하는 i, j와 k 벡터로 바꾸어서 행렬식을 구성해 보겠습니다. i, j와 k는 벡터이므로 아래 (식5-70)의 P는 진짜 행렬식은 아닙니다.

$$P=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$ (식5-70,

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & b & c \\ \square & e & f \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ a & \square & c \\ d & \square & f \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ a & b & \square \\ d & e & \square \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= (x^{ignore,} y^{ignore,} z^{ignore})$$

외적)

위 식에서 보듯이 가짜 행렬식을 이용하면 $(x^{ignore}, y^{ignore}, z^{ignore})$을 구할 수 있습니다. 우리는 지금 이 벡터의 방향의 의미를 파악하려고 합니다. 문제를 간단하게 하기 위해 (a,b,c)와 (d,e,f)를 모두 xy-평면에 직교 투영시켜서 $(a,b,0)$과 $(d,e,0)$으로 만듭니다. 그리고 이 벡터에 대해서

$(x^{ignore}, y^{ignore}, z^{ignore})$을 구합니다. 다음 (식5-71)을 보세요.

$$\begin{aligned}
P &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ d & e & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(식5-71)} \\
&= \vec{i}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & b & 0 \\ \square & e & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ a & \square & 0 \\ d & \square & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ a & b & \square \\ d & e & \square \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\begin{vmatrix} b & 0 \\ e & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 0\vec{j} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\
&= (0, 0, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix})
\end{aligned}$$

위 식에서 보듯이 x^{ignore}과 y^{ignore}요소가 모두 0이 되어서 $(0, 0, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix})$ 벡터를 얻었습니다. 이 벡터의 방향은 명확합니다. z-축 방향입니다. z-축은 xy-평면과 수직이며 이것은 x-축 및 y-축 모두와 수직인 것을 의미합니다. 비슷한 방식으로 $(x^{ignore}, y^{ignore}, z^{ignore})$의 방향을 계산해 보면, 주어진 두 벡터 (a, b, c)와 (d, e, f)에 모두 수직인 벡터임을 알 수 있습니다! 이것이 ***외적(outer product)***입니다.

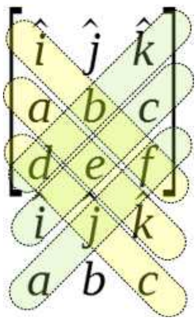
$\vec{u} = (a, b, c) = (u_x, u_y, u_z)$라고 하고, $\vec{v} = (d, e, f) = (v_x, v_y, v_z)$라고 하면, $\vec{u} \times \vec{v}$는 (식5-71b)처럼 행렬과 행렬의 곱셈형식으로 나타낼 수 있습니다.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \text{(식5-71b)}$$

임의의 벡터 A에 대해서 행렬식은 전치 행렬 A^T에 대해서 결과가 같습니다.

$$|A| = |A^T| \quad \text{(식5-71c)}$$

그러므로 (그림5-36)에서 일반적인 삼차원 베이시스는 행렬을 구성하는 열인 $(\hat{i}, a, d)$, $(\hat{j}, b, e)$와 $(\hat{k}, c, f)$이지만, 베이시스가 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, (a, b, c)와 (d, e, f)라고 가정해도 됩니다.



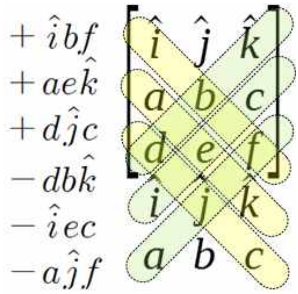
(그림5-36) 첫 번째 행을 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$로 하고 두 번째와 세 번째 행이 (a, b, c)와 (d, e, f)인 행렬의 행렬식을 계산한 후, $\hat{i}, \hat{j}$와 $\hat{k}$의 계수를 모아 구성한 벡터가 외적의 결과입니다.

$\vec{u} = (a, b, c)$와 $\vec{v} = (d, e, f)$가 삼차원 공간상의 벡터일 때, ***외적 (outer product, cross product) u×v***는 다음과 같이 정의합니다.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (bf - ce,\ cd - af,\ ae - bd) \quad \text{(식5-72)}$$

내적과 달리 외적의 결과는 벡터입니다. 외적은 ***가짜 행렬식 (pseudo determinant)***에 소러스의 규칙을 적용하여 유도할 수 있

습니다.



(그림5-37) 외적을 찾기 위한 소러스의 규칙(Sarrus rule)

(그림5-37)에서 주대각선 성분의 곱들의 합은 (식5-73)과 같습니다.

$$\begin{aligned}&+\hat{i}bf\\&+ae\hat{k}\\&+d\hat{j}c\end{aligned}\quad \text{(식5-73)}$$

반대각선 성분의 곱들의 합은 (식5-74)와 같습니다.

$$\begin{aligned}&-db\hat{k}\\&-\hat{i}ec\\&-a\hat{j}f\end{aligned}\quad \text{(식5-74)}$$

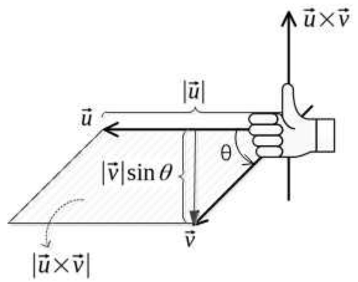
(식5-73)과 (식5-74)를 더해서 구성한 식에서 $\hat{i},\hat{j}$와 $\hat{k}$의 계수를 모아서 구성한 삼차원 벡터가 (a,b,c)와 (d,e,f)의 외적입니다. 이 벡터는 (식5-72)와 결과가 같습니다.

행렬식이 베이시스가 이루는 기하도형의 크기요소을 계산한다는 것을 기억해 상기해 보세요. 그것은 (그림5-37)에서 (a,b,c)와

(d,e,f)가 이루는 밑면적에 높이 성분 $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$을 곱해서 부피를 구해야 한다는 의미입니다. 밑면적의 높이 성분은 밑면적을 구성하는 벡터 (a,b,c)와 (d,e,f)에 모두 수직이어야 합니다. 그러므로, 가짜 행렬식을 계산한 후, $\hat{i},\hat{j}$와 $\hat{k}$의 계수를 모아서 구성한 벡터는 (a,b,c)와 (d,e,f)에 모두 수직이어야 하는 것입니다.

(식5-72)에서 외적의 결과를 구성하는 요소를 모두 구할 수 있으므로, 벡터의 크기를 구할 수 있습니다. 그런데, 삼차원에서는 행렬식이 체적을 계산하므로, $|\vec{u}\times\vec{v}|$는 (a,b,c)와 (d,e,f)가 이루는 평행사변형의 면적을 의미합니다.

두 벡터의 평행사변형의 면적은 기하학적인 방법으로도 구할 수 있습니다. (그림5-38)은 기하학적인 방법으로 두 벡터가 이루는 평행사변형의 면적을 구하는 방법을 보여줍니다.

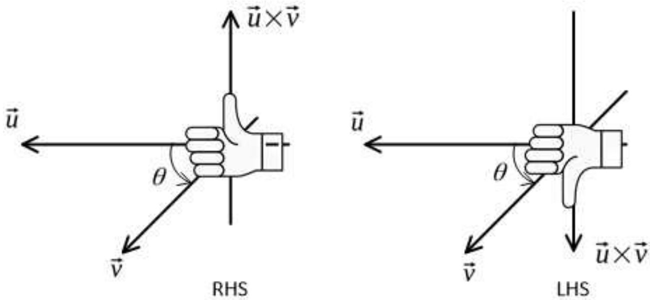


(그림5-38) 외적의 크기는 스케일 요소입니다. 이차원에서는 면적을 삼차원에서는 부피를 의미합니다.

위 (그림5-38)을 보면 $|\vec{v}|\sin\theta$가 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 평행 사변형의 높이이므로 $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$는 평행 사변형의 면적입니다. 외적 $\vec{u}$와 $\vec{v}$기 이루는 각이 θ일 때, $\vec{u}\times\vec{v}$의 결과가 의미하는 벡터는 두 벡터 $\vec{u}=(a,b,c)$와 $\vec{v}=(d,e,f)$에 모두 수직이면서, 크기는 다음과 같습니다.

$$|\vec{u} \times \vec{u}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \quad \text{(식5-75)}$$

외적의 방향이 $\vec{u}, \vec{v}$에 모두 수직이라고 했는데, 수직인 벡터는 두 종류가 있을 수 있습니다. **오른손 좌표계(RHS, right-hand coordinate system)**를 쓰는 경우, 외적의 결과 벡터의 방향은 **오른손 규칙(right-hand rule)**에 의해 구할 수 있습니다. 다음 (그림 5-39)를 보세요.



(그림5-39) 오른손 좌표계에서 오른손법칙: 외적 벡터의 방향은 오른손을 오므렸을 때 엄지가 가리키는 방향입니다. 오른손을 폈을 때 손끝이 가리키는 방향이 u이고, 오므렸을 때 손끝이 가리키는 방향이 v라면, 엄지의 방향이 외적 벡터의 방향이 됩니다. 왼손 좌표계(LHS)의 경우는 외적의 방향이 반대가 되므로 주의하세요.

$\vec{u}$와 $\vec{v}$의 외적의 의미를 크기 요소의 관점에서 직관적으로 이해해 보면, **외적은 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 스케일 요소인데, 이 값이 $\vec{u}$와 $\vec{v}$축에는 영향을 끼치지 않아야 하므로**, 외적 벡터의 방향이 $\vec{u}$와 $\vec{v}$ 모두에게 직각이 되는 것입니다.

외적의 결과가 좌표계마다 다른 것 같지만, 사실 외적은 일관된 성질을 가집니다. 왼손 좌표계든, 오른손 좌표계든 $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$의 성

질을 만족합니다. 좌표계와 상관없이 각 축들에 대해서 외적은 다음의 성질을 만족합니다.

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \quad \text{(식5-76)}$$
$$\vec{x} = \vec{y} \times \vec{z}$$
$$\vec{y} = \vec{z} \times \vec{x}$$

외적은 내적과 더불어 빈번하게 사용합니다. 예를 들면, 면의 방향을 판별하기 위해서, 점이 직선이나 평면의 어느 쪽에 놓여있는지를 검사하기 위해서 외적을 사용할 수 있습니다.

가짜 행렬식을 이용해서 외적을 정의했으므로, 행렬식과 내적, 외적은 연관되어 있는 것을 유추해 볼 수 있습니다. $r1$, $r2$ 및 $r3$을 베이시스로 하는 행렬 A의 행렬식을 구하는 과정을 살펴봅시다.

$$r1 = (a,b,c)$$
$$r2 = (d,e,f)$$
$$r3 = (g,h,i)$$

설명의 편의를 위해 A 행렬의 행으로 베이시스를 구성했다고 가정하고, 행렬식을 계산해보면 (식5-76b)와 같습니다.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \text{(식5-76b)} \\ &= a\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \end{aligned}$$

(식5-76b)의 계산과정을 보면 $r2 \times r3$을 계산하고, 이 결과를 $r1$과 내적을 취한 것을 확인할 수 있습니다. 그러므로 $|A|$는 다음 (식5-76c)와 같이 정의할 수 있습니다.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = r1 \cdot (r2 \times r3) \quad \text{(식5-76c)}$$

(식5-76c)를 ***스칼라 삼중곱(scalar triple product)***이라고 합니다. 행렬식의 특징에 의해, (식5-76c)의 계산은 $(r1 \times r2)$의 외적을 계산하고, 이것을 $r3$와 내적 취한 것을 의미하기도 합니다. 그래서 (식5-76d)의 성질을 얻을 수 있습니다.

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= r1 \cdot (r2 \times r3) \quad \text{(식5-76d)} \\ &= (r1 \times r2) \cdot r3 \\ &= r2 \cdot (r3 \times r1) \end{aligned}$$

내적은 교환법칙이 성립하므로 (식5-76d)에 대해서 다음의 식이 성립합니다.

$$\begin{aligned} r1 \cdot (r2 \times r3) = (r2 \times r3) \cdot r1 \\ (r1 \times r2) \cdot r3 = r3 \cdot (r1 \times r2) \\ r2 \cdot (r3 \times r1) = (r3 \times r1) \cdot r2 \end{aligned}$$

스칼라 삼중곱에서 임의 두 벡터가 같다면 그 결과는 0입니다.

$$r1 \cdot (r2 \times r1) = 0$$

위 식을 보면, $r2 \times r1$은 $r2$와 $r1$에 수직인 벡터입니다. $r1$에 수직인 벡터와 $r1$의 내적은 0이므로 결과가 0이 됩니다.

세 개의 벡터에 대해 외적을 연속적으로 취한 ***벡터 삼중곱 (vector triple product)***도 다음 (식5-76e)와 같이 유도됩니다.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \quad \text{(식5-76e)}$$

유도과정은 별도로 적지 않습니다.

이차원 벡터에 대한 외적

이차원에서도 외적의 결과는, 대상 공간인 이차원에서 벡터여야 합니다. 가짜 행렬식으로 이차원 벡터 (a,b)의 외적을 다음과 같이 구할 수 있습니다. $\hat{i}=(1,0)$, $\hat{j}=(0,1)$이라고 가정합니다.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a & b \end{vmatrix} \quad \text{(식5-77)}$$

위의 가짜 행렬식의 결과는 이차원 좌표 (a, b)가 시계 방향으로 90도 회전된 $b\hat{i}-a\hat{j}=(b,-a)$가 됩니다.

