Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física - Instituto de Astrofísica

Astrofísica Estelar
Profesor: Julio Chanamé
Ayudantes: Rafael Fuentes *jrfuentes@uc.cl*
Visita Física Itinerante :) *www.fisicaitinerante.cl*

Ayudantía 4
Estrellas Degeneradas
8 de Octubre, 2015

Las estrellas comunes generan energía en su interior mediante reacciones nucleares. Esta energía se propaga hacia las partes externas, manteniendo el gas a muy altas temperaturas. El gas caliente tiende a expandirse, pero es retenido por la fuerza de gravedad, estableciéndose un equilibrio entre la presión del gas (que empuja hacia afuera) y la gravedad (que jala hacia adentro). Este equilibrio determina el tamaño y la estructura de la estrella.

La reacción nuclear predominante a lo largo de la vida de las estrellas es la conversión de hidrógeno en helio. Sin embargo, eventualmente las estrellas consumirán todo el hidrógeno presente en su núcleo. Al dejar de generar energía, el equilibrio entre la presión y la gravedad se pierde, haciendo que la gravedad supere a la presión. El núcleo de la estrella comienza a contraerse y se dan las condiciones para que empiecen otras reacciones nucleares (como convertir helio en carbono) que, si bien no son tan eficientes en la generación de energía, permiten que la estrella alcance nuevamente un estado de equilibrio, pero con una estructura distinta a la original.

Al final de su etapa evolutiva, la estrella agota por completo todo tipo de combustible nuclear y ya no es capaz de generar más energía. En este estado, la estrella comenzará a contraerse cada vez más, aumentando la densidad en el núcleo a medida que deja de generar energía, y la presión del gas resistirá con más dificultad la gravedad. Sin embargo, las condiciones extremas de presión y temperatura a estas densidades hacen que la materia adquiera propiedades cuánticas significativas. Una de estas propiedades es la existencia de una presión que puede compensar a la fuerza de gravedad. Esta *presión cuántica* se conoce como presión de degeneración y logra que la estrella degenerada alcance un nuevo estado de equilibrio. Se conocen dos tipos de estrellas degeneradas (no se descarta que pueda haber maás): las estrellas enanas blancas y las estrellas de neutrones.

Las estrellas enanas blancas provienen del núcleo de estrellas poco masivas, como el Sol. En este caso los electrones de la estrella están en estado de degeneración y proveen presión suficiente para resistir a la gravedad. Estas estrellas tienen una masa comparable a la del Sol, siendo que su tamaño es mil veces menor (comparable al de la Tierra) y por tanto la densidad de la materia en su interior es de algunas toneladas por centímetro cúbico.

En los años treinta, Chandrasekhar mostró que la presión de un gas de electrones degenerados no puede sostener a una estrella con una masa mayor a 1.4 veces la masa del Sol, límite conocido como *límite de Chandrasekhar*. Si el núcleo de una estrella que ya agotó su combustible tiene una masa superior al límite de Chandrasekhar, los electrones se combinan con protones formando neutrones. Al no haber electrones, los neutrones son quienes proporcionan la presión de degeneración que se opone a la gravedad alcanzando el nuevo estado de equilibrio. Estas estrellas soportadas por la presión de degeneración de neutrones se conocen como estrellas de neutrones y se producen en supernovas, violentas explosiones que marcan el final de la vida de una estrella masiva.

Para entender la estructura de estas estrellas degeneradas, vamos a modelarlas como un gas de fermiones completamente degenerado. Recordemos que el número de estados cuánticos disponibles con momentum cuya magnitud está entre p y $p + dp$ es

$$g(p)dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp, \tag{1}$$

donde g_s se incluye para tener en cuenta la posibilidad de que los estados tengan también degeneración de spin ya que pueden existir diferentes estados cuánticos correspondiendo a las diferentes orientaciones del spin de las partículas.

Para el caso de los fermiones, el grado de degeneración es $g_s = 2$ (spin-down y spin-up).

