*Георгий Потошин, 2024*

# *Топология I, листочек 3*

1. **Докажите, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.**

   **Утверждение 1. Элементы базы топологии на $X$ после индуцирования на $Y \subseteq X$ образуют базу топологии на $Y$.**

   По определению элемент базы останется открытым после индуцирования. Покажем теперь, что все индуцированные элементы базы составят базу. Пусть $U \subseteq Y$ – открытое множество. Тогда существует такое открытое $V \subseteq X$, что $V \cap Y = U$. Раз $V$ открыто, то существуют элементы базы $B_i \in \tau_X, i \in I$, что $\bigcup_{i\in I} B_i = V$. Тогда $U = V \cap Y = Y \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} Y \cap B_i$ открытое множество представимо как объединение индуцированных элементов базы на топологии $X$, а значит, что множество всех таких индуцированных элементов составят базу топологии на $Y$.

   **Утверждение 2. Если в топологии пространства $X/\sim$ образ элемента базы топологии на $X$ при канонической проекции открыт, то объединение этих образов составит базу топологии на фактор пространства.**

   Пусть $U \in X/\sim$ открыто, тогда $\pi_\sim^{-1}[U]$ открыто и представимо как $\bigcup_{i\in I} B_i$ где $B_i$ – элемент базы топологии на $X$. Тогда $U = \pi_\sim[\bigcup_{i\in I} B_i] = \bigcup_{i\in I} \pi_\sim[B_i]$. А значит образ элементов базы топологии на $X$ составит базу топологии на фактор пространстве.

   **Утверждение 3. Если биекция $X \longrightarrow Y$ переводит элементы базы в открытые множества и прообразами элементов базы тоже являются открытые множества, то биекция является гомеоморфизмом.**

   Пусть $U \subseteq X$ открыто, тогда существуют такие элементы базы $B_i \subseteq X, i \in I$, что $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Тогда $f^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$ – объединение открытых, а значит само открыто и $f$ непрерывно. В обратную сторону доказывается также.

   Базой пространства $S^1$ являются всевозможные пересечения окружности и открытых кругов, то есть открытые дуги. Найдем теперь базу пространства $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть $(a, b)$ – элемент базы топологии на $\mathbb{R}$. Прообраз образа этого интервала равен $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(a + n, b + n)$ и открыт, а значит образы интервалов составят базу топологии на фактор пространстве. Если классы эквивалентности отождествить с точками на $[0, 1)$, то образом интервала $(a, b)$ будет $(\{a\}, \{b\})$, если изначальный интервал не содержал целых точек, $[0, \{b\}) \cup (\{a\}, 1)$, если изначальный интервал содержал 1 целую точку и $[0, 1)$, если изначальный интервал содержал 2 и более целые точки. Пусть $f : [x] \mapsto e^{i2\pi\{x\}}$ биекция из $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в $S^1$. Тогда очевидно, что она однозначно сопоставляет элементам базы топологии на фактор пространстве открытые дуги, а значит пространства гомеоморфны.

2. **Докажите, что $\mathbb{D}^n/S^{n-1} \simeq S^n$.**

   Пусть $I = (-1, 1)$ интервал. Тогда положим $B^n = I^n$, $\mathbb{D}^n = \overline{B^n}$ и $S^n = \partial\mathbb{D}^{n+1}$. $\mathbb{D}^n/S^{n-1}$ – это диск в котором все точки его границы положили в один класс. Построим сюръекцию из диска в шар, что уважает это отождествление: Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ и пусть $|x| = max_i|x_i|$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} (-1, 4x_1, ..., 4x_n) & , 0 \leqslant |x| < 1/4 \\ (4|x| - 2, x_0/|x|, ..., x_n/|x|) & , 1/4 \leqslant |x| \leqslant 3/4 \\ (1, 4(1 - |x|)\frac{4}{3}x_0, 4(1 - |x|)\frac{4}{3}x_n) & , 3/4 < |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

   Сюръекция f непрерывно, так как непрерывна каждая композиция $pr_i \circ f$. Теперь если объединить все точки $\partial\mathbb{D}^n$ в один класс, то $f/\partial\mathbb{D}^n : \mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n \longrightarrow S^n$ станет биекцией. Причем прообраз открытого не содержащего $f/\partial\mathbb{D}^n(\partial\mathbb{D}^n)$ будет открытым, потому как факторизация ничего не поменяла, а прообраз открытого, содержащего эту точку, был открыт до факторизации и содержал границу, а значит останется открытым и после факторизации. Заметим также, что $f/\partial\mathbb{D}^n$ – это биекция из компактного пространства в хаусдорфово, а значит является гомеоморфизмом.

