Листок 3

Дедлайн: 1 Декабря 2025, 23:59 МСК.

Комментарий: Каждая задача стоит пять баллов. Если в задаче несколько подпунктов, то каждый из них стоит пять баллов. В листке есть необязательная часть: если вы ее решаете, то баллы засчитываются как обычно, но если вы ничего не решаете, то ваша оценка не портится.
Единственное условие: если вы решаете задачу, используя нерешенные задачи из этого листка, то оценка за решение уменьшается на k баллов, где k – число нерешенных задач, использованных в решении.
Таким образом за листок можно получить более ста баллов.

1 Снова линейная алгебра.

Введем операторы $L_\omega = \omega\wedge$ и $\Lambda_\omega = *^{-1}L*$.

Задача 1.1: Докажите, что

$$*\frac{\omega^k}{k!} = \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Задача 1.2: Покажите, что на $(1,1)$-формах оператор Λ_ω совпадает со следом, т.е. если $\alpha = \sqrt{-1}\alpha_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$, то $\Lambda_\omega \alpha = g^{j\bar{k}}\alpha_{j\bar{k}}$.

Задача 1.3: Пусть F – форма кривизны связности Черна голоморфного линейного расслоения (L, H) над кэлеровым многообразием (X,ω). Пусть Λ_ω – оператор Лефшеца. Восполните лакуны в лекционном доказательстве следующего утверждения: для любой (p,q)-формы $\varphi = \varphi_{I\bar{J}}dz^I \wedge d\overline{z^J}$ со значениями в L выполнено соотношение

$$\langle[\sqrt{-1}F, \Lambda_\omega]\varphi, \varphi\rangle_\omega = \sum_{|I|=p,|J|=q}\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i + \sum_{j\in J}\lambda_j - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)|\varphi_{I\bar{J}}|^2.$$

Замечание: На самом деле это утверждение из линейной алгебры. Оно верно для любой $(1,1)$-формы F.

Задача 1.4: Покажите, что на k-формах $[L_\omega, \Lambda_\omega] = (k-n)\,\mathrm{Id}$. Выведите отсюда формулу для $[L^r, \Lambda]$.

Задача 1.5: Покажите, что $L^{n-k} : \Lambda^k_X \to \Lambda^{2n-k}_X$ – изоморфизм, а ядро оператора $L^{n-k+1} : \Lambda^k_X \to \Lambda^{2n-k+2}_X$ совпадает с ядром оператора Λ_ω на Λ^k_X.

Указание: Оба утверждения выводятся из предыдущей задачи. Но полезно также придумать независимое доказательство первого утверждения.

2 Кривизна многообразий и расслоений.

Задача 2.1: Пусть (L, H) – голоморфное линейное расслоение над компактным кэлеровым многообразием (X, ω). Покажите, что если $\alpha \in c_1(L)$, то найдется эрмитова метрика $\tilde{H}$, такая, что $\alpha = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,\partial\,\overline{\partial}\log\tilde{H}$.

Указание: Пусть H – какая-то метрика на L. Форма $-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,\partial\,\overline{\partial}\log H$ лежит в $c_1(L)$. Тогда по $\partial\,\overline{\partial}$-лемме имеем, что$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,\partial\,\overline{\partial}\log H - \alpha = \sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial} f$, откуда можно найти вид искомой метрики $\tilde{H}$.

Задача 2.2: Пусть (X, ω) – компактное кэлерово многообразие, а E – голоморфное векторное расслоение ранга r_E с эрмитовой метрикой $H = (H_{\alpha\overline{\beta}})$. Напомним, что кривизна $F_H = F_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k$ в компонентах пишется как

$$F_{j\overline{k}\;\;\beta}^{\;\;\alpha} = -\,\partial_{\overline{k}}(H^{\alpha\overline{\gamma}}\,\partial_j\,H_{\beta\overline{\gamma}}).$$

1. Покажите, что дифференциальное тождество Бианки $d_\nabla F_\nabla = 0$ для произвольной связности на векторном расслоении в случае связности Черна может быть записано следующим образом (в скобках справа написаны бескоординатные выражения):

$$\nabla_m\, F_{j\overline{k}} = \nabla_j\, F_{m\overline{k}} \quad (\partial_\nabla\, F = 0)$$
$$\nabla_{\overline{m}}\, F_{j\overline{k}} = \nabla_{\overline{k}}\, F_{j\overline{m}} \quad (\overline{\partial}_\nabla F = 0).$$

