Irrigation Channel

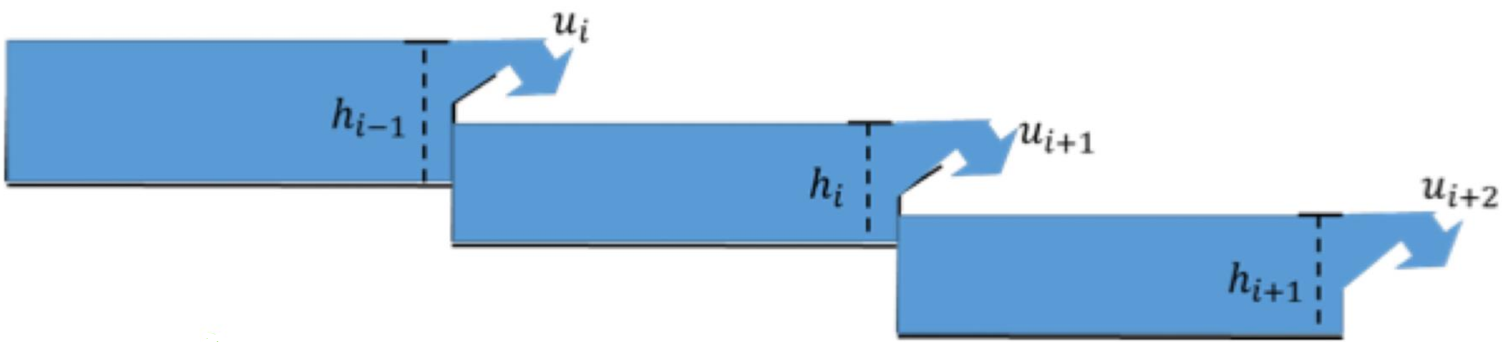
Gabriele Ribolla
ID.10617369

Descrizione sistema:

x

Il sistema è definito da 5 vasche connesse in cascata.

Considerando la i-esima vasca la situazione è la seguente



- h_i = livello dell'acqua nella vasca
- u_{i+1}= flusso d'acqua uscente dalla vasca
- u_i = flusso d'acqua entrante nella vasca

Descrizione modello:

x

La dinamica del livello dell'acqua per la singola vasca può essere espressa usando l' equazione di Saint-Venant:

$$h_i(k+1) = h_i(k) + \left(\frac{\tau_s}{a_i}\right) * \left(u_i(k-k_i)\right) - u_{i+1}(k)$$

- τ_s = tempo di campionamento
- a_i = area superficiale della vasca
- K_i = steps di ritardo del flusso d'acqua in ingresso rispetto all'istante k

Decomposizione:

Il ritardo dato da k_i, introduce # k_i variabili addizionali usate per descrivere il sistema nella state-space representation per il tempo discreto.

Ad esempio per la prima vasca. $k_1 = 2$, questo implica che

$$h_1(k+1) = h_1(k) + \left(\frac{\tau_s}{a_1}\right) * \left(u_1(k-2)\right) - u_2(k)$$

E dunque l'introduzione di :

$$v_1(k) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_1(k-2) \rightarrow v_1(k+1) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_1(k-1) = v_2(k)$$

$$v_2(k) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_1(k-1) \rightarrow v_2(k+1) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_1(k)$$

Decomposizione:

In modo tale da ottenere il seguente modello per la vasca 1:

$$h_1(k+1) = h_1(k) + v_1(k) - \frac{\tau_s}{a_1} * u_2(k)$$
$$v_1(k+1) = v_2(k)$$
$$v_2(k+1) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_1(k)$$

Dove

- h_1, v_1, v_2 sono gli stati che rapprensentano la vasca 1
- u_1 e u_2 rapprensentano gli ingressi e le uscite della vasca 1

Decomposizione:

In forma matriciale avremo :

$$\begin{vmatrix} h_1(k+1) \\ v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} h_1(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\tau_s}{a_1} \end{vmatrix} * u_1(k) + \begin{vmatrix} -\frac{\tau_s}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} * u_2(k)$$

$$x(k+1) = Fc_1 * x(k) + Gc_{1,1} * u_1(k) + Gc_{1,2} * u_2(k)$$

Dove

- $x(k)$ = state vector
- Fc_1 = matrice degli stati della vasca 1
- $Gc_{1,1}$ = matrice della vasca 1 relativa all'ingresso u1
- $Gc_{1,2}$ = la matrice della vasca 1 relativa all' ingresso u2 (uscita per il sistema rispetto alla vasca 1)

Decomposizione:

Per quanto riguarda le uscite della vasca 1, ipotizzando che tutti gli stati siano misurati, avremo :

$$\begin{vmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} h_1(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \end{vmatrix}$$

Dunque iterando la procedura anche alle altre vasche si ottiene un sistema con 20 stati, 20 uscite e 5 ingressi che può essere visto come :

$$x(k+1) = F * x(k) + G_i * u_i(k) \quad i = 1 \; \ldots\ldots N$$
$$y_i(k) = H_i * x(k) \quad i = 1 \; \ldots\ldots N$$

