Георгий Потошин, 2025

Комплексная геометрия, листочек 2

1 Голоморфные функции. Подмногообразия и области в $\mathbb{C}^n$.

1. **Докажите, что если X – связное и компактное комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, то X – точка.**

   Пусть $p_i = \pi_i|_M : (z_1, \dots, z_n) \to z_i$ – голоморфная, а значит непрерывная функция на M. Тогда $|p_i|$ достигает максимума m_i на компакте M в точке $t_i \in M$. Так как M компакт, то на нем есть конечный атлас $(\Omega_i, \tau_i)_i$. И пусть $t_i \in \Omega_i$. Тогда мы имеем $\tau : \Omega_i \to U_i$. $p_i \circ \tau_i^{-1}$ имеет максимум на области $U_i \in \mathbb{C}^d$ (мы всегда можем сделать атлас из областей). А тогда $p_i \circ \tau_i^{-1} = \text{const}$, то есть $p_i = \text{const}$ на Ω_i. Тогда по связности мы получим, что и в каждой соседней карте p_i достигает максимума, а значит там он тоже постянен. Продолжая по индукции и по связности, p_i оказывается постоянным на всем многообразии, и так как это верно для всех i, то многообразие – точка.

2. **Докажите теорему Римана о продолжении: пусть $P = \{z \in \mathbb{C}^n | |z_j| < \varepsilon, j \in [\![1;n]\!]\}$ – полидиск, а f – функция, голоморфная и ограниченая в $P \setminus \{z_1 = 0\}$. Докажите, что f продолжается до голоморфной функции в P.**

   Пусть $(z_1, z') = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Посмотрим на подпространство $(\mathbb{C}, z')$. В нем функция f ограничена и голоморфна в выколотом диске, а значит, как известно из комплексного анализа, мы можем продолжить функцию до голоморфной и её значение в выколотой точке может быть записано как

   $$\overline{f}(0, z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = \varepsilon/2} \frac{f(\zeta, z')}{\zeta} d\zeta$$

   По построению это продолжение голоморфно по первой координате, и так как функция и её производная ограничены на компакте, и выражение под интегралом голоморфно, то мы можем переставить частные производные и получить голоморфность по остальным координатам, а значит наша функция голоморфна по теорема Хартогса.

3. **Докажите,чтоединичный шар $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\}$ и единичный полидиск $P = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$ не биголоморфны.**

   Идея доказательства основывется на двух теоремах, доказанных Картаном, которые я нашел в книге *Walter Rudin, Function Theory on the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$ на страницах 23-24.

   Теорема 1: *Пусть*

   (a) Ω *– ограниченая область в* $\mathbb{C}^n$
   (b) $F : \Omega \to \Omega$ *– голоморфна*
   (c) для некоторого $p \in \Omega$, $F(p) = p$ *и* $F'(p) = I$

   Тогда $F(z) = z$ *для всех* $z \in \Omega$.

   Доказательство: Без потери общности, можно считать, что $p = 0$. И мы можем найти шары $r_1 B \subseteq \Omega \subseteq r_2 B$. Тогда в шаре $r_1 B$ мы имеем разложение F в ряд, где вычисление n-формы на приращении мы будем записывать через F_n. Тогда ряд будет следующим

   $$F(z) = z + \sum_{s > 1} F_s(z)$$

   Пусть F^k обозначает k-ую композици. Тогда мы будем доказываеть дальше по индукции для $m \geq 2$ следующий факт, что для $2 \leq s < m$ $F_s = 0$.

   Для $m = 2$ утверждение тривиально.

   Пусть утверждение верно для некого m. Тогда посмотрим на ряд F^k. Из композиции рядов очевидно, что в этом ряде слагаемые степени $2 \leq s < m$ нулевые. Осталось посчитать слагаемое степени m. Его легко получить опять из индукции, так как для степени 2, например мы получим

   $$F(F(z)) = F(z) + F_m(F(z)) + \dots = (z + F_m(z)) + F_m(z) + \dots = z + 2F_m(z)$$

а общем случае разложение будет начинаться следующим образом

$$F^k(z) = z + kF_m(z) + \dots$$

Тогда мы можем посчитать следующий интегра в шаре

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^k(e^{i\theta}z)e^{-im\theta}d\theta = kF_m(z)$$

Он будет иметь именное такое значение, так как только мономы степени m дадут ненулевое значение. Так как F^k по условию ограничена, то используя неравенство на интеграл, мы получим $k|F_m(z)| < r_2$ для всех натуральных k, а значит $F_m = 0$ в шаре r_1B. А значит мы доказали гипотезу для $m + 1$.

