



Universidad
Zaragoza

— Trabajo Fin de Grado —
Documento Anexos

Estudio de flujos turbulentos no newtonianos en
cuencas semicerradas de Titán

Non-newtonian turbulence flows in Titan's
semiclosed basins

Autor

Eloy Solanes Gracia

Directores

Víctor Javier Llorente Lázaro

Manuel Díez Minguito

Titulación del autor

Grado en Ingeniería Mecánica

Índice Anexos

I	Desarrollos teóricos	3
I.1	Hipótesis iniciales y ecuaciones fundamentales	3
I.2	Modelado numérico	5
I.3	Condición numérica para la iteración del gradiente de presión barotrópico	6
I.4	Adimensionalización del perfil de velocidades	8
I.5	Aplicación de la condición de caudal nulo	9
I.6	Análisis de $F_n(\zeta_c)$ para $n = 1$	11
II	Resultados de convergencia	13
II.1	Tablas de convergencia	14
II.2	Gráficas de convergencia	18
III	Perfiles de velocidad y viscosidad	25
	Bibliografía	29
	Lista de Figuras	30
	Lista de Tablas	31

Anexos I

Desarrollos teóricos

I.1. Hipótesis iniciales y ecuaciones fundamentales

En esta sección del Anexo I se presenta el desarrollo matemático que conduce a la ecuación de gobierno utilizada en el Capítulo 2, Sección 2.1.1 y Sección 2.2.1. El punto de partida son las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de referencia móvil [1, Capítulo 1], sobre las cuales se aplican una serie de hipótesis físicas que permiten reducir su complejidad.

En primer lugar, se desprecia la curvatura del planeta ya que se va a trabajar en zonas lo suficientemente pequeñas comparadas con el radio del planeta. Por lo que se trabajarán en coordenadas cartesianas. Además, la aceleración centrífuga a menudo se desprecia en flujos geofísicos a gran escala porque la aceleración de la gravedad es mucho más importante. Por otro lado, se considera que el fluido es homogéneo, es decir, densidad constante.

La segunda hipótesis considera teoría de ondas largas [2, Capítulo 3] donde las aceleraciones de la componente vertical de la velocidad se desprecian. Asimismo, se considera que los efectos de fricción vertical dominan sobre la fricción horizontal y el flujo se desarrolla a lo largo de la cuenca [3, Capítulo 2 y 6].

La tercera hipótesis es trabajar con un flujo estacionario, suponiendo que el sistema ha alcanzado un estado permanente, sin evolución temporal. Esto implica que todas las derivadas parciales respecto al tiempo se anulen, $\partial(\cdot)/\partial t = 0$. Además, se asume que el número de Rossby (ratio entre la aceleración de un fluido y la fuerza de Coriolis, $Ro := U/(fL)$) es pequeño y el radio de deformación de Rossby (escala de longitud en la que los efectos de rotación se vuelve importantes, $L_R := \sqrt{gD}/f$) es grande en comparación con la cuenca. Como consecuencia, la inercia del fluido y la fuerza de Coriolis se desprecian.

Finalmente, se aplica la aproximación *rigid-lid*. Esta hipótesis consiste en considerar que la superficie libre del fluido permanece fija, es decir, que las oscilaciones del nivel

del agua son despreciables frente a la profundidad de la cuenca. Esta hipótesis afecta a las condiciones de contorno.

Las ecuaciones generales del momento lineal se expresa como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} = -\rho[f_* w - f v] - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (\text{I.1a})$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} = -\rho f u - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (\text{I.1b})$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} = -\rho g + \rho f_* u - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \quad (\text{I.1c})$$

donde $U_{\text{cent.}}$ es el potencial de la fuerza centrífuga, $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ y $f_* = 2\Omega \cos(\varphi)$ son el parámetro de Coriolis y el parámetro de Coriolis recíproco, respectivamente; Ω es la velocidad angular del planeta y φ la latitud geográfica. El análisis de escala, ver [4, Sección 4.3], muestra que f_* se puede despreciar frente a f .

Una vez aplicadas todas las hipótesis anteriores, el sistema de ecuaciones diferenciales (I.1) queda reducido a:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (\text{I.2a})$$

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{I.2b})$$

Se renombra el esfuerzo viscoso, $\tau_{xz} = \tau$. La ecuación (I.2b) corresponde a la ecuación hidrostática. Integrando con respecto a z , se obtiene el perfil de presiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \\ \int_p^{p_{\text{atm.}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi &= \int_z^\eta -\rho g d\xi, \\ p_{\text{atm.}} - p &= -\rho g[\eta - z] \Rightarrow p = p_{\text{atm.}} + \rho g[\eta - z]. \end{aligned}$$

A continuación, se calcula el gradiente horizontal:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_{\text{atm.}}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (\text{I.3})$$

El gradiente de presión horizontal está formado por dos componentes: el gradiente de presión barométrica ($\partial p_{\text{atm.}}/\partial x$) y el gradiente de presión barotrópica ($\rho g \partial \eta/\partial x$). La presión barométrica se considera constante y, por tanto, su derivada se anula ($\partial p_{\text{atm.}}/\partial x = 0$). Sustituyendo el gradiente de presión (I.3) en la ecuación (I.2a), se obtiene:

$$0 = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z},$$

la cual corresponde con la Ecuación (2.1) de la página 7 de la memoria.

Para flujos geofísicos turbulentos [4, Capítulo 4], al promediar las ecuaciones (I.1) y descomponer las variables en su promedio ($\overline{(\cdot)}$) y su fluctuación ($(\cdot)'$), ver [5], las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS) en un sistema de referencias móvil (asumimos ya $\rho = \text{const.}$) quedan escritas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{u}}{\partial z} = -\rho[f_* \bar{w} - f \bar{v}] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xx} - \overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xy} - \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xz} - \overline{u'w'})}{\partial z}, \quad (\text{I.4a})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{v}}{\partial z} = -\rho f \bar{u} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xy} - \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{yy} - \overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{yz} - \overline{v'w'})}{\partial z}, \quad (\text{I.4b})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u} \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{w}}{\partial z} = -\rho g + \rho f_* \bar{u} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xz} - \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{yz} - \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{zz} - \overline{w'w'})}{\partial z}. \quad (\text{I.4c})$$

Al volver a aplicar las hipótesis iniciales de esta sección, se llega a la siguiente ecuación:

$$0 = -\rho g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xz} - \overline{u'w'})}{\partial z}.$$

El término $-\overline{u'w'}$ es una de las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds y su modelización ya se comenta en la Ecuación (2.7a) de la página 10 de la memoria. En oceanografía, el promedio del esfuerzo viscoso τ_{xz} se suele despreciar frente a los esfuerzos turbulentos. Sin embargo, en este Trabajo Fin de Grado (TFG) es importante para caracterizar el flujo turbulento no newtoniano. Su descomposición es la siguiente:

$$\bar{\tau}_{xz} = \overline{\nu_e \frac{\partial u}{\partial z}} = \overline{(\nu_e + \nu'_e) \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial z}} = \bar{\nu}_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{\nu'_e \frac{\partial u'}{\partial z}}.$$

El segundo término es el esfuerzo de tipo no newtoniano τ^{NN} y su modelización ya se comenta en la Ecuación (2.7b) de la página 10 de la memoria.

I.2. Modelado numérico

El dominio se discretiza en una malla equidistante $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ en la que $z_i = i\Delta z$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, donde N es el número de nodos que verifica $-H = (N-1)\Delta z$. Por consiguiente, $\phi_i = \phi(z_i)$ para cualquier variable que dependa de la coordenada vertical z .

La discretización del gradiente del flujo difusivo se realiza mediante unas diferencias finitas de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{\Gamma_{i-1/2} u_{i-1} - (\Gamma_{i-1/2} + \Gamma_{i+1/2}) u_i + \Gamma_{i+1/2} u_{i+1}}{\Delta z^2}.$$

En régimen laminar: $\Gamma = \nu_e$. Por lo tanto,

$$\nu_{e,i-1/2} \approx K \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta z} \right|^{n-1}, \quad \nu_{e,i+1/2} \approx K \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta z} \right|^{n-1}. \quad (\text{I.5})$$

En régimen turbulento: $\Gamma = \bar{\nu}_e + \nu_t + \nu_{\text{NN}}$. $\bar{\nu}_{e,i\pm 1/2}$ se discretizará de igual manera que en la Ec. (I.5) pero con las velocidades promedio, $\nu_{t,i\pm 1/2} = \nu_t(z_{i\pm 1/2})$ y la viscosidad no newtoniana mediante,

$$\begin{aligned} \nu_{\text{NN},i-1/2} &\approx (n-1)\bar{\nu}_{e,i-1/2} \frac{\lambda \left[\frac{\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i}{2} \right]^4}{4\bar{\nu}_{e,i-1/2}\nu_{t,i-1/2} \left[\frac{\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{\Delta z} \right]^2 + \lambda \left[\frac{\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i}{2} \right]^4}, \\ \nu_{\text{NN},i+1/2} &\approx (n-1)\bar{\nu}_{e,i+1/2} \frac{\lambda \left[\frac{\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2} \right]^4}{4\bar{\nu}_{e,i+1/2}\nu_{t,i+1/2} \left[\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{\Delta z} \right]^2 + \lambda \left[\frac{\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2} \right]^4}. \end{aligned}$$

Una vez discretizado las viscosidades, se construye un sistema algebraico de ecuaciones: $\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Gamma_{1/2} & -(\Gamma_{1/2} + \Gamma_{3/2}) & \Gamma_{3/2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Delta z |\tau_w / \rho \Gamma_0|^{1/n} \\ \Delta z^2 g \partial \eta / \partial x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.6})$$

Si se trabaja en régimen turbulento, el vector de incógnitas \mathbf{u} representa la velocidad promedio.

