

李诗懿

动态规划选讲

DP 优化
几类特殊的 DP 问题

DP 优化

- † 利用数据结构维护：线段树、平衡树、单调队列等
- † 斜率优化
- † 决策单调、四边形优化
- † 1d1d
- † 凸完全单调性

SHOI2008 仙人掌图

† 求一棵仙人掌的直径

单调队列优化

- † 一般形式: $f[i] = \min\{f[j]\} + a[i] (l[i] < j < r[i])$
- † $l[i], r[i]$ 单调
- † 维护方式: 合法的队头更新 $f[i]$, 再将 $f[i]$ 加入队尾

hdu 3401 Trade

- † 一个人知道接下来 T 天的股市行情，想知道最终他最多能赚到多少钱。对于第 i 天，买入单价为 a_i ，卖出单价为 b_i ，买入上限为 c_i ，卖出上限为 d_i 。每次操作后 W 天内不能进行操作。并且任何时候手上股票不能超过 K 股。规定最初钱无限多，持有股 0 支。
- † $T, W, K, a_i, b_i, c_i, d_i \leq 2000$

bzoj2096 Pilots

- † Tz 设定了一个难度差的最大值，在序列中他想找到一个最长的子串，任意两个难度差不会超过他设定的最大值
- † 求最大的子串长度

HAOI2007 理想的正方形

- † 有一个 $a*b$ 的整数组成的矩阵，现请你从中找出一个 $n*n$ 的正方形区域，使得该区域所有数中的最大值和最小值的差最小。
- † $a,b \leq 1000, n \leq 100$

† 当 $l[i], r[i]$ 不单调的时候怎么办?

† 线段树

z oj3349

- † 给出一个序列，找出一个最长的子序列，相邻的两个数的差在 d 以内。

斜率优化

- † $f[i] = a[i] * b[j] + c[j] (j < i)$
- † 维护一个凸包: $b[j]$ 单调用单调队列维护, 不单调用平衡树维护
- † 求解: $a[i]$ 单调则解单调, $a[i]$ 不单调则二分求解

hnoi2008 玩具装箱

† 题面略

† $n \leq 5 \times 10^4$ 。

Zjoi2007 仓库建设

- † n 个工厂，每个工厂有成品 p_i ，在该处建立仓库的费用为 c_i ，假设每个仓库的容量无限大。
- † 现需要将所有成品运到仓库，只能往编号大的地方运输
- † 一件产品运送 1 个单位距离的费用是 1
- † 问最小费用

决策单调性优化

- † 就题论题，分析性质
- † $f[i] = \text{cal}(j) + a[i]$
- † i 单增， j 单增

四边形优化 *

1d1d 优化 *

按位 DP

- † 求区间 $[A,B]$ 之间满足某种性质的个数、最值
- † 思路: $F[B]-F[A]$
- † 状态: $f[pos][d][u][last][state]$
- † eg. 单峰数

scoi2009 windy 数

- ✦ 求给定区间范围内的，求相邻数位之差绝对值不小于 2 的数的个数

scoi2012 blinker 的仰慕者

- † Blinker 有非常多的仰慕者，他给每个仰慕者一个正整数编号。而且这些编号还隐藏着特殊的意义，即编号的各位数字之积表示这名仰慕者对 Blinker 的重要度。现在 Blinker 想知道编号介于某两个值 A, B 之间，且重要度为某个定值 K 的仰慕者编号和。

Scoi2011 镜像拆分

- † 一个数表示成两个相互反转的数之和，这个现象称为数的“镜像拆分”
- † 注意，前导 0 是不允许的，所以 $66 = 60 + 06$ 不算做合法的镜像拆分。
- † 在 K 进制下，对于在 $[A, B]$ 区间内的数，其镜像拆分的方案数之和是多少
- † $2 \leq K \leq 100000$ ， $1 \leq A, B$ 的长度 ≤ 100000

状压 DP

codeforces580D Kefa and Dishes

- † 共有 n 个物品，需要拿走 m 个，每个物品有个价值 w_i 。
- † 有 k 个规则，拿了 x_i 之后接着拿 y_i 可以多获得 v_i 。
- † 问获得的最大价值是多少。
- † $1 \leq m \leq n \leq 18, k \leq n * (n-1)$