В итоге мы получаем, что $F(z) = z$ на шаре r_1B, а значит и на всем Ω, так как оно связано.

Дальше мы будем называть *круговыми* те подмножества $\mathbb{C}^n$, что замкнуты относительно умножения на $e^{i\theta}$.

Теорема 2: *Пусть*

(a) Ω_1 *и* Ω_2 *– круговые область в* $\mathbb{C}^n$, *содержащие* 0

(b) $F : \Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2$ *такой биголоморфизм, что* $F(0) = 0$

(c) Ω_1 *– ограничен*

Тогда F *– линеен.*

Доказательство: Пусть $G = F^{-1}$ и пусть $A = F'(0)$. Так как $G(F(z)) = z$, то $G'(0)A = I$, а значит $G'(0) = A^{-1}$. Для фиксированного θ положим $H(z) = G(e^{-i\theta}F(e^{i\theta}))$. Так как области круговые, то $H : \Omega_1 \to \Omega_1$ корректно определен и голоморфен, $H(0) = 0$ и $H'(0) = I$. Применяя предыдущую теорему мы получаем $H(z) = Z$, а значит мы имеем

$$F(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}F(z)$$

Тогда перменив интегрирование из предыдущей теоремы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}z)e^{-im\theta}d\theta = F_m(z)$$

мы получим $F_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)e^{-i(m-1)\theta}d\theta$, то есть единственным ненулевым слагаемым будет линейное, и по связности мы получим линейность F.

Теперь давайте перейдем к решению задачи. Предположим, что у нас есть биголоморфизм $f : B \to P$, Тогда $f(0) = (a_1, \dots, a_n)$. Мы можем найти автоморфизм полидиска, который известен с курса геометрии

$$g(z) = \left(\frac{z_i - a_i}{1 - \overline{a}_i z_i}\right)_i$$

Тогда $g \circ f : B \to P$ – биголоморфизм между ограниченными круговымы областями и он сохраняет 0, а значит он по 2 теореме линеен, но такого не может быть, так как очевидно, что нельзя сферу линейено преобразовать в границу полидиска.

4. **Пусть** $f_d(z) := z_1^d + \dots + z^d)n$, $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$.

   (a) Докажите, что множество $V_{d,c} := \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_d(z) = c\}$ **гладко при** $c \neq 0$.

   (b) Докажите что $V_{2,1}$ **диффеоморфно** TS^{n-1} **– касательному расслоению сферы** $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

   (a) Мы имеем следующий набор эквивалентных утверждений

$$\begin{aligned} f_d'(z) &= 0 \\ \forall i, \partial_i f_d(z) &= 0 \\ \forall i, dz_i^{d-1} &= 0 \\ \forall i, z_i &= 0 \end{aligned}$$

   а значит $V_{d,c}$ гладко при $c \neq 0$

(b) Пусть у нас будут следующие координат $(x_j + iy_j)$ на C^n. Тогда $V_{2,1}$ задаётся уравнением

$$\sum (x_j + iy_j)^2 = 1$$
$$\begin{cases} \sum x_i^2 - \sum y_i^2 = 1 \\ \sum 2x_i y_i = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1 \\ \langle x, y\rangle = 0 \end{cases}$$

Расслоение имеет гладкую структуру наследованныю из вложения

$$TS^{n-1} = \coprod_{p \in S^{n-1}} \{p\} \times T_p S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Тогда диффеоморфизм можно задать следующими отображенияеми

$$p(x,y) = \frac{x}{\|x\|}$$
$$v(x,y) = y$$

обратное ему будет задаваться

$$x(p,v) = p\sqrt{\|v\|^2 + 1}$$
$$y(x,y) = v$$

Легко видеть, что отображения корректно заданы, взаимообратны и C^∞.

5. **Докажите локальную $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}$-лемму. Пусть в полидиске задана форма α типа (p,q), где $p, q \geq 1$. Если $d\alpha = 0$, то найдется (возможно в меньшем полидиске) форма β типа $(p-1, q-1)$, такая, что $\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\beta$.**

   Здесь мы будем использовать лемму Дольбо-Гротендика. Мы будем считать её известной, её доказательство можно найти на странице 28 *Jean-Pierre Demaily, Complex Analytic and Differential Geometry*.

