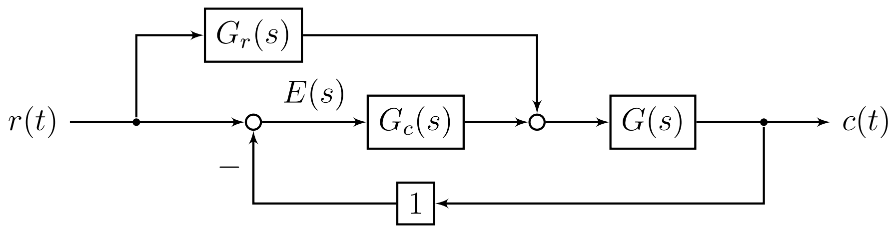
西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2015 — 2016 学年第 1 学期

开课学院 航天学院 课程 自动控制理论 II 学时 32

考试日期________ 考试时间_____ 小时 考试形式（闭）（B）卷

一、（20 分）已知控制系统结构图如下所示，已知 $G(s)=\frac{1}{s+1},G_c(s)=1$ 。若 $G_r(s)=\frac{k_1s+k_2}{s+1},r(t)=t,(t>0)$，是否存在 k_1,k_2 使稳态误差为零？若 $G_r(s)=Ae^{-\theta s},r(t)=sin(t),(t>0)$ 是否存在 $A,\theta,(\theta\in(0,2\pi))$ 使系统稳态输出 $c(t)=sin(t)$ ？



答：当 $G_r(s)=\frac{k_1s+k_2}{s+1},r(t)=t,(t>0)$ 时, 得：

$$\begin{aligned}\frac{E(s)}{R(s)}&=(1-\frac{k_1s+k_2}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1})\frac{1}{1+\frac{1}{s+1}}\\&=\frac{(s+1)^2-(k_1s+k_2)}{(s+2)(s+1)}\\&=\frac{s^2+(2-k_1)s+(1-k_2)}{(s+2)(s+1)}\end{aligned}$$

所以，当 $k_1=2,k_2=1$ 时，

$$\begin{aligned}E(s)&=\frac{s^2+(2-k_1)s+(1-k_2)}{(s+2)(s+1)}\cdot R(s)\\&=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}\\&=\frac{1}{(s+2)(s+1)}\\e_{ss}&=\lim_{s\to 0}sE(s)\\&=0\end{aligned}$$

当 $G_r(s)=Ae^{-\theta s},r(t)=sin(t),(t>0)$ 时：

$$\begin{aligned}G(j\omega)&=\frac{1}{j\omega+1}\\G_r(j\omega)&=Ae^{-j\theta\omega}\\\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}&=\frac{G(j\omega)+G_r(j\omega)G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1 + Ae^{-j\theta\omega}}{2 + j\omega}$$

稳态时，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right|_{\omega=1} &= \left.\frac{1 + Ae^{-j\theta\omega}}{2 + j\omega}\right|_{\omega=1} \\
&= \frac{1 + Ae^{-j\theta}}{2 + j} \\
&= 1
\end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2} \\
\theta &= 2n\pi - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{7\pi}{4}
\end{aligned}$$

