Георгий Потошин, 2024

Топология I, листочек 2

1. **Докажите, что отрезок (a, b) гомеоморфен прямой $\mathbb{R}$.** Для этого построим гомеоморфизм, но сначала докажем пару утверждений.

   Утверждение 1: Непрерывность отображений метрических пространств эквивалентна непрерывности отображений соответственных топологических пространств.

   Доказательство: Пусть Y и X – метрические пространства, с соответственными топологиями.

   $\Rightarrow$: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – непрерывно с метрической точки зрения. То есть $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ такое что $\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Пусть $U \subseteq Y$ открыто и $x \in f^{-1}[U]$. Тогда точка $f(x)$ лежит в U вместе с некоторым шаром $\mathcal{B}_Y(f(x), \varepsilon)$ с центром $f(x)$ и радиусом ε. И так как из непрерывности имеет место следствие $\rho(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, то $\mathcal{B}_X(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}[\mathcal{B}_Y(f(x), \varepsilon)] \subseteq f^{-1}[U]$, это означает что в прообразе U вместе с каждой точкой $f(x)$ лежит некий шар с центром в ней, а значит прообраз открыт. Тогда прообраз любого открытого множества открыт и f – непрерывен с топологической точки зрения.

   $\Leftarrow$: Пусть прообраз каждого открытого открыт, тогда прообраз $\mathcal{B}_Y(f(x), \varepsilon)$ открыт, а значит для x существует $\delta(\varepsilon)$, такой что $\mathcal{B}_Y(x, \delta(\varepsilon)) \subseteq f^{-1}[B(f(x), \varepsilon)]$, что означает метрическую непрерывность f.

   Утверждение 2: Композиция гомеоморфизмов – гомеоморфизм.

   Доказательство: Пусть X, Y, Z – гомеоморфные топологические пространства и $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ – гомеоморфизмы. Тогда для открытого U из Z $(g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1} \circ g^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]]$ его прообраз открыт. Аналогично образ открытого V из X тоже открыт, а значит $g \circ f$ – гомеоморфизм.

   Тогда $f : x \mapsto x/(1-x^2)$ - гомеоморфизм $(-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ и $g : x \mapsto \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ – гомеоморфизм $(-1, 1) \longrightarrow (a, b)$. А значит $f \circ g^{-1} \in \operatorname{Iso}((a, b), \mathbb{R})$. Тогда прообраз любого открытого множества при отображении $f \times g$ открыт, а значит оно непрерывно.

2. **Пусть $f, g : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения топологических пространств. Предположим, что Y – хаусдорфово. Докажите, что множество $C = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X.**

   Утверждение 3: Произведение хаусдорфовых пространств само хаусдорфово.

   Доказательство: Пусть X и Y – два хаусдорфовых пространства. Пусть $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ две разные точки, и пусть без потери общности первая координата в них различается. Тогда по хаусдорфовости X и Y существуют открытые множества $U_x, U_y, U_{x'}, U_{y'}$, что $i \in U_i$ и при этом $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$. Тогда если положить $U = U_x \times U_y$ и $V = U_{x'} \times U_{y'}$, то они будут открытыми в пространстве $X \times Y$, причем $U \cap V = \emptyset$. Тогда для любых 2 различных точек $X \times Y$ найдутся их непересекающиеся окрестности, а значит $X \times Y$ хаусдорфово.

   Утверждение 4: Диагональ квадрата хаусдорфово пространства замкнута.

   Доказательство: Пусть Y – хаусдорфово пространство, и $\Delta = \{(y, y) | y \in Y\}$ – диагональ квадрата Y^2. Пусть $(x, y) \in \Delta^c$ – точка его дополнения. Тогда $x \neq y$, и существуют непересекающиеся окрестности U_x, U_y этих точек, а значит $U_x \times U_y \cap \Delta = \emptyset$. Тогда обозначим окрестность пары (x, y) $U_{x,y} = U_x \times U_y$. Тогда будет иметь место следующее соотношение

   $$\Delta^c = \bigcup_{(x,y) \in \Delta^c} U_{x,y},$$

   а значит Δ^c – открыто, а Δ – замкнуто.