두 개의 이차원 벡터의 외적은 어떻게 구할 수 있을까요? 두 개의 삼차원 벡터인 경우, 외적은 두 벡터에 모두 직각이면서, 외적의 결과가 삼차원 공간에 존재합니다. 하지만, 이차원 벡터의 외적은 이차원 공간을 벗어나는 문제가 발생합니다. 두 벡터에 모두 직각이어야 하는데, 두 개의 이차원 벡터에 모두 수직인 벡터는 이차원 공간에 존재하지 않기 때문입니다.

이차원에서 두 벡터 $\vec{u}=(a,b)$와 $\vec{v}=(c,d)$의 외적을 이해하기 위해, $\vec{u},\vec{v}$를 삼차원 공간으로 옮겨서 외적을 계산해 봅시다. 그러면 $\vec{u},\vec{v}$는 다음 (식5-78)과 같이 확장됩니다.

$$\vec{u}=(a,b,0) \text{ (식5-78)}$$
$$\vec{v}=(c,d,0) \text{ (식5-78b)}$$

이제 $\vec{u},\vec{v}$는 삼차원 공간의 벡터이므로, 가짜 행렬식을 이용해서 외적을 계산할 수 있습니다. 결과는 (식5-79)와 같습니다.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}) = (0,\ 0,\ ad-bc) \text{ (식5-79)}$$

(식5-79)를 보면, 두 개의 이차원 벡터의 외적은 삼차원 벡터인데, 결과 벡터의 x, y요소가 항상 0이므로, z-요소만 하나의 실수로 나타내는 방법을 사용할 수 있습니다. 그래서 이차원에서 두 벡터 $\vec{u}=(a,c)$와 $\vec{v}=(b,d)$에 대해서 행렬식의 결과를 외적의 결과처럼 사용하기도 합니다.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \text{ (식5-80)}$$

이차원에서 행렬식의 결과를 외적으로 사용하면, 이차원에서 외적은 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\vec{u}=(a,b)$$
$$\vec{v}=(c,d)$$
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \text{ (식5-81)}$$

(식5-81)을 보면 이차원에서 외적의 결과가 하나의 실수 값을

가지는데, 이차원에서 외적의 결과가 실수 w이면 사실은 실수 값 w가 아니라, 삼차원 벡터 $(0,0,w)$를 의미한다고 생각해야 합니다. 그러면 이차원에서 실수와 이차원 벡터, 이차원 벡터와 실수의 외적을 정의하는 것이 가능합니다.

실수 w와 이차원 벡터 $\vec{u}=(a,b)$의 외적은 다음 (식5-82)와 같이 구할 수 있습니다.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & w \\ b & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & w \\ a & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} \quad \text{(식5-82)}$$
$$= \vec{i}(-wb) - \vec{j}(-wa) + \vec{k}(0)$$
$$= (-wb,\ +wa,\ 0)$$

(식5-82)에 의해 실수 w와 이차원 벡터 $\vec{u}$의 외적은 다음 (식5-83)과 같습니다.

$$w \times \vec{u} = w \times (a,b) = (-wb,\ wa) \quad \text{(식5-83)}$$

비슷하게, 이차원 벡터 $\vec{u}$와 실수 w의 외적은 (식5-84)와 같이 계산할 수 있습니다.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & w \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & w \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & w \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(식5-84)}$$
$$= \vec{i}(wb) - \vec{j}(wa) + \vec{k}(0)$$
$$= (wb,\ -wa,\ 0)$$

(식5-84)에 의해 이차원 벡터 $\vec{u}$와 실수 w의 외적은 다음 (식5-85)와 같습니다.

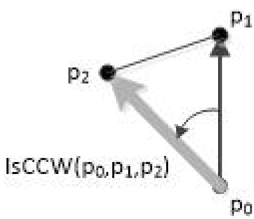
$$\vec{u} \times w = (a,b) \times w = (wb,\ -wa) \quad \text{(식5-85)}$$

이러한 수학적 정의들을 배울 때, “이러한 것들이 어디에 사용되지?”라고 의문을 가질 수 있습니다. 컴퓨터공학을 전공하고, 게임을 개발하는 게임 개발자의 입장에서, 이 책에서 설명하는 내용은 3D 게임 프로그래머에게는 반드시 필요한 내용이라고 장담합니다. 이 책에서 설명하는 수학적 내용은 하나도 빠짐없이 모두 게임 프로그래밍에 사용됩니다.

표준수학
외적의 응용

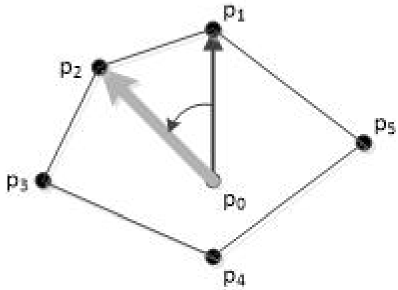
점이 다각형의 내부에 있는지 검사

이차원의 임의의 점 p_0, p_1, p_2에 대해서 p_0를 기준으로 p_2가 p_1의 반시계 방향에 있는지 검사하는 함수를 만들 수 있습니다. 이 함수를 IsCCW(p_0, p_1, p_2)라고 합시다.



(그림5-40) IsCCW()는 $p_1 - p_0$와 $p_2 - p_0$ 벡터의 행렬식을 계산해서, 이 값이 0보다 크면 true를 리턴합니다.

IsCCW()는 $p_1 - p_0$와 $p_2 - p_0$ 벡터의 행렬식을 계산해서, 이 값이 0보다 크면 true를 리턴합니다. 다각형을 구성하는 n개의 각 점이 반시계 방향으로 정렬되는 다각형(polygon)을 정의할 수 있습니다. 그리고 어떤 점 p_0가 이 다각형의 안에 있는지 밖에 있는지 검사하기를 원합니다. 다음 (그림5-41)을 보세요.



(그림5-41) p_0가 다각형의 내부에 있으려면, 다각형을 이루는 모든 연속된 두 점 p_i, p_{i+1}에 대해서 IsCCW()가 true가 되어야 합니다.

p_0가 다각형의 내부에 있으려면, 다각형을 이루는 모든 연속된 두 점 p_i, p_{i+1}에 대해서 IsCCW(p_0, p_i, p_{i+1})가 true가 되어야 합니다. 다각형의 마지막 점 p_n에 대해서는 p_n, p_0에 대해서 IsCCW (p_0, p_n, p_0)가 true가 되어야 합니다.

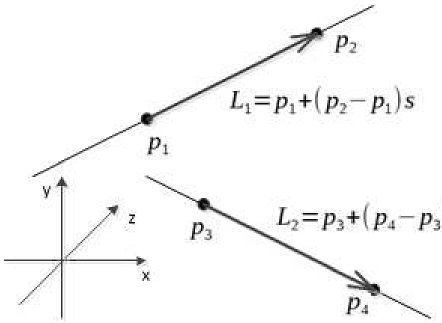
두 직선 사이의 거리

두 직선 사이의 거리를 구하기 위해서는 외적과 내적을 사용해야 합니다. 점 p_1,p_2가 주어지면, 직선의 방정식을 다음 (식5-86)과 같이 정의할 수 있습니다.

$$L_1 = p_1 + (p_2 - p_1)s \quad \text{(식5-86)}$$

위 식에서 s는 임의의 실수 값입니다. (식5-86)은 p_1을 지나고 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 방향을 가지는 직선을 의미합니다. 비슷하게 p_3,p_4를 지나는 직선 L_2을 고려해 볼 수 있습니다. 이제 (그림5-42)처럼 두 직선

L_1과 L_2의 거리를 구하려고 합니다.

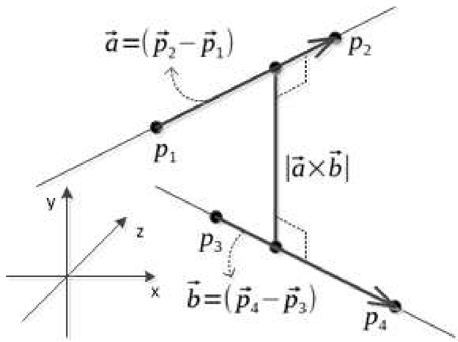


(그림5-42) 삼차원 공간에 직선 L_1, L_2를 정의하였습니다.

(그림5-42)의 삼차원 공간에서 두 개의 직선을 다음과 같이 적었습니다.

$$L_1 = p_1 + (p_2 - p_1)s \quad \text{(식5-87)}$$
$$L_2 = p_3 + (p_4 - p_3)t \quad \text{(식5-87b)}$$

위 식에서 s와 t는 임의의 실수입니다. 직선 사이의 거리는, 두 직선과 모두 직교하면서 교차하는 선분(line segment)의 길이를 의미합니다. 두 직선과 모두 직교하는 선분을 구하는 방법을 우리는 이미 알고 있습니다. 외적을 취하는 것입니다. 다음 (그림5-43)을 보세요.

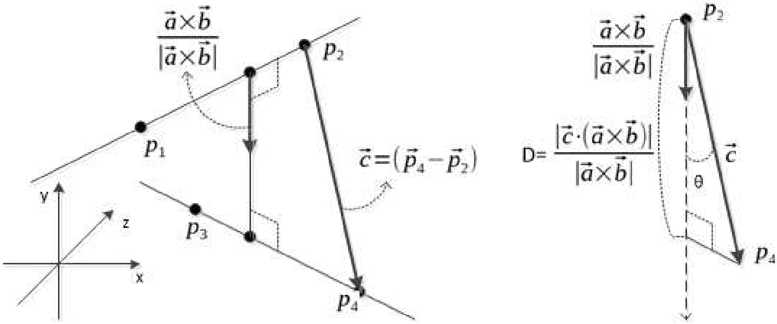


(그림5-43) a와 b와 모두 직교하는 직선을 구하기 위해서는 a와 b의 외적을 취합니다.

$\vec{a}=p_2-p_1$이라고 하고, $\vec{b}=p_4-p_3$이라고 하겠습니다. 그러면 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 직교하는 직선은 다음과 같이 외적을 취해서 구할 수 있습니다.

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad \text{(식5-88)}$$

이제 L_1에서 임의의 점을 하나 선택하고, L_2에서 임의의 점을 하나 선택해서 벡터를 구성한 다음, 이 벡터를 $\vec{a}\times\vec{b}$에 투영했을 때의 선분의 길이를 구하면, 그것이 두 직선 사이의 거리가 됩니다. L_1에서 p_2를 취하고, L_2에서 p_4를 취해서 $\vec{c}=p_4-p_2$라고 둡니다.



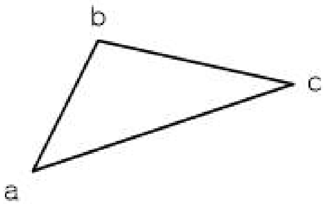
(그림5-44) 이제 직선 사이의 거리를 구하는 문제는, 벡터 $\vec{c}$를 두 직선에 수직인 벡터에 투영하는 문제입니다.

이제 벡터 $\vec{c}$를 직선 $\vec{a}\times\vec{b}$에 투영한 성분의 길이를 구합니다. 이것은 벡터 분해(vector decomposition)에서 이미 다루었습니다. 두 직선 사이의 거리 D는 다음 (식5-89)와 같습니다.

$$D=\frac{|\vec{c}\bullet(\vec{a}\times\vec{b})|}{|(\vec{a}\times\vec{b})|} \quad \text{(식5-89)}$$

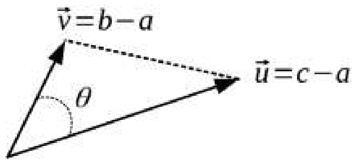
삼차원 그래픽스에서 내적, 외적 및 행렬의 곱셈은 사칙 연산의 곱셈(multiplication)처럼 빈번하게 사용되므로, 의미를 분명히 이해하는 것이 중요합니다.

보이지 않는 면의 판단



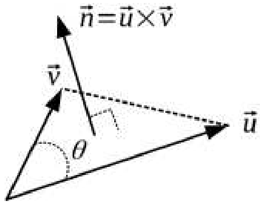
(그림5-45) 삼각형 면이 카메라 시점에서 보이는지 안 보이는지를 판단하려고 합니다.

컴퓨터가 삼차원에서 물체를 렌더링하는 과정에서, 객체들은 메시(mesh)라는 삼각형의 집합으로 구성됩니다. 메시의 표면이 모두 삼각형으로 구성되었을 때, 메시의 한 삼각형 면이 현재 카메라 시점에서 보이지 않는다면 화면에 그리지 않아야 합니다. 이것을 판단하기 위해 먼저 면의 방향을 결정해야 하는데, 면의 방향은 벡터의 외적을 이용하면 구할 수 있습니다.



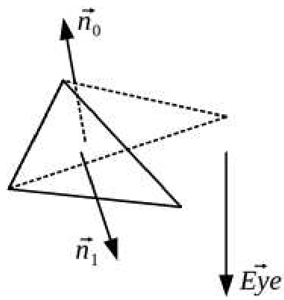
(그림5-46) 삼각형의 방향을 결정하기 위해, 삼각형을 구성하는 두 벡터를 구합니다.

삼각형 abc의 면의 방향은 면과 직각을 이루는 벡터로 표현할 수 있으며 이 벡터를 **법선 벡터(normal vector)**라고 합니다. 법선 벡터를 구하기 위해 $\vec{u}$=c-a, $\vec{v}$=b-a로 두면, 두 벡터의 외적 $\vec{u}\times\vec{v}$를 구하면 삼각형의 법선벡터를 얻을 수 있습니다.



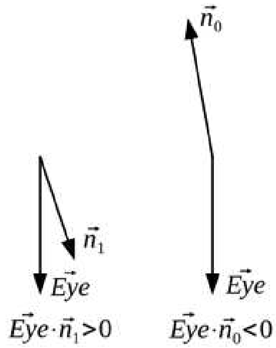
(그림5-47) $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$를 구하면 삼각형의 법선 벡터가 됩니다.