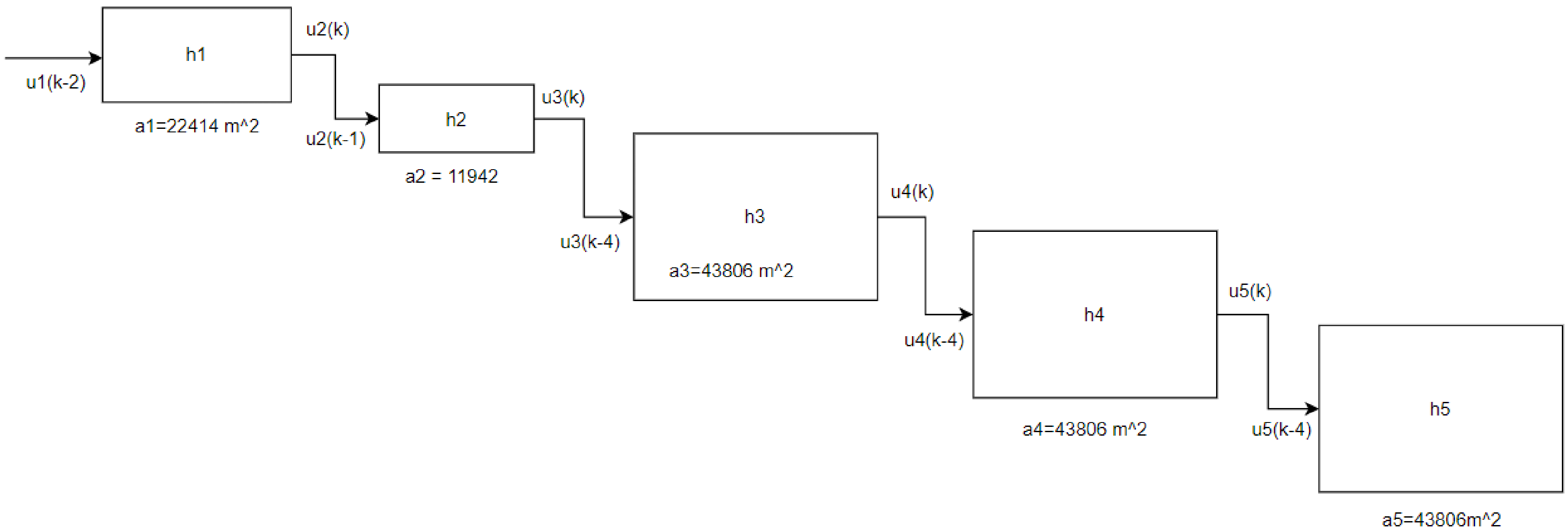
Dove

- F = matrice 20x20
- G_i = matrice 20x $\#u_i$,che dipende dalla presenza dell' ingresso u_i
- H_i = matrice $\#p_i$ x 20 , dove pi è il numero di uscite di quella vasca (nel caso in cui gli stati sono tutti misurati il numero di uscite sono uguali al numero di stati di quella vasca)

Rappresentazione sistema completo:

k=[2 1 4 4 4]

alpha=[22414,11942,43806,43806,43806] m^2



Tutti gli stati, evidenziando quelli relativi ai livelli d'acqua delle vasche →

Pool 1

- $x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - \frac{\tau_s}{a_1} * u_2(k) = \mathrm{h}_1(\mathrm{k}+1) = \mathrm{y}_1$
- $x_2(k+1) = x_3(k) = y_2$
- $x_3(k+1) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_1(k) = y_3$

Pool 2

- $x_4(k+1) = x_4(k) + x_5(k) - \frac{\tau_s}{a_1} * u_3(k) = \mathrm{h}_2(\mathrm{k}+1) = \mathrm{y}_4$
- $x_5(k+1) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_2(k) = \mathrm{y}_5$

Pool 3

- $x_6(k+1) = x_6(k) + x_7(k) - \frac{\tau_s}{a_1} * u_4(k) = \mathrm{h}_3(\mathrm{k}+1) = \mathrm{y}_6$
- $x_7(k+1) = x_8(k) = \mathrm{y}_7$
- $x_8(k+1) = x_9(k) = \mathrm{y}_8$
- $x_9(k+1) = x_{10}(k) = \mathrm{y}_9$
- $x_{10}(k+1) = \frac{\tau_s}{a_1} * u_3(k) = \mathrm{y}_{10}$

Tutti gli stati, evidenziando quelli relativi ai livelli d'acqua delle vasche X

Pool 4

- $x_{11}(k+1) = x_{11}(k) + x_{12}(k) - \frac{\tau_s}{a_4} * u_5(k) = \mathrm{h}_4(\mathrm{k}+1) = \mathrm{y}_{11}$
- $x_{12}(k+1) = x_{13}(k) = \mathrm{y}_{12}$
- $x_{13}(k+1) = x_{14}(k) = \mathrm{y}_{13}$
- $x_{14}(k+1) = x_{15}(k) = \mathrm{y}_{14}$
- $x_{15}(k+1) = \frac{\tau_s}{a_4} * u_4(k) = \mathrm{y}_{15}$

Pool 5

- $x_{16}(k+1) = x_{16}(k) + x_{17}(k) = \mathrm{h}_5(\mathrm{k}+1) = \mathrm{y}_{16}$
- $x_{17}(k+1) = x_{18}(k) = \mathrm{y}_{17}$
- $x_{18}(k+1) = x_{19}(k) = \mathrm{y}_{18}$
- $x_{19}(k+1) = x_{20}(k) = \mathrm{y}_{19}$
- $x_{20}(k+1) = \frac{\tau_s}{a_5} * u_5(k) = \mathrm{y}_{20}$

Rappresentazione matriciale:

X(k+1) =

Gtot | F | H

20x20 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

*X(k) +

Gtot | F

20x5 double

	1	2	3	4	5
1	0	-1.7846e-04	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1.7846e-04	0	0	0	0
4	0	0	-3.3495e-04	0	0
5	0	3.3495e-04	0	0	0
6	0	0	0	-9.1312e-05	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	9.1312e-05	0	0
11	0	0	0	0	-9.1312e-05
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	9.1312e-05	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	9.1312e-05

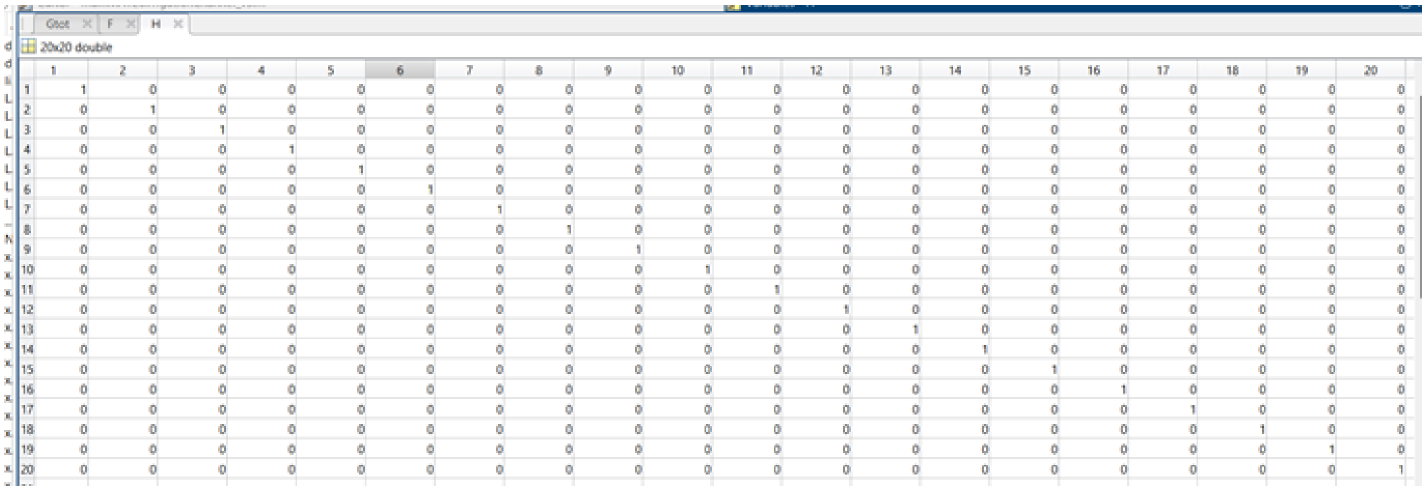
*U(k)

X(K) = $[x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k), x_5(k), x_6(k), x_7(k), x_8(k), x_9(k), x_{10}(k), x_{11}(k), x_{12}(k), x_{13}(k), x_{14}(k), x_{15}(k), x_{16}(k), x_{17}(k), x_{18}(k), x_{19}(k), x_{20}(k)]'$

$U(k) = [\mathrm{u}_1(\mathrm{k}), \mathrm{u}_2(\mathrm{k}), \mathrm{u}_3(\mathrm{k}), \mathrm{u}_4(\mathrm{k}), \mathrm{u}_5(\mathrm{k})]'$

Rappresentazione matriciale: X

Y(K) =



Gtot F H

20x20 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

*X(K)

Informazioni generali: funzioni

Per la definizione dei «fixed modes», ho usato la funzione **'[Difm]=di_fixed_modes(Atot,Baggr,Caggr,N,ContStruc,rounding_n)'** che restituisce se esistono i fixed modes.

