Георгий Потошин, 2024

Алгебра I, листочек 6

1. **Пусть A – кольцо. Докажите изоморфизмы A-модулей:**

   В общем случае на морфизмах между правами модулями нельзя естественно ввести структруру модуля. Так как пусть U, V – правые A-модули. На $\mathrm{Hom}_A(U,V)$ структуру левого модуля с поэлементным действием не вводится, а именно $f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$, $\lambda, \mu \in A$, $x \in U$ действие не с той стороны $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) = ?$, перенести левое действие на правое не возможно, так как не выйдет модуль, а именно:

$$\begin{aligned}
&(\lambda f)(x) = f(x)\lambda \\
&(\lambda\mu f)(x) = ((\lambda\mu)f)(x) = f(x)\lambda\mu \\
&(\lambda(\mu f))(x) = (\mu f)(x)\lambda = f(x)\mu\lambda
\end{aligned}$$

   где скаляры не обязаны коммутировать. Если попытаться ввести структуру правого модуля, то действовать поэлементно слева также бессмыслено, а с права мы получим

$$\begin{aligned}
&(f\lambda)(x) = f(x)\lambda \\
&(f\lambda)(x\mu) = (f)(x\mu)\lambda = f(x)\mu\lambda \\
&(f\lambda)(x\mu) = (f\lambda)(x)\mu = f(x)\lambda\mu
\end{aligned}$$

   и мы теряем линейность.

   (a) $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$.

   Тем не менее если один из модуей – бимодуль, то эта проблема разрешима. Пусть M правый A-модуль. Мы будем использовать факт, что A - бимодуль, тогда введём на $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ структуру правого A-модуля полагая

$$\begin{aligned}
(\phi\lambda)(x) = \phi(\lambda x), &\quad \phi \in \mathrm{Hom}_A(A,M),\ \lambda \in A,\ x \in A \\
(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x), &\quad \phi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(A,M),\ x \in A
\end{aligned}$$

   Аксиомы абелевой группы мы уже проверяли. Проверим линейность:

$$(f\lambda)(x + y\mu) = f(\lambda(x + y\mu)) = f(\lambda x + \lambda y\mu) = f(\lambda x) + f(\lambda y)\mu = (f\lambda)(x) + (f\lambda)(y)\mu$$

   Проверим аксимы модуля

   i. $(f(\lambda\mu))(x) = f(\lambda\mu x) = (f\lambda)(\mu x) = ((f\lambda)\mu))(x)$
   ii. $(f1)(x) = f(1x) = f(x)$
   iii. $((f + g)\lambda)(x) = (f + g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = (f\lambda)(x) + (g\lambda)(x) = (f\lambda + g\lambda)(x)$
   iv. $(f(\lambda + \mu))(x) = f((\lambda + \mu)x) = f(\lambda x + \mu x) = f(\lambda x) + f(\mu x) = (f\lambda)(x) + (f\mu)(x) = (f\lambda + f\mu)(x)$

   Так что у нас получился правый модуль. Построим отображение $\varphi : f \mapsto f(1)$. Покажем, что оно линейное

$$\varphi(f + g\lambda) = (f + g\lambda)(1) = f(1) + g(\lambda) = f(1) + g(1)\lambda = \varphi(f) + \varphi(g)\lambda$$

   Для каждого $m \in M$, можно построить отображение $f_m : k \in A \mapsto mk$. Оно линейно, так как

$$f_m(k + l\lambda) = m(k + l\lambda) = mk + (ml)\lambda = f_m(k) + f_m(l)\lambda$$

   Тогда φ сюръективен. С другой стороны любой элемент из $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ однозначно определяется образом 1, а значит отображение инъективно. Мы построили изоморфизм.

   (b) $\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N)$

   Мы уже видели как вводить структуру правого модуля, если область бимодуль. Можно также ввести структуру левого модуля, если кообласть является бимодулем. Пусть

$f, g \in \mathrm{Hom}_A(U, V)$, где U – правый модуль-A, V – S-модуль-A и $\lambda \in A$, $k, l \in S$ и $x \in U$. Тогда положим

$$(kf)(x) = kf(x)$$

Проверим линейность

$$\begin{aligned}(kf)(x + y\lambda) &= k(f(x + y\lambda)) = k(f(x) + f(y)\lambda) = k(f(x)) + k(f(y)\lambda) \\ &= (kf)(x) + (kf(y))\lambda = (kf)(x) + (kf)(y)\lambda\end{aligned}$$

Проверим аксиомы модуля

i. $((kl)f)(x) = (kl)f(x) = k(lf(x)) = k((lf)(x)) = (k(lf))(x)$
ii. $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$
iii. $(k(f+g))(x) = k(f+g)(x) = k(f(x) + g(x)) = kf(x) + kg(x) = (kf)(x) + (kg)(x) = (kf + kg)(x)$
iv. $((k+l)f)(x) = (k+l)f(x) = kf(x) + lf(x) = (kf)(x) + (lf)(x) = (kf + lf)(x)$

Значит мы ввели структуру левого S-модуля.

