Георгий Потошин, 2024

Топология I, листочек 3

1. **Докажите, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.**

   Утверждение 1. Элементы базы топологии на X после индуцирования на $Y \subseteq X$ образуют базу топологии на Y.

   По определению элемент базы останется открытым после индуцирования. Покажем теперь, что все индуцированные элементы базы составят базу. Пусть $U \subseteq Y$ – открытое множество. Тогда существует такое открытое $V \subseteq X$, что $V \cap Y = U$. Раз V открыто, то существуют элементы базы $B_i \in \tau_X, i \in I$, что $\bigcup_{i\in I} B_i = V$. Тогда $U = V \cap Y = Y \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} Y \cap B_i$ открытое множество представимо как объединение индуцированных элементов базы на топологии X, а значит, что множество всех таких индуцированных элементов составят базу топологии на Y.

   Утверждение 2. Если в топологии пространства $X/\sim$ образ элемента базы топологии на X при канонической проекции открыт, то объединение этих образов составит базу топологии на фактор пространства.

   Пусть $U \in X/\sim$ открыто, тогда $\pi_\sim^{-1}[U]$ открыто и представимо как $\bigcup_{i\in I} B_i$ где B_i – элемент базы топологии на X. Тогда $U = \pi_\sim[\bigcup_{i\in I} B_i] = \bigcup_{i\in I} \pi_\sim[B_i]$. А значит образ элементов базы топологии на X составит базу топологии на фактор пространстве.

   Утверждение 3. Если биекция $X \longrightarrow Y$ переводит элементы базы в открытые множества и прообразами элементов базы тоже являются открытые множества, то биекция является гомеоморфизмом.

   Пусть $U \subseteq X$ открыто, тогда существуют такие элементы базы $B_i \subseteq X, i \in I$, что $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Тогда $f^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$ – объединение открытых, а значит само открыто и f непрерывно. В обратную сторону доказывается также.

   Базой пространства S^1 являются всевозможные пересечения окружности и открытых кругов, то есть открытые дуги. Найдем теперь базу пространства $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть (a, b) – элемент базы топологии на $\mathbb{R}$. Прообраз образа этого интервала равен $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(a + n, b + n)$ и открыт, а значит образы интервалов составят базу топологии на фактор пространстве. Если классы эквивалентности отождествить с точками на $[0, 1)$, то образом интервала (a, b) будет $(\{a\}, \{b\})$, если изначальный интервал не содержал целых точек, $[0, \{b\}) \cup (\{a\}, 1)$, если изначальный интервал содержал 1 целую точку и $[0, 1)$, если изначальный интервал содержал 2 и более целые точки. Пусть $f : [x] \mapsto e^{i2\pi\{x\}}$ биекция из $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в S^1. Тогда очевидно, что она однозначно сопоставляет элементам базы топологии на фактор пространстве открытые дуги, а значит пространства гомеоморфны.

2. **Докажите, что $\mathbb{D}^n/S^{n-1} \simeq S^n$.**

   Пусть $I = (-1, 1)$ интервал. Тогда положим $B^n = I^n$, $\mathbb{D}^n = \overline{B^n}$ и $S^n = \partial\mathbb{D}^{n+1}$. Заметим, что ещё $S^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \max_i |x_i| = 1\}$, тогда в силу того, что максимум из конечного набора чисел всегда выбирается, то $\mathbb{D}^n = \bigcup_{r\in[0,1]} rS^{n-1}$. $\mathbb{D}^n/S^{n-1}$ – это диск в котором все точки его границы положили в один класс. Построим отображения из диска в шар, что уважает это отождествление. Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ и пусть $|x| = max_i|x_i|$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} (-1, 4x_1, ..., 4x_n) & , 0 \leqslant |x| < 1/4 \\ (4|x| - 2, x_0/|x|, ..., x_n/|x|) & , 1/4 \leqslant |x| \leqslant 3/4 \\ (1, 4(1 - |x|)\frac{4}{3}x_0, 4(1 - |x|)\frac{4}{3}x_n) & , 3/4 < |x| < 1 \\ (1, 0, ..., 0) & x = \partial\mathbb{D}^n \end{cases}$$

   Обратным ему будет сопоставлять каждому $y = (y_0, ..., y_n)$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \partial\mathbb{D}^n & , x = (1, 0, ..., 0) \\ (x_1/4, ..., x_n/4), & \end{cases}$$