Per la definizione del «control gain Kx», ho usato la funzione **'[K,rho,feas]=LMI_DT_DeDicont(Ftot,Gdec,Hdec,N,ContStruc)',** che restituisce:

- **Feasibility** = 0 se il problema definito dalle lmis è fattibile.
- **Rho** = spectral radius, che nel caso di sistemi a tempo discreto deve essere minore di uno per avere l'asintotica stabilità.
- **K** = il control gain definito usando le LMIs

Informazioni generali : funzioni

Per la definizione del «control gain «Kx» tale che gli autovalori del sistema fossero in un disco , definito da ‘radius’ e ‘center’ :

‘[K,rho,feas]=LMI_DT_DeDicontDiskInA(Ftot,Gdec,Hdec,N,ContStruc,radius,center)’

Per la definizione del «control gain Kx», in modo da soddisfare le specifiche del controllo del tipo «Hinf» ho usato la funzione

‘[K,rho,feas,norm]=LMI_DT_DeDicontHinf(Ftot,Gdec,Hdec,Htot,N,ContStruc,Gw,Dw,Du)’

Dove (in aggiunta alle altre)

-$\boldsymbol{Gw}$: matrice dei disturbi presenti sugli stati

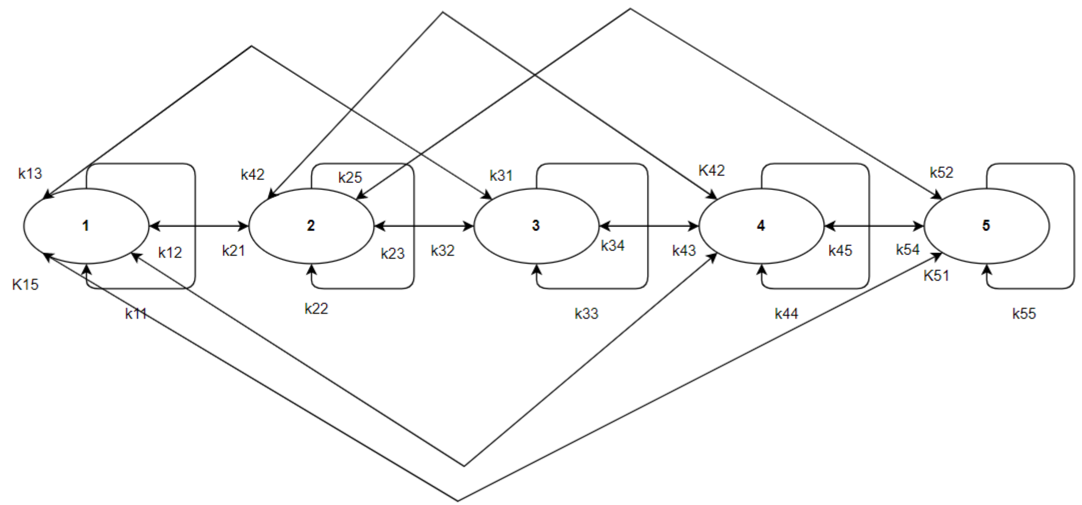
-$\boldsymbol{Dw}$: matrice dei disturbi sulle uscite

-$\boldsymbol{Du}$: matrice degli input sulle uscite

-$\boldsymbol{Norm}$: valore della norma della funzione di trasferimento tra gli stati e i disturbi (indicati normalmente con w)

Struttura : centralizzata: X

Rappresentazione



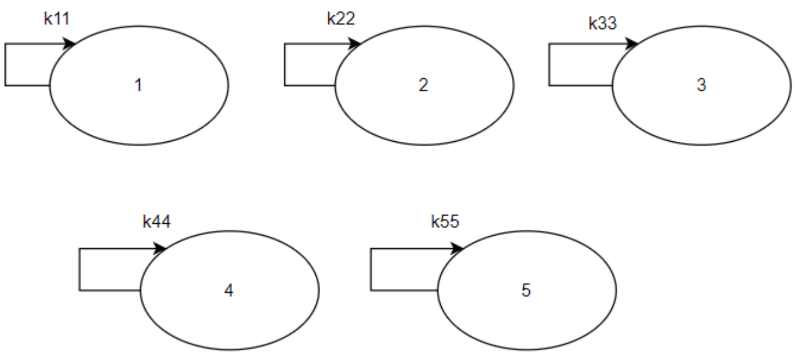
Construct matrix

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1

Struttura : Decentralizzata:

X

Rappresentazione

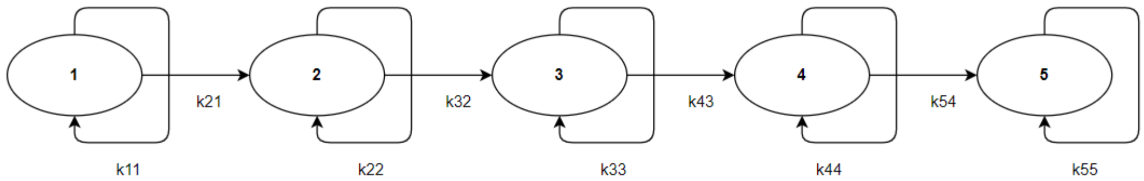


Construct matrix

5x5 double

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

Rappresentazione

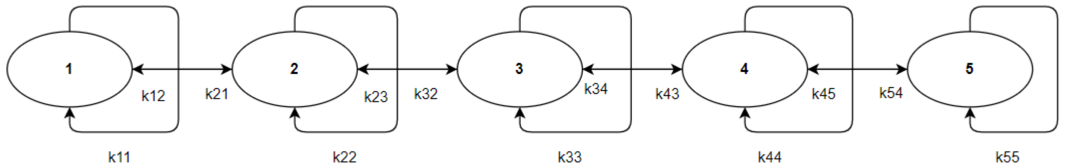


Construct matrix

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1
6					

Struttura distribuita : Stringa Bidirezionale: X

Rappresentazione

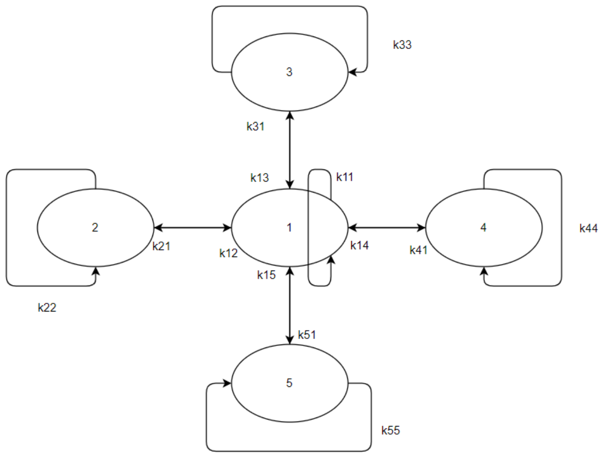


Construct matrix

1	2	3	4	5
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Struttura distribuita: Stella Bidirezionale con prima vasca come centro: X