Теперь если M_1, M_2 – S-модули-A и N – модуль-A. Тогда на $\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N)$ и на $\mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N)$ есть структуры правых модулей-S. Построим гомоморфизм

$$\begin{aligned}\varphi : \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N) \\ (f, g) &\mapsto f + g\end{aligned}$$

Где $(f+g)(x, y) = f(x) + g(y)$ для $x \in M_1$ и $y \in M_2$. Покажем теперь, что φ корректно определен, а именно, что $f + g$ линейны

$$\begin{aligned}&(f+g)((x, y) + (x', y')\lambda) = (f+g)(x + x'\lambda, y + y'\lambda) = f(x + x'\lambda) + g(y + y'\lambda) = \\ &f(x) + f(x')\lambda + g(y) + g(y')\lambda = (f(x) + g(y)) + (f(x') + g(y'))\lambda = \\ &(f+g)(x, y) + (f+g)(x', y')\lambda\end{aligned}$$

Пусть теперь $h \in \mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N)$, тогда можно найти его прообраз при φ, а именно положим $f = h \circ i_1$ и $g = h \circ i_2$, где $i_1 : x \mapsto (x, 0)$ и $i_2 : y \mapsto (0, y)$ – морфизмы, а значит f и g тоже морфизмы, как композиция морфизмов. Но также $h(x, y) = h((x, 0) + (0, y)) = h(x, 0) + h(0, y) = f(x) + g(y) = (f+g)(x, y)$. Так что отображение φ сюръекьтвно. С другой стороны мы имеем, что если $f(x) + g(y) = f'(x) + g'(y)$, то

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x) + g(0) = f'(x) + g'(0) = f'(x) \\ g(y) &= f(0) + g(y) = f'(0) + g'(y) = g'(y)\end{aligned}$$

А значит прообразы совпадают и отображение инъективно.

Проверим ленейность φ

$$\begin{aligned}&\varphi((f, g) + (f', g')k)(x, y) = \varphi(f + f'k, g + g'k)(x, y) = (f + f'k)(x) + (g + g'k)(y) = \\ &f(x) + g(y) + f'k(x) + g'k(y) = \varphi(f, g)(x, y) + f'(kx) + g'(ky) = \varphi(f, g)(x, y) + \varphi(f', g')(kx, ky) = \\ &\varphi(f, g) + \varphi(f', g')(k(x, y)) = \varphi(f, g) + (\varphi(f', g')k)(x, y) = (\varphi(f, g) + \varphi(f', g')k)(x, y)\end{aligned}$$

Тогда изоморфизм построен.

Во втором случае M_1, M_2 – модули-A и N S-модуль-A, тогда на $\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N)$ и на $\mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N)$ есть структуры левых модулей-S. Построим гомоморфизм

$$\begin{aligned}\varphi : \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N) \\ (f, g) &\mapsto f + g\end{aligned}$$

Он инъективен, сюръективен и бъёт в морфизмы ровно по тем же соображениям. Осталость проверить, что он гомоморфизм

$$\begin{aligned}&\varphi((f, g) + k(f', g'))(x, y) = \varphi(f + kf', g + kg')(x, y) = (f + kf')(x) + (g + kg')(y) = \\ &f(x) + kf'(x) + g(y) + kg'(y) = (f+g)(x, y) + k(f' + g')(x, y) = (\varphi(f, g) + k\varphi(f', g'))(x, y)\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$ Пусть M – S-модуль-A и N_1, N_2 – модули-A. Тогда $\mathrm{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2)$ и $\mathrm{Hom}_A(M, N_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$ несут структуры правых модулей-S. Зададим отображение

$$\begin{aligned}\varphi : \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, N_2) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2) \\ (f, g) &\mapsto f \oplus g\end{aligned}$$

Где $(f \oplus g)(x) = (f(x), g(x))$. Проверим корректность

$$(f \oplus g)(x + yk) = (f(x + yk), g(x + yk)) =$$
$$(f(x) + f(y)k, g(x) + g(y)k) = (f(x), g(x)) + (f(y), g(y))k = (f \oplus g)(x) + (f \oplus g)(y)k$$

Пусть $h \in \mathrm{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2)$, тогда положим $f = \pi_1 \circ h$ и $g = \pi_2 \circ h$, где $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$. f, g будут гомоморфизмами, так как они композиции гомоморфизмов. Тогда $(f \oplus g)(x) = (f(x), g(x)) = h(x)$, мы нашли прообраз, а значит отображение φ сюрективно. Если $f \oplus g = f' \oplus g'$, то для всех x

$$(f(x), g(x)) = (f'(x), g'(x)) \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \,\&\, g(x) = g'(x)$$

А значит отображение инъективно, проверим линейность φ

$$\varphi((f, g) + (f', g')k)(x) = \varphi(f + f'k, g + g'k)(x) = ((f + f'k)(x), (g + g'k)(x)) =$$
$$(f(x) + f'(kx), g(x) + g'(kx) = (f(x), g(x)) + (f'(kx), g'(kx)) = \varphi(f, g)(x) + \varphi(f', g')(kx) =$$
$$\varphi(f, g)(x) + \varphi(f', g')k(x)$$

Тогда изоморфизм построен.
Пусть теперь M – модуль-A и N_1, N_2 – S-модули-A, тогда на хомах будут структуры левых S-модулей. Опять рассмотрим отображение φ, оно корректно и биективно, проверим его линейность

$$\varphi((f, g) + k(f', g'))(x) = \varphi(f + kf', g + kg')(x) = ((f + kf')(x), (g + kg')(x)) =$$
$$(f(x) + kf'(x), g(x) + kg'(x) = (f(x), g(x)) + (kf'(x), kg'(x)) = \varphi(f, g)(x) + k(f'(x), g'(x))(x) =$$
$$\varphi(f, g)(x) + k\varphi(f', g')(x)$$

Модули над коммутативными кольцами легко превращаются в бимодули, и для них умножение справа и слева совпадают, поэтому часто две рассмотренные конструкции модулей на хомах не различают.

