Листок 3

$L = \omega \wedge$ и $\Lambda = *^{-1} L *$

Задача 1.1: Докажите, что $* \frac{\omega^k}{k!} = \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}$

Решение: Посмотрим как звезда действует на определённых формах:

$$* \bigwedge_{j \in J \subseteq [1,n]} dz_j \wedge i d\bar{z}_j = \bigwedge_{j \in J^c} (dz_j \wedge i d\bar{z}_j)$$, что очевидно.

Теперь раскроем скобки в :

$$\omega^k = \sum_{\substack{|J|=k \\ J \subseteq [1,n]}} k! \bigwedge_{j \in J} dz_j \wedge i d\bar{z}_j \quad \left(\text{Так как } \omega = dz_j \wedge i d\bar{z}_j\right)$$

$$* \frac{\omega^k}{k!} = * \sum_{\substack{|J|=k \\ J \subseteq [1,n]}} \bigwedge_{j \in J} dz_j \wedge i d\bar{z}_j = \sum_{\substack{|J|=n-k \\ J \subseteq [1,n]}} \bigwedge_{j \in J} dz_j \wedge i d\bar{z}_j = \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}$$ $\square$

Задача 1.2 Покажите, что на $(1,1)$-формах оператор Λ_ω совпадает со следом, т.е если

$\alpha = i\, a_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k$, то $\Lambda_\omega \alpha = g^{j\bar{k}} \alpha_{j\bar{k}}$

Решение: Лемма: $\Lambda = L^*$ (присоединённый оператор)

Док-во Леммы: Пусть α и β формы одного ранга, тогда $\langle \alpha, \beta \rangle dV = \alpha \wedge * \bar{\beta}$, где dV - форма объёма.

Тогда $\langle L\alpha, \beta \rangle dV = (\omega \wedge \alpha) \wedge * \bar{\beta} = \alpha \wedge (\omega \wedge * \bar{\beta})$

$= \alpha \wedge * (*^{-1}(\omega \wedge * \bar{\beta})) = \alpha \wedge * (*^{-1}(\bar{\omega} \wedge * \bar{\beta})) = \alpha \wedge * (*^{-1}(\overline{\omega \wedge * \beta}))$

$= \alpha \wedge * (*^{-1}(\omega \wedge * \beta)) = \alpha \wedge * \overline{\Lambda \beta} = \langle \alpha, \Lambda \beta \rangle dV$ $\square$ лемма тогда $\Lambda_* \alpha \in \Lambda^0$, а значит:

$$\langle \Lambda_* \alpha, 1\rangle = \langle \alpha, L 1\rangle = \langle \alpha, \omega\rangle = g^{j\bar m} g^{\ell \bar k}\, i\alpha_{j\bar k}\, \overline{(i\, g_{\ell \bar m})}$$

$$= g^{j\bar m} g^{\ell\bar k}\, \alpha_{j\bar k}\, g_{\ell\bar m} = g^{j\bar m} \alpha_{j\bar k}\, g^{\ell\bar k} g_{\ell\bar m} = g^{j\bar m} \alpha_{j\bar k}\, \delta^{\bar k}_{\bar m}$$

$$= g^{j\bar m} \alpha_{j\bar m} \qquad \square$$

Задача 1.3: Пусть F — форма кривизны связности Черна голоморфного линейного расслоения (L, H) над кэлеровым многообразием (X, ω). Пусть Λ_ω — оператор Лефшеца. Покажите, что для любой (p,q)-формы $\varphi = \varphi_{I\bar J}\, dz^I \wedge d\bar z^J$ со значениями в L выполнено соотношение

$$\langle [\sqrt{-1} F, \Lambda]\varphi, \varphi\rangle_\omega = \sum_{|I|=p,\, |J|=q} \Big(\sum_{i\in I} \lambda_i + \sum_{j\in J} \lambda_j - \sum_{j=1}^n \lambda_j \Big) (\varphi_{I\bar J})^2$$

Решение: Так как многообразие кэлерово, то F — эрмитова и g — эрмитова-положительна.

А тогда из лин. алг. мы можем найти базис в котором F и g — диагонализованы.

