*Georgii Potoshin, 2023*

# *Комбинаторика 2*

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- ▷ в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- ▷ в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- ▷ каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ 1\\
1\ 2\ 1\\
1\ 3\ 3\ 1\\
1\ 4\ 6\ 4\ 1\\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1\\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots
\end{array}
$$

1. **а)** Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).
   **б)** Сколько чисел в 2018–й строке треугольника Паскаля?

2. Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины – по убыванию. *Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n, то это верно и для строки с номером n + 1.*

3. **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2017-ую и 2018-ую строки. **в)** Чему равна сумма цифр в $n$-ой строке?

4. **а)** Поставим знаки " + " и "-" между числами в 99–ой строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак "-", между вторым и третьим " + ", между третьим и четвёртым "-", потом опять " + ", и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100–ой строки. Докажите!

5. **а)** Будем двигаться по треугольнику Паскаля, переходя от каждой буквы только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа $n$ в треугольнике Паскаля в точности равно $n$. **б)** Докажите, что $k$-ое число в $n$-ой строке равно $C_n^k$.*(Мы нумеруем числа в строке, начиная с нуля.)*

6. *(Бином Ньютона)* Докажите, что если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a+b)^n$, то для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ коэф-фициент при $a^{n-k}b^k$ будет равен $C_n^k$:
   $$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1}b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n$$

7. Пользуясь биномом Ньютона посчитайте **а)** $21^4$; **б)** $19^4$.

8. В разложении выражения $(x+y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите $x$, $y$ и $n$, если известно, что $x$ и $y$ натуральные.

9. С помощью бинома Ньютона докажите, что:
   **а)** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
   **б)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$;
   **г)** $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
   **д)** $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.