

## Топология I, листочек 2

1. Докажите, что отрезок  $(a, b)$  гомеоморфен прямой  $\mathbb{R}$ . Для этого построим гомеоморфизм, но сначала докажем пару утверждений.

**Утверждение 1: Непрерывность отображений метрических пространств эквивалентна непрерывности отображений соответственных топологических пространств.**

**Доказательство:** Пусть  $Y$  и  $X$  – метрические пространства, с соответственными топологиями.

$\Rightarrow$ : Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывно с метрической точки зрения. То есть  $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta$  такое что  $\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Пусть  $U \subseteq Y$  открыто и  $x \in f^{-1}[U]$ . Тогда точка  $f(x)$  лежит в  $U$  вместе с некоторым шаром  $B_Y(f(x), \varepsilon)$  с центром  $f(x)$  и радиусом  $\varepsilon$ . И так как из непрерывности имеет место следствие  $\rho(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ , то  $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}[B_Y(f(x), \varepsilon)] \subseteq f^{-1}[U]$ , это означает что в прообразе  $U$  вместе с каждой точкой  $f(x)$  лежит некий шар с центром в ней, а значит прообраз открыт. Тогда прообраз любого открытого множества открыт и  $f$  – непрерывен с топологической точки зрения.

$\Leftarrow$ : Пусть прообраз каждого открытого открыт, тогда прообраз  $B_Y(f(x), \varepsilon)$  открыт, а значит для  $x$  существует  $\delta(\varepsilon)$ , такой что  $B_X(x, \delta(\varepsilon)) \subseteq f^{-1}[B_Y(f(x), \varepsilon)]$ , что означает метрическую непрерывность  $f$ .

**Утверждение 2: Композиция гомеоморфизмов – гомеоморфизм.**

**Доказательство:** Пусть  $X, Y, Z$  – гомеоморфные топологические пространства и  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  – гомеоморфизмы. Тогда для открытого  $U$  из  $Z$   $(g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1} \circ g^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]]$  его прообраз открыт. Аналогично образ открытого  $V$  из  $X$  тоже открыт, а значит  $g \circ f$  – гомеоморфизм.

Тогда  $f : x \mapsto x/(1-x^2)$  – гомеоморфизм  $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : x \mapsto \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$  – гомеоморфизм  $(-1, 1) \rightarrow (a, b)$ . А значит  $f \circ g^{-1} \in \text{Iso}((a, b), \mathbb{R})$ . Тогда прообраз любого открытого множества при отображении  $f \times g$  открыт, а значит оно непрерывно.

2. Пусть  $f, g : X \rightarrow Y$  – непрерывные отображения топологических пространств.

Предположим, что  $Y$  – хаусдорфово. Докажите, что множество  $C = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$  замкнуто в  $X$ .

**Утверждение 3: Произведение хаусдорфовых пространств само хаусдорфово.**

**Доказательство:** Пусть  $X$  и  $Y$  – два хаусдорфовых пространства. Пусть  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$  две разные точки, и пусть без потери общности первая координата в них различается. Тогда по хаусдорфовости  $X$  и  $Y$  существуют открытые множества  $U_x, U_y, U_{x'}, U_{y'}$ , что  $i \in U_i$  и при этом  $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ . Тогда если положить  $U = U_x \times U_y$  и  $V = U_{x'} \times U_{y'}$ , то они будут открытыми в пространстве  $X \times Y$ , причем  $U \cap V = \emptyset$ . Тогда для любых 2 различных точек  $X \times Y$  найдутся их непересекающиеся окрестности, а значит  $X \times Y$  хаусдорфово.

**Утверждение 4: Диагональ квадрата хаусдорфово пространства замкнута.**

**Доказательство:** Пусть  $Y$  – хаусдорфово пространство, и  $\Delta = \{(y, y) | y \in Y\}$  – диагональ квадрата  $Y^2$ . Пусть  $(x, y) \in \Delta^c$  – точка его дополнения. Тогда  $x \neq y$ , и существуют непересекающиеся окрестности  $U_x, U_y$  этих точек, а значит  $U_x \times U_y \cap \Delta = \emptyset$ . Тогда обозначим окрестность пары  $(x, y)$   $U_{x,y} = U_x \times U_y$ . Тогда будет иметь место следующее соотношение

$$\Delta^c = \bigcup_{(x,y) \in \Delta^c} U_{x,y},$$

а значит  $\Delta^c$  – открыто, а  $\Delta$  – замкнуто.

**Утверждение 5: Пусть  $f : X \rightarrow Y, g : X' \rightarrow Y'$  – непрерывные отображения топологических пространств, тогда отображение  $f \times g : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$  непрерывно. В случае если  $X = X'$ , то отображение  $(f, g) : x \mapsto (f(x), g(x))$  тоже непрерывно.**

**Доказательство:** Пусть  $U \subseteq Y \times Y'$  открытое множество, тогда  $U = \bigcup \{V_i \times V'_i | i \in I\}$ , где  $V_i$  и  $V'_i$  открытые множества соответственных топологических пространств. Это значит, что  $(f \times g)^{-1}[U] = \bigcup \{f^{-1}[V_i] \times g^{-1}[V'_i] | i \in I\}$ , что является объединением произведений открытых множеств, а значит открыто. Теперь пусть  $X = X'$ . Тогда  $(f, g)^{-1}[U] = \bigcup \{f^{-1}[V_i] \cap$

$g^{-1}[V'_i] | i \in I$  – очевидно открыто. А значит прообраз открытого при  $(f, g)$  всегда открыт, значит  $(f, g)$  непрерывно.