Rappresentazione

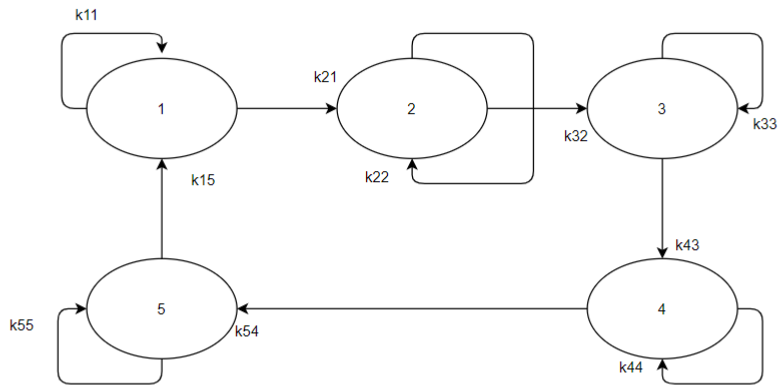


Construct matrix

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1

Struttura distribuita: Anello unilaterale

Rappresentation

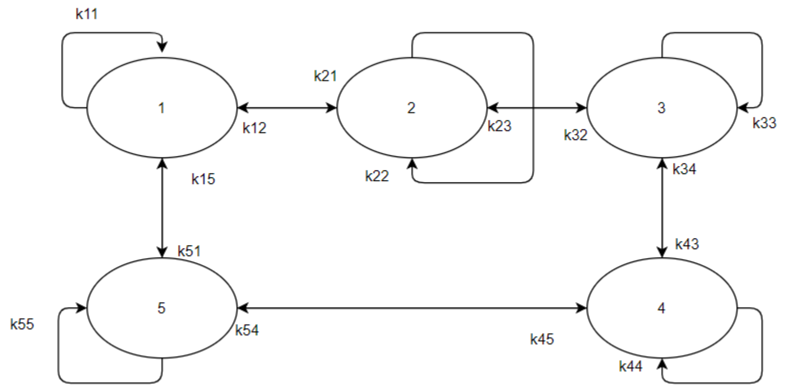


Construct matrix

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1

Struttura distribuita: Anello Bidirezionale: X

Rappresentation

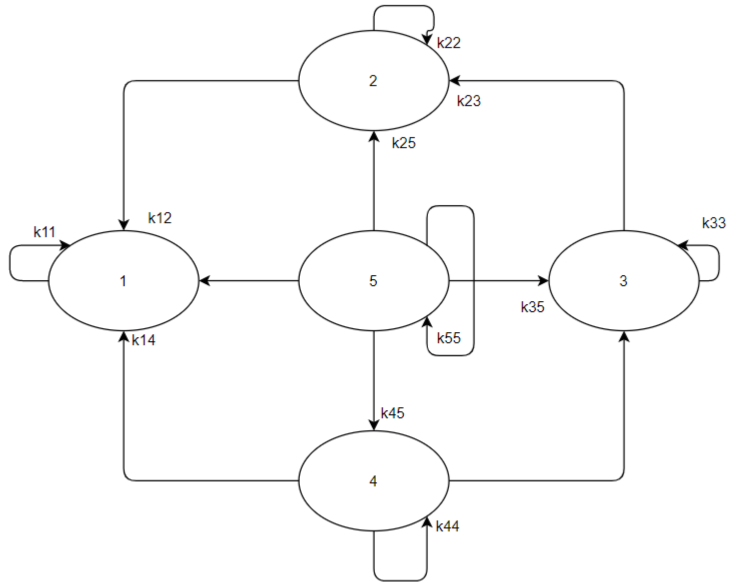


Construct matrix

1	2	3	4	5
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1

Struttura distribuita: Stella Unidirezionale uscente con centro vasca 5: X

Rappresentation



Construct matrix

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	1

Caratteristiche open Loop: X

Autovalori =

eig_f_Dt_OL
20x1 double

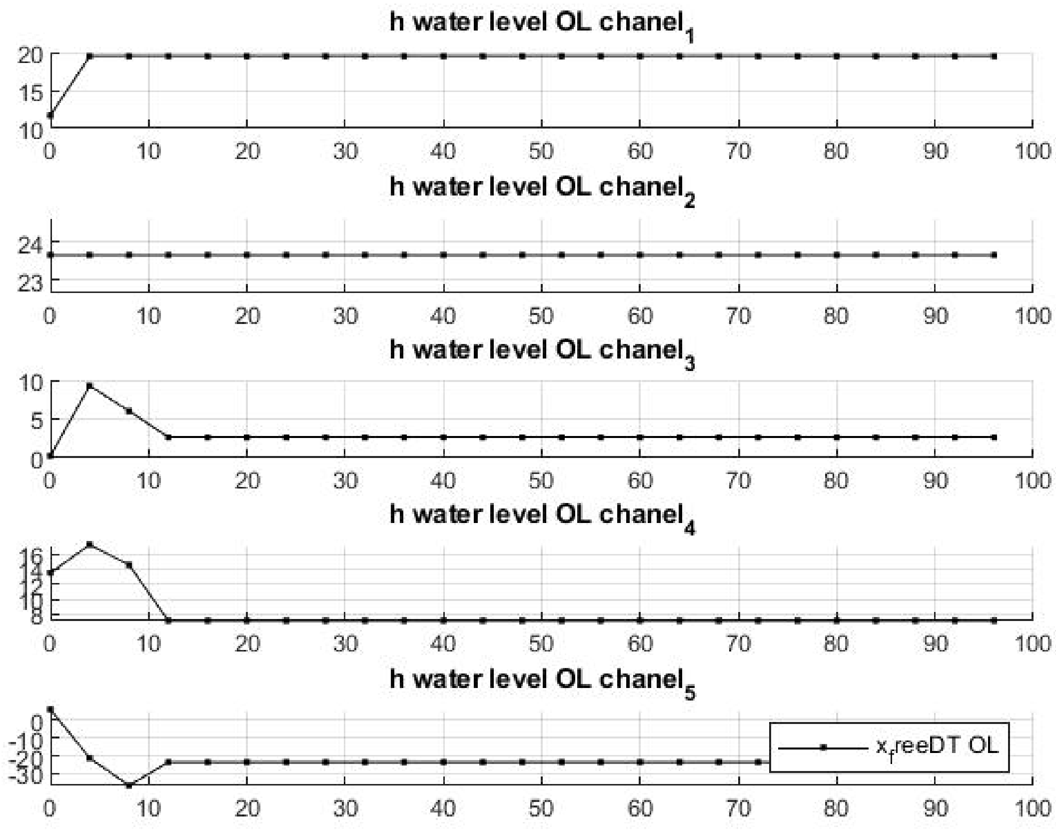
	1
1	1
2	0
3	0
4	1
5	0
6	1
7	0
8	0
9	0
10	0
11	1
12	0
13	0
14	0
15	0
16	1
17	0
18	0
19	0
20	0

