Problem 7 Supplemental

```
LG1 = 8 * σ1  * σ3 * (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) +
   4 * σ2 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) * (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) +
   2 * σ1  * σ3 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + σ2 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^3
```

$$2\,\sigma1\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^3+8\,\sigma1\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+4\,\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)$$

$$\partial_{\sigma3}\left(2\,\sigma1\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^3+8\,\sigma1\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+4\,\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)\right)$$

$$16\,\sigma1\,\sigma3^2+8\,\sigma2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-8\,\sigma1\,\sigma3^2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)+2\,\sigma1\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2-6\,\sigma2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+8\,\sigma1\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)-8\,\sigma2\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)$$

$$\mathrm{N}\left[16\,\sigma1\,\sigma3^2+8\,\sigma2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-8\,\sigma1\,\sigma3^2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)+2\,\sigma1\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2-6\,\sigma2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+8\,\sigma1\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)-8\,\sigma2\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)\right]$$

$$0.$$

$$\partial_{\sigma2}\left(2\,\sigma1\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^3+8\,\sigma1\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+4\,\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)\right)$$

$$-16\,\sigma1\,\sigma2\,\sigma3-8\,\sigma2^2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-8\,\sigma1\,\sigma2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-6\,\sigma2^2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^3-8\,\sigma2^2\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+4\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)$$

$$\mathrm{N}\left[-16\,\sigma1\,\sigma2\,\sigma3-8\,\sigma2^2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-8\,\sigma1\,\sigma2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-6\,\sigma2^2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^3-8\,\sigma2^2\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+4\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)\right]$$

$$1.$$

$$\partial_{\sigma1}\left(2\,\sigma1\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^3+8\,\sigma1\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+4\,\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)\right)$$

$$-16\,\sigma1^2\,\sigma3-8\,\sigma1\,\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-8\,\sigma1^2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)-6\,\sigma1\,\sigma2\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2+2\,\sigma3\,\left(1-\sigma1^2-\sigma2^2-\sigma3^2\right)^2-8\,\sigma1\,\sigma2\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)+8\,\sigma3\,\left(-\sigma1^2-\sigma2^2+\sigma3^2\right)$$

```
N[-16 σ1^2 σ3 - 8 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) -
   8 σ1^2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) - 6 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 +
   2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 - 8 σ1 σ2 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) + 8 σ3 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2)]
```

```
0.
```

```
LG2 = 8 * σ2 * σ3 * (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) +
   4 * σ1 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) * (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) +
   2 * σ2 * σ3 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + σ1 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^3
```

$$2\,\sigma 2\,\sigma 3\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^2+\sigma 1\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^3+8\,\sigma 2\,\sigma 3\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)+4\,\sigma 1\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)$$

```
∂σ3 (2 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^3 +
      8 σ2 σ3 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) + 4 σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2))
```

$$16\,\sigma 2\,\sigma 3^2+8\,\sigma 1\,\sigma 3\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)-8\,\sigma 2\,\sigma 3^2\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)+2\,\sigma 2\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^2-6\,\sigma 1\,\sigma 3\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^2+8\,\sigma 2\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)-8\,\sigma 1\,\sigma 3\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)$$

```
N[16 σ2 σ3^2 + 8 σ1 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) -
   8 σ2 σ3^2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 2 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 -
   6 σ1 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + 8 σ2 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) - 8 σ1 σ3 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2)]
```

```
0.
```

```
∂σ2 (2 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^3 +
      8 σ2 σ3 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) + 4 σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2))
```

$$-16\,\sigma 2^2\,\sigma 3-8\,\sigma 1\,\sigma 2\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)-8\,\sigma 2^2\,\sigma 3\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)-6\,\sigma 1\,\sigma 2\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^2+2\,\sigma 3\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^2-8\,\sigma 1\,\sigma 2\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)+8\,\sigma 3\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)$$

```
N[-16 σ2^2 σ3 - 8 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) -
   8 σ2^2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) - 6 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 +
   2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 - 8 σ1 σ2 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) + 8 σ3 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2)]
```

```
0.
```

```
∂σ1 (2 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^3 +
      8 σ2 σ3 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) + 4 σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2))
```

$$-16\,\sigma 1\,\sigma 2\,\sigma 3-8\,\sigma 1^2\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)-8\,\sigma 1\,\sigma 2\,\sigma 3\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)-6\,\sigma 1^2\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^2+\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)^3-8\,\sigma 1^2\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)+4\,\left(1-\sigma 1^2-\sigma 2^2-\sigma 3^2\right)\,\left(-\sigma 1^2-\sigma 2^2+\sigma 3^2\right)$$

```
N[-16 σ1 σ2 σ3 - 8 σ1^2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) -
   8 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) - 6 σ1^2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2 + (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^3 -
   8 σ1^2 (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2) + 4 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) (-σ1^2 - σ2^2 + σ3^2)]
```

```
1.
```

```
LG3 = 16 * σ1 * σ2 * σ3^2 +
   16 * σ1 * σ2 * σ3 * (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 * σ1 * σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2
```

```
16 σ1 σ2 σ3^2 + 16 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2
```

```
∂σ3 (16 σ1 σ2 σ3^2 + 16 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2)
```

```
32 σ1 σ2 σ3 - 32 σ1 σ2 σ3^2 + 16 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) - 16 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)
```

```
N[32 σ1 σ2 σ3 - 32 σ1 σ2 σ3^2 + 16 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) - 16 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)]
```

```
0.
```

```
∂σ2 (16 σ1 σ2 σ3^2 + 16 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2)
```

```
-32 σ1 σ2^2 σ3 + 16 σ1 σ3^2 - 16 σ1 σ2^2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) +
 16 σ1 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2
```

```
N[-32 σ1 σ2^2 σ3 + 16 σ1 σ3^2 - 16 σ1 σ2^2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) +
   16 σ1 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ1 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2]
```

```
0.
```

```
∂σ1 (16 σ1 σ2 σ3^2 + 16 σ1 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ1 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2)
```

```
-32 σ1^2 σ2 σ3 + 16 σ2 σ3^2 - 16 σ1^2 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) +
 16 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2
```

```
N[-32 σ1^2 σ2 σ3 + 16 σ2 σ3^2 - 16 σ1^2 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) +
   16 σ2 σ3 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2) + 4 σ2 (1 - σ1^2 - σ2^2 - σ3^2)^2]
```

```
0.
```

```
σ1 = 0
σ2 = 0
σ3 = 0
```

```
0
```

```
0
```

```
0
```