2. **Какие из следующих модулей являются свободными? Конечно порожденными?**

 (a) $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}$
 Очевидно, что $M \cong Z^{\oplus 1}$, так что M свободен. Он порождется 1, а значит конечно порожден.

 (b) $A = \mathbb{Q}, M = \mathbb{R}$
 Так как $\mathbb{R}$ векторное пространство над $\mathbb{Q}$, то как мы видели на лекции в $\mathbb{R}$ есть базис, а значит $\mathbb{R}$ совободен (на самом деле любое векторное пространство – свободный модуль). $\mathbb{R}$ не может быть прямой суммой конечного числа $\mathbb{Q}$, так как $\mathbb{R}$ несчетен, а $\mathbb{Q}$ счетен.

 (c) $A = \mathbb{R}, M = \mathbb{C}$
 $\mathbb{C}$ – $\mathbb{R}$-веторное пространство и порождается $\{1, i\}$, а значит оно конечно порожденный свободный модуль.

 (d) $A = \mathcal{M}at_{n\times n}(\Bbbk), M = \mathcal{M}at_{n\times m}(\Bbbk)$ Заметим, что M конечно порожден матричными единицами $e_{i,j}$, так как $A \in M$ всегда раскладывается в сумму матричных единиц, умноженных на $a_{i,j}I_n$. Предположим, что M свободен, тогда есть изоморфизм φ между $M \cong A^{\oplus I}$. Заметим, что в A вкладывается поле, а именно $k \in \mathbb{K} \mapsto kI_n$ причем тогда φ можно рассматривать как изоморфизм $\mathbb{K}$-векторных пространств. Нетрудно заметить, что размерность $A^{\oplus}$ равна $(n^2\#I)$, а размерность M равна nm, тогда у нас должно быть равенство размерностей, а значит $m = n\#I$. Тогда $\#I$ конечно и мы получис равенство в целых числах $m = nk$ это необходимое условие. Теперь пусть это верно и мы построим изоморфизм. $\varphi : (M_i) \in \mathcal{M}at_{n\times n}(\Bbbk)^{\oplus k} \mapsto \bigvee_i M_i$, где под $\vee$ мы подразумеваем конкатинацию матриц в линию. Например:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x & y \\ c & d & z & w \end{pmatrix}$$

 Это отображение очевидно пропускает сложение, так как в двух случаях оно происходит поиндексно. Оно биективно, а также пропускает умножение на матрицы, так матрица действуют поотдельности на каждый столбец, значение индекса после операции зависит только от значений в столбцах, а они при φ не изменяются. Так что $\mathcal{M}at_{n\times m}(\Bbbk)$ свободен над $\mathcal{M}at_{n\times n}(\Bbbk) \Leftrightarrow n$ делит m.

3. **Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме для модулей.**

   Пусть $f : U \longrightarrow V$ – морфизм модулей-A, тогда верно, что $V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$. Для этого построим отображение $\phi : [x] \mapsto f(x)$, как мы видели, это изоморфизм групп, проверим, что он пропускает умножение на скаляры $\phi([x]k) = \phi([xk]) = f(xk) = f(x)k = \phi([x])k$, а значит это изоморфизм модулей.

4. **Пусть A – коммутативное кольцо. Назовем A-модуль *нётеровым* (соотв., *артиновым*), если любая возрастающая (соотв., убывающая) цепочка подмодулей в нем стабилизируется. Пусть дана точная последовательность A-модулей**

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

   Докажите, что M_2 нетерово (соотв., артиново) тогда и только тогда, когда M_1 и M_3 нетерово (соотв., артиновы).

   Пусть M_2 нётеров или артинов. Тогда возьмём цепочку из M_1, она стабилизируется, так как она вкладывается в M_2 и является цепочкой в нётеровом или артиновом модуле. Возьмём цепочку из M_3, ей соответствует однозначно некая цепочка в M_2 подмодулей, содержащих ядро, она стабилизируется, а значит стабилизируется и изначальная из M_3.

   Пусть теперь M_1 и M_3 нётеровы артиновы. Пусть (A_i) цепочка из M_2, тогда $A_i \cong (\mathrm{Ker}(\psi) \cap A_i) \bigoplus \psi[A_i]$ по теореме о гомеоморфизме для $\psi|_{A_i}$. К тому же через ϕ, так как последовательность точна, модулю $\mathrm{Ker}(\psi) \cap A_i$ однозначно соответствует прообраз B_i. Причем свойство цепочки без проблем переносится на прямые слогаемые, а значит (B_i) и $(\psi[A_i])$ цепочки в M_1 и M_3 и они обе стабильны после некоторого шага, а значит и их прямая сумма тоже, а тогда и изначальная цепочка.