2. Покажите, что для скалярной кривизны $R = g^{j\overline{k}} R_{j\overline{k}}$ на кэлеровом многообразии верны следующие тождества:

$$\partial_j\, R = \nabla^{\overline{k}}\, R_{j\overline{k}} \quad (\partial\, R = -\overline{\partial}^*\mathrm{Ric})$$
$$\partial_{\overline{k}}\, R = \nabla^j\, R_{j\overline{k}} \quad (\overline{\partial} R = \partial^*\,\mathrm{Ric}).$$

   Выведите отсюда, что если $R_{j\overline{k}} = f(x) g_{j\overline{k}}$, то $f \equiv \mathsf{const}$.

3. Покажите, что $\int_X R\omega^n$ зависит только от когомологических классов ${}_1(X)$ и $[\omega]$.

4. Покажите, что существует такая константа $C(c_1(X), [\omega])$, зависящая только от классов $c_1(X)$ и $[\omega]$, что верно следующее равенство:
$$\int_X R^2\omega^n = C(c_1(X), [\omega]) + \int_X |\mathrm{Ric}|^2\omega^n.$$

5. Сформулируйте и докажите аналоги утверждений (2)-(4) для кривизны произвольного голоморфного векторного расслоения.

Задача 2.3:

Напомним, что на $\mathbb{C}P^n$ есть метрика Фубини-Штуди, чья кэлерова форма определяется как $\omega_{FS} = \sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial}\log(\sum_{j=0}^n |Z_j|^2)$. В карте $Z_0 \neq 0$ верно $\omega_{FS} = \sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial}\log(1 + \sum_{j=1}^n |z_j|^2)$, где $z_j = \frac{Z_j}{Z_0}$. На лекции мы показали, что она положительно определена и инвариантна относительно действия $U(n+1)$.

Также на единичном шаре $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| < 1\}$ мы ввели кэлерову метрику, отличную от евклидовой. Ее кэлерова форма определялась как $\omega_{\mathbb{B}} = -\sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial}\log(1 - |z|^2)$.

1. Покажите, что $\mathbb{B} = \{[Z_0 : \cdots : Z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid |Z_0|^2 > |Z_1|^2 + \cdots + |Z_n|^2\}$ и $\omega_{\mathbb{B}} = -\sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial}\log(|Z_0|^2 - |Z_1|^2 - \cdots - |Z_n|^2)$. Выведите отсюда, что $U(1,n)$ действует транзитивно и сохраняет $\omega_{\mathbb{B}}$.

2. Вычислите тензор кривизны для $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ и $(\mathbb{B}, \omega_{\mathbb{B}})$. Вычислите тензоры Риччи и скалярные кривизны данных многообразий.

   Указание: Вычислите в одной точке, используя голоморфные нормальные координаты, а затем воспользуйтесь транзитивностью действия $U(n+1)$ и $U(1,n)$.

3. Вычислите ω_{FS}^n и $\omega_{\mathbb{B}}^n$, а затем вычислите тензор Риччи, пользуясь тем, что $R_{j\bar{k}} = -\,\partial_j\,\partial_{\bar{k}}\log\omega^n$. Сравните ответ с предыдущим пунктом.

   Указание: Возможно вам будет полезна *лемма о матричном определителе*: пусть A – квадратная матрица размера $n \times n$, а u, v – векторы в $\mathbb{C}^n$. Тогда $\det(A + v \otimes u) = (1 + v \cdot A^{-1}u)\det(A)$.

4. Вычислите объемы $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ и $(\mathbb{B}, \omega_{\mathbb{B}})$.

Задача 2.4:

Пусть L – голоморфное линейное расслоение над кэлеровым многообразием (X, ω). Предположим, что H – эрмитова метрика на L, а $F = -\sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial}\log H$ – форма кривизны. Пусть далее $\Delta = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ – лапласиан на $(0,q)$- формах со значениями в L.

