

# Алгебра I, листочек 2

**1. Докажите, что подгруппа индекса 2 нормальна.**

Пусть  $H \leq G$  – подгруппа индекса 2. Тогда у неё всего два правых и два левых смежных класса.  $G = H \sqcup gH = H \sqcup Hg$  так как их всего двое и они оба дополнения к подгруппе, то они очевидно совпадут  $gH = Hg$ . Тогда  $(gH)g^{-1} = (Hg)g^{-1} = H$ , а значит  $H$  нормальна в  $G$ .

**2. Пусть дана цепочка подгрупп  $K \leq H \leq G$ . Покажите, что  $(G : K) = (G : H)(H : K)$ .**

Обозначим за  $L(G, H)$  множество левых классов смежности  $H$  в  $G$ , а за  $TL(G, H)$  её трансверсаль. Тогда построим отображение:

$$\begin{aligned} \varphi : TL(G, H) \times TL(H, K) &\longrightarrow L(G, K) \\ (g, h) &\mapsto ghK \end{aligned}$$

Покажем, что оно сюръективно. Пусть  $g \in G$ , тогда  $g = g'h$  для некоторого  $g' \in TL(G, H)$  и  $h \in H$ . А  $h = h'k$  для  $h' \in TL(H, K)$ , тогда  $gK = g'h'K$ . Теперь пусть  $ghK = g'h'K$ , так как  $hK, h'K \in H$ , то  $gH \cap g'H \neq \emptyset$ , а значит  $g = g'$ , сократим на него.  $hK = h'K$ , тогда  $h = h'$ , а значит  $\varphi$  – инъективно. Тогда  $(G : H)(H : K) = |TL(G, H)||TL(H, K)| = |L(G, K)| = (G : K)$ .

**3. Пусть дана цепочка нормальных подгрупп  $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ . Верно ли, что  $K$  нормальна в  $G$ ?**

Это не верно, приведем контр пример. Пусть  $G = A_4$ , возьмём 2 её абелевы подгруппы  $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  и  $K = \{e, (12)(34)\}$ . Так как  $H$  абелева, то очевидно, что  $K$  в ней нормальна. Проверим, что  $H$  нормальна в  $G$ :

$$\begin{aligned} (abc)(ab)(cd)(cba) &= (ac)(bd) \\ (abcd)(ab)(cd)(dcba) &= (ad)(cb) \\ (ab)(ab)(cd)(ab) &= (cd)(ab) \\ (bc)(ab)(cd)(bc) &= (bd)(ac) \\ (abcd)(ac)(bd)(dcba) &= (ac)(bd) \end{aligned}$$

Но  $K$  не нормальна в  $G$ , так как например  $(123)(12)(34)(321) = (13)(42)$ .

**4. (Теорема фон Дика) Пусть дана цепочка подгрупп  $K \leq H \leq G$ . Пусть  $H$  и  $K$  нормальны в  $G$ . Докажите, что  $G/H \cong (G/K)/(H/K)$ .**

Обозначим каноничную проекцию  $\pi : G \rightarrow G/H$ . Так как  $K \leq H = \text{Ker}(\pi)$ , то  $\pi$  индуцирует гомоморфизм  $\pi' : G/K \rightarrow G/H, gK \mapsto gH$ , так как сдвиг  $g$  на любой элемент из  $K$  не изменит значение после  $\pi$ . Заметим, что  $\text{Ker}(\pi') = \text{Ker}(\pi)/K = H/K$ . Тогда запишем теорему о гомеоморфизме для  $\pi'$ ,  $G/H = \text{Im}(\pi') \cong (G/K)/\text{Ker}(\pi') = (G/K)/(H/K)$ .

**5. Пусть  $G$  – группа, и пусть  $S \subseteq G$  – подмножество. Определим нормализатор множества  $S$  в  $G$  следующим образом:**

$$N_S = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}.$$

Определим централизатор множества  $S$  в  $G$  следующим образом:

$$Z_S = \{g \in G \mid gs = sg \forall s \in S\}.$$

**Проверьте, что централизатор и нормализатор являются подгруппами. Нормальны ли они?**

Нетрудно заметить, что  $e \in N_S, Z_S$ . Пусть  $a, b \in N_S$ , тогда  $abSb^{-1}a^{-1} = aSa^{-1} = S$ , а значит  $ab \in N_S$ . Пусть  $a, b \in Z_S$ , тогда  $abs = asb = sab, \forall s \in S$ , тогда и  $ab \in Z_S$ . Теперь пусть

$g \in N_S$ , тогда  $g^{-1}Sg = g^{-1}(gSg^{-1})g = S$ , а значит  $g^{-1} \in N_S$  и  $N_S$  – подгруппа. Также  $g \in Z_S$  и  $s \in S$   $g^{-1}s = g^{-1}sgg^{-1} = g^{-1}sgs^{-1} = sg^{-1}$ , а значит  $g^{-1} \in Z_S$  и  $Z_S$  – подгруппа. Вообще говоря они не нормальны.

Пусть  $S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$ .  $Z_{\{(12)\}} = \{e, (12)\}$ , что очевидно, и  $N_{\{(12)\}} = \{e, (12)\}$ , что чуть менее очевидно, но можно проверить  $(23)(12)(23) = (31)$  и  $(123)(12)(321) = (13)$ . Так вот эта подгруппа не нормальна, так как есть например предыдущее равенство.

6. Центром  $Z_G$  группы  $G$  называется подмножество элементов, которые коммутируют со всеми элементами  $G$ . Проверьте, что центр является нормальной подгруппой. Вычислите центр симметрической группы  $S_n$ .

