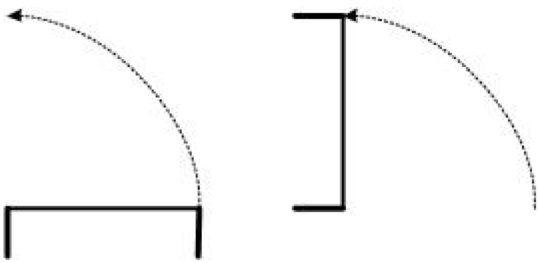
4장. 기본함수: 호의 길이에 대한 투영된 선분의 길이



호에서 투영한 선분의 길이 구하기

이상한 수 π(파이)

삼각함수(Trigonometric Function)

선분의 길이에서 호의 길이 구하기

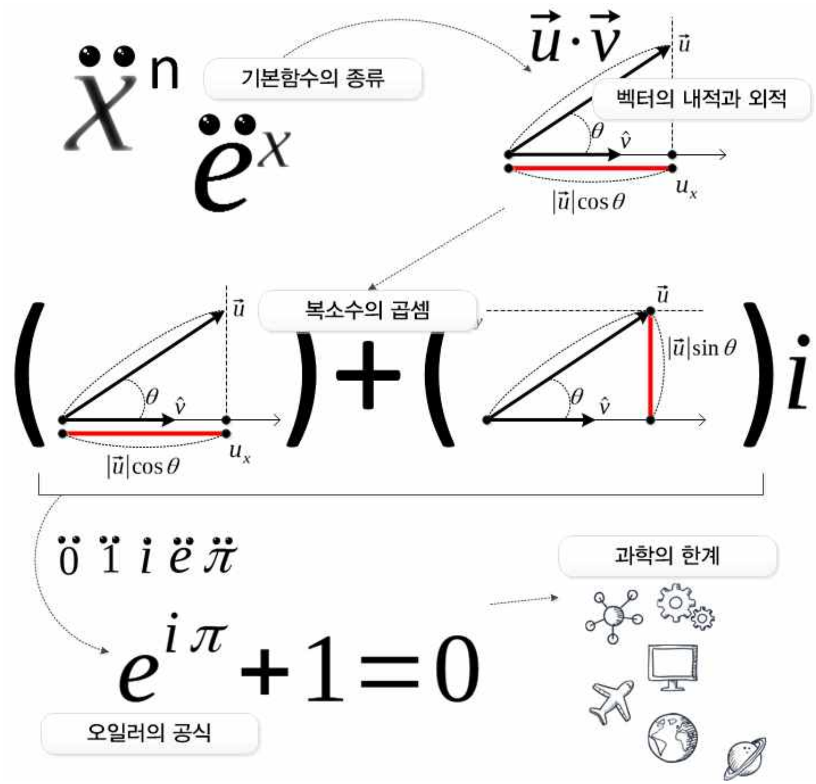
접하는 직선의 기울기 구하기

[표준수학] 코싸인의 법칙

[표준수학] 삼각함수의 법칙

[표준수학] $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$의 증명

[표준수학] $\cos'(x) = -\sin(x)$의 증명

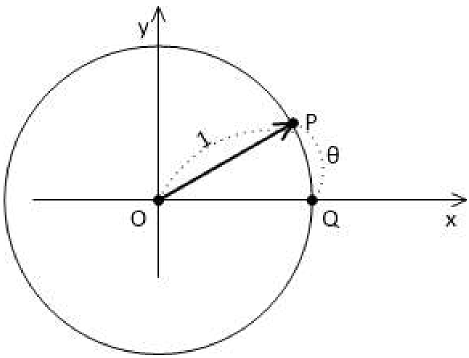


우리는 기본함수의 종류를 모두 파악할 것입니다. 기본함수를 하나씩 정의할 때마다, 기본수를 하나씩 발견하게 될 것입니다. 그리고, 벡터의 내적과 외적의 개념을 파악한 이후에, 복소수의 곱셈에 포함된 내적과 외적의 개념을 파악할 것이고, 기본수들이 이루는 완벽한 관계를 기술하는 식을 이해하게 될 것입니다. 이 과정을 통해 자연법칙을 기술하는 수식의 아름다움과, 필연적으로 존재하는 과학의 한계를 알게 될 것입니다.

이제 세 번째 기본함수를 위한 여행의 시작입니다. 세 번째 기본함수는 회전과 관계된 특징을 가집니다.

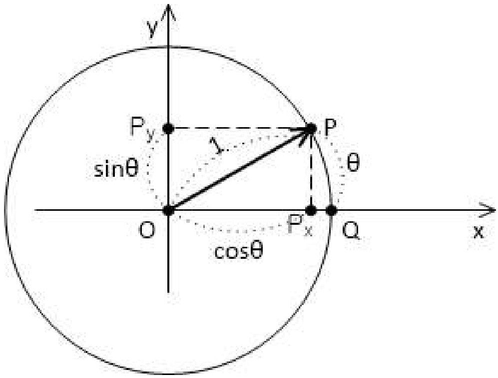
호에서 투영한 선분의 길이 구하기

지금까지 우리는 파워함수와 지수함수를 알아 보았습니다. 기본 함수의 마지막 세 번째를 구성하는 함수는 원의 호(arc, 아크)의 길이와 상관이 있습니다. 원 둘레의 일부인 호의 길이를 이용하면, 회전을 의미하는 함수를 정교하게 정의할 수 있습니다.



(그림4-1) 단위 원(unit circle): 원호 $\widehat{QP}$의 길이를 θ라고 합시다.

(그림4-1)과 같이 반지름(radius)의 길이가 1인 ***단위 원(unit circle)***을 생각해 봅시다. 원점 O에서 출발한 반직선(ray)이 원과 만나는 점을 P, 원과 x-축이 1사분면에서 만나는 점을 Q라고 하고, Q에서 반시계 방향으로 진행한, 원호 $\widehat{QP}$의 길이를 θ(theta, 세타)라고 합시다. 호의 길이를 나타내기 위해 θ를 사용하는 것은 관례입니다. 이제 단위원에서 원호의 길이 θ가 주어졌을 때, 점 P에서 x-축에 투영한 점 P_x와 원점 O가 이루는 선분의 길이를 구하는 함수를 정의할 수 있습니다.



(그림4-2) 단위원에서 원호의 길이에 대한 x-축과 y-축의 투영된 길이를 구하는 함수를 정의합니다.

단위 원 위의 점 P가 결정하는 원호의 길이가 주어졌을 때, 선분 $\overline{OP_x}$의 길이를 구하는 함수를 ***코싸인(cosine)함수***라고 합니다. 그리고 선분 $\overline{OP_y}$의 길이를 구하는 함수를 ***싸인(sine)함수***라고 정의합니다. 이것을 (그림4-2)에 나타내었습니다. 코싸인 함수를 ***cos***라고 적고, 싸인 함수를 ***sin***이라고 적습니다. 함수를 (식4-1)~(식4-4)처럼 나타낼 수 있습니다.

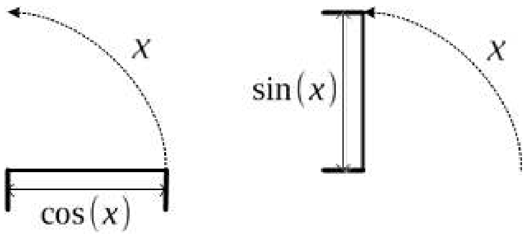
$\cos(x)$ (식4-1)
$\cos(\theta)$ (식4-2)
$\sin(x)$ (식4-3)
$\sin(\theta)$ (식4-4)

cos함수의 입력과 출력이 의미하는 것을 명확하게 이해하시기 바랍니다. (그림4-2)에 대해서 $\cos(\theta)$는 다음 (식4-5)를 의미합니다.

$$\theta = \widehat{QP}$$

$$\cos(\widehat{QP}) = \overline{OP_x} \quad \text{(식4-5)}$$

cos함수의 입력은 호의 길이입니다. 출력은 선분의 길이입니다. (식4-5)가 의미하는 것을 명확하게 하기 위해 (그림4-3)을 참고하세요.



