Георгий Потошин, 2024

Топология I, листочек 3

1. **Докажите, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.**

   Утверждение 1. Элементы базы топологии на X после индуцирования на $Y \subseteq X$ становятся базой топологии на Y.

   По определению элемент базы останется открытым после индуцирования. Покажем теперь, что все индуцированные элементы базы составят базу. Пусть $U \subseteq Y$ – открытое множество. Тогда существует такое открытое $V \subseteq X$, что $V \cap Y = U$. Раз V открыто, то существуют элементы базы $B_i \in \tau_X, i \in I$, что $\bigcup_{i \in I} B_i = V$. Тогда $U = V \cap Y = Y \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} B_i \cap Y$ открытое множество представимо как объединение индуцированных элементов базы на топологии X, а значит, что множество всех таких индуцированных элементов составят базу топологии на Y.

   Утверждение 2. Если в топологии пространства $X/\sim$ образ элемента базы топологии на X при канонической проекции открыт, то объединение этих образов составит базу топологии на фактор пространства.

   Пусть $U \in X/\sim$ открыто, тогда $\pi_{\sim}^{-1}[U]$ открыто и представимо как $\bigcup_{i \in I} B_i$ где B_i – элемент базы топологии на X. Тогда $U = \pi_{\sim}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} \pi_{sim}[B_i]$. А значит образ элементов базы топологии на X составит базу топологии на фактор пространстве.

   Утверждение 3. Если биекция $X \longrightarrow$ устанавливает однозначное соответствие между элементами базы двух пространств, то она является гомеоморфизмом.

   Пусть $U \subseteq X$ открыто, тогда существуют такие элементы базы $B_i \subseteq X, i \in I$, что $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Тогда $f[U] = \bigcup_{i \in I} f[B_i]$ – объединение открытых, а значит само открыто. В обратную сторону доказывается также.

   Базой пространства S^1 являются всевозможные пересечения окружности и открытых кругов, то есть открытые дуги. Найдем теперь базу пространства $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть (a, b) – элемент базы топологии на $\mathbb{R}$. Прообраз образа этого интервала равен $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}(a+n, b+n)$ и открыт, а значит образы интервалов составят базу топологии на фактор пространстве. Если классы эквивалентности отождествить с точками на $[0, 1)$, то образами интервалов (a, b) будет $(\{a\}, \{b\})$, если изначальный интервал не содержал целых точек, $[0, \{b\}) \cup (\{a\}, 1)$, если изначальный интервал содержал 1 целую точку и $[0, 1)$, если изначальный интервал содержал 2 и более целые точки. Пусть $f : [x] \mapsto e^{i2\pi\{x\}}$ биекция из $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в S^1. Тогда очевидно, что она однозначно сопоставляет элементам базы топологии на фактор пространства, что мы получили открытые дуги, а значит пространства гомеоморфны.

2. **Докажите, что $\mathbb{D}^n/S^{n-1} \simeq S^n$.**

   Пусть $I = (-1, 1)$ интервал. Тогда положим $B^n = I^n$, $\mathbb{D}^n = \overline{B^n}$ и $S^n = \partial \mathbb{D}^n$.