이러한 방식으로 메시를 구성하는 모든 삼각형의 법선 벡터를 구할 수 있습니다. 현 상태의 메시에 대해, 카메라를 향하는 방향 벡터 $\overrightarrow{Eye}$가 주어졌다고 합시다. $\overrightarrow{Eye}$벡터는 카메라가 바라보는 방향의 반대 방향을 향하는 벡터입니다.



(그림5-48) 메시를 구성하는 모든 삼각형의 법선 벡터와 카메라를 향하는 방향벡터 $\overrightarrow{Eye}$가 주어졌다고 가정합시다.

이제 각 법선벡터와 $\overrightarrow{Eye}$벡터의 내적을 취하면 삼각형이 현 시점에서 보이는지 어떤지를 판단할 수 있습니다.



(그림5-49) 카메라를 향하는 벡터 Eye와 법선벡터의 내적이 0보다 크다면 그 면은 보이는 면이라는 뜻입니다.

법선벡터와 $\overrightarrow{Eye}$ 벡터의 내적을 구해서 그 값이 0보다 크다면 보이는 면입니다. 왜냐하면 내적은 두 벡터가 이루는 각이 $-2/\pi \sim +2/\pi$에서 양수 값을 가지기 때문입니다. 내적이 0보다 작다면 면이 시점의 반대 방향을 향한다는 의미이므로 보이지 않는 면이 됩니다.

일반적으로 컴퓨터의 그래픽 라이브러리에서는, 이 과정을 빠르게 하기 위해, 각 정점(vertex)마다 법선 정보를 저장해 둡니다. 그리고 각 면의 법선은 정점의 법선을 보간(interpolation)해서 구하고, 시점 벡터 $\overrightarrow{Eye}$와 내적을 구해서 그 값이 0보다 작다면 그 삼각형을 렌더링하지 않습니다.

복소수의 곱셈

2장에서 파워함수를 배우면서, 살펴보았던 복소수(복잡한 수, complex number)를 다시 살펴보도록 하겠습니다.

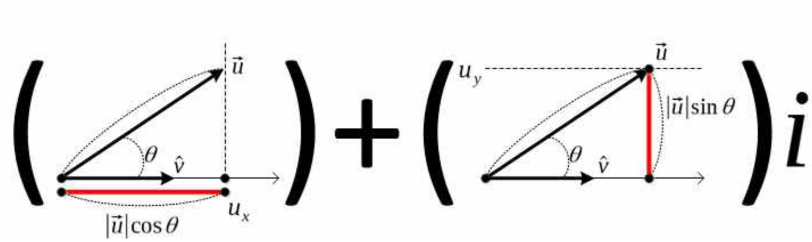
$v=a+bi$와 $w=c+di$에 대해, 두 복소수의 곱은 (식5-90)과 같이 구할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}&vw \qquad\qquad (\text{식}5\text{-}90)\\&=(a+bi)(c+di)\\&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+adi+bci+bd(-1)\\&=ac+adi+bci-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

$\vec{v}$를 일반 좌표계에서 (a,b)라고 가정하고, $\vec{w}$를 일반 좌표계에서 (c,d)라고 가정한 후 $\vec{v}$와 $\vec{w}$의 내적과 외적을 구하면 (식5-91), (식5-91b)와 같습니다.

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd \quad (\text{식}5\text{-}91,\ \text{벡터의 내적})$$
$$\vec{v}\times\vec{w}=(a,b)\times(c,d)=ad-bc \quad (\text{식}5\text{-}91b,\ \text{이차원의 외적})$$

(식5-91)을 보면, 복소수 곱셈의 결과 실수부(real part)는 $\vec{v}$와 $\vec{w}$의 내적, 허수부(imaginary part)는 $\vec{v}$와 $\vec{w}$의 외적과 관계된 것을 알 수 있습니다. 다만, $i^2=-1$이라는 특징 때문에 일반적인 벡터의 내적, 외적과 달리 부호가 바뀌었다고 생각하면 됩니다.



(그림5-50) 복소수 곱셈의 결과, 실수부는 내적, 허수부는 외적과 상관이 있습니다.

실제 복소수의 내적은 (식5-91)과 같이 정의하지 않습니다. 일반 데카르트 좌표계에서 내적은 길이를 나타냅니다. $\vec{v}$가 일반 공간에서의 벡터라면 $|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{v})}$ 입니다. 이러한 자연스러움을 유지하기 위해 복소수의 내적도 허수가 포함되지 않은 실수 길이가 나오도록 정의합니다. $v = a + bi$에서 허수부의 부호를 바꾼 $a - bi$를 ***켤레 복소수(complex conjugate)***라고 하고 v^*(혹은 $\bar{v}$)라고 적습니다. $v^* v$를 계산하면 (식5-91c)와 같이 실수값이 나오는데 이것은 피타고라스의 정리를 만족하는 실수 길이입니다. 그래서, (식5-91e)를 복소수의 내적으로 정의합니다.

$$v^* v = (a - bi)(a + bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(식5-91c)}$$

$$v \cdot v = v^* v = a^2 + b^2 = |v|^2 \quad \text{(식5-91d)}$$

$$v \cdot w = w^* v \quad \text{(식5-91e, }\textbf{\textit{복소수의 내적}}\text{)}$$

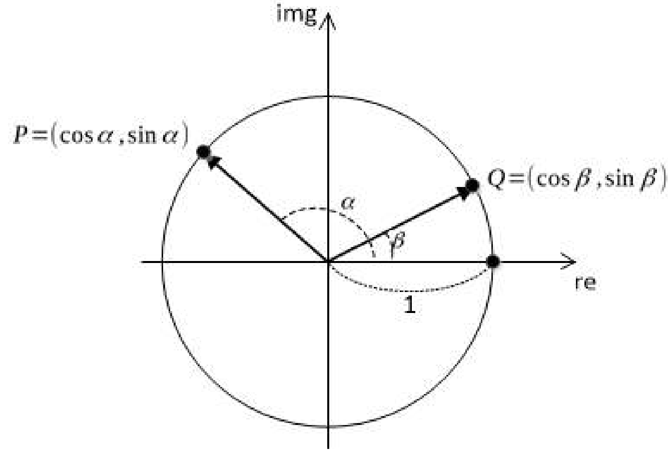
(식5-91e)가 복소수의 내적의 정의이므로 복소수 v와 w의 내적을 계산하면 (식5-91f)와 같습니다.

$$\begin{aligned} v \cdot w &= w^{*}v = (c-di)(a+bi) \quad \text{(식5-91f)} \\ &= ac + bci - adi - bdi^2 \\ &= (ac+bd) - (ad-bc)i \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \times \vec{w})i \end{aligned}$$

(식5-91f)를 보면, 복소수의 내적 계산에서 안쪽(inner) 실수부는 데카르트 공간에서의 내적(inner product), 바깥쪽(outer) 허수부는 데카르트 공간에서의 외적(outer product) 성분을 가지는 것을 알 수 있습니다.

벡터를 행벡터로 표현한 경우, 행렬의 곱셈으로 나타내기 위해서는 w^{*}의 전치행렬과 v를 곱해야 합니다. $(w^{*})^{T} = w^{H}$로 나타내면, $v \cdot w = w^{*}v = w^{H}v$입니다.

이제 복소평면상에서 원점과의 길이가 항상 1인 단위원(unity circle) 위에 위치하는 복소수를 고려해 봅시다. 각 복소수를 P, Q라고 하고, 반시계 방향으로 각각 α, β만큼 회전되었다고 가정해 봅시다. 이것을 (그림5-51)에 나타내었습니다.



(그림5-51) 복소평면의 단위원에 두 개의 복소수 P와 Q를 나타내었습니

다.

P와 Q는 (식5-92)처럼 정의됩니다.

$$P=(\cos\alpha, \sin\alpha) \text{ (식5-92)}$$
$$Q=(\cos\beta, \sin\beta) \text{ (식5-92b)}$$

두 복소수 P와 Q를 곱하면, (식5-93)과 같은 결과를 얻습니다.

$$\begin{aligned} PQ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned} \quad \text{(식5-93)}$$

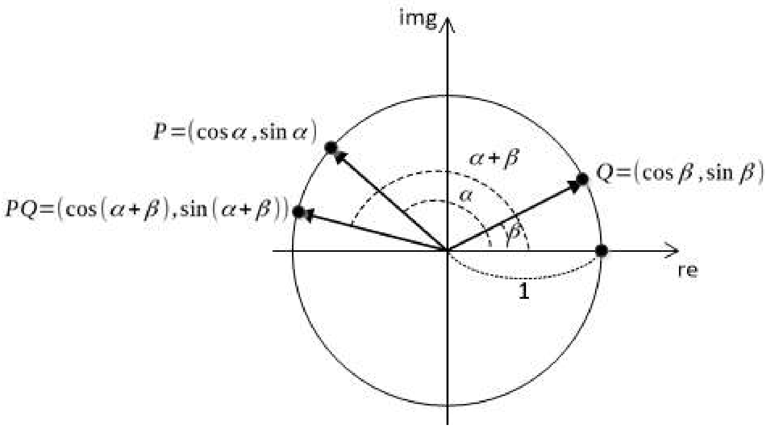
4장 삼각함수에서 $\cos, \sin$ 함수의 합과 차의 법칙을 증명한 적이 있습니다. 그 법칙이 복소수의 곱셈의 결과를 간단하게 하는데 사용되기 때문에, 다시 적어 보겠습니다. $\cos, \sin$ 함수의 파라미터가 두 개의 값 α, β의 합으로 표현된 경우, ***각의 합과 차의 법칙(the angle addition and subtraction theorems)***은 다음 (식5-94)와 같습니다.

$$\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \text{ (식5-94, 허수부)}}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \text{ (식5-94b)}$$
$$\underline{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \text{ (식5-94c, 실수부)}}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \text{ (식5-94d)}$$

복소수 곱셈의 결과에서 (식5-93)의 실수부는 (식5-94c)에 의해 $\cos(\alpha+\beta)$로 간단히 되고, 허수부는 (식5-94)에 의해 $\sin(\alpha+\beta)$로 간단히 됩니다. 그러므로 P와 Q의 곱셈의 결과는 (식5-95)와 같습니다.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$
(식5-95)

곱셈의 결과를 복소평면에 나타내면 (그림5-52)와 같습니다.



(그림5-52) PQ의 결과는 P를 Q가 나타내는 각 β만큼 회전한 점의 위치입니다.

복소수의 곱셈의 결과인 (식5-95)를 보면, 길이가 1인 단위원 상의 두 복소수를 곱하면, 길이는 바뀌지 않고 각 복소수가 나타내는 회전 값을 더한 결과를 얻은 것을 알 수 있습니다. P가 의미하는 회전 값이 α이고, Q가 의미하는 회전 값이 β이므로 PQ는 회전 값 $(\alpha+\beta)$를 의미하는 복소수가 되는 것입니다. 이것이 복소수 곱셈의 의미입니다!

복소수의 곱셈에서 실수부는 내적과 관련이 있으므로, (식5-95)를 보면 실수부에 $\cos$함수가 사용되었고, 허수부는 외적과 상관이 있으므로 허수부에 $\sin$함수가 사용된 것을 알 수 있습니다. (그림

5-15)를 보면서 다시 한번 내적과 외적의 직관에 대해서 머리속에서 정리해 보시기 바랍니다.

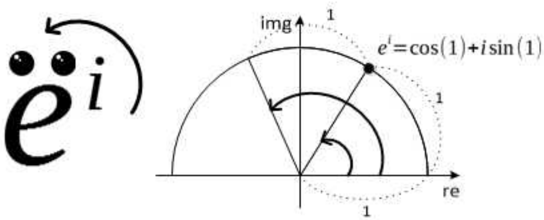
오일러의 공식(Euler's Formula)

무언가를 곱하면, 더한 결과를 얻는 것은 우리가 이미 지수함수에서 살펴보았습니다. 그것은 복소수의 곱셈이 지수함수와 관련이 있다는 의미입니다. 지수 a^n과 a^m을 곱하면 $a^n a^m = a^{n+m}$이 됩니다. 수학자 오일러(Euler)는 이러한 성질을 바탕으로 복소수 $\cos\theta + i\sin\theta$를 $e^{i\theta}$로 나타낼 수 있다는 것을 알아내었습니다. 이것을 (식5-96)으로 나타낼 수 있는데, 이것을 ***오일러의 공식(Euler's Formula)***이라고 합니다.

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$ (식5-96, 오일러의 공식)

(식5-96)은 매우 놀랍습니다. ***모든 기본함수를 포함하고 있고, 모든 기본수를 포함하고 있으며, 기본수를 유도하는 과정에서 사용했던 미분의 개념을 포함하고 있으며, 벡터의 내적과 외적의 개념을 포함하고 있으며, 복소수입니다!***

(식5-96)은 또한 매우 당황스럽습니다. 지수 자리에 i가 사용되었기 때문입니다. e를 i번 곱한다는 것은 어떤 의미일까요?



(그림5-53) 지수위치에 사용된 허수(imaginary number)는 복소수를 의미합니다. 복소수의 곱셈은 회전을 의미합니다. e^i는 복소평면 상에서 1라

디안(radian)회전을 의미하는 복소수입니다.

지수자리에 허수가 사용되었을 때, 이것에 대한 직관을 가지는 것은 매우 중요합니다. ***허수가 지수위치에 사용되면, 그것은 복소수와 회전을 의미합니다.*** e^i는 복소평면에서 1라디안(radian)회전을 의미하는 복소수 $\cos(1)+isin(1)$입니다. $e^ie^i=e^{2i}$는 2라디안 회전된 복소수를 의미합니다. 오일러의 공식에서 θ대신에 π를 대입하면 식은 다음과 같이 (식5-97)로 정리됩니다.

