Георгий Потошин, 2024

Алгебра I, листочек 7

1. **Постройте базисы над полем $\Bbbk$ в алгебрах: матриц $\mathcal{Mat}_n(\Bbbk)$; верхнетреугльных матриц; многочленов с коэффициентами в $\Bbbk$. Запишите законы умножения в этих базисах.**

   Очевидно, что на матрицы можно смотреть как на наборы чисел, а значит и как на элементы свободного модуля. Тогда матричные единицы $\{e_{i,j}\}$, в которых на одном месте стоит единица, а на остальных нули, образуют базис алгебры, более того часто матрицы строят как свободная алгебра на матричных единицах. Умножение матричных единиц происходит по следующему правилу $e_{i,j}e_{k,l} = \delta_{j,k}e_{i,l}$.

   Базис верхнетреугольных матриц состоит из матричных единиц $e_{i,j}$, для которых $i \leq j$. умножение остается таким же, проверим замкнутость по нему: пусть $i \leq j$ и $k \leq l$, если произведение $e_{i,j}e_{l,k}$ не нулевое, то $j = l$, тогда по транзитивности $\leq$ мы получим $i \leq l$, а значит результат произведения также врехнетреугольный.

   Так как полиномы имеют моном максимальной степени, то каждый полином расскладывается в линейную комбинацию x^n. Тогда $\{x^n\}$ – базис алгебры. Это нельзя формализовать из наивного определения полинов, но если из рассматривать как элементы группового (наверно правильнее говорить моноидального, так как $\mathbb{N}$ не группа) кольца $K[\mathbb{N}]$, то это утверждение верно по определению. Произведение ведёт себя следующим образом, $x^n x^m = x^{n+m}$.

2. **Постройте канонические изоморфизмы**

   (a) $U + W \cong U \bigoplus W/(U \cap W)$ **для подпространств** $U, W \leq V$

   Если прочитать это соотношение как $U + W \cong U \bigoplus (W/(U \cap W))$, то изоморфизм нельзя канонически построить, так как придётся выбирать базис, и поэтому мы пойдём по иному пути, который верен в более общем случае для модулей.

   $U + W \cong (U \bigoplus W)/(U \cap W)$. Построим точную последовательность

   $$0 \to U \cap W \to U \bigoplus W \to U + W \to 0$$

   где нетривиальные стрелки $i = a \mapsto (a, -a)$ и $\pi = (a, b) \mapsto a + b$ в том порядке, в котором они появлятся в последовательности. Её точность тривиальна, а тогда согласованно с ней искомое соотношение, которое следует для теоремы об изоморфизме для π, то есть $U + W = \mathrm{Im}(\pi) \cong U \bigoplus W/\mathrm{Ker}(\pi) = U \bigoplus W/\mathrm{Im}(i) \cong U \bigoplus W/U \cap W$, так как $i : U \cap W \to U \bigoplus W$ – вложение и факторизация происходит по нему. Сопутствующий изоморфизм будет слудующим:

   $$[(a, b)] \in U \bigoplus W/U \cap W \mapsto a + b$$

   (b) **[Теорема Нетер об изоморфизме]** $(U + W)/U \cong W/(U \cap W)$ **для подмодулей** $U, W \leq V$

   Построим сюръективный морфизм $\phi = a \in W \mapsto a + U \in (U + W)/U$, ядро которого $W \cap U$. Применим теорему о гомоморфизме и получим нужное соотношение $W/(U \cap W) \cong (U + W)/U$. Сопутствующий изомрфизм $w + U \cap W \in W/(U \cap W) \mapsto w + U \in (U + W)/U$.

   (c) $V/(U + W) \cong (V/U)/(W/(U \cap W))$ **для подмодулей** $U, W \leq V$

   Здесь правый фактор не происходит по стандартному вложению, так как одно не подмножество другого, поэтому это соотношение образовано из точной последовательности:

   $$0 \to W/(U \cap W) \to V/U \to V/(U + W) \to 0$$

   где нетривиальные стрелки следующие $i = w + U \cap W \mapsto w + U$ и $\pi = v + U \mapsto v + U + W$. Первая инъективнаь так как для $w \in W$, $w + U = U$ означает, что $w \in U$, а тогда $w \in U \cap W$ и $w + U \cap W = U \cap W$. Вторая стрелка инъективна, так как для $v + U + W$ можно найти прообраз $v + U$. Последовательность точна, так как с одной стороны для $w \in W$ $w + U + W = U + W$, а значит $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$, с другой стороны, если $v + U + W = U + W$, то $v \in U + W$, тогда $v = u + w$ для некоторых $u \in U$ и $w \in W$.

тогда прообраз равен $v + U = w + u + U = w + U \in \mathrm{Im}(i)$ и мы получили второе включение. Осталось использовать теорему о гомеоморфизме $V/(U + W) = \mathrm{Im}(\pi) \cong (V/U)/\mathrm{Ker}(\pi) = (V/U)/\mathrm{Im}(i) \cong (V/U)/(W/(U \cap W))$. Сопутствующий изоморфизм моморфизм следующий $[v + U] \in (V/U)/(W/(U \cap W)) \mapsto v + U + W$.