

Топология I, листочек 3

1. Докажите, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

Утверждение 1. Элементы базы топологии на X после индуцирования на $Y \subseteq X$ образуют базу топологии на Y .

По определению элемент базы останется открытым после индуцирования. Покажем теперь, что все индуцированные элементы базы составят базу. Пусть $U \subseteq Y$ – открытое множество. Тогда существует такое открытое $V \subseteq X$, что $V \cap Y = U$. Раз V открыто, то существуют элементы базы $B_i \in \tau_X, i \in I$, что $\bigcup_{i \in I} B_i = V$. Тогда $U = V \cap Y = Y \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} Y \cap B_i$ открытое множество представимо как объединение индуцированных элементов базы на топологии X , а значит, что множество всех таких индуцированных элементов составят базу топологии на Y .

Утверждение 2. Если в топологии пространства X/\sim образ элемента базы топологии на X при канонической проекции открыт, то объединение этих образов составит базу топологии на фактор пространстве.

Пусть $U \in X/\sim$ открыто, тогда $\pi^{-1}[U]$ открыто и представимо как $\bigcup_{i \in I} B_i$ где B_i – элемент базы топологии на X . Тогда $U = \pi[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} \pi[B_i]$. А значит образ элементов базы топологии на X составит базу топологии на фактор пространстве.

Утверждение 3. Если биекция $X \rightarrow Y$ переводит элементы базы в открытые множества и прообразами элементов базы тоже являются открытые множества, то биекция является гомеоморфизмом.

Пусть $U \subseteq X$ открыто, тогда существуют такие элементы базы $B_i \subseteq X, i \in I$, что $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Тогда $f^{-1}[U] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$ – объединение открытых, а значит само открыто и f непрерывно. В обратную сторону доказывается также.

Базой пространства S^1 являются всевозможные пересечения окружности и открытых кругов, то есть открытые дуги. Найдем теперь базу пространства \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Пусть (a, b) – элемент базы топологии на \mathbb{R} . Прообраз образа этого интервала равен $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (a + n, b + n)$ и открыт, а значит образы интервалов составят базу топологии на фактор пространстве. Если классы эквивалентности отождествить с точками на $[0, 1)$, то образом интервала (a, b) будет $(\{a\}, \{b\})$, если изначальный интервал не содержал целых точек, $[0, \{b\}) \cup (\{a\}, 1)$, если изначальный интервал содержал 1 целую точку и $[0, 1)$, если изначальный интервал содержал 2 и более целые точки. Пусть $f : [x] \mapsto e^{i2\pi\{x\}}$ биекция из \mathbb{R}/\mathbb{Z} в S^1 . Тогда очевидно, что она однозначно сопоставляет элементам базы топологии на фактор пространстве открытые дуги, а значит пространства гомеоморфны.

2. Докажите, что $\mathbb{D}^n/S^{n-1} \simeq S^n$.

Пусть $I = (-1, 1)$ интервал. Тогда положим $B^n = I^n, \mathbb{D}^n = \overline{B^n}$ и $S^n = \partial\mathbb{D}^{n+1}$. \mathbb{D}^n/S^{n-1} – это диск в котором все точки его границы положили в один класс. Построим сюръекцию из диска в шар, что уважает это отождествление: Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и пусть $|x| = \max_i |x_i|$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} (-1, 4x_1, \dots, 4x_n) & , 0 \leq |x| < 1/4 \\ (4|x| - 2, x_0/|x|, \dots, x_n/|x|) & , 1/4 \leq |x| \leq 3/4 \\ (1, 4(1 - |x|)^{\frac{4}{3}}x_0, 4(1 - |x|)^{\frac{4}{3}}x_n) & , 3/4 < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Сюръекция f непрерывно, так как непрерывна каждая композиция $pr_i \circ f$. Теперь если объединить все точки $\partial\mathbb{D}^n$ в один класс, то $f : \mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n \rightarrow S^n$ станет биекцией. Причем прообраз открытого не содержащего $f(\partial\mathbb{D}^n)$ будет открытым, потому как факторизация ничего не поменяла, а прообраз открытого, содержащего эту точку, был открыт до факторизации и содержал границу, а значит останется открытым и после факторизации. Заметим также, что f – это биекция из компактного пространства в хаусдорфово, а значит является гомеоморфизмом.

