

Алгебра I, листочек 8

1. Пусть $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$, A и B нильпотентны и $AB = BA$. Докажите, что $A + B$, AB нильпотентны. Верно ли это без условия $AB = BA$?

Пусть $A^n = 0$ и $B^m = 0$, тогда в силу того, что они коммутируют мы получим $(AB)^{\max(m,n)} = A^{\max(m,n)}B^{\max(m,n)} = 0 \cdot 0 = 0$. Также $(A + B)^{m+n+1} = 0$, так как по формуле бинома Ньютона в каждом слагаемом либо степень A , либо степень B будет больше зануляющей степени, а значит будет сумма нулей. Формула бинома работает, так как слагаемые коммутируют. Без этого условия это не верно, так как например есть матричные единицы $e_{1,2}$ и $e_{2,1}$, они нильпотентны, но их сумма нет, так как в случае размера 2×2 их сумма – обратимая матрица с детерминантом -1.

2. Докажите формулу для определителя матрицы Вандермонда:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Обозначим это определитель через $V(x_0, \dots, x_n)$. Заметим, что

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

Этого можно добиться, последовательно заменяя для каждого $i = n..1$ в порядке убывания столбец S_i на $S_i - x_1 S_{i-1}$, столбцы мы нумеруем с 0, по степени x_0 . Такая замена очевидно не меняет детерминанта. Так как мы привели матрицу к нижнетреугольному блочному виду, то её определитель это произведение определителей блоков, а в нашем случае определитель нижнего блока

$$V(x_0, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

По полилинейности вынесем общий множителей в каждой строке и получим

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) V(x_1, \dots, x_n)$$

Продолжив дальше рекурсивный спуск по индукции мы получим искомую формулу.

3. Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$. Покажите, что если для любого $X \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$ имеем $\text{tr}(AX) = 0$, то $A = 0$.

Заметим, что так как это будет в частности верно для матричных единиц, то $\text{tr}(Ae_{i,j}) = \text{tr}(\sum_k A_{k,i} e_{k,i} e_{i,j}) = A_{j,i} = 0$, так как мы можем выбирать $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$, то все коэффициенты матрицы должны быть нулями.

4. Пусть $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$. Покажите, что если $\text{rk}(A) = n$, то $\text{rk}(\hat{A}) = n$; если $\text{rk}(A) = n - 1$, то $\text{rk}(\hat{A}) = 1$; если $\text{rk}(A) \leq n - 2$, то $\hat{A} = 0$.

Если $\text{rk}(A) = n$, то $\det(A) \neq 0$, тогда $A^{-1} = \hat{A} / \det(A)$. \hat{A} обратима, а значит её ранг n .

Если $\text{rk}(A) = n - 1$, то $A\hat{A} = \hat{A}A = 0$, первое равенство означает, что $\text{im}(\hat{A}) \leq \ker(A)$, но так как $\dim \ker(A) = 1$, то $\text{rk}(\hat{A}) = 1$ или 0. Но так как в A есть $n - 1$ линейно независимых строк, то в A можно выкинуть лишнюю строку и получить матрицу A' , её ранг по прежнему будет $n - 1$. Тогда в A' найдутся $n - 1$ линейно независимых столбцов, выкинув лишний

мы получим минорную матрицу A'' , чей ранг по прежнему $n - 1$, а значит её детерминант ненулевой, тогда матрица \hat{A} ненулевая и её ранг не может быть нулевым, а значит он 1.

Пусть $\text{rk}(A) \leq n - 2$, так как ранг минорной матрицы не может превышать ранг матрицы, то ранг любой минорной будет $\leq n - 2$, а значит детерминанта минорной матрицы нуль и $\hat{A} = 0$.

5. **Покажите, что** $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(A)$; $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(B)$; $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$.

$$\text{rk}(AB) = \dim(AB\mathbb{k}^m) \leq \dim(A\mathbb{k}^n) = \text{rk}(A)$$

$$\text{rk}(AB) = \text{rk}(B^T A^T) \leq \text{rk}(B^T) = \text{rk}(B)$$

$$\text{rk}(A + B) = \dim((A + B)\mathbb{k}^n) \leq \dim(A\mathbb{k}^n + B\mathbb{k}^n) \leq \dim(A\mathbb{k}^n) + \dim(B\mathbb{k}^n) = \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$$