   Утверждение 5: Пусть $f : X \longrightarrow Y, g : X' \longrightarrow Y'$ - непрерывные отображения топологических пространств, тогда отображение $f \times g : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ непрерывно. В случае если если $X = X'$, то отображение $(f, g) : x \mapsto (f(x), g(x))$ тоже непрерывно.

   Доказательство: Пусть $U \subseteq Y \times Y'$ открытое множество, тогда $U = \bigcup\{V_i \times V_i' | i \in I\}$, где V_i и V_i' открытые множества соответственных топологических пространств. Это значит, что $(f \times g)^{-1}[U] = \bigcup\{f^{-1}[V_i] \times g^{-1}[V_i'] | i \in I\}$, что является объединением произведений отрытых множеств, а значит открыто. Теперь пусть $X = X'$. Тогда $(f, g)^{-1}[U] = \bigcup\{f^{-1}[V_i] \cap$

$g^{-1}[V_i']|i \in I\}$ – очевидно открыто. А значит прообраз открытого при (f, g) всегда открыт, значит (f, g) непрерывно.

Заметим, что $C = (f, g)^{-1}[\Delta]$ прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении, а значит само C замкнуто.

Докажите, что если $f : X \longrightarrow X$ – непрерывное отображение хаусдорфова пространства X на себя, то множество неподвижных точек $C = \{x \in X | f(x) = x\}$ замкнуто в X.

Здесь $g = \mathrm{id}_x$ – непрерывно, а значит по предыдущему заданию C замкнуто.

3. **Пусть τ_1 и τ_2 – топологии на множестве X, причем $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Предположим, что (X, τ_2) компактно. Докажите, что (X, τ_1) тоже компактно.**

   Пусть $(U_i)_{i\in I}, U_i \in \tau_1$ – покрытие пространства X. Так как $U_i \in \tau_2$, то это ещё и покрытие в топологии τ_2. А значит оно содержит конечное подпокрытие, а значит (X, τ_1) - компактное пространство.

4. **Приведите пример топологий τ_1 и τ_2 на множестве X таких что, $\tau_1 \nsubseteq \tau_2$ и $\tau_2 \nsubseteq \tau_1$.**

   Если множество X содержит как минимум 2 различных элемента a и b, то топологии $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ и $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ удовлетворяют условию. В противном случае топология единственна.

5. **Докажите, что компактное хаусдорфово пространство регулярно (для любой точки и для любого замкнутого множества, не содержащего эту точку, существуют непересекающиеся открытые окрестности). Докажите, что оно нормально (любые два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся открытые окрестности).**

   Пусть $x \in X$ – точка и $F \subseteq X \backslash \{x\}$ – замкнутое множество. Тогда по хаусдорфовости для каждого $f \in F$ найдется непересекающаяся пара окрестностей U_f и V_f, где $x \in U_f$ и $f \in V_f$. Тогда $(F^c) \sqcup (V_f)_{f\in F}$ – покрытие X. Тогда по компактности можно выбрать конечное подпокрытие $(F^c) \sqcup (V_f)_{f\in J}$. Тогда $\bigcap\{U_i | i \in J\}$ будет окрестностью точки x и $\bigcup\{V_i | i \in J\}$ будет окресностью множества F. Эти окрестности пересекаются по пустому множеству, а значит пространство X регулярно.

   Пусть теперь F_1, F_2 - два непересекающихся замкнутых множества. Тогда для каждого $f \in F_1$ по регулярности найдется непересекающаяся пара окрестностей $U_f \ni f$ и $V_f \supset F_2$. Тогда $(F_1^c) \sqcup (U_f)_{f\in F_1}$ покрытие X и в нем по компактности можно выделить конечное подпокрытие $(F1^c) \sqcup (U_f)_{f\in J}$. Тогда $\bigcup\{U_f | f \in J\}$ – открытая окрестность F_1, а $\bigcap\{V_f | f \in J\}$ – открытая окрестность F_2, причем они не пересекаются, а значит пространства X нормально.