插头 DP

- ✦ 轮廓线扫描
- ✦ 对轮廓线上每个格子上的插头进行状压

scoi2011 地板

- † 求用 L 型的地板铺满 $n*m$ 个格子有坏点的地面的方案数
- † $n*m \leq 100$

树形 DP

✚ 略

AC 自动机上的 DP

✦ 略

李诗懿

动态规划选讲

DP 优化
几类特殊的 DP 问题

DP 优化

- † 利用数据结构维护：线段树、平衡树、单调队列等
- † 斜率优化
- † 决策单调、四边形优化
- † 1d1d
- † 凸完全单调性

SHOI2008 仙人掌图

† 求一棵仙人掌的直径

单调队列优化

- † 一般形式: $f[i] = \min\{f[j]\} + a[i] (l[i] < j < r[i])$
- † $l[i], r[i]$ 单调
- † 维护方式: 合法的队头更新 $f[i]$, 再将 $f[i]$ 加入队尾

hdu 3401 Trade

‡ 一个人知道接下来 T 天的股市行情，想知道最终他最多能赚到多少钱。对于第 i 天，买入单价为 a_i ，卖出单价为 b_i ，买入上限为 c_i ，卖出上限为 d_i 。每次操作后 W 天内不能进行操作。并且任何时候手上股票不能超过 K 股。规定最初钱无限多，持有股 0 支。

‡ $T, W, K, a_i, b_i, c_i, d_i \leq 2000$

bzoj2096 Pilots

- † Tz 设定了一个难度差的最大值，在序列中他想找到一个最长的子串，任意两个难度差不会超过他设定的最大值
- † 求最大的子串长度

HAOI2007 理想的正方形

- † 有一个 $a \times b$ 的整数组成的矩阵，现请你从中找出一个 $n \times n$ 的正方形区域，使得该区域所有数中的最大值和最小值的差最小。
- † $a, b \leq 1000, n \leq 100$

† 当 $l[i], r[i]$ 不单调的时候怎么办?

† 线段树

zsj3349

- † 给出一个序列，找出一个最长的子序列，相邻的两个数的差在 d 以内。

斜率优化

- † $f[i] = a[i] * b[j] + c[j] (j < i)$
- † 维护一个凸包: $b[j]$ 单调用单调队列维护, 不单调用平衡树维护
- † 求解: $a[i]$ 单调则解单调, $a[i]$ 不单调则二分求解

hnoi2008 玩具装箱

† 题面略

† $n \leq 5 \times 10^4$ 。

Zjoi2007 仓库建设

- † n 个工厂，每个工厂有成品 p_i ，在该处建立仓库的费用为 c_i ，假设每个仓库的容量无限大。
- † 现需要将所有成品运到仓库，只能往编号大的地方运输
- † 一件产品运送 1 个单位距离的费用是 1
- † 问最小费用

决策单调性优化

- † 就题论题，分析性质
- † $f[i] = \text{cal}(j) + a[i]$
- † i 单增， j 单增

四边形优化 *

1d1d 优化 *

按位 DP

- † 求区间 $[A,B]$ 之间满足某种性质的个数、最值
- † 思路: $F[B]-F[A]$
- † 状态: $f[pos][d][u][last][state]$
- † eg. 单峰数

scoi2009 windy 数

- † 求给定区间范围内的，求相邻数位之差绝对值不小于 2 的数的个数

scoi2012 blinker 的仰慕者

- † **Blinker** 有非常多的仰慕者，他给每个仰慕者一个正整数编号。而且这些编号还隐藏着特殊的意义，即编号的各位数字之积表示这名仰慕者对 **Blinker** 的重要度。现在 **Blinker** 想知道编号介于某两个值 A, B 之间，且重要度为某个定值 K 的仰慕者编号和。

Scoi2011 镜像拆分

- † 一个数表示成两个相互反转的数之和，这个现象称为数的“镜像拆分”
- † 注意，前导 0 是不允许的，所以 $66 = 60 + 06$ 不算做合法的镜像拆分。
- † 在 K 进制下，对于在 $[A, B]$ 区间内的数，其镜像拆分的方案数之和是多少
- † $2 \leq K \leq 100000$ ， $1 \leq A, B$ 的长度 ≤ 100000

状压 DP

codeforces580D Kefa and Dishes

- † 共有 n 个物品，需要拿走 m 个，每个物品有个价值 w_i 。
- † 有 k 个规则，拿了 x_i 之后接着拿 y_i 可以多获得 v_i 。
- † 问获得的最大价值是多少。
- † $1 \leq m \leq n \leq 18, k \leq n \cdot (n-1)$

插头 DP

- ✦ 轮廓线扫描
- ✦ 对轮廓线上每个格子上的插头进行状压

scoi2011 地板

- † 求用 L 型的地板铺满 $n*m$ 个格子有坏点的地面的方案数
- † $n*m \leq 100$

树形 DP

✦ 略

AC 自动机上的 DP

† 略