Spectral radius=

rhoSpectral_radius_DT_OL	1

Traiettorie sistema in open loop:

X



Risultati: Fixed modes:

fm_cen_DT	[ ]
fm_Dec	[ ]
fm_star_bi	[ ]
fm_string_bi	[ ]
fm_string_uni	[ ]
fmCycleBi	[ ]
fmCycleUni	[ ]
fmStarUniCenter5ExternalCycleUni	[ ]

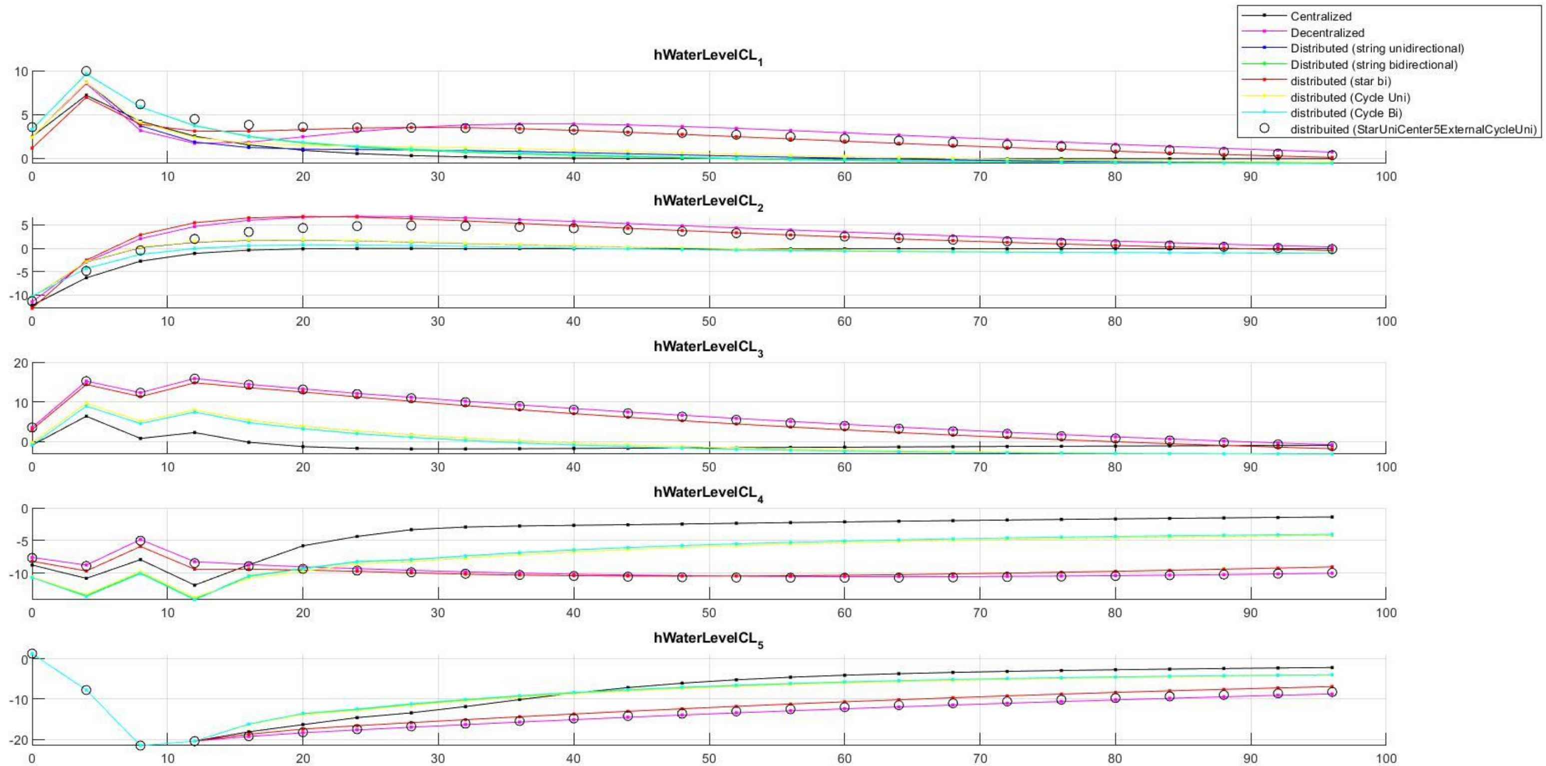
KxAS: Realizzabilità :

feasAs_c	0
feasAs_De	0
feasAs_star_bi	0
feasAs_string_bi	0
feasAs_string_uni	0
feasAsCycleBi	0
feasAsCycleUni	0
feasAsStarUniCenter5ExternalCycle...	0

KxAS : Spectral Radius :

rhoas_c	0.9539
rhoAS_De	0.9616
rhoAs_star_bi_DT	0.9769
rhoAs_string_bi	0.9911
rhoAs_string_uni	0.9922
rhoAsCycleBi	0.9911
rhoAsCycleUni	0.9921
rhoAsStarUniCenter5ExternalCycle...	0.9591