3. Верно ли, что фактор хаусдорфова пространства является хаусдорфовым? Регулярного – регулярным? Нормального – нормальным?

Возьмём отрезок $[0, 1]$ с канонической топологией. Он компактен и хаусдорфов, а значит нормален и регулярен. Профакторизуем его так, что его внутренность попадёт в один класс

эквивалентности, 0 в другой, а 1 в третий обозначим их за $i, 0, 1$ соответственно. Тогда из всех подмножеств только $\emptyset, \{i\}, \{0, i\}, \{1, i\}, \{0, 1, i\}$ будут открытыми. Заметим, что $\{0\}$ и $\{1\}$ будут замкнутыми в такой топологии, но при этом у этих синглтонов нет непересекающихся окрестностей, а значит, что полученное фактор пространства ни хаусдорфово, ни регулярно, ни нормально. Тогда ответ на все вопросы – нет.

4. Приведите пример хаусдорфова нерегулярного топологического пространства.

Положим $K = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$. Это множество не открыто в стандартной топологии прямой \mathbb{R} , так как любая окрестность 1 не лежит в K . С другой стороны оно не замкнуто, так как не содержит предельную точку 0. Возьмём множество S всех интервалов вместе со всеми интервалами без K . Оно покрывает прямую и пересечение двух элементов либо интервал, либо интервал без K , а значит S – база некоей топологии, в которой открытые множества – это канонические открытые множества без некоего подмножества в K . Это означает, что любая окрестность 0 содержит отрезок без некоего количества элементов из K . Тогда между границами этого отрезка лежит некое число вида $1/p$ и любая окрестность K будет содержать шар радиусом меньшим $1/p - 1/(p-1)$ вокруг $1/p$ и $1/p$ содержащий. Тогда этот шар пересекается с K только по своему центру, а значит это шар в привычном нам смысле. Тогда он пересекается с изначальной окрестностью 0. В итоге у K и 0 нет непересекающихся окрестностей и K очевидно замкнуто, а значит прямая с этой топологией не регулярна, но хаусдорфова, так как тоньше стандартной хаусдорфовой топологии.

5. Приведите пример регулярного ненормального топологического пространства.

Топология стрелки. Возьмём прямую \mathbb{R} и снабдим её топологией, базой которой являются полуинтервалы вида $[a, b)$. Это семейство и вправду является базой, так как если пересечение 2 её элементов непусто, то оно тоже будет правым полуинтервалом, а также семейство покрывает всё пространство. Назовем получившуюся топологию τ_l , а пространства $\mathbb{R}_l := (\mathbb{R}, \tau_l)$. Нетрудно видеть, что если U открыто в евклидовом смысле, то вместе с каждой своей точкой x U будет содержать некий шар $(x-d, x+d)$, а значит содержит и полуинтервал $[x, x+d)$, тогда U открыто в топологии стрелки. Это означает что топология стрелки тоньше евклидовой топологии. Тогда \mathbb{R}_l хаусдорфово. Пусть теперь $A, B \subseteq \mathbb{R}_l$ замкнуты и дизъюнктивны. Заметим, что $A \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ и $B \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ открытые окрестности соответствующий множеств. Тогда вместе с каждым $a \in A$ есть полуинтервал $U_a := [a, a + d_a), d_a > 0$ лежащий в $\mathbb{R} \setminus B$, и вместе с каждым $b \in B$ есть полуинтервал $V_b := [b, b + d_b), d_b > 0$ лежащий в $\mathbb{R} \setminus A$. Положим $V = \bigcup_b V_b$ и $U = \bigcup_a U_a$, они являются открытыми окрестностями B и A соответственно. Покажем теперь, что их пересечение пусто. Если $V_b \cap U_a \neq \emptyset$, то тогда их пересечение содержит $\max(a, b)$, пусть без потери общности $a \in V_b \cap U_a \subseteq V_b \subset \mathbb{R} \setminus A$, что есть противоречие. Тогда мы нашли непересекающиеся окрестности 2 произвольных замкнутых множеств, а значит пространство \mathbb{R}_l хаусдорфово, регулярно и нормально.

