分块、莫队与 cdq 分治搞搞

东北师大附中 neither_nor

目录

- 普通分块
- 树上分块
- 莫队
- 莫队的各种变种
- cdq 分治

- 对于序列上的问题,如果我们能高效地处理修改对区间信息的影响,并高效地合并区间信息,那么我们可以使用线段树解决,而如果我们无法高效地合并区间信息,我们就要使用分块算法
- 故名思议,把整个序列分成若干块,每块大小为S
- 在修改时,对整块打标记,对两端零散的点暴力修改,询问时整块直接查询块信息,两端零散的暴力查询
- 一般一次修改 / 询问的复杂度是 O(S+N/S) 或 O(S log N+N/S log N) 的
- 所以一般 S 取根号 N 为最优
- 另外,分块算法还经常应用于强制在线的题目当中

• 简单的应用:长度为 N 的序列,区间加单点查询,查询次数特别多所以要求修改 <= 根号 n,查询 O(1)

- BZOJ3343 教主的魔法
- 教主最近学会了一种神奇的魔法,能够使人长高。于是他准备演示给 XMYZ 信息组每个英雄看。于是 N 个英雄们又一次聚集在了一起,这次他们排成了一列,被编号为1、2、.....、N。
- 每个人的身高一开始都是不超过 1000 的正整数。教主的魔法每次可以把闭区间 [L, R] ($1 \le L \le R \le N$)内的英雄的身高全部加上一个整数 W 。(虽然 L = R 时并不符合区间的书写规范,但我们可以认为是单独增加第 L (R)个英雄的身高)
- CYZ、光哥和 ZJQ 等人不信教主的邪,于是他们有时候会问 WD 闭区间 [L, R] 内有多少英雄身高大于等于 C,以验证教主的魔法是否真的有效。
- WD 巨懒,于是他把这个回答的任务交给了你。
- N≤1000000 , 操作数 <=4000

- 2724: [Violet 6] 蒲公英
- 强制在线询问区间众数

- BZOJ2906 颜色
- 给定一个长度为 N 的颜色序列 C , 对于该序列中的任意一个元素 Ci , 都有 1<=Ci<=M。对于一种颜色 ColorK 来说,区间 [L,R] 内的权值定义为这种颜色在该区间中出现的次数的平方,即区间 [L,R] 内中满足 Ci=ColorK 的元素个数的平方。接下来给出 Q 个询问,询问区间 [L,R] 内颜色 [a,b] 的权值总和。

树分块

- 网上有很多的树分块方法,不过多数都听着就不太靠谱,不过还是能 A 题
- 这里就介绍一种靠谱的分块方法,由邹逍遥在 2015 年集训队论文中提出先选定块大小 S , 然后选定所有深度 %S 等于 1 , 并且子树大小 >=S 的点作为关键点
- 每个点所属的块就是他往上找第一关键点的块
- 这种方法无法保证块的大小,不过可以保证块内任意两点间距离是 O(S) 的,并且相邻两块之间的点的距离也是 O(S) 的(两块相邻指关键点之间的路径上没有其它关键点)

树分块

- 具体应用主要在于树上莫队,等会介绍
- 邹逍遥的论文里提到了一些不是莫队的树分块的题目,比较复杂,有兴趣的同学可以去看看,如果对各种分块感兴趣也可以去看一下他的论文,还有很多其他的东西

- 莫队并不是什么队列数据结构,是一个叫莫涛的人发明的算法,之所以叫莫队是因为他 是国家队队长
- 莫队算法其实很傻逼,现在我们有一堆询问,每次询问一个区间里的信息,我们把序列 分块然后离线,把所有询问以左端点所在块为第一关键字,右端点为第二关键字排序, 然后每次暴力跳左右端点令当前区间变成下一个询问区间,并同时维护当前区间的信息 和
- 可以证明左右端点的移动次数和是不超过 O(n 根号 n) 的 (假设 n,m 同阶)

- BZOJ2038 [2009 国家集训队] 小 Z 的袜子 (hose)
- 作为一个生活散漫的人,小 Z 每天早上都要耗费很久从一堆五颜六色的袜子中找出一 双来穿。终于有一天,小 Z 再也无法忍受这恼人的找袜子过程,于是他决定听天由命...

