Георгий Потошин, 2024

Алгебра I, листочек 4

1. **Найдите группы обратимых элементов в кольцах (здесь $\Bbbk$ – произвольное поле):**
   (a) $\Bbbk[x]$. В этом кольце элементы частично упорядочены по степени максимального ненулевого члена, причем степень многочлена ведёт себя аддитивно по умножению, а значит если произведение двух полиномов равно 1, то они должны быть свободны от x. С другой стороны свободные члены обратимы, когда они не нули, потому как поле, тогда мультипликативной группой будут $\Bbbk^{\times}x^0$.
   (b) $\Bbbk[[x]]$. Как мы видели на лекции, если у ряда обратим нулевой коэффициент, то обратим и сам ряд по правилу $(a_0 + a_1x + \ldots)^{-1} = (b_0 + b_1x \ldots)$, где $b_0 = a_0^{-1}$ и $b_n = -a_0^{-1}(a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$. Причем, если a_0 не обратим, то тогда не будет $a_0b_0 = 1$.
   (c) $Mat_2(\Bbbk)$. Как мы уже видели, то обратимыми будут матрицы с обратимым дискриминантом. Для них верно:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   Если это не так, то дискриминант в поле равен нулю, а значит $c = ak$ и $d = bk$, тогда
$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ k\lambda_1 & k\lambda_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Докажите изоморфизмы колец:**
   (a) **$\Bbbk[x]/(f(x)) \cong \Bbbk$, если $f(x)$ - многочлен первой степени.**

   Выберем из каждого класс элемент степени 0. Такой существует, так как мы можем делить с остатком на $f(x)$. Такой элемент единственен, так как разница многочленов нулевой степени из одного класса - многочлен нулевой степени из идеала $(f(x))$, а это 0. Такое соответсвие однозначно сопоставит элементы поля и кольца. Причем это соответствие будет гомоморфизмом из-за того, как мы перемножаем классы.
   (b) **$\mathbb{R}[x]/(f(x)) \cong \mathbb{C}$, если $f(x)$ – многочлен степени 2, не имеющий вещественных корней.**
   Если у нас есть такой многочлен, то идеал приводится к виду $(f(x)) = ((x - b)^2 + c)$, где $c > 0$ и вообще любой многочлен можно записать в виде $a_0 + a_1(x - b) + a_2(x - b)^2 + \ldots$. Тогда при факторизации мы на самом деле говорим, что $(x - b)^2 = -c$, тогда можно отправить $(x - b) \mapsto \sqrt{c}i$, а $1 \mapsto 1$. Это задаст гомоморфизм колец. Он очевидно будет биективным, потому как это мономорфизм $\mathbb{R}$-векторных пространств ранга 2. Изоморфизм построен.

3. **Пусть $\Bbbk = \mathbb{Z}/(2)$. Докажите, что $\mathbb{K}[x]/(x^2 + x + 1)$ – поле.**
   Вообще многочлены над полем образуют кольцо главных идеалов, так как мы можем делить в столбик и упорядочивать многочлены по степени. При этом $x^2 + x + 1$ несепарабелен над $\mathbb{Z}/(2)$, так как у него нет корней и он степени 2. Так что идеал $(x^2 + x + 1)$ является максимальным, а фактор по нему имеет только 2 идеала, а значит он поле.

4. **Пусть I_i – идеалы в кольце A. Докажите, что**
   Здесь всё будет доказано для правых идеалов, но также верно и для левых.
   (a) **$I_1 + I_2$ – идеал**
   Как мы видели для абелевых групп, $I_2 + I_1$ - абелева подгруппа. Также проверим замкнутость по умножение справа. $i_1 \in I_1,\ i_2 \in I_2,\ a \in A \Rightarrow i_1a \in I_1,\ i_2a \in I_2 \Rightarrow i_1a + i_2a \in I_1 + I_2$. Доказано
   (b) **$I_1I_2 = \{\sum x_iy_i \mid x_i \in I_1,\ y_i \in I_2\}$ – идеал**
   Проверим, стабильность по умножению на скаляры $(I_1I_2)A \subseteq I_1(I_2A) \subseteq I_1I_2$. Проверим, что это абелева подгруппа по сложению. Очевидно, что сумма конечных сумм - конечная сумма, так что есть замкнутость по умножению. К тому же так как идеалы не пусты, то и произведение тоже.