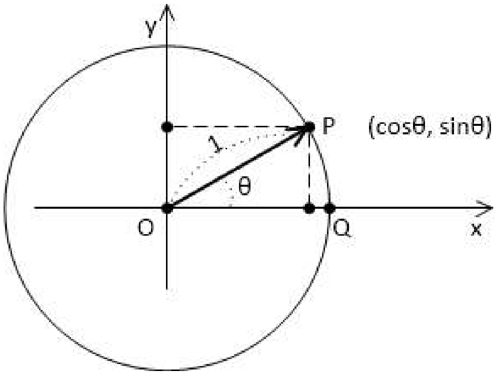
(그림4-3) 호의 길이 x에 대해 수평 선분의 길이를 리턴하는 함수를 $\cos(x)$, 수직 선분 선분의 길이를 리턴하는 함수를 $\sin(x)$라고 합니다.

cos, sin함수 모두 호의 길이 x를 입력으로 받습니다. 그리고 cos함수는 수평 성분의 선분의 길이를 리턴하고, sin함수는 수직 성분의 선분의 길이를 리턴합니다.

cos → 가로성분(x-축 성분)의 길이

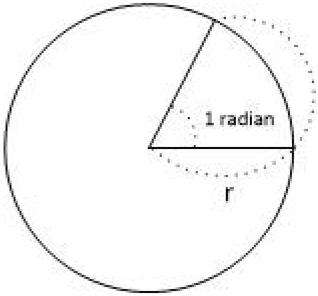
sin → 세로성분(x-축 성분)의 길이

원호의 길이 θ를 알고 cos, sin함수를 정의하면, 점 P의 좌표가 $(\cos(\theta), \sin(\theta))$가 되는 것을 알 수 있습니다. 그리스 문자 θ가 파라미터로 사용된 것이 명확할 때 괄호를 생략하고 $(\cos\theta, \sin\theta)$라고 적습니다.



(그림4-4) 점 P의 좌표: 이제 점 P의 좌표는 (cosθ, sinθ)입니다.

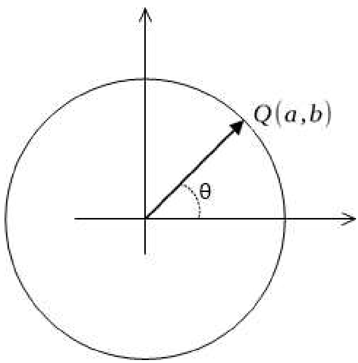
원호의 길이 θ를 단위원에서 각(angle)을 나타내는데 사용할 수 있습니다. 단위원이 아니라 반지름의 길이가 r인 임의의 원에 대해서도, 원호를 따라 진행한 거리가 r이라면, 이 원호가 나타내는 각은 원의 크기에 상관없이 항상 일정합니다. 이 값을 각을 나타내기 위해서 ***1라디안(1 radian, 호도)***으로 정의할 수 있습니다. 라디안은 한국어 "호도"로 사용하는데, "***호의 길이에 의한 각도***"를 의미합니다.



(그림4-5) 라디안: 반지름 r인 원에서, 원호의 길이가 r일 때 원의

중심과 원호가 이루는 비율을 1 라디안이라고 합니다.

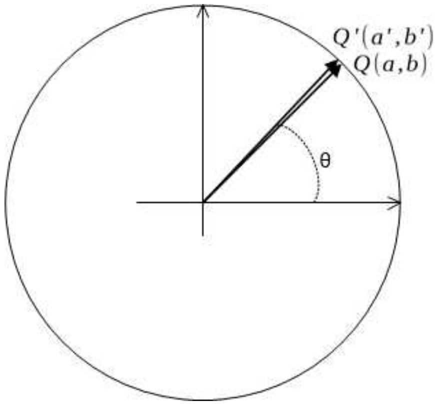
즉, ***단위원의 호의 길이를 각을 나타내는 단위로 사용하는 것***입니다. 각을 나타내기 위해 일반적으로 ***도(degree, 각도)***를 사용합니다. 각도는 원둘레 전체를 360단위라고 가정하고, 실수를 사용하여 각을 나타냅니다. 이미 좋은 각도(degree)라는 단위가 있는데 왜 라디안을 사용해야 할까요? 그것은 실수(real number)로는 나타낼 수 없는 각이 존재하기 때문입니다.



(그림4-6) 실수값 θ로 모든 각을 나타낼 수 있을까요?

(그림4-6)에서 Q가 의미하는 각 θ를 나타내는 방법을 생각해 봅시다. 도(degree)를 사용하면 정해진 실수 값을 사용해야 합니다. 이렇게 실수값 도(degree)를 사용하여 모든 각(angle)을 나타낼 수 있을까요? 그렇지 않습니다. (그림4-7)에서 Q가 이루는 각을 나타내기 위해서 임의의 실수값 θ를 사용하고, Q보다는 미세하게 큰 각을 나타내기 위해 Q'을 사용했다고 가정합시다. Q'이 Q보다는 무한대로 0으로 수렴하며 작아지더라도 Q와 Q'사이에는 실수로는 나타낼 수 없는 각이 존재합니다. $1/3$을 수직선상에 정확하게 표시할 수 없는 이유와 비슷합니다. 하지만, 라디안(radian)을 사용

하면 모든 각을 나타낼 수 있습니다!



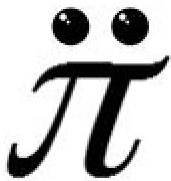
(그림4-7) Q와 Q'사이에는 실수로는 나타낼 수 없는 각이 존재합니다.

왜 라디안을 사용하면 모든 각을 나타낼 수 있는지 살펴보기에 앞서, 기본함수 테이블에 항목을 추가할 수 있습니다. 그것은 (그림4-8)과 같습니다.

	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	${}^{n}x$	i
지수함수	e^x	e^x	${}_{e}x$	e
투영된 선분길이 함수	$\cos(x)$ $\sin(x)$			

(그림4-8) 기본함수 테이블: $\cos(x)$와 $\sin(x)$를 추가했습니다.

(그림4-8)에 추가한 $\cos(x)$와 $\sin(x)$등을 ***삼각함수(trigonometric function)***라고 하는데, 직각 삼각형(right triangle)의 비율과 상관이 있기 때문입니다.

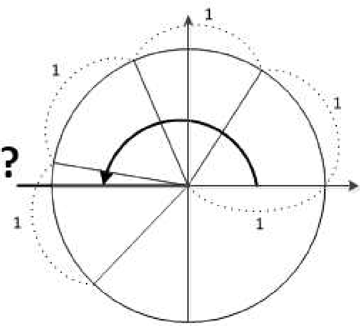


(그림4-8b) 반지름이 1인 원둘레의 길이는 실수로 나타낼 수 없습니다. 우리는 또 하나의 이상한 수 π(pi, 파이)를 이해해야 합니다.

다음으로는 (1) 그리기, (2) 역함수, (3) 접하는 직선의 함수를 찾는 순서로 진행해야 하지만, 그 전에 우리는 라디안(radian)의 정의에 의해서 발생하는 이상한 수 하나를 먼저 파악할 필요가 있습니다.

