ASEN 5010 John Clouse

Problem 1: S&J 8.10 a) develop pos + vel feedback law to stabilize about 0 attitude orientation
-using Euler Angles, Euler Params, σ

$$[I]\dot{\vec\omega} = -[\tilde\omega][I]\vec\omega + \vec u + \vec L^{\,0}$$

$\vec\omega_r = 0$, $\delta\vec\omega = \vec\omega - \vec\omega_r$, $\dot{\vec\omega}_r = 0$

MRP:

$$V = \frac{1}{2}\delta\vec\omega^T[I]\delta\vec\omega + 2K\ln(1+\vec\sigma^T\vec\sigma).$$

$$\dot V = \delta\vec\omega^T\left([I]\frac{^Bd}{dt}(\delta\vec\omega) + K\vec\sigma\right) = -\delta\vec\omega^T[P]\delta\vec\omega$$

$$\Rightarrow [I]\frac{^Bd}{dt}(\delta\vec\omega) + K\vec\sigma + [P]\delta\vec\omega = 0$$

$$\frac{^Bd}{dt}(\delta\vec\omega) = \frac{^Bd}{dt}\vec\omega - \frac{^Bd}{dt}\vec\omega_r = \dot{\vec\omega} + \cancel{\vec\omega\times\vec\omega}^{\,0} - (\dot{\vec\omega}_r + \vec\omega_r\times\vec\omega) = \dot{\vec\omega} - \dot{\vec\omega}_r + \vec\omega\times\vec\omega_r$$

$$= \dot{\vec\omega} - \dot{\vec\omega}_r + [\tilde\omega]\vec\omega_r$$

$$\Rightarrow [I]\dot{\vec\omega} - [I](\dot{\vec\omega}_r - [\tilde\omega]\vec\omega_r^{\,0}) + K\vec\sigma + [P]\delta\vec\omega = 0$$

$$= \underbrace{-[\tilde\omega][I]\vec\omega + \vec u + \vec L}_{\text{modelled gyroscopics}} \underbrace{-[I](\dot{\vec\omega}_r - [\tilde\omega]\vec\omega_r)}_{\text{modelled Torque} = 0} + \underbrace{K\vec\sigma + [P]\delta\vec\omega}_{\text{Feedback}}$$

Let $\vec u = K\vec\sigma + [P]\delta\vec\omega = K\vec\sigma + [P]\vec\omega$

EP:

$$V = \frac{1}{2}\delta\vec\omega^T[I]\delta\vec\omega + K(\beta-\hat\beta)^T(\beta-\hat\beta) \qquad \hat\beta = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec\epsilon = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$$

$$\dot V = \vec\omega^T\left([I]\dot{\vec\omega} + K[B(\beta)]^T(\beta-\hat\beta)\right) = \vec\omega^T\left([I]\dot{\vec\omega} + K\vec\epsilon\right) = -\vec\omega^T[P]\vec\omega$$

$$\Rightarrow [I]\dot{\vec\omega} + K\vec\epsilon + [P]\vec\omega = 0 = -[\tilde\omega][I]\vec\omega + \vec u + \vec L + K\vec\epsilon + [P]\vec\omega$$

Let $\vec u = K\vec\epsilon + [P]\vec\omega$

EA:

$$V = \frac{1}{2}\vec\omega^T[I]\vec\omega + \frac{1}{2}\vec\theta^T[K]\vec\theta$$

$$\dot V = \vec\omega^T\left([I]\dot{\vec\omega} + [B(\vec\theta)]^T[K]\vec\theta\right) = -\vec\omega^T[P]\vec\omega$$

$$\Rightarrow [I]\dot{\vec\omega} + [B(\vec\theta)]^T[K]\vec\theta + [P]\vec\omega = 0 = -[\tilde\omega][I]\vec\omega + \vec u + \vec L + [B(\vec\theta)]^T[K]\vec\theta + [P]\vec\omega$$

Let $\vec u = -[B(\vec\theta)]^T[K]\vec\theta - [P]\vec\omega$

Cont →

ASEN 5010 John Clouse

Problem 1 cont.

with $\Delta \vec{L} = (1, 2, -1)^T$, analytically find ss error

MRP:

$\lim_{t \to \infty} ([I]\dot{\vec{\omega}} + [P]\vec{\omega} + K\vec{\sigma} = \Delta L) \Rightarrow K\vec{\sigma}_{ss} = \Delta L$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{ss} = \frac{\Delta L}{K} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \text{ when } K = 6}$$

EP: $\lim_{t \to \infty} ([I]\dot{\vec{\omega}} + [P]\vec{\omega} + K\vec{\varepsilon} = \Delta L) \Rightarrow K\vec{\varepsilon}_{ss} = \Delta L$

$$\boxed{\vec{\varepsilon}_{ss} = \frac{\Delta L}{K} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \text{ when } K = 6}$$

EA: $\lim_{t \to \infty} ([I]\dot{\vec{\omega}} + [P]\vec{\omega} + [B(\vec{\theta})]^T [K]\vec{\theta} = \Delta L) \Rightarrow K[B(\vec{\theta})]^T \vec{\theta}_{ss} = \Delta L$

$$\boxed{[B(\vec{\theta})]^T \vec{\theta}_{ss} = \frac{\Delta L}{K} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \text{ rad}}$$