Пусть $L_k = i\, dz^k \wedge d\bar z^k$ и тогда $F(x_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k\, dz^k \wedge d\bar z^k$

Пусть $\Lambda_k = *^{-1} L_k *$. Тогда $\Lambda_k^* = L_k^*$ (аналогично $\Lambda = L^*$)

и более того, ~~если~~ ~~сходить~~ Λ_k — убирает $i\, dz^k \wedge d\bar z^k$ из формы, либо ~~зануляет~~ её. Тогда (т.к. $[L_j, \Lambda_k] = 0$ если $j \neq k$)

$$[iF, \Lambda_\omega] = \Big[\sum_{j=1}^n \lambda_j L_j, \sum_{k=1}^n \Lambda_k\Big] = \sum_{k=1}^n \lambda_k [L_k, \Lambda_k]$$

Посчитаем $[L_k, \Lambda_k]$ от $\varphi = dz^I \wedge d\bar z^J$

→ если $k \in I$ и $k \in J$, то $\underbrace{L_k \Lambda_k \varphi}_{\varphi} - \underbrace{\Lambda_k L_k \varphi}_{0} = \varphi$

→ если $k \notin I$ и $k \notin J$, то $\underbrace{L_k \Lambda_k \varphi}_{0} - \Lambda_k L_k \varphi = -\varphi$

→ если $k \in$ лежит только в одном из I и J, то $[L_k, \Lambda_k]\varphi = 0$

Тогда стоило бы ($\varphi = dz^I \wedge d\bar{z}^J$)

$$[iF, \Lambda]\varphi = \left(\sum_{k\in I\cap J} \lambda_k - \sum_{k\notin I\cup J} \lambda_k\right)\varphi$$

$$= \left(\sum_{k\in I} \lambda_k + \sum_{k\in J} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)\varphi$$

Тогда если мы вернёмся к $\varphi = \varphi_{IJ}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$, то

$$\langle [iF, \Lambda]\varphi, \varphi\rangle = \sum_{IJ}\left(\sum_{k\in I} \lambda_k + \sum_{k\in J} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)|\varphi_{IJ}|^2 \quad \square$$

Задача 1.4 Покажите, что на k-формах

$[L, \Lambda] = (k-n)\, Id$. Выведите $[L^r, \Lambda]$.

Решение: аналогично получим $\varphi = dz^I \wedge d\bar{z}^J$

$$[L, \Lambda]\varphi = \sum_{k=1}^{n} [L_k, \Lambda_k]\varphi = \left(\sum_{k\in I} 1 + \sum_{k\in J} 1 - \sum_{k=1}^{n} 1\right)\varphi$$

$$= (k-n)\varphi.$$

А значит $[L, \Lambda] = (k-n)\, Id$ $\circ$

Часть 2. Гипотеза H_r: $[L^r, \Lambda] = r(r-1+k-n)L^{r-1}$

База $r=1$: $[L^1, \Lambda] = (k-n)\, Id$

Шаг: Пусть H_{r-1}, тогда

$$[L^r, \Lambda] = L[L^{r-1}, \Lambda] + [L, \Lambda]L^{r-1}$$

$$= (r-1)(r-2+k-n)L^{r-1} + (k-2(r-1)-n)L^{r-1}$$

$$= [r(r-1+k-n) - (r-1+k-n) + (k-2(r-1)-n)]L^{r-1}$$

$$= r(r-1+k-n)L^{r-1} \quad \square$$

Пусть $C_{r,k} = r(r-1+k-n)$

Задача 1.5: Покажите, что $L^{n-k}: \Lambda^k_x \to \Lambda^{2n-k}_x$ — изоморфизм, а ядро $L^{n-k+1}: \Lambda^k \to \Lambda^{2n-k+2}$ совпадает с ядром Λ на Λ^k_x.

Решение: мы получили, что на k-формах

$$[L^r, \Lambda] = c_{r,k} L^{r-1}, \text{ т.е. } L^r\Lambda - \Lambda L^r = c_{r,k} L^{r-1}.$$

Отсюда $\Lambda L^r = L^r\Lambda - c_{r,k}L^{r-1} = L^{r-1}(L\Lambda - c_{r,k})$ (1)

Пусть $\alpha \in \Lambda^k$.