5. **Пусть A – артиново коммутативное кольцо. Пусть M – конечно порожденный модуль-A. Докажите, что M артинов.**

   Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ порождает M. Рассмотрим свободный модуль над $\{x_1, \dots, x_n\}$ $M' = A^{\{x_1,\dots,x_n\}}$. Покажем, что свободные модули артиновы. Очевидно – артиновый модуль. Покажем, что если $A^{\oplus n}$ артинов, то и $A^{\oplus n+1}$ тоже для этого построем точную последовательность

$$0 \to A \to A^{\oplus n+1} \to A^{\oplus n} \to 0$$

   где вторая стрелка отправляет скаляр в последнюю координату, а вторая отправляет тождественно всё кроме последней координаты. A и $A^{\oplus n}$ артиновы, тогда $A^{\oplus n+1}$ тоже. По индукции заключаем, что модули с конечным базисом над артиновом кольцом артиновы. Теперь вернёмся к M' и M, как мы видели M' артинов, а из M' в M есть каноническая проекция, а в задаче 4 мы видели, что при проекции артиновость переносится вдоль стрелки. Тогда M тоже артинов.

6. **Пусть A – кольцо. Пусть дана последовательность правых модулей-A**

$$M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

   Докажите, что индуцированная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, N) \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \mathrm{Hom}(M_2, N) \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathrm{Hom}(M_1, N)$$

   точна для любого S-модуля-A N тогда и только тогда, когда точна первая. Докажите аналогичное утверждение, заменив $\mathrm{Hom}(-, N)$ на $\mathrm{Hom}(N, -)$.

   Определим $(h)\widetilde{\phi} = h \circ \phi$, аналогично определим $\widetilde{\psi}$. На Hom положим структуры левых S-модулей. Покажем, что $\widetilde{\phi}$ – гомоморфизм

$$(kg + h)\widetilde{\phi}(x) = kg(\phi(x)) + h(\phi(x)) = ((kg)\widetilde{\phi} + h\widetilde{\phi}(x).$$

   Для точности последоваетльности необходимо, чтобы $\widetilde{\psi}$ было инъективным. Из первой последовательности следует, что ψ сюрьективен, а значит он эпиморфизм и его можно сокращать справа, тогда $h \circ \psi = (h)\widetilde{\psi} = (h')\widetilde{\psi} = h' \circ \psi$ мы сокращаем ψ и получаем $h = h'$, а тогда $\widetilde{\psi}$ и вправду инъективен. На $\widetilde{\varphi}$ наложено условие, что его ядро – в точности образ $\widetilde{\psi}$, но мы знаем, что $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Пусть $\mathrm{Im}(\widetilde{\psi}) \ni h = h' \circ \psi$, тогда $(h)\widetilde{\phi}(x) = h' \circ \psi \circ \phi(x) = 0$, а значит $\mathrm{Im}(\widetilde{\psi}) \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\phi})$. Теперь пусть $h \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\phi})$, мы хотим найти h', что бы следующая диаграмма коммутировала, потому как тогда $h = (h')\widetilde{\psi}$:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\phi"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "h"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h'"] & 0 \\ & & N & \end{tikzcd}$$

Так как $h \in \operatorname{Ker}(\widetilde{\phi})$, то $\operatorname{Im}(\phi) \subseteq \operatorname{Ker}(h)$. Тогда диаграмму можно профакторизовать и получить фактор отображения $\overline{h}$ и $\overline{\psi}$, что $\overline{h}([a]) = h(a)$ и точно также для ψ, так как $\operatorname{Im}(\phi) = \operatorname{Ker}(\psi)$. И более того $\overline{\psi}$ будет биекцией. Тогда будет иметь место следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} M_2/\operatorname{Im}(\phi) \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[dr, "\overline{h}"'] & M_3 \arrow[d, dashed, "h'"] \\ & N \end{tikzcd}$$

И можно положить $h' = \overline{h} \circ \overline{\psi}^{-1}$.

Тогда мы показали, что $\widetilde{\psi}$ – инъекция и $\operatorname{Im}(\widetilde{\psi}) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\phi})$, а значит вторая последовательность тоже точна.

Рассмотрим аналогичное утверждение для левых $\operatorname{Hom}(N, -)$. Оно в отличии от прошлого ковариантно, так что нужно будет кое-что поменять. Пусть мы наблюдаем следующую точную последовательность

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

Тогда индуцированная последовательность тоже точна:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, M_1) \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \operatorname{Hom}(N, M_2) \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \operatorname{Hom}(N, M_3)$$

где $\widetilde{\phi}(h) = \phi \circ h$, аналогично определяется $\widetilde{\psi}$. Проверим инъективность $\widetilde{\phi}$, пусть $\psi \circ h = \widetilde{\psi}(h) = \widetilde{\psi}(h') = \psi \circ h'$, но так как из точности первой последовательности видно, что ψ – инъкция, а значит мономорфизм, то его можно сокращать слева, а тогда $h = h'$ и $\widetilde{\psi}$ инъективно.

