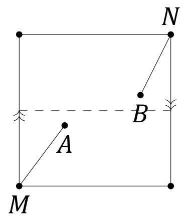
Георгий Потошин, 2024

Топология I, листочек 4

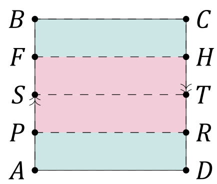
Я буду здесь и далее обозначать открытость конца интервала через квадратную скобку, смотрящую наружу. То есть интервал между 0 и 1 будет записываться как $]0, 1[$.

1. **Что получится, если разрезать ленту Мёбиуса по средней линии? А если повторить процедуру?**

   Лента Мёбиуса определятся как фактор пространство квадрата $I^2/\sim$, где $I = [0, 1]$, а отношение эквивалентности объединяет в один класс точки $(a, 0)$ и $(1, 1 - a)$. Выкинем из ленты отрезок между точками $(0, 0.5)$ и $(1, 0.5)$. Полученное пространство будет линейно связным. назавем $H_+ = [0, 1]\times]0.5, 1]$ верхнюю часть и $H_- = [0, 1]\times[0, 0.5[$. Заметим, что факторизация не связывает точки H_+ между собой, а значит H_+ гомеоморфно квадрату без одной стороны, а он линейно связен. Тоже самое можно сказать и про H_-. Тогда пусть $A \in H_-$ и $B \in H_+$. Тогда точку A можно связать прямой с точкой $M = (0, 0)$, которая по факторизации эквивалентна точке $N = (1, 1)$, а уже её можно связать с точкой B. Тогда отображение $(t \in [0, 0.5] \mapsto A + 2t\overrightarrow{AM}) \cup (t \in [0.5, 1] \mapsto N + (2t - 1)\overrightarrow{NB})$ опишет путь из A в B и будет непрерывным. А значит разрезанная лента Мёбиуса линейно связна.

   Теперь повторим процедуру, вырезав ещё отрезки $[0, 1] \times \{0.75\}$ и $[0, 1] \times \{0.25\}$. Тогда нетрудно видеть, что лента распадется на 2 несвязные части.

   Это верно из того соображения, что если склеить красные кусочки через ST и синие через FH и PR, то выйдут 2 ленты Мёбиуса, а их разрезание по месту склейки оставит их связными.

2. **Докажите, что следующие определения $\mathbb{R}P^n$ эквивалентны:**

   (i) **сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с отождествленными противоположными точками;**

   (ii) **диск D^n с отождествленными противоположными точками границы $\partial D^n = S^{n-1}$;**

   (iii) **множество всех прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию);**

   (iv) **множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию).**

   $(i) \simeq (ii)$ Диск можно непрерывно вложить в сферу следующим образом.

   $$\varphi : (x_1, ..., x_n) \mapsto (\sqrt{1 - x_1^2 - ... - x_n^2}, x_1, ..., x_n)$$

   Пусть факторизация диска и сферы из условия заданны соответственно отображениями π_D и π_S. Дополним диаграмму с φ отображением φ' естественным образом, чтобы она коммутировала.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_D"'] & S^n \arrow[d, "\pi_S"] \\ D^n/\sim \arrow[r, "\varphi'"] & S^n/\sim \end{tikzcd}$$

Это возможно в силу того, что φ переводит элементы одного класса в один и тот же класс. φ' – очевидно биекция. φ – непрерывное отображение, причем очевидно, что оно является непрерывной биекцией из компактного диска в хаусдорфову полусферу, а значит φ переводит отрытые в открытые. Отображение π_S и π_D являются непрерывными. К тому же π_S переводит открытые в открыты, так как $\pi_S^{-1}[\pi_S[U]] = U \cup -U$ – открыто, отображение π_D переводит в открытые множества, открытые и симметричные по границе $-\partial D^n \cap U = \partial D^n \cap U$ относительно центра. Тогда $\varphi'[U] = \pi_S[\varphi[\pi_D^{-1}[U]]]$ переводит открытые в открытые, точно также прообразы открытых открыты $\varphi'^{-1}[V] = \pi_D[\varphi^{-1}[\pi_S^{-1}[V]]]$, аргумент π_D здесь симметричен по границе относительно центра. Тогда φ' – гомеоморфизм и $D^n/\sim \simeq S^n/\sim$.

$(i) \sim (ii)$ Здесь прямые можно отождествить с их пересечениями на сфере, а расстояние между прямыми задать как угол между ними, что тоже самое, что длина минимальной из 2 дуг соединяющих точки пересечения. Пусть L – множество прямый, а S – сфера. Тогда будут две проекции $\pi_L : S \longrightarrow L$, ставящая точке прямую через неё проходящую, и $\pi_S : S \longrightarrow S/\sim$. Тогда можно будет дополнить диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\pi_L"'] \arrow[dr, "\pi_S"] & \\ L \arrow[rr, "\varphi"] & & S/\sim \end{tikzcd}$$

Потому как обе проекции делят шар на одинаковые классы. Прообразами шаров при π_L будут двойные шары $B \cup -B$, а они открыты. Образом же шара из S будет пучок прямы, проходящий через этот шар и центр сферы, а он открыт. Тогда π_L переводит открытые в открытые, а также непрерывно. Тогда как и в прошлом пункте если проходить между L и $S/\sim$ через S, то открытые будут оставаться открытыми.

$(iii) \simeq (iv)$ Здесь стоит заметить, что углы между плоскостями и прямыми, перпендикулярными к ним совпадают, а значит сопоставляя плоскости её ортогональное дополнение, мы построим биективную изометрию, а значит и гомеоморфизм.