Утверждение 4. Подпространство регулярного пространства регулярно.

Пусть X – регулярно и $A \subseteq X$. Пусть $a \in A$ точка и $F \subset A$ замкнутое, что не содержит a . Тогда существует замкнутое $C \subset X$, что $F = C \cap A$. не содержит точки a , а значит по регулярности X существуют открытые $C \subseteq U$, $a \in V$, что пересекаются по пустому множеству. Тогда $F \subset U \cap A$ и $a \in V \cap A$ – открытые в A окрестности точки и замкнутого её не содержащего, что не пересекаются, а значит пространство A регулярно.

Утверждение 5. Пространство X регулярно тогда и только тогда, когда для любого открытого O и точки x из O существует открытое U , что верно соотношение $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.

\Rightarrow : Пусть U – открытое множество и $x \in U$ – точка в нём. Тогда $x \notin U^c$ и U^c – замкнуто. Тогда по регулярности мы найдем пару открытых O_1 и O_2 , что $x \in O_1$ и $U^c \subseteq O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Тогда будет иметь место следующее соотношение: $x \in O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq O_2^c \subseteq U$.

\Leftarrow : Для точки x и замкнутого F её не содержащего найдём открытое V , что $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$. Тогда $x \in V$ и $F \subseteq \overline{V}^c$ и $V \cap \overline{V}^c = \emptyset$, а значит пространство регулярно.

Утверждение 6. Пространство $\prod_i X_i = X$ регулярно тогда и только тогда, когда всякое X_{i_0} регулярно.

\Rightarrow Если $\prod_i X_i$ регулярно, то регулярно $\prod_i Y_i$, где для $i = i_0$, $Y_{i_0} = X_{i_0}$, а во всех остальных случаях $Y_i = \{x_i\} \subseteq X_i$ это произведение гомеоморфно X_{i_0} и регулярно в силу утверждения 4. Тогда X_{i_0} тоже регулярно.

\Leftarrow Пусть теперь всякое X_i регулярно. Пусть $x = (x_i) \in \prod_i X_i = X$. Пусть $x \in U \subseteq \tau$ – открытое множество. Тогда есть набор открытых $\{W_i\}$, что $x \in W = \prod_i W_i \subseteq U$. Это в частности означает, что $x_i \in W_i$ координата лежит в открытом сомножителе. Тогда по регулярности

пространства X_i найдется открытое V_i , что $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$. Тогда $x \in V = \prod_i V_i \subseteq \prod_i \overline{V_i} = \prod_i \text{pr}_i^{-1}[W_i] = \prod_i \text{pr}_i^{-1}[V_i] \subseteq \prod_i \text{pr}_i^{-1}[\overline{V_i}] = \prod_i \overline{V_i} \subseteq W \subseteq U$. Тогда $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ и по утверждению 5 произведение пространств будет регулярным.

Положим теперь $\mathbb{S} := \mathbb{R}_i \times \mathbb{R}_i$. Это пространство называется *прямой Зоргенфрея*. Оно является произведением регулярных пространств, а значит само регулярно. Также топология этой плоскости тоньше топологии евклидовой плоскости. Тогда прямая $D = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ замкнута в топологии Зоргенфрея. Базой \mathbb{S} очевидно являются квадраты $[a, a+d) \times [b, b+d)$. Я буду дальше под \mathbb{P} подразумевать $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда множества $Q = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [q, q+1) \times [-q, -q+1)$ и $P = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} [p, p+1) \times [-p, -p+1)$ будут открытыми, а $D \setminus Q$ и $D \setminus P$ замкнутыми.

Утверждение 4. На вещественно прямой с евклидовой топологией (\mathbb{R}, τ) если множество U открыто и всюду плотно, то его дополнение U^c счётно.