3. **Верно ли, что фактор хаусдорфова пространства является хаусдорфовым? Регулярного – регулярным? Нормального – нормальным?**

Возьмём отрезок $[0,1]$ с канонической топологией. Он компактен и хаусдорфов, а значит нормален и регулярен. Профакторизуем его так, что его внутренность попадёт в один класс эквивалентности, 0 в другой, а 1 в третий обозначим их за $i, 0, 1$ соответственно. Тогда из всех подмножеств только $\emptyset, \{i\}, \{0,i\}, \{1,i\}, \{0,1,i\}$ будут открытыми. Заметим, что $\{0\}$ и $\{1\}$ будут замкнутыми в такой топологии, но при этом у этих синглтонов нет непересекающихся окрестностей, а значит, что полученное фактор пространства ни хаусдорфово, ни регулярно, ни нормально. Тогда ответ на все вопросы – нет.

4. **Приведите пример хаусдорфова нерегулярного топологического пространства.**

   Положим $K = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$. Это множество не открыто в стандартной топологии прямой $\mathbb{R}$, так как любая окрестность 1 не лежит в $K$. С другой стороны оно не замкнуто, так как не содержит предельную точку 0. Возьмём множество $S$ всех интервалов вместе со всеми интервалами без $K$. Оно покрывает прямую и пересечение двух элементов либо интервал, либо интервал без $K$, а значит $S$ – база некой топологии, в которой открытые множества - это канонические открытые множества без некого подмножества в $K$. Это означает, что любая окрестность 0 содержит отрезок без некого количества элементов из $K$. Тогда между границами этого отрезка лежит некое число вида $1/p$ и любая окрестность $K$ будет содержать шар радиусом меньшим $1/p - 1/(p-1)$ вокруг $1/p$ и $1/p$ содержащий. Тогда этот шар пересекается с $K$ только по своему центру, а значит это шар в привычном нам смысле. Тогда он пересекается с изначальной окрестностью 0. В итоге у $K$ и 0 нет непересекающихся окрестностей и $K$ очевидно замкнуто, а занчит прямая с этой топологией не регулярна, но хаусдорфова, так как тоньше стандартной хаусдорфовой топологии.

5. **Приведите пример регулярного ненормального топологического пространства.**

   **Топология стрелки.** Возьмём прямую $\mathbb{R}$ и снабдим её топологией, базой которой являются полуинтервалы вида $[a,b)$. Это семейство и вправду является базой, так как если пересечение 2 её элементов непусто, то оно тоже будет правым полуинтервалом, а также семейство покрывает всё пространство. Назовем получившуюся топологию $\tau_l$, а пространства $\mathbb{R}_l := (\mathbb{R}, \tau_l)$. Нетрудно видеть, что если $U$ открыто в евклидовом смысле, то вместе с каждой своей точкой $x$ $U$ будет содержать некий шар $(x-d, x+d)$, а значит содержит и полуинтервал $[x, x+d)$, тогда $U$ открыто в топологии стрелки. Это означает что топология стрелки тоньше евклидовой топологии. Тогда $\mathbb{R}_l$ хаусдорфово. Пусть теперь $A, B \subseteq \mathbb{R}_l$ замкнуты и дизъюнктивны. Заметим, что $A \subseteq \mathbb{R} \backslash B$ и $B \subseteq \mathbb{R} \backslash A$ открытые окрестности соответствующий множеств. Тогда вместе с каждым $a \in A$ есть полуинтервал $U_a := [a, a+d_a), d_a > 0$ лежащий в $\mathbb{R} \backslash B$, и вместе с каждым $b \in B$ есть полуинтервал $V_b := [b, b+d_b), d_b > 0$ лежащий в $\mathbb{R} \backslash A$. Положим $V = \bigcup_B V_b$ и $U = \bigcup_A V_a$, они являются открытыми окрестностями $B$ и $A$ соответственно. Покажем теперь, что их пересечение пусто. Если $V_b \cap U_a \neq \emptyset$, то тогда их пересечение содержит $\max(a,b)$, пусть без потери общности $a \in V_b \cap U_a \subseteq V_b \subset \mathbb{R} \backslash A$, что есть противоречие. Тогда мы нашли непересекающиеся окрестности 2 произвольных замкнутых множеств, а значит пространство $\mathbb{R}_l$ хаусдорфово, регулярно и нормально.

