Георгий Потошин, 2024

Алгебра I, листочек 2

1. **Докажите, что подгруппа индекса 2 нормальна.**

   Пусть $H \leq G$ – подгруппа индекса 2. Тогда у неё всего два правых и два левых смежных класса. $G = H \sqcup gH = H \sqcup Hg$ так как их всего двое и они оба дополнения к подгруппе, то они очевидно совпадут $gH = Hg$. Тогда $(gH)g^{-1} = (Hg)g^{-1} = H$, а значит H нормальна в G.

2. **Пусть дана цепочка подгрупп $K \leq H \leq G$. Покажите, что $(G : K) = (G : H)(H : K)$.**

   Обозначим за $\mathrm{L}(G, H)$ множество левых классов смежности H в G, а за $\mathrm{TL}(G, H)$ её трансверсаль. Тогда построим отображение:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{TL}(G,H) \times \mathrm{TL}(H,K) &\longrightarrow \mathrm{L}(G,K) \\ (g,h) &\mapsto ghK \end{aligned}$$

   Покажем, что оно сюрьективно. Пусть $g \in G$, тогда $g = g'h$ для некоторого $g' \in \mathrm{TL}(G, H)$ и $h \in H$. А $h = h'k$ для $h' \in \mathrm{TL}(H, K)$, тогда $gK = g'h'K$. Теперь пусть $ghK = g'h'K$, так как $hK, h'K \in H$, то $gH \cap g'H \neq \emptyset$, а значит $g = g'$, сократим на него. $hK = h'K$, тогда $h = h'$, а значит φ – инъективно. Тогда $(G : H)(H : K) = |\mathrm{TL}(G, H)||\mathrm{TL}(H, K)| = |\mathrm{L}(G, K)| = (G : K)$.

3. **Пусть дана цепочка нормальных подгрупп $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. Верно ли, что K нормальна в G?**

   Это не верно, приведем контр пример. Пусть $G = A_4$, возьмём 2 её абелевы подгруппы $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ и $K = \{e, (12)(34)\}$. Так как H абелева, то очевидно, что K в ней нормальна. Проверим, что H нормальна в G:

$$\begin{gathered} (abc)(ab)(cd)(cba) = (ac)(bd) \\ (abcd)(ab)(cd)(dcba) = (ad)(cb) \\ (ab)(ab)(cd)(ab) = (cd)(ab) \\ (bc)(ab)(cd)(bc) = (bd)(ac) \\ (abcd)(ac)(bd)(dcba) = (ac)(bd) \end{gathered}$$

   Но K не нормальна в G, так как например $(123)(12)(34)(321) = (13)(42)$.

4. **(Теорема фон Дика) Пусть дана цепочка подгрупп $K \leq H \leq G$. Пусть H и K нормальны в G. Докажите, что $G/H \cong (G/K)/(H/K)$.**

   Обозначим каноничную проекцию $\pi : G \longrightarrow G/H$. Так как $K \leq H = \mathrm{Ker}(\pi)$, то π индуцирует гомоморфизм $\pi' : G/K \longrightarrow G/H, gK \mapsto gH$, так как сдвиг g на любой элемент из K не изменит значение после π. Заметим, что $\mathrm{Ker}(\pi') = \mathrm{Ker}(\pi)/K = H/K$. Тогда запишем теорему о гомеоморфизме для π', $G/H = \mathrm{Im}(\pi') \cong (G/K)/\mathrm{Ker}(\pi') = (G/K)/(H/K)$.

5. **Пусть G – группа, и пусть $S \subseteq G$ – подмножество. Определим нормализатор множества S в G следующим образом:**

$$N_S = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}.$$

   Определим централизатор множества S в G следующим образом:

$$Z_S = g \in G \mid gs = sg \forall s \in S.$$

   Проверьте, что централизатор и нормализатор являются подгруппами. Нормальны ли они?

   Нетрудно заметить, что $e \in N_S, Z_S$. Пусть $a, b \in N_S$, тогда $abSb^{-1}a^{-1} = aSa^{-1} = S$, а значит $ab \in N_S$. Пусть $a, b \in Z_S$, тогда $abs = asb = sab, \forall s \in S$, тогда и $ab \in Z_S$. Теперь пусть

$g \in N_S$, тогда $g^{-1}Sg = g^{-1}(gSg^{-1})g = S$, а значит $g^{-1} \in N_S$ и N_S – подгруппа. Также $g \in Z_S$ и $s \in S$ $g^{-1}s = g^{-1}sgg^{-1} = g^{-1}gsg^{-1} = sg^{-1}$, а значит $g^{-1} \in Z_S$ и Z_S – подгруппа. Вообще говоря они не нормальны.

Пусть $S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$. $Z_{\{(12)\}} = \{e, (12)\}$, что очевидно, и $N_{\{(12)\}} = \{e, (12)\}$, что чуть менее очевидно, но можно проверить $(23)(12)(23) = (31)$ и $(123)(12)(321) = (13)$. Так вот эта подгруппа не нормальна, так как есть например предыдущее равенство.

