数学相关

东北育才学校　樊泽文

2017年6月

组合计数

计数原理.

排列.

组合.

容斥原理.

Lucas定理.

欧拉函数

欧拉函数介绍.

筛法.

欧拉函数计算.

欧拉定理.

离散对数

离散对数.

莫比乌斯反演

积性函数.

狄利克雷卷积.

莫比乌斯反演.

一些约定

$\lfloor a \rfloor$: 对a向下取整.

$\lceil a \rceil$: 对a向上取整.

$a \wedge b$: a与b.

$a \vee b$: a或b.

$\min(a, b)$: a和b中的较小值.

$\max(a, b)$: a和b中的较大值.

$\frac{a}{b}$: 不取整.

$\sum_{x=1}^{n} f(x)$: $f(x)$从$x=1$到$x=n$求和.

$\prod_{x=1}^{n} f(x)$: $f(x)$从$x=1$到$x=n$求积.

在本课件中$\sum$, $\prod$优先级低于算数运算符, 即

$$\sum_{x=1}^{n} x \times x$$

等价于

$$\sum_{x=1}^{n} (x \times x).$$

预备知识

唯一分解定理.

欧几里德算法.

扩展欧几里德算法.

剩余系.

加法原理

将全部元素分为n个不相交的部分，第i部分有a_i个元素，则共有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

个元素.

已知x, y是正整数, 求满足$xy \leqslant 10$的数对(x, y)个数.

已知x, y是正整数，求满足$xy \leqslant 10$的数对(x, y)个数.

显然$x \leqslant 10$.

按照x的取值，可以将数对分为10个不相交的部分.

按照加法原理，一共

有$10+5+3+2+2+1+1+1+1+1=27$个数对.

乘法原理

有n类元素，第i类元素有a_i个，每类元素选取一个可组成一个待计数元素$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则共有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

个待计数元素.

乘法原理的表述有些抽象, 它常常以这样的方式应用:
每个方案要进行n次选择, 无论其它选择结果如何, 第i次都有a_i种选择, 则共有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

种不同方案.

排列问题

有n个不同元素, 从中选取m个元素并排成一排, 每种方法称为一个排列, 求排列数.

按照乘法原理, 每种放置方法要进行m次选择, 其中第i次有$n-i+1$种选择, 所以共有

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

种排列.

按照乘法原理, 每种放置方法要进行m次选择, 其中第i次有$n-i+1$种选择, 所以共有

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

种排列.

将这个问题的答案记为$P(n,m)$, 即

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

【poj1715】Hexadecimal Numbers

输入一个正整数n, 求第n大的不超过8位的各位数字不同的16进制数.

由高到低逐位确定.

可以将求前m位已经确定时的第k_m大数转化为求前$m+1$位已经确定时的第k_{m+1}大.

初始所求即为前0位已经确定时的第n大.

组合问题

有n个不同元素, 从中选取m个元素并构成集合, 每个集合称为一个组合, 求组合数.

每个组合有$P(m,m)$种方式排成一排，而每个排列对应唯一一个组合，所以有

$$\frac{P(n,m)}{P(m,m)}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

种组合.

每个组合有$P(m, m)$种方式排成一排, 而每个排列对应唯一一个组合, 所以有

$$\frac{P(n, m)}{P(m, m)} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

种组合.

将这个问题的答案记为$C(n, m)$, 即

$$C(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

组合数性质

$$C(n,m)+C(n,m+1)=C(n+1,m+1).$$

组合数性质

$$C(n,m)+C(n,m+1)=C(n+1,m+1).$$

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n} C(n,i)\,a^i b^{n-i}.$$

【bzoj1913】[Apio2010]signaling 信号覆盖

输入n个点的坐标, 随机选择其中三个点确定一圆, 求在圆内点数的平均值(期望).

在圆上的点也计入答案.

$3 \leqslant n \leqslant 1500$, 坐标绝对值$\leqslant 10^6$, 任意三点不共线, 任意四点不共圆.

