Les nombres premiers. Le plus grand diviseur commun

Définition. a divise b, noté $a|b$, s'il existe un entier m tel que $a \cdot m = b$

Définition. Un nombre naturel p est dit *premier* s'il n'est divisible que par p et 1.

Définition. *Le plus grand diviseur commun* (PGCD) des nombres entiers $a_1, ..., a_n$ est un tel diviseur commun positif des $a_1, ..., a_n$, qui est divisible par tout autre diviseur commun de ces nombres. PGCD des nombres a1,...,an est noté $(a_1, ..., a_n)$ ou $pgcd(a_1, ..., a_n)$.

Si le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, ..., a_n$ est égal à 1, alors ces nombres sont dits *premiers entre eux*.

1 Exercices pour la discussion

1. **Théorème d'Euclide.** Montrer qu'il y a infinité des nombres premiers.
2. **Le Crible d'Ératosthène.**
3. **Théorème fondamental de l'arithmétique** Tous les nombres naturels peuvent être exprimés de manière unique en termes de produits de nombres premiers.
4. Factoriser les nombres 111, 1111
5. Montrer que si le nombre $n! + 1$ est divisible par $n + 1$, alors $n + 1$ est premier.
6. **Algorithme d'Euclide.** Montrer que $(a, b) = (a - b, b)$.
7. Trouver le plus grand diviseur commun des 96 et 18.
8. Montrer que pour les nombres a, b, c impairs $(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}) = (a, b, c)$.

2 Devoirs

1. Trouver toutes les paires de nombres premiers où un nombre est supérieur à 17 du second.
2. Écrivez le crible d'Ératosthène jusqu'à 40.
3. Trouver $(111111, 1111111)$
4. Montrer que $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.