Теперь проверим второе условие на точность, а именно, что $\operatorname{Im}(\widetilde{\phi}) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\psi})$. Мы знаем, что $\operatorname{Im}(\phi) = \operatorname{Ker}(\psi)$. Пусть $\operatorname{Im}(\phi) \ni h = \phi \circ h'$, тогда $\widetilde{\psi}(h)(x) = \psi \circ \phi(h(x)) = 0$, а значит $\operatorname{Im}(\widetilde{\phi}) \subseteq \operatorname{Ker}(\widetilde{\psi})$. Проверим в другую сторону, пусть $h \in \operatorname{Ker}(\widetilde{\psi})$, тогда будет искать $h' : N \to M_1$, чтобы следующая диаграмма коммутировала

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed, "h'"'] & M_2 \arrow[r, "\psi"] & M_1 \\ & M_1 \arrow[u, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

Так как $\psi \circ h = 0$, то $\operatorname{Im}(h) \subseteq \operatorname{Ker}(\psi)$, а тогда можно сузить кообласить до $\operatorname{Ker}(\psi) = \operatorname{Im}(\psi)$, обозначим за $\overline{h}, \overline{\phi}$ отображения со суженой областью, то есть такие отображение, что их графики совпадают с изначальными граффиками, но кообласть меньше, тогда так как ϕ инъективно, то после сужения он привратится в изоморфизм и будет иметь место следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dr, dashed] & \operatorname{Im}(\phi) \\ & M_1 \arrow[u, "\overline{\phi}"] \end{tikzcd}$$

Тогда можно положить $h' = \overline{\phi}^{-1} \circ \overline{h}$. А значит вторая цепочка тоже точна.

Заметим, что нам на самом деле не обязательно иметь структуру S-модуля, по тому как она всегда автоматически появляется, когда один из модулей – бимодуль, а гомоморфизмы абелевых групп переходят в гомоморфизмы S-модулей, так что можно рассматривать всё тоже самое просто на абелевых группах.

7. **Чему изоморфен $\mathbb{Z}$-модуль $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?**

   Пусть $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{Q}$, если $n \neq 0$, то имеет место следующее равенство $f(q) = nf(q/n) = 0$, а значит $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{Q} = 0$. Если мы имеем $n = 0$, то для любого $k \in Z_{>0}$ мы имеем $f(q) = kf(q/k)$, а значит для $k > f(q)$ будет $f(q/k) = 0$, а значит $f(q) = 0$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ тоже.

8. **Пусть A – кольцо. Пусть дана точная последовательность правых модулей-A**

   $$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

   Верно ли, что следующая последовательность

   $$0 \to \mathrm{Hom}(M_3, N) \to \mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N) \to 0$$

   для бимодуля N точна? А если заменить $\mathbf{Hom}(-, N)$ на $\mathbf{Hom}(N, -)$?

   Ответ на два вопроса отрицателен. В первом случае не верна часть цепи, где

   $$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M_2$$

   не влечет точность

   $$\mathrm{Hom}(M_2, N) \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathrm{Hom}(M_1, N) \longrightarrow 0$$

   Приведем контр пример, пусть $M_1 = M_2 = N = \mathbb{Z}$ и $\phi : x \mapsto 2x$ – инъекция. Тогда очевидно, $\widetilde{\phi}$ не будет сюръекцией, так как для любого $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ $(f)\widetilde{\phi} \neq \mathrm{id}$. Так как $f(\phi(x)) = f(x2) = f(x)2$ – четно, а нечетные числа получить мы не сможем.

   Приведем контро пример для двойственной ситуации, то есть покажем, что если точна

   $$M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \longrightarrow 0$$

   То точность индуцированной последовательности не гарантирована

   $$\mathrm{Hom}(N, M_1) \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathrm{Hom}(N, M_2) \longrightarrow 0$$

   Так как имеет место следующая диаграмма

   $$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{mod}4"] & \mathbb{Z}_4 \arrow[r] & 0 \\ & \mathbb{Z}_2 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

   Где $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$, а $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2$ и соотвественно

   $$0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

   не может быть точна.

9. **Пусть A – кольцо. Рассмотрим коммутативную диаграмму модулей-A с точными строками:**

   $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\psi_1"] & N_2 \arrow[r, "\psi_2"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Докажите, что имеется индуцированная точная последовательность модулей-A

   $$0 \to \mathrm{Ker}(f_1) \to \mathrm{Ker}(f_2) \to \mathrm{Ker}(f_3) \to \mathrm{Coker}(f_1) \to \mathrm{Coker}(f_2) \to \mathrm{Coker}(f_3) \to 0$$

   Начнём с первой стрелки $\widetilde{\phi}_1 : \mathrm{Ker}(f_1) \to \mathrm{Ker}(f_2)$ она получается ограничением области и кообласти из ϕ_1 и если корректно определена, то очевидно сохраняет инъективность, так что проверим корректность, то есть убедимся в том, что $\phi_1[\mathrm{Ker}(f_1)] \subseteq \mathrm{Ker}(f_2)$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(f_1)$, тогда из коммутативности диаграммы мы получим $f_2(\phi_1(x)) = 0$, а значит $\phi_1(x) \in \mathrm{Ker}(f_2)$ и мы доказали то, то что хотели.

