

李诗懿

---

# 数据结构选讲

---



# 维护一个数组

---

- † 给出长度为 $n$ 的一个数列，完成 $m$ 次操作
- † 单点修改、单点询问
- † 区间修改、区间询问
- † 删除插入、区间移动



---

# 维护一个堆 \*

---



---

# 维护一棵树（或森林）

---

- † 给出大小为  $n$  的一棵树，完成  $m$  次操作
- † 查询点到根的一条路径
- † 修改一棵子树
- † 删除添加一棵子树



---

# 维护一棵仙人掌\*

---

† 仙人掌：每条边和每个点都至多属于一个简单环的无向连通图



---

# 分块

---

- † 分块思想
- † 块状数据结构:
  - † 块状数组
  - † 块状链表
  - † 树块剖分



# 块状数组

---

- † 给出长度为 $n$  ( $\leq 10^5$ ) 的一个正整数数列，完成 $m$  ( $\leq 10^5$ ) 次操作，操作分为 2 种：
- †  $M\ x\ y\ k$  表示将  $[x,y]$  的数字全部修改为  $k$
- †  $Q\ x\ y\ k$  表示询问  $[x,y]$  上的最大值



# 块状链表

- † 给一个初始为空的数列，完成以下几种操作：
- †  $I \ x \ n$ ，在第 $x$ 个数前面插入 $n$ 个数；
- †  $D \ x \ n$ ，从第 $x$ 个数开始删除连续的 $n$ 个数；
- †  $Q \ x \ n$ ，输出从 $x$ 个数开始的连续 $n$ 个数的和。



# hnoi2010 弹飞绵羊

- † 一条直线上  $n$  个装置，每个装置设定初始弹力系数  $k_i$ ，当绵羊达到第  $i$  个装置时，它会往后弹  $k_i$  步，达到第  $i+k_i$  个装置，若不存在第  $i+k_i$  个装置，则绵羊被弹飞。绵羊想知道当它从第  $i$  个装置起步时，被弹几次后会被弹飞。Lostmonkey 可以修改某个弹力装置的弹力系数，任何时候弹力系数均为正整数。
- †  $n \leq 200000, m \leq 100000$



# 树块剖分

---

- † 把树剖分成若干个连通块
- † 维护每个点到连通块的根的信息和
- † 如何做到根号  $n$  并且实现简单:
  - † 点到根的路径上的树块数为  $O(\sqrt{N})$
  - † 每个树块大小  $\leq \sqrt{N}$
- † 实现: 尝试合并 dfs 入栈序相邻的两个结点



---

# 树块剖分

---

- ✦ 如何做到动态:
  - ✦ 查询时更新
- ✦ 好处： 修改的时候可以“奔放”地处理树块



---

# 分块

---

- ✦ 优点：适应各种数据结构问题，代码简单，常数小
- ✦ 缺点：理论复杂度根号  $n$



---

# 树状数组

---

- † 支持：满足区间加法区间减法
- † 修改：区间加减
- † 询问：
  - † 区间求和  $\log n$
  - † 区间求最值：暴力修改  $\log^2 n$
- † 优点：代码简单 空间小 常数低
- † 缺点：扩展性低 适用范围小



# 线段树

---

- † 支持：只需要满足区间加法
- † 堆式线段树    非堆式线段树
- † 自底向上线段树    自顶向下线段树
- † 自底向上堆式线段树：常数小（**zkw** 线段树）
- † 自顶向下非堆式线段树：可持久化（主席树）
- † KD 树 \* 、四分树 \*



---

# bzoj 3585 mex

---

- † 有一个长度为  $n$  的数组  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。  $m$  次询问，每次询问一个区间内最小没有出现过的自然数。



---

# ONTAK2010 Peaks

---

- † 在 Bytemountains 有  $N$  座山峰，每座山峰有他的高度  $h_i$ 。有些山峰之间有双向道路相连，共  $M$  条路径，每条路径有一个困难值，这个值越大表示越难走，现在有  $Q$  组询问，每组询问询问从点  $v$  开始只经过困难值小于等于  $x$  的路径所能到达的山峰中第  $k$  高的山峰，如果无解输出  $-1$ 。