1. Покажите, что $\overline{\partial}\Delta = \Delta\overline{\partial}$ и $\overline{\partial}^*\Delta = \Delta\overline{\partial}^*$. Выведите отсюда, что если $\alpha \in \Gamma(X, L \otimes \Lambda_X^{0;q})$ удовлетворяет уравнению
$$\Delta\alpha = \lambda\alpha,\ \lambda \geqslant 0,$$
то $\overline{\partial}\alpha$ и $\overline{\partial}^*\alpha$ также удовлетворяют этому уравнению;

2. Покажите, что на L-значных $(0,1)$-формах выполнено следующее тождество Вейценбека:
$$\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\nabla}^*\overline{\nabla} + \mathrm{Ric} + F,$$
или
$$(\Delta_{\overline{\partial}}\alpha)\alpha_{\overline{l}} = -g^{j\overline{k}}\nabla_j\nabla_{\overline{k}}\alpha_{\overline{l}} + g^{j\overline{k}}R_{j\overline{l}}\alpha_{\overline{k}} + g^{j\overline{k}}F_{j\overline{l}}\alpha_{\overline{k}}$$
Чтобы это сделать, надо вспомнить, что
$$\overline{\partial}\alpha = \sum_{j,k}\nabla_{\overline{k}}\alpha_{\overline{l}}d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^l = \sum_{j<k}(\nabla_{\overline{k}}\alpha_{\overline{l}} - \nabla_{\overline{l}}\alpha_{\overline{k}})d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^l,$$
и
$$\overline{\partial}^*\alpha = -\nabla^{\overline{k}}\alpha_{\overline{k}} = -g^{j\overline{k}}\nabla_j\alpha_{\overline{k}}.$$

3. Предположим, что кривизна F такова, что $F_{j\overline{k}} + R_{j\overline{k}} \geqslant \varepsilon g_{j\overline{k}},\ \varepsilon > 0$. Покажите, что $H^1(X,L) = 0$. Покажите также, что оператор $\Delta_{\overline{\partial}}$ на $(0,1)$-формах со значениями в L обратим и что наименьшее собственное число этого оператора не меньше ε.

4. Пусть α – $\overline{\partial}$-замкнутая $(0,1)$-форма. В предположениях предыдущей задачи покажите, что существует такое гладкое сечение $s \in \Gamma(X,L)$, что
$$\alpha = \overline{\partial}s$$
и
$$\int_X |s|_H^2\omega^n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_X |\alpha|_{H,\omega}^2\omega^n.$$

5. Предположим теперь, что L – обильное расслоение, кривизна которого равна ω. Покажите, что найдется такое $k > 0$, что $H^1(X,kL) = 0$. Покажите также, что для любой точки $p \in X$ найдется голоморфное сечение $s \in H^0(X,kL)$, такое что $s(p) \neq 0$.

   Указание: Возьмите в окрестности p такое локальное сечение σ расслоения kL, что $\sigma(p) \neq 0$ (локально оно существует). Затем домножьте его на гладкую функцию χ, равную 1 в шаре $B_\delta(p)$, и равную 0 вне $B_{2\delta}(p)$. Тогда $\sigma_0 = \chi\sigma$ – гладкое сечение kL. Положим $\alpha = \overline{\partial}\sigma_0$. Тогда покажите, что $s = \sigma_0 - \overline{\partial}^*G_{\overline{\partial}}\alpha = \sigma_0 - \overline{\partial}^*\Delta_{\overline{\partial}}^{-1}\alpha$ удовлетворяет нашим требованиям.

3 Дополнительные задачи.

Задача 3.1:

Пусть (X, ω) – компактное *эрмитово* многообразие, $f \in C^\infty(X)$ – гладкая вещественная функция, а $\Delta f = \Lambda_\omega \sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial} f.$. Покажите, что

1. $d\omega^{n-1} = 0$ тогда и только тогда, когда $d * \omega = \partial\,\omega^{n-1} = \overline{\partial}\omega^{n-1} = 0$;
2. Если $d\omega^{n-1} = 0$, то
$$\int_X \Delta f \omega^n = 0.$$
3. Покажите, что если $d\omega^k = 0$, где $0 < k < n-1$, то $d\omega = 0$.

Замечание: Эрмитовы многообразия (X, ω), для которых выполнено $d\omega^{n-1} = 0$ называются *балансированными*, а метрика ω называется *балансированной*.