이상한 수 π(pi, 파이)

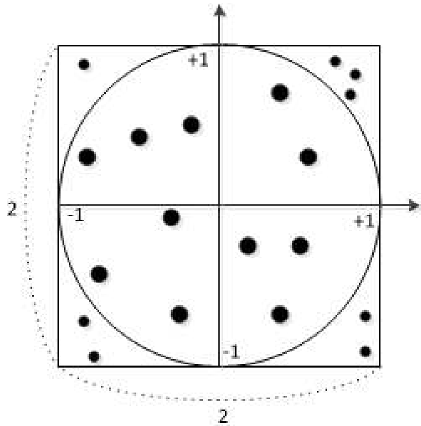
원호의 길이를 각으로 사용하기 위해 라디안(radian)을 정의하면, 단위원의 원 둘레의 길이를 0에서 360도를 나타내기 위해서 사용한다는 의미입니다. 그러면, 단위원의 원 둘레의 길이는 얼마일까요? 초기의 수학자들은 180도에 해당하는 반원의 호의 길이를 측정하기 위해 다양한 시도들을 하였습니다. 아직은 모르는 이 길이를 π***(파이, pi)***라고 하겠습니다.



(그림4-9) 반원의 호의 길이는 3보다는 크고 4보다는 작습니다.

(그림4-9)를 보면 π는 대략 3보다는 크고, 4보다는 작아야 함을 알 수 있습니다. 어떻게 이 길이를 측정할 수 있을까요? 다양한 측정 방법이 있고, "무한에 대한 직관"을 사용하면 그 값을 수학적으로 정확하게 정의할 수 있습니다.

필자는 여러 가지 방법 중에서 가장 직관적인 방법으로 사각형의 면적과 원의 면적을 사용해서 구해 보겠습니다. (그림4-10)에 반지름의 길이가 1인 원과 원에 외접하는 직사각형을 그렸습니다.



(그림4-10) 단위원과 단위원에 외접하는 사각형의 면적의 관계를 이용하면 원둘레를 측정할 수 있습니다.

(그림4-10)의 직사각형 안에 무한개의 점이 있다고 가정해 봅시다. 그 점들 중 "무한에 대한 직관"을 사용하여 원의 내부에 있는 큰 점의 개수와, 원의 외부에 있는 작은 점의 개수의 비율을 이용하면 π를 구하는 것이 가능합니다. 우리가 π를 이미 알고 있다고 가정하면, 반지름이 r인 원의 면적은 (식4-6)과 같습니다.

반지름이 r인 원의 면적=πr^2 (식4-6)

그리고 (그림4-10)의 직사각형의 면적은 (식4-7)과 같습니다.

너비가 2 높이가 2인 직사각형의 면적=$2 \times 2 = 4$ (식4-7)

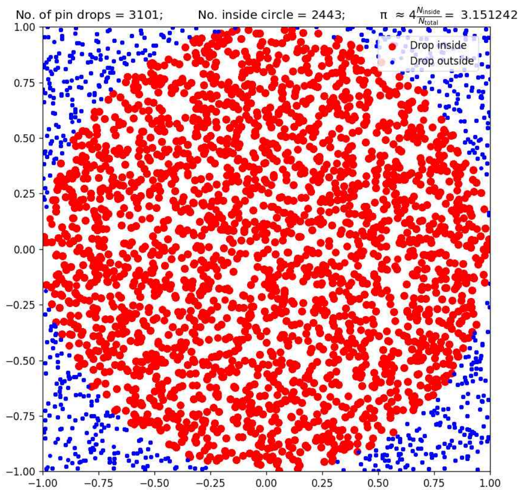
사각형 안에 있는 점의 총 개수를 $N_{rectangle}$이라고 하고, 그 중 원안에 있는 점의 수를 N_{circle}이라고하면, (식4-8)이 성립합니다.

$$\lim_{N_{rectangle}\to\infty} \frac{N_{circle}}{N_{rectangle}} = \frac{\pi r^2}{2\times 2} = \frac{\pi}{4} \quad (식4\text{-}8)$$

(식4-8)로부터 π는 다음 (식4-9)와 같이 구할 수 있습니다.

$$\pi = 4 \times \lim_{N_{rectangle}\to\infty} \frac{N_{circle}}{N_{rectangle}} \quad (식4\text{-}9)$$

파이썬(Python)이라는 프로그래밍 언어를 사용하여 (그림4-10)에 해당하는 프로그램을 제작할 수 있습니다. (그림4-11)은 가로 2, 세로 2크기의 사각형안에 점을 무작위(random)로 생성해서, 점이 원안에 있으면 큰 점(big dot), 점이 원 밖에 있으면 작은 점(small dot)으로 나타낸 것입니다.



(그림4-11) 무작위로 생성한 점이 원의 내부에 있으면 큰 점으로 그렸습니다.

(그림4-11)은 점을 약 3101번 무작위로 생성했을 때, π의 근사값을 계산한 결과를 보여 줍니다. 그림에서 값은 약 3.151정도인데, 점을 계속해서 생성해 나가면 이 값은 (그림4-12)에 나타낸 3.14159...에 가까워 집니다. 놀랍게도 이 수 π***는 순환하지 않는 무한 소수***입니다!

$$\pi = 3.14159...$$

(그림4-12) π는 순환하지 않는 무한소수인데 소수점 이하 5째 자리까지의 값은 3.14159입니다.

π는 정확하게 그 값을 수학적으로 정의할 수 있는데, 그 중 한 예는 (그림4-13)과 같이 "무한에 대한 직관"으로 표현할 수 있습니다.

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

(그림4-13) π는 무한히 많은 항들의 덧셈으로 표현됩니다.

(그림4-13)의 결과는 다소 놀랍습니다. 자연수의 제곱을 분모로 가지는 수들의 합이 왜 π와 연관되어 있는 것일까요? 하지만, 더 놀라운 사실이 기다리고 있습니다. 놀라운 사실을 확인하기에 앞서, 기본함수 테이블에 π를 추가하도록 하겠습니다.

	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	$\boxed{{}^{n}x}$	i
지수함수	e^x	$\boxed{e^x}$	${}_{e}x$	e
투영된 선분길이 함수	$\boxed{\cos(x) \; \sin(x)}$			π

(그림4-14) 기본함수 테이블: 이상한 수 π를 추가하였습니다. 각 기본함수마다 우리는 하나씩 기본수를 찾았습니다.

(그림4-14)의 기본함수 테이블 아직 완성되지 않았지만, 기본수는 모두 찾았습니다. 0과 1이외에 첫 번째 기본함수 파워함수의 역함수를 정의하면서 $i(=\sqrt[2]{-1})$를 찾았고, 두 번째 지수함수의 접하는 직선의 특별한 조건에 해당하는 $e(\approx 2.718...)$를 찾았고, 세 번째 삼각함수 자체의 정의에서 단위원의 반원의 길이에 해당하는 $\pi(\approx 3.14159...)$를 찾았습니다. (그림4-15)에 기본수 5개 모두를 나타내었습니다.

$$0 \quad 1 \quad i \quad e \quad \pi$$

(그림4-15) 기본 수(elementary number): 이제 기본수를 모두 찾았습니다.

