

Деление многочленов

Определение. *Многочлен* — это функция вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Число n называется его *степенью*. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, а число a_0 — *свободным членом*.

Деление с остатком. Если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены и $Q(x)$ — не константа, то всегда можно найти такие многочлены $S(x)$ и $R(x)$, что $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, при этом степень R меньше степени Q . Многочлен S — это неполное частное, а многочлен R — остаток.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$. Следовательно, a — корень $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $x - a$.

Теорема о рациональных корнях. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ является корнем многочлена $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$, коэффициенты которого — целые числа, то число m является делителем числа a_0 , а число n — делителем числа a_k .

ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

1. Разделите с остатком
а) $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ на $x + 3$; б) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$ на $x^2 - x + 1$.
2. Решите уравнение а) $x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$; б) $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

УСТНАЯ СДАЧА

1. Разделите с остатком
а) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ на $x - 1$; б) $2x^3 + 2x^2 + x + 6$ на $x^2 + 2x + 1$; в) $x^3 - 3$ на $x^7 + 1$.
2. Найдите остаток от деления многочлена
а) $x^6 - x^2 + 1$ на $x - 2$; б) $x^8 + x^4 + x - 2$ на $x + 1$; в) $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3$ на $3x - 3$.
3. Найдите все рациональные решения уравнения
а) $2x^3 - 5x^2 - 5x - 7 = 0$; б) $3x^4 - 2x^3 - 3x + 2 = 0$.
4. Найдите какой-нибудь многочлен, который дает остаток 2 при делении на $x - 1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$.
5. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?
6. Разложите на множители многочлен
а) $x^3 - x^2 - 2x + 2$; б) $x^3 + 3x^2 + x - 2$; в) $2x^3 + x^2 + x - 1$;
г) $x^4 - x^3 - 14x^2 - 3x + 9$; д) $x^4 + 4$; е) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$.

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

1. Разделите с остатком $16x^3 + 8x^2 - 6x + 7$ на $4x^2 - x + 2$.
2. Решите уравнение а) $6x^3 + 7x^2 - 30x + 9 = 0$; б) $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = 0$.
3. Одним из корней многочлена $x^3 + ax^2 + 11x - 6$ является число 2. Найдите два других корня.