(c) $\bigcap_i I_i$ **пересечение идеалов – идеал**
$x \in \bigcap_i I_i \Rightarrow \forall i,\, x \in I_i \Rightarrow \forall i, \forall a,\, xa \in I_i \Rightarrow \forall a,\, xa \in \bigcap_i I_i$
$x, y \in \bigcap_i I_i \Rightarrow \forall i,\, x, y \in I_i \Rightarrow \forall i,\, x + y \in I_i \Rightarrow x + y \in \bigcap_i I_i$

(d) $(I_1 I_2) I_3 = I_1 (I_2 I_3)$
$a \in (I_1 I_2) I_3 \quad \Rightarrow \quad a = \sum_j (\sum_i x_{i,j} y_{i,j}) z_j = \sum_i \sum_j (x_{i,j} y_{i,j}) z_j = \sum_i \sum_j x_{i,j} (y_{i,j} z_j) \quad \Rightarrow$ $a \in I_1(I_2 I_3)$. Где $x_i \in I_1$, $y_i \in I_2$ и $z_i \in I_3$. Точно также доказывается в обратную сторону.

(e) $I_1(I_2 + I_3) = I_1 I_2 + I_1 I_3$
$I_1 I_2, I_1 I_3 \subseteq I_1(I_2 + I_3)$, а значит и их сумма тоже. В другую сторонуа $a = \sum_i x_i(y_i + z_i) = \sum_i x_i y_i + \sum_i x_i z_i \in I_1 I_2 + I_1 I_3$, где $x_i \in I_1$, $y_i \in I_2$ и $z_i \in I_3$.

5. **Пусть I, J, K – идеалы в кольце A. Определим частное идеалов $(I : J)$ следующим образом:**

$$(I : J) = \{a \in A \mid aJ \subseteq I\}$$

Покажите, что это идеал.

Пусть $a, b \in (I : J)$ и $\lambda \in A$. Тогда $(a + b)J \subseteq aJ + bJ \subseteq I + I = I$. $\lambda a J \subseteq \lambda I \subseteq I$ и $a \lambda J = aJ \subset I$. Заметим, что частное является идеалом.

Докажите, что

(a) $I \subseteq (I : J)$
Пусть $a \in I$ лежит в идеале, тогда $aJ \subseteq I$, а значит $a \in (I : J)$.

(b) $(I : J)J \subseteq I$
Пусть $a \in (I : J)J$, тогда $a = \sum_i x_i y_i$, где $x_i \in (I : J)$ и $y_i \in J$, тогда $x_i y_I \in I$ по определению частного, тогда и сумма там же.

(c) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$
Пусть $a \in ((I : J) : K)$ это равносильно тому, что $aK \subseteq (I : J)$, что в точности $aKJ \subseteq I$, а это определение $a \in (I : KJ)$. Тогда верно $((I : J) : K) = (I : KJ)$ в некоммутативном случае, а в коммутативном $((I : J) : K) = (I : KJ) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.

6. **Докажите, что прообраз простого идеала при гомоморфизме колец является простым идеалом. Является ли прообраз максимального идеала максимальным?**

Пусть $f : A \longrightarrow B$ – гомоморфизм колец и $P \subseteq B$ – простой идеал. Пусть $ab \in f^{-1}[P]$, тогда $f(a)f(b) = f(ab) \in P$, без потери общности по простоте P положим $f(a) \in P$, тогда $a \in f^{-1}[P]$, а значит прообраз прост. Прообраз максимального идиала вообще говоря не максимален, так как вкладывая целые числа в рациональные, прообразом максимального идиала (0) будет не максимальным.

7. **Пусть $I \subseteq A$ – двусторонний идеал в кольце. Докажите, что A/I не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда I прост. Докажите, что A/I является полем тогда и только тогда, когда I максимален.**

Пусть $ab \in I$, но $a, b \notin I$, тогда $(a + I)(b + I) = ab + I = I$ мы нашли делители нуля. Обратно пусть мы нашли два делителя нуля, тогда $a + I \neq b + I$, но $ab + I = I$, тогда $ab \in I$, но $a, b \notin I$, а значит идел не простой.

Пусть мы нашли идеал $I \subseteq J \neq A$, положим $J' = \{a + I \mid a \in J\}$ нетрудно видеть, что это множество замкнуто относительно сложения и умножения на элементы кольца. Это нетривиальный идеал фактор кольца, а значит фактор кольцо не поле. Обратно пусть A/I не поле, тогда найдется нетривиальный идеал $J' = \{a + I\}$. Возьмём объединение всех классов $J = \bigcup J'$, это идеал, причем $I \subset J$, и так как J' не был равен всему фактор кольцу, то мы найдем класс который не лежит в J' и возьмём из него элемент, он не будет лежать в J. А значит I не максимально.