6. **Пусть X, Y, Z – топологические пространства. Докажите, что отображение $f : Z \longrightarrow X\times Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиции с естественными проекциями $\mathrm{pr}_1 \circ f : Z \longrightarrow X$ и $\mathrm{pr}_2 \circ f : Z \longrightarrow Y$ непрерывны.**

   $\Rightarrow$: Пусть f непрерывно. Проекции в данном случае непрерывны, так как они стрелки категории топологических пространств. Тогда композиция непрерывных отображений непрерывна.

   $\Leftarrow$: Пусть $\mathrm{pr}_1 \circ f$ и $\mathrm{pr}_2 \circ f$ непрерывны. Тогда пусть $U \subseteq X \times Z$, тогда U представимо как объединение открытых $U_i \times V_i$. Тогда $f^{-1}[U] = \bigcup\{f^{-1}[U_i \times V_i]\} = \bigcup\{f^{-1}[U_i \times Y] \cap f^{-1}[X \times V_i] = \bigcup\{(\mathrm{pr}_1 \circ f)^{-1}[U_i] \cap (\mathrm{pr}_2 \circ f)^{-1}[V_i]\}$ – открытое множество, а значит отображение f – непрерывно.

7. **Пусть отображения топологических пространств $f : X_1 \longrightarrow X_2$ и $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$ непрерывны. Определите естественное отображение $f \times g : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ и покажите, что оно непрерывно.** Утверждение 5

8. **Определим график Γ_f непрерывного отображения топологических пространств $f : X \longrightarrow Y$ следующим образом: $X\times Y \supseteq \Gamma_f = \{(x, y)|y = f(x)\}$. Докажите, что ограничение естественной проекции pr_1 индуцирует гомеоморфизм $X \simeq \Gamma_f$.**

   Вспомним, что у отображений из каждой точки выходит ровно одна стрелка, а значит каждая такая стрелка однозначно определяется своим началом. Тогда ограничение проекции как раз и имеет смысл этого однозначного определения, тогда ограничение биективно. Причем любое отображения при индуцировании остается непрерывным. Проверим, что обратное ему тоже непрерывно. Пусть $U \subset \Gamma_f$ – открыто. Это значит, что $U = \Gamma_f \cap \bigcup\{U_i \times V_i\}$. Тогда если вспомнить, что проекция графика биективна, то $\mathrm{pr}_1[U] = X \cap \bigcup\{U_i\}$, что открыто, так как является объединением открытых.

9. **Докажите, что топология на топологическом пространстве X дискретна тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x)|x \in X\} \subseteq X \times X$ открыта в $X \times X$.**

$\Rightarrow$: X – дискретна, а значит $\{x\}$ открыто в X, тогда $\{(x,x)\}$ в $X \times X$. Тогда $\Delta = \bigcup\{\{(x,x)\} | x \in X\}$ открыто в X.

$\Leftarrow$: Пусть Δ открыты в $X \times X$. Тогда для любого $x \in X$ отображение $(x, \mathrm{id}) : a \mapsto (x, a)$ непрерывно (утверждение 5) и $(x, \mathrm{id})^{-1}[\Delta] = \{c\}$ открыто в X.

10. **Докажите, что топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta \subseteq X \times X$ замкнута в $X \times X$.**

    $\Rightarrow$: Утверждение 4.

    $\Leftarrow$: Если Δ замкнута, то Δ^c открыта в $X \times X$ и $\Delta^c = \bigcup\{U_i \times V_i\}$. Тогда пусть $a, b \in X$ – две разные точки. Из того, что $(a, b) \in \Delta^c$ следует, что существует индекс i, что $(a, b) \in U_i \times V_i \subseteq \Delta^c$. Причем U_i и V_i открыты, а их пересечение пусто, и они являются окрестностями a и b. Это верно для любых различных и b, а значит X – хаусдорфово.