(그림4-15)의 기본수는 물리학이나 과학의 모든 곳에서 사용됩니다. 서로 연관성이 없어 보이는 이 수들이 서로 밀접하게 연관되어 있으니 참으로 신기한 일입니다. 그렇습니다. 이 다섯 개의

수들은 서로 긴밀하게 연관되어 있습니다. 이 기본수들의 연관성은 다음 (식4-10)으로 표현할 수 있습니다. 지금은 식 자체를 이해할 필요는 없습니다. 단지, 기본수가 서로 밀접하게 연결된 것을 나타내는 식이 있다는 것을 기억하면 됩니다.

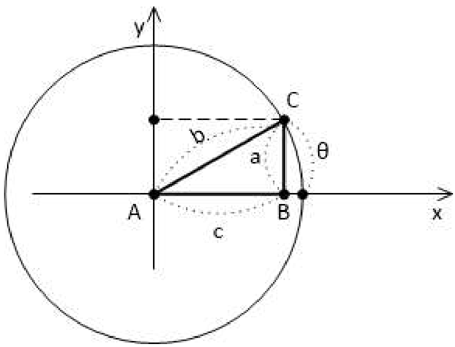
$$e^{i\pi}+1=0$$ (식4-10)

(식4-10)은 참으로 놀라운 수식입니다. 변수가 포함되지 않았고, 모두 수(number)이며, 기본수 다섯 개로만 구성된 식입니다! 필자가 (식4-10)을 처음 보았을 때 저는 이 수식이 아름답지 않았습니다. 고등학교 시절 수학을 비교적 좋아했던 저를 포함한 대부분의 사람들에게 아름답게 보이지 않는 이유는 e는 잘 사용하지도 않을 뿐더러 전혀 직관적이지 않은 수이고, 전혀 사용할 필요가 없다고 느꼈던 i가 사용되었을 뿐만 아니라, 지수에 i가 사용된 것에 대해 이해할 수 없었기 때문이었습니다.

(식4-10)의 의미를 이해하기 위해서는 복소수의 곱셈의 의미에 대해서 이해해야 합니다. 제가 그랬던 것처럼 아직 식에서 놀라움을 느끼지 못하는 독자 분들이 계시면, 지금까지 잘 따라 오셨습니다. 추가적으로 5장까지는 꼭 읽어서, "놀라움"과 "아름다움"을 느낄 수 있었으면 좋겠습니다.

삼각함수(Trigonometric Function)

cos, sin함수는 직각삼각형(right triangle)의 변(edge)의 길이의 비율을 나타내기 위해서 사용할 수 있습니다. 그래서 ***삼각함수 (trigonometric functions)***라고 합니다. (그림4-16)에 반지름의 길이가 b인 원을 나타내었습니다.



(그림4-16) 임의의 반지름 b에 대한 원이 주어졌을 때, 호의 길이 θ에 대한 라디안은 θ/b입니다.

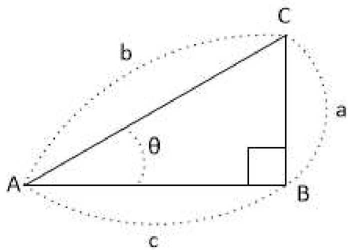
(그림4-16)에서 호의 길이 θ는 라디안 단위가 아닙니다. 라디안은 단위원에서 호의 길이로 각을 나타내기 위해서 사용하기 때문에 반지름의 길이가 1이 아닌 b인 원에 대해서는 단순한 호의 길이일 뿐입니다. 그러므로 (그림4-16)에 대해서는 아래의 (식4-11)이 성립하지 않습니다.

$$\cos\theta \neq |\overline{AB}| \quad \text{(식4-11)}$$

$$\cos\theta = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{c}{b} \quad \text{(식4-12)}$$

반지름의 길이가 1이 아니므로, (그림4-16)의 호의 길이 θ에 대해서 $\cos\theta$는 (식4-12)처럼 반지름의 길이 $|\overline{AC}|$로 나누어 주어야 합니다. 그러면 라디안과 cos, sin함수가 삼각형의 변들의 길이의 비율을 나타내기 위해 사용할 수 있는 것을 알 수 있습니다.

(그림4-16)에서 삼각형 $\triangle ABC$만을 별도로 (그림4-17)에 그렸습니다. $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$가 이루는 각을 θ라고 표시했는데, 이제 θ는 호의 길이가 아니라, 라디안입니다.



(그림4-17) $\cos$, $\sin$함수는 직각 삼각형의 변들의 길이의 관계를 나타냅니다.

(그림4-17)의 직각 삼각형에 대해서 ***b를 빗변(hypotenuse), a를 마주보는 변(opposite), c를 밑변(adjacent, 인접한)***이라고 합니다. θ는 라디안 단위를 사용하는 실수인데, 라디안과 각도와의 관계는 다음과 같습니다.

π 라디안(radian) = 180도(degree) (식4-13)

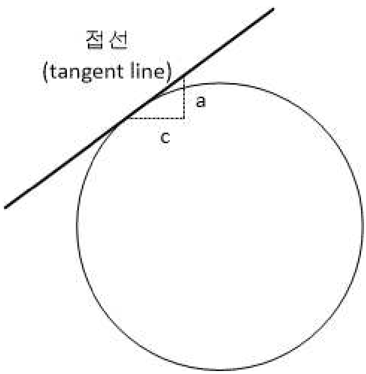
이제 삼각형 $\triangle ABC$에 대해서 삼각 함수를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\cos\theta = \frac{c}{b} \quad (식4\text{-}14)$$

$$\sin\theta = \frac{a}{b} \quad (식4\text{-}15)$$

$$\tan\theta = \frac{a}{c} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (식4\text{-}16)$$

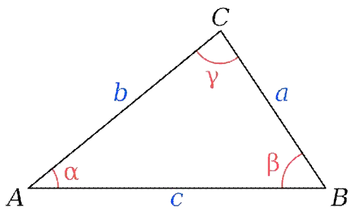
sine은 인체 기관(organ)이나 조직(tissue)의 움푹한 곳을 가리키는 sinus에서 파생한 단어입니다. cosine은 sine이라는 단어에 '함께'를 의미하는 co-를 붙여서 만든 단어입니다. a/c를 ***탄젠트(tangent)***라고 하는 이유는 이 비율이 빗변을 접선으로 간주했을 때, 접선(tangent)의 기울기를 나타내기 때문입니다.



(그림4-18) 원에 접하는 접선(tangent line)의 기울기는 a/c로 나타낼 수 있습니다.

그러므로 삼각형의 변들의 길이를 안다면, 각도를 구할 수 있고, 반대로 빗변과 밑변이 이루는 각도와 빗변의 길이를 안다면 나머지 변의 길이를 구할 수 있습니다.

임의의 삼각형이 주어졌을 때, 삼각형의 빗변의 길이와 각은 특별한 법칙을 만족합니다. (그림4-19)처럼 삼각형 $\triangle ABC$가 주어졌을 때, 꼭지점 A, B와 C가 이루는 각을 각각 α(alpha, 알파), β (beta, 베타) 와 γ(gamma, 감마)라고 합시다. 그리고 꼭지점의 마주보는 변의 길이를 각각 a, b 와 c라고 합시다.

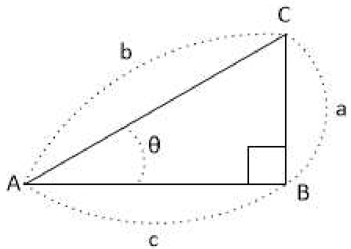


(그림4-19) 삼각형의 변의 길이와 각은 $\cos$를 포함한 특별한 식으로 표현할 수 있습니다.

