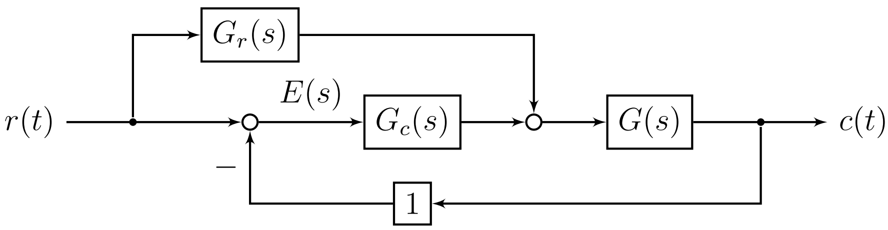
西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2018 − 2019 学年秋学期

开课学院 航天学院 课程 自动控制理论 1 学时 48

考试日期 考试时间 小时 考试形式 $\begin{pmatrix}开\\闭\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}$ 卷

一、（20 分）已知控制系统结构图如下所示，已知 $G(s)=\frac{1}{s+1}, G_c(s)=1$ 。若 $G_r(s)=\frac{k_1 s+k_2}{s+1}, r(t)=t, (t>0)$ ，分析是否存在 k_1, k_2 使稳态误差为零。



答：当 $G_r(s)=\frac{k_1 s+k_2}{s+1}, r(t)=t, (t>0)$ 时, 得：

$$\begin{aligned}\frac{E(s)}{R(s)} &= (1-\frac{k_1 s+k_2}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1})\frac{1}{1+\frac{1}{s+1}}\\ &= \frac{(s+1)^2-(k_1 s+k_2)}{(s+2)(s+1)}\\ &= \frac{s^2+(2-k_1)s+(1-k_2)}{(s+2)(s+1)}\end{aligned}$$

所以，当 $k_1=2, k_2=1$ 时，

$$\begin{aligned}E(s) &= \frac{s^2+(2-k_1)s+(1-k_2)}{(s+2)(s+1)}\cdot R(s)\\ &= \frac{s^2}{(s+2)(s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}\\ &= \frac{1}{(s+2)(s+1)}\\ e_{ss} &= \lim_{s\to 0} sE(s)\\ &= 0\end{aligned}$$

二、(20 分) 单位负反馈系统开环传递函数

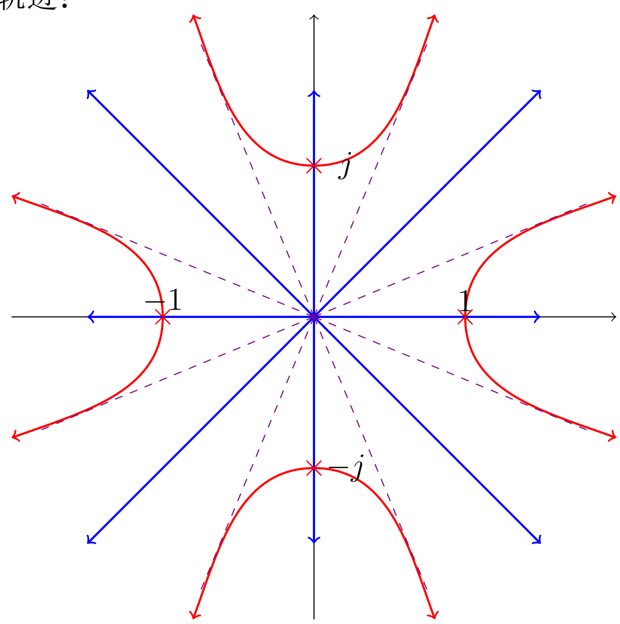
$$G(s)=\frac{k}{(s^2+1)^2(s^2-1)^2}$$

绘制关于 $k\in\mathbb{R}$ 的根轨迹。

解：开环系统没有零点，其有 8 个极点：$-j,-j,j,j,-1,-1,1,1$ 。

- $k>0$ 时，
  - -1 处根轨迹有两个分支，起始角：$\pm 90^\circ$,
  - 极点 $+1$ 处根轨迹有两个分支，起始角：$\pm 90^\circ$ 。
  - 极点 $-j$ 处根轨迹有两个分支，起始角 $180^\circ, 0$,
  - 极点 j 处根轨迹有两个分支，起始角 $180^\circ, 0$。
  - 渐近线方向 $\frac{(2k+1)\pi}{8}, k=0,\cdots,7$。
  - 渐近线交点:$(0,0)$。
- $k<0$ 时，
  - 实轴与虚轴上的点都符合根轨迹方程相角条件。
  - 原点 $(0,0)$ 为 4 个根轨迹分支的分离点。分离角 $\frac{(2k+1)\pi}{4}, k=0,\cdots,3$。