KxAS : Traiettorie del sistema in Closed loop : X



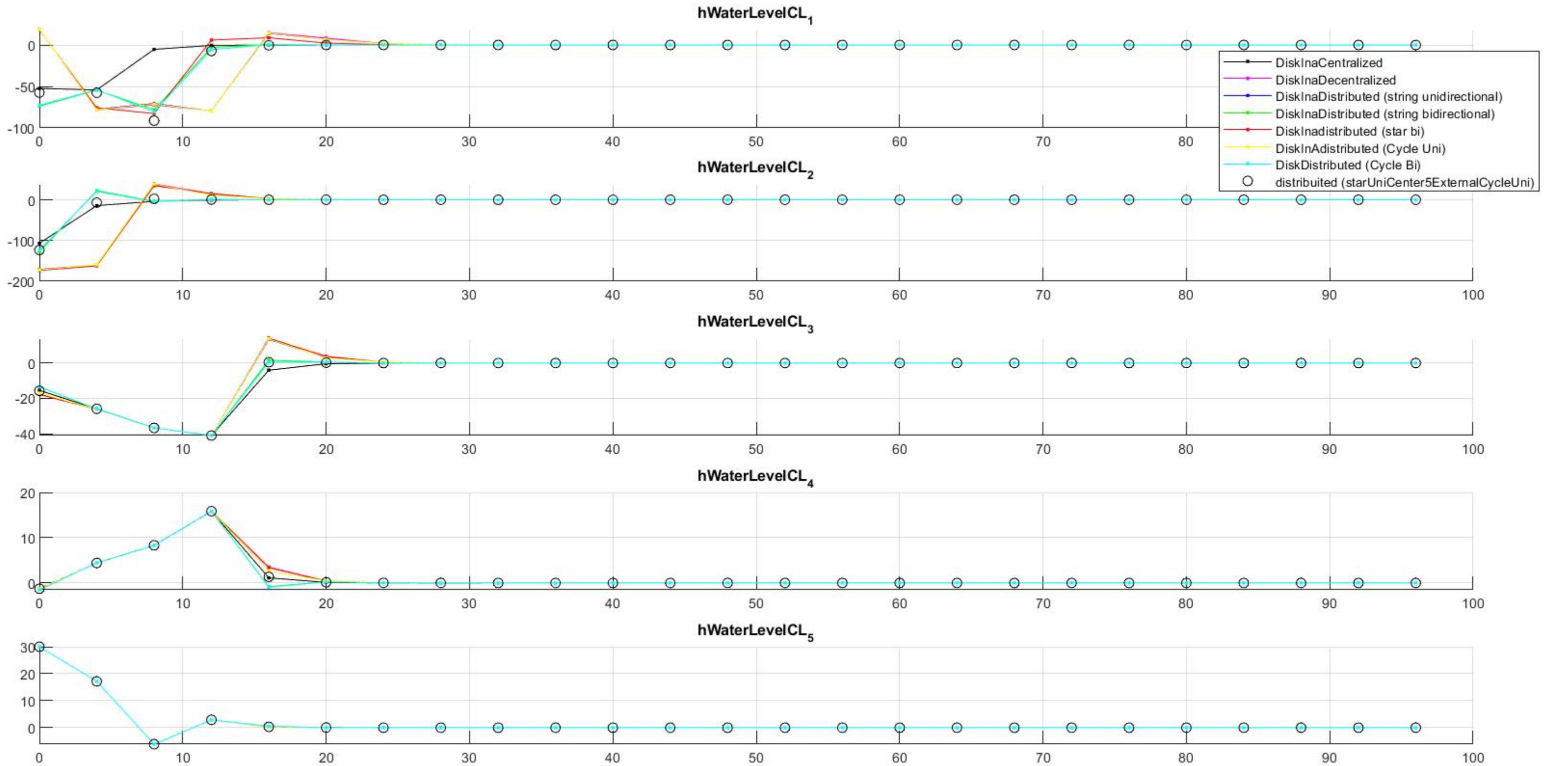
KxDiskInA : Realizzabilità con le seguenti caratteristiche: raggio in 0.4 , centro in 0:

feasDiskRadiusCent	0
feasDiskRadiusCycleBi	0
feasDiskRadiusCycleUni	0
feasDiskRadiusdecen	0
feasDiskRadiusstar_bi	0
feasDiskRadiusStarUniCenter5Exter...	0
feasDiskRadiusstring_bi	0
feasDiskRadiusstring_uni	0

KxDiskInA : Spectral Radius:

rhoDiskRadiusCent	0.1969
rhoDiskRadiusCycleBi	0.2030
rhoDiskRadiusCycleUni	0.1978
rhoDiskRadiusdecen	0.1380
rhoDiskRadiusstar_bi	0.1659
rhoDiskRadiusStarUniCenter5Exter...	0.1697
rhoDiskRadiusstring_bi	0.2018
rhoDiskRadiusstring_uni	0.1982

KxDiskInA : Traiettorie del sistema ad anello chiuso : caso con raggio 0.4 e centro 0: X



KxHinf : Realizzabilità :

feashInfCent	4
feashInfCycleBi	0
feashInfCycleUni	0
feashInfDecen	0
feashInfstar_bi	0
feashInfStarUniCenter5ExternalCycl...	0
feashInfstring_bi	0
feashInfstring_uni	0

4 = valore dato da yalmip che indica la presenza di problemi numerici nella soluzione

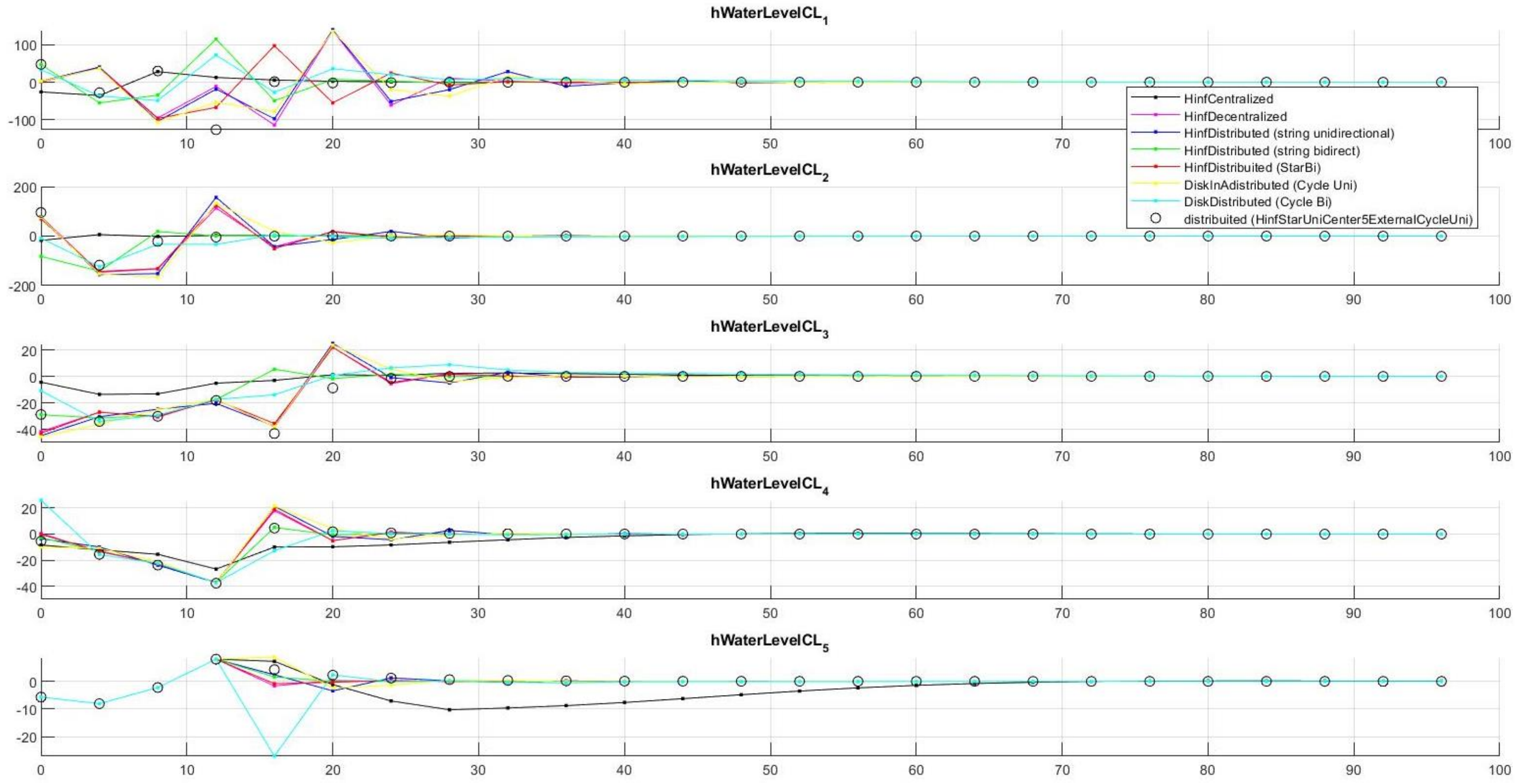
KxHinf : Norma della funzione di trasferimento tra disturbi e stati del sistema: →