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos(\pi)+i\sin(\pi) \quad \text{(식5-97)} \\ &= -1+0 \end{aligned}$$

(식5-97)을 다시 정리하면, (식5-98)을 얻을 수 있는데, 이것을 ***오일러의 항등식(Euler's Identity)***라고 합니다.

$$e^{i\pi}+1=0 \quad \text{(식5-98, 오일러의 항등식)}$$

오일러의 공식을 이용하면, 복소수가 나타내는 연속적인 회전을 쉽게 나타낼 수 있습니다. 반시계 방향으로 각각 α, β만큼 회전하는 복소수는 $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$입니다. 두 복소수가 주어졌을 때, $\alpha+\beta$만큼 회전하기 위해서는 $e^{i\alpha}$와 $e^{i\beta}$를 곱합니다. $e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$가 됩니다. 복소수가 아닌 수 b와 복소수 $e^{i\alpha}$의 곱도 밑을 e로 하는 지수 형태로 나타내는 것이 가능합니다. 로그 함수의 정의에 의해 임의의 수 b에 대해 $b=e^{\ln b}$입니다. 그러므로 $be^{i\alpha}$를 (식5-98c)처럼 나타낼 수 있습니다.

$$b=e^{\ln b} \quad \text{(식5-98b)}$$

$$be^{i\alpha}=e^{\ln b}e^{i\alpha}=e^{\ln b+i\alpha} \quad \text{(식5-98c)}$$

(식5-98c)를 보면 지수 위치에 순수허수가 아니라 복소수가 사용되었습니다. 이것을 어떻게 해석할 수 있을까요? 예를 들면 허수자리에 $a+bi$를 사용한 e^{a+bi}는 어떻게 해석해야 할까요?

$$e^{a+bi}=e^{a}e^{bi} \quad \text{(식5-98d)}$$

e^{bi}는 $\cos(b)+isin(b)$이므로 b 라디안 만큼의 회전을 의미합니다. 그 복소수에 e^{a}를 곱했으므로, 방향은 유지하면서, 길이를 e^{a} 만큼 변경시킨다는 의미입니다. 이해를 쉽게하기 위해 θ만큼 회전한 복소벡터의 길이를 a만큼 변경하는 변환은 복소수 $\ln a+i\theta$를 사용하여 (식5-98e)와 같이 쓸 수 있습니다.

$$e^{\ln a+i\theta}=e^{\ln a}e^{i\theta}=ae^{i\theta} \quad \text{(식5-98e)}$$

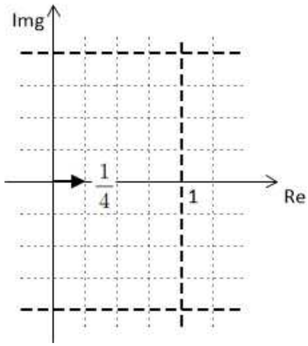
우리는 함수를 정의할 때마다 함수를 그리는 방법을 함께 살펴보았습니다. 이제 지수 위치에 복소수를 가진 식을 그리는 방법을 살펴보도록 하겠습니다. 예를 들면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2+i}$는 복소평면상의 위치를 어떻게 구할 수 있을까요? 지수부분이 복소수인 경우, 복소벡터의 길이와 회전한 정도를 알기 위해서 입력을 $ae^{i\theta}$형태로 변환합니다. 그러면 길이가 a이면서 θ 라디안 회전한 복소벡터를 복소평면상에 그릴 수 있습니다.

$$\ln\frac{1}{2}=\ln 2^{-1}=-\ln(2) \quad \text{(식5-98f)}$$

$$\frac{1}{2}=e^{\ln\frac{1}{2}}=e^{-\ln 2} \quad \text{(식5-98g)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2+i} = \frac{1}{2}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(e^{-\ln 2}\right)^{i} = \frac{1}{4}e^{(-\ln 2)i} \quad \text{(식5-98h)}$$

(식5-98f)와 (식5-98g)는 로그함수의 성질을 상기하기 위해 적은 식입니다. 그러면 최종 (식5-98h)를 유도할 수 있습니다. 이 식의 의미는 길이가 $1/4$이면서 $-\ln 2$라디안 회전을 의미하는 복소수입니다. 먼저 길이가 $1/4$이면서 회전하지 않은 복소수는 실수이므로, (그림5-53a1)처럼 벡터로 나타낼 수 있습니다.



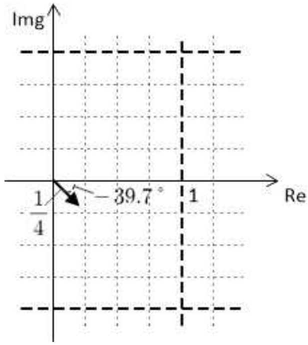
(그림5-53a1) 복소수 $1/4$는 실수축 상에 위치합니다.

$-\ln 2$라디안을 계산기로 계산하면 (식5-99i)와 같이 약 -39.7°입니다.

$$\pi\, rad = 180^\circ$$
$$1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$
$$-\ln(2)\, rad = -\ln(2)\left(\frac{180}{\pi}\right) \approx -39.7^\circ \quad \text{(식5-99i)}$$

이제 길이가 0.25($=1/4$)인 복소수를 약 -39.7° 도 회전한 위치

를 복소평면상에 그릴 수 있습니다.



(그림5-53a2) 복소수 $(1/4)e^{(-\ln 2)i}$는 길이가 $1/4$이면서 $-\ln 2$라디안 (=$-39.7°$) 회전한 위치입니다.

회전한 정도 α와 길이를 사용하여 좌표를 나타내는 것을 ***극좌표(polar coordinate)***라고 하는데, 지수 위치에 복소수가 있으면, 극좌표를 사용하여 위치를 나타내는 것을 알 수 있습니다.

오일러 공식의 증명

(식5-96) 오일러의 공식은 몇 가지 방법으로 증명할 수 있는데, 테일러 시리즈(Taylor Series)를 사용하지 않고 증명하는 방법을 사용해 보겠습니다.

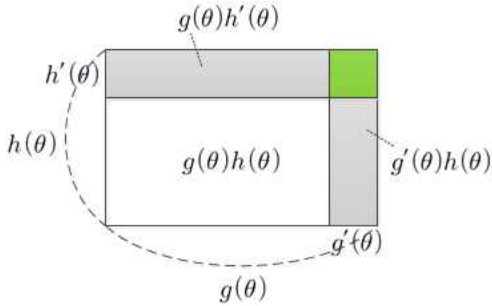
필자가 이 절 – 오일러의 공식 - 의 원고를 완성하고, 계속해서 읽으면서 오일러의 공식에 대한 증명을 쉽게 설명하려고 수정하고 수정했습니다. 하지만, 미분(differentiation)에 대한 이해가 약한 분들에게 어렵게 느껴질 수 있습니다. 그것은 독자들의 이해력이 떨어져서가 아니라, 미분을 깊이 있게 다루지 않았기 때문이므로 이 절의 내용이 이해가 되지 않는 분은 건너뛰어도 무방합니다.

오일러 공식을 증명하기 위해 함수 g와 h를 (식5-99), (식5-99b)와 같이 정의하고, 합성함수 f를 (식5-99c)와 같이 정의합니다.

$$g(\theta) = e^{-i\theta} \quad \text{(식5-99)}$$
$$h(\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(식5-99b)}$$
$$f(\theta) = g(\theta)h(\theta) = e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(식5-99c)}$$

함수 f에 대해서 접하는 미분함수(직선의 기울기를 리턴하는 함수)를 구합니다. f의 미분함수를 구하기 위해서는 미분의 공식 중에서 ***곱의 법칙(product rule)과 연쇄 법칙(chain rule, 체인 룰)***을 알아야 합니다. 합성 함수 f의 미분은 (식5-100)과 같이 구할 수 있는데, 이것을 곱의 법칙이라고 합니다.

$$f(\theta) = e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(식5-99d)}$$
$$f'(\theta) = g'(\theta)h(\theta) + g(\theta)h'(\theta) \quad \text{(식5-100, 곱의 법칙)}$$



(그림5-53b) 곱의 법칙(product rule): $f(\theta) = g(\theta)h(\theta)$가 주어졌을 때, θ에 대해서 미분한다는 것은, θ가 아주 조금 변했을 때, $g(\theta)$와 $h(\theta)$가 이루는 도형의 면적을 구하는 것으로 생각할 수 있습니다. θ가 무한대로 조금 변하면, 이 면적은 $g'(\theta)h(\theta) + g(\theta)h'(\theta)$와 같습니다.

(식5-100)을 구하기 위해 g'과 h'을 구해야 합니다. 구하는 과정은 뒤에서 증명하기로 하고, 결과를 적으면 (식5-101), (식5-102)와 같습니다.

$$g'(\theta) = -ie^{-i\theta} \quad \text{(식5-101)}$$
$$h'(\theta) = (-\sin(\theta) + i\cos(\theta)) \quad \text{(식5-102)}$$

(식5-101), (식5-102)를 곱의법칙 (식5-100)을 이용하여 전개합니다.

$$f'(\theta) = -ie^{-i\theta}(\cos(\theta) + i\sin(\theta) + e^{-i\theta}(-\sin(\theta) + i\cos(\theta))$$
$$f'(\theta) = e^{-i\theta}(-i\cos(\theta) - i^2\sin(\theta) - \sin(\theta) + i\cos(\theta))$$
$$f'(\theta) = e^{-i\theta}(-i\cos(\theta) + \sin(\theta) - \sin(\theta) + i\cos(\theta))$$

최종적으로 (식5-103)을 얻습니다.

$$f'(\theta) = e^{-i\theta}(0) = 0 \quad \text{(식5-103)}$$

(식5-103)을 보면 $f'(\theta)$의 결과가 0이 되는 것을 알 수 있습니다. 미분 함수의 결과가 0이라는 것은 원래 함수 f가 모든 입력에 대해서 기울기가 0인 ***상수함수(constant function)***라는 의미입니다. 이것을 (식5-104)에 나타내었습니다. $\forall$는 모든(for all)을 의미하는 기호입니다.

$$f(\theta) = k, \forall\theta \quad \text{(식5-104)}$$

$f(\theta)$는 모든($\forall$) θ에 대해 어떤 상수 값 k를 가지는 함수입니다. 이 결과를 이용해서 (식5-99d)를 다시 쓰면 (식5-105)와 같습

니다.

$$e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = k, \forall\theta$$ (식5-105)

(식5-105)는 모든 θ에 대해서 성립하므로 임의의 θ값을 대입할 수 있는데, $\theta = 0$이라고 가정하고 식을 정리합니다.

$$e^{-i(0)}(\cos(0) + i\sin(0)) = e^{0}(1+0) = 1(1+0) = 1 = k$$
$$e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = 1$$

최종적으로 (식5-106) 오일러 공식이 성립하는 것을 알 수 있습니다.

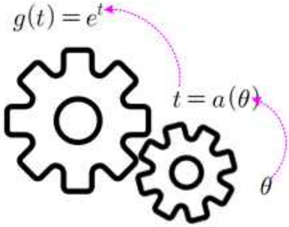
$$(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}$$ (식5-106)

이제 (식5-101) 및 (식5-102)의 $g'(\theta)$와 $h'(\theta)$를 유도한 과정을 살펴봅시다. 미분함수 (식5-102)를 유도하는 과정은 우리가 이 책에서 다룬 내용이므로 비교적 쉽게 이해할 수 있습니다. $\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$ 이고, $(i\sin(\theta))' = i\sin'(\theta) = i(\cos(\theta))$ 입니다. 그리고 (식5-101)은 ***연쇄법칙(chain rule)***을 사용해야 하는데, 연쇄법칙은 '무한에 대한 직관'으로 이해할 수 있습니다.

함수 (식5-107)이 주어졌을 때, 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수는 (식5-108)과 같이 주어집니다.

$$g(\theta) = e^{-i\theta}$$ (식5-107)

$$g'(\theta) = -ie^{-i\theta}$$ (식5-108)



(그림5-53c) 연쇄법칙: θ가 조금 변했을 때 이 값이 t를 조금 변하게 만듭니다. t는 $g(t)$를 조금 변하게 만듭니다.

함수 $g(\theta)=e^{-i\theta}$에 대해 접하는 직선의 기울기를 찾기 위해 무한에 대한 직관을 이용합니다. 우리는 지수함수 e^x의 접선의 기울기를 구하는 함수는 e^x 자신인 것을 이미 알고 있습니다. 이제 $e^{-i\theta}$의 $-i\theta$부분을 t라고 둡니다. 그러면 $(\theta+h)$에 대해 무한대로 $h\to 0$일 때, $-i\theta$의 변한 정도, $d(-i\theta)/d\theta=t'$을 알 수 있습니다. 그러면 t가 무한대로 작게 증가한 어떤 값인데, 그러한 t에 대해 e^t가 변한 정도의 비율을 구하면 접선(tangent line)의 기울기입니다. 이것을 일반적인 공식으로 나타내면 (식5-109b)와 같습니다.

$$g(\theta)=b(t)=b(a(\theta)) \quad \text{(식5-109)}$$
$$g'(\theta)=a'(\theta)b'(t)=a'(\theta)b'(a(\theta)) \quad \text{(식5-109b, } \textbf{\textit{연쇄법칙}}\text{)}$$

$a(\theta)=-i\theta$, $b(t)=e^t$라고 두고 연쇄법칙을 적용합니다.

$$t=a(\theta)=-i\theta \quad \text{(식5-109c)}$$
$$b(t)=e^t \quad \text{(식5-110)}$$

(식5-109c)에 대해 θ에 대한 미분은 $a'(\theta)=(-i\theta)'=-i$ 입니다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a(\theta+h)-a(\theta))}{h}=-i \quad \text{(식5-111)}$$

(식5-110)에 대해 t에 대한 미분은 $b'(t)=(e^t)'=e^t$ 입니다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(b(t+h)-b(t))}{h}=e^t \quad \text{(식5-112)}$$

a'과 b'을 구했으므로, 연쇄법칙 (식5-109b)를 적용합니다. (식5-111)과 (식5-112)를 (식5-109b)에 대입하면 (식5-113)을 얻을 수 있습니다.

$$g'(\theta)=a'(\theta)b'(t)=-ie^t=-ie^{-i\theta} \quad \text{(식5-113)}$$

이것으로 (식5-101)이 성립하는 것을 증명했고, 오일러의 공식이 참인 것을 증명했습니다. 우리는 마침내 기본함수와 기본수의 관계를 기술하는 아름다운 식을 찾았고 이해하게 되었습니다!