具体来说,小 Z 把这 N 只袜子从 1 到 N 编号,然后从编号 L 到 R(L 尽管小 Z 并不在意两只袜子是不是完整的一双,甚至不在意两只袜子是否一左一右,他却很在意袜子的颜色,毕竟穿两只不同色的袜子会很尴尬。

你的任务便是告诉小 Z ,他有多大的概率抽到两只颜色相同的袜子。当然 , 小 Z 希望这个概率尽量高 , 所以他可能会询问多个 (L,R) 以方便自己选择。

• 3236: [Ahoi2013] 作业

此时已是凌晨两点,刚刚做了 Codeforces 的小 A 掏出了英语试卷。英语作业 其实不算多,一个小时刚好可以做完。然后是一个小时可以做完的数学作业,接 下来是分别都是一个小时可以做完的化学,物理,语文......小 A 压力巨大。

这是小 A 碰见了一道非常恶心的数学题,给定了一个长度为 n 的数列和若干个询问,每个询问是关于数列的区间[l,r](表示数列的第1个数到第 r 个数),首先你要统计该区间内大于等于 a,小于等于 b 的数的个数,其次是所有大于等于 a,小于等于 b 的,且在该区间中出现过的数值的个数。

小 A 望着那数万的数据规模几乎绝望,只能向大神您求救,请您帮帮他吧。

- 树上莫队
- 树分块,然后把询问排序
- 假设当前询问 x 到 y 的路径, 那么我们先把所有 x 到 y 的路径上除了 lca(x,y) 以外的点的信息和搞出来
- 然后把 lca(x,y) 加入,记录答案,再把 lca(x,y) 删除
- 为什么要把 Ica 单独搞呢,为了转移方便
- 一个端点从 x 转移到 a 的时候,把 x 到 a 的路径上除了 x 和 a 的 lca 以外的点的状态都取反即可
- 不管你用什么鬼畜的分块方法反正应该都是能过的

- 带修改莫队
- 要求修改可以回滚,即知道修改之后的状态和修改能回到修改之前的状态
- 查询按x所在块为第一关键字, y所在块为第二关键字,时间为第三关键字排序,修改按时间排序,然后在扫查询的时候每次走完x和y再走时间,该更改的更改,该回滚的回滚,块的大小取 n^(2/3),复杂度为 n^(5/3)

• BZOJ3052 [wc2013] 糖果公园

Candyland 有一座糖果公园,公园里不仅有美丽的风景、好玩的游乐项目,还有许多免费糖果的发放点,这引来了许多贪吃的小朋友来糖果公园游玩。

糖果公园的结构十分奇特,它由n个游览点构成,每个游览点都有一个糖果发放处,我们可以依次将游览点编号为1至n。有n-1条X0向道路连接着这些游览点,并且整个糖果公园都是<u>连通的</u>,即从任何一个游览点出发都可以通过这些道路到达公园里的所有其它游览点。

糖果公园所发放的糖果种类非常丰富,总共有m种,它们的编号依次为1至m。每一个糖果发放处都只发放某种特定的糖果,我们用 C_i 来表示i号游览点的糖果。

来到公园里游玩的游客都*不喜欢走回头路*,他们总是从某个特定的游览点出发前往另一个特定的游览点,并游览途中的景点,这条路线一定是唯一的。他们经过每个游览点,都可以品尝到一颗对应种类的糖果。

大家对不同类型糖果的喜爱程度都不尽相同。根据游客们的反馈打分,我们得到了糖果的美味指数,第i种糖果的美味指数为 V_i 。另外,如果一位游客反复地品尝同一种类的糖果,他肯定会觉得有一些腻。根据量化统计,我们得到了游客第i次品尝某类糖果的新奇指数 W_i 。如果一位游客第i次品尝第j种糖果,那么他的愉悦指数H将会增加对应的美味指数与新奇指数的乘积,即 V_iW_i 。这位游客游览公园的愉悦指数最终将是这些乘积的和。