考虑求出每四个点对答案的贡献.
枚举每一个点, 计算它在多少个由其它三点构成的三角形内.
把其它点按照极角排序, 按极角序枚举下一个点.
维护在180°范围内的点的数目.

容斥原理介绍

设有n种特征, A_i为具备i特征的元素的集合, 则具备至少一种特征的元素的数目为

$$(-1)^2\sum|A_i|+(-1)^3\sum|A_i\cap A_j|+(-1)^4\sum|A_i\cap A_i\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

【bzoj1042】[HAOI2008]硬币购物

有4种硬币，面值为c_1, c_2, c_3, c_4，有tot次询问，每次输入5个整数d_1, d_2, d_3, d_4, s，代表第i种硬币带了d_i枚，要购买价值为s的商品，没有找零，求付款方案数.

其中$d_i, s \leqslant 10^5$, $tot \leqslant 10^3$.

预处理出数组F, $F[i]$表示假设每种硬币数量无限时购买价值为i的商品的付款方案数.
利用容斥原理处理每种硬币的数量限制.

Lucas定理介绍

对于质数p，有

$$C(n,m) \equiv C\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor\right) \times C(n\%p, m\%p) \pmod{p}.$$

【bzoj4403】序列统计

多组测试数据. 输入整数N, L, R, 求长度在1到N之间，元素值都在L到R之间的单调不降序列的数量. 答案对10^6+3(一个质数)取模.

其中$1 \leqslant N, L, R \leqslant 10^9$,测试数据组数$\leqslant 100$.

长度为i, 元素有M种不同取值的单调不降序列数量为$C(M+i-1,M)$.
运用组合数性质可得答案为

$$\sum_{i=1}^{N} C(M+i-1,M) = C(M+N,M)-1.$$

使用Lucas定理计算组合数.

定义

欧拉函数记为$\varphi(x)$, 表示小于x且与x互质的自然数个数.即

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{x-1} e\big(\gcd(i, x)\big).$$

定义

欧拉函数记为$\varphi(x)$, 表示小于x且与x互质的自然数个数.即

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{x-1} e\big(\gcd(i,x)\big).$$

设$x=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_n^{a_n}$($p_i$为质数), 可以推得

$$\varphi(x)=x\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

性质

若p为质数, 则

$$\varphi(p) = p - 1.$$

性质

若p为质数，则

$$\varphi(p) = p - 1.$$

若$\gcd(x, y) = 1$，则

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y).$$

性质

若p为质数，则

$$\varphi(p) = p - 1.$$

若$\gcd(x, y) = 1$，则

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y).$$

$$\sum_{x|n} \varphi(x) = n.$$

埃拉托色尼筛法

对于每个质数p, 标记其倍数为合数.

欧拉筛法

用$f[i]$表示i的最小质因数.

保证每个数只被其最小质因数筛去.

时间复杂度$O(n)$.

计算单个欧拉函数的值

要计算$\varphi(x)$, 只需枚举x的质因数, 复杂度$O(\sqrt{n})$.

计算1至n的欧拉函数值

考虑埃拉托色尼筛法.

对于每个质数p, 在标记其倍数为合数时, 也发现了这个合数的一个质因数, 直接更新其值即可.

不难发现对于质数p, 如果$p \mid a$, 有

$$\varphi(ap) = \varphi(a) \times p.$$

否则

$$\varphi(ap) = \varphi(a) \times (p-1).$$

不难发现对于质数p, 如果$p \mid a$, 有

$$\varphi(ap) = \varphi(a) \times p.$$

否则

$$\varphi(ap) = \varphi(a) \times (p-1).$$

在欧拉筛法的同时可以计算欧拉函数.

时间复杂度$O(n)$.

【bzoj2818】Gcd

输入整数N, 求$1 \leqslant x, y \leqslant N$且$\gcd(x, y)$为质数的数对$(x, y)$的数目.

其中$1 \leqslant N \leqslant 10^7$.

枚举质数p, 将问题转化为求$1 \leqslant x, y \leqslant \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$且$\gcd(x, y) = 1$的数对数目.