아름다운 오일러 공식의 응용

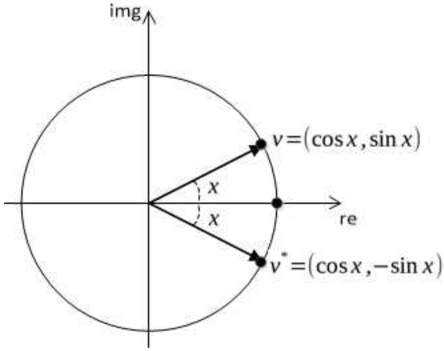
오일러의 공식에서 지수 위치에 음수(minus) 기호가 사용된 e^{-ix}는 어떤 의미일까요? 오일러 공식을 사용해서 적으면 (식5-113b)와 같습니다.

$$e^{-ix}=e^{i(-x)}=\cos(-x)+i\sin(-x) \quad \text{(식5-113b)}$$

$\cos(-x)=\cos(x)$이고 $\sin(-x)=-\sin(x)$이므로 (식5-113b)는 다음 (식5-113c)와 같이 적을 수 있습니다.

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(x) - i\sin(x)$$ (식5-113c)

복소수 $v = \cos x + i\sin x$라고 하면, (식5-113c)는 v의 ***켤레복소수(complex conjugate)*** $\bar{v} = v^* = \cos x - i\sin x$입니다. 켤레복소수는 허수부의 부호가 바뀐 복소수에 대한 정의입니다.



(그림5-53d) $v^* v$는 $-x$회전 이후에 $+x$회전을 의미하므로, 복소수가 항상 실수축에 머물게 됩니다. 복소수가 실수축에 머물면 허수를 제거할 수 있습니다.

켤레복소수는 복소평면에서 x-축을 중심으로 대칭되는 성질을 가집니다. $v*$와 v를 곱하면, $-x$회전 이후에 $+x$회전을 의미하므로, 복소수가 항상 실수축에 머물게 됩니다. 이 성질은 매우 중요한데, 복소수가 실수축에 위치하면, 허수 i를 제거할 수 있기 때문입니다. (식5-113d), (식5-113e)는 단위원에 위치하는 임의의 복소수에 대해, 켤레복소수와의 곱은 1이 되는 것을 보여줍니다.

$$v^* v = e^{-ix} e^{ix} = e^{-ix+ix} = e^0 = 1$$ (식5-113d)

$$v^* v = (\cos x - i\sin x)(\cos x + i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(식5-113e)

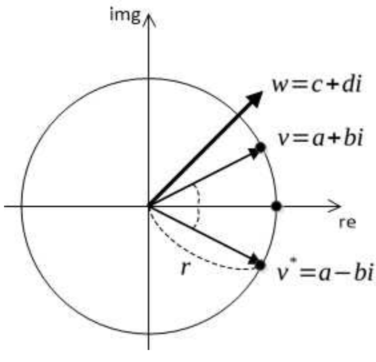
이제 임의의 복소수 $w = c + di$에 대해, $v^{*}wv$가 어떤 의미를 가지는지 파악해 봅시다. 식의 결과는 (식5-113f)와 같이 w자신이 되는 것을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned} v^{*}wv &= (\cos x - i\sin x)(c+di)(\cos x + i\sin x) \\ &= (\cos x - i\sin x)(\cos x + i\sin x)(c+di) \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(c+di) = 1(c+di) = c+di \end{aligned} \quad \text{(식5-113f)}$$

$v^{*}wv = w$가 되는 것은 오일러의 공식을 이용하면 더욱 직관적입니다. (식5-113g)를 보세요.

$$v^{*}wv = e^{-ix}(c+di)e^{ix} = e^{-ix}e^{ix}(c+di) = c+di \quad \text{(식5-113g)}$$

v를 길이가 1인 복소수라고 가정하지 않고, 임의의 두 복소수 v와 w에 대해서 $v^{*}wv$가 어떤 의미를 가지는지 파악해 보도록 하겠습니다.



(그림5-53e) $v = a + bi$와 $w = c + di$에 대해 $v^{*}v$의 중간에 w를 위치

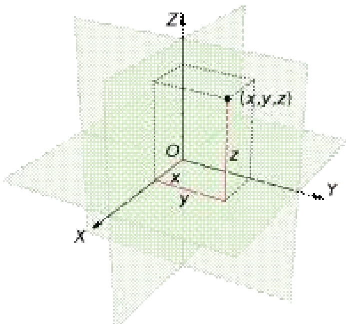
시켜서 $v^{*}wv$의 의미를 파악하려고 합니다.

복소수 $v=a+bi$와 $w=c+di$를 (그림5-53e)에 나타내었습니다. 복소수 $v=(a,b)$와 원점과의 거리를 $r=\sqrt{a^2+b^2}$이라고 합시다. 복소수 내적의 정의에 의해 $r=|v|=\sqrt{v\cdot v}=\sqrt{v^{*}v}$입니다.

$$v=a+bi \quad \text{(식5-113h)}$$
$$w=c+di \quad \text{(식5-113i)}$$
$$r=|v|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{(식5-113j)}$$

v와 w에 대해 $v^{*}wv$를 계산하면 (식5-113k)와 같습니다.

$$\begin{aligned} v^{*}wv &= (a-bi)(c+di)(a+bi) \quad \text{(식5-113k)} \\ &= (a-bi)(a+bi)(c+di) \\ &= (a^2+b^2)(c+di) \\ &= r^2(c+di) \end{aligned}$$

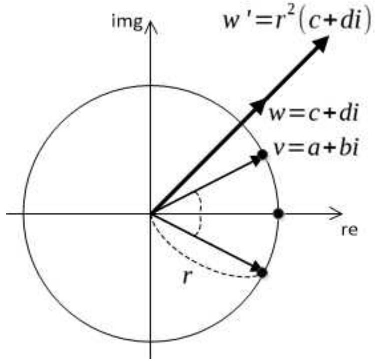


(그림5-53e2) 모든 축이 서로 직교하는 굽지 않은 공간을 유클리드 공간이라고 합니다.

(식5-113k)를 보면 v^*와 v의 곱 사이에 w를 두면, w에 v가 나타내는 길이 r의 제곱값인, r^2을 곱한 새로운 복소수가 되는 것을 알 수 있습니다. 이것을 (그림5-53f)에 나타내었습니다.

$$w' = v^* wv = v^*(c+di)v = v^* v(c+di) = r^2(c+di) \quad \text{(식5-113m)}$$

$v^* wv$의 결과가 w의 방향을 그대로 유지하면서, 크기만 바꾸는 것은 매우 유용한 성질입니다. 이제 w가 복소수가 아니었고, ***유클리드 공간(Euclidean space)***의 벡터 $\vec{w} = (c, d)$를 복소수 $w = c + di$로 나타낸 것이라고 가정해 봅시다.



(그림5-53f) $v = a + bi$와 $w = c + di$에 대해 $v^* wv$는 복소평면에서 $\vec{w}$의 방향은 유지한 채로 크기요소(scalar)를 바꾼 복소수를 의미합니다. $v^* wv$는 $|v|^2 w$를 의미합니다.

그러면 $v^* wv$는 벡터 $\vec{w} = (c, d)$의 크기를 r^2만큼 바꾸는 변환으로 동작하는 것을 알 수 있습니다. 하지만 이렇게 사용하기 위해서는 $v^* wv$의 결과 $r^2(c+di)$를 다시 유클리드 공간의 벡터인 $(r^2 c, r^2 d)$로 변경해 주어야 합니다.

$v^* wv$ 형태의 식이 가지는 성질은 매우 유용한데, 식의 유용함을 살펴보도록 하겠습니다. 어떤 임의의 실수 s,t와 x에 대해, 실수 s와 복소수 v의 곱은 sv입니다. 그런데 sv는 복소수이므로 e^{ix}형태로 나타낼 수 있습니다. 어떤 값을 e^{ix}형태로 나타내면, 오일러의 공식에 의해, 변량의 곱의 형태가 합의 형태(선형)로 표현되므로 다루기가 쉬워집니다. sv는 미분이 힘들지만, $s+v$는 ***미분의 선형성(linearity)***에 의해 각 항을 미분하면 되므로 계산이 쉽습니다.

$$sv = e^{ix} \quad \text{(식5-113n)}$$

(식5-113n)은 다루기가 쉽지만, 여전히 허수 i를 포함하므로, 실제 결과를 공학적인 용도로 사용할 수는 없습니다. 그런데 v^*를 sv와 곱하면, 원래 s의 성질이 그대로 유지되면서 크기 요소만 변경된 새로운 t를 얻을 수 있습니다. t는 허수를 포함하지 않으므로 실제 공학적인 계산의 대상이 됩니다.

$$t = v^* (sv) = v^* sv \quad \text{(식5-113o)}$$

이러한 성질은 이제 다음과 같이 이용할 수 있습니다. 임의의 데이터 s(s가 꼭 실수일 필요는 없습니다)에 대해 s를 복소수를 사용하여 (as, bs)로 인코딩(encoding)하도록 정의합니다. 지금 예에서는 간단한 인코딩 규칙을 사용했는데, 대상 데이터 s를 두개의 요소로 구성된 벡터로 만들면서, 실수부에는 a를 곱하고, 허수부에는 b를 곱한 것입니다.

$$s \ \rightarrow \ (as, bs) = ab + ibs \quad \text{(식5-113-1, 인코딩)}$$

그러면 s는 $s' = as + ibs$로 인코딩됩니다. 이제 s'와 v를 곱하면

v가 s'에 대해 어떤 변환을 수행한다고 가정해 봅시다. v는 원래 데이터 s에 대해서는 변환 적용이 불가능하므로 s를 s'으로 인코딩하는 것입니다. 그 결과를 s''이라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$s' = (as, bs) = as + ibs \quad a, b \in R \quad \text{(식5-113-2)}$$
$$s'' = s'v$$

위 결과에서 s''은 s'에 대해서 v공간으로 변환된 데이터이므로 결과를 바로 사용할 수 없습니다. 그런데 s''을 v공간으로 변환되기 전의 공간으로 다시 가져올 수 있으면, 인코딩 결과가 의미가 있으므로, 이 값을 디코딩(decoding)하여 결과를 사용하는 것이 가능해 집니다. s''을 다시 원래 인코딩 공간으로 가져오기 위해서 v^*와 곱해서 $v^* s''$을 계산합니다. 계산 결과를 s'''이라고 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$s''' = v^* s' v \quad \text{(식5-113-3)}$$
$$s''' = (at, bt) \rightarrow t \quad \text{(식5-113-4, 디코딩)}$$

위 (식5-113-3)에서 s'''이 (at, bt)를 가진다고 생각해 봅시다. 그러면, s'''을 디코딩하면 실수부에서 계수 a를 제거하고, 허수부에서 계수 b를 제거하면 t를 얻는데, 이 값을 계산의 결과로 사용하는 것입니다.

이러한 기법의 실제 예로, 푸리에 변환(Fourier Transform)이나 쿼터니언(quaternion, 사원수), 행렬의 대각화(diagonalization) 계산을 들 수 있는데, 쿼터니언 계산의 예를 6장에서 살펴보도록 하겠습니다.

오일러의 공식을 이용하면 삼각함수를 사용하지 않고도, 삼각함

수를 계산할 수 있습니다. 예를 들면, e^{ix}와 e^{-ix}를 더하면 $\cos x$를 계산할 수 있습니다. 이것을 (식5-113p)에 나타내었습니다.

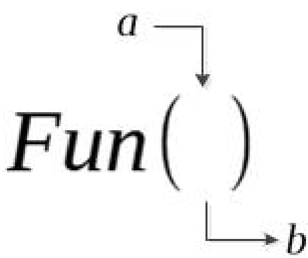
$$e^{ix}+e^{-ix}=(\cos(x)+i\sin(x))+(\cos(x)-i\sin(x))=2\cos(x)$$

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{(식5-113p)}$$

필자는 책의 머리말에서 오일러 공식이 우주의 비밀과 관련이 있다고 했습니다. 소수(prime number)의 규칙성과 관련된 수식은 양자역학에서 소립자들의 운동을 나타내는 방정식과 관련이 있습니다. 그런데 소수의 규칙은 오일러 공식에 사용된 π와 관련이 있습니다. 이것에 대한 기본적인 아이디어는 ***리만 제타 함수 (Riemann Zeta Function)***에서 살펴보도록 하겠습니다.