8. **Пусть A – целостное кольцо. Докажите, что кольца $A[x]$ и $A[[x]]$ – целостные. Опишите их поля частных.**

Если $A[x]$ или $A[[x]]$ не целостное, то $(a_n x^n + \ldots)(b_m x^m + \ldots) = (a_n b_m x^{n+m} + \ldots) = 0$, то $a_n b_m = 0$, а значит A не целостно. Построим поля частных. $A[x] = \{\frac{a_0 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + \ldots + b_m x^m}\}$. Причем для не полей не будет существовать приведенной формы. Точно также в $A[[x]]$ $\frac{a_n x^{n} + \ldots}{b_m x^{m} + \ldots} = \frac{x^n (a_n + \ldots)}{x^m (b_m + \ldots)} = \frac{x^n}{x^m} (a_n + \ldots)(b_m^{-1} + \ldots)$ приводится к каноничному виду только если b_m обратимо.

9. **Докажите, что кольцо $\Bbbk[[x]]$ нетерово и факториально. Перечислите все простые идеалы в нем.**

   Пусть есть некий идеал I, кольцо рядов упорядочено по степени наименьшего ненулевого монома, тогда в идеале I можно найти элемент минимальной степени n, так как этот порядок изоморфен порядку $\mathbb{N}$. А этот минимальный элемент лежит в тех же идеалах, что и x^n, потому как один получается из другого через умножение на единицу кольца, а значит $x^n \in I$. Но также x^n делит любой элемент из I, а значит $I = (x^n)$, в итоге все идеалы образуют линейный порядок $(1) \supset (x) \supset \ldots$, а значит что для каждого идеала существует только конечное количество идеалов больших него, а значит кольцо нётерово.

   Если $a_n x^n + \ldots$ неприводим, то n очевидно не больше 1. Причем, если $n = 0$, то элемент обратим, а значит не неприводим, а если $n = 1$, то для любого разложения в произведение один ряд будет обратим, а у другого степень минимального мнома будет равна 1, что получается из решения несложного равенства в $\mathbb{N}_0$ $a + b = 1$, а как мы видели главные идеалы подходящих элементов (x). Он максимален, а значит прост. Тогда все неприводимые элементы просты, а значит кольцо факториально.

10. **(Лемма об избегании простых идеалов) Пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ – простые идеалы в кольце A, и пусть I – идеал в A. Пусть $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Докажите, что $I \subset \mathfrak{p}_i$ для некоторого i.**

    Пойдём по индукции для эквивалентного утверждения $\forall i,\ I \nsubseteq \mathfrak{p}_i \Rightarrow I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть теперь оно верно для $n-1$. И пусть $I \nsubseteq \mathfrak{p}_i$. По предположению индукции для каждого i мы найдем a_i из I, что $a_i \notin \mathfrak{p}_j$, для всех $i \neq j$. Если к тому же $a_i \notin \mathfrak{p}_i$ для некоторого i, то победа. В противном случан $\sum_i \prod_{j \neq i} a_j \notin \bigcup_i \mathfrak{p}_i$, и в этом случае доказуемое тоже верно.

11. **Докажите, что кольцо $\Bbbk[x]/(x^{n+1})$ – артиново.**

    Заметим, что из нотации видно, что $\Bbbk[x]/(x^{n+1}) = \Bbbk[[x]]/(x^{n+1})$, потому как в идеале от кольца рядов можно выбрать в каждом классе многочлен степени меньшей n, так что они изоморфны через этих представителей. Так как в между идеалами фактора и идеалами содержащими идеал, по которому факторизуем, наблюдается соответствие, то все идеалы фактор кольца имеют вид (x^k), где $k < n$. Их конечное количество, а значит кольцо артиново.