Вторая стрелка определяется аналогично и также корректна $\widetilde{\phi}_2 : \mathrm{Ker}(f_2) \to \mathrm{Ker}(f_3)$. Проверим, что она точна слева в этой диаграмме, то есть, что $\mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_1) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\phi}_2)$. Так как в изначальной диаграмме $\phi_2 \circ \phi_1 = 0$, то и в индуцированной $\widetilde{\phi}_2 \circ \widetilde{\phi}_1 = 0$ тоже, так как ограничение не изменяет свойства занулять, а занчит $\mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\phi}_2)$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\phi}_2)$, тогда $x \in \mathrm{Im}(\phi_1) = \mathrm{Ker}(\phi_2)$, а значит есть $y \in M_1$, что $\phi_1(y) = x$, убедимся, что $y \in \mathrm{Ker}(f_1)$. Это верно, так как $\psi_1 \circ f_1(y) = f_2 \circ \phi_1(y) = 0$ и так как ψ инъекция, то $y \in \mathrm{Ker}(f_1)$, а тогда $x \in \mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_1)$ и мы получили второе включение.

Посмторим на третью стрелку, для $x \in \mathrm{Ker}(f_3)$ $\phi_2^{-1}(x) = x' + \mathrm{Ker}(\phi_2) = x' + \mathrm{Im}(\phi_1)$ так как ϕ_2 сюръективен, дальше пройдемся вдоль f_2 и $f_2[x' + \mathrm{Im}(\phi_1)] = f_2(x') + \mathrm{Im}(f_2 \circ \phi_1) = f_2(x') + \mathrm{Im}(\psi_1 \circ f_1)$, причем так как $\phi_2 \circ f_3(x') = 0$, то $f_2(x') \in \mathrm{Ker}(\psi_2) = \mathrm{Im}(\psi_1)$, а значит $\psi_1^{-1}[f_2(x') + \mathrm{Im}(\psi_1 \circ f_1)] = x'' + \mathrm{Im} f_1$, поэтому у нас есть естественное отображение $\delta : \mathrm{Ker}(f_3) \to \mathrm{Coker}(f_1) : x \mapsto x'' + \mathrm{Im}(f_1)$ и оно корректно, так как мы работали со множествами, а не представителями. Проверим, что это гомоморфизм модулей:

$$\begin{aligned}
&\phi_2^{-1}(x + y\lambda) = x' + y'\lambda + \mathrm{Ker}(\phi_2)\\
&f_2[x' + y'\lambda + \mathrm{Ker}(\phi_2)] = f_2(x') + f_2(y')\lambda + \mathrm{Im}(\phi_1 \circ f_2)\\
&\psi_1^{-1}[f_2(x') + f_2(y')\lambda + \mathrm{Im}(f_1 \circ \phi_2)] = x'' + y''\lambda + \mathrm{Im}(f_1)
\end{aligned}$$

Убедимся в точности слева, то есть что $\mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_2) = \mathrm{Ker}(\delta)$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(f_2)$, тогда $\widetilde{\phi}_2(x) \in \mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_2)$, посчитаем образ после δ, тогда

$$\psi_1^{-1}[f_2[\phi_2^{-1}(\widetilde{\phi}_2(x))]] = \psi_1^{-1}[f_2[x + \mathrm{Ker}(\phi_2)]] = \psi_1^{-1}[0 + \mathrm{Im}(\psi_1 \circ f_1)] = 0 + \mathrm{Im}(f_1)$$

А значит $\mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_2) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta)$. Теперь попробуем включение в другую сторону, пусть $x \in \mathrm{Ker}(\delta) \subseteq \mathrm{Ker}(f_3)$. Тогда $\psi_1^{-1}[f_2(x') + \mathrm{Im}(\psi_1 \circ f_1)] = \mathrm{Im}(f_1)$, а тогда по инъективности ψ_1 верно, что $f_2(x') \in \mathrm{Im}(\psi_1 \circ f_1) = \mathrm{Im}(f_2 \circ \phi_1)$. Тогда $x' \in \mathrm{Im}(\phi_1) + \mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Ker}(\phi_2) + \mathrm{Ker}(f_2)$, но так как мы можем выбрать разные x' с точностью по модулю $\mathrm{Ker}(\phi_2)$, то можно положить $x' \in \mathrm{Ker}(f_2)$, а тогда $x = \widetilde{\phi}_2(x') \in \mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_2)$ и мы доказали второе включение.