   Отображение f непрерывно, так как непрерывна каждая композиция $pr_i \circ f$. Отображение f построено так, что оно делит шар на сферы. Для $r \in [0, 1/4)$ сферы этих радиусов по возрастающи устилают основания, затем для $r \in [1/4, 3/4]$ устилают боковые грани, а для $r \in (3/4, 1]$ устилают верхнее основание, причем окружность при приближении к границе диска стягивается в точку, а сама граница переходит в середину верхней грани. По этому это отображение после факторизации диска становится биекцией. До факторизации открытыми множествами диска были всевозможные пересечения диска с открытыми объемлющего пространства, после факторизации, если открытое не содержало точек границы, то оно так и останется открытым, так как его прообраз он сам. Если некое открытое множество профакторезованного диска содержит класс границы, то его прообара...

3. **Верно ли, что фактор хаусдорфова пространства является хаусдорфовым? Регулярного – регулярным? Нормального – нормальным?**

   Возьмём отрезок $[0, 1]$ с канонической топологией. Он компактен и хаусдорфов, а значит нормален и регулярен. Профакторизуем его так, что его внутренность попадёт в один класс эквивалентности, 0 в другой, а 1 в третий обозначим их за $i, 0, 1$ соответственно. Тогда из всех подмножеств только $\emptyset, \{i\}, \{0, i\}, \{1, i\}, \{0, 1, i\}$ будут открытыми. Заметим, что $\{0\}$ и $\{1\}$ будут замкнутыми в такой топологии, но при этом у этих синглтонов нет непересекающихся окрестностей, а значит, что полученное фактор пространства ни хаусдорфово, ни регулярно, ни нормально. Тогда ответ на все вопросы – нет.

4. **Приведите пример хаусдорфова нерегулярного топологического пространства.**

   Положим $K = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$. Это множество не открыто в стандартной топологии прямой $\mathbb{R}$, так как любая окрестность 1 не лежит в K. С другой стороны оно не замкнуто, так как не содержит предельную точку 0. Возьмём множество S всех интервалов вместе со всеми интервалами без K. Оно покрывает прямую и пересечение двух элементов либо интервал, либо интервал без K, а значит S – база некой топологии, в которой открытые множества - это канонические открытые множества без некого подмножества в K. Это означает, что любая окрестность 0 содержит отрезок без некого количества элементов из K. Тогда между границами этого отрезка лежит некое число вида $1/p$ и любая окрестность K будет содержать шар радиусом меньшим $1/p - 1/(p - 1)$ вокруг $1/p$ и $1/p$ содержащий. Тогда этот шар пересекается с K только по своему центру, а значит это шар в привычном нам смысле. Тогда он пересекается с изначальной окрестностью 0. В итоге у K и 0 нет непересекающихся окрестностей.

5. **Приведите пример регулярного ненормального топологического пространства.**

6. **Приведите пример связного, но не линейно связного топологического пространства.**
   Обозначим за L_n отрезок между $(0, 0)$ и $(1, 1/n)$ в $\mathbb{R}^n$. Он связен и открыт.

   Утверждение 4. Если $C_\alpha \subseteq X$ – связные пространства для всяких индексов и $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, то $\bigcup_\alpha C_\alpha$ связно.

   Пусть $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, но при этом $\bigcup_\alpha C_\alpha = U \sqcup V$, где U и V дизъюнктивные открыты непустые множества. Если бы ни одно из C_α не одержало одновременно элементы этих двух открытых множеств, то тоже было бы справедливым относительно их непустого пересечения и тогда все C_α были бы подмножествами одного из открытых, а значит второе открытое множество оказалось бы пустым, что противоречит с нашим предположением. Пусть C_{α_0} содержит элементы из обоих множеств. Тогда $C_{\alpha_0} = (U \cap C_{\alpha_0}) \sqcup (U \cap C_{\alpha_0})$ – несвязно, а значит мы вновь пришли к противоречию. Тогда $\bigcap_\alpha C_\alpha$ обязано быть связным.

   В нашем случае множества $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} L_n$ и $\overline{B} = B \cup ([0, 1] \times \{0\})$ в силу этого утверждения связны, так как их связные части-отрезки пересекаются по $(0, 0)$.

   Утверждение 5. Если множества C и $\overline{C}$ связны, то и всякое лежащее между ними тоже связно.