3. **Докажите, что следующие пространства попарно гомеоморфны (по определению, все они называются комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$):**
(i) сфера S^{2n+1} в $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ с отождествленными точками вида $x \sim \lambda x$ для $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$;
(ii) диск $D^{2n} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ с отождествленными противоположными точками границы $\partial D^{2n} = S^{2n-1}$ вида $x \sim \lambda x$ для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$;
(iii) множество всех комплексных прямых $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию);
(iv) множество всех комплексных гиперплоскостей $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат (введите на этом множестве естественную топологию).

Я буду использовать далее следующее обозначение $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

$(i) \simeq (ii)$ Здесь доказательство такое же, как и в действительном случае, кроме того, что отображение φ задается иначе.

$$\varphi : (x_1, ..., x_n) \mapsto (\sqrt{1 - x_1\overline{x_1} - ... - x_n\overline{x_n}}, x_1, ..., x_n)$$

Также достроим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_D"'] & S^n \arrow[d, "\pi_S"] \\ D^n/\sim \arrow[r, "\varphi'"] & S^n/\sim \end{tikzcd}$$

Это возможно в силу того, что φ переводит элементы одного класса в один и тот же класс. φ' – очевидно биекция. φ – непрерывное отображение, причем очевидно, что оно является непрерывной биекцией из компактного диска в хаусдорфову полусферу, а значит φ переводит отрытые в открытые. Отображение π_S и π_D являются непрерывными. К тому же π_S переводит открытые в открыты, так как $\pi_S^{-1}[\pi_S[U]] = \mathbb{U}U$ – объединение отрытых – открыто, отображение

π_D переводит в открытые множества, симметричные по границе $\mathbb{U}(\partial D \cap U) = \partial D \cap U$ относительно центра. Тогда $\varphi'[U] = \pi_S[\varphi[\pi_D^{-1}[U]]]$ переводит открытые в открытые, точно также прообразы открытых открыты $\varphi'^{-1}[V] = \pi_D[\varphi^{-1}[\pi_S^{-1}[V]]]$, аргумент π_D здесь симметричен по границе относительно центра. Тогда φ' – гомеоморфизм и $D^n/\sim \simeq S^n/\sim$.

$(i) \sim (ii)$ Здесь прямые можно отождествить с их пересечениями на сфере, а расстояние между прямыми задать как минимальное расстояние между унитарными векторами этих прямых. Пусть L – множество прямый, а S – сфера. Тогда будут две проекции $\pi_L : S \longrightarrow L$, ставящая точке прямую через неё проходящую, и $\pi_S : S \longrightarrow S/\sim$. Тогда можно будет дополнить диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\pi_L"'] \arrow[dr, "\pi_S"] & \\ L \arrow[rr, "\varphi"] & & S/\sim \end{tikzcd}$$

Потому как обе проекции делят шар на одинаковые классы. Непрерывная проекция π_S, как мы видели ранее переводит открытые в открытые. Покажем, что проекция π_L действует также. Пусть $B_L^r = \{a \mid d(a,c) < r\}$ – шар прямых, расстояние которых до выделенной прямой c меньше r. Пусть $S = \pi_L^{-1}[B_L^r]$ и $C = \pi_L^{-1}(c)$ очевидно, что прямая однозначно определяется унитарным вектором, лежащим в ней и пусть $e \in C$ – унитарный вектор центральной прямой. Тогда для $x \in S$ будет верно следующее $\|\lambda a - \mu e\| < r$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{U}$, на самом деле внутри нормы можно сократить на унитарную λ и останется $\|a - \mu e\| < r$ для другого μ. Это соотношение будет определяющим для S и мы получим $S = \mathbb{U}B_e^r$, а значит S – открыто, а π_L – непрерывно. В обратную сторону, нетрудно видеть, что $\pi_L^{-1}[\pi_L[B_e^r]] = \mathbb{U}B_e^r = \pi_L^{-1}[B_c^r]$ и так как π_L – сюръекция, то $\pi_L[B_e^r] = B_c^r$. Тогда образ открытого под действием π_L открыт. А тогда точно также как и вдействительном случае, φ сопосталяет открытым открытые в обе стороны.

$(iii) \sim (iv)$ Здесь также строим изометрию как и в действительном случае.

4. **Докажите, что** $S^n * S^m = S^{n+m+1}$ Построим отображение, где $t \in [-1,1]$ и $n_t^2(\sum a_i^2 + b_i^2) + t^2 = 1$, то есть $n_t = \sqrt{(1-t^2)/2}$:

$$\varphi : [((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_m), t)] \mapsto (n_t a_1, ..., n_t b_1, ..., t)$$

не трудно видеть, что он склеивает точки при $t = \pm 1$. Тогда можно дополнить диаграмму:

$$\begin{tikzcd} S^n \times S^m \times I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & S^{n+m+1} \\ S^n * S^m \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, что φ' – биекция. Проверим её непрерывность в обе стороны. π и φ – непрерывны. Пусть $U \subseteq S^n * S^m$ – открыт, тогда $\pi^{-1}[U]$ тоже открыто, если в $\pi^{-1}[U]$ нет точек, с последней координатой ± 1, то так как ограничение φ на прозведения, где вместо отрезка взят интервал очевидно является непрерывной биекцией, и более того в обратную сторону она тоже непрерывна: $(a_1/n_t, ..., a_{n+m}/n_t, t)$, то $\varphi'[U] = \varphi[\pi^{-1}[U]]$ – открыто. Если всё же $\pi^{-1}[U]$ содержит точки с последней координатой ± 1, то тогда она содержит все точки с соответствующим ± 1, назовем множества точек у которых последняя координата равна $1(-1)$ $P_+(P_-)$. Так как $\pi^{-1}[U]$ – открыто в регулярном пространстве, то оно содержит слой $S^n \times S^m \times]1-\delta, 1]$ вокруг P_+ или P_-