Problem 3: S&J 8.12   Develop control law w/ FB error & integral FB

MRP:

$$\vec{z} = \int_0^t (k\vec{\sigma} + [I]\vec{\omega})\, dt$$

$$V = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T[I]\vec{\omega} + 2Kl_n(1 + \vec{\sigma}^T\vec{\sigma}) + \frac{1}{2}\vec{z}^T[k_i]\vec{z}$$

$$\dot{V} = \vec{\omega}^T[I]\dot{\omega} + \vec{\omega}^T k\vec{\sigma} + \quad \vec{z}^T \quad)[k_i](k\vec{\sigma} + [I]\dot{\omega})$$

$$= \vec{\omega}^T([I]\dot{\omega} + k\vec{\sigma}) + \vec{z}^T([I]\dot{\omega} + k\vec{\sigma}) = (\vec{\omega} + \vec{z})^T([I]\dot{\omega} + k\vec{\sigma})$$

Set $(\vec{\omega} + [k_i]\vec{z})^T([I]\dot{\omega} + k\vec{\sigma}) = -(\vec{\omega} + [k_i]\vec{z})^T[P](\vec{\omega} + [k_i]\vec{z})$

$$\Rightarrow [I]\dot{\omega} + k\vec{\sigma} + [P]\vec{\omega} + [P][k_i]\vec{z} = 0$$

$$= [\tilde{\omega}][I]\vec{\omega} + \vec{u} + k\vec{\sigma} + [P]\vec{\omega} + [P][k_i]\vec{z} = 0$$

Let $\vec{u} = -k\vec{\sigma} - P\vec{\omega} - Pk_i\vec{z}$

To remove need to track $\dot{\vec{\omega}}$, $\vec{z} = \int_0^t k\vec{\sigma} + [I](\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} = -k\vec{\sigma} - P\vec{\omega} - Pk_i \left(\int_0^t k\vec{\sigma} + [I](\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)\right) \\[2mm] \quad = -k\vec{\sigma} - P(1 + k_i[I])\vec{\omega} - Pk_i\int_0^t k\vec{\sigma} + Pk_i[I]\vec{\omega}_0 \end{array}}$$