(그림4-19)와 같은 삼각형 $\triangle ABC$가 주어졌을 때, 아래 식을 만족합니다. 이것을 ***코싸인의 법칙(law of cosines)***이라고 합니다.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{(식4-17)}$$

(식4-17)에서 γ가 90도이면 $\cos(\gamma) = 0$이므로 $c^2 = a^2 + b^2$이 되는데 이것을 ***피타고라스의 정리(pythagorean theorem)***라고 합니다. 그러므로 피타고라스의 정리는 코싸인의 법칙의 특별한 경우임을 알 수 있습니다.



(그림4-20) 삼각함수: 직각 삼각형의 각 변의 길이의 비는 삼각형의 크기와 상관없이 일정합니다. 꼭지점의 각도를 구하기 위해서, 혹은 변의 길이를 구하기 위해서 이 비율을 적절히 이용합니다.

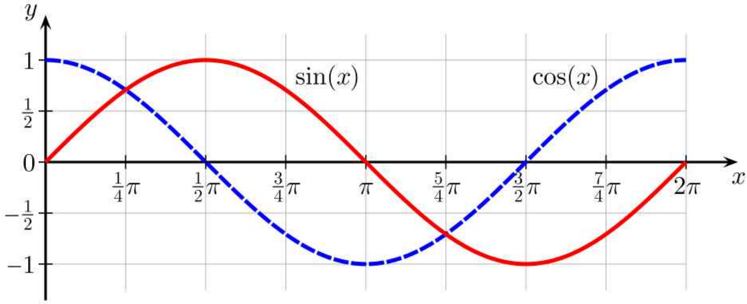
피타고라스의 정리에 의하면 (그림4-20)의 직각 삼각형 $\triangle ABC$에 대해서 다음의 (식4-18)이 성립합니다.

$$b^2 = a^2 + c^2,\ b = {}^2(a^2 + c^2) = \sqrt{a^2 + c^2} \quad \text{(식4-18)}$$

그러므로 b가 1이라면 $\cos\theta = c$이고, $\sin\theta = a$이므로, 아래의 (식4-19)를 만족합니다.

$$1^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta,\ 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \quad \text{(식4-19)}$$

함수를 정의하면 (1) 그리기, (2) 역함수, (3) 접하는 직선의 함수를 찾는 것이 일반적인 작업이라고 했습니다. 이제 삼각함수를 그려보겠습니다.

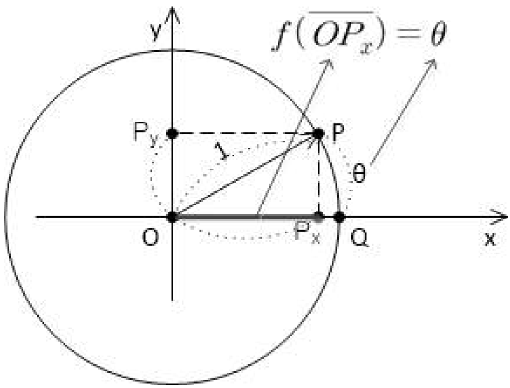


(그림4-21) $\cos(x)$함수와 $\sin(x)$함수의 그래프(그림: 영문위키피디아)

(그림4-21)에는 점선(dotted line)으로 $\cos(x)$함수를 그렸고, 실선(solid line)으로 $\sin(x)$함수를 그렸습니다. x-축의 간격으로 $4/\pi$를 사용했는데, 그래프를 보면 2π마다 값들이 주기적으로 반복되는 것을 확인할 수 있습니다. 이러한 함수를 주기함수(periodic function)라고 합니다.

선분의 길이에서 호의 길이 구하기

삼각함수의 역함수는 투영된 선분의 길이를 입력으로 받아, 단위원의 호의 길이를 리턴합니다. (그림4-22)에 단위원과 단위원에 내접하는 직각 삼각형 $\triangle OPP_x$를 나타내었습니다.



(그림4-22) $\cos()$의 역함수는 선분의 길이에 대한 호의 길이를 리턴하는 함수입니다.

(그림4-22)가 주어졌을 때, $|\overline{OP_x}|$를 입력으로 받아, θ를 리턴하는 함수 $f(x)$를 (식4-20)과 같이 정의할 수 있습니다.

$$f(\overline{OP_x}) = \theta \quad \text{(식4-20)}$$

함수 f는 $\cos$ 함수가 하는 반대(inverse)의 일을 하므로 $\cos$함수의 역함수입니다.

어떤 함수 $f(x)$가 주어졌을 때, 역함수는 $f^{-1}(x)$ 처럼 적을 수 있습니다. 그러므로 $\cos(x)$와 $\sin(x)$의 역함수는 (식4-21)처럼 적을 수 있습니다.

$$\cos^{-1}(x),\ \sin^{-1}(x)$$ (식4-21)

일반적인 역함수의 표현은 $\cos^{-1}(x),\ \sin^{-1}(x)$이지만, 삼각함수는 이 표현을 사용하지 않고, ***아크사인(arc sine), 아크코사인(arc cosine)***을 사용하여 (식4-22)와 같이 나타냅니다.

$$acos(x),\ asin(x)$$ (식4-22)

$$\arccos(x),\ \arcsin(x)$$ (식4-22b)

$acos$와 $asin$을 사용하는 이유는 역함수가 선분의 길이를 입력으로 받아, ***아크(arc, 호)의 길이를 리턴***하기 때문입니다. (그림 4-22)에 대해서 $\cos(\theta)$의 역함수를 (식4-24)와 같이 정의할 수 있습니다.

$$\cos^{-1}(x) = \theta$$ (식4-23)

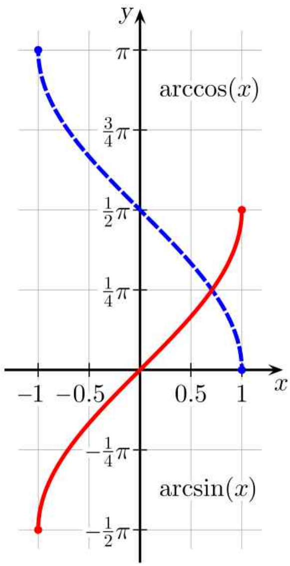
$$acos(x) = \theta$$ (식4-24)

$\cos$함수와 $acos$함수는 서로 역함수이므로 (식4-25)가 성립합니다.

$$acos(\cos\theta) = \theta$$ (식4-25)

$$\cos(acos(\theta)) = \theta$$ (식4-26)

다음으로 $acos$함수와 $asin$함수를 그려보겠습니다. 그것은 (그림4-23)의 그래프와 같습니다.



(그림4-23) $\arccos(x)$와 $\arcsin(x)$의 그래프입니다. 두 함수의 정의구역은 -1과 +1사이 입니다.(그림: 영문위키피디아)

$\cos$함수와 $\sin$함수의 정의에 의해 $acos$함수와 $asin$함수의 정의구역은 -1과 +1사이의 실수입니다. 그리고 $acos$함수의 경우, 0에서 π를 치역(range)으로 가지고, $asin$함수의 경우, $-2/\pi$에서 $+2/\pi$를 치역으로 가집니다.

이제 삼각함수의 역함수를 기본함수 테이블에 추가할 수 있습니다. 그것은 (그림4-24)와 같습니다.