用线性筛法预处理欧拉函数前缀和.

欧拉定理介绍

若$\gcd(a,n)=1$, 则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

欧拉定理特例

若n为质数, 则

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

被称为费马小定理.

【bzoj3884】上帝与集合的正确用法

多组测试数据. 输入整数p, 求

$$2^{2^{2^{2^{\cdots}}}} \% p.$$

其中$1 \leqslant p \leqslant 10^7$, 测试数据组数$\leqslant 1000$.

将p质因数分解中所有2提出, 即可使用欧拉定理, 递归解决问题.
递归层数为$O(\log p)$.
用$O(\sqrt{n})$方法计算欧拉函数较快.

离散对数问题

已知$a, b, n,$ 解方程

$$a^x \equiv b \pmod{n}.$$

先考虑$\gcd(a,n)=1$的情况.
按照费马小定理, 如果方程有解, 一定有$0\leqslant x<\varphi(n)$的解.
可以分块处理.
时间复杂度$O(\sqrt{n}\log n)$.
如果$\gcd(a,n)\neq 1$, 可以进行转化变成$\gcd(a,n)=1$的情况.
这个算法被称作BSGS算法.

【bzoj3122】[Sdoi2013]随机数生成器

多组测试数据. 输入整数p, a, b, t, X_1, 令

$$X_{i+1} = (aX_i + b) \pmod p,$$

求满足$X_i = t$的最小i值, 不存在则输出-1.

其中$0 \leqslant a, b < p, 2 \leqslant p \leqslant 10^9$.

$$X_n \equiv a^{n-1}X_1 + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-2})b \pmod{p}.$$

特殊处理$a = 0, a = 1$的情况.

用扩展欧几里德算法求出$a^{n-1}\%p$.

用BSGS算法求出n.

数论函数介绍

定义域为正整数域, 值域为复数域的函数称为数论函数.

积性函数介绍

如果数论函数$f(n)$对于任意正整数x, y满足$\gcd(x, y) = 1$, 有

$$f(xy) = f(x) \times f(y),$$

则称其为积性函数.

积性函数介绍

如果数论函数$f(n)$对于任意正整数x, y满足$\gcd(x, y) = 1$, 有

$$f(xy) = f(x) \times f(y),$$

则称其为积性函数.

如果数论函数$f(n)$对于任意正整数x, y有

$$f(xy) = f(x) \times f(y),$$

则称其为完全积性函数.

一些积性函数:

一些积性函数:

元函数 $e(n)$

一些积性函数:

元函数 $e(n)$

单位函数 $id(n)$

一些积性函数:

元函数$e(n)$

单位函数$id(n)$

单位函数$I(n)$

一些积性函数:

元函数$e(n)$

单位函数$id(n)$

单位函数$I(n)$

欧拉函数$\varphi(n)$

一些积性函数:

元函数$e(n)$

单位函数$id(n)$

单位函数$I(n)$

欧拉函数$\varphi(n)$

莫比乌斯函数$\mu(n)$

一些积性函数:

元函数$e(n)$

单位函数$id(n)$

单位函数$I(n)$

欧拉函数$\varphi(n)$

莫比乌斯函数$\mu(n)$

约数个数函数$d(n)$

一些积性函数:

元函数$e(n)$

单位函数$id(n)$

单位函数$I(n)$

欧拉函数$\varphi(n)$

莫比乌斯函数$\mu(n)$

约数个数函数$d(n)$

约数和函数$\sigma(n)$

一些积性函数:

元函数$e(n)$

单位函数$id(n)$

单位函数$I(n)$

欧拉函数$\varphi(n)$

莫比乌斯函数$\mu(n)$

约数个数函数$d(n)$

约数和函数$\sigma(n)$

前三个为完全积性函数.

计算1至n的积性函数

使用类似计算欧拉函数的方法，可以以$O(n)$的时间复杂度计算其它一些积性函数.