I.3. Condición numérica para la iteración del gradiente de presión barotrópico

Se define el caudal en la columna de líquido como

$$q = \int_{-H}^0 u \, dz.$$

Si se toma valor absoluto en ambos lados de la igualdad,

$$|q| = \left| \int_{-H}^0 u \, dz \right| \leq \int_{-H}^0 |u| \, dz =: \|u\|_1, \quad (\text{I.7})$$

donde $\|u\|_1$ es la norma L_1 de la solución.

Para poder encontrar el gradiente de presión barotrópico que hace que el caudal sea cero, se supondrá un determinado valor de esfuerzo debido al viento. Al discretizar el problema de valor de contorno del Capítulo 2, la condición (I.7) también se discretiza,

$$|q| \leq \|\mathbf{u}\|_1,$$

donde ahora $\|\mathbf{u}\|_1$ es la norma 1 del vector solución (I.6), esto es,

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|.$$

Operando con el sistema de ecuaciones de la anterior sección:

$$\begin{aligned} |q| &\leq \|\mathbf{u}\|_1 = \|\mathbf{A}(\mathbf{u})^{-1}\mathbf{b}\|_1 \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{u})^{-1}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1, \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{u})\|_1 |q| &\leq \|\mathbf{A}(\mathbf{u})\|_1 \|\mathbf{A}(\mathbf{u})^{-1}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1 =: \kappa_1(\mathbf{A}(\mathbf{u})) \|\mathbf{b}\|_1, \end{aligned}$$

donde $\kappa_1(\cdot)$ es el número de condición usando la norma vectorial L_1 y

$$\|\mathbf{b}\|_1 = C_0 + C_1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|,$$

donde $C_0 = \Delta z |\tau_w| / (\rho \Gamma_0)^{1/n}$ y $C_1 = (N-2) \Delta z^2 g$ son dos constantes reales positivas. Se asume que la matriz (I.6) es regular.

Si en un determinado paso de iteración m se conoce $\mathbf{u}^{(m)}$ y $\partial \eta / \partial x|^{(m)}$,

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)})\|_1 |q^{(m)}| \leq \kappa_1(\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)})) \left[C_0 + C_1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{(m)} \right], \quad (\text{I.8})$$

y se quiere que en el siguiente paso de iteración $m+1$ con un gradiente de presión barotrópico $\partial \eta / \partial x|^{(m+1)}$ el caudal sea cero,

$$0 \leq \kappa_1(\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)})) \left[C_0 + C_1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^{(m+1)} \right], \quad (\text{I.9})$$

asumiendo que $\mathbf{u}^{(m+1)} \rightarrow \mathbf{u}^{(m)}$, entonces restando las inecuaciones (I.8) y (I.9) se llega a la siguiente condición que debe cumplir dos gradientes de presión barotrópicos consecutivos:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)})\|_1 |q^{(m)}| \leq \kappa_1(\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)})) C_1 |\Delta \partial_x \eta|,$$

donde $\Delta \partial_x \eta = \partial \eta / \partial x|^{(m)} - \partial \eta / \partial x|^{(m+1)}$. La Ecuación (3.2) de la página 14 de la memoria cumple con la condición previa.

I.4. Adimensionalización del perfil de velocidades

En esta sección del Anexo I se presenta el proceso de adimensionalización del perfil de velocidades obtenido bajo ciertas condiciones de contorno, conforme a Llorente et al. (2023) [6].

Antes de comenzar, es necesario establecer una serie de definiciones previas. Se trabaja con la profundidad normalizada, definida como

$$\zeta = \frac{z}{H},$$

donde $\zeta \in (-1, 0)$. Asimismo, se define la profundidad crítica normalizada

$$\zeta_c = -\frac{z_c}{H},$$

donde $\zeta_c \in (0, 1)$, $z_c = -\beta/\alpha$, $\alpha = (g/K)\partial\eta/\partial x$ y $\beta = \tau_w/(gK)$.

El perfil de velocidades analítico [6] se escribe como:

$$u(z) = \frac{n}{\alpha[n+1]} \left[|\beta + \alpha z|^{1+\frac{1}{n}} - |\beta - \alpha H|^{1+\frac{1}{n}} \right]$$

Sustituyendo $z = \zeta H$ y extrayendo factor común $|\alpha H|$, se obtiene:

$$u(\zeta) = \frac{n}{\alpha[n+1]} \left[\left| \frac{\beta}{\alpha H} + \zeta \right|^{\frac{n+1}{n}} - \left| \frac{\beta}{\alpha H} - 1 \right|^{\frac{n+1}{n}} \right] |\alpha H|^{\frac{n+1}{n}}.$$

Sustituyendo $\beta/\alpha H = \zeta_c$,

$$u(\zeta) = \frac{n}{\alpha[n+1]} \left[|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}} \right] |\alpha H|^{\frac{n+1}{n}}.$$

A continuación, se multiplica y divide por el factor $|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}$, esto es,

$$u(\zeta) = \frac{n}{\alpha[n+1]} |\alpha H|^{\frac{n+1}{n}} \left[|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}}{|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Se define la velocidad en superficie u_0 como:

$$u_0 = \frac{n}{\alpha[n+1]} |\alpha H|^{\frac{n+1}{n}} \left[|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}} \right].$$

Extrayendo el factor $|\zeta_c|$, multiplicando y dividiendo por $H\beta$ se obtiene lo siguiente:

$$u_0 = \frac{n}{n+1} \frac{1}{\alpha} \frac{H}{H} \frac{\beta}{\beta} |\alpha H|^{\frac{n+1}{n}} |\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right].$$

Sustituyendo $\beta/\alpha H = \zeta_c$,

$$u_0 = \frac{n}{n+1} \frac{H}{\beta} \zeta_c |\alpha H|^{\frac{n+1}{n}} |\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right].$$

Sustituyendo $\alpha H = \beta/\zeta_c$,

$$u_0 = \frac{n}{n+1} \frac{H}{\beta} \zeta_c \frac{|\beta|^{\frac{n+1}{n}}}{|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}}} |\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right].$$

Multiplicando y dividiendo por β y sustituyendo $\alpha H = \beta/\zeta_c$, se obtiene lo siguiente:

$$u_0 = \frac{n}{n+1} \frac{H}{\beta} \frac{\beta}{\beta} \zeta_c |\beta|^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right].$$

Operando, se obtiene la siguiente expresión:

$$u_0 = \frac{n}{n+1} H \beta \zeta_c |\beta|^{\frac{1-n}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right].$$

Finalmente, al sustituir $\beta = \tau_w/\rho K$, se obtiene lo siguiente:

$$u_0 = \frac{n}{n+1} \frac{\tau_w H}{\rho A} \zeta_c \left| \frac{\tau_w}{\rho K} \right|^{\frac{1-n}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

Se introduce la constante r , definida como:

$$r := \frac{n}{n+1} \zeta_c \left| \frac{\tau_w}{\rho K} \right|^{\frac{1-n}{n}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (\text{I.10})$$

Con ello, el perfil de velocidades adimensionalizado queda expresado de la siguiente manera:

$$u(\zeta) = u_0 \frac{|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}}{|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}} \quad (\text{I.11})$$

donde $u_0 = r\tau_w H/(\rho K)$.

I.5. Aplicación de la condición de caudal nulo

Con el objetivo de obtener una función $\zeta_c = \zeta_c(n)$, se aplica la condición de flujo neto nulo, descrita en la memoria. Esta condición se escribe como:

$$\int_{-H}^0 u(z) dz = 0.$$

Dado que ya se dispones del perfil de velocidades adimensionalizado $u(\zeta)$, se parte de la siguiente expresión:

$$\int_{-1}^0 u_0 \frac{|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}}{|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}} d\zeta = 0.$$

Como u_0 y el denominador de la fracción son constantes respecto a la integración, se pueden omitir para simplificar la expresión:

$$\int_{-1}^0 \left(|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}} \right) d\zeta = 0.$$

El segundo término se saca como factor común:

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}}}{|\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}} - 1 \right) d\zeta = 0.$$

Finalmente, la integral que se debe resolver queda de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^0 \left| \frac{\zeta_c + \zeta}{\zeta_c - 1} \right|^{\frac{n+1}{n}} d\zeta = 1.$$

Para resolver la integral, se divide el dominio en dos tramos: $[-\zeta_c, 0]$ y $[-1, -\zeta_c]$. Cada tramo requiere un cambio de variable para resolver la integral,

$$\int_{-\zeta_c}^0 \left(\frac{\zeta_c + \zeta}{\zeta_c - 1} \right)^{\frac{n+1}{n}} d\zeta + \int_{-1}^{-\zeta_c} \left(\frac{\zeta_c + \zeta}{\zeta_c - 1} \right)^{\frac{n+1}{n}} d\zeta = 1. \quad (\text{I.12})$$