12. **Постройте пример артинова кольца, в котором бесконечно много идеалов.**

    Пусть $A = \mathbb{R}[x, y]/(x^2, y^2, xy)$ - кольцо. Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ его нетривиальный идеал. Тогда он содержит ненулевой элемент вида $ax + by + c$. Если $c = 0$, то он равен $ax + by$ и нильпотент. Если это не так, то $(ax + by + c)(-ac^{-2}x - c^{-2}by + c^{-1}) = 1$ он обратим. Тогда чтобы идеал не был тривиальным, мы будем рассматривать $(ax + by)$ этот идеал на самом деле прямая плоскости $(ax + by)(qx + wy + c) = acx + bcx$. Причем две такие разные прямые образуют плоскоть (x, y). (x, y) максимален, так как элементы его дополнения обратимы. А значит, что есть 4 типа идеалов: нулевой, прямые плоскости (x, y), сама плоскость и всё пространство. Идеалы этого кольца $\mathbb{R}$-векторные подпространства пространства размерности 3, а значит максимальная длина цепи со сторогим включением $0 \le V_1 \le \ldots \le V$ 4, а значит кольцо артиново, но так как количество прямых бесконечно, то в кольце бесконечно много идеалов.

13. **Докажите, что в (коммутативном) артиновом кольце имеется лишь конечное число простых идеалов.**

    Пусть A - кольцо. Возьмём радикал Джекобсона этого кольца $\mathfrak{R}$ - пересечение всех максимальных идеалов. Тогда все элементы $\mathfrak{R}$ имеют следующее описание $x \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow 1 - xy$ обратим для всех y. Так как если $1 - xy$ не единица, но $x \in \mathfrak{R}$, то $1 - xy \in \mathfrak{m}$ он лежит в некотором максимально идеале, но и $x \in \mathfrak{m}$ лежит там же. тогда и $1 = (1 - xy) + xy \in \mathfrak{m}$, чего не может быть. В обратную сторону, если $x \notin \mathfrak{m}$ не лежит в некотором идеале, то $(\mathfrak{m}, x) = (1)$, а значит мы найдем $a \in \mathfrak{m}$ и $y \in A$, что $a + xy = 1$, тогда $1 - xy \in \mathfrak{m}$ не обратим.

    Пусть кольцо артиново. Пусть $a \in \mathfrak{R}$, посмотрим на убывающую цепочку идеалов $(a^0) \supseteq (a) \supseteq \ldots \supseteq (a^n) \ldots$. Так как кольцо артиново, то она с некоторого шага стабилизируется. Пусть $(a^n) = (a^{n+1})$, Тогда $a^n = a^{n+1}k$, тогда $a^n(1 - ak) = 0$, как мы видели ранее $1 - ak$ обратим, а значит $a^n = 0$ и a - нильпотент.

    В любом коммутативном кольце с единицей нильпотенты образуют идеал $\mathfrak{N}$. Так как сумма нильпотентов $a^n = 0 = b^m$ в степени суммы равна $(a + b)^{n+m} = \sum_i c_i a^i b^{n+m-i} = 0$, так как обе степени не могут быть одновременно меньше n и m, а значит каждое слагаемое занулится. Стабильность при домножении на элементы кольца очевидна. Этот идеал называется нильрадикалом и обозначается $\mathfrak{N}$. Он в точности является пересечением всех простых идеалов. Пусть a - нильпотент, тогда $a^n = 0$ лежит в любом простом идеале, а значит по простоте идеала там лежит и a. В обратную сторону, если a не нильпотент, то возьмём множество S всех идеалов, что никакая степень a в них не лежит. Это множесво не пусто, так как есть нулевой идеал, и упорядочено по включению. Для любой цепи объединение по ней является идеалом и не содержит никакой степени a. Тогда любая цепь имеет верхнюю грань, а значит есть максимальный элемент $\mathfrak{b}$. Если $x, y \notin \mathfrak{b}$, то $(x) + \mathfrak{b}$ и $(y) + \mathfrak{b}$ строго больше $\mathfrak{b}$, а значит не лежат в S. Тогда в них есть степени a, тогда степень a лежит и в $(xy) + \mathfrak{b}$ и этот идеал не лежит в S, а значит $xy \notin \mathfrak{b}$. Поэтому $\mathfrak{b}$ прост и не содержит a.

Так как любой максимальный идеал прост, то имеет место включение $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$. Для артиновых колец мы видели, что любой элемент из радикала Джекобсона – нильпотент, а значит для артиновых колец верно $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$.