   Пусть C и $\overline{C}$ связны и $C \subset X \subset \overline{C}$. Если бы $X = U \sqcup V$ было несвязно, то если бы оба имели элементы из C, то $C = (U \cap C) \sqcup (V \cap C)$ было бы несвязно, что ведёт к противоречию. Иначе одно из открытых, пусть без потери общности им будет V, полностью бы находилось в $\overline{C} \backslash C$. Тогда $\overline{C} \backslash V$ было бы замкнутым в объемлющем пространстве и содержало бы C, а значит замыкания не было бы минимальным по включению замкнутым надмножеством C, что опять ведет к противоречию. В итоге X обязано быть связным.

7. **Определите естественную топологию на пространства невырожденных матриц $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Является ли оно связным?**

8. **Докажите, что функции расстояния d_1, d_2, d_∞ задают структуру метрического пространства на $\mathbb{R}^n$. Нарисуйте открытые шары B_0^1 в метриках d_i при $n = 2$.**

9. **Докажите, что топология на $\mathbb{R}^n$, индуцированная метриками d_i и выше, совпадает с топологией произведения, определённой на лекции.**

   Обозначим за τ_∞ топологию порожденную метрикой d_∞ и за $\tau_\times$ топологию произведения. Базой τ_∞ являются многомерные кубы, то есть множества вида $r(-1,1)^n + a$, где $r \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Базой топологии произведения являются всевозможные произведения интервалов. Заметим, что база метрической топологии вкладывается в базу топологии произведение, а значит $\tau_\infty \subseteq \tau_\times$. Пусть теперь $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ – элемент базы $\tau_\times$. Тогда каждая его точка $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ лежит вместе с шаром $\min\{|a_i - x_i| i \in \{1, ..., n\}\} \cap \{|b_i - x_i| i \in \{1, ..., n\}\}(-1,1)^n + x$, а значит база топологии произведения является семейством открытых множеств из τ_∞. Это означает, что $\tau_\times \subseteq \tau_\infty$, и учитывая прошлое утверждение $\tau_\times = \tau_\infty$.

   Теперь пусть $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n | d_i(x, 0) = 1\}$. $x \mapsto d_i(x, 0)$ - это непрерывное отображение в смысле $(\mathbb{R}^n, \tau_\times) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_c)$, где τ_c – каноническая топология прямой, так как $d_i(\cdot, 0)$ является i-м корнем из суммы непрерывный отображений. Тогда исходя из 2 задачи 2 листочка множество S_i замкнуто, так как $(\mathbb{R}, \tau_c)$ – хаусдорфово. Нетрудно также видеть, что $S_i \subset [-1,1]^n$, подмножество произведения компактных по лемме Бореля – Лебега отрезков, что само компактно. Тогда S_i – замкнутое подмножество компакта, а значит S_i компактно в топологии $\tau_\times$. Очевидно, что $d_\infty(\cdot, 0) : (\mathbb{R}^n, \tau_\times) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_c)$ тоже является непрерывным отображением. Тогда $d_\infty(S_i, 0)$ – образ сферы при непрерывном отображении тоже компактен. Более того, так как каноническая топология прямой хаусдорфова, то компактный образ сферы замкнут, а значит содержит все свои предельные точки. Теперь так, как функция расстояния имеет неотрицательные значения и сфера не содержит нуль векторного пространства, то она и не может содержать сколь угодно близкие к нулю с точки зрения d_∞ точки, в силу замкнутости образа. Это означает, что образ имеет ненулевую нижнюю грань $m > 0$, то есть минимальное расстояния от нуля до некоторой точки сферы. Тогда имеет место следующее соотношения для шаров $B_i(a, r)$ метрики d_i. $B_\infty(a, rm) \subseteq B_i(a, r) \subseteq B_\infty(a, r)$ для любых точек a и радиусов r. Это значит, что в любой шар пространства с метрикой d_i можно вписать куб и вокруг него же можно описать куб, а значит открытые множества одного пространства открыты и в другом. Тогда $\tau_i = \tau_\infty = \tau_\times$, что и завершает доказательство.

10. **Пусть X, Y – метрические пространства. Определите естественную метрику на их произведении $X \times Y$.**

11. **Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено $B_x^{\varepsilon_1} = B_y^{\varepsilon_2}$ для некоторых точек x, y и некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Верно ли, что $x = y, \varepsilon_1 = \varepsilon_2$?**

12. **Определим топологию Зариского на $\mathbb{C}^n$ следующим образом: замкнутыми множествами назовем множества нулей произвольного набора многочленов из $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Проверьте, что это действительно топология. Является ли она хаусдорфовой? Совпадает ли топология Зариского на $\mathbb{C}^2$ с топологией произведения, полученной из топологии Зариского на C?**