Para determinar las condiciones termodinámicas de la materia que compone un gas de partículas, se debe tener en cuenta la densidad de estados $g(p)dp$ y el número promedio de partículas en cada estado $f(\epsilon_p)$, que en el caso de los fermiones está dado por

$$f(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/k_B T} + 1}. \tag{2}$$

Cuando el gas de fermiones está completamente degenerado, las partículas ocupan los estados de mínima energía. Como los fermiones obedecen el principio de exclusión de Pauli, es decir, que sólo una partícula puede ocupar un único estado de energía, en este estado de completa degeneración el número promedio de partículas en cada estado $f(\epsilon_p)$ debe ser nulo. De hecho, si fijamos el potencial químico μ a temperatura 0 (estado degenerado) igual a una energía ϵ_F, obtenemos las siguientes expresiones para el número promedio de fermiones en el estado de energía ϵ_p

$$f(\epsilon_p) = 1 \text{ si } \epsilon_p \leq \epsilon_F \text{ o bien}$$
$$f(\epsilon_p) = 0 \text{ si } \epsilon_p > \epsilon_F.$$

La energía de los fermiones más energéticos en un gas degenerado es ϵ_F y se conoce como la energía de Fermi. Su momentum correspondiente se denota p_F y se denomina momentum de Fermi.

Dado que todos los estados con momentum p_F están ocupados por un sólo fermión, y todos los demás se encuentran desocupados, el número total de fermiones en un gas degenerado es igual al número de estados con momentum menor a p_F. Usando la ecuación (1), el número total de fermiones en el gas está dado por

$$N = \int_0^{p_F} f(\epsilon_p) g(p) dp = \int_0^{p_F} 2\frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{p_F^3}{3}.$$

Esta ecuación es posible reordenarla para obtener el momentum de Fermi en términos de la densidad de partículas del gas

$$p_F = \left(\frac{3nh^3}{8\pi} \right)^{1/3} = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} h.$$

Notemos que esta expresión para el momentum de Fermi implica que la longitud de onda de de Broglie del fermión más energético en el gas, $\lambda = h/p_F$, es comparable con $n^{-1/3}$, la distancia promedio entre los fermiones.

Se debe destacar que cada electrón es neutralizado por un protón, que a su vez es acompañado en su núcleo atómico por un neutron. Si despreciamos la masa del electrón m_e con respecto a la masa del nucleón m_N, la densidad de masa del gas vendría dada por

$$\rho = n m_N A/Z,$$

donde A/Z es el número de nucleones por electrón (para ^{12}C $A/Z = 2$).

La densidad de energía total de la estrella está dada entonces por

$$\epsilon_T = \rho c^2 + \epsilon,$$

donde ρc^2 es la contribución debido a la masa en reposo de las partículas y $\epsilon(p_F)$ es la densidad de energía interna del gas en el caso más general. Es importante considerar ambas contribuciones a la densidad de energía para el caso general. La distinción se hace cuando la estrella se trata de una enana blanca o una estrella de neutrones, ya que es posible despreciar uno de los dos términos en ambos casos.

Vamos a determinar la densidad de energía interna sin limitarnos al caso relativista o no relativista, ya que ambos efectos son importantes en estas estrellas degeneradas. La densidad de energía viene dada por

$$\epsilon = \int_0^{p_F} \frac{8\pi}{h^3} \epsilon_p p^2 dp,$$

donde $\epsilon_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ es la energía de cada partícula en un estado con momentum p. Entonces

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_F} \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}p^2 dp \\
&= \frac{8\pi mc^2}{h^3}\int_0^{p_F} \sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2} + 1}p^2 dp \\
&= \frac{8\pi m^3c^4}{h^3}\int_0^{p_F} \sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2} + 1}\frac{p^2}{m^2c^2} dp.
\end{aligned}
$$