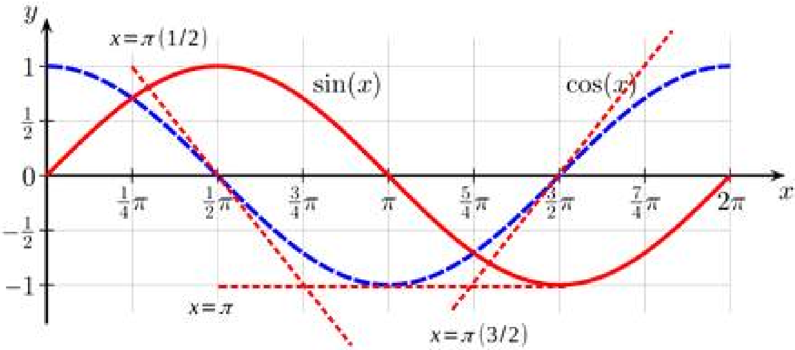
	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	${}^{n}x$	i
지수함수	e^x	e^x	${}_{e}x$	e
삼각함수	$\cos(x)$ $\sin(x)$		$acos(x)$ $asin(x)$	π

(그림4-24) 기본함수 테이블: $acos(x)$와 $asin(x)$를 추가했습니다. 이제 테이블의 거의 대부분을 채웠습니다.

이제 우리는 기본함수 테이블에서 한 곳을 제외한 모든 곳을 채웠습니다. (그림4-24)를 자세히 보면, 각 줄의 기본함수는 다른 줄의 기본함수와는 상관이 없어 보입니다. 예를 들면, 파워함수 x^n은 접하는 직선의 함수가 x^n을 포함한 것을 알 수 있습니다. 하지만, 지수함수나 삼각함수를 포함하지 않았습니다. 마찬가지로 지수함수 e^x를 보면, 접하는 직선의 함수는 e^x인데, 파워함수와 삼각함수와는 관계가 없어 보입니다. 삼각함수 역시 다른 기본함수와는 상관이 없어 보입니다.

접하는 직선의 기울기 구하기

이제 삼각함수에 대한 접선의 기울기를 구하는 함수를 찾을 차례입니다.



(그림4-25) $\cos(x)$그래프에 대해 $x=\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$에서 세 개의 접선을 그렸습니다.

(그림4-25)에 $\cos(x)$함수에 대해 $x=\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$에서 세 개의 접선을 그렸습니다. 각 값에 대해 접선의 기울기가 $-1,\ 0,\ +1$인 것을 알 수 있습니다. 삼각함수는 접선의 기울기가 $-1\sim+1$사이의 값을 가집니다.

이제 $\cos(x)$함수에 대해서 접선의 기울기를 찾기 위해 $\lim$기호를 사용하여 정의하면 (식4-27)과 같습니다.

$$f^{slope}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \quad \text{(식4-27)}$$

(식4-27)을 풀기 위해서는 (식4-28)의 $\cos$함수의 합을 곱으로 바

꾸는 성질 및 (식4-29)를 알아야 합니다.

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \text{(식4-28)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{(식4-29)}$$

그러면 (식4-27)이 $-\sin(x)$가 되는 것을 알 수 있습니다.

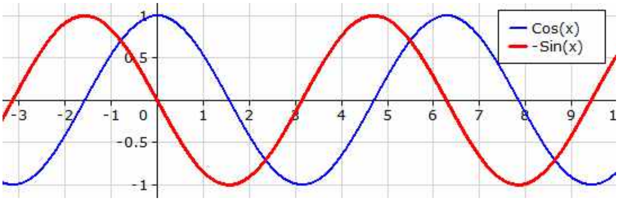
$$f^{slope}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x) \quad \text{(식4-30)}$$

$$\cos^{slope}(x) = \cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{(식4-31)}$$

(식4-31)를 유도하는 과정은 책이 의도하는 전체 흐름에 방해가 되는 것 같아 본문에 포함하지 않았습니다. (식4-31)의 증명은 "표준수학" 부분을 참고하시기 바랍니다. 비슷하게 (식4-32)를 유도할 수 있습니다.

$$\sin^{slope}(x) = \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{(식4-32)}$$

$\cos(x)$함수와 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수인 $-\sin(x)$를 함께 그려보면 (그림4-25b)와 같습니다.



(그림4-25b) $\cos(x)$의 접선의 기울기를 구하는 함수는 $-\sin(x)$

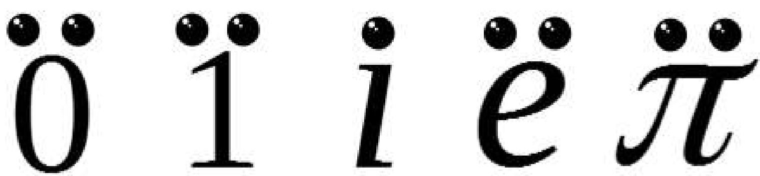
이며, 왼쪽으로 π/2만큼 밀린 형태를 취합니다.

이제 삼각함수에 대한 접선의 직선을 구하는 함수를 기본함수 테이블에 포함하면 우리는 (그림4-26)을 얻을 수 있습니다. 마침내 기본함수의 테이블을 구성하는 모든 항목들을 찾았습니다!

	원함수	접하는 직선	역함수	이상한 수
파워함수	x^n	nx^{n-1}	${}^{n}x$	i
지수함수	e^x	e^x	${}_{e}x$	e
삼각함수	$\cos(x)$ $\sin(x)$	$-\sin(x)$ $\cos(x)$	$acos(x)$ $asin(x)$	π

(그림4-26) 기본함수테이블: 마침내 모든 기본함수를 찾았습니다. 각 기본함수마다 하나씩 기본수 i, e, π도 찾았습니다.

(그림4-26)을 보면, 접하는 직선을 나타내는 함수가 원함수로 표현된다는 것은 참으로 놀랍습니다. 파워함수 x^n의 접선 함수도 x^n을 포함하고, 지수함수 e^x의 접선 함수도 e^x를 포함하고, 삼각함수 $\cos(x)$와 $\sin(x)$도 삼각함수를 포함합니다.



(그림4-26b) 우리는 이제 기본수 다섯 개를 모두 찾았습니다!

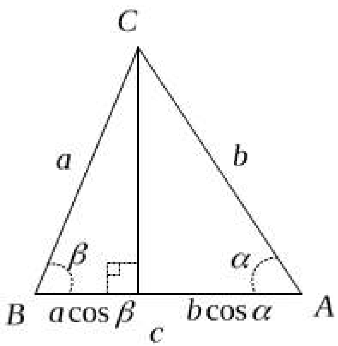
아직 (그림4-26)에서 “아름다움”을 느끼기에는 부족합니다. 아름다움을 느끼기 위해서는 복소수의 곱셈의 의미를 이해해야 합니다. 우리는 5장에서 벡터의 추가적인 연산과 복소수의 곱셈의 의미를 살펴보고 모든 기본함수 및 기본 수 $0, 1, i, e$ 및 π가 하나의 수식으로 표현된 것을 이해하게 될 것입니다. 그것은 연관성이 없어 보이는 *기본 함수(elementary functions)와 기본 수(elementary numbers)가 서로 밀접하게 연관*되어 있다는 것을 의미합니다!

4장의 나머지 부분은 본문에서 증명하지 않은 수식에 대한 증명을 담고 있습니다. 전체적인 흐름에는 방해가 되므로, 읽지 않아도 무방합니다. 책을 두 번째 읽는다거나, 식이 유도된 과정이 궁금하신 분들은 참고하시기 바랍니다.

표준수학

코싸인의 법칙(Law of cosines)

본문의 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (식4-17) 코싸인의 법칙을 증명해 보도록 하겠습니다.



(그림4-26c) 삼각형의 세변의 길이와 내각의 관계에 대한 법칙을 코싸인의 법칙이라고 합니다.

