Георгий Потошин, 2024

Алгебра I, листочек 9

1. **Докажите, что $F \in \Bbbk[x]$, $F(\alpha) = 0,\ \alpha \in \Bbbk$ влечет $(x - \alpha)|F$ (теорема Безу). Докажите, что многочлен степени n над полем имеет не более n различных корней. Докажите, что группа**
$$\mu_n(\Bbbk) = \{\alpha \in \Bbbk | \alpha^n = 1\}$$
содержит не больше, чем n элементов.

   Многочлены над полем можно делить с остатком. Поделим F на $(x - \alpha)$, мы получим следующее равенство $F = Q \cdot (x - \alpha) + \beta$. Если подставить в это равенство α, то занулится все, кроме β, тогда $0 = \beta$, что в точности означает, что F делится на $(x - a)$.

   С другой стороны как мы видели ранее $\Bbbk[x]$ целостное кольцо главных идеалов, а значит в нём единственно разложение на неприводимые, которыми в частности являются многочлены степени 1, так как они просты в кольце. Тогда в единственном разложении будет только конечное число множителей степени 1, и так как степень многочлена равна сумме степеней его фактора, то у нас не может быть больше факторов, чем степень многочлена, в частности это касается факторов степени 1, а корней не меньше, чем типов факторов степени 1, так как каждому корню потенциально соответствует 1 или несколько факторов.

   В частности в группе $\mu_n(\Bbbk)$ лежат все корни $x^n - 1$, а их не больше n.

2. **Докажите, что конечная подгруппа мультипликативной группы поля циклична.**

   Пусть G – конечная подгруппа мультипликативной группы поля порядка n, она абелева. Обозначим за $\psi(d) = \#\{a \in G | a^d = 1\}$. Так как $x^d = 1$ имеет решений в $\Bbbk$ не больше, чем n, то $\psi(d) \leq d$. Пусть для некого d есть элемент a этого порядка, обозначим за G_d множество элементов G порядка d, тогда очевидно, что $\langle a \rangle \subseteq \{a \in G | a^d = 1\}$, но $\#\langle a \rangle = d$, а $\#\{a \in G | a^d = 1\} \leq d$, тогда включение превратится в равенство. $\langle a \rangle$ циклическая группа порядка d, содержащая все корни $x^d - 1$. Тогда все элементы порядка d лежат в $\langle a \rangle$ и количество таких элементов $\phi(d)$. Тогда
$$n = \#G = \sum_{d|n} \#G_d \leq \sum_{d|n} \phi(d) = n$$
   А значит $\#G_d = \phi(d)$, в частности это верно для n, а значит мы находим элемент порядка n. Он порождает всю группу G, тогда эта группа циклическая.

3. **Докажите, что если $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$, то $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\sqrt{a}]$, где $a \in \mathbb{K}$.**