Задача 3.2:

1. Пусть (Σ, ω) – кэлерово многообразие размерности 1, т.е. риманова поверхность. Пусть $\omega_u = e^u\omega,\ u \in C^\infty(\Sigma)$ – новая эрмитова форма на Σ. Покажите, что $d\omega_u = 0$. Как связаны скалярные кривизны ω и ω_u?
2. Покажите, что если Σ связная и компактная риманова поверхность, то $[\omega_u] = [\omega]$ тогда и только тогда, когда
$$\int_\Sigma e^u\omega = \int_\Sigma \omega.$$
3. Пусть Σ связная и компактная риманова поверхность, а $[\omega_u] = [\omega]$. По $\partial\,\overline{\partial}$-лемме, существует функция φ, такая, что $\omega_u = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\,\overline{\partial}\varphi$. Найдите φ в терминах u.
4. Пусть (X, ω) – кэлерово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} X \geqslant 2$. Пусть опять $\omega_u = e^u\omega,\ u \in C^\infty(X)$. Докажите, что если $d\omega_u = 0$, то u – константа.

Задача 3.3: Пусть E – голоморфное векторное расслоение ранга r_E над компактным кэлеровым многообразием (X, ω). Пусть $H = (H_{\alpha\overline{\beta}})$ – эрмитова метрика на E, а F_H – кривизна ее связности Черна. Напомним, что по тождеству Бианки $\partial_\nabla F_H = \overline{\partial}_\nabla F_H = 0$.

Метрика H называется метрикой Эрмита-Эйнштейна, если верно следующее равенство:

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H = 2\pi\lambda\,\mathrm{Id}_E,$$

где λ – некоторая константа. Эквивалентно

$$g^{j\bar{k}} F_{j\bar{k}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = 2\pi\lambda\delta^{\alpha}_{\beta}.$$

1. Докажите, что если H – метрика Эрмита-Эйнштейна, то выполнены уравнения Янга-Миллса:

$$\partial^*_{\nabla} F_H = \overline{\partial}^*_{\nabla} F_H = 0.$$

2. Если $\Lambda_\omega F_H = \lambda(x)\,\mathrm{Id}_E$, то существует функция $u \in C^\infty(X)$, такая, что $e^u H$ – метрика Эрмита-Эйнштейна

   Указание: сравните кривизны H и $e^u H$ для произвольной функции u и воспользуйтесь тем, что функция $f(x) = \lambda(x) - \frac{1}{V}\int_X \lambda(x)\omega^n$ лежит в образе оператора Лапласа.

3. Покажите, что тензорное произведение расслоений с метриками Эрмита-Эйнштейна допускает метрику Эрмита-Эйнштейна. Какова будет константа λ в этом случае?

4. Пусть E_1, E_2 – два голоморфных векторных расслоения с метриками Эрмита-Эйнштейна: $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_i} = 2\pi\lambda\,\mathrm{Id}_{E_i}$, $i = 1, 2$. Пусть $\lambda_2 < \lambda_1$. Докажите, что $H^0(X\,\mathrm{Hom}(E_1, E_2)) = 0$.

   Указание: Пусть $f : E_1 \to E_2$ – голоморфный морфизм. Покажите, что

$$-g^{j\bar{k}}\,\nabla_j\,\nabla_{\bar{k}}\,f = -g^{j\bar{k}}\,\nabla_{\bar{k}}\,\nabla_j\,f - g^{j\bar{k}}[\nabla_j, \nabla_{\bar{k}}]f.$$

   Распишите коммутатор ковариантных производных через F_{H_1} и F_{H_2} и воспользуйтесь определением метрики Эрмита-Эйнштейна.

5. Пусть $V = \int_X \omega^n$. Покажите, что если H – метрика Эрмита-Эйнштейна, то константа λ может быть вычислена следующим образом:

$$\lambda = \frac{n}{V r_E}\int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1}.$$

6. Для голоморфного расслоение E введем наклон (slope) $\mu(E)$ по следующей формуле:

$$\mu(E) = \frac{1}{r_E}\int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1}.$$

   Покажите, что если E допускает метрику Эрмита-Эйнштейна, то для всякого подрасслоения $S \subset E$ верно следующее неравенство:

$$\mu(S) \leqslant \mu(E).$$

Если для всех когерентных подпучков S, $0 < r_S < r_E$ выполнено неравенство выше, то E называется *полустабильным*. Если выполнено строгое неравенство, то E называется *стабильным*.