根轨迹：



三、（20 分）已知单位负反馈系统开环传递函数：

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-s}$$

分析系统稳定性。若系统稳定，计算单位阶跃输入的稳态误差。

答：

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{k}{j\omega} \cdot e^{j\omega} \\ \omega_c &= k \\ \omega_x &= \frac{\pi}{2} \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} - k \end{aligned}$$

$k < \frac{\pi}{2}$ 时，系统稳定，因此系统稳定。

由系统为 I 型系统可知，单位阶跃输入情况下稳态误差为 0。

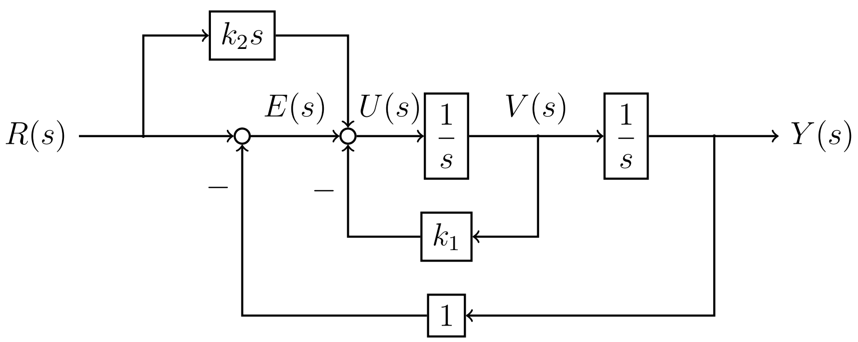
四、（20 分）已知系统微分方程组如下：

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = v(t) \\ &\dot{v}(t) = k_2\dot{r}(t) + r(t) - y(t) - k_1 v(t) \end{aligned}$$

绘制结构图；求解当 $v(0) = 1, y(0) = 1, r(t) = t$ 时的稳态误差；分析当 k_1, k_2 取何值时系统为临界阻尼系统。

答：

系统结构图如下：



考虑到初始条件，进行 Laplace 变换，得：

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0) &= V(s) \\ sY(s) - 1 &= V(s) \\ sV(s) - v(0) &= k_2 sR(s) + R(s) - Y(s) - k_1 V(s) \\ (s + k_1)V(s) - 1 &= k_2 sR(s) + R(s) - Y(s) \\ s(s + k_1)Y(s) - (s + k_1) - 1 &= k_2 sR(s) + R(s) - Y(s) \\ Y(s) &= \frac{k_2 sR(s) + R(s) + s + k_1 + 1}{s(s + k_1) + 1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - Y(s) \\
&= \frac{s(s+k_1)R(s) - k_2 sR(s) - s - k_1 - 1}{s(s+k_1)+1}
\end{aligned}
$$

当 $k_1 > 0$ 时，系统稳定。当 $k_1 = 2$ 时为临界阻尼系统。$r(t) = t$ 时：

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} sE(s) &= \frac{(s+k_1) - k_2 - s^2 - k_1 s - s}{s(s+k_1)+1} \\
&= k_1 - k_2
\end{aligned}
$$

五、（20 分）已知单位负反馈系统闭环传递函数：

$$
\Phi(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 2}
$$

分析系统稳定性与稳定裕度。

答：Routh 表：

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 3 & 2 \\
s^1 & \frac{1}{3} & 0 \\
s^0 & 2 &
\end{array}
$$

可知闭环系统稳定。

系统开环传递函数为：

$$
G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 1}
$$

计算相角裕度：

$$
\begin{aligned}
|G(j\omega_c)| &= 1 \\
\omega_c &= 0 \\
\gamma &= 180^\circ
\end{aligned}
$$

原系统穿越频率 ω_x 与开环传递函数为

$$
G'(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + s + 1}
$$

的系统相同。当选取合适的 k 使 Nyquist 曲线穿过 (-1+0j) 时，此时闭环系统

$$
\Phi'(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 1 + k}
$$

存在纯虚根，可通过 Routh 判据计算出此时的 ω_x。

Routh 表：

$$
\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 3 & 1+k \\
s^1 & 1 - \frac{1+k}{3} & 0
\end{array}
$$

令 $k=2$, 则出现全零行，构建辅助方程 $3s^2+3=0$，得：

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \pm 1j \\
\omega_x &= 1 \\
|G(j\omega_x)| &= \frac{1}{|-1j-3+1j+1|} \\
&= \frac{1}{2} \\
h &= 2
\end{aligned}
$$