   Лемма Дольбо-Гротендика: *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ - окрестность нуля в $\mathbb{C}^n$ и $v \in \Gamma(\Lambda^{p,q} T_\Omega)$, такое что $\overline{\partial} v = 0$. Тогда если $q \geq 1$, то есть окрестность $\omega \in \Omega$ нуля и форма $u \in \Gamma(\Lambda^{p,q-1} T_\Omega)$, такое, что $\overline{\partial} u = v$ на ω.*

   Следствие: *Так как у нас есть сопряжение и мы имеем $\overline{\partial a} = \overline{\partial}\overline{a}$, то мы имеем также аналогичную ∂-Пуанкаре Лемму.*

   Так как $d\alpha = \partial\alpha + \overline{\partial}\alpha = 0$ и α имеет тип (p,q), то $\partial\alpha \in \Gamma(\Lambda^{p+1,q} T_P)$ и $\overline{\partial}\alpha \in \Gamma(\Lambda^{p,q+1} T_P)$. А значит $\partial\alpha = \overline{\partial}\alpha = 0$.

   Теперь мы воспользуемся леммой Дольбо-Гротендика, и найдём $\gamma \in \Gamma(\Lambda^{p,q-1} T_P)$, что $\alpha = \overline{\partial}\gamma$.

2 Почти комплексные структуры

1. **Прямым вычислением покажите, что $N(X,Y)$ действительно является тензором.**

   Нам нужно проверить, что для любой гладкой функции f на M мы имеем $N(fX,Y) = fN(X,Y)$, $N(X,Y) = N(X,fY)$, так как пропускание сумм очевидно. Так как тензор даволько симметричный, то линейность по каждой компоненте доказывается схожим способом, а поэтому мы проверим её только для первой координаты.

$$\begin{aligned}
N(fX,Y) &= [fX,Y] + J([J(fX),Y] + [fX,JY]) - [J(fX),JY] \\
&= [fX,Y] + J([fJX),Y] + [fX,JY]) - [fJX,JY] \\
&= \{f[X,Y] - (Y(f))X\} + J(\{f[JX,Y] - (Y(f))(JX)\} + \{f[X,JY] - ((JY)(f))X\}) \\
&- \{f[JX,JY] - ((JY)(f))(JX)\} \\
&= f[X,Y] + fJ([J(fX),Y] + [fX,JY]) + f[JX,JY] \\
&- (Y(f))X + (Y(f))X + (Y(f))X - (Y(f))X \\
&= f([fX,Y] + J([J(fX),Y] + [fX,JY]) - [J(fX),JY]) \\
&= fN(X,Y)
\end{aligned}$$

2. **Пусть Z_1, Z_2 – векторные поля типа $(1,0)$, а $\pi^{0,1}$ – проекция на векторные поля типа $(0,1)$. Покажите, что для любой функции $f \in C^\infty(M)$ верно следующее:**

$$\pi^{0,1}([fZ_1, Z_2]) = f\pi^{0,1}([Z_1, Z_2])$$
$$\pi^{0,1}([Z_1, fZ_2]) = f\pi^{0,1}([Z_1, Z_2])$$

Мы опять докажем только первое равенство, так как второе доказывается схожим способом, так как скобка антикоммутирует.

$$\pi^{0,1}([fZ_1, Z_2]) = \pi^{0,1}(f[Z_1, Z_2] - (Z_2f)Z_1) = f\pi^{0,1}([Z_1, Z_2]) - (Z_2f)\pi^{0,1}(Z_1) = f\pi^{0,1}([Z_1, Z_2])$$

Так как $Z_2 \in T^{1,0}M$.

3. **Пусть $Z_X = X - iJX$, а $Z_Y = Y - iJY$ – векторные поля типа $(1,0)$. Покажите, что**

$$2\pi^{0,1}([Z_X, Z_Y]) = N(X,Y) + iJN(X,Y)$$

Заметим, что $\pi^{0,1}(X) = \frac{1}{2}(X + iJX)$. Тогда

$$\begin{aligned}
2\pi^{0,1}([Z_X, Z_Y]) &= [Z_X, Z_Y] + iJ[Z_X, Z_Y] \\
&= [X - iJX, Y - iJY] + iJ[X - iJX, Y - iJY] \\
&= [X,Y] - i[JX,Y] - i[X,JY] - [JX,JY] + iJ[X,Y] + J[JX,J] + J[X,JY] - iJ[JX,JY] \\
&= ([X,Y] + J[JX,J] + J[X,JY] - [JX,JY]) + iJ([X,Y] + J([JX,Y] + [X,JY]) - [JX,JY]) \\
&= N(X,Y) + iJN(X,Y)
\end{aligned}$$