   **Утверждение 4. Подпространство регулярного пространство регулярно.**

   Пусть $X$ – регулярно и $A \subseteq X$. Пусть $a \in A$ точка и $F \subset A$ замкнутое, что не содержит $a$. Тогда существует замкнутое $C \subset X$, что $F = C \cap A$. не содержит точки $a$, а значит по регулярности $X$ существуют открытые $C \subseteq U$, $a \in V$, что пересекаются по пустому множеству. Тогда $F \subset U \cap A$ и $a \in V \cap A$ – открытые в $A$ окрестности точки и замкнутого её не содержащего, что не пересекаются, а значит пространство $A$ регулярно.

   **Утверждение 5. Пространство $X$ регулярно тогда и только тогда, когда для любого открытого $O$ и точки $x$ из $O$ существует открытое $U$, что верно соотношение $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.**

   $\Rightarrow$: Пусть $U$ – открытое множество и $x \in U$ – точка в нём. Тогда $x \notin U^c$ и $U^c$ – замкнуто. Тогда по регулярности мы найдем пару открытых $O_1$ и $O_2$, что $x \in O_1$ и $U^c \subseteq O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Тогда будет иметь место следующее соотношение: $x \in O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq O_2^c \subseteq U$.

   $\Leftarrow$: Для точки $x$ и замкнутого $F$ её не содержащего найдём открытое $V$, что $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$. Тогда $x \in V$ и $F \subseteq \overline{V}^c$ и $V \cap \overline{V}^c = \emptyset$, а значит пространство регулярно.

   **Утверждение 6. Пространство $\prod_i X_i = X$ регулярно тогда и только тогда, когда всякое $X_i$ регулярно.**

   $\Rightarrow$ Если $\prod_i X_i$ регулярно, то регулярно $\prod_i Y_i$, где для $i = i_0$, $Y_{i_0} = X_{i_0}$, а во всех остальных случаях $Y_i = \{x_i\} \subseteq X_i$ это произведение гомеоморфно $X_{i_0}$ и регулярно в силу утверждения 4. Тогда $X_{i_0}$ тоже регулярно.

   $\Leftarrow$ Пусть теперь всякое $X_i$ регулярно. Пусть $x = (x_i) \in \prod_i X_i = X$. Пусть $x \in U \in \tau$ – открытое множество. Тогда есть набор открытых $\{W_i\}$, что $x \in W = \prod_i W_i \subseteq U$. Это в частности означает, что $x_i \in W_i$ координата лежит в открытом сомножителе. Тогда по регулярности пространства $X_i$ найдется открытое $V_i$, что $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$. Тогда $x \in V = \prod_i V_i \subseteq \overline{\prod_i V_i} = \overline{\bigcap_i \mathrm{pr}_i^{-1}[V_i]} = \bigcap_i \overline{\mathrm{pr}_i^{-1}[V_i]} \subseteq \bigcap_i \mathrm{pr}_i^{-1}[\overline{V_i}] = \prod_i \overline{V_i} \subseteq W \subseteq U$. Тогда $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ и по утвердению 5 произведение пространств будет регулярным.

Положим теперь $\mathbb{S} := \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$. Это пространство является произведением регулярных пространств, а значит само регулярно. Также топология этой плоскости тоньше топологии евклидовой плоскости. Тогда прямая $D = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ замкнута. Базой $\mathbb{S}$ очевидно являются квадраты $[a, a+d) \times [b, b+d)$. Я буду дальше под $\mathbb{P}$ подразумевать $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда множества $Q = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [q, q+1) \times [-q, -q+1)$ и $P = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} [p, p+1) \times [-p, -p+1)$ будут открытыми, а $D \setminus Q$ и $D \setminus P$ замкнутыми.