定义

对于数论函数$f(n)$, $g(n)$, 它们的狄利克雷卷积为一个新函数, 记为$(f \times g)(n)$. 规定

$$(f \times g)(n) = \sum_{i|n} f(i) \times g\left(\frac{n}{i}\right).$$

性质

$$(f \times g)(n) = (g \times f)(n).$$

性质

$$(f\times g)(n)=(g\times f)(n).$$
$$((f\times g)\times h)(n)=(f\times(g\times h))(n).$$

性质

$(f \times g)(n) = (g \times f)(n)$.

$((f \times g) \times h)(n) = (f \times (g \times h))(n)$.

如果$f(n)$, $g(n)$是积性函数, 则$(f \times g)(n)$也是积性函数.

狄利克雷卷积

$$f(n)=(f\times e)(n).$$

$$f(n) = (f \times e)(n).$$

$$e(n) = (\mu \times 1)(n).$$

$$f(n) = (f \times e)(n).$$

$$e(n) = (\mu \times 1)(n).$$

$$id(n) = (\varphi \times 1)(n).$$

$$f(n) = (f \times e)(n).$$

$$e(n) = (\mu \times 1)(n).$$

$$id(n) = (\varphi \times 1)(n).$$

$$d(n) = (1 \times 1)(n).$$

$$f(n) = (f \times e)(n).$$
$$e(n) = (\mu \times 1)(n).$$
$$id(n) = (\varphi \times 1)(n).$$
$$d(n) = (1 \times 1)(n).$$
$$\sigma(n) = (id \times 1)(n).$$

【bzoj2005】[Noi2010]能量采集

输入整数n, m, 求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(\gcd(i,j)\times 2-1\big).$$

其中$1 \leqslant n, m \leqslant 10^5$.

运用狄利克雷卷积得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\gcd(i,j)\times 2-1\right)=\sum_{k}\varphi(k)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor.$$

用线性筛法预处理欧拉函数值即可.

如果是多组询问, 只需求一次欧拉函数.
利用$\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$只有$O(\sqrt{n})$种不同取值可以将询问复杂度降至$O(\sqrt{\max(n,m)})$.

莫比乌斯反演介绍

如果$f(n) = (g \times 1)(n)$, 则

$$g(n) = (f \times \mu)(n).$$

如果$f(n)=\sum_{x|n} g(x)$, 则

$$g(n)=\sum_{x|n} f(x)\mu\left(\frac{n}{x}\right).$$

相似的还有如果$f(n)=\sum_{n|x} g(x)$, 则

$$g(n)=\sum_{n|x} f(x)\mu\left(\frac{x}{n}\right).$$

【bzoj2301】Problem b

多组测试数据. 每次输入整数a, b, c, d, k, 求满足

$$a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, \gcd(x, y) = k$$

的数对(x, y)个数.

其中$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 5 \times 10^4$, $1 \leqslant c \leqslant d \leqslant 5 \times 10^4$, 测试数据组数$\leqslant 5 \times 10^4$.

利用容斥原理转化问题.

参照【bzoj2005】[Noi2010]能量采集的方法或运用莫比乌斯反演可得

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}e(\gcd(x,y))=\sum_{d}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor.$$

预处理莫比乌斯函数前缀和, 即可以 $O(\sqrt{n})$ 的时间复杂度回答每个询问.

【bzoj3309】DZY Loves Math

定义$f(n)$为n所含质因子的最大幂指数.

多组测试数据. 输入整数a, b, 求

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} f\big(\gcd(i,j)\big).$$

其中$1 \leqslant a, b \leqslant 10^7$, 测试数据组数$\leqslant 10^4$.

先说明

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor / c \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor.$$

运用莫比乌斯反演可得

$$ans = \sum_{y} \left\lfloor \frac{a}{y} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{y} \right\rfloor \sum_{x|y} f(x)\mu\left(\frac{y}{x}\right).$$

分析$\sum_{x|y} f(x)\mu\left(\frac{y}{x}\right)$的性质, 可用线性筛法求出.

结束部分

由于时间有限，每个知识点只讲解了一些较简单的题目，同学们不妨自行找题多做练习.

谢谢大家!