Георгий Потошин, 2024

Алгебра I, листочек 8

1. **Пусть $A, B \in \mathcal{M}at_{n\times n}(K)$, A и B нильпотентны и $AB = BA$. Докажите, что $A + B$, AB нильпотентны. Верно ли это без условия $AB = BA$?**

   Пусть $A^n = 0$ и $B^m = 0$, тогда в силу того, что они коммутируют мы получим $(AB)^{\max(m,n)} = A^{\max(m,n)}B^{\max(m,n)} = 00 = 0$. Также $(A+B)^{m+n+1} = 0$, так как по формуле бинома Ньютона в каждом слагаемом либо степень A, либо степень B будет больше зануляющей степени, а значит будет сумма нулей. Формула бинома работает, так как слагаемые коммутируют. Без этого условия это не верно, так как например есть матричные единицы $e_{1,2}$ и $e_{2,1}$, они нильпотенты, но их сумма нет, так как в случае размера 2×2 их сумма – обратимая матрица с детерминантом -1.

2. **Докажите формулу для определителя матрицы Вандермонда:**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0\le j\le i\le n}(x_i - x_j)$$

   Обозначим это определитель через $V(x_0, \dots, x_n)$. Заметим, что

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1-x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n-x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-x_0) \end{pmatrix}$$

   Этого можно добиться, последовательно заменяя для каждого $i = n..1$ в порядке убывания столбец S_i на $S_i - x_1 S_{i-1}$, столбцы мы нумеруем с 0, по степени x_0. Такая замена очевидно не меняет детерминанта. Так как мы привели матрицу к нижнетреугольному блочному виду, то её определитель это произведение определителей блоков, а в нашем случае определитель нижнего блока

$$V(x_0, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1-x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n-x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-x_0) \end{pmatrix}$$

   По полилинейности вынесем общий множителей в каждой строке и получим

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)V(x_1, \dots, x_n)$$

   Продолжив дальше рекурсивный спуск по индукции мы получим искомую формулу.

3. **Пусть $A \in \mathcal{M}at_{m\times n}(K)$. Покажите, что если для любого $X \in \mathcal{M}at_{n\times m}(K)$ имеем $\operatorname{tr}(AX) = 0$, то $A = 0$.**

   Заметим, что так как это будет в частности верно для матричных единиц, то $\operatorname{tr}(Ae_{i,j}) = \operatorname{tr}(\sum_k A_{k,i}e_{i,j}) = A_{j,i} = 0$, так как мы можем выбирать $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le m$, то все коэффициенты матрицы должны быть нулями.

4. **Пусть $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}(K)$. Покажите, что если $\operatorname{rk}(A) = n$, то $\operatorname{rk}(\widehat{A}) = n$; если $\operatorname{rk}(A) = n-1$, то $\operatorname{rk}(\widehat{A}) = 1$; если $\operatorname{rk}(A) \le n-2$, то $\widehat{A} = 0$.**

   Если $\operatorname{rk}(A) = n$, то $\det(A)! = 0$, тогда $A^{-1} = \widehat{A}/\det(A)$. $\widehat{A}$ обратима, а значит её ранг n.

   Если $\operatorname{rk}(A) = n-1$, то $A\widehat{A} = \widehat{A}A = 0$, первое равенство означает, что $\operatorname{im}(\widehat{A}) \le \ker(A)$, но так как $\dim\ker(A) = 1$, то $\operatorname{rk}(\widetilde{A}) = 1$ или 0. Но так как в A есть $n-1$ линейно независимых строк, то в A можно выкинуть лишнюю строку и получить матрицу A', её ранг по прежнему будет $n-1$. Тогда в A' найдутся $n-1$ линейно независимых столбцов, выкинув лишний мы получим минорную матрицу A'', чей ранг по прежнему $n-1$, а значит её детерминант ненулевой, тогда матрица $\widehat{A}$ ненулевая и её ранг не может быть нулевым, а значит он 1.

Пусть $rk(A) \leq n-2$, так как ранг минорной матрицы не может превышать ранг матрицы, то ранг любого минорной будет $\leq n-2$, а значит детерминанта минорной матрицы нуль и $\widehat{A} = 0$.

5. **Покажите, что** $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(A)$**;** $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(B)$**;** $\operatorname{rk}(A+B) \leq \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$**.**

$$\operatorname{rk}(AB) = \dim(AB\mathbb{k}^m) \leq \dim(A\mathbb{k}^n) = \operatorname{rk}(A)$$

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(B^T A^T) \leq \operatorname{rk}(B^T) = \operatorname{rk}(B)$$

$$\operatorname{rk}(A+B) = \dim((A+B)\mathbb{k}^n) \leq \dim(A\mathbb{k}^n + B\mathbb{k}^n) \leq \dim(A\mathbb{k}^n) + \dim(B\mathbb{k}^n) = \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$$