

Неравенство Коши (или неравенство о средних)

1 Задачи для обсуждения

1. Неравенство Коши для 2 чисел больших нуля $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
2. Докажите, что $x + 1/x \geq 2$ при $x > 0$
3. Докажите, что $1/x + 1/y \geq 4/(x+y)$ при $x, y > 0$
4. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ при любых x, y, z
5. Докажите, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ для $a, b, c \geq 0$
6. Неравенство Коши для 4 чисел больших нуля $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$
7. Неравенство Коши для 3 чисел больших нуля $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

2 Домашнее задание

1. Докажите, что $1 + x \geq 2\sqrt{x}$, при $x \geq 0$
2. Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ для любых x, y, z
3. a, b, c, d - положительные числа. Докажите, что $(a+b+c+d)(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) \geq 16$
4. a, b, c - положительные числа. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$
5. Сумма трех положительных чисел равна шести. Покажите, что сумма их квадратов не меньше 12.
6. * Докажите неравенство Коши для 5 чисел, т.е. докажите, что при $a, b, c, d, e \geq 0$ имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}$$

Подсказка, докажите сначала неравенство Коши для 6 чисел, а потом сделайте такой же переход, как от 4 к 3.