**Утверждение 7. На вещественно прямой с евклидовой топологией $(\mathbb{R}, \tau)$ дополнение открытого и всюду полотного множества $U$ счётно.**

Пусть $U$ открыто и всюду плотно. Тогда оно представимо как $U = \coprod_{i=0}^{\infty} I_i$ дизъюнктивное объединение интервалов. Их количество счетно, так как в каждом можно выбрать по рациональной точке и тем самым задать вложение в множество действительных чисел. Определим для целого $z$ $P_z = [z, z+1]$, и для натурального $n$ $A_{n,z} = \{I_k \cap P_z \mid k \geqslant 1 \wedge \mathrm{diam}(I_k \cap P_z) > 1/n\}$ - множество интервалов отрезка и $B_{n,z} = \{S \subseteq P_z \mid \forall I \in A_{n,z} I \cap S = \emptyset \wedge S$ – отрезок $\wedge$ $(S \subseteq S'$ вложено в отрезок $\wedge$ $\forall J \in A_{n,z} S' \cap J = \emptyset \Rightarrow S = S')\}$ – множество отрезков, что лежат между интервалами. Очевидно что как $A_{n,z}$, так и $B_{n,z}$ оба конечные. Заметим, что по построению $A_{n,z} \subseteq A_{n+1,z}$ и $\bigcup A_{n,z} \to U \cap P_z$, когда $n \to +\infty$. Это означает, что $\bigcup B_{n+1,z} \subseteq \bigcup B_{n,z}$ и $\bigcup B_{n,z} \to U^c \cap P_z$. Тогда для любой точки $x \in U^c \cap P_z$ найдется последовательность $(B_i)$, где $B_i \in B_{i,z}$ и $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots \to \{x\}$. Она обязана сходится к точке, так как в противном случае она сходилась бы к отрезку, что лежал бы в $U^c$ и тогда в нем можно было бы найти открытое, что не пересекается с $U$, чего быть не может в силу плотности $U$. Множество всех таких сходящихся последовательностей состоит в биективном соответствии с множеством точек $P_z \cap U^c$, а также вложено в счетное множество $\prod_{n=1}^{+\infty} B_n$. Тогда $U^c = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} P_z \cap U^c$ счетно, так как является счетным объединением счетных множеств.

Вернемся ко множествам $H_p = D \setminus Q$ и $H_q = D \setminus P$. Тогда пусть $U$ и $V$ их соответственные окрестности. Тогда $U$ вместе с каждой точкой $(p, -p)$ содержит также некое множество $W_p = [p, p+d_p) \times [-p, -p+d_p)$. Назовём $P_n = \{p \mid d_p > 1/n\}$. Очевидно, что $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n$. При этом $\mathbb{P} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{P_n}$ строго вложено, так как в противном случае было бы равенство $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{P_n}^c$, а значит $\overline{P_n}^c$ всюду плотно и открыто, тогда его дополнение счетно. Это бы значило, что счетным было бы и $\mathbb{P}$, что не верно. Тогда найдется $P_i$ и $z \in \mathbb{Q}$, что $z \in \overline{P_i}$. $z$ лежит в $V$ с некоторой окрестностью $[z, z+d) \times [-z, z+d)$, а любая точка $p \in P_i$ лежит в $U$ с окрестностью $[p, p+1/i) \times [-p, -p+1/i)$. Так как $z$ предельная точка $P_i$, то из $P_i$ можно выбрать такое $p'$, что $|p' - z| < \min(d, 1/i)$ тогда окрестности этих точек пересекутся и $U \cap V \neq \emptyset$. А значит пространство $\mathbb{S}$ не нормально.

6. **Приведите пример связного, но не линейно связного топологического пространства.** Обозначим за $L_n$ отрезок между $(0,0)$ и $(1, 1/n)$ в $\mathbb{R}^n$. Он связен и открыт.

**Утверждение 8. Если $C_\alpha \subseteq X$ – связные пространства для всяких индексов и $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, то $\bigcup_\alpha C_\alpha$ связно.**

Пусть $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, но при этом $\bigcup_\alpha C_\alpha = U \sqcup V$, где $U$ и $V$ дизъюнктивные открыты непустые множества. Если бы ни одно из $C_\alpha$ не одержало одновременно элементы этих двух открытых множеств, то тоже было бы справедливым относительно их непустого пересечения и тогда все $C_\alpha$ были бы подмножествами одного из открытых, а значит второе открытое множество оказалось бы пустым, что противоречит с нашим предположением. Пусть $C_{\alpha_0}$ содержит элементы из обоих множеств. Тогда $C_{\alpha_0} = (U \cap C_{\alpha_0}) \sqcup (U \cap C_{\alpha_0})$ – несвязно, а значит мы вновь пришли к противоречию. Тогда $\bigcap_\alpha C_\alpha$ обязано быть связным.