El cambio de variable para la primera integral sería,

$$\begin{cases} \zeta' &= \frac{\zeta_c + \zeta}{1 - \zeta_c} \\ d\zeta' &= \frac{1}{1 - \zeta_c} d\zeta \end{cases},$$

cuyos límites de cambio se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \zeta = 0 &\Rightarrow \zeta' = \frac{\zeta_c}{1 - \zeta_c} \\ \zeta = -\zeta_c &\Rightarrow \zeta' = 0 \end{cases}$$

El cambio de variable para la segunda integral sería,

$$\begin{cases} \zeta'' &= \frac{\zeta_c + \zeta}{\zeta_c - 1} \\ d\zeta'' &= \frac{1}{\zeta_c - 1} d\zeta \end{cases}$$

cuyos límites de cambio se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \zeta = -\zeta_c &\Rightarrow \zeta'' = 0 \\ \zeta = -1 &\Rightarrow \zeta'' = 1 \end{cases}$$

Aplicando los cambios de variable en la expresión (I.12), se obtiene:

$$\int_0^{\frac{\zeta_c}{1-\zeta_c}} (\zeta')^{\frac{n+1}{n}} (1 - \zeta_c) d\zeta' + \int_1^0 (\zeta'')^{\frac{n+1}{n}} (\zeta_c - 1) d\zeta'' = 1$$

Resolviendo ambas integrales:

$$\begin{aligned}
 (\zeta_c - 1) \left[- \frac{(\zeta')^{\frac{2n+1}{n}}}{\frac{2n+1}{n}} \Big|_0^{\frac{\zeta_c}{1-\zeta_c}} + \frac{(\zeta'')^{\frac{2n+1}{n}}}{\frac{2n+1}{n}} \Big|_1^0 \right] &= 1, \\
 (\zeta_c - 1) \frac{n}{2n+1} \left[- \left(\frac{\zeta_c}{1-\zeta_c} \right)^{\frac{2n+1}{n}} - 1 \right] &= 1, \\
 - \frac{n}{2n+1} \left[\frac{-\zeta_c^{\frac{2n+1}{n}} - (1-\zeta_c)^{\frac{2n+1}{n}}}{(1-\zeta_c)^{\frac{n+1}{n}}} \right] &= 1.
 \end{aligned}$$

Como resultado, se obtiene una función que relaciona la profundidad normalizada crítica (ζ_c) y el índice de potencia (n):

$$F_n(\zeta_c) := \zeta_c^{\frac{2n+1}{n}} + (1-\zeta_c)^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{2n+1}{n}(1-\zeta_c)^{\frac{n+1}{n}} = 0. \quad (\text{I.13})$$

I.6. Análisis de $F_n(\zeta_c)$ para $n = 1$

A continuación, se estudia el caso particular de un fluido newtoniano, lo cual corresponde al valor $n = 1$. Comenzaremos con la obtención del valor de ζ_c . Sustituyendo $n = 1$ en la expresión (I.13) y operando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \zeta_c^{\frac{2+1}{1}} + (1-\zeta_c)^{\frac{2+1}{1}} - \frac{2+1}{1}(1-\zeta_c)^{\frac{1+1}{1}} &= 0, \\
 \zeta_c^3 + (1-\zeta_c)^3 - 3(1-\zeta_c)^2 &= 0, \\
 \zeta_c^3 + (-\zeta_c^3 + 3\zeta_c^2 - 3\zeta_c + 1) - 3(\zeta_c^2 - 2\zeta_c + 1) &= 0, \\
 3\zeta_c - 2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $\zeta_c = 2/3$.

A continuación, calcularemos el valor de la constante r . Para ello se parte de la expresión general (I.10) y se sustituye el valor $n = 1$:

$$r = \frac{1}{1+1} \zeta_c \left| \frac{\tau_w}{gK} \right|^{\frac{1-1}{1}} \left[1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{1+1}{1}} \right].$$

Operando se tiene:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{2} \zeta_c \left[1 - \left(\frac{1}{\zeta_c^2} - 2\frac{1}{\zeta_c} + 1 \right) \right], \\
 r &= \frac{1}{2} \zeta_c \left[1 - \left(\frac{1}{\zeta_c^2} - 2\frac{1}{\zeta_c} + 1 \right) \right], \\
 r &= -\frac{1}{2\zeta_c} + 1.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor $\zeta_c = 2/3$, se obtiene $r = 1/4$.

Para analizar el perfil de velocidades se parte de la expresión (I.11) y se sustituye $n = 1$:

$$u(\zeta) = u_0 \frac{|\zeta_c + \zeta|^{\frac{1+1}{1}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{1+1}{1}}}{|\zeta_c|^{\frac{1+1}{1}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{1+1}{1}}}.$$

Operando se tiene:

$$u(\zeta) = u_0 \frac{(\zeta^2 + 2\zeta \cdot \zeta_c + \zeta_c^2) - (\zeta_c^2 - 2\zeta_c + 1)}{\zeta_c^2 - (\zeta_c^2 - 2\zeta_c + 1)},$$

$$u(\zeta) = u_0 \frac{\zeta^2 + 2\zeta \cdot \zeta_c + 2\zeta_c - 1}{2\zeta_c - 1},$$

Se sustituye el valor $\zeta_c = 2/3$:

$$u(\zeta) = u_0 \frac{\zeta^2 + \frac{4}{3}\zeta + \frac{4}{3} - 1}{\frac{4}{3} - 1},$$

$$u(\zeta) = u_0 \frac{\zeta^2 + \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}.$$

Como resultado se tiene el perfil de velocidades para el caso de un fluido newtoniano, el cual se puede reescribir como:

$$u(\zeta) = u_0[3\zeta^2 + 4\zeta + 1],$$

donde $u_0 = \tau_w H / (4\rho K)$.

Anexos II

Resultados de convergencia

II.1. Tablas de convergencia

TolQ = 10-3															
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500		
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]
0,4	1,5954E-05	1,7912E-02	15,9215	9,8158E-06	1,0037E-02	11,7496	1,2866E-05	9,9417E-03	17,2332	1,3588E-05	9,4469E-03	49,2079	2,0182E-05	1,1062E-02	63,9595
0,6	1,6610E-04	1,0572E-02	4,4611	7,9498E-05	5,4214E-03	13,8550	5,2428E-05	3,6082E-03	23,2200	3,9675E-05	2,7958E-03	31,9022	2,2040E-05	1,3328E-03	98,0606
0,8	7,3515E-04	1,0312E-02	4,8658	3,5454E-04	5,1159E-03	15,1974	2,3238E-04	3,4214E-03	24,0084	1,7247E-04	2,5793E-03	30,5331	6,7941E-05	1,0661E-03	96,1405
1	1,7173E-03	1,0282E-02	0,6668	8,3347E-04	5,0823E-03	1,6749	5,4868E-04	3,3824E-03	2,6273	4,0828E-04	2,5381E-03	3,4921	1,5992E-04	1,0243E-03	11,2149
1,2	2,9442E-03	1,0286E-02	9,6849	1,4320E-03	5,0815E-03	25,6475	9,4513E-04	3,3697E-03	41,7958	7,0445E-04	2,5291E-03	56,9421	2,7705E-04	1,0127E-03	165,8398
1,4	4,2456E-03	1,0220E-02	20,4720	2,0686E-03	5,0762E-03	49,6991	1,3666E-03	3,3791E-03	80,7075	1,0189E-03	2,5298E-03	112,3865	4,0136E-04	1,0077E-03	330,4201
1,6	5,4979E-03	1,0094E-02	44,0247	2,6792E-03	5,0169E-03	105,1327	1,7703E-03	3,3410E-03	166,9846	1,3210E-03	2,5060E-03	231,0079	5,2188E-04	1,0057E-03	669,7895
1,8	6,6396E-03	9,9961E-03	118,8176	3,2523E-03	5,1313E-03	278,8558	2,1506E-03	3,4157E-03	433,6442	1,6034E-03	2,5462E-03	592,9110	6,3121E-04	9,9801E-04	1707,8962

Tabla II.1: Resultados para TolQ = 10^{-3} con condiciones de contorno de orden 1.