Положим две гипотезы:

H_k: если $\alpha \neq 0$, то $L^{n-k}\alpha \neq 0$ — Но очевидно верно $k \in [0, n]$

P_k: если $L^{n-k+1}\alpha = 0$, то $\Lambda\alpha = 0$

Пусть H_{k-2} верна. Докажем P_k.

Пусть $L^{n-k+1}\alpha = 0$. Тогда по (1)

$$0 = \Lambda L^{n-k+1}\alpha = L^{n-k+1}\Lambda\alpha - c_{r,k}L^{n-k}\alpha \quad (2) \;|\cdot L$$

$$\Downarrow \quad 0 = L^{n-k+2}\Lambda\alpha - \underbrace{c_{r,k}L^{n-k+1}\alpha}_{0}$$

Тогда $L^{n-k+2}\Lambda\alpha = 0$ и в силу H_{k-2} $\Lambda\alpha = 0$.

Мы получили $H_{k-2} \Rightarrow P_k$

Теперь зная P_k докажем H_k:

~~Пусть $\alpha \neq 0$. Если $\Lambda^{n-k+1}\alpha \neq 0$, то $L^{n-k}\alpha \neq 0$ ok.~~

~~иначе $L^{n-k+1}\alpha = 0$. Пусть ($\Rightarrow L^*\alpha = 0$)~~

~~Тогда (2):~~ Если $\Lambda^{n-k+1}\alpha \neq 0$, то $\Lambda^{n-k}\alpha \neq 0$, иначе $L^{n-k+1}\alpha = 0 \Rightarrow L^*\alpha = 0$

Пусть $\alpha \neq 0$. Покажем, что $L^s\alpha \neq 0$ для $s = 0, \dots, n-k$.

База $L^0\alpha \neq 0$

Шаг $L^*L^s\alpha = L^{s-1}(LL^*\alpha - c_{k,r}\alpha) = L^{s-1}c_{k,r}\alpha \neq 0$.

А тогда $L^*L^s\alpha \neq 0$ и $L^s\alpha \neq 0$. $\Rightarrow$ мы получили H_k.

Осталось убедиться в H_1, но оно очевидно также верно. Тогда L^{n-k} — инъективен + равенство размерностей

$\Rightarrow$ изоморфизм и мы получили

$\ker L^{n-k+1} \subseteq \ker L^*$

В обратную сторону: пусть $\alpha \in \Lambda^k$ и $L^*\alpha = 0$

Тогда $\langle L^{n-k+1}\alpha, L^{n-k+1}\alpha \rangle = \langle L^* L^{n-k+1}\alpha, L^{n-k}\alpha \rangle$

$$\overset{(1)}{=} \langle \underbrace{L^{n-k+1} L^*\alpha}_{0} + \underbrace{c_{k,n-k+1}}_{0} L^{n-k}\alpha, L^{n-k}\alpha \rangle = 0$$

$\Rightarrow L^{n-k+1}\alpha = 0$ а значит $\ker L^{n-k+1} = \ker L^*$ на Λ^k □

§2 Кривизна многообразий и расслоений

Задача 2.1 Пусть (L, H) - голоморфное линейное расслоение над компактным кэлеровым многообразием (X, ω). Показать, что если $\alpha \in c_1(L)$, то найдётся эрм. метрика H', такая, что $\alpha = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log H'$.

Решение: Положим $\omega_0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log H \in c_1(L)$

Тогда как и в указании будет f, что (так как $\partial\bar{\partial}$-лемма на компактном кэлеровом мн-ии)

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log H - \alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f$$

или $\alpha = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\log H + 2\pi f) = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\log \underbrace{H e^{2\pi f}}_{H_0})$

H_0 - метрика, так как H - метрика и $e^{2\pi f}$ - всюду гладкая функция на X. □

Задача 2.2 Пусть (X, ω) - компактное кэлерово многообразие, а E - голоморфно векторное расслоение ранга r_E с эрмитовой метрикой $H = (H_{\alpha\bar{\beta}})$. Напомним, что кривизна $F_H = F_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k$ в компонентах имеет как $F^{\alpha}_{j\bar{k}\beta} = -\partial_{\bar{k}} (h^{\alpha\bar{\gamma}} \partial_j h_{\beta\bar{\gamma}})$