Докажем ещё одно утверждение. Если идеалы взаимнопросты, то их персечение сопадает с произведением. Докажем это по индукции. Для 2х идеалов всегда верно, что $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, так как произведение вложено как в один идеал, так и в другой. С другой стороны мы имеем $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ здесь уже слогаемые вложены в произведение, а значит и их сумма, но так как идеалы взаимнопросты, то $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$, а значит у нас есть включение в 2 стороны. Тогда мы наблюдаем равенство $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Пусть теперь утверждение верно для $n - 1$ идеалов. Обозначим за $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$. И так как $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{a}_n$ взаимно просты, то есть $x_i \in \mathfrak{a}_i$ и $y_i \in \mathfrak{a}_n$, что $x_i + y_i = 1$, тогда $\prod_i x_i = \prod_i (1 - y_i) = 1 - y$, где $y \in \mathfrak{a}_n$, а произведение из произведения, тогда $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}_n$ взаимопросты, так как $\prod_i x_i + y = 1$. А значит $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{a}_n = (\prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i) \cup \mathfrak{a}_n = (\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i) \cup \mathfrak{a}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. Тогда произведение взаимнопростых идеалов равно их персечению.

Утверждение. Пусть $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ - некоторые идеалы, $\mathfrak{p}$ – простой идеал, содержащий $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, тогда $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i$ для некоторого i. Если в гипотезе равенство, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$. Предположим, что это не так и $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}_i$ для всех i. Тогда выберем элементы $x_i \in \mathfrak{a}_i$, что $x_i \notin \mathfrak{p}$. Тогда по простоте произведение x_i не лежит в $\mathfrak{p}$, а значит произведение не лежит в пересечение идеалов $\mathfrak{a}_i$, ну а это противоречие. Если наблюдается равенство $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_i$, то $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}_i$, но и так как $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i$, то и здесь будет равенство.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ – множество идеалов, образованных из конечного произведения максимальных. Так как кольцо артиново, то у любой убывающей цепи есть нижняя грань, а значит есть минимальный элемент $\mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n$. Пусть $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал, так как $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n$, то по минимальности получим, что $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n$, а $\mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}$, и если убрать промежуточные шаги, то останется $\mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}$. Но так как различные максимальные идеалы взаимнопросты, то их произведение совпадает с пересечением, то есть $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}$, но так как максимальный идеал прост, то можно применить предыдущее утверждение и получить, что $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$ для некого i, но так как они оба максимальны, мы наблюдаем равенство. $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$, тогда $\mathfrak{m}_i$ для $1 \le i \le n$ – все максимальные идеалы и их конечное количество.

Теперь как мы видели радикал Джекобсона – произведение конечного числа максимальных идеалов, они взаимнопросты, а значит фактор по ним изоморфен произведению факторов. Фактор по максимальному идеалу - поле. Тогда фактор по радикалу Джекобсона – произведение полей, а в нём идеалы – это произведения идеалов, так как для каждого идеала можно выписать все индексы для которых есть элементы в которых соответсвующие координаты ненулевые, а значит у нас идеал – произведение с нулями в индексах для которых нет ненулевых координат, и с всеми полями для тех индексов, для которых это встречается. Тогда в таком фактор кольце конечное число идеалов, а так как к тому же любой простой идеал содержит нильрадикал, который в этой задаче совпадает с радикалом Джекобсона, то все простые идеалы стоят в однозначном соответствии с неокторыми идеалами из фактор кольца коих конечное число, а тогда и простых тоже конечное число.

14. **Пусть A – нётерово кольцо. Докажите, что кольца $A[x]$ и $A[[x]]$ нетеровы.**.

Перед тем как доказать это проанализируем то, как устроены нётеровы кольца. Дальше A будет обозначать нётерово коммутативное ассоциатовное кольцо с единицей.

Заметим, что через лемму цорна мы получим, что шнётеоровость эквивалентна, тому что любой набор идаелов кольца имеет максимальный элемент.

Также нётеровость эквивалента тому, что каждый идеал кольца конечно порожден. Пусть идеал $\mathfrak{a}$ не конечно порожден. Тогда по аксиоме выбора мы найдем последовательность элементов этого идеала $(a_i)_i$, что будут строгими следующие включения $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3) \subset \dots$. А тогда кольцо не нётерово. В обратную соторону, пусть все идеалы конечно порождены, тогда возьмём цепь $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \dots$. Возьмём объединение по этой цепи, мы получим идеал, что конечно порожден. Так как его порождает конечное число элементов, то мы найдем конечно число звеньев, в которых лежат эти элементы, максимальное из звеньев содержит их все, а значит оно равняется всему объединению и цепь стабилизируется, а тогда кольцо нётерово.