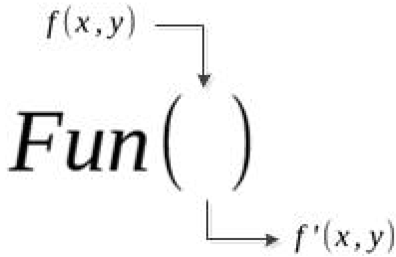
함수 개념의 확장

우리는 수(number)를 정의하고, 수를 입력으로 받아 수를 리턴하는 기본 함수들을 정의했습니다. 기본 함수가 하나의 실수를 리턴하는 경우, ***스칼라 함수(Scalar Valued Function)***라고 합니다.



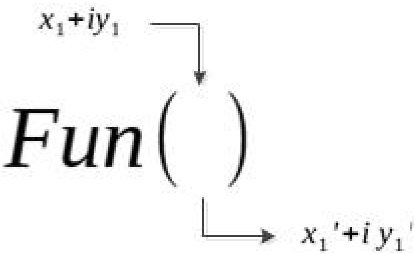
(그림5-53g) 스칼라 함수(Scalar Valued Function)는 실수를 입력으로 받아 실수를 리턴합니다.

접하는 직선의 기울기를 구하는 과정은, 함수를 입력으로 받아, 함수를 리턴하는 함수라고 생각할 수 있습니다. 예를 들면 x^2의 미분 함수는 $2x$인데, 미분 함수를 구하는 함수는 입력 x^2에 대해 $2x$를 출력하는 함수라고 가정하는 것입니다.



(그림5-53h) 미분(Differentiation) 함수를 구하는 과정을 함수를 입력으로 받아 함수를 구하는 함수로 생각할 수 있습니다.

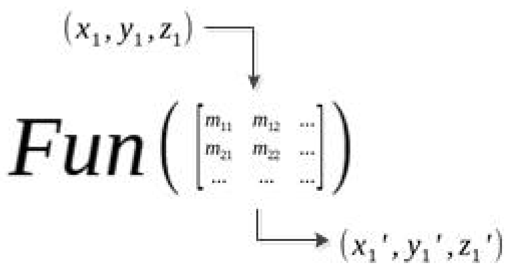
이러한 함수의 정의는 우리가 새로운 수학적 대상을 발견할 때마다 확장될 수 있습니다. 우리는 파워함수의 역함수를 정의하는 과정에서 ***복소수(Complex Number)***를 정의했습니다. 그러면 복소수를 입력으로 받아, 복소수를 리턴하는 복소함수를 정의할 수 있습니다.



(그림5-53i) 복소함수(Complex valued function)는 복소수를 독립변

수로 받아, 복소수를 리턴하는 함수입니다.

우리는 또한, 크기와 방향을 가지는 벡터(Vector)에 대해서 동작하는 함수를 정의했습니다. 벡터를 입력으로 받아 벡터를 리턴하는 함수는 내부 연산에서 행렬(Matrix)을 사용해야 합니다. 이러한 행렬이 입력 벡터의 좌표를 다른 좌표계로 변환하는데 사용되면, ***변환 행렬(Transform Matrix)***라고 합니다.



(그림5-53j) 벡터 함수(Vector valued function)는 벡터를 리턴합니다. 함수의 내부는 행렬 연산을 수행합니다.

벡터의 개념을 복소평면(Complex Plane)에 적용할 수 있습니다. 그러면, 벡터의 각 요소가 복소수인 ***복소 벡터(Complex Vector)***가 정의됩니다.

$$(x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2)$$

복소평면은 하나의 허수축과 하나의 실수축을 사용합니다. 우리는 복소평면의 개념을 보다 높은 차원으로 확장할 수 있습니다. 복소수 i이외에 제곱하면 -1이 되는 다른 복소수 j와 k가 있다고 가정해 봅시다. 그러면 i,j와 k는 다음 성질을 만족합니다.

$$
\begin{aligned}
i^2 &= -1 \\
j^2 &= -1 \\
k^2 &= -1
\end{aligned}
$$

i,j,k 및 하나의 실수축을 사용하는 사차원 공간의 점(Point)을 수(Number)로 간주할 수 있는데 이러한 수를 ***쿼터니언 (quaternion, 사원수)***이라고 합니다. 쿼터니언은 아래의 식으로 표현할 수 있습니다.

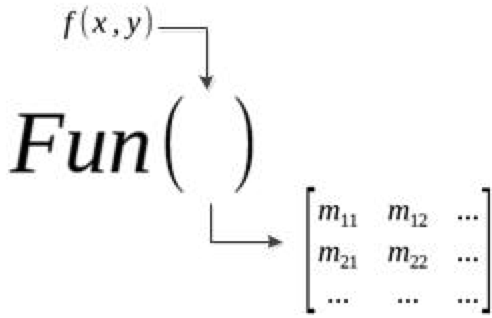
$$w + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (w,a,b,c)$$

사실 복소수는 쿼터니언의 특별한 경우입니다. 복소수가 이차원 공간에서 회전을 나타내듯이, 쿼터니언을 사용하면 삼차원 공간에서 회전을 나타낼 수 있으므로, 컴퓨터 그래픽스에서는 필수적으로 사용해야 합니다.

우리는 함수의 출력을 무한의 개념으로 확장할 수 있습니다. 독립변수 x,y를 가지는 함수가 주어졌을 때, 모든 입력 조합 (x,y)에 대한 출력을 구한다고 가정해 봅시다. 예를 들면 다음과 같은 삼각함수가 주어졌습니다.

$$\sin(2\pi(xy))$$

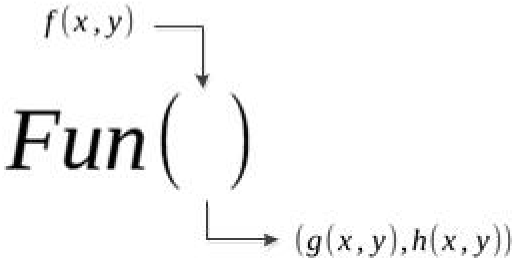
이 함수에 대해 모든 입력 조합 (x,y)에 대해서 함수의 출력값을 계산하는 것은 함수가 무한 차원의 행렬을 리턴하는 것입니다.



(그림5-53k) 스칼라 필드(Scalar Field)는 무한 차원의 행렬을 리턴하는 함수의 출력값입니다.

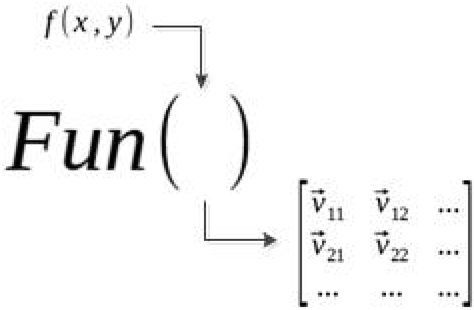
리턴되는 무한차원의 행렬의 요소가 모두 스칼라인 경우, 이것을 ***스칼라 필드(Scalar Field)***라고 합니다. 스칼라 필드를 표현하는 방법 중 하나는 입력의 범위를 제한하고, 각 (x,y)에 대한 함수의 출력을 색(Color)으로 표현하는 것입니다. $\sin(2\pi(xy))$ 함수에 대한 스칼라 필드는 (그림5-56)처럼 표현할 수 있습니다.

함수를 입력으로 받아, 모든 요소가 함수인 벡터를 리턴하는 함수도 생각해 볼 수 있습니다. (그림5-)는 함수 $f(x,y)$를 입력으로 받아, $(g(x,y),h(x,y))$ 벡터를 리턴하는 함수입니다.



(그림5-53l) 함수를 입력으로 받아, 벡터의 요소가 함수인 벡터를 리턴합니다.

리턴되는 벡터의 요소가 모두 함수이므로, 이것은 모든 요소가 벡터인 무한 차원의 행렬이라고 가정할 수 있습니다. 이것을 ***벡터 필드(Vector Field)***라고 합니다.

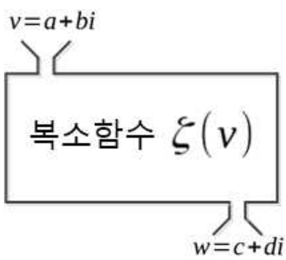


(그림5-53m) 벡터필드(Vector Field)는 주어진 함수의 모든 입력조합에 대한 출력이 벡터로 구성됩니다.

벡터필드의 예는 (그림5-57)을 참고하기 바랍니다.

소수(prime number)의 규칙과 오일러 공식

복소수의 연산을 이해하면, 이제 ***복소함수(function of a complex number)***를 정의할 수 있습니다. 복소함수는 입력으로 복소수를 받아서, 복소수를 리턴하는 함수입니다.



(그림5-53n) 복소함수(complex valued function)는 복소수를 입력으로 받아 복소수를 리턴합니다.

복소함수 중에서 ***리만(Bernhard Riemann)***이라는 수학자가 그리스 문자 ***제타(zeta, ζ)***를 사용해서 정의한 ***리만 제타 함수(Riemann Zeta Function)***가 있습니다. 정의는 (식5-113q)와 같습니다.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots \quad \text{(식5-113q)}$$

(식5-113q)를 항(term)들의 합을 나타내는 $\sum$(시그마, sigma)기호로 나타내면 (식5-113r)과 같습니다.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots \quad \text{(식5-113r)}$$

리만 제타 함수(Riemann Zeta Function)를 이용하여 $\zeta(2)$를 계산하면 다음 (식5-113s)와 같습니다.

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \quad \text{(식5-113s)}$$

그런데, $\zeta(2)$ 함수는 π와 상관이 있는데, 그것은 (식5-113t)와 같습니다.

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \quad \text{(식5-113t)}$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

또한 $6/\pi^2$는 소수와 관련이 있다는 것이 밝혀졌는데, 그것은 (식5-113u)와 같습니다.

$$\frac{6}{\pi^2}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\cdots \quad \text{(식5-113u)}$$

항(term)들의 곱을 의미하는 Π를 사용하여 (식5-113u)를 나타내면 (식5-113v)와 같은데 이것을 ***오일러 곱(Euler product)***이라고 합니다.

$$\prod_p^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{6}{\pi^2} \quad \text{(식5-113u, }\textbf{\textit{오일러 곱}}\text{)}$$

$\zeta(s)=0$을 만족시키는 해(solution) 중에 음의 짝수 ($s=-2,-4,-6,\ldots$)에 대해서는 자명한 영(trivial zero)점을 가진다는 것이 알려져 있습니다. ***리만 가설(Riemann hypothesis)***은 복소함수 $\zeta(s)=0$을 만족시키는 비자명한 모든 영점의 실수부(real part)가 $\frac{1}{2}$라는 추측인데, 19세기 중반에 발표된 이래로 수학사에서 주요 미해결 난제의 하나로 남아 있습니다. 많은 사람들이 리만 가설이 증명되면, 소수의 규칙성을 발견하게 되는 것이라고 생각하는데 그렇지는 않습니다.

(그림5-53o) 리만(Bernhard Riemann) 가설은 괴델의 불완전성의 원리처럼 참이지만 증명할 수 없는 예라고 생각됩니다.(그림출처: 영문위키피디아)

지금까지 발견한 모든 비자명 영점의 실수부는 $1/2$이므로 리만 가설은 참인 것 같습니다. 하지만, 비자명 영점해의 간격에 규칙이 없으므로, 소수의 규칙성은 증명되는 것이 아닙니다. "시간에 대한 직관"이 가능한 우주에서 우리는 소수의 규칙성을 1+1을 이해하듯이 이해하게 될 것입니다.

우리는 3장 지수함수에서 오일러 수 e를 다루면서, 이 수는 규칙이 있는 수이지만, 무한에 대한 직관이 필요하다고 이야기했습니다. 마찬가지로 π도 규칙 있는 수이지만, 제한된 시간 차원에 살고 있는 우리는 π의 소수점 이하 유효자리가 규칙이 없이 나열된다고 생각합니다. 그런데 (식5-113u)를 보면, 어떤 수의 집합 $P=\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}$에서 차례대로 수를 골라 식 $\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)$을 구성하고, 이 식을 무한으로 계속 곱하는 연산을 취했을 때, 이 수가 $6/\pi^2$라는 규칙이 있는 수가 된다고 말합니다. 그러면, 수의 집합 P를 구성하는 수에는 규칙이 있는 것일까요? 필자의 대답은 "그렇다"입니다. 하지만, 아무리 많은 시간을 들여도 π의 유효자리 수의 규칙을 찾아낼 수 없듯이, 수의 집합 P를 구성하는 수 p_i의 규

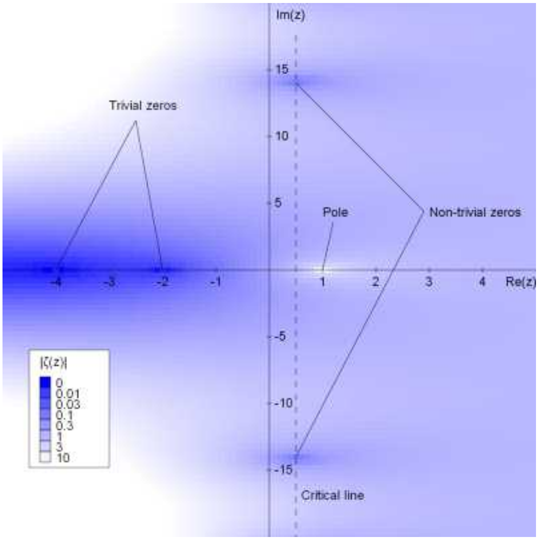
칙도 분명히 있지만, 제한된 시간 차원에 사는 우리는 찾아낼 수 없을 것입니다. 사실 규칙을 찾아낼 수 없다는 표현은 부적절합니다. 규칙은 있지만, 우리가 이해하지 못할 뿐입니다.

