선형대수학

박찬영

June 21, 2024

Contents

Chapter 1

벡터공간

선형대수학은 벡터와 선형성을 보존하는 변환에 대해 다루는 과목이다.
가장 처음으로는 벡터에대해 다루도록 하자.

1.1 벡터공간과 부분공간

1.1.1 체

벡터공간을 정의하기 앞서 체가 무엇인지에 대해 이야기하고 간다.

체

정의. 체는 $+$와 $\cdot$에 대해 다음의 성질을 만족하는 집합 $\mathbf{F}$이다.

$$\forall x, y, z \in \mathbf{F},\ (x+y)+z = x+(y+z) \tag{체 1}$$
$$\forall x, y \in \mathbf{F},\ x+y = y+x \tag{체 2}$$
$$\exists 0 \in \mathbf{F}, \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in \mathbf{F},\ x+0 = x \tag{체 3}$$
$$\forall x \in \mathbf{F},\ \exists\,(-x) \quad \text{s.t.} \quad x+(-x) = 0 \tag{체 4}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbf{F},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{체 5}$$
$$\forall x, y \in \mathbf{F},\ x \cdot y = y \cdot x \tag{체 6}$$
$$\exists 1 \in \mathbf{F}, \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in \mathbf{F},\ x \cdot 1 = x \tag{체 7}$$
$$\forall x \in \mathbf{F},\ x \neq 0 \implies \exists\, x^{-1} \quad \text{s.t.} \quad x \cdot x^{-1} = 1 \tag{체 8}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbf{F},\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{체 9}$$

대표적인 체의 예시로는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 와 실수체, 복소수체 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$가 있다.
더욱 쉬운 체의 이해는 사칙연산이 잘 정의된 집합이다.

예시 1.1.1. $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 에 대해 덧셈$(+)$과 곱셈$(\cdot)$ 을 다음과 같이 정의하자

$$\begin{array}{llll} 0+0=0, & 0+1=1, & 1+0=1, & 1+1=0 \\ 0\cdot 0=0, & 0\cdot 1=0, & 1\cdot 0=0, & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

이면 $\mathbb{Z}_2$는 체가 된다.

1.1.2 벡터공간

이제 벡터공간을 정의 해보자.

벡터공간

정의. 체 $\mathbf{F}$에 대해 $+$와 $\cdot$이 정의되어 다음 조건을 만족하는 집합 V를 벡터공간이라고 한다.

$$\forall a \in \mathbf{F},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V,\ a \cdot \mathbf{x} \in V \qquad \text{(벡터공간 1)}$$
$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \qquad \text{(벡터공간 2)}$$
$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \qquad \text{(벡터공간 3)}$$
$$\exists \mathbf{0} \in V, \quad \text{s.t.} \quad \forall \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \qquad \text{(벡터공간 4)}$$
$$\forall \mathbf{x} \in V,\ \exists\, \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad \text{(벡터공간 5)}$$
$$\forall a, b \in \mathbf{F},\ \forall \mathbf{x} \in V,\ (a \cdot b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) \qquad \text{(벡터공간 6)}$$
$$\exists 1 \in \mathbf{F}, \quad \text{s.t.} \quad \forall \mathbf{x} \in V,\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad \text{(벡터공간 7)}$$
$$\forall a, b \in \mathbf{F},\ \forall \mathbf{x} \in V,\ (a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x} \qquad \text{(벡터공간 8)}$$
$$\forall a \in \mathbf{F},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y} \qquad \text{(벡터공간 9)}$$

벡터공간의 원소를 벡터라고 부르고 체 $\mathbf{F}$의 원소를 스칼라라고 부른다.
이제 벡터공간의 정의로부터 이끌어내는 성질들을 살펴보자.

정리 1.1.1. 벡터공간 V에 대해 다음이 성립한다.
(1) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ 에 대해 $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 이다.
(2) $\forall \mathbf{x} \in V,\ 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$
(3) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$인 $\mathbf{y}$는 유일하고, $\mathbf{y} = -1 \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$이다.
(4) $\forall a \in \mathbf{F},\ a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$이다.

증명
(1) $\mathbf{z} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$인 $\mathbf{v}$를 더하면 보일 수 있다.
(2) $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x}$에서 보일 수 있다.
(3) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x} = (1 - 1)\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}$ (1)에의해 $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$
(4) (2)와 유사하다.

1.2 생성과 일차독립

1.3 기저와 차원