В нашем случае множества $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} L_n$ и $\overline{B} = B \cup ([0,1] \times \{0\})$ в силу этого утверждения связны, так как их связные части-отрезки пересекаются по $(0,0)$.

**Утверждение 9. Если множества $C$ и $\overline{C}$ связны, то и всякое лежащее между ними тоже связно.**

Пусть $C$ и $\overline{C}$ связны и $C \subset X \subset \overline{C}$. Если бы $X = U \sqcup V$ было несвязно, то если бы обе части имели элементы из $C$, то $C = (U \cap C) \sqcup (V \cap C)$ было бы несвязно, что ведёт к противоречию. Иначе одно из открытых, пусть без потери общности им будет $V$, полностью бы находилось в $\overline{C} \setminus C$. Тогда $\overline{C} \setminus V$ было бы замкнутым в объемлющем пространстве и содержало бы $C$, а значит замыкания не было бы минимальным по включению замкнутым надмножеством $C$, что опять ведет к противоречию. В итоге $X$ обязано быть связным.

Тогда $B \subset B \cap (1,0) \subset \overline{B}$ и $R = B \cap (1,0)$ – связно. Покажем, что $R$ не связно линейно. Пусть $p : [0,1] \longrightarrow R$ – непрерывно и $p(0) = (1,0)$; $p(1) = (0,0)$. Множество $A = \{t \in [0,1] : p(t) = (1,0)\}$ замкнуто. Для любого $t_0 \in A$ найдется $\delta > 0$, что $|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|p(t) - p(t_0)\| < 1/2$. Заметим, что $p(t) \neq (0,0)$, так как $\|(0,0) - (1,0)\| = 1$. Тогда у $t$ положительна первая координата. Введем непрерывную функцию $m : (x,y) \mapsto y/x$. Обозначим $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1]$ Тогда $m \circ p[I] \subseteq \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. $m \circ p[I]$ связно и содержит 0, а значит $m \circ p[I] = \{0\}$. Тогда $t_0 \in I \subseteq A$, а значит $A$ открыто. В итоге $A$ – открытое и замкнутое подмножество $[0,1]$, а значит $A = [0,1]$. Это значит, что мы не сможем найти путь из $(0,1)$ в $(0,0)$, а значит $R$ – не связно линейно.

7. **Определите естественную топологию на пространства невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Является ли оно связным?**

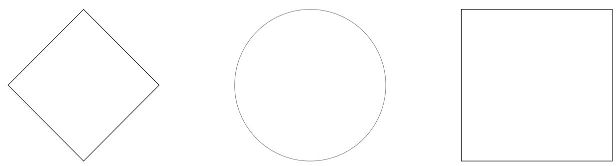
Отождествим $M_n(\mathbb{R})$ с $\mathbb{R}^{n^2}$ с топологией проиведения. Тогда топологией на пространстве $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ будет индуцированная с топологии $M_n(\mathbb{R})$. det будет непрерывным отображением $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ **на** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Так как образ пространства при непреывном отображении несвязен, то несвязно и само пространство.

8. **Докажите, что функции расстояния $d_1, d_2, d_\infty$ задают структуру метрического пространства на $\mathbb{R}^n$. Нарисуйте открытые шары $B_0^1$ в метриках $d_i$ при $n = 2$.**