当然,公园中每个糖果发放点所发放的糖果种类不一定是一成不变的。有时,一些糖果点所发放的糖果种类可能会更改(也只会是 m 种中的一种),这样的目的是能够让游客们总是感受到惊喜。

糖果公园的工作人员小 A 接到了一个任务,那就是*根据公园最近的数据统计出每位游客游玩公园的愉悦指数*。但数学不好的小 A 一看到密密麻麻的数字就觉得头晕,作为小 A 最好的朋友,你决定帮他一把。

回滚莫队:用于处理难以删除但是易于添加(其实易于删除难以添加也可以,但是没见过这样题-_-)的莫队,排序照常,如果左右端点在同一块直接暴力,这部分最多 n sqrt n,否则把左端点在一块的一起处理,清空莫队,然后直接令莫队左端点在块尾,这部分 n sqrtn,右端点照常走,这部分 n sqrtn,左端点每次走的时候记录更改了哪些量,走到地方记录完答案把修改回滚回去,这部分也是 n sqrtn,所以复杂度还是根号的,但是把删除干掉了

• 蒲公英

- BZOJ4241 历史研究
- IOI 国历史研究的第一人—— JOI 教授,最近获得了一份被认为是古代 IOI 国的住民写下的日记。 JOI 教授为了通过这份日记来研究古代 IOI 国的生活,开始着手调查日记中记载的事件。
- 日记中记录了连续 N 天发生的时间, 大约每天发生一件。
- 事件有种类之分。第 i 天 (1<=i<=N) 发生的事件的种类用一个整数 Xi 表示 , Xi 越大 , 事件的规模就越大。
- JOI 教授决定用如下的方法分析这些日记:
- 1. 选择日记中连续的一些天作为分析的时间段
- 2. 事件种类 t 的重要度为 t*(这段时间内重要度为 t 的事件数)
- 3. 计算出所有事件种类的重要度,输出其中的最大值
- 现在你被要求制作一个帮助教授分析的程序,每次给出分析的区间,你需要输出重要度的最大值。

• 当然啦,这道题用分块也能做

- 又名按时间分治,用于处理一些可以离线,修改直接相互独立,且如果所有修改都在询问前边会好做的问题
- 基本套路是,根据时间分成左右两边,递归左边,处理左边对右边的影响,递归右边

原问题如果修改都在询问前边会比较好做,一般套路是把修改和询问按照某些东西排序,然后扫一遍并用一些数据结构维护

• 二维最长上升子序列

- 按 x 排序,按 y 分到左右两边,递归左边,按 z 维护一个树状刷组,左右两边同时扫并时刻保证左边的 x <= 右边的 x
- 然后递归右边

• 3262: 陌上花开

• 有 n 朵花,每朵花有三个属性:花形 (s)、颜色 (c)、气味 (m),又三个整数表示。现要对每朵花评级,一朵花的级别是它拥有的美丽能超过的花的数量。定义一朵花 A 比另一朵花 B 要美丽,当且仅当 Sa>=Sb,Ca>=Cb,Ma>=Mb。显然,两朵花可能有同样的属性。需要统计出评出每个等级的花的数量。

- BZOJ4553 [Tjoi2016&Heoi2016] 序列
- 佳媛姐姐过生日的时候,她的小伙伴从某宝上买了一个有趣的玩具送给他。玩具上有一个数列,数列中某些项的值
- 可能会变化,但同一个时刻最多只有一个值发生变化。现在佳媛姐姐已经研究出了所有 变化的可能性,她想请教你
- ,能否选出一个子序列,使得在任意一种变化中,这个子序列都是不降的?请你告诉她 这个子序列的最长长度即可
- 。注意:每种变化最多只有一个值发生变化。在样例输入1中,所有的变化是:
- 123
- 223
- 133
- 113124
- 选择子序列为原序列,即在任意一种变化中均为不降子序列在样例输入2中,所有的变化是:3333353443553563563573663673
- 为第一个元素和第三个元素,或者第二个元素和第三个元素,均可满足要求