(1.) Покажите, что дифф. тождество Бьянки $d_\nabla F_\nabla = 0$ для произвольной связности может быть записано:

* $\nabla_m F_{j\bar{k}} = \nabla_j F_{m\bar{k}}$ $(\partial_\nabla F = 0)$
* $\nabla_{\bar{m}} F_{j\bar{k}} = \nabla_{\bar{k}} F_{j\bar{m}}$ $(\bar{\partial}_\nabla F = 0)$

Решение:
$d_\nabla = \partial_\nabla + \bar{\partial}_\nabla$
$d_\nabla F_\nabla = \partial_\nabla F_\nabla + \bar{\partial}_\nabla F_\nabla = 0$

Заметим, что F^∇ – (1,1) форма, $\partial_\nabla F^\nabla$ – (2,1)-форма, $\bar{\partial}_\nabla F_\nabla$ – (1,2)-форма. а они линейно независимы тогда мы получим $\partial_\nabla F_\nabla = 0$ и $\bar{\partial}_\nabla F_\nabla = 0$:

$\partial_\nabla F_\nabla = (\nabla_m F_{j\bar{k}}) dz^m \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k$ зануляется, а тогда если посмотреть на перестановку m и j то коэф пер $dz^m \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k$ для фикс. m, j, k будет.

$\nabla_m F_{j\bar{k}} - \nabla_j F_{m\bar{k}} = 0$. аналогично $\nabla_{\bar{m}} F_{j\bar{k}} = \nabla_{\bar{k}} F_{j\bar{m}}$ $\square$

(2.) Покажите что для скалярной кривизны $R = g^{j\bar{k}} R_{j\bar{k}}$ на кэлеровом многообразии верны след. тождества:

$\partial_j R = \nabla^{\bar{k}} R_{j\bar{k}}$ (2.1) $(\partial R = -\bar{\partial}^* Ric)$
$\partial_{\bar{k}} R = \nabla^{j} R_{j\bar{k}}$ (2.2) $(\bar{\partial} R = \partial^* Ric)$

Решение:
Запишем тождество Бьянки для $R_{j\bar{k}}$. мы получим по (1.)

$\nabla_m R_{j\bar{k}} = \nabla_j R_{m\bar{k}}$

$\nabla_{\bar{m}} R_{j\bar{k}} = \nabla_{\bar{k}} R_{j\bar{m}}$

Так как у нас связность Черна, то $\nabla_m g_{j\bar{k}} = 0$ и $\nabla_{\bar{m}} g_{j\bar{k}} = 0$ $(\nabla_m g^{j\bar{k}} = 0$ и $\nabla_{\bar{m}} g^{j\bar{k}} = 0$ тоже$)$

$$\partial_m R = \nabla_m R = \nabla_m (g^{j\bar{k}} R_{j\bar{k}}) = (\nabla_m g^{j\bar{k}}) R_{j\bar{k}} + g^{j\bar{k}} (\nabla_m R_{j\bar{k}})$$
$$= g^{j\bar{k}} (\nabla_m R_{j\bar{k}}) = g^{j\bar{k}} (\nabla_j R_{m\bar{k}}) = \nabla^{\bar{k}} R_{m\bar{k}} \quad (2.1)$$

Аналогично мы получаем второе тождество.

Пусть теперь $R_{jk} = f(x)\, g_{jk}$. Покажем, что $f = const$

Тогда $R = g^{jk} R_{jk} = g^{jk}(f g_{jk}) = f(g^{jk} g_{jk}) = f \cdot r_E$

Применим предыдущие тождества:

Тогда
$$\partial_m R = g^{jk}(\nabla_j R_{mk}) = g^{jk}(\nabla_j (f g_{mk}))$$
$$= g^{jk} g_{mk} \nabla_j f$$
$$= \delta^j_m \nabla_j f$$
$$= \nabla_m f = \partial_m f$$

$$\partial_m R = r_E\, \partial_m f$$

А значит $\partial_m f (\underbrace{r_E - 1}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \partial_m f = 0$

Для любых ∂_m. Тогда f – постоянно.