Все 3 функции очевидно положительны и симметричны. Если для некоторых двух точек $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ верно, что $\max|x_i - y_i| = 0$, то все модули разностей не должны превосходить нуль, а значит они нулевые и $x = y$. Тоже самое будет верно и для $\sum|x_i - y_i|$ и $\sqrt{\sum|x_i - y_i|^2}$ так как слагаемые ненулевые, а их сумма нуль, а значит каждое нуль. Осталось проверить неравенство треугольника. Для бесконечной метрики справедливо $\max|x_i - y_i| = \max|x_i - z_i + z_i - y_i| \leqslant \max(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leqslant \max|x_i - z_i| + \max|z_i - y_i|$. Для метрики с индексом 1 верно $\sum|x_i - z_i + z_i - y_i| \leqslant \sum|x_i - z_i| + \sum|z_i - y_i|$. Для метрики с индексом 2 обозначим $\langle x|y\rangle = \sum x_i y_i$. Тогда $d_2(x,y) = \sqrt{\langle x - y|x - y\rangle}$. Докажем неравенство Коши-Буняковского. Функция $t \in \mathbb{R} \mapsto \langle tx + y|tx + y\rangle$ положительна, если раскрыть произведение, то мы получим $t^2\langle x|x\rangle + 2t\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle \geqslant 0, t \in \mathbb{R}$. Тогда детерминант этого многочлена не положителен. $\langle x|y\rangle^2 - \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \leqslant 0$. Тогда $|\langle x|y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&d_2(x,y)^2 \\
&= \langle x - y|x - y\rangle \\
&= \langle x - z + z - y|x - z + z - y\rangle \\
&\leqslant \langle x - z|x - z\rangle + 2\langle x - z|z - y\rangle + \langle z - y|z - y\rangle \\
&\leqslant \langle x - z|x - z\rangle + 2\sqrt{\langle x - z|x - z\rangle\langle z - y|z - y\rangle} + \langle z - y|z - y\rangle \\
&= (d(x,z) + d(z,y))^2
\end{aligned}
$$

Шары:



9. **Докажите, что топология на $\mathbb{R}^n$, индуцированная метриками $d_i$ и выше, совпадает с топологией произведения, определённой на лекции.**

Обозначим за $\tau_\infty$ топологию порожденную метрикой $d_\infty$ и за $\tau_\times$ топологию произведения. Базой $\tau_\infty$ являются многомерные кубы, то есть множества вида $r(-1,1)^n + a$, где $r \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Базой топологии произведения являются всевозможные произведения интервалов. Заметим, что база метрической топологии вкладывается в базу топологии произведение, а значит $\tau_\infty \subseteq \tau_\times$. Пусть теперь $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ – элемент базы $\tau_\times$. Тогда каждая его точка $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ лежит вместе с шаром $\min\{|a_i - x_i| i \in \{1, ..., n\}\} \cap \{|b_i - x_i| i \in \{1, ..., n\}\}(-1,1)^n + x$, а значит база топологии произведения является семейством открытых множеств из $\tau_\infty$. Это означает, что $\tau_\times \subseteq \tau_\infty$, и учитывая прошлое утверждение $\tau_\times = \tau_\infty$.

Теперь пусть $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n | d_i(x,0) = 1\}$. $x \mapsto d_i(x,0)$ - это непрерывное отображение в смысле $(\mathbb{R}^n, \tau_\times) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_c)$, где $\tau_c$ – каноническая топология прямой, так как если $\max|x_i| \leqslant \delta$, то $\sqrt[n]{\sum x_i^n} \leqslant \sqrt[n]{n}\delta = \varepsilon$, а значит $\delta = \varepsilon/\sqrt[n]{n}$. Тогда исходя из 2 задачи 2 листочка множество $S_i$ замкнуто, так как $(\mathbb{R}, \tau_c)$ – хаусдорфово. Нетрудно также видеть, что $S_i \subset [-1,1]^n$, подмножество произведения компактных по лемме Бореля – Лебега отрезков, что само компактно. Тогда $S_i$ – замкнутое подмножество компакта, а значит $S_i$ компактно в топологии $\tau_\times$. Очевидно, что

$d_\infty(\cdot, 0) : (\mathbb{R}^n, \tau_\times) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_c)$ тоже является непрерывным отображением. Тогда $d_\infty(S_i, 0)$ – образ сферы при непрерывном отображении тоже компактен. Более того, так как каноническая топология прямой хаусдорфова, то компактный образ сферы замкнут, а значит содержит все свои предельные точки. Теперь так, как функция расстояния имеет неотрицательные значения и сфера не содержит нуль векторного пространства, то она и не может содержать сколь угодно близкие к нулю с точки зрения $d_\infty$ точки, в силу замкнутости образа. Это означает, что образ имеет ненулевую нижнюю грань $m > 0$, то есть минимальное расстояния от нуля до некоторой точки сферы. Тогда имеет место следующее соотношения для шаров $B_i(a, r)$ метрики $d_i$. $B_\infty(a, rm) \subseteq B_i(a, r) \subseteq B_\infty(a, r)$ для любых точек $a$ и радиусов $r$. Это значит, что в любой шар пространства с метрикой $d_i$ можно вписать куб и вокруг него же можно описать куб, а значит открытые множества одного пространства открыты и в другом. Тогда $\tau_i = \tau_\infty = \tau_\times$, что и завершает доказательство.