- 对于序列上的问题,如果我们能高效地处理修改对区间信息的影响,并高效地合并区间信息,那么我们可以使用线段树解决,而如果我们无法高效地合并区间信息,我们就要使用分块原法
 故名思议,把整个序列分成若干块,每块大小为 S
 在修改时,对整块打标记,对两端零散的点暴力修改,询问时整块直接查询块信息,两端零散的影力直询
 一般一次修改(询问的复杂度是 O(S+N/S)或 O(S log N+N/S log N)的
 所以一般 S 取根号 N 为最优
 另外,分块算法还经常应用于强制在线的题目当中

分块 ・ 简单的应用:长度为 N 的序列,区间加单点查询,查询次数特别多所以要求修改 <= 根号 n ,查询 O(1)

分块 - 2724: [Violet 6] 藩公英 - 强制在线询问区间众数

- BZOJ2906 颜色
 给定一个长度为 N 的颜色序列 C ,对于该序列中的任意一个元素 Ci ,都有 1<=(Ci<+M、 对于一种颜色 ColorK 来说, 医间 L. I. R 内的双值定义为这种颜色在该区间中出现的效数的平方,即区间 L. R. I. P. A. 是 Ci = ColorK 的元素个数的平方。接下来给出 Q 个询问,询问区间 [L. R] 内颜色 [a. b] 的权值总和。

树分块

- 网上有很多的树分块方法,不过多数都听着就不太需谱,不过还是能 A 题
 这里就介绍一种鼎谱的分块方法,由部逍遥在 2015 年集训队论文中提出先选定块大小 S,然后选定所有深度 %S 等于 1,并且子树大小 >= S 的点作为关键点
 每个点点面的块就是他往上找第一关键点的块
 这种方法无法保证块的大小,不过可以保证块内任意两点间距离是 O(S)的,并且相邻两块之间的点的距离也是 O(S)的(两块相邻指关键点之间的路径上没有其它关键点)

树分块

- 具体应用主要在于树上莫队,等会介绍
 邹逍遥的论文里提到了一些不是莫队的树分块的题目,比较复杂,有兴趣的同学可以去 看看,如果对各种分块感兴趣也可以去看一下他的论文,还有很多其他的东西

- BZOJ2038 [2009 国家集训队] 小 Z 的林子 (hose)
 作为一个生活散漫的人,小 Z 每天早上都要耗费很久从一堆五颜六色的林子中找出一双来穿。终于有一天,小 Z 再也无法忍受这恼人的找袜子过程,于是他决定听天由命...

… 具体来说,小Z把这N只袜子从1到N编号,然后从编号L到R(L 民管小Z并不在意 两只袜子是不是完整的一双,甚至不在意两只袜子是否一左一右,他却很在意袜子的颜 也,毕竟穿两只不同色的袜子会很尴尬。 你的任务便是有诉小Z,他有多大的概率推到两只颜色相同的袜子。当然,小Z希望 这个概率尽量高,所以他可能会询问多个(LR)以方便自己选择。

• 3236: [Ahoi2013] 作业

此时已是凌晨两点,刚刚做了 Codeforces 的小 A 掏出了英语试卷。英语作业 其实不算多,一个小时刚好可以做完。然后是一个小时可以做完的数学作业,接 下来是分别都是一个小时可以做完的化学,物理,语文……小 A 压力巨大。

这是小 A 碰见了一道非常恶心的数学题.给定了一个长度为 n 的数列和若干个询问,每个询问是关于数列的区间[I,r](表示数列的第 l 个数到第 r 个数),首先你要统计该区间内大于等于 a,小于等于 b 的数的个数,其次是所有大于等于 a,小于等于 b 的,且在该区间中出现过的数值的个数。

小 A 望着那数万的数据规模几乎绝望,只能向大神您求救,请您帮帮他吧。

- 树上莫队
 树上莫队
 树分块,然后把询问排序
 树分块,然后把询问排序
 假设当前询问 到 y 的路径,那么我们先把所有 x 到 y 的路径上除了 lca(x,y) 以外的点的信息和隔出来
 然后把 lca(x,y) 加入,记录答案,再把 lca(x,y) 删除
 为什么要把 ca 单独搞呢,为了转移方便
 一个端点从 转移到 a 的时候,把 x 到 a 的路径上除了 x 和 a 的 lca 以外的点的状态都 取反即可
 不管你用什么鬼畜的分块方法反正应该都是能过的