normInfCent	237.1425
normInfCycleBi	315.2609
normInfCycleUni	380.0791
normInfDecen	384.1800
normInfstar_bi	358.0632
normInfStarUniCenter5ExternalCycl...	299.9793
normInfstring_bi	324.2338
normInfstring_uni	382.7268

KxHinf : Spectral Radius

rhohInfcent	0.7083
rhohInfCycleBi	0.7898
rhohInfCycleUni	0.4549
rhohInfDecen	0.4031
rhohInfstar_bi	0.3575
rhohInfStarUniCenter5ExternalCycl...	0.5277
rhohInfstring_bi	0.3617
rhohInfstring_uni	0.4956

KxHinf : Traiettorie degli stati in Closed loop

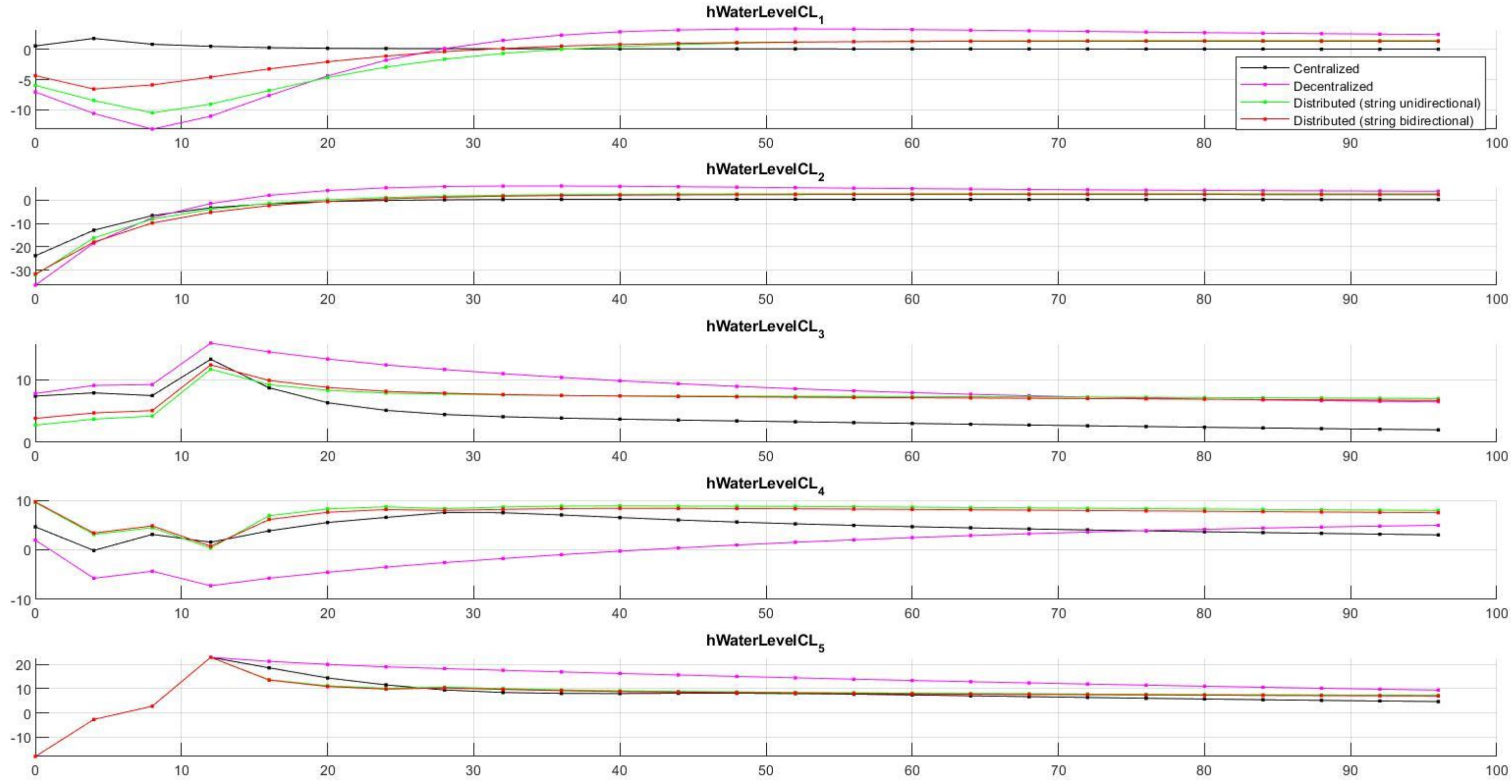


Considerazioni finali: strutture scalabili

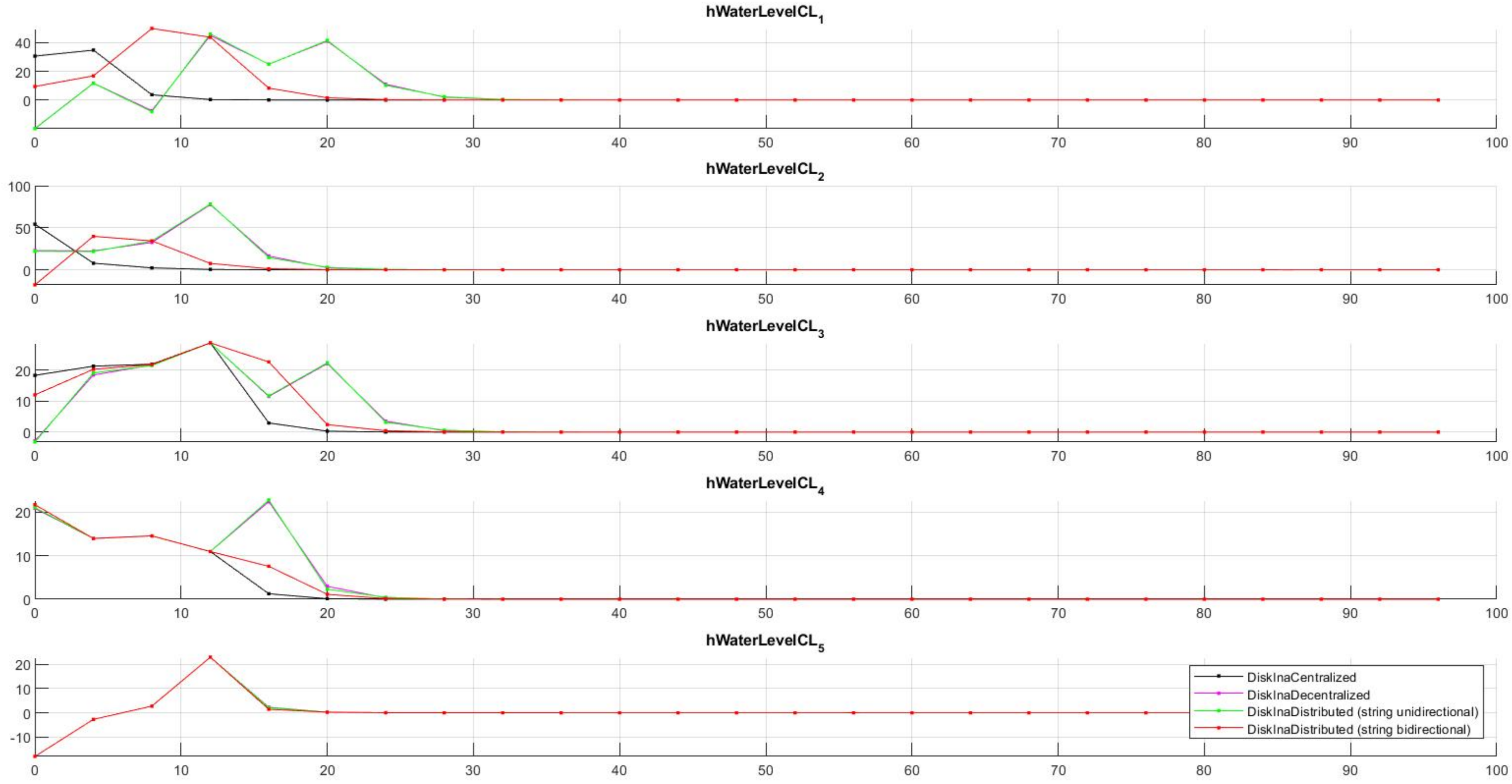