Посмотрим на следующую стрелку индуцированную с ψ_1, назавём её $\widetilde{\psi}_1 : a + \mathrm{Im}(f_1) \mapsto \psi_1(a) + \mathrm{Im}(f_2)$. Проверим, что она корректно определена, для этого достаточно проверить, что $\psi_1[\mathrm{Im}(f_1)] \subseteq \mathrm{Im}(f_2)$, ну а это так, потому что $\psi_1[\mathrm{Im}(f_1)] = \mathrm{Im}(f_2 \circ \phi_1)$. Теперь будем проверять точность, а именно, что $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi}_1)$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(f_3)$, $\phi_2^{-1}(x) = x' + \mathrm{Ker}(\phi_2)$. Тогда

$$f_2[x' + \mathrm{Ker}(\phi_2)] = f_2(x') + f_2[\mathrm{Ker}(\phi_2)] = f_2(x') + f_2[\mathrm{Im}(\phi_1)] \subseteq \mathrm{Im}(f_2)$$

По определению $\delta(x) = \psi_1^{-1}[f_2[x' + \mathrm{Ker}(\phi_2)]]$. Заметим, что также $\widetilde{\psi}_1(a) = \psi_1[a] + \mathrm{Im}(f_2)$, но так как ψ_1 инъективна, то $\psi_1[\psi_1^{-1}[A]] \subseteq A$, а тогда в частности $\psi_1[\psi_1^{-1}[f_2[x' + \mathrm{Ker}(\phi_2)]] \subseteq f_2[x' + \mathrm{Ker}(\phi_2)] \subseteq \mathrm{Im}(f_2) \subseteq \mathrm{Im}(f_2)$, а тогда $\widetilde{\psi}_1(\delta(x)) = \mathrm{Im}(f_2)$. А значит мы доказали, что $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi}_1)$. Проверим утверждение в обратную сторону, пусть $x \in N_1$ такой, что $\widetilde{\psi}_1(x) = \mathrm{Im}(f_2)$. Это означает, что $\psi_1(x) \in \mathrm{Im}(f_2)$, тогда мы найдем $x' \in M_2$, что $f_2(x') = \psi_1(x)$. Тогда по построению δ мы имеем $\delta(\phi_2(x')) = x + \mathrm{Im}(f_1)$, и мы получили включение в другую сторону, а значит верно и равенство $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi}_1)$.

Строим дальше, стрелка $\widetilde{\psi}_2$ определяется аналогично, и поэтому тоже корректна, проверим, что она точна. Пусть $x \in N_1$, тогда

$$\widetilde{\psi}_2(\widetilde{\psi}_1(x + \mathrm{Im}(f_1))) = \widetilde{\psi}_2(\psi_1(x) + \mathrm{Im}(f_2)) = \psi_2 \circ \psi_1(x) + \mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Im}(f_3)$$

А значит $\mathrm{Im}(\widetilde{\psi}_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi}_2)$. Теперь пусть $y \in N_2$ такой, что $\widetilde{\phi}_2(y + \mathrm{Im}(f_2)) = \mathrm{Im}(f_3)$ это означает, что $\psi_2(y) \in \mathrm{Im}(f_3)$. Пусть $y' \in M_3$ таков, что $f_3(y') = \psi_2(y)$. Дальше по сюръективности ϕ_2 мы найдем $y'' \in M_2$, что $\phi_2(y'') = y'$. Посмотрим на $y - f_2(y'')$, увидим, что из-за коммутативности диаграммы $\psi_2(y - f_2(y'')) = 0$, а тогда по точности нижней линии будет $y - f_2(y'') = c \in \mathrm{Im}(\psi_1)$, а тогда $y + \mathrm{Im}(f_2) = c + \mathrm{Im}(f_2) \subseteq \mathrm{Im}(\psi_1)$, а значит мы доказали включение в обратную сторону, а значит эта часть последовательности точна, но также очевидно, что $\widetilde{\psi}_2$ инъективна, так как она индуцирована с инъективного отображения. Последовательность построена, а её точность доказана.

10. **Пусть A – коммутативное кольцо.**

    (a) **Пусть M – нётеров A-модуль. Докажите, что если гомоморфизм $\phi : M \to M$ сюръективен, то ϕ – изоморфизм.**

    Заметим, что мы найдем возрастающую последовательность

    $$M \subseteq \mathrm{Ker}(\phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi^2) \subseteq \dots.$$

По нётеровости она стабилизируется на некотором шаге n, то есть мы получим $\mathrm{Ker}(\phi^n) = \mathrm{Ker}(\phi^{n+1})$. Из этого вытекает, что $\mathrm{Im}(\phi^n) \cap \mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, но так как по сюръективности $\mathrm{Im}(\phi^n) = M$, то ядро ϕ нулевой, а значит что ϕ так же инъективен, а тогда и биективен.

(b) **Пусть M – артинов A-модуль. Докажите, что если гомоморфизм $\phi : M \to M$ инъективен, то ϕ – изоморфизм.**

Найдём убывающую цепочку

$$M \supseteq \mathrm{Im}(\phi) \supseteq \mathrm{Im}(\phi^2) \supseteq \dots .$$

В этой цепочке вложеность обеспечена действием ϕ. Заметим, что по артиновости она стабилизируется после некоторого шаг и пусть n такого, что $\mathrm{Im}(\phi^n) = \mathrm{Im}(\phi^{n+1})$. Ещё точнее можно сказать, что ϕ индуцирует взаимо однозначное отображени между $\mathrm{Im}(\phi^n)$ и $\mathrm{Im}(\phi^{n+1})$. Тогда посмотрим на индуцированное $\phi' : \mathrm{Im}(\phi^{n-1}) \to \mathrm{Im}(\phi^n)$. Для него верно, что подмножество $\mathrm{Im}(\phi^n)$ всё переходит в $\mathrm{Im}(\phi^n)$ под ϕ, а тогда по инъективности ϕ мы заключаем, что $\mathrm{Im}(\phi^{n-1}) \setminus \mathrm{Im}(\phi^n) = \emptyset$, а тогда $\mathrm{Im}(\phi^{n-1}) = \mathrm{Im}(\phi^n)$ и если спуститься в начало, мы получим $M = \mathrm{Im}(\phi)$, а значит ϕ – биекция.