二、（20 分）单位负反馈控制系统开环传递函数，

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+5)}$$

串联校正网络：

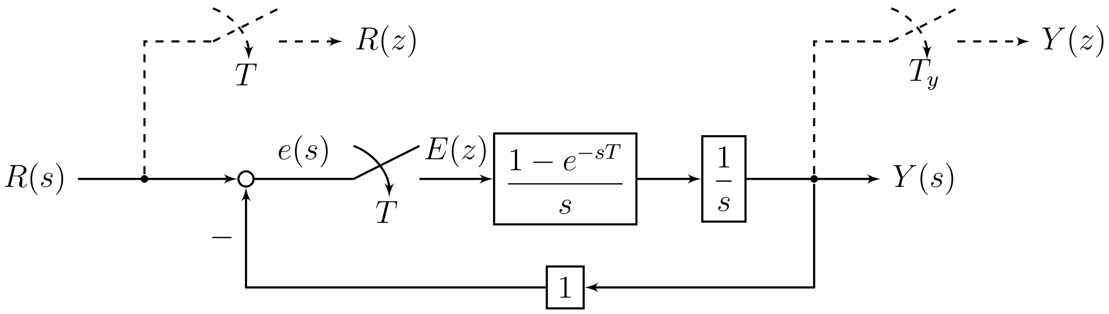
$$G_c(s) = k \cdot \frac{aT_a s + 1}{T_a s + 1}$$

能否调整 k, a, T_a 使校正后系统截止频率保持不变，同时使相角裕度提高 60° 。

答：

$$\begin{aligned}
\phi_m &= \arcsin\frac{a-1}{a+1} \\
&= 60^\circ \\
a &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
\omega_c &= 2 = \omega_m \\
&= \frac{1}{T_a\sqrt{a}} \\
T_a &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \\
k &= \frac{1}{\sqrt{a}} \\
&= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

三、（20 分）已知控制系统结构图如下所示。当 $T_y = T, r(t) = t, (t > 0)$ 时求系统稳态误差；当 $T_y = \frac{T}{2}, R(z) = 1$ 时，求 $Y(z)$ 。



常见 Z 变换表：

$f(t)$	$F(s)$	$F(Z)$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$

答：当 $r(t) = t, (t > 0)$ 时：

$$
\begin{aligned}
\frac{E^*(s)}{R^*(s)} &= \frac{1}{1 + \left[\frac{1-e^{-sT}}{s^2}\right]^*} \\
\frac{E(z)}{R(z)} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{Tz^{-2}}{(1-z^{-1})^2}\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{Tz^{-1}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}} \\
&= \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + Tz^{-1}} \\
E(z) &= \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + Tz^{-1}} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})} \\
&= \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + (T - 1)z^{-1})}
\end{aligned}
$$

系统极点为 $z = 1 - T$ 。当 $T \in (0, 2)$ 时，系统稳定。稳态误差为：

$$
\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) E(z) = 1
$$

当 $R(z) = 1, T_y = \frac{T}{2}$ 时, 利用修正 Z 变换方法可计算 $Y(z)$ ：

$$
\begin{aligned}
Y^*(s) &= \left[E^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s^2}\right]^*_{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-2} + Tz^{-2}} \cdot \left(\frac{\frac{T}{2} z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{\frac{T}{2} z^{-3}}{(1 - z^{-1})^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-2}+Tz^{-2}} \cdot \frac{\frac{T}{2}z^{-1}(1-z^{-2})}{(1-z^{-1})^2} \\
&= \frac{\frac{T}{2}z^{-1}(1+z^{-1})^2}{1-z^{-2}+Tz^{-2}}
\end{aligned}
$$

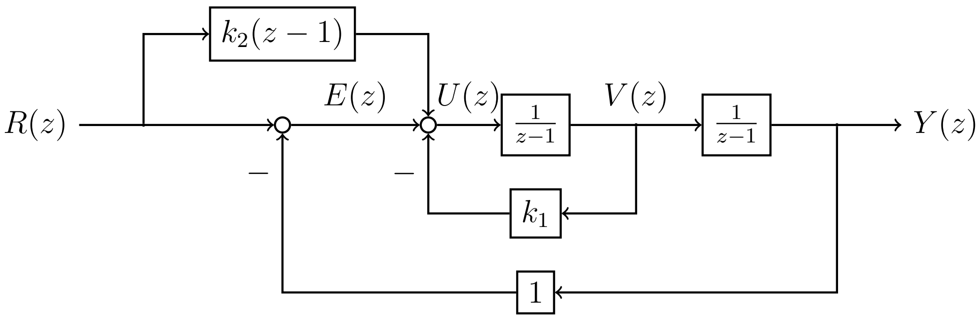
四、（20 分）已知控制系统模型如下：

$$
\begin{aligned}
y(n+1) &= y(n)+v(n) \\
v(n+1) &= v(n)+u(n) \\
u(n) &= e(n)-k_1v(n)+k_2(r(n+1)-r(n) \\
e(n) &= r(n)-y(n)
\end{aligned}
$$