Considerando un # di vasche molto elevato, le strutture facilmente scalabili dato il sistema in serie possono essere quella: decentralizzata, stringa unidirezionale, stringa bidirezionale. Esse possono essere confrontate con quella Centralizzata

struttura	F.M.	Feas Kas	Spectral radius Kas	Feas KdiskInA	Spectral radius KdiskInA	Feas Khif	Spectral radius Khinf	Norm GZW
Centr.	no	0	0.95394	0	0.1969	4	0.7082	237.14
Decentr.	no	0	0.96157	0	0.1379	0	0.4031	384.17
Stringa Uni.	no	0	0.99216	0	0.1982	0	0.4955	382.72
Stringa Bi.	no	0	0.99110	0	0.2017	0	0.3617	324.23

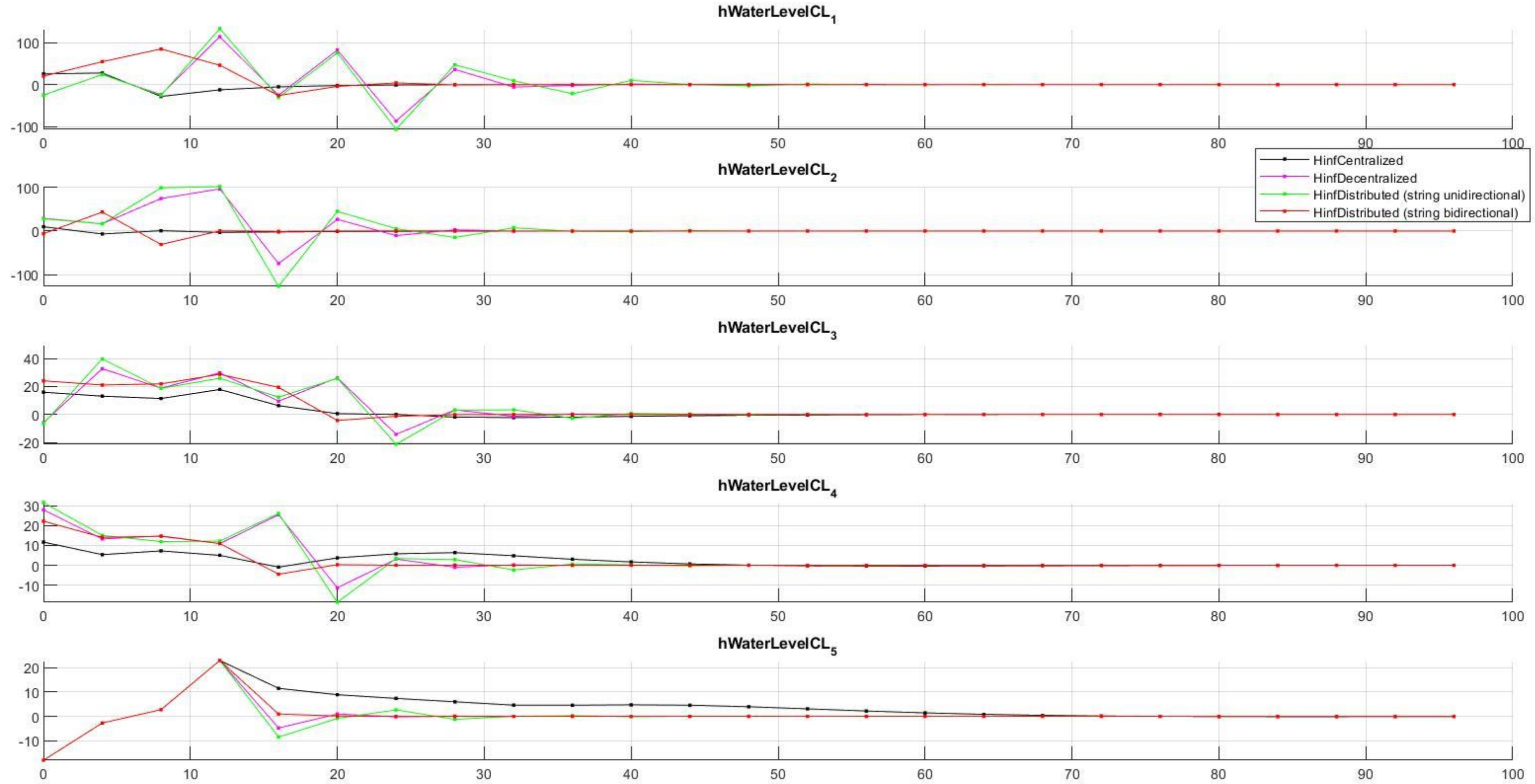
Considerazioni finali: Traiettorie ad anello chiuso: Kas →



Considerazione finali: Traiettorie ad anello chiuso: KdiskInA →



Considerazioni finali : Traiettorie ad anello chiuso: Khinf X



Grazie per l'attenzione