TolQ = 10-4															
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500		
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]
0,4	7,8665E-06	1,1155E-02	28,5095	3,9615E-06	6,1550E-03	13,6582	2,6076E-06	4,0859E-03	25,6521	2,3259E-06	3,4700E-03	62,6132	1,7885E-06	1,9336E-03	102,3508
0,6	1,6962E-04	1,0274E-02	5,2441	8,1429E-05	5,1080E-03	15,8544	5,3646E-05	3,3919E-03	27,7633	3,9878E-05	2,5490E-03	37,4971	1,5594E-05	1,0364E-03	119,7146
0,8	7,3659E-04	1,0295E-02	5,0817	3,5748E-04	5,0767E-03	15,7823	2,3585E-04	3,3708E-03	26,0900	1,7591E-04	2,5238E-03	36,1824	6,9472E-05	1,0090E-03	109,6466
1	1,7190E-03	1,0274E-02	0,7141	8,3643E-04	5,0694E-03	1,8963	5,5253E-04	3,3652E-03	2,8233	4,1246E-04	2,5188E-03	4,0005	1,6334E-04	1,0049E-03	12,8976
1,2	2,9487E-03	1,0276E-02	11,6265	1,4365E-03	5,0723E-03	29,8878	9,4917E-04	3,3611E-03	48,6782	7,0895E-04	2,5194E-03	70,6223	2,8105E-04	1,0032E-03	196,4559
1,4	4,2497E-03	1,0215E-02	25,6533	2,0729E-03	5,0708E-03	60,3413	1,3708E-03	3,3738E-03	94,1443	1,0236E-03	2,5240E-03	130,3052	4,0576E-04	1,0018E-03	380,9805
1,6	5,5018E-03	1,0090E-02	50,3147	2,6834E-03	5,0132E-03	125,6628	1,7745E-03	3,3374E-03	194,7861	1,3256E-03	2,5021E-03	268,3141	5,2637E-04	1,0017E-03	772,4323
1,8	6,6429E-03	9,9938E-03	137,5312	3,2568E-03	5,1288E-03	322,5110	2,1555E-03	3,4127E-03	502,8095	1,6082E-03	2,5432E-03	691,1340	6,3571E-04	9,9510E-04	1955,7977

Tabla II.2: Resultados para TolQ = 10^{-4} con condiciones de contorno de orden 1.

TolQ = 10-5															
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500		
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]
0,4	8,0485E-06	1,0420E-02	32,5933	3,8554E-06	5,1305E-03	18,3236	2,5176E-06	3,4464E-03	32,5726	1,8685E-06	2,5981E-03	72,3942	7,2948E-07	1,1034E-03	125,2068
0,6	1,6926E-04	1,0299E-02	6,5754	8,1843E-05	5,0776E-03	19,6140	5,3957E-05	3,3687E-03	33,6923	4,0229E-05	2,5218E-03	46,3330	1,5906E-05	1,0063E-03	158,3074
0,8	7,3688E-04	1,0291E-02	6,5724	3,5786E-04	5,0720E-03	19,5093	2,3628E-04	3,3655E-03	32,0437	1,7635E-04	2,5182E-03	43,8683	6,9909E-05	1,0034E-03	142,2017
1	1,7192E-03	1,0274E-02	0,8637	8,3685E-04	5,0677E-03	2,2445	5,5296E-04	3,3634E-03	3,4569	4,1288E-04	2,5170E-03	5,0996	1,6382E-04	1,0029E-03	15,9458
1,2	2,9490E-03	1,0275E-02	15,1316	1,4369E-03	5,0713E-03	37,4928	9,4960E-04	3,3603E-03	59,1967	7,0937E-04	2,5186E-03	81,8451	2,8152E-04	1,0023E-03	229,1065
1,4	4,2499E-03	1,0215E-02	28,9910	2,0734E-03	5,0702E-03	71,3410	1,3713E-03	3,3733E-03	113,2461	1,0240E-03	2,5234E-03	159,2777	4,0624E-04	1,0013E-03	459,7880
1,6	5,5023E-03	1,0090E-02	62,6838	2,6838E-03	5,0128E-03	145,9517	1,7749E-03	3,3370E-03	230,2378	1,3260E-03	2,5017E-03	318,4693	5,2686E-04	1,0013E-03	926,3390
1,8	6,6432E-03	9,9936E-03	165,3897	3,2572E-03	5,1286E-03	383,9628	2,1560E-03	3,4124E-03	603,6929	1,6087E-03	2,5429E-03	826,4821	6,3620E-04	9,9481E-04	2369,3859

Tabla II.3: Resultados para TolQ = 10^{-5} con condiciones de contorno de orden 1.

ToIQ = 10-6																
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500			
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	
0,4	8,0842E-06	1,0341E-02	55,4331	3,8720E-06	5,0920E-03	21,3260	2,5447E-06	3,3777E-03	39,7009	1,8933E-06	2,5308E-03	87,7163	7,4511E-07	1,0140E-03	168,6882	
0,6	1,6929E-04	1,0297E-02	7,6476	8,1885E-05	5,0746E-03	23,5464	5,3993E-05	3,3662E-03	39,8224	4,0273E-05	2,5187E-03	58,2617	1,5948E-05	1,0033E-03	178,3934	
0,8	7,3689E-04	1,0291E-02	7,2776	3,5791E-04	5,0715E-03	22,6543	2,3633E-04	3,3649E-03	37,6122	1,7640E-04	2,5177E-03	52,5541	6,9954E-05	1,0028E-03	163,7882	
1	1,7192E-03	1,0274E-02	1,0382	8,3689E-04	5,0675E-03	2,6392	5,5301E-04	3,3632E-03	4,1538	4,1293E-04	2,5168E-03	5,8846	1,6387E-04	1,0027E-03	18,2332	
1,2	2,9491E-03	1,0275E-02	16,4964	1,4370E-03	5,0712E-03	42,2946	9,4965E-04	3,3602E-03	67,5672	7,0941E-04	2,5185E-03	91,3471	2,8156E-04	1,0022E-03	260,2172	
1,4	4,2500E-03	1,0214E-02	33,0443	2,0734E-03	5,0702E-03	79,4812	1,3713E-03	3,3732E-03	126,1594	1,0241E-03	2,5234E-03	181,1272	4,0629E-04	1,0012E-03	519,9449	
1,6	5,5023E-03	1,0090E-02	69,7523	2,6838E-03	5,0128E-03	165,9693	1,7750E-03	3,3370E-03	256,9767	1,3261E-03	2,5016E-03	357,6404	5,2691E-04	1,0013E-03	1031,8708	
1,8	6,6433E-03	9,9936E-03	178,4708	3,2573E-03	5,1286E-03	430,6010	2,1561E-03	3,4124E-03	675,7305	1,6087E-03	2,5429E-03	935,8299	6,3625E-04	9,9478E-04	2695,4199	

Tabla II.4: Resultados para TolQ = 10^{-6} con condiciones de contorno de orden 1.

TolQ = 10-3															
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500		
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]
0,4	4.8940E-06	2.9219E-03	15,9738	1.1454E-05	5.8948E-03	17,9330	1.6193E-05	8.1532E-03	26,5410	1.8421E-05	9.2062E-03	37,7329	1.9779E-05	9.8348E-03	111,6340
0,6	2.4144E-05	5.8377E-04	7,6390	2.1125E-05	4.0134E-04	21,1732	1.8757E-05	3.3658E-04	34,3299	2.1470E-05	3.7409E-04	48,4994	2.1291E-05	3.6207E-04	146,2329
0,8	3.6356E-05	1.8094E-04	8,2240	2.3476E-05	8.6913E-05	21,1661	2.0892E-05	6.9369E-05	33,1417	2.2911E-05	7.1940E-05	45,0932	2.1152E-05	6.3170E-05	139,0672
1	8.7733E-05	8.9743E-05	1,1232	3.3902E-05	3.4671E-05	2,6794	2.6192E-05	2.6783E-05	3,9140	2.3646E-05	2.4179E-05	5,7400	2.2194E-05	2.2692E-05	19,6387
1,2	1.4891E-04	4.0690E-05	17,2691	5.3632E-05	2.1998E-05	42,6511	3.4049E-05	1.0035E-05	63,9347	2.8157E-05	1.3761E-05	86,3046	2.3159E-05	1.0699E-05	249,8722
1,4	2.4181E-04	5.2053E-05	35,9051	7.2394E-05	9.7419E-06	79,9006	4.2238E-05	1.6370E-05	124,9817	3.3186E-05	1.3022E-05	172,2064	2.4434E-05	5.1194E-06	515,7719
1,6	4.2282E-04	1.9926E-04	73,2314	1.2491E-04	5.5169E-05	174,5757	6.7090E-05	2.3987E-05	267,8149	4.7285E-05	1.1732E-05	367,0869	2.5263E-05	2.9766E-06	1126,8612
1,8	6.6224E-04	3.1222E-04	192,6165	1.4408E-04	5.5468E-05	444,3866	9.5503E-05	4.8652E-05	696,7741	5.7630E-05	2.7401E-05	954,3040	3.1366E-05	4.9297E-06	2869,3556

Tabla II.5: Resultados para TolQ = 10^{-3} con condiciones de contorno de orden 2.