求脉冲传递函数 $G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}$，其中 $Y(z)=\mathcal{Z}[y(n)], R(z)=\mathcal{Z}[r(n)]$ ；零初始条件下，$k_2=0, r(n)=1, (n\geq 0)$ 时, 为使系统超调量 $\sigma\%=0$, 且调节时间尽可能小, k_1 应取何值? 零初始条件下，$r(n)=n, (t>0)$ 时，k_1, k_2 取何值可使 $\lim_{n\to\infty} e(n)=0$?

答：

系统结构图：



由梅森公式，得：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\frac{k_2}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}}{1+\frac{k_1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}} \\
&= \frac{1+k_2(z-1)}{(z-1)^2+(z-1)k_1+1} \\
&= \frac{k_2z-k_2+1}{z^2+(k_1-2)z-k_1+2}
\end{aligned}
$$

当系统极点为实数时, 满足 $\sigma\%=0$, 其中具有重极点时调节时间最小, 因此

$$
\begin{aligned}
(k_1-2)^2 &= 4(2-k_1) \\
k_1 &= \pm 2
\end{aligned}
$$

舍去 $k_1=-2$(不稳定)，得：$k_1=2$ 。

零初始条件下，$r(n)=n, R(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ 时，

$$
E(s)=R(s)-G(s)R(s)
$$

$$= \frac{(z-1)^2 + (z-1)k_1 - (z-1)k_2}{k_2 z - k_2 + 1} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

判断稳定性：

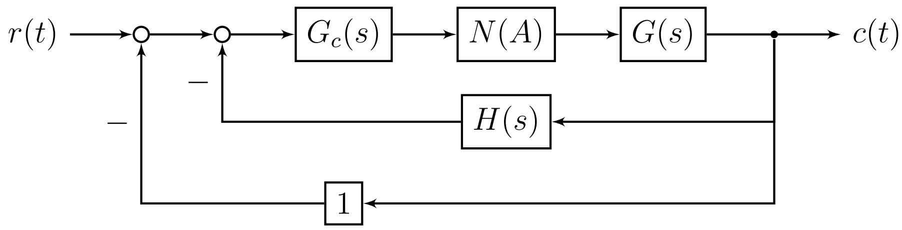
$$\begin{aligned} \frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + \frac{(w+1)(k_1-2)}{w-1} - k_1 + 2 = 0 \\ (w+1)^2 + (w+1)(w-1)(k_1-2) - (k_1-2)(w-1)^2 = 0 \\ w^2 + 2(k_1-1)w - 2k_1 + 5 = 0 \end{aligned}$$

当 $1 < k_1 < \frac{5}{2}$ 时系统稳定，且有：

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} e(n) &= \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) \\ &= k_1 - k_2 \end{aligned}$$

因此，当 $1 < k_1 < \frac{5}{2}, k_1 = k_2$ 时可使 $\lim_{n\to\infty} e(n) = 0$

五、（20 分）已知控制系统结构图如下所示，已知 $G_c(s) = 1, H(s) = s, G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}, N(A) = \frac{1}{A+k}$，求使系统稳定、无自振的 k 的范围。



答：系统等效开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

计算 Nyquist 曲线与虚轴交点：

$$\begin{aligned} \omega_x &= 1 \\ G(\omega_x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nyquist 曲线不包围负倒描述函数或与其相交：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N(A)} &< -\frac{1}{2}, A \in (0, \infty) \\ -A - k &< -\frac{1}{2} \\ k &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$