이렇게 접근하면 소수의 규칙은 π의 유효자리에 규칙이 없듯이, 우리가 이해할 수 있는 규칙이 없는 것이 당연하게 생각됩니다. 하지만, (식5-113t)를 보면, 우리가 이해할 수 있는 규칙을 가지는 식을 무한으로 더하면, π와 관련된 수를 얻으므로, 수의 집합 P를 구성하는 수가 우리가 아직 발견하지 못한 이해할 수 있는 규칙이 존재할 가능성이 있는 것입니다. 소수의 규칙에 대한 필자의 근본적인 직관은 다음과 같습니다.

수 π를 구성하는 유효자리 수에 우리가 이해할 수 없는 규칙이 있듯이, 소수의 집합 P를 구성하는 수 p_i에는 우리가 이해할 수 없는 규칙이 있을 것이다.

무한의 계산을 가정할 때만 이해할 수 있는 수 e와 π가 있다면, 수의 집합들 중에서 무한의 계산을 가정할 때만 이해할 수 있는 수의 집합이 있으며 그 한 예가 소수의 집합(set of prime number)이라고 생각하고 있습니다. 수학을 전공하지 않아서 이러한 유추가 터무니없고 엉터리일 수 있습니다. 하지만, 필자는 우리 인류는 우리가 사는 우주에서는 소수의 규칙을 발견할 수 없을 것이라고 생각하고 있습니다.

복소 함수를 그리는 다양한 방법들이 있습니다. 그 중에서 복소수 z의 절대값 $|z|$를 0일 때는 검은색, $+\infty$일 때는 흰색으로 가정하고, 색의 밝기가 선형적으로 증가하는 것이 아니라, 지수적으로 증가한다고 가정하면, (그림5-)처럼 리만 제타함수를 나타낼 수 있습니다.



(그림5-53p) 리만 제타함수의 절대값을 스칼라 필드로 나타내었습니다.(그림출처: 영문위키피디아)

(그림5-)에서 수렴하는 어두운 부분이 제타 함수의 출력이 0이라는 의미인데, 2사분면과 3사분면을 제외하면, 실수부가 모두 $1/2$인 곳에 수렴하는 어두운 부분이 있는 것을 알 수 있습니다.

수학에서 가장 아름다운 표(table)

기본함수와 기본 수 및 오일러의 항등식을 (표5-54)에 나타내었습니다.

	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	${}^n x$	i
지수함수	e^x	e^x	${}_e x$	e
삼각함수	$\cos(\theta)$ $\sin(\theta)$	$-\sin(\theta)$ $\cos(\theta)$	$acos(\theta)$ $asin(\theta)$	π
오일러의 항등식	$e^{i\pi}+1=0$			

(표5-54) 수학에서 가장 아름다운 표: 오일러의 공식은 기본함수 및 벡터와 행렬이 서로 밀접하게 연관되어 있음을 의미합니다.

(표5-54)은 다음 (식5-114)와 같이 하나의 공식으로 표현됩니다.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$ (식5-114)

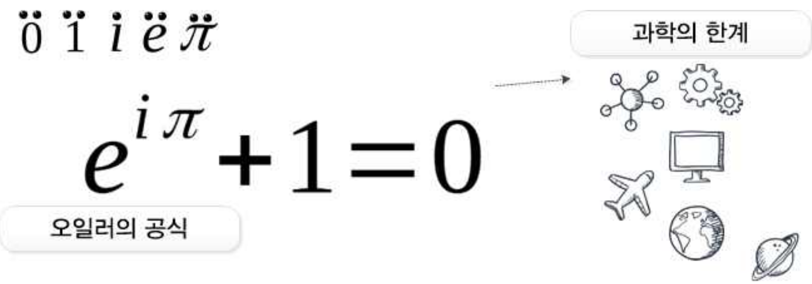
오일러의 공식(Euler's Formula)은 참으로 놀랍습니다. 이 공식은 파워함수, 지수함수, 삼각함수 및 벡터와 행렬이 서로 밀접하게 연관되어 있음을 나타냅니다. 고등학교에서 배우는 거의 대부분의

수학, 혹은 대학에서 일반적인 공대생들이 필수적으로 알아야 하는 수학 내용이 오일러의 공식에 포함되어 있는 것입니다. 왜 우리 우주에 이러한 규칙이 존재하는 것일까요?

공학과 과학의 한계

오일러의 공식은 우주의 규칙성뿐만 아니라, 우리가 경험하는 과학의 한계에 대해서도 이야기합니다. 오일러의 항등식을 구성하는 기본수에서 허수 i를 실제 과학에서 사용할 때는, 인코딩, 디코딩 과정을 거쳐야 합니다. 예를 들면 푸리에 변환(Fourier Transform)이나 쿼터니언(quaternion) 계산에서 최종 결과에서 허수 i를 없애기 위해 추가적인 계산과정이 필요합니다. i를 제거하지 않아도 식을 그대로 사용할 수 있는 그런 우주는 없을까요?

그리고 기본수 e,π는 무리수이므로 공학 계산에서 사용할 때는 실제값을 사용할 수 없고, 근사값을 사용할 수 있을 뿐입니다. 비행기, 컴퓨터 등 모든 곳의 공학 계산은 무한의 정밀도로 설계하는 것은 본질적으로 불가능합니다.



(그림5-54b) 기본수의 값을 정확하게 알 수 없으므로, 공학적인 설계에는 한계가 존재합니다.

소수(prime number)의 규칙성을 찾는 문제는 잘 알려진 ***밀레니***

엄 상금 문제(Millennium Prize Problem)입니다. 필자의 직관으로는 무리수(irrational number)의 유효자리에 규칙이 없듯이, 소수에도 규칙성이 없을 것이라고 생각합니다. 규칙이 없는 수가 있다면, 그러한 수를 포함하는 수들의 집합에서 간격에 규칙이 없는 수열(sequence)이 존재할 것이라고 가정하는 것이 직관적입니다. 소수의 규칙성을 설명하는 리만 가설(Riemann hypothesis)이 참이더라도, 비자명 영점(nontrivial zeros)의 해의 간격에는 규칙성이 없다는 것이 언젠가는 증명될 것이라고 생각합니다.

기본수 e,π및 소수의 규칙성을 완전하게 이해하는 한 가지 방법은 우리가 '시간에 대한 직관'이 가능한 우주의 존재가 되는 것입니다. 시간이 존재하지 않는 그 우주에서는 무한의 계산이, 지금 우리가 1+1을 이해하듯이 이해하게 될 것입니다.

표준수학

벡터 해석(Vector Calculus)

우리는 지금까지 ***벡터 대수(Vector Algebra)***의 주제들을 다루었습니다. 그것은 다음과 같습니다.

연산	표기	의미
벡터 덧셈	$\vec{v}+\vec{w}$	두 벡터를 더해서 벡터를 리턴
스칼라 곱셈	$a\vec{v}$	스칼라와 벡터를 곱해서 벡터를 리턴
내적	$\vec{v}\cdot\vec{w}$	두 벡터를 곱해서 스칼라 리턴
외적	$\vec{v}\times\vec{w}$	두 벡터를 곱해서, 벡터를 리턴
스칼라 삼중곱	$\overrightarrow{v_1}\cdot(\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3})$	외적의 결과에 내적을 취함
벡터 삼중곱	$\overrightarrow{v_1}\times(\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3})$	외적의 결과에 외적을 취함

(표5-55) 벡터 대수(Vector Algebra)의 종류

세 개의 삼차원 벡터 $r1,r2$와 $r3$을 고려해 봅시다.

$$r1=(a,b,c)$$
$$r2=(d,e,f)$$
$$r3=(g,h,i)$$

$r1,r2$와 $r3$에 대해, ***스칼라 삼중곱(scalar triple product)***을 다시 적어보면 다음과 같습니다.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = r1 \cdot (r2 \times r3)$$
$$= (r1 \times r2) \cdot r3$$
$$= r2 \cdot (r3 \times r1)$$

내적은 교환법칙이 성립하므로 $r1 \cdot (r2 \times r3) = (r2 \times r3) \cdot r1$입니다. 또한, 삼중곱은 행렬식을 계산하는 것이므로, 세 벡터 중 임의의 두 벡터가 같다면 그 두 벡터의 외적은 0이므로, 삼중곱의 결과도 0이 됩니다.

$$(r1 \times r2) \cdot r1 = (r1 \times r1) \cdot r2 = 0$$

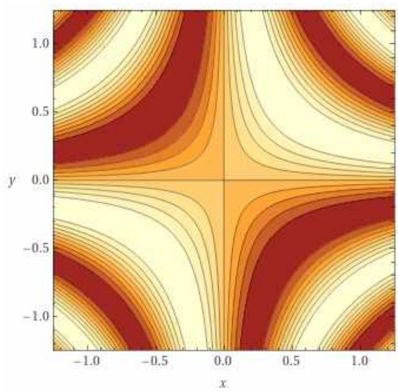
그리고 세 개의 삼차원 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$와 $\vec{c}$에 대해 ***벡터 삼중곱 (vector triple product)***을 적으면 다음과 같습니다.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

독립변수를 두 개 가지는 함수에 대해서, 임의의 입력값 (x, y)에 대응하는 함수의 리턴값을 그래프로 표현할 수 있습니다. 예를 들어서 (식5-115)에 주어진 함수를 고려해 봅시다.

$$\sin(2\pi(xy)) \quad \text{(식5-115)}$$

(식5-115)는 $-1 \sim +1$사이의 값을 리턴하는데, -1을 어둡게, $+1$을 밝게 그래프로 그리면 (그림5-56)과 같습니다.



(그림5-56) 공간의 모든 위치에 대해 대응하는 스칼라 값을 연관시킨 것을 스칼라 필드(scalar field)라고 합니다.

공간의 모든 점에 대해 스칼라 값을 연관시킨 것을 ***스칼라 필드(scalar field) 혹은 스칼라 함수(scalar-valued function)***라고 합니다. 우리가 지금까지 정의한 기본 함수의 경우, 함수가 스칼라 값을 리턴하므로, 독립변수가 한 개이면 일차원 스칼라 필드, 독립변수가 두 개이면 이차원 스칼라 필드인 셈입니다.

$\sin(2\pi(xy))$ 함수는 x,y를 입력으로 받아, 스칼라 값을 리턴하는 함수입니다. 이제 특별한 함수 F가 있어서, 이 함수의 입력으로 $\sin(2\pi(xy))$를 주면, F는 스칼라 필드를 리턴한다고 가정할 수 있습니다.

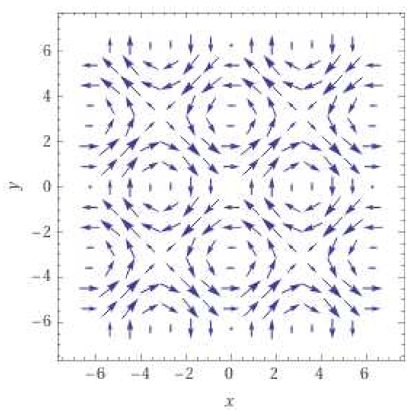
$$F(\ \sin(2\pi(xy))\ ) = \{\ scalar\ field\ for\ \sin(2\pi(xy))\}$$ (식5-115b)

벡터와 함수를 결합하면, ***벡터 필드(Vector Field)***를 정의할 수 있습니다. 벡터를 이루는 각 요소가 함수인 특별한 이차원 벡터를 생각해 볼 수 있습니다.

$$(f(x), g(y))$$ (식5-116)

(식5-116)이 의미하는 것은, 입력 쌍 (x, y)에 대해 벡터의 요소가 함수에 의해서 결정된다는 의미입니다. 그러면, (식5-116)은 이차원 좌표계에서 모든 위치마다 대응하는 이차원 벡터를 가집니다. 이것을 벡터 필드라고 합니다. (그림5-57)은 (식5-116b)가 나타내는 벡터필드를 그린 것입니다.

$$(\sin(y),\ \sin(x))$$ (식5-116b)

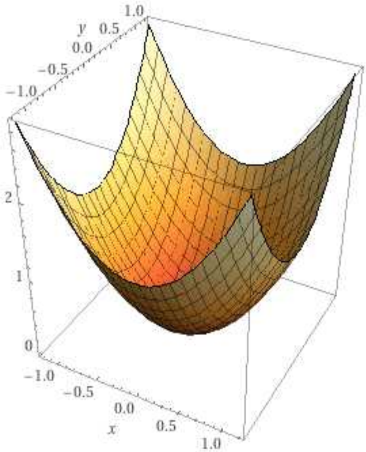


(그림5-57) 벡터 필드: $(\sin y,\ \sin x)$가 나타내는 벡터필드입니다.

벡터필드를 그래프로 표현하면, 특정한 지점에서의 파티클(particle)의 흐름의 방향을 직관적으로 파악할 수 있습니다. 벡터 필드를 정의하면, ***입력으로 함수를 받아서, 출력으로 벡터필드를 리턴하는 연산***을 정의할 수 있습니다. 두 개의 독립변수를 가지는 함수 f를 (식5-117)과 같이 정의해 봅시다.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{(식5-117)}$$

$f(x,y)$의 결과 값을 z값이라고 가정하고, (식5-117)를 삼차원 공간에 그리면 (그림5-58)과 같습니다.



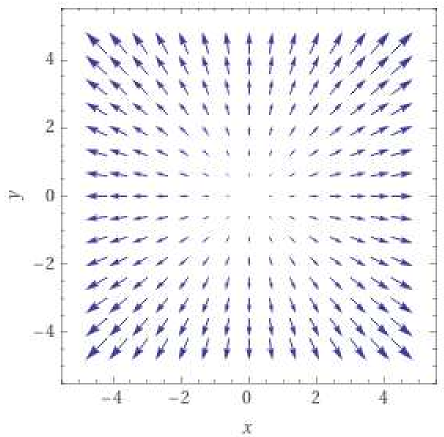
(그림5-58) $f(x,y) = x^2 + y^2$을 그렸습니다.