- 带修改模队
 要求修改可以回滚,即知道修改之后的状态和修改能回到修改之前的状态
 查询按太阳在块为第一关键字,以所在块为第二关键字,时间为第三关键字排序,修改按时间排序、然后在扫查询的的接条次走完、和,再走时间,该更改的更改,该回滚的回滚,块的大小取 n^(2/3) ,复杂度为 n^(5/3)

• BZOJ3052 [wc2013] 糖果公园

• 回滚模队:用于处理难以删除但是易于添加(其实易于删除难以添加也可以,但是没见过这样题-_)的模队,排序照常,如果左右端点在同一块直接要力,这部分最多而。sqrtn,方则把左端点在一块的一起处理,清空莫队,然后直接令莫队在端点在块尾,这部分n sqrtn,方端点每次走的时候记录更改了哪些量,走到此方记录完高案把修改回滚回去,这部分也是n sqrtn,所以复杂度还是根号的,但是把删除干掉了



- BZOJ4241 历史研究
 IOI 國历史研究的第一人—— JOI 教授,最近获得了一份被认为是古代 IOI 国的住民写下的日记。JOI 教授为了通过这份日记来研究古代 IOI 国的生活,开始着手调查日记中记载的事件。
 日记中记录了连续 N 天发生的时间,大约每天发生一件。
 事件有种类之分。第 i 天(1c=ic=N)发生的事件的种类用一个整数 XI 表示,XI 超大,事件的规模成越太。
 JOI 教授交用知下的方法分析这些日记:
 1. 选择日记中连续的一些天作为分析的时间段
 2. 事件种类:的重要度为 t'(这段时间内重要度为 t 的事件数)
 3. 计算出所有事件种类的重要度,输出算定的发表值
 现在你被要求制作一个帮助教授分析的程序,每次给出分析的区间,你需要输出重要度的最大值。



cdq 分治

- 又名按时间分治,用于处理一些可以离线,修改直接相互独立,且如果所有修改都在询问前边会抒俄的问题
 基本套路是,根据时间分成左右两边,递归左边,处理左边对右边的影响,递归右边

cdq 分治 - 原问题如果修改都在询问前边会比较好做,一般客路是把修改和询问按照某些东西排序,然后扫一遍并用一些数据结构维护

• 二维最长上升子序列	cdq 分治	

Cdq 分治 • 按x排序,按y分到左右两边,递归左边,按z维护一个树状刷组,左右两边同时扫并时刻保证在边的x= 右边的x • 然后递归右边

cdq 分治

- 3262: 陌上花开
 有 n 朵花,每朵花有三个属性:花形(s)、颜色(c)、气味(m),又三个整数表示。现要对每朵花评览,一朵花的级别是它拥有的美丽能超过的花的数量。定义一朵花 A 比另一朵花 B 製製商,当且仅当 Sa > Sh Ca >= Cb Ma >= Mb。显然,两朵花可能有同样的属性。需要统计出评出每个等级的花的数量。

cdq 分治

- BZOJ4553 [Tjol20168.Heol2016] 序列
 性援期阻立生日的时候,她的小伙伴从某宝上买了一个有趣的玩具送给他。玩具上有一个数列,数列中某些项的值
 可能会变化。但同一个中刻则最多只有一个值发生变化。现在佳媛姐姐已经研究出了所有变化的可能性,她想请教你
 能否选出一个子房列,使得在任意一种变化中,这个子序列都是不降的?请你告诉她这个子序列的最长长度回
 。 注意:每种变化最多只有一个值发生变化。在样例输入1中,所有的变化是:
 123
 223

- 223

- 123
 113124
 选择子序列为原序列,即在任意一种变化中均为不降子序列在样例输入2中,所有的变化是。333323选择子序列
 为第一个元素和第三个元素,或者第二个元素和第三个元素,均可满足要求