(그림4-26c)에서 c의 길이를 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$c = acon\beta + b\cos\alpha \quad \text{(식4-32b)}$$

(식4-32b)의 양변에 c를 곱하면, (식4-32c)를 얻습니다.

$$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha \quad \text{(식4-32c)}$$

비슷한 방식으로 a와 b에 대해 아래 식들을 유도할 수 있습니다.

$$a^2 = ac\cos\beta + ab\cos\gamma \quad \text{(식4-32d)}$$

$$b^2 = bc\cos\alpha + ab\cos\gamma \quad \text{(식4-32e)}$$

위 (식4-32d)와 (식4-32e)를 더하면 (식4-32f)를 얻습니다.

$$a^2 + b^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha + 2ab\cos\gamma \quad \text{(식4-32f)}$$

(식4-32f)에서 (식4-32c)를 빼면 아래 (식4-32g)를 얻습니다.

(식4-32f) - (식4-32c)

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 - c^2 \\ &= ac\cos\beta + bc\cos\alpha + 2ab\cos\gamma - (ac\cos\beta + bc\cos\alpha) \end{aligned} \quad \text{(식4-32g)}$$

(식4-32g)를 간단히 하면 다음 (식4-32h)를 얻는데 이것을 코싸인의 법칙이라고 합니다.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{(식4-32h)}$$

코싸인의 법칙에서 $\gamma = \pi/2$인 경우, $-2ab\cos\gamma = 0$이 되므로, 피타고라스의 정리 $c^2 = a^2 + b^2$가 성립함을 알 수 있습니다.

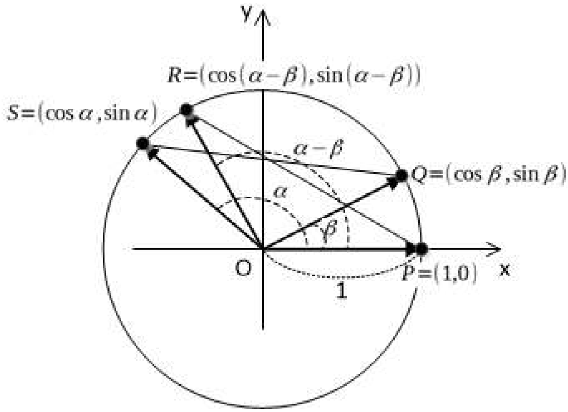
표준수학
삼각함수의 법칙

cos함수와 sin함수는 주기함수(periodic function)입니다. 그래서 cos, sin함수의 파라미터가 합으로 표현된 경우, 이것을 cos, sin함수의 곱의 조합으로 표현되는 성질을 가지고 있습니다. 또한 cos, sin함수의 곱으로 표현된 항(term)을 합의 형태로 표현할 수 있는 성질도 있습니다.

먼저 cos, sin함수의 파라미터가 두 개의 값 α,β의 합으로 표현된 경우, ***각의 합과 차의 법칙(the angle addition and subtraction theorems)***은 다음 (식4-33)~(식4-36)와 같습니다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{(식4-33)}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \text{(식4-34)}$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{(식4-35)}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \text{(식4-36)*}$$

위 식들 중에서 (식4-36)*이 유도된 과정을 살펴보겠습니다. 단위원(unit circle)과 1사분면에서 x축과 만나는 지점을 $P(1,0)$라고 하겠습니다. P를 반시계 방향으로 α만큼 회전한 점을 $S=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$라고 하고, β만큼 회전한 점을 $Q=(\cos\beta,\sin\beta)$, $\alpha-\beta$만큼 회전한 점을 $R=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$이라고 하겠습니다. 이것을 아래 (그림4-26d)에 나타내었습니다.



(그림4-26d) 원에 내접하는 합동인 두 삼각형의 관계를 파악합니다.

위 그림에서 삼각형 $\triangle OQS$와 $\triangle OPR$은 서로 합동(congruent)입니다. 그러므로 $|\overline{SQ}|=|\overline{PR}|$입니다. 그리고 각 선분의 길이를 (식4-36b)와 (식4-36c)와 같이 얻을 수 있습니다.

$$\triangle OQS \equiv \triangle OPR$$

$$S=(\cos\alpha,\sin\alpha)$$

$$Q=(\cos\beta,\sin\beta)$$

$$P=(1,0)$$

$$R=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$$

$$|\overline{SQ}|=|\overline{PR}| \quad \text{(식4-36b)}$$

$$|\overline{SQ}|=\sqrt{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2} \quad \text{(식4-36c)}$$

$$|\overline{PR}|=\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2} \quad \text{(식4-36d)}$$

(식4-36b)의 양변을 제곱하여 각각 (식4-36e)와 (식4-36f)를 얻을 수 있습니다.

$$\begin{aligned}|\overline{SQ}|^2 &= (\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha) \\ &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

(식4-36e)

$$\begin{aligned}|\overline{PR}|^2 &= (\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1) + \sin^2(\alpha-\beta) \\ &= (\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 \\ &= 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 \\ &= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

(식4-36f)

(식4-36e)와 (식4-36f)는 같은 값이므로 (식4-36g)를 유도할 수 있습니다.

$$\begin{gathered}|\overline{SQ}| = |\overline{PR}| \\ (2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta) = (2 - 2\cos(\alpha-\beta)) \\ (-2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta) = (-2\cos(\alpha-\beta)) \\ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)\end{gathered}$$

(식4-36g)

그러므로 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (식4-36)*이 성립하는 것을 알 수 있습니다. 다른 성질도 비슷하게 유도할 수 있습니다.

두 개의 값 α, β를 각각 파라미터로 가지는 $\cos, \sin$함수의 곱으로 표현된 항은 (식4-37)~(식4-40)처럼 ***곱을 합(Product-to-sum)으로*** 변환할 수 있습니다.

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ (식4-37)

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ (식4-38)

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ (식4-39)

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$ (식4-40)

두 개의 값 α,β를 각각 파라미터로 가지는 $\cos,\sin$함수의 합으로 표현된 식은 삼각함수의 ***합과 곱의 법칙(Sum-to-product)***에 의해 (식4-41)~(식4-44)와 같은 성질을 가집니다.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ (식4-41)

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$ (식4-42)

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ (식4-43)

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ **(식4-44)***

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ (식4-45)

(식4-44)*는 $\cos'(x) = -\sin(x)$를 증명하기 위해서 사용합니다.

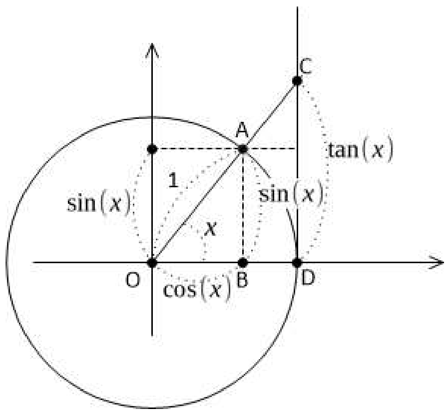
표준수학

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$의 증명

$\cos^{slope}(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$ (식4-31)을 증명하는데, (식4-46)이 필요합니다. 그래서 (식4-46)를 유도하는 과정을 살펴보도록 하겠습니다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (식4\text{-}46)$$

(식4-46)을 증명하기 위해서, (그림4-27) 처럼 표준 좌표계에 그려진 반지름의 길이가 1인 단위원과 단위원의 중점에서 그은 임의의 반직선과 원이 만나는 지점을 A, A에서 x-축으로 투영한 직선과 x-축이 만나는 지점을 B, x-축과 원이 1사분면에서 만나는 지점을 D, 반직선 $\overrightarrow{OA}$와 D에서 시작하는 y-축과 평행한 직선이 만나는 지점을 C라고 합시다.