11. **Пусть A – коммутативное кольцо.**

Введем тензорное произведение двух A-модулей. Пусть M, N – модули. Возьмём прямую сумму по их декартовому произведению $F = \bigoplus_{(m,n)\in M\times n} A_{(m,n)}$, где $A_{(m,n)} = e_{m,n}A$ – формальные произведения. Мы получим свободный модуль с базисом $\{e_{m,n}\}_{(m,n)\in M\times N}$. Возьмём его подмодуль $F' = \langle e_{a+b\lambda,n+m\mu} - e_{a,n} - e_{a,m}\mu - e_{b,n}\lambda - e_{b,m}\lambda\mu\rangle_{a,b\in M,\, m,n\in M,\, \lambda,\mu\in A}$. Тогда $M \otimes_A N = F/F'$, пусть $\pi : F \mapsto F/F'$ – каноническая проекция, тогда введем обозначение $m \otimes n = \pi(e_{m,n})$.

(a) **Предположим, что $A^{\oplus n} \cong A^{\oplus m}$ для некоторых $n, m \geq 1$. Докажите, что $n = m$.**
Давайте возьмём и тензорно это умножим на поле $F = A/I$, где I – некий максимальный идеал. Тогда если выделить в $A^{\oplus n}$ канонический базис $\{e_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$, то нетрудно заметить, что $(e_i \otimes 1_F)_{i\in[\![0,n]\!]}$ порождает $A^{\oplus n} \otimes F$, но также очевидно, что умножение на скаляры происходит с точностью до добавления элемента идеала I, так как $(e_i \otimes 1)\cdot(a+b) = e_i \otimes [a+b]_I = e_i \otimes [a]$, если $b \in I$, а тогда можно факторизовать скаляры до A/I и получить $(A/I)^{\oplus n}$ с каноническим базисом над A/I $\{u_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ и хочется сказать, что f пройдя по тем же преобразованиям станет изоморфизмом векторных пространств F^n и F^m, а значит $n = m$. Теперь обозначим некоторые сопутствующие морфизмы и проверим корректность рассуждений.

$$\begin{aligned}
&f : A^{\oplus m} \longrightarrow A^{\oplus n}\\
&\phi_m : A^{\oplus m} \longrightarrow A^{\oplus m} \otimes A/I = a \mapsto a \otimes 1\\
&\psi_m : A^{\oplus m} \otimes (A/I) \longrightarrow (A/I)^{\oplus m} = e_i \otimes [a] \mapsto u_i[a]
\end{aligned}$$

где f – изоморфизм модулей. Корректность и и линейность ϕ_n тривиальна.

Покажем, что по ϕ_n и ϕ_m можно индуцировать изоморфизм f', то есть следующую диграмму можно дополнить до коммутативной

$$\begin{tikzcd}
A^{\oplus m} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_m"] & A^{\oplus n} \arrow[d, "\phi_n"] \\
A^{\oplus m} \otimes A/I \arrow[r, dashed, "f'"] & A^{\oplus n} \otimes A/I \\
\bigoplus_{i\in A^{\oplus m}\times A/I} A_i \arrow[r, dashed, "f''"] \arrow[u, "\pi_m"] & \bigoplus_{i\in A^{\oplus n}\times A/I} A_i \arrow[u, "\pi_n"]
\end{tikzcd}$$

для этого построим сначала $f'' = e_{a,k} \mapsto e_{f(a),k}$, морфизм естественно продолжается единственным образом из свободного модуля если заданы образы для элементов базиса. Более того f'' однозначно сопоставляет элементы базисов двух свободных модулей, а значит f'' – изоморфизм.

Теперь спроецируем f'' в стрелку между тензорными пространствами. Для этого необходимом и достаточно, чтобы $f[\mathrm{Ker}(\pi_m)] \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_n)$. Это достаточно проверить только для порождающих элементов из $\mathrm{Ker}(\pi_m)$

$$\begin{aligned}
&f''(e_{a+b\lambda,n+m\mu} - e_{a,n} - e_{a,m}\mu - e_{b,n}\lambda - e_{b,m}\lambda\mu) =\\
&e_{f(a)+f(b)\lambda,n+m\mu} - e_{f(a),n} - e_{f(a),m}\mu - e_{f(b),n}\lambda - e_{f(b),m}\lambda\mu \in \mathrm{Ker}(\pi_n)
\end{aligned}$$

Тогда мы получаем корректно определенную проекцию $f' = a \otimes k \mapsto f(a) \otimes k$ и это ровно то, что мы хотели и оно корректно. Проверим, что полученая стрелка обратима. Это очевидно, так как по тем же соображениям можно построить обратную стрелку $f'^{-1} = a \otimes k \mapsto f^{-1}(a) \otimes k$ так как f – изоморфизм.