TolQ = 10-4															
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500		
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]
0,4	3,2864E-07	2,7859E-04	22,9804	1,1779E-06	7,1060E-04	27,8076	1,8046E-06	9,7749E-04	38,3667	2,1059E-06	1,1129E-03	52,7364	2,0882E-06	1,0829E-03	173,4599
0,6	6,1611E-06	2,7704E-04	10,6722	3,2263E-06	9,8216E-05	28,6313	2,4953E-06	6,1237E-05	48,1037	2,2069E-06	4,8104E-05	69,2816	2,1242E-06	3,7687E-05	204,6841
0,8	2,5856E-05	1,4978E-04	11,1020	7,8936E-06	4,0792E-05	28,3399	4,6313E-06	2,1267E-05	45,6188	3,4991E-06	1,4531E-05	63,7937	2,4124E-06	7,7497E-06	189,1558
1	6,9626E-05	7,1223E-05	1,3898	1,8380E-05	1,8797E-05	3,2230	9,3055E-06	9,5159E-06	5,0727	6,1743E-06	6,3137E-06	6,9718	2,7643E-06	2,8264E-06	22,8416
1,2	1,3237E-04	3,2337E-05	22,0972	3,4022E-05	1,2226E-05	51,9862	1,6543E-05	1,2455E-06	84,4480	9,9033E-06	4,5904E-06	112,9359	3,4263E-06	8,3796E-07	326,5992
1,4	2,2636E-04	5,6862E-05	46,4389	5,3400E-05	3,9234E-06	103,9585	2,5411E-05	1,0956E-05	164,8657	1,5360E-05	7,4237E-06	229,5269	4,6420E-06	7,9437E-07	677,3285
1,6	4,0906E-04	2,0255E-04	96,1341	1,1035E-04	5,8738E-05	225,0002	5,1592E-05	2,7725E-05	345,4086	3,0099E-05	1,5733E-05	475,4419	5,3910E-06	1,1090E-06	1469,4685
1,8	6,4704E-04	3,1496E-04	249,5092	1,3344E-04	5,3029E-05	581,4140	8,8406E-05	4,5850E-05	906,9111	4,8274E-05	2,4452E-05	1235,2114	1,5134E-05	7,8877E-06	2891,8489

Tabla II.6: Resultados para TolQ = 10^{-4} con condiciones de contorno de orden 2.

TolQ = 10-5																
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500			
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	
0,4	2,7306E-07	5,1388E-04	19,8046	1,5992E-07	1,8090E-04	33,3478	2,1799E-07	1,5740E-04	49,4891	1,8786E-07	1,2241E-04	75,4917	2,0174E-07	1,0867E-04	227,6507	
0,6	4,9912E-06	2,5636E-04	13,1849	1,4070E-06	6,6907E-05	35,2222	6,9023E-07	3,0410E-05	59,3292	5,0546E-07	1,9174E-05	84,0631	2,4919E-07	5,9175E-06	254,5987	
0,8	2,5081E-05	1,4748E-04	12,6599	6,3013E-06	3,6067E-05	34,2626	2,9098E-06	1,6164E-05	53,2100	1,7314E-06	9,2937E-06	72,9004	4,5521E-07	1,9596E-06	219,7906	
1	6,8015E-05	6,9576E-05	1,6385	1,6805E-05	1,7187E-05	3,8422	7,5458E-06	7,7165E-06	6,0380	4,3327E-06	4,4305E-06	8,0821	8,7089E-07	8,9046E-07	26,5270	
1,2	1,3087E-04	3,1576E-05	25,9257	3,2017E-05	1,1222E-05	62,7448	1,4748E-05	3,4187E-07	97,8227	8,0081E-06	3,6279E-06	132,4156	1,5186E-06	1,2152E-07	372,5025	
1,4	2,2501E-04	5,7283E-05	53,3673	5,1517E-05	3,3428E-06	123,4398	2,3800E-05	1,0405E-05	192,2494	1,3679E-05	6,8438E-06	269,3281	2,8261E-06	1,3686E-06	774,4403	
1,6	4,0784E-04	2,0285E-04	108,0715	1,0897E-04	5,9085E-05	259,4988	5,0133E-05	2,8102E-05	403,4022	2,8514E-05	1,6143E-05	560,4874	3,5848E-06	1,5051E-06	1672,2369	
1,8	6,4564E-04	3,1521E-04	297,9519	1,3250E-04	5,2792E-05	679,0093	8,7885E-05	4,5569E-05	1070,0153	4,7671E-05	2,4154E-05	869,5453	1,4052E-05	8,1821E-06	2226,6718	

Tabla II.7: Resultados para TolQ = 10⁻⁵ con condiciones de contorno de orden 2.

TolQ = 10-6															
n	N = 50			N = 100			N = 150			N = 200			N = 500		
	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]	Norma L2	Diferencia ζ_c	CPU time [s]
0,4	2,4634E-07	4,9271E-04	13,5579	6,8619E-08	1,2756E-04	23,9106	3,7731E-08	6,1245E-05	31,9780	3,2357E-08	4,0827E-05	44,1967	2,0871E-08	1,4788E-05	149,7639
0,6	4,9133E-06	2,5497E-04	8,2246	1,2166E-06	6,3540E-05	21,6810	5,5006E-07	2,7944E-05	35,7879	3,1723E-07	1,5896E-05	50,1461	6,8351E-08	2,8342E-06	157,3387
0,8	2,4913E-05	1,4698E-04	7,9647	6,1384E-06	3,5583E-05	20,1784	2,7275E-06	1,5622E-05	30,7010	1,5384E-06	8,7209E-06	42,5247	2,6360E-07	1,3916E-06	138,0274
1	6,7872E-05	6,9430E-05	0,9643	1,6646E-05	1,7024E-05	2,2570	7,3625E-06	7,5290E-06	3,5421	4,1361E-06	4,2294E-06	4,8536	6,7581E-07	6,9100E-07	18,9564
1,2	1,3073E-04	3,1507E-05	14,8650	3,1856E-05	1,1142E-05	36,7205	1,4564E-05	2,4897E-07	56,5079	7,8324E-06	3,5384E-06	77,9591	1,3271E-06	2,1891E-07	229,6396
1,4	2,2482E-04	5,7344E-05	30,0704	5,1329E-05	3,2848E-06	69,6060	2,3638E-05	1,0349E-05	109,6934	1,3525E-05	6,7896E-06	159,5465	2,6526E-06	1,4265E-06	476,5024
1,6	4,0768E-04	2,0289E-04	61,0091	1,0881E-04	5,9126E-05	147,7879	4,9988E-05	2,8140E-05	230,8506	2,8368E-05	1,6181E-05	321,9513	3,4125E-06	1,5447E-06	1003,7937
1,8	6,4551E-04	3,1523E-04	169,5893	1,3239E-04	5,2765E-05	386,4638	8,7835E-05	4,5541E-05	600,6058	4,7614E-05	2,4124E-05	830,5077	1,3955E-05	8,2115E-06	2518,3979

Tabla II.8: Resultados para TolQ = 10⁻⁶ con condiciones de contorno de orden 2.

II.2. Gráficas de convergencia

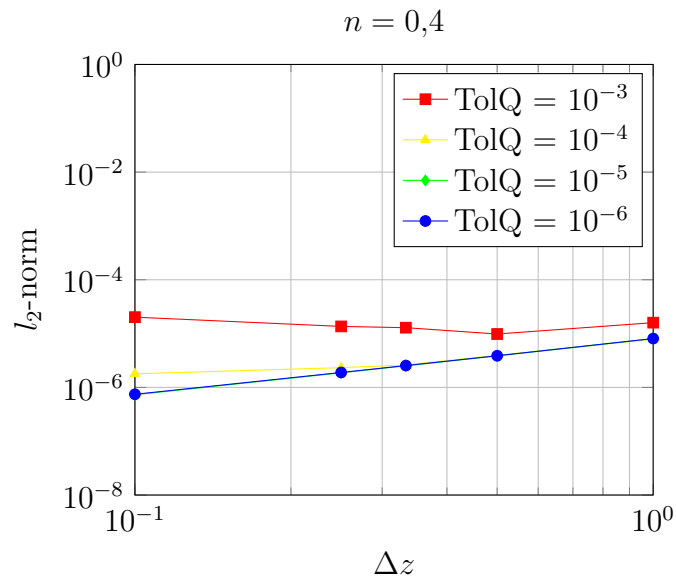


Figura II.1: Convergencia de la norma L2 para $n=0,4$ con coeficientes de orden 1.

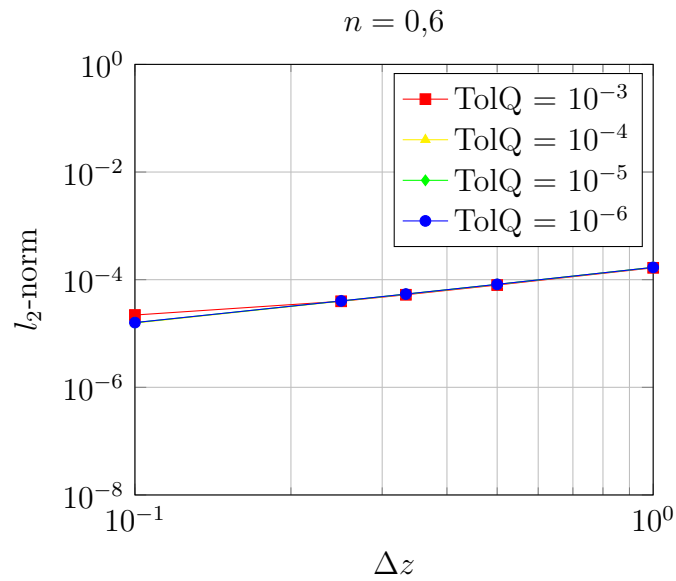


Figura II.2: Convergencia de la norma L2 para $n=0,6$ con coeficientes de orden 1.