Назовем идеал $\mathfrak{a}$ *неприводимым*, если для любых идеалов $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ имеет место следующее соотношение $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ или $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

Покажем, что любой идеал нётерова кольца A представляется через конечное пересечение неприводимых. Положим M множество всех идеалов A, которые не представляются через конечное пересечение неприводимых. Пусть оно не пусто. Тогда из нётеровости следует, что в нём есть максимальный элемент $\mathfrak{m}$. В частности $\mathfrak{m}$ не приводим, а это значит, если мы обернём определение приводимости, что мы найдем два идеал, что выполнено следующее $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{m} \neq \mathfrak{b}$. Тогда два найденых идеала строго больше максимального элемента, а значит не лежат в M. Тогда они представимы как конечное пересечение неприводимых, это же будет верно и для $\mathfrak{m}$, что ведёт к противоречию, а значит M пусто. Тогда все идеалы представимы как конечное пересечение неприводимых.

Теперь покажем, что собственные неприводимые идеалы в нётеровом кольце примарны. Пусть $\mathfrak{p}$ – неприводимый идеал. Возьмём фактор по нему. Нетрудно видеть, что $A/\mathfrak{p}$ тоже нётерово, а 0 в нём неприводим. Покажем, что в нём нет делителей нуля. Пусть это не так, тогда мы найдем делителей $ab = 0$, что $a \neq 0 \neq b$. Также мы построим возрастающую цепь аннуляторов $\operatorname{Ann}(a) \subseteq \operatorname{Ann}(a^2) \subseteq \ldots$. По нёторовости оно стабилизируется с некоторого шага n. Теперь посмотрем на персечение $(b) \cap (a^n) \ni z$. Элемент из пересечения имеет две записи $z = xa^n = yb$. Домножим это дело на a, $za = xa^{n+1} = yba = y0 = 0$, тогда x – аннулятор a^{n+1}, а значит и a^n тоже, так как их аннуляторы совпадают. Тогда $z = 0$ и пересечение нуль. Но нулевой идеал неприводим, а значит либо $(a^n) = (0) \Rightarrow a = 0$, либо $(b) = (0) \Rightarrow b = 0$. Тогда примарный и $\mathfrak{p}$.

Из всего вышесказанного выходит, что идеалы нётеровых колец - конечные пересечения примарных. Покажем теперь, что на самом деле каждый идеал нётерова кольца содержит некую степень своего радикала. Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал, а $r(\mathfrak{a})$ – его радикал. Так как все идеалы нётерова кольца конечно порождены, то мы найдем конечное порождение $r(\mathfrak{a}) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Тогда для каждого порождающего элемента мы найдем степень n_i в которой он лежит в $\mathfrak{a}$, то есть $a_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$. Если положить $m = \sum n_i$, то можно заметить, что $r(\mathfrak{a})^m = (\prod a_i^{k_i} \mid \sum k_i = m)$, но при этом хотя бы для одного индекса в каждом новом порождающем элементе будет верно, что $k_i \geq n_i$, а значит каждый порождающий лежит в $\mathfrak{a}$, а тогда $(r(\mathfrak{a}))^m \subseteq \mathfrak{a}$. В частности это означает, что нильрадикал в некоторой степини равен нулю, то есть $(\mathfrak{N})^n = (r((0)))^n = (0)$.

Пусть $\mathfrak{a} \trianglelefteq A[X]$, множество старших коэффициентов из $\mathfrak{a}$ очевидно образует идеал $\mathfrak{b}$ в A. Так как кольцо A нётерово, то $\mathfrak{b}$ конечно порожден элементами $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Тогда для каждого $1 \leq i \leq n$ найдем полином $p_i(x) = a_i x^{d_i} +$ (мономы меньшей степени) из $\mathfrak{a}$. Положим $\mathfrak{a}' = (p_1(x), \ldots, p_i(x))$ и $d = \max\{d_1, \ldots, d_i\}$. Возьмём $M = \{q(x) \in A[x] \mid \deg(q(x)) \leq d\}$. Тогда я утверждаю, что $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$. Очевидно, что $(\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$, потому как это верно для каждого из слогаемых. В обратную сторону положим $p(x) = ax^m + \ldots \in \mathfrak{a}$. Тогда если $m \leq d$, то $p(x) \in \mathfrak{a} \cap M$. Тогда проверим для случая, когда $m > d$. По определению получим, что $a \in \mathfrak{b}$. Тогда мы найдем многочлен из $\mathfrak{a}'$ с подходящим коэффициентом и тогда $p(x)$ будет представлено, как сумма многочлена из $\mathfrak{a}'$ и многочлена меньшей степени. Продолжая так мы за конечное число шагов получим сумму многочленов из $\mathfrak{a}'$ и одного из $\mathfrak{a} \cap M$. А значит вложение в обратную сторону также верно.