4. **Пусть α является $(1,0)$-формой на почти комплексном многообразии (M,J). Докажите, что для $(d\alpha)^{2,0}$ и любых векторных полей Z_1, Z_2 типа $(0,1)$ верна следующая формула:**

$$(d\alpha)^{2,0}(Z_1, Z_2) = -\alpha(N(Z_1, Z_2))$$

3 Комплексные многообразия

1. **Докажите, что вложение Веронезе и вложение Сегре действительно являются вложениями.**

Вложение Веронезе. $v_d : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^N$, ассоциирует точке $[x_0 : \ldots : x_n]$ точку с координатами – всеми мономами степини d над $x_0, \ldots, x_n$. Очевидно, оно коorректно определено, так как домножение координат на λ переводиться в домножение координат на λ^d. Отображение голоморфно, так как координаты – полиномы. Проверим инъективность. Пусть $v_d([x_0 : \ldots : x_n]) = v_d([y_0 : \ldots : y_n])$. Без потери общности можно считать, что $x_0 = y_0 = 1$, так как хотя бы по одной координате в образе типа x_i^d у нас будет не нуль. Тогда мы имеем λ – коэффициент перехода, и он обязан быть равен 1, так как $x_0 = \lambda y_0$. Тогда их $x_0^{d-1}x_i = y_0^{d-1}y_i$, следует, что $y_i = x_i$, а значит мы имеем вложение. Так как вложение голоморфно, то оно является биголоморфизм на свой образ.

Вложение Сегре. $\sigma : \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1} = ([x_i]_i, [y_j]_j) \mapsto [x_iy_j]_{i,j}$. Оно очевидно голоморфно. Проверим инъективность, пусть $\sigma([x_i], [y_i]) = \sigma([x_i'], [y_i'])$. Опять же без потери общности по тому же аргументу мы можем предположить, что $x_0 = y_0 = 1 = x_0' = y_0'$. Тогда опять для $x_0y_0 = \lambda x_0'y_0'$, мы получаем $\lambda = 1$, а тогда $x_0y_i = x_0'y_i'$ влечет $y_i = y_i'$. Аналогичны получаем $x_i = x_i'$. Так как отображение голоморфно и инъективно, то мы получаем биголоморфизм на образ.

2. **Докажите, что вложение Плюккера также является вложением.**

Пусть $\psi : \mathrm{Gr}(k,n) \to P(\bigwedge^k \mathbb{C}^n) : \bigoplus_{i=1}^k v_i\mathbb{C} \to \bigwedge_{i=1}^k v_k$. Для выбранного базиса $\mathbb{C}^n$ мы можем записать координты плоскости через матрицу размером $k \times n$, чьи строки – координаты базиса плоскости, координаты $P(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ также являются матрицами координат, участвующих во внешнем произведении, так что отображение голоморфно, и так как внешняя степень k над пространство размерности k одномерна, то отображение определено корректно. Теперь пусть $\psi(W) = \psi(W')$, то есть $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \lambda w_i \wedge \ldots \wedge w_n \neq 0$. Но если мы домножим это равенство на v_i слева, то мы получим 0, а значит $W \subseteq W'$ и так как у нас есть равенство размерностей, то $W = W'$. Опять же это отображение является биголоморфизмом на свой образ.

4 Пучки

1. **Пусть F – пучок на многообразии M, $C^p(\underline{U},F)$ – p-коцепи. Проверьте, что кограницы являются коциклами, т.е. что оператор**

$$\delta : C^p(U,F) \to C^{p+1}(\underline{U},F)$$

удовлетворяет тождеству $\delta^2 = 0$.

Пусть $c \in C^p(\underline{U},F)$. Давайте проверим, что $\delta^2 c = 0$.

$$\begin{aligned}
(\delta^2 c)_{i_0 \dots i_{p+2}} &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j (\delta c)_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+2}} |_{U_{i_0 \dots i_{p+2}}} \\
&= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k c_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j .. i_{p+2}} + \sum_{k=j+1}^{p+2} (-1)^{k-1} c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k .. i_{p+2}} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{p+2} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j+k} c_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j .. i_{p+2}} + \sum_{j=0}^{p+2} \sum_{k=j+1}^{p+2} (-1)^{j+k-1} c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k .. i_{p+2}} = 0
\end{aligned}$$