10. **Пусть $X, Y$ – метрические пространства. Определите естественную метрику на их произведении $X \times Y$.**

    Естественной метрикой будет $d_{X\times Y} = \max(d_X, d_Y)$ максимум из расстояний между координатами. Она естественная в том смысле, что шар будет произведением шаров равного радиуса, а значит топология такого пространства совпадет с топологией произведения.

11. **Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено $B_x^{\varepsilon_1} = B_y^{\varepsilon_2}$ для некоторых точек $x, y$ и некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Верно ли, что $x = y, \varepsilon_1 = \varepsilon_2$?**

    Нет, возьмем отрезок $[0, 1]$, любые шары радиусом большим 2 являются всем пространством, а значит совпадают, при этом их можно рисовать вокруг любых точек.

12. **Определим топологию Зариского на $\mathbb{C}^n$ следующим образом: замкнутыми множествами назовем множества нулей произвольного набора многочленов из $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Проверьте, что это действительно топология. Является ли она хаусдорфовой? Совпадает ли топология Зариского на $\mathbb{C}^2$ с топологией произведения, полученной из топологии Зариского на $C$?**

    Обозначим за $F(S) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \forall f \in S, f(x) = 0\}$, для $S \subseteq \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Обозначим за $(S)$ – идеал, порожденный набором. Тогда $F(S) = F((S))$, так как с одной стороны $S \subseteq (S)$, а значит $F(S) \supseteq F((S))$, с другой же если $x \in F(S)$, то для $h \in F((S))$ $h(x) = \sum \lambda_i f_i(x) = 0$, то $x \in F((S))$. Тогда $F(\{1\}) = C^n$, $F(\emptyset) = \mathbb{C}^n$. Затем $F(I) \cup F(J) = F(IJ)$, так как если $x$ – нуль одного из идеалов $I$ или $J$, то $IJ \ni h = \sum f_i g_i$ для $f_i \in I, g_i \in J$, то $h(x) = \sum 0 = 0$. С другой стороны если $x$ зануляет весь $IJ$, то либо $x$ зануляет весь $I$, либо мы находим $g \in I$, что $g(x) = 1$, тогда $gJ \subseteq IJ$, а значит $x$ зануляет $gJ$, а тогда и весь $J$. Также $F(I) \cap F(J) = F(I + J)$. Так как $J, I \subseteq J + I$, то справедливо $F(J) \cap F(I) \supseteq F(J + I)$. И если $x \in F(J) \cap F(I)$, то для $h \in J + I$, $h = f + g$ для $f \in I, g \in J$, а тогда $h(0) = f(0) + g(0) = 0$, а значит $F(J) \cap F(I) \subseteq F(I + J)$. К тому же кольцо многочленов является нётеровым, а значит $\sum I_j = \sum_{j \in \{1, ..., n\}} I_j$, а тогда любое персечение множеств вида $F(I_J)$ сведется к конечному пересечению, а оно, как мы видели, имеет вид $F(I)$. Тогда $F[\mathcal{P}(\mathbb{C}[x_1, ..., x_n])]$ удовлетворяет аксиомам множества замкнутых.

    Топология Зариского не хаусдорфова. Так в случае $n = 1$, замкнутыми множествами являются конечные множества, а открытыми коконечные. И пресечение любых двух коконечных множеств никогда не пусто, потому как объединение конечных подмножеств $\mathbb{C}$ никогда не составят всё пространство.

    Будем писать $\mathbb{C}_i = (\mathbb{C}^i, \mathrm{Zar})$. Тогда замкнутыми в $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ будут объединения по конечным наборам вертикальных, горизонтальных прямых и точек, а в $\mathbb{C}_2$ замкнутым например будет единичные круг, так как он является множеством решений $x^2 + y^2 = 0$, но он не замкнут в топологии произведения.