

Комбинаторика 1

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k предметов (порядок, в котором они выбираются, неважен) называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

1. Пользуясь только определением, докажите следующие равенства:
 - а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
 - б) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
 - в) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
 - г) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
 - д) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2n$.
2. а) Сколько способов из 16 инопланетян выбрать капитана тарелки, помощника капитана и повара? б) Сколько способов распределить эти роли между тремя инопланетянами? в) Сколько способов из 16 инопланетян выбрать трёх? г) Есть n инопланетян, сколькими способами можно поставить k из них в очередь на медосмотр перед полётом?
3. На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?
4. Инопланетяне играют в шахматы на доске 8×8 . Сколькими способами можно поставить на эту доску а) разных, б) одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?
5. Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместить-ся в этих тарелках?
6. Сколькими есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?
7. 22 дерева растут в круг. Сколько существует способов натянуть между ними две одинаковых верёвки так, чтоб они не пересекались? (Если концы верёвок привязаны к одному дереву, то они тоже пересекаются!)
8. а) 7 ящиков занумерованы числами от 1 до 7. Сколько есть способов разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? б) А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?