Пусть  $h \in Z_G$ , тогда  $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in Z_G$ , а значит  $Z_G$  нормальна в  $G$ .

Пусть  $g \in Z_{S_n}$ ,  $n > 2$  тогда  $g$  раскладывается в произведение дизъюнктивных циклов  $g = (\dots) \dots (\dots)$ , тогда если там будет цикл длинной большей 2  $(abc \dots)$ , то умножение на  $(ab)$  справа выкинет из него  $a$ .  $(abc \dots)(ab) = (bc \dots)$ , а умножение слева выкинет  $b$ ,  $(ab)(abc \dots) = (ac \dots)$ , поэтому эти два элемента не коммутируют, а значит ни транспозиция, ни элементы с такими длинными циклами не будут в центре. Тогда наверно  $g$  содержит хотя бы 2 цикла длинной 2? Но тогда найдется некоммутирующий 3 цикл  $(abc)(ab)(cd) = (bdc)$ , но  $(ab)(cd)(abc) = (acd)$ . Тогда  $Z_{S_n} = 1$ , кроме случая  $Z_{S_2} = \mathbb{Z}_2$ .

7. Пусть  $G_1, G_2$  – абелевы группы. Обозначим множество гомоморфизмов из  $G_1$  в  $G_2$  через  $\text{Hom}(G_1, G_2)$ .

- Определите естественную операцию сложения гомоморфизмов и покажите, что  $\text{Hom}(G_1, G_2)$  обладает структурой абелевой группы.
- Вычислите  $\text{Hom}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$  для  $n, m \geq 0$ .

Пусть  $f, g \in \text{Hom}(G_1, G_2)$  положим  $f + g = (x \mapsto f(x) + g(x))$ . Очевидно, что эта операция ассоциативна. Единица тоже есть  $e = 1$ . И обратный  $-f = (x \mapsto f(x)^{-1})$ . Проверим корректность  $(-f)(xy) = f(xy)^{-1} = f(y)^{-1}f(x)^{-1} = f(x)^{-1}f(y)^{-1} = (-f)(x) \cdot (-f)(y)$ , а значит обратный – гомоморфизм. Проверим корректность суммы  $(f + g)(xy) = f(xy)g(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y) = f(x)g(x)f(y)g(y) = (f + g)(x) \cdot (f + g)(y)$ . Проверим абелевость,  $f + g = (x \mapsto f(x)g(x)) = (x \mapsto g(x)f(x)) = g + f$ .

Теперь пусть  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ . Тогда по теореме о гомеоморфизме  $\varphi$  распадается на каноничный эпиморфизм  $\pi : \mathbb{Z}_n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n/\text{Ker}(\varphi)$ , на изоморфизм  $\psi : \mathbb{Z}_n/\text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\varphi) \leq \mathbb{Z}_m$  и мономорфизм  $i : \text{Im}(\varphi) \hookrightarrow \mathbb{Z}_m$ . Заметим, что  $\text{Ker}(\varphi) \leq \mathbb{Z}_n$ , а значит  $\text{Ker}(\varphi) = d\mathbb{Z}_n$  и  $\mathbb{Z}_n/\text{Ker}(\varphi) \cong \mathbb{Z}_d$ , где  $d|n$ . Но так как  $\mathbb{Z}_d \hookrightarrow \mathbb{Z}_m$ , а тогда  $d|m$ . Поэтому задача гомоморфизма на самом деле однозначно сводится к выбору двух натуральных чисел  $d|n \wedge m$  и  $k < d$ ,  $k \wedge d = 1$ . (все гомоморфизмы группы вычетов - умножения на взаимно простые с  $d$  числа)

$$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_d \xleftarrow{\cdot k} \mathbb{Z}_d \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_m$$

$$[a]_n \longmapsto [a]_d \longmapsto [ka]_d \longmapsto \frac{m}{d}[ka]_d$$

Где  $m/d[ka]_d = m/d(ka + d\mathbb{Z}) = mka/d + m\mathbb{Z} = [mka/d]_m$ . Оно однозначно, так как для каждого гомоморфизма мы находим эти константы. И разные константы дают разные гомоморфизмы. Тогда порядок  $|\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)| = \sum_{d|n \wedge m} \varphi(d) = n \wedge m$ . при этом для  $d = n \wedge m$  и  $k = 1$ ,  $\varphi(1) = [m/d]_m$ , то порядок этого элемента очевидно  $d$ , а значит  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{m \wedge n}$ .

8. Могут ли две неизоморфные группы иметь изоморфные нормальные подгруппы и изоморфные фактор-группы по ним? Может ли группа иметь две изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым неизоморфны? Может ли группа иметь неизоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым изоморфны?

Две неизоморфные группы могут иметь изоморфные нормальные подгруппы и изоморфные фактор-группы по ним, например  $\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2/\langle 0, (1, 1) \rangle$ .

Группа может иметь две изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым неизоморфны, например  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2/0 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$ , но  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2/\langle 0, 2 \rangle \times 0 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Группа может иметь неизоморфные нормальные группы, фактор-группы по которым изоморфны, например  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 \times 0 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2/\langle 0, 2 \rangle \times \mathbb{Z}_2$

9. (Теорема Кэли) Докажите, что любая группа изоморфна подгруппе симметрической группы.

Пусть  $G$  - группа, тогда рассмотрим каноничное левое  $G$ -действие на  $G$ . Это действие является подгруппой симметрической группы  $G$  как множества.