---

# 不知名的例题

---

- ✦ 维护一个序列
- ✦ 操作：给区间加上一个等差数列
- ✦ 询问：区间最值



---

# 平衡树

---

- † splay      扩展：动态树
- † treap      扩展：可持久化平衡树
- † 替罪羊树 \*



---

# 伸展树

---

- † 1.splay 伸展操作
- † 2.insert 插入
- † 3.delete 删除
- † 4.select(k) 查询
- † 5. 翻转
- † 6. 循环平移



---

# Hnoi2002 营业额统计

---

- † 我们知道某公司成立以来每天的营业额。
- † 经济学上定义了一种最小波动值：该天的最小波动值。分析整个公司的从成立到现在营业情况是否稳定，只需要把每一天的最小波动值加起来。你的任务就是编写一个程序来计算这一个值。
- † 第一天的最小波动值为第一天的营业额。



# Scoi2014 方伯伯的 oj

- †  $n$  个用户，编号  $1 \sim n$ ，一开始按照编号排名。维护以下操作
- †  $1\ x\ y$  将  $x$  的编号改为  $y$ ，输出该用户的排名。保证  $x$  在队列中，并且  $y$  不在队列中
- †  $2\ x$  输出编号  $x$  的排名，并将  $x$  的移到第一位
- †  $3\ x$  输出编号  $x$  的排名，并将  $x$  的移到最后一位
- †  $4\ k$  查询当前排名为  $k$  的用户的编号并输出
- † 强制在线



---

# 树套树

---

- ✦ “套”！
- ✦ “第一颗树”的结点是“第二颗树”的结点的根结点



---

# Zjoi2013 K 大数查询

---

- † 有  $N$  个位置， $M$  个操作。操作有两种
- †  $1\ a\ b\ c$  表示在第  $a$  个位置到第  $b$  个位置，每个位置加入一个数  $c$
- †  $2\ a\ b\ c$  表示询问从第  $a$  个位置到第  $b$  个位置，第  $C$  大的数是多少。



---

# CTSC2008 网络管理 Network

---

- † 给定一棵树，两种操作
- † 修改一个点的权值
- † 查询一条路径的第  $K$  大



# Cqoi2011 动态逆序对

- † 对于序列  $A$ ，它的逆序对数定义为满足  $i < j$ ，且  $A_i > A_j$  的数对  $(i, j)$  的个数。给  $1$  到  $n$  的一个排列，按照某种顺序依次删除  $m$  个元素，你的任务是在每次删除一个元素之前统计整个序列的逆序对数。



# bzoj3674 可持久化并查集

- †  $n$  个集合  $m$  个操作
- † 操作:
  - †  $1\ a\ b$  合并  $a, b$  所在集合
  - †  $2\ k$  回到第  $k$  次操作之后的状态 ( 查询算作操作 )
  - †  $3\ a\ b$  询问  $a, b$  是否属于同一集合, 是则输出 1 否则输出 0
- † 强制在线



---

# 可持久化

---

- † 可持久化并查集
- † 可持久化块状链表
- † 可持久化线段树
- † 可持久化平衡树 \*



---

# Sdoi2013 森林

---

- † 给定一棵森林，每个点有权值，提供两种操作：
- † 1. 查询两点间路径上第  $k$  小的权值
- † 2. 将两个点之间连一条边 保证连接后仍是一座森林



# bzoj2653 middle

- † 一个长度为  $n$  的序列  $a$ ，设其排过序之后为  $b$ ，其中位数定义为  $b[n/2]$ ，其中  $a, b$  从 0 开始标号，除法取下整。
- † 给你一个长度为  $n$  的序列  $s$ 。
- † 回答  $Q$  个这样的询问： $s$  的左端点在  $[a, b]$  之间，右端点在  $[c, d]$  之间的子序列中，最大的中位数。  
其中  $a < b < c < d$ 。  
位置也从 0 开始标号。
- † 强制在线



---

# bzoj2874 训练士兵

---

- †  $n*m$  的方阵
- † 对一个矩形加上一个数
- † 查询一个矩形
- † 强制在线



---

# 可并堆 \*

---

- † 左偏树
- † 配对堆
- † 斜堆
- † 斐波拉契堆
- † Random Heap !