6. **Центром Z_G группы G называется подмножество элементов, которые коммутируют со всеми элементами G. Проверьте, что центр является нормальной подгруппой. Вычислите центр симметрической группы S_n.**

   Пусть $h \in Z_G$, тогда $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in Z_G$, а значит Z_G нормальна в G.

   Пусть $g \in Z_{S_n}$, $n > 2$ тогда g раскладывается в произведение дизъюнктных циклов $g = (...) \dots (...)$, тогда если там будет цикл длинной большей 2 $(abc \dots)$, то умножение на (ab) справа выкинет из него a. $(abc \dots)(ab) = (bc \dots)$, а умножение слева выкинет b, $(ab)(abc \dots) = (ac \dots)$, поэтому эти два элемента не коммутируют, а значит ни транспозиция, ни элементы с такими длинными циклами не будут в центре. Тогда наверно g содержит хотя бы 2 цикла длинной 2? Но тогда найдется некоммутирующий 3 цикл $(abc)(ab)(cd) = (bdc)$, но $(ab)(cd)(abc) = (acd)$. Тогда $Z_{S_n} = 1$, кроме случая $Z_{S_2} = \mathbb{Z}_2$.

7. **Пусть G_1, G_2 – абелевы группы. Обозначим множество гомоморфизмов из G_1 в G_2 через $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.**

   - **Определите естественную операцию сложения гомоморфизмов и покажите, что $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ обладает структурой абелевой группы.**
   - **Вычислите $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$ для $n, m \geq 0$.**

   Пусть $f, g \in \mathrm{Hom}(G_1G_2)$ положим $f + g = (x \mapsto f(x) \cdot g(x))$. Очевидно, что эта операция ассоциативна. Единица тоже есть $e = 1$. И обратный $-f = (x \mapsto f(x)^{-1})$. Проверим корректность $(-f)(xy) = f(xy)^{-1} = f(y)^{-1}f(x)^{-1} = f(x)^{-1}f(y)^{-1} = (-f)(x) \cdot (-f)(y)$, а значит обратный – гомоморфизм. Проверим корректность суммы $(f + g)(xy) = f(xy)g(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y) = f(x)g(x)f(y)g(y) = (f + g)(x) \cdot (f + g)(y)$. Проверим абелевость, $f + g = (x \mapsto f(x)g(x)) = (x \mapsto g(x)f(x)) = g + f$.

   Теперь пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Тогда по теореме о гомеоморфизме φ распадается на каноничный эпиморфизм $\pi : \mathbb{Z}_n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n/\mathrm{Ker}(\varphi)$, на изоморфизм $\psi : \mathbb{Z}_n/\mathrm{Ker}(\varphi) \leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \leq \mathbb{Z}_m$ и мономорфизма $i : \mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow \mathbb{Z}_m$. Заметим, что $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq \mathbb{Z}_n$, а значит $\mathrm{Ker}(\varphi) = d\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_n/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathbb{Z}_d$, где $d|n$. Но так как $\mathbb{Z}_d \hookrightarrow \mathbb{Z}_m$, а тогда $d|m$. Поэтому задача гомоморфизма на самом деле однозначно сводится к выбору двух натуральных чисел $d|n \wedge m$ и $k < d$, $k \wedge d = 1$. (все гомоморфизмы группы вычетов - умножения на взаимно простые с d числа)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_n \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathbb{Z}_d \arrow[r, leftrightarrow, "\cdot k"] & \mathbb{Z}_d \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{Z}_m \\ {[a]_n} \arrow[r, mapsto] & {[a]_d} \arrow[r, mapsto] & {[ka]_d} \arrow[r, mapsto] & \frac{m}{d}[ka]_d \end{tikzcd}$$

   Где $m/d[ka]_d = m/d(ka + d\mathbb{Z}) = mka/d + m\mathbb{Z} = [mka/d]_m$. Оно однозначно, так как для каждого гомоморфизма мы находим эти константы. И разные константы дают разные гомоморфизмы. Тогда порядок $|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = \sum_{d|n\wedge m} \varphi(d) = n\wedge m$. при этом для $d = n\wedge m$ и $k = 1$, $\varphi(1) = [m/d]_m$, то порядок этого элемента очевидно d, а значит $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{m\wedge n}$.

8. **Могут ли две неизоморфные группы иметь изоморфные нормальные подгруппы и изоморфные фактор-группы по ним? Может ли группа иметь две изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым неизоморфны? Может ли группа иметь неизоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым изоморфны?**

   Две неизоморфные группы могут иметь изоморфные нормальные подгруппы и изоморфные фактор-группы по ним, например $\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2/\langle 0, (1, 1)\rangle$.

   Группа может иметь две изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым неизоморфны, например $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2/0 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$, но $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2/\langle 0, 2\rangle \times 0 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

   Группа может иметь неизоморфные нормальные группы, фактор-группы по которым изоморфны, например $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 \times 0 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2/\langle 0, 2\rangle \times \mathbb{Z}_2$

9. **(Теорема Кэли) Докажите, что любая группа изоморфна подгруппе симметрической группы.**

   Пусть G - группа, тогда рассмотрим каноничное левое G-действие на G. Это действие является подгруппой симметрической группы G как множества.