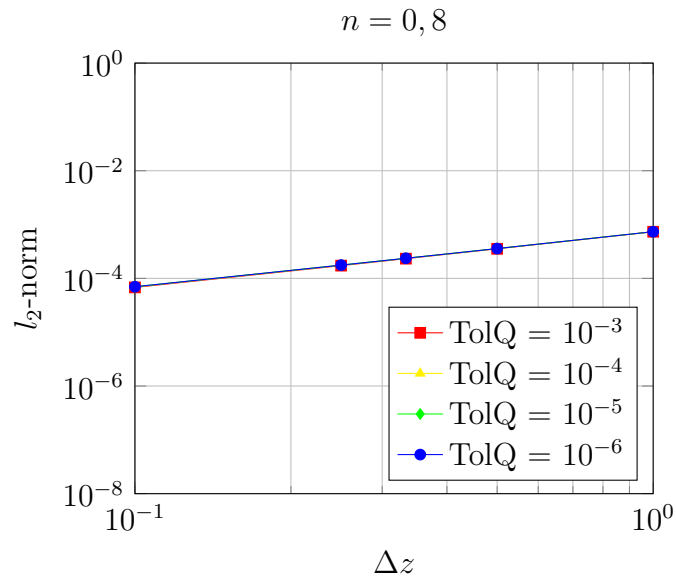


Figura II.3: Convergencia de la norma L2 para $n=0,8$ con coeficientes de orden 1.

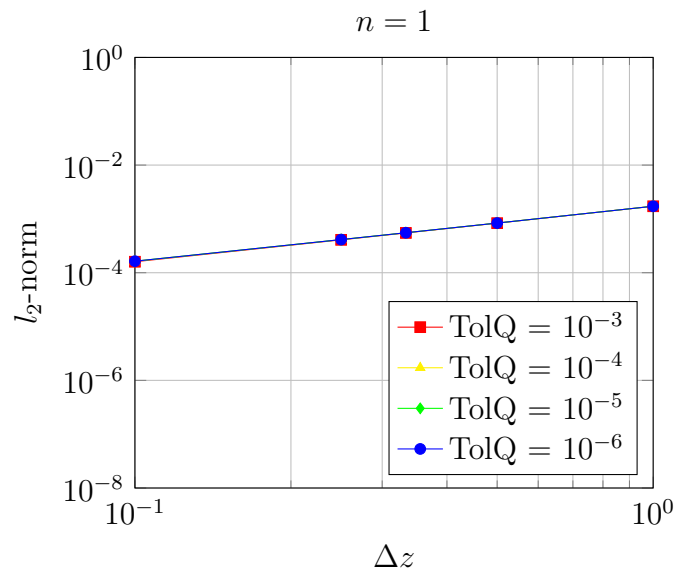


Figura II.4: Convergencia de la norma L2 para $n=1$ con coeficientes de orden 1.

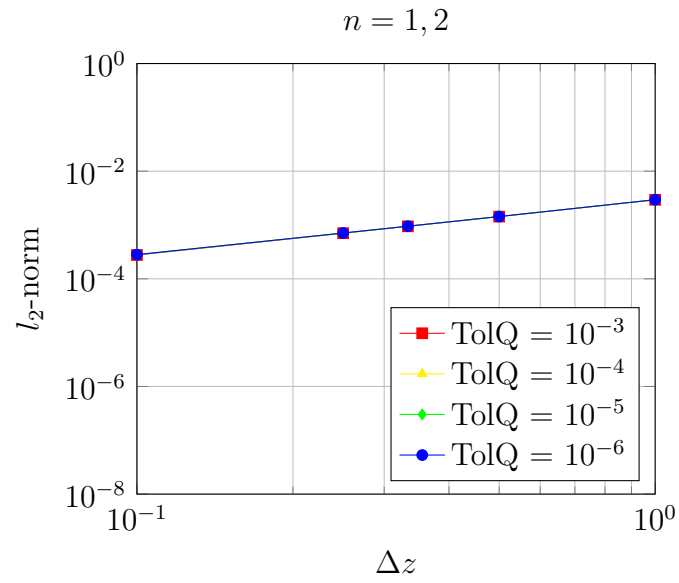


Figura II.5: Convergencia de la norma L2 para $n=1,2$ con coeficientes de orden 1.

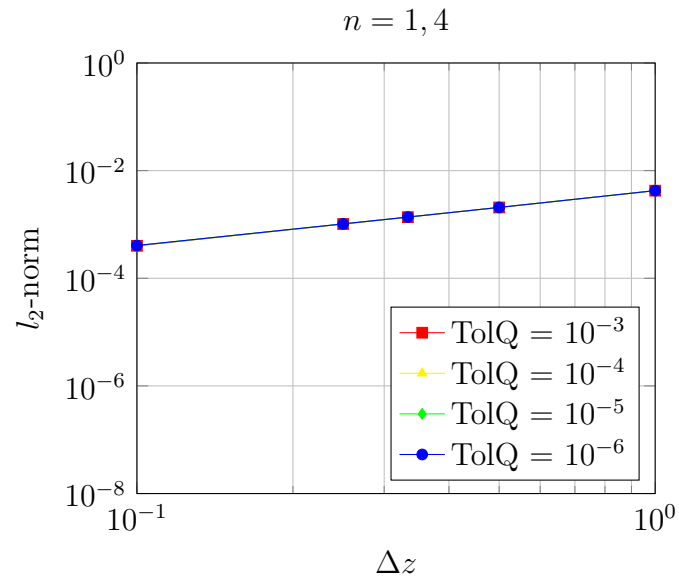


Figura II.6: Convergencia de la norma L2 para $n=1,4$ con coeficientes de orden 1.

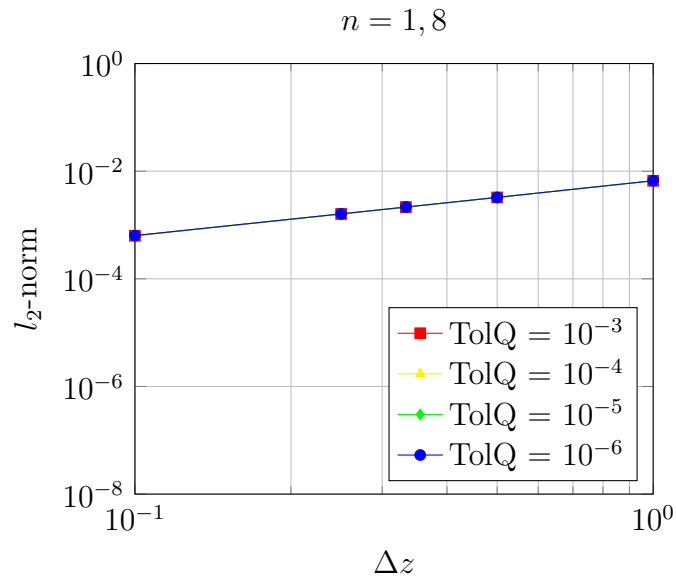


Figura II.7: Convergencia de la norma L2 para $n=1,8$ con coeficientes de orden 1.

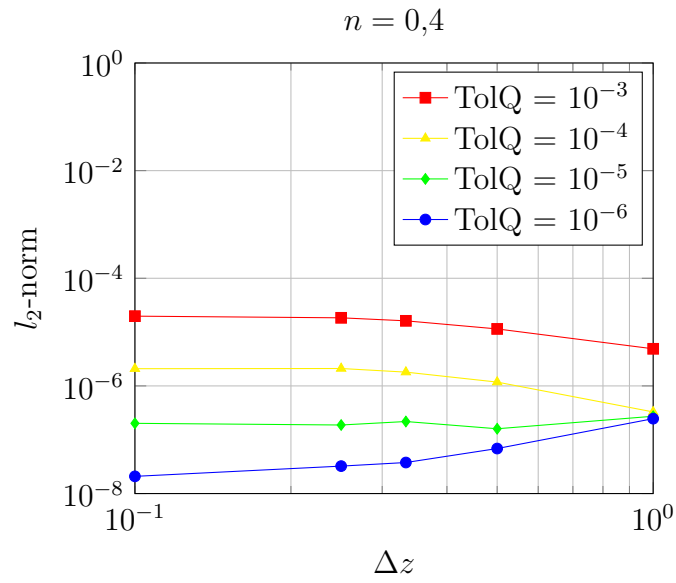


Figura II.8: Convergencia de la norma L2 para $n=0,4$ con coeficientes de orden 2.

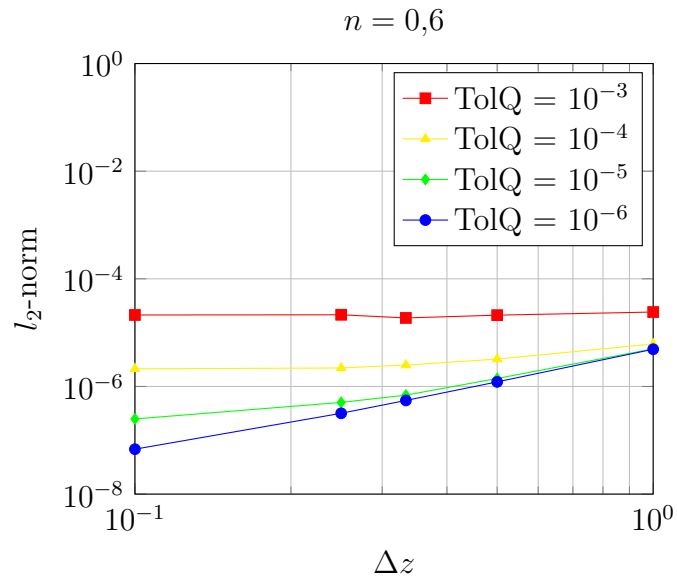


Figura II.9: Convergencia de la norma L2 para $n=0,6$ con coeficientes de orden 2.