---

# 树链剖分

---

- † SPOJ 375 Query on a tree
- † SPOJ 913 Query on a tree 2
- † FOJ 2082 过路费
- † BZOJ 1036 树的统计
- † POJ 3237 Tree



# zjoi2008 树的统计

- † 一棵树上有  $n$  个节点，编号分别为 1 到  $n$ ，每个节点都有一个权值  $w$ 。我们将以下面的形式来要求你对这棵树完成一些操作：
- † I. CHANGE  $u\ t$ ：把结点  $u$  的权值改为  $t$
- † II. QMAX  $u\ v$ ：询问从点  $u$  到点  $v$  的路径上的节点的最大权值
- † III. QSUM  $u\ v$ ：询问从点  $u$  到点  $v$  的路径上的节点的权值和
- † 注意：从点  $u$  到点  $v$  的路径上的节点包括  $u$  和  $v$  本身



---

# HAOI2015 T2

---

- † 有一棵点数为  $N$  的树，以点 1 为根，且树点有边权。然后有  $M$  个
- † 操作，分为三种：
- † 操作 1：把某个节点  $x$  的点权增加  $a$ 。
- † 操作 2：把某个节点  $x$  为根的子树中所有点的点权都增加  $a$ 。
- † 操作 3：询问某个节点  $x$  到根的路径中所有点的点权和。



# bzoj1984 月下“毛景树”

- † 给定一个树，每条边有个边权
- † Change  $k\ w$  : 将第  $k$  条边的边权改变为  $w$  。
- † Cover  $u\ v\ w$  : 将点  $u$  与点  $v$  之间的路径的每条边的边权都改变为  $w$  。
- † Add  $u\ v\ w$  : 将点  $u$  与点  $v$  之间的路径的每条边的边权都增加  $w$  。
- † Max  $u\ v$  : 询问点  $u$  与点  $v$  之间的路径的上最大边权



---

# 动态树

---

- † 动态树问题:
- † 维护一个由若干棵子结点无序的有根树组成的森林
- † 支持对树的分割, 合并
- † 对某个点到它的根的路径的某些操作
- † 以及对某个点的子树进行的某些操作



---

# 动态树

---

- † 动态树的实现:
  - † Link-Cut tree
  - † Euler-Tour tree\*
  - † 全局平衡二叉树
  - † 树链剖分
  - † 树块剖分
- † HDU 4010 Query on The Trees
- † HDU 2475 Box







李诗懿

# 数据结构选讲



# 维护一个数组

- † 给出长度为 $n$ 的一个数列，完成 $m$ 次操作
- † 单点修改、单点询问
- † 区间修改、区间询问
- † 删除插入、区间移动



---

## 维护一个堆 \*

---



---

## 维护一棵树（或森林）

---

- † 给出大小为  $n$  的一棵树，完成  $m$  次操作
- † 查询点到根的一条路径
- † 修改一棵子树
- † 删除添加一棵子树



---

## 维护一棵仙人掌 \*

---

† 仙人掌：每条边和每个点都至多属于一个简单环的无向连通图



---

# 分块

---

- † 分块思想
- † 块状数据结构:
  - † 块状数组
  - † 块状链表
  - † 树块剖分



## 块状数组

- † 给出长度为 $n$  ( $\leq 10^5$ ) 的一个正整数数列，完成 $m$  ( $\leq 10^5$ ) 次操作，操作分为 2 种：
- †  $M\ x\ y\ k$  表示将  $[x,y]$  的数字全部修改为  $k$
- †  $Q\ x\ y\ k$  表示询问  $[x,y]$  上的最大值



## 块状链表

- † 给一个初始为空的数列，完成以下几种操作：
- †  $I\ x\ n$ ，在第 $x$ 个数前面插入 $n$ 个数；
- †  $D\ x\ n$ ，从第 $x$ 个数开始删除连续的 $n$ 个数；
- †  $Q\ x\ n$ ，输出从 $x$ 个数开始的连续 $n$ 个数的和。



## hnoi2010 弹飞绵羊

‡ 一条直线上  $n$  个装置，每个装置设定初始弹力系数  $k_i$ ，当绵羊达到第  $i$  个装置时，它会往后弹  $k_i$  步，达到第  $i+k_i$  个装置，若不存在第  $i+k_i$  个装置，则绵羊被弹飞。绵羊想知道当它从第  $i$  个装置起步时，被弹几次后会被弹飞。Lostmonkey 可以修改某个弹力装置的弹力系数，任何时候弹力系数均为正整数。