Заметим, что  $C = (f, g)^{-1}[\Delta]$  прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении, а значит само  $C$  замкнуто.

**Докажите, что если  $f : X \rightarrow X$  – непрерывное отображение хаусдорфова пространства  $X$  на себя, то множество неподвижных точек  $C = \{x \in X | f(x) = x\}$  замкнуто в  $X$ .**

Здесь  $g = \text{id}_X$  – непрерывно, а значит по предыдущему заданию  $C$  замкнуто.

3. Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – топологии на множестве  $X$ , причем  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ . Предположим, что  $(X, \tau_2)$  компактно. Докажите, что  $(X, \tau_1)$  тоже компактно.

Пусть  $(U_i)_{i \in I}$ ,  $U_i \in \tau_1$  – покрытие пространства  $X$ . Так как  $U_i \in \tau_2$ , то это ещё и покрытие в топологии  $\tau_2$ . А значит оно содержит конечное подпокрытие, а значит  $(X, \tau_1)$  – компактное пространство.

4. Приведите пример топологий  $\tau_1$  и  $\tau_2$  на множестве  $X$  таких что,  $\tau_1 \not\subseteq \tau_2$  и  $\tau_2 \not\subseteq \tau_1$ .

Если множество  $X$  содержит как минимум 2 различных элемента  $a$  и  $b$ , то топологии  $\{\emptyset, \{a\}, X\}$  и  $\{\emptyset, \{b\}, X\}$  удовлетворяют условию. В противном случае топология единственна.

5. Докажите, что компактное хаусдорфово пространство регулярно (для любой точки и для любого замкнутого множества, не содержащего эту точку, существуют непересекающиеся открытые окрестности). Докажите, что оно нормально (любые два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся открытые окрестности).

Пусть  $x \in X$  – точка и  $F \subseteq X \setminus \{x\}$  – замкнутое множество. Тогда по хаусдорфовости для каждого  $f \in F$  найдется непересекающаяся пара окрестностей  $U_f$  и  $V_f$ , где  $x \in U_f$  и  $f \in V_f$ . Тогда  $(F^c) \sqcup (V_f)_{f \in F}$  – покрытие  $X$ . Тогда по компактности можно выбрать конечное подпокрытие  $(F^c) \sqcup (V_f)_{f \in J}$ . Тогда  $\bigcup \{U_i | i \in J\}$  будет окрестностью точки  $x$  и  $\bigcup \{V_i | i \in J\}$  будет окрестностью множества  $F$ . Эти окрестности пересекаются по пустому множеству, а значит пространство  $X$  регулярно.

Пусть теперь  $F_1, F_2$  – два непересекающихся замкнутых множества. Тогда для каждого  $f \in F_1$  по регулярности найдется непересекающаяся пара окрестностей  $U_f \ni f$  и  $V_f \supset F_2$ . Тогда  $(F_1^c) \sqcup (U_f)_{f \in F_1}$  покрытие  $X$  и в нем по компактности можно выделить конечное подпокрытие  $(F_1^c) \sqcup (U_f)_{f \in J}$ . Тогда  $\bigcup \{U_f | f \in J\}$  – открытая окрестность  $F_1$ , а  $\bigcap \{V_f | f \in J\}$  – открытая окрестность  $F_2$ , причем они не пересекаются, а значит пространства  $X$  нормально.

6. Пусть  $X, Y, Z$  – топологические пространства. Докажите, что отображение  $f : Z \rightarrow X \times Y$  непрерывно тогда и только тогда, когда композиции с естественными проекциями  $\text{pr}_1 \circ f : Z \rightarrow X$  и  $\text{pr}_2 \circ f : Z \rightarrow Y$  непрерывны.

$\Rightarrow$ : Пусть  $f$  непрерывно. Проекции в данном случае непрерывны, так как они стрелки категории топологических пространств. Тогда композиция непрерывных отображений непрерывна.

$\Leftarrow$ : Пусть  $\text{pr}_1 \circ f$  и  $\text{pr}_2 \circ f$  непрерывны. Тогда пусть  $U \subseteq X \times Y$ , тогда  $U$  представимо как объединение открытых  $U_i \times V_i$ . Тогда  $f^{-1}[U] = \bigcup \{f^{-1}[U_i \times V_i]\} = \bigcup \{f^{-1}[U_i \times Y] \cap f^{-1}[X \times V_i]\} = \bigcup \{(\text{pr}_1 \circ f)^{-1}[U_i] \cap (\text{pr}_2 \circ f)^{-1}[V_i]\}$  – открытое множество, а значит отображение  $f$  – непрерывно.

7. Пусть отображения топологических пространств  $f : X_1 \rightarrow X_2$  и  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  непрерывны. Определите естественное отображение  $f \times g : X_1 \times Y_1 \rightarrow X_2 \times Y_2$  и покажите, что оно непрерывно. Утверждение 5

8. Определим график  $\Gamma_f$  непрерывного отображения топологических пространств  $f : X \rightarrow Y$  следующим образом:  $X \times Y \supseteq \Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ . Докажите, что ограничение естественной проекции  $\text{pr}_1$  индуцирует гомеоморфизм  $X \simeq \Gamma_f$ . Вспомним, что у отображений из каждой точки выходит ровно одна стрелка, а значит каждая такая стрелка однозначно определяется своим началом. Тогда ограничение проекции как раз и имеет смысл этого однозначного определения, тогда ограничение биективно. Причем любое отображения при индуцировании остается непрерывным. Проверим, что обратное ему тоже непрерывно. Пусть  $U \subset \Gamma_f$  – открыто. Это значит, что  $U = \Gamma_f \cap \bigcup \{U_i \times V_i\}$ .