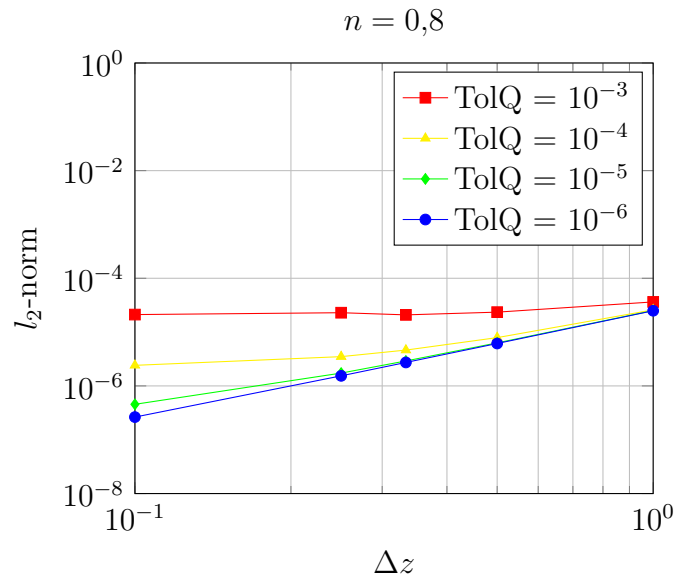


Figura II.10: Convergencia de la norma L2 para $n=0,8$ con coeficientes de orden 2.

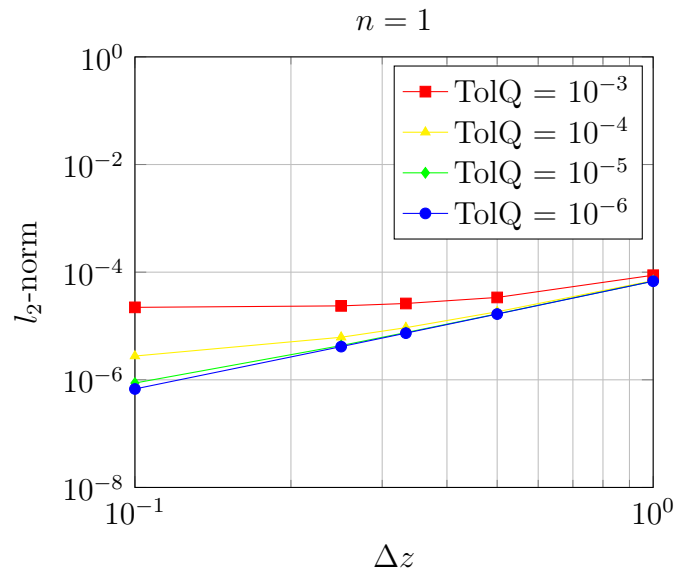


Figura II.11: Convergencia de la norma L2 para $n=1$ con coeficientes de orden 2.

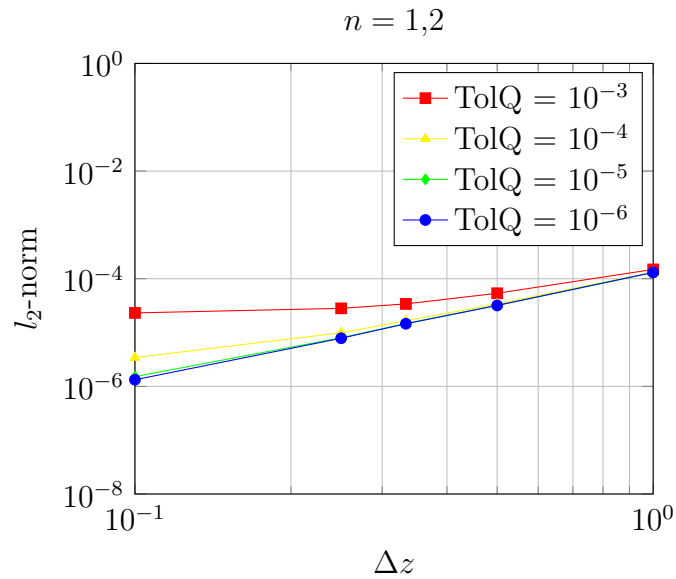


Figura II.12: Convergencia de la norma L2 para $n=1,2$ con coeficientes de orden 2.

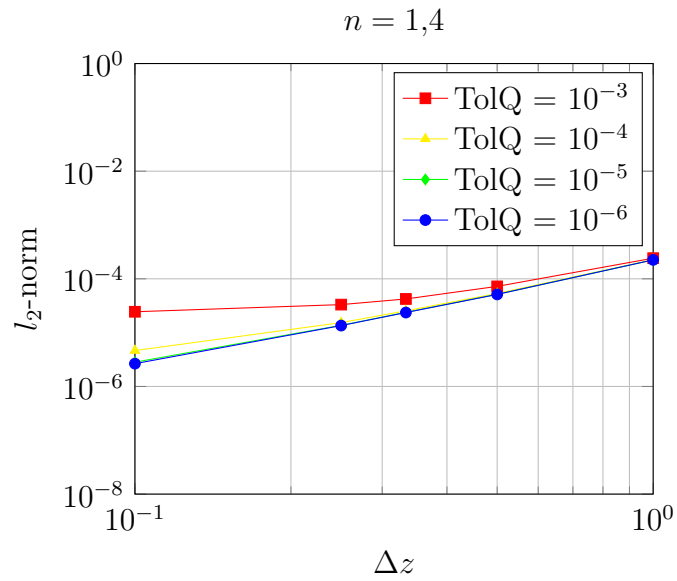


Figura II.13: Convergencia de la norma L2 para $n=1,4$ con coeficientes de orden 2.

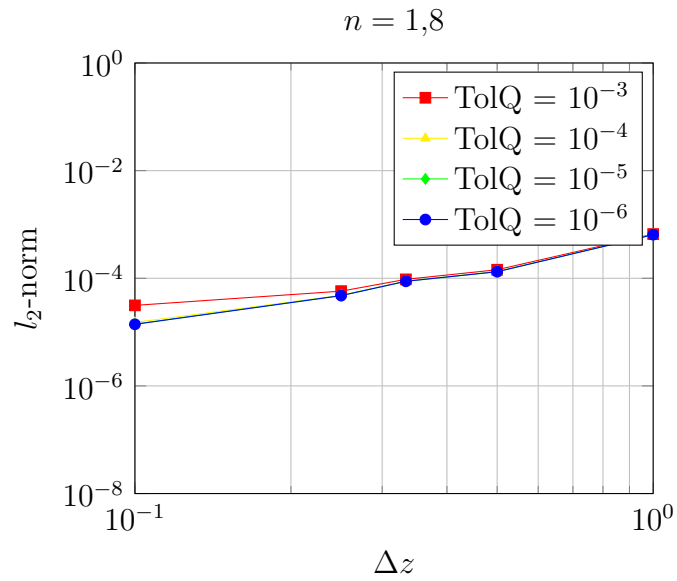


Figura II.14: Convergencia de la norma L2 para $n=1,8$ con coeficientes de orden 2.

Anexos III

Perfiles de velocidad y viscosidad

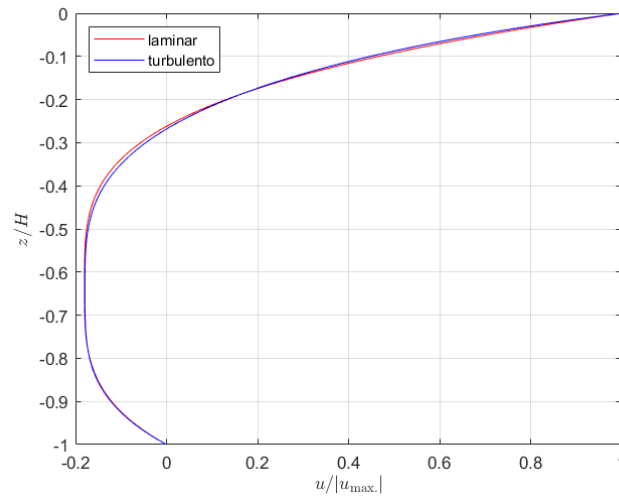


Figura III.1: Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 0.4$.

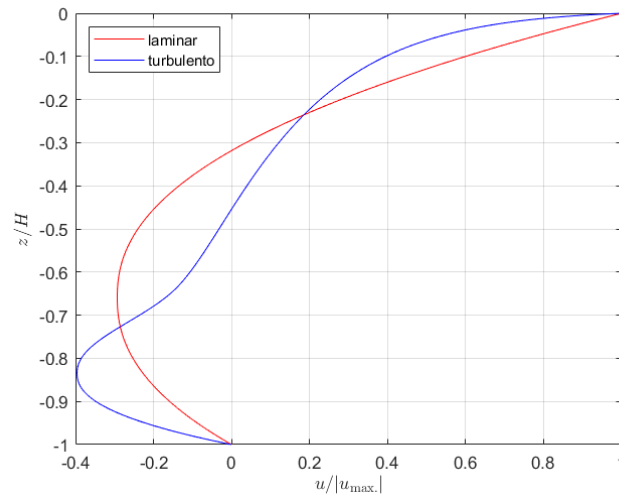


Figura III.2: Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 0.8$.