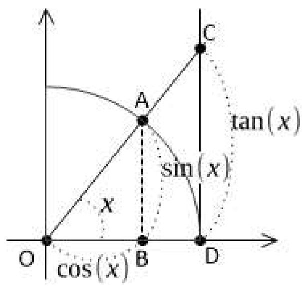


(그림4-27) 단위원에 반직선을 그어서 삼각형과 부채꼴의 면적의 관계를 분석해 봅니다.

그러면 선분의 길이는 다음 (식4-47)~(식4-51)과 같습니다.

$$|\overline{OA}| = 1 \quad \text{(식4-47)}$$
$$|\overline{OD}| = 1 \quad \text{(식4-48)}$$
$$|\overline{OB}| = \cos(x) \quad \text{(식4-49)}$$
$$|\overline{AB}| = \sin(x) \quad \text{(식4-50)}$$
$$|\overline{CD}| = \tan(x) \quad \text{(식4-51)}$$

이제 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ 및 부채꼴(sector) OAD를 별도로 나타내면 (그림4-28)과 같습니다.

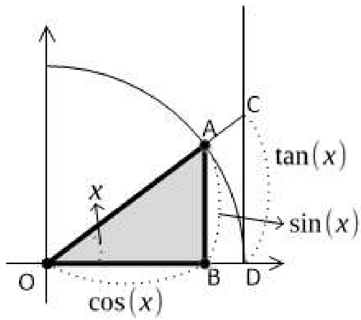


(그림4-28) 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ 및 부채꼴(sector) OAD의 면적의 관계를 분석합니다.

(그림4-28)에서 부채꼴(sector) OAD의 면적은 항상 삼각형 $\triangle OAB$의 면적보다는 크고 삼각형 $\triangle OCD$의 면적보다는 작은 것을 알 수 있습니다. x가 무한으로 0에 가까이 가더라도 이 성질은 만족합니다.

$\triangle OAB$의 면적 $\leq$ 부채꼴 OAD의 면적 $\leq$ $\triangle OCD$의 면적 (식4-52)

이제 (식4-52)가 이루는 부등식의 각 항의 면적을 계산해 보도록 하겠습니다.

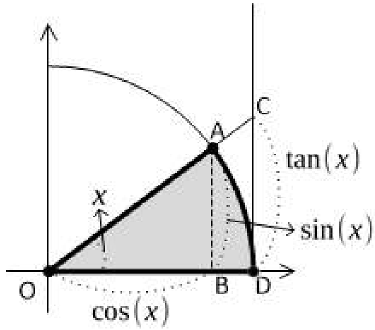


(그림4-29) 삼각형 $\triangle OAB$의 면적은 $\frac{1}{2}cos(x)\sin(x)$입니다.

삼각형 $\triangle OAB$에 대해서 밑변의 길이 $\cos(x)$와 높이 $\sin(x)$를 알고 있으므로, 면적은 (식4-53)과 같이 구할 수 있습니다.

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}cos(x)\sin(x) \quad \text{(식4-53)}$$

다음으로 부채꼴 OAD의 면적을 구해 봅시다.

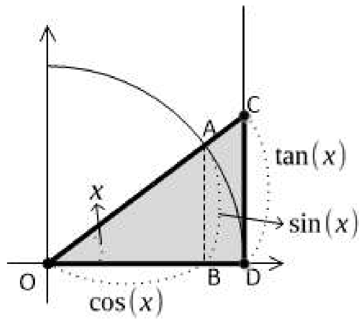


(그림4-30) 부채꼴 OAD가 차지하는 비율은 원 둘레(2π)에 대해서 x만큼 이므로, $x/(2\pi)$입니다.

부채꼴 OAD의 면적은 반지름이 r인 원의 면적(area)이 πr^2이고, 부채꼴의 면적이 원의 전체 면적에 대해 차지하는 비율이 $x/2\pi$이므로 πr^2과 $x/2\pi$를 곱하여 (식4-54)와 같이 면적을 구할 수 있습니다.

$$\pi r^2 \frac{x}{2\pi} = \pi 1^2 \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2} \quad \text{(식4-54)}$$

다음으로 삼각형 $\triangle OCD$의 면적을 구해봅시다.



(그림4-31) 삼각형 $\triangle OCD$의 면적은 $\frac{1}{2}\times 1\times \tan(x)$입니다.

삼각형 $\triangle OCD$의 밑변의 길이는 $|\overline{OD}|=1$이고, 높이는 $\tan(x)$이므로 (식4-55)와 같이 면적을 구할 수 있습니다.

$$\triangle OCD=\frac{1}{2}tan(x) \quad \text{(식4-55)}$$

이제 (식4-53), (식4-54) 및 (식4-55)를 (식4-52)에 대입하면 아래 (식4-56)이 됩니다.

$$\frac{1}{2}cos(x)\sin(x) \ \leq \ \frac{x}{2} \ \leq \ \frac{1}{2}tan(x) \quad \text{(식4-56)}$$

(식4-56)을 $\sin(x)/x$가 나타나도록 식을 변형하면 다음과 같이 유도할 수 있습니다.

$$\cos(x)\sin(x) \ \leq \ x \ \leq \ \tan(x) \quad \text{(식4-57)}$$

$$\cos(x)\sin(x) \ \leq \ x \ \leq \ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{(식4-58)}$$

$$\cos(x)\frac{\sin(x)}{x} \ \leq \ (x\frac{1}{x}=1) \ \leq \ \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{(식4-59)}$$

(식4-59)의 좌측 부분에 대해서 양변에 $1/\cos(x)$를 곱하면 다음과 같이 됩니다.

$$\cos(x)\frac{\sin(x)}{x} \ \leq \ 1$$

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{(식4-60)}$$

(식4-59)의 우측 부분에 대해서 양변에 $\cos(x)$를 곱하면 다음과 같이 됩니다.

$$1 \leq \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{(식4-61)}$$

이제 (식4-60)과 (식4-61)을 결합하여 (식4-62)를 구성합니다.

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{(식4-62)}$$

$\cos(x)$와 $1/\cos(x)$에 대해서 $\lim$를 적용하면 다음과 같습니다.

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 \quad \text{(식4-63)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \quad \text{(식4-64)}$$

그러므로 우리는 (식4-65)*와 같은 결론을 내릴 수 있습니다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{(식4-65)}$$

표준수학

$\cos'(x) = -\sin(x)$의 증명

$\cos(x)$의 접하는 직선의 기울기를 구하는 함수는 $-\sin(x)$입니다. 이것을 구하는 과정을 알아보도록 하겠습니다.

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{(식4-66)}$$

$$\cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x) \quad \text{(식4-67)}$$

(식4-66)을 증명하기 위해서는 먼저 (식4-68)과 (식4-65)를 알고 있어야 합니다.

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \text{(식4-68)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(식4-67)에 (식4-68)을 적용하면 다음과 같습니다.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+(x+h)}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right) \quad \text{(식4-69)}$$

2는 $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}$이므로 위 (식4-69)에서 계수 2를 다음과 같이 분자로 보내서 (식4-70)과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\lim_{h \to 0}\left(-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right) \quad \text{(식4-70)}$$

$\lim_{x \to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ (식4-65)에 의해 (식4-70)을 간단히 하면 다음과 같습니다.

$$=\lim_{h \to 0}\left(-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)1\right)$$
$$=\lim_{h \to 0}\left(-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right)$$
$$=-\sin\left(\frac{2x+0}{2}\right)$$
$$=-\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$
$$=-\sin(x)$$

그러므로 $\cos'(x)=-\sin(x)$입니다.

@