Hacemos el cambio de variables $y = \frac{p}{mc}$ y expresamos nuestro resultados en términos de la variable $x \equiv \frac{p_F}{mc}$

$$
\epsilon(x) = \frac{8\pi m^4c^5}{h^3}\int_0^{x} \sqrt{y^2 + 1}y^2 dy.
$$

La solución a la integral es

$$
\int_0^{x} \sqrt{y^2 + 1}y^2 dy = \frac{1}{8}\left[\sqrt{x^2+1}(2x^3 + x) - \sinh^{-1}(x)\right],
$$

luego, la densidad de energía interna del gas debido al movimiento de las partículas es

$$
\epsilon(x) = \frac{\pi m^4c^5}{h^3}\left[\sqrt{x^2+1}(2x^3 + x) - \sinh^{-1}(x)\right].
$$

Lo que necesitamos ahora para estudiar el estado de la materia en el interior de la estrella, es una ecuación de estado, por lo tanto debemos encontrar una expresión para la presión interna P. Para ello, utilizaremos la primera ley de la termodinámica $dE = TdS - PdV + \mu dN$. Para una variación de la energía a entropía y número de partículas constantes, es decir, que la energía interna varía sólo débido a un cambio en el volumen del gas, la presión interna está dada por

$$
P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = \int_0^{p_F} \frac{d\epsilon_p}{dV} f(\epsilon_p)g(p)dp = \frac{1}{3V}\int_0^{p_F} \frac{p^2c^2}{\epsilon_p} f(\epsilon_p)g(p)dp = \frac{8\pi c^2}{3h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^4}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}dp \tag{3}
$$

$$
= \frac{8\pi m^3c^4}{3h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^4/m^4c^4}{\sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2}+1}}dp. \tag{4}
$$

Hacemos el cambio de variables $y = \frac{p}{mc}$ y expresamos nuestro resultados en términos de la variable $x \equiv \frac{p_F}{mc}$

$$
P(x) = \frac{8\pi m^4c^5}{3h^3}\int_0^{x} \frac{y^4}{\sqrt{y^2+1}}dy,
$$

La solución a la integral es

$$
\int_0^{x} \frac{y^4}{\sqrt{y^2+1}}dy = \frac{1}{8}\left[\sqrt{x^2+1}(2x^3 - 3x) + 3\sinh^{-1}(x)\right],
$$

con ello, la forma funcional para la presión es

$$
P(x) = \frac{\pi m^4c^5}{3h^3}\left[\sqrt{x^2+1}(2x^3 - 3x) + 3\sinh^{-1}(x)\right].
$$

Cuando los fermiones poseen un comportamiento ultra relativista, se cumple que $p >> mc$, así la ecuación (4) se simplifica a

$$
P \approx \frac{8\pi m^3c^4}{3h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^3}{m^3c^3}dp = \frac{8\pi c}{3h^3}\frac{p_F^4}{4} = \frac{2\pi c}{3h^3}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{4/3} h^4 = K_{UR}\epsilon^{4/3},
$$

donde $K_{UR} = \frac{2\pi hc}{3}\left(\frac{3Z/A}{8\pi m_N c^2}\right)^{4/3}$.

Analicemos ahora el caso donde los fermiones tienen un comportamiento no relativista. En este caso $p \ll mc$ y la ecuación (4) se simplifica a

$$P \approx \frac{8\pi m^3 c^4}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{m^4 c^4} dp = \frac{8\pi}{3h^3 m} \frac{p_F^5}{5} = \frac{8\pi h^2}{15m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{5/3} = K_{NR} \epsilon^{5/3},$$

donde $K_{NR} = \frac{8\pi h^2}{15m} \left(\frac{3Z/A}{8\pi m_N c^2} \right)^{5/3}$.

Los dos casos anteriores indican que estas estrellas degeneradas en el caso de estar compuestas sólo por partículas relativistas, o bien sólo por partículas no relativistas, su ecuación de estado es politrópica.