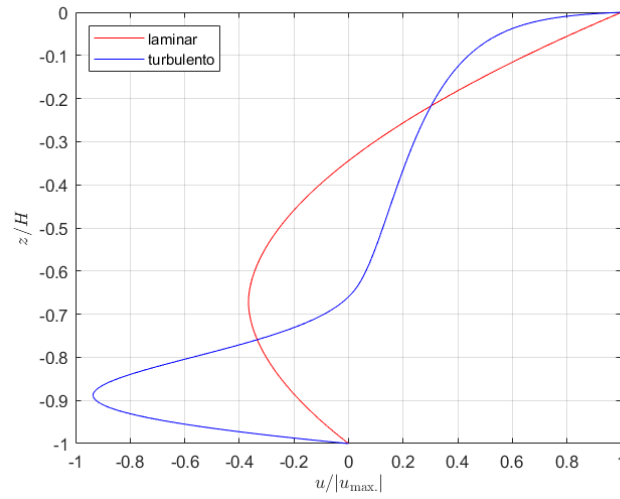


Figura III.3: Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 1.2$.

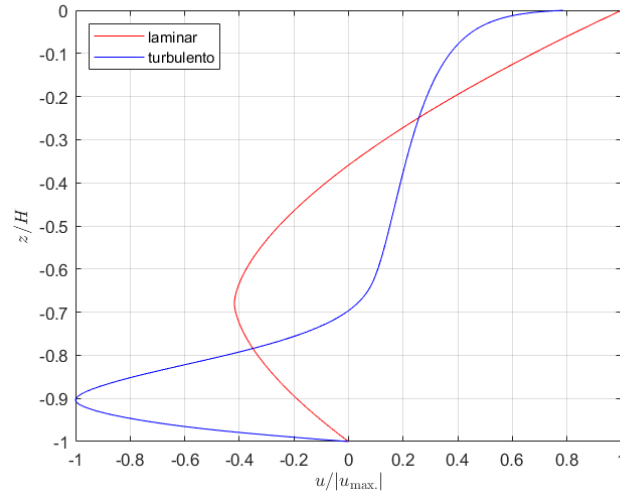


Figura III.4: Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 1.6$.

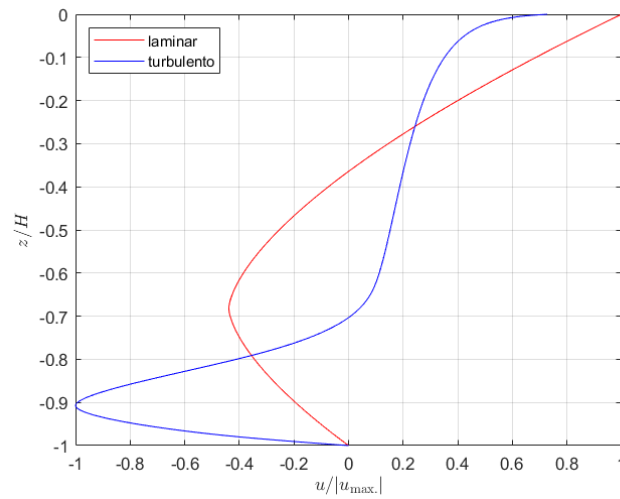
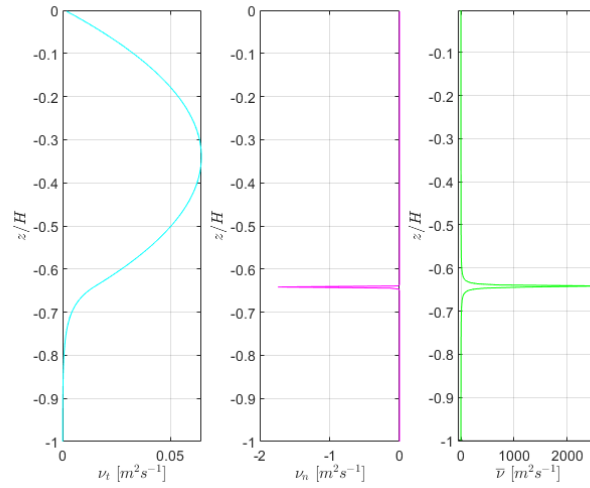
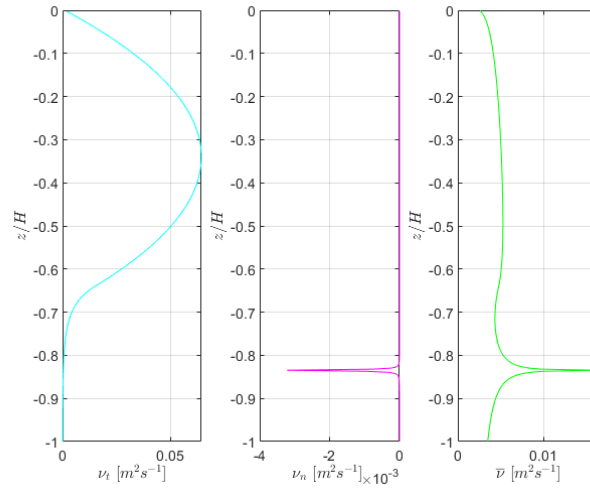
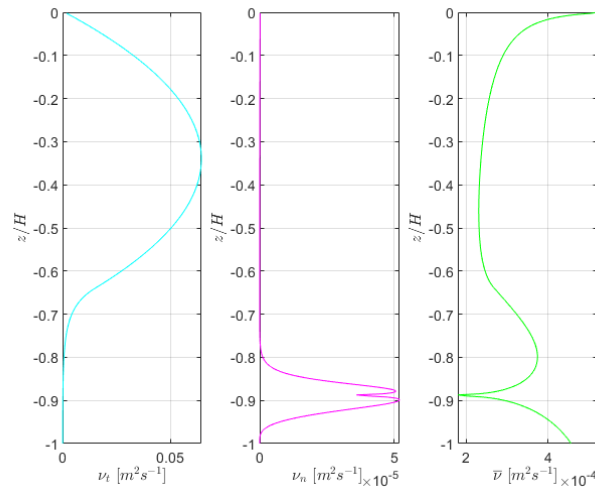


Figura III.5: Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 1.8$.

Figura III.6: Perfiles de viscosidad para $n = 0.4$.Figura III.7: Perfiles de viscosidad para $n = 0.8$.Figura III.8: Perfiles de viscosidad para $n = 1.2$.

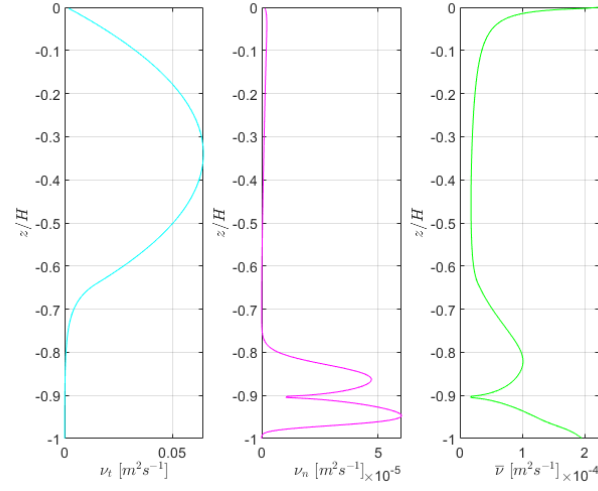


Figura III.9: Perfiles de viscosidad para $n = 1.6$.

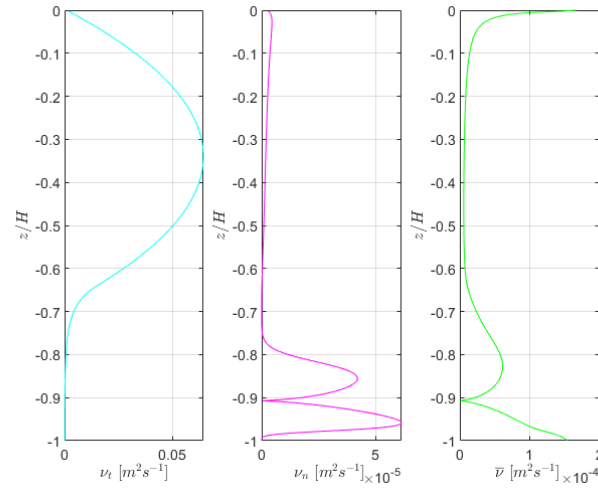


Figura III.10: Perfiles de viscosidad para $n = 1.8$.

Bibliografía

- [1] Kowalik, Z., & Murty, T. (1993). *Numerical Modeling of Ocean Dynamics*. World Scientific.
- [2] Baquerizo-Azofra, A., Losada-Rodríguez, M., & López-Rodríguez, M. (2005). *Fundamentos del movimiento oscilatorio*. Editorial Universidad de Granada.
- [3] Valle-Levinson, A. (2022). *Introduction to Estuarine Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- [4] Cushman