(식5-117)에 대해, $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$를 첫 번째 요소, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$를 두 번째 요소로 하는 벡터 필드를 (식5-118)처럼 구성할 수 있습니다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{(식5-118)}$$

(식5-118)이 나타내는 벡터필드는 $(2x,2y)$인데, 이것을 그래프로 그리면 (그림5-59)과 같습니다. 이것을 $f(x,y)$의 ***그레디언트 (Gradient)***라고 하고 $\bigtriangledown$(del, nabla, 델 혹은 나블라) 기호를 사용하여 $\bigtriangledown f$(델 f라고 읽습니다)라고 적습니다.

$$grad(f) = \nabla f = \nabla(x^2 + y^2) = (2x,\ 2y) \quad (식5-119)$$



(그림5-59) $f(x,y) = x^2 + y^2$의 그레디언트입니다.

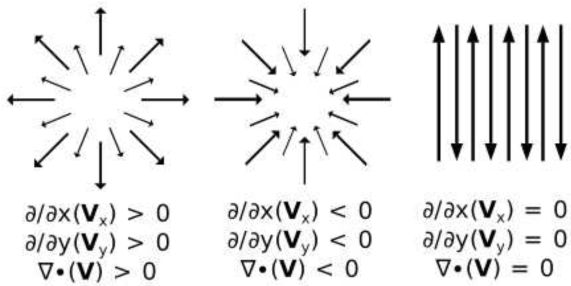
그레디언트는 입력으로 함수를 받아서, 출력으로 벡터 필드를 리턴하는 함수입니다. 그레디언트의 특정한 점에서의 벡터의 방향은 그 지점에서의 ***가장 급격한 위쪽 경사(steepest ascent)***를 의미합니다.

이제 벡터필드 F를 입력으로 받아, 스칼라 필드를 리턴하는 div ***연산(Divergence operator)***을 정의해 봅시다. 연산의 결과가 스칼라 값이기 때문에 내적 기호 점(·)을 사용하여 $\nabla \cdot$ 로 나타냅니다.

$$div(F) = \nabla \cdot F \quad (식5-120)$$

벡터 필드 $V(x,y)$에 대해 div연산은 (식5-121)과 같이 계산할 수 있습니다.

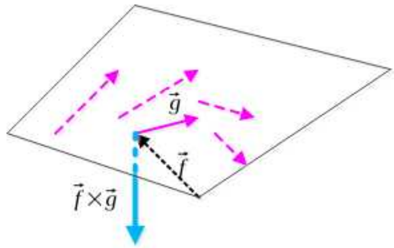
$$\nabla \cdot (V(x,y)) = \frac{\partial\ V_x(x,y)}{\partial\ x} + \frac{\partial\ V_y(x,y)}{\partial\ y} \quad \text{(식5-121)}$$



(그림5-60) div연산의 결과가 0보다 크다는 것은 해당 지점에서 벡터들이 모두 발산(diverge)하는 것을, 0보다 작다는 것은 수렴(converge)하는 것을, 0이라는 것은 수렴과 발산이 없는 것을 의미합니다.(그림출처: 영문위키피디아)

div연산은 벡터 필드의 특정한 지점에서 벡터들이 수렴하는지 발산하는지의 여부를 측정합니다. div값이 0보다 크면, 해당 지점에서 벡터필드의 벡터들이 발산한다는 것을 의미하고, 0보다 작으면 수렴한다는 것을 의미합니다.

벡터들의 수렴과 발산이 아니라, 벡터들의 회전의 방향과 정도를 측정하기 위해는 어떻게 해야 할까요? 벡터필드의 특정한 지점 $\vec{f}=(F_x,F_y,F_z)$에서 가장 급격하게 흐름이 진행하는 벡터의 방향은 그레디언트의 방향 $\vec{g}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$입니다. 그러면 이 지점의 파티클은 $\vec{f}$와 $\vec{g}$가 이루는 직각 방향을 회전축으로 가집니다. 그러므로 회전축을 구하기 위해서 $\vec{f}\times\vec{g}$를 구하면 됩니다.



(그림5-61) 벡터 필드의 특정한 지점 $\vec{f}$에서 가장 급격한 경사의 방향을 $\vec{g}$라고 하면 이 부분에서 입자(particle)들이 회전하는 정보를 $\vec{f}\times\vec{g}$로 나타낼 수 있습니다.

벡터필드 F를 입력으로 받아, 해당하는 위치에서 가장 크게 회전하는 회전축과 크기를 리턴하는 $curl$ ***연산(Curl operator)***를 정의할 수 있습니다. 연산의 결과가 벡터 값이기 때문에 외적 기호($\times$)를 사용하여 $\nabla\times$로 나타냅니다.

$$curl(F)=\nabla\times F \quad \text{(식5-122)}$$

삼차원 벡터필드 $F=(F_x,F_y,F_z)$에 대해 $\nabla\times F$는 다음 (식5-123)과 같이 정의됩니다.

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \quad \text{(식5-123)}$$

(식5-123)을 보면 $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$와 (F_x,F_y,F_z)의 외적을 구하는 것을 알 수 있습니다.

간단한 벡터필드 (식5-124)에 대해서 $curl$을 구해보도록 하겠습

니다. (식5-124)와 같이 벡터필드 F를 정의해 봅시다.

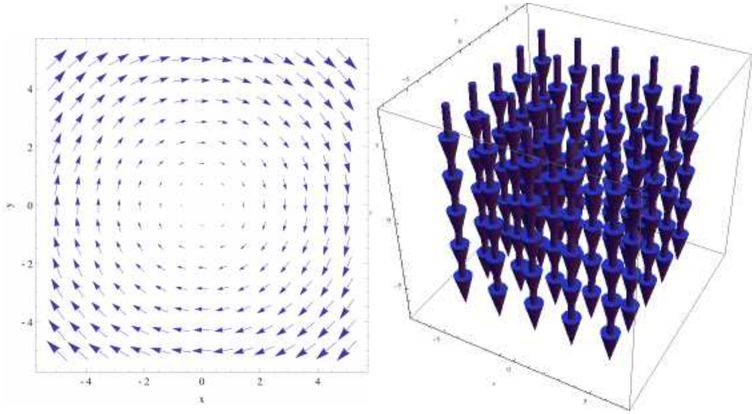
$$F(x,y,z)=y\hat{i}-x\hat{j} \quad \text{(식5-124)}$$
$$F=(F_x,F_y,F_z)=(y,-x,0) \quad \text{(식5-124b)}$$

(식5-123)의 $\nabla\times F$를 이용해 $curl$을 구하면, (식5-125)와 같습니다.

$$\begin{aligned}\nabla\times F &= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & 0\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}0-\frac{\partial}{\partial z}(-x)\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial x}0-\frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\hat{j}\\ &\quad+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\hat{k}\\ &= 0\hat{i}+0\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}y\right)\hat{k}=-2\hat{k}\end{aligned}$$

$$\nabla\times F=0\hat{i}+0\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}y\right)\hat{k}=-2\hat{k} \quad \text{(식5-125)}$$

벡터필드 F와 $curl(F)$를 그리면 (그림5-62)와 같습니다.



(그림5-62) 왼쪽 벡터 필드 F에 대한 $curl$을 오른쪽에 그렸습니다. 벡터 필드 $F(x,y,z)=y\hat{i}-x\hat{j}$의 $curl$은 벡터의 z-성분이 0이므로, z-축과 평행한 방향의 벡터필드를 나타냅니다.(그림출처: 영문위키피디아)

벡터필드 $F=(F_x,F_y,F_z)=(y,-x,0)$의 z-값이 0이므로 모든 벡터는 xy-평면상에 있으며, 모든 위치에서 입자의 회전축은 z-축과 평행한 것을 확인할 수 있습니다.

표준수학

미분 공식

상수항의 미분은 0입니다. 임의의 실수 c에 대해 (식5-126)이 성립합니다.

$$h(x) = c$$
$$c' = 0 \quad \text{(식5-126)}$$
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

파워함수의 미분은 (식5-127)과 같습니다. n은 임의의 실수입니다.

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{(식5-127)}$$
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

밑이 e가 아닌 지수함수의 미분은 (식5-128)과 같습니다. a,c는 임의의 실수이고 $\ln c = \log_e c$를 의미합니다.

$$f(x) = c^{ax}$$
$$f'(x) = (c^{ax})' = ac^{ax}\ln c \quad \text{(식5-128)}$$
$$\frac{d}{dx}c^{ax} = ac^{ax}\ln c$$

밑이 e인 지수함수의 미분은 (식5-129)와 같습니다.

$$f(x) = e^{ax}$$

$$f'(x) = ae^{ax} \quad \text{(식5-129)}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

로그함수의 미분은 (식5-130)과 같습니다.

$$f(x) = \log_c x$$

$$f'(x) = (\log_c x)' = \frac{1}{x\ln c} \quad \text{(식5-130)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_c x) = \frac{1}{x\ln c}$$

자연로그(natural logarithm)의 미분은 (식5-131)과 같습니다.

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{(식5-131)}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

삼각함수(trigonometric)의 미분은 (식5-132), (식5-133)과 같습니다.

$$(\sin x)' = \sin' x = \cos x \quad \text{(식5-132)}$$

$$\frac{d}{dx} sinx = \cos x$$

$$(\cos x)' = \cos' x = -\sin x \quad \text{(식5-133)}$$

$$\frac{d}{dx}cosx = -\sin x$$

미분은 선형성(linearity)을 가집니다. 그러므로 더하기(+)로 연결된 항(term)을 가지는 식의 미분은 각 항을 미분하고 더하면 됩니다.

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$
$$h'(x) = af'(x) + bg'(x) \quad \text{(식5-134)}$$
$$\frac{d}{dx}(af + bg) = a\frac{d}{dx}f + b\frac{d}{dx}g$$

곱의 규칙(product)은 (식5-135)와 같습니다.

$$h(x) = f(x)g(x)$$
$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(식5-135)}$$
$$\frac{d}{dx}(fg) = \left(\frac{d}{dx}f\right)g + f\left(\frac{d}{dx}g\right)$$

역수(reciprocal) 형태의 함수의 미분은 (식5-136)과 같습니다.

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$
$$h'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \quad \text{(식5-136)}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\frac{d}{dx}f$$

몫의 법칙(quotient rule)은 (식5-137)과 같습니다.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{(식5-137)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}fg - f\frac{d}{dx}g\right)}{g^2}$$

연쇄 법칙(chain rule)은 (식5-138)과 같습니다.

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{(식5-138)}$$

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dg(x)}f(g(x))\frac{d}{dx}g(x)$$

연쇄법칙을 적용하면 자연로그가 취해진 임의의 함수 f의 미분에 대한 미분을 (식5-139)처럼 구할 수 있습니다.

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{(식5-139)}$$

몫의 법칙을 사용하면 $\tan x$의 미분을 (식5-14)처럼 구할 수 있습니다.

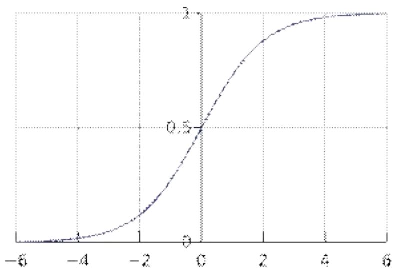
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} \quad \text{(식5-140)}$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

몇 가지 대표적인 미분의 예를 살펴보도록 하겠습니다.

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$ (식5-141, ***시그모이드 함수***)

S자 형태의 시그모이드 함수는 $-\infty \sim +\infty$ 범위의 입력을 $0 \sim 1$ 사이의 출력으로 정규화(normalization)하는 성질을 가지고 있어서, 인공신경망의 ***활성화 함수(activation function)***로 사용되고는 합니다. 그래프의 모양은 (그림5-63)과 같습니다.



(그림5-63) 시그모이드 함수는 $-\infty \sim +\infty$ 범위의 입력을 $0 \sim 1$사이의 출력으로 정규화(normalization)하는 성질을 가지고 있습니다.

시그모이드 함수의 미분 결과는 (식5-142)입니다.

$$\sigma'(x) = \frac{d}{dx}\sigma(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x)) \quad \text{(식5-142)}$$

시그모이드 함수의 미분을 유도하는 과정은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sigma(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(1+e^{-x}\right)^{-1} \\
&= -1 \times (1+e^{-x})^{-2}(-e^{-x}) \\
&= \frac{-e^{-x}}{-(1+e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}}\frac{e^{-x}+(1-1)}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}}\frac{(1+e^{-x})-1}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}}\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-x}}\right) \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}}\left(1 - \frac{1}{1+e^{-x}}\right) \\
&= \sigma(x)(1-\sigma(x))
\end{aligned}$$

다음으로 리만 제타 함수의 미분을 살펴보도록 하겠습니다. 리만 제타 함수는 (식5-143)과 같이 정의됩니다.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots$$ (식5-143)

$1/n^x$의 미분은 (식5-136)을 적용하면 (식5-144)와 같이 유도할 수 있습니다.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{n^x}=\frac{(n^x)'}{(n^x)^2}=\frac{n^x\ln x}{(n^x)^2}=\frac{\ln x}{(n^x)}$$ (식5-144)

그러면 리만제타함수의 미분은 (식5-145)와 같습니다.

$$\frac{d}{dx}\zeta(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}=-\frac{\ln 2}{2^x}-\frac{\ln 3}{3^x}-\frac{\ln 4}{4^x}-\ldots$$ (식5-145)

5장의 끝@