---

3. Покажите, что „R_w" зависит ...

Задача 2.3 На $\mathbb{C}P^n$ есть метрика Фубини-Штуди

$\omega_{FS} = \sqrt{-1}\partial\bar\partial \log\left(\sum_{j=0}^{n}|z_j|^2\right)$ → положительна и инв отн $U(n+1)$

на B есть $\omega_B = -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(1-|z|^2)$

(1.) Покажите, что $B = \{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid |z_0|^2 > |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2\}$

и $\omega_B = -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(|z_0|^2 - |z_1|^2 - \ldots - |z_n|^2)$

Это верно т.к. $z_j = \frac{|z_j|}{|z_0|}$, а значит мы можем отождествить координаты $(z_0 = 1)$ и мы получим $\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 < 1$

Затем мы заметим, что

$$\omega_n = -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(1-|z|^2) = -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log\left(\frac{|z_0|^2 - |z_j|^2 - \ldots |z_n|^2}{|z_0|}\right)$$

$$= -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(|z_0|^2 - \ldots) + \underbrace{\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(|z_0|^2)}_{=0}$$

тогда для ~~ума~~ эрмитовой метрики типа $\mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ $U(1,n)$ — это её линейные изометрии ок.

Проверим, что это действие транзитивно: Возьмём $(1, 0, \ldots, 0)$, как известно из линейной алгебры,

$\sqrt{-1}(\partial\bar\partial(\underbrace{\log z_0}_{0} \underbrace{\log \bar z_0}_{0}))$

его можно можно отправить через $U(1,n)$ в любо z $\langle z, z\rangle > 0$. Это означает, что и z можно отправить в $(1, 0, 0, \ldots 0)$. Так как ~~это все~~ для все $z \in B$ $\langle z, z\rangle = 0$ то действие транзитивно. $\square$

(2.) $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ $\omega_{FS} = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial K$ $K = \log(1+|z|^2)$

$$g_{j\bar k} = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar z_k} = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{z_k}{1+|z|^2}\right) = \frac{\delta_{jk}(1+|z|^2) - \bar z_j z_k}{(1+|z|^2)^2}$$

Кривизна: $R_{j\bar k l \bar m} = -\frac{\partial^2 g_{j\bar k}}{\partial z_l \partial \bar z_m} + \sum_{p,q} g^{p\bar q} \frac{\partial g_{j\bar q}}{\partial z_l} \frac{\partial g_{p\bar k}}{\partial \bar z_m}$

у центра $z = 0$:

$(1+|z|^2)^{-1} \approx 1 - |z|^2$ и $(1+|z|^2)^{-2} \approx 1 - 2|z|^2$

Тогда $g_{j\bar k} \approx \left(\delta_{jk}(1+|z|^2) - \bar z_j z_k\right)(1 - 2|z|^2)$

$\approx \delta_{jk}(1-|z|^2) - \bar z_j z_k = \delta_{jk} - \left(\delta_{jk}\sum_p z_p \bar z_p + \bar z_j z_k\right)$

$$\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial z_l \partial z_m}\Big|_0 = -(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{kl}\delta_{jm})$$

А значит в 0 мы имеем $R_{jklm} = \delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{kl}\delta_{jm}$

т.к. $2^е$ слагаемое занулится.

По транзитивности получаем $R_{jklm} = g_{jk} g_{lm} + g_{jm} g_{lk}$

$$R_{jk} = \sum_l R_{jkll} = \sum (\delta_{jk}\delta_{ll} + \delta_{kl}\delta_{jl}) = n\,\delta_{jk} + \delta_{jk}$$
$$= (n+1)\,\delta_{jj}$$

Откуда $R_{jk} = (n+1)\, g_{jk}$. $\quad \rho = \sum_{j,k} g^{jk} R_{jk} = \sum_j (n+1)$
$$= n(n+1)$$

В шаре вычисления аналогичны, только отличие в знаке а значит мы получим

$R_{jklm} = -(g_{jk} g_{lm} + g_{kl} g_{jm})$

$R_{jk} = -(n+1)\, g_{jk}$

$\rho = -n(n+1)$