‡  $n \leq 200000, m \leq 100000$



# 树块剖分

- † 把树剖分成若干个连通块
- † 维护每个点到连通块的根的信息和
- † 如何做到根号  $n$  并且实现简单:
  - † 点到根的路径上的树块数为  $O(\sqrt{N})$
  - † 每个树块大小  $\leq \sqrt{N}$
- † 实现: 尝试合并 dfs 入栈序相邻的两个结点



---

## 树块剖分

---

- † 如何做到动态:
  - † 查询时更新
- † 好处: 修改的时候可以“奔放”地处理树块



# 分块

- † 优点：适应各种数据结构问题，代码简单，常数小
- † 缺点：理论复杂度根号  $n$



# 树状数组

- † 支持：满足区间加法区间减法
- † 修改：区间加减
- † 询问：
  - † 区间求和  $\log n$
  - † 区间求最值：暴力修改  $\log^2 n$
- † 优点：代码简单 空间小 常数低
- † 缺点：扩展性低 适用范围小



# 线段树

- † 支持：只需要满足区间加法
- † 堆式线段树 非堆式线段树
- † 自底向上线段树 自顶向下线段树
- † 自底向上堆式线段树：常数小（**zkw** 线段树）
- † 自顶向下非堆式线段树：可持久化（主席树）
- † **KD 树** \* 、**四分树** \*



---

## bzoj 3585 mex

---

- ‡ 有一个长度为  $n$  的数组  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。  $m$  次询问，每次询问一个区间内最小没有出现过的自然数。



---

# ONTAK2010 Peaks

---

- † 在 Bytemountains 有  $N$  座山峰，每座山峰有他的高度  $h_i$ 。有些山峰之间有双向道路相连，共  $M$  条路径，每条路径有一个困难值，这个值越大表示越难走，现在有  $Q$  组询问，每组询问询问从点  $v$  开始只经过困难值小于等于  $x$  的路径所能到达的山峰中第  $k$  高的山峰，如果无解输出  $-1$ 。



---

## 不知名的例题

---

- † 维护一个序列
- † 操作：给区间加上一个等差数列
- † 询问：区间最值



---

# 平衡树

---

- ‡ splay      扩展：动态树
- ‡ treap      扩展：可持久化平衡树
- ‡ 替罪羊树 \*



---

# 伸展树

---

- † 1.splay 伸展操作
- † 2.insert 插入
- † 3.delete 删除
- † 4.select(k) 查询
- † 5. 翻转
- † 6. 循环平移



---

## Hnoi2002 营业额统计

---

- † 我们知道某公司成立以来每天的营业额。
- † 经济学上定义了一种最小波动值：该天的最小波动值。分析整个公司的从成立到现在营业情况是否稳定，只需要把每一天的最小波动值加起来。你的任务就是编写一个程序来计算这一个值。
- † 第一天的最小波动值为第一天的营业额。



## Scoi2014 方伯伯的 oj

- †  $n$  个用户，编号  $1 \sim n$ ，一开始按照编号排名。维护以下操作
- †  $1\ x\ y$  将  $x$  的编号改为  $y$ ，输出该用户的排名。保证  $x$  在队列中，并且  $y$  不在队列中
- †  $2\ x$  输出编号  $x$  的排名，并将  $x$  的移到第一位
- †  $3\ x$  输出编号  $x$  的排名，并将  $x$  的移到最后一位
- †  $4\ k$  查询当前排名为  $k$  的用户的编号并输出
- † 强制在线



---

# 树套树

---

- ✦ “套”！
- ✦ “第一颗树”的结点是“第二颗树”的结点的根结点



---

## Zjoi2013 K 大数查询

---

- ‡ 有  $N$  个位置， $M$  个操作。操作有两种
- ‡  $1\ a\ b\ c$  表示在第  $a$  个位置到第  $b$  个位置，每个位置加入一个数  $c$
- ‡  $2\ a\ b\ c$  表示询问从第  $a$  个位置到第  $b$  个位置，第  $C$  大的数是多少。



---

# CTSC2008 网络管理 Network

---

- † 给定一棵树，两种操作
- † 修改一个点的权值
- † 查询一条路径的第  $K$  大



## Cqoi2011 动态逆序对

- † 对于序列  $A$ ，它的逆序对数定义为满足  $i < j$ ，且  $A_i > A_j$  的数对  $(i, j)$  的个数。给  $1$  到  $n$  的一个排列，按照某种顺序依次删除  $m$  个元素，你的任务是在每次删除一个元素之前统计整个序列的逆序对数。

## bzoj3674 可持久化并查集

- †  $n$  个集合  $m$  个操作
- † 操作:
- † 1  $a\ b$  合并  $a, b$  所在集合
- † 2  $k$  回到第  $k$  次操作之后的状态 ( 查询算作操作 )
- † 3  $a\ b$  询问  $a, b$  是否属于同一集合, 是则输出 1 否则输出 0
- † 强制在线



---

# 可持久化

---

- † 可持久化并查集
- † 可持久化块状链表
- † 可持久化线段树
- † 可持久化平衡树 \*

---

## Sdoi2013 森林

---

- † 给定一棵森林，每个点有权值，提供两种操作：
- † 1. 查询两点间路径上第  $k$  小的权值
- † 2. 将两个点之间连一条边 保证连接后仍是一座森林



---

## bzoj2653 middle

---

- † 一个长度为  $n$  的序列  $a$ ，设其排过序之后为  $b$ ，其中位数定义为  $b[n/2]$ ，其中  $a, b$  从 0 开始标号，除法取下整。
- † 给你一个长度为  $n$  的序列  $s$ 。
- † 回答  $Q$  个这样的询问： $s$  的左端点在  $[a, b]$  之间，右端点在  $[c, d]$  之间的子序列中，最大的中位数。  
其中  $a < b < c < d$ 。  
位置也从 0 开始标号。
- † 强制在线

---

## bzoj2874 训练士兵

---

- †  $n*m$  的方阵
- † 对一个矩形加上一个数
- † 查询一个矩形
- † 强制在线



---

## 可并堆 \*

---

- † 左偏树
- † 配对堆
- † 斜堆
- † 斐波拉契堆
- † Random Heap !

---

# 树链剖分

---

- † SPOJ 375 Query on a tree
- † SPOJ 913 Query on a tree 2
- † FOJ 2082 过路费
- † BZOJ 1036 树的统计
- † POJ 3237 Tree



## zjoi2008 树的统计

- † 一棵树上有  $n$  个节点，编号分别为  $1$  到  $n$ ，每个节点都有一个权值  $w$ 。我们将以下面的形式来要求你对这棵树完成一些操作：
- † I. CHANGE  $u\ t$ ：把结点  $u$  的权值改为  $t$
- † II. QMAX  $u\ v$ ：询问从点  $u$  到点  $v$  的路径上的节点的最大权值
- † III. QSUM  $u\ v$ ：询问从点  $u$  到点  $v$  的路径上的节点的权值和
- † 注意：从点  $u$  到点  $v$  的路径上的节点包括  $u$  和  $v$  本身

---

# HAOI2015 T2

---

- † 有一棵点数为  $N$  的树，以点 1 为根，且树点有边权。然后有  $M$  个
- † 操作，分为三种：
- † 操作 1：把某个节点  $x$  的点权增加  $a$ 。
- † 操作 2：把某个节点  $x$  为根的子树中所有点的点权都增加  $a$ 。
- † 操作 3：询问某个节点  $x$  到根的路径中所有点的点权和。



## bzoj1984 月下“毛景树”

- † 给定一个树，每条边有个边权
- † **Change  $k\ w$**  : 将第  $k$  条边的边权改变为  $w$  。
- † **Cover  $u\ v\ w$**  : 将点  $u$  与点  $v$  之间的路径的每条边的边权都改变为  $w$  。
- † **Add  $u\ v\ w$**  : 将点  $u$  与点  $v$  之间的路径的每条边的边权都增加  $w$  。
- † **Max  $u\ v$**  : 询问点  $u$  与点  $v$  之间的路径的上最大边权

---

# 动态树

---

- ‡ 动态树问题:
- ‡ 维护一个由若干棵子结点无序的有根树组成的森林
- ‡ 支持对树的分割, 合并
- ‡ 对某个点到它的根的路径的某些操作
- ‡ 以及对某个点的子树进行的某些操作



---

# 动态树

---

- † 动态树的实现:
  - † Link-Cut tree
  - † Euler-Tour tree\*
  - † 全局平衡二叉树
  - † 树链剖分
  - † 树块剖分
- † HDU 4010 Query on The Trees
- † HDU 2475 Box