Пусть U открыто. Тогда оно представимо как $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$ дизъюнктивное объединение интервалов. Их счетное количество, так как в каждом можно выбрать по рациональной точке и тем самым задать вложение в множество действительных чисел. Определим для целого z $P_z = [z, z+1]$, и для натурального n $A_{n,z} = \{I_k \cap P_z | k \geq 1 \wedge \text{diam}(I_k \cap P_z) > 1/n\}$ - множество интервалов отрезка и $B_{n,z} = \{S \subseteq P_z | \forall I \in A_{n,z} I \cap S = \emptyset \wedge S - \text{отрезок} \wedge (S \subseteq S' \text{ вложено в отрезок} \wedge \forall J \in A_{n,z} S' \cap J = \emptyset \Rightarrow S = S')\}$ - множество отрезков, что лежат между интервалами. Очевидно что как $A_{n,z}$, так и $B_{n,z}$ оба конечные. Заметим, что по построению $A_{n,z} \subseteq A_{n+1,z}$ и $\bigcup A_{n,z} \rightarrow U \cap P_z$, когда $n \rightarrow +\infty$.

6. Приведите пример связного, но не линейно связного топологического пространства. Обозначим за L_n отрезок между $(0, 0)$ и $(1, 1/n)$ в \mathbb{R}^n . Он связан и открыт.

Утверждение 4. Если $C_\alpha \subseteq X$ - связные пространства для всяких индексов и $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, то $\bigcup_\alpha C_\alpha$ связно.

Пусть $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, но при этом $\bigcup_\alpha C_\alpha = U \sqcup V$, где U и V дизъюнктивные открыты непустые множества. Если бы ни одно из C_α не одержало одновременно элементы этих двух открытых множеств, то тоже было бы справедливым относительно их непустого пересечения и тогда все C_α были бы подмножествами одного из открытых, а значит второе открытое множество оказалось бы пустым, что противоречит с нашим предположением. Пусть C_{α_0} содержит элементы из обоих множеств. Тогда $C_{\alpha_0} = (U \cap C_{\alpha_0}) \sqcup (V \cap C_{\alpha_0})$ - несвязно, а значит мы вновь пришли к противоречию. Тогда $\bigcap_\alpha C_\alpha$ обязано быть связным.

В нашем случае множества $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} L_n$ и $\overline{B} = B \cup ([0, 1] \times \{0\})$ в силу этого утверждения связны, так как их связные части-отрезки пересекаются по $(0, 0)$.

Утверждение 5. Если множества C и \overline{C} связны, то и всякое лежащее между ними тоже связно.

Пусть C и \overline{C} связны и $C \subset X \subset \overline{C}$. Если бы $X = U \sqcup V$ было несвязно, то если бы оба имели элементы из C , то $C = (U \cap C) \sqcup (V \cap C)$ было бы несвязно, что ведёт к противоречию. Иначе одно из открытых, пусть без потери общности им будет V , полностью бы находилось в $\overline{C} \setminus C$. Тогда $\overline{C} \setminus V$ было бы замкнутым в объемлющем пространстве и содержало бы C , а значит замыкания не было бы минимальным по включению замкнутым надмножеством C , что опять ведет к противоречию. В итоге X обязано быть связным.

7. Определите естественную топологию на пространства невырожденных матриц $GL_n(\mathbb{R})$. Является ли оно связным?

Отождествим $M_n(\mathbb{R})$ с \mathbb{R}^{n^2} с топологией произведения. Тогда топологией на пространстве $GL_n(\mathbb{R})$ будет индуцированная с топологии $M_n(\mathbb{R})$. \det будет непрерывным отображением $GL_n(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Так как образ пространства при непрерывном отображении несвязен, то несвязно и само пространство.

8. Докажите, что функции расстояния d_1, d_2, d_∞ задают структуру метрического пространства на \mathbb{R}^n . Нарисуйте открытые шары B_0^1 в метриках d_i при $n = 2$.
9. Докажите, что топология на \mathbb{R}^n , индуцированная метриками d_i и выше, совпадает с топологией произведения, определённой на лекции.

Обозначим за τ_∞ топологию порожденную метрикой d_∞ и за τ_\times топологию произведения. Базой τ_∞ являются многомерные кубы, то есть множества вида $r(-1, 1)^n + a$, где $r \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Базой топологии произведения являются всевозможные произведения интервалов. Заметим, что база метрической топологии вкладывается в базу топологии произведения, а значит $\tau_\infty \subseteq \tau_\times$. Пусть теперь $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ - элемент базы τ_\times . Тогда каждая его точка $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ лежит вместе с шаром $\min\{|a_i - x_i| | i \in \{1, \dots, n\}\} \cap \{|b_i - x_i| | i \in \{1, \dots, n\}\}$

$\{1, \dots, n\}(-1, 1)^n + x$, а значит база топологии произведения является семейством открытых множеств из τ_∞ . Это означает, что $\tau_x \subseteq \tau_\infty$, и учитывая прошлое утверждение $\tau_x = \tau_\infty$.

Теперь пусть $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n | d_i(x, 0) = 1\}$. $x \mapsto d_i(x, 0)$ - это непрерывное отображение в смысле $(\mathbb{R}^n, \tau_x) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_c)$, где τ_c - каноническая топология прямой, так как $d_i(\cdot, 0)$ является i -м корнем из суммы непрерывных отображений. Тогда исходя из 2 задачи 2 листочка множество S_i замкнуто, так как (\mathbb{R}, τ_c) - хаусдорфово. Нетрудно также видеть, что $S_i \subset [-1, 1]^n$, подмножество произведения компактных по лемме Бореля - Лебега отрезков, что само компактно. Тогда S_i - замкнутое подмножество компакта, а значит S_i компактно в топологии τ_x . Очевидно, что $d_\infty(\cdot, 0) : (\mathbb{R}^n, \tau_x) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_c)$ тоже является непрерывным отображением. Тогда $d_\infty(S_i, 0)$ - образ сферы при непрерывном отображении тоже компактен. Более того, так как каноническая топология прямой хаусдорфова, то компактный образ сферы замкнут, а значит содержит все свои предельные точки. Теперь так, как функция расстояния имеет неотрицательные значения и сфера не содержит нуль векторного пространства, то она и не может содержать сколь угодно близкие к нулю с точки зрения d_∞ точки, в силу замкнутости образа. Это означает, что образ имеет ненулевую нижнюю грань $m > 0$, то есть минимальное расстояние от нуля до некоторой точки сферы. Тогда имеет место следующее соотношение для шаров $B_i(a, r)$ метрики d_i . $B_\infty(a, rm) \subseteq B_i(a, r) \subseteq B_\infty(a, r)$ для любых точек a и радиусов r . Это значит, что в любой шар пространства с метрикой d_i можно вписать куб и вокруг него же можно описать куб, а значит открытые множества одного пространства открыты и в другом. Тогда $\tau_i = \tau_\infty = \tau_x$, что и завершает доказательство.

10. Пусть X, Y - метрические пространства. Определите естественную метрику на их произведении $X \times Y$.

Естественной метрикой будет $d_{X \times Y} = \max(d_X, d_Y)$ максимум из расстояний между координатами. Она естественная в том смысле, что шар будет произведением шаров равного радиуса, а значит топология такого пространства совпадет с топологией произведения.

11. Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено $B_x^{\varepsilon_1} = B_y^{\varepsilon_2}$ для некоторых точек x, y и некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Верно ли, что $x = y, \varepsilon_1 = \varepsilon_2$?

Нет, возьмем отрезок $[0, 1]$, любые шары радиусом большим 2 являются всем пространством, а значит совпадают, при этом их можно рисовать вокруг любых точек.

12. Определим топологию Зариского на \mathbb{C}^n следующим образом: замкнутыми множествами назовем множества нулей произвольного набора многочленов из $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Проверьте, что это действительно топология. Является ли она хаусдорфовой? Совпадает ли топология Зариского на \mathbb{C}^2 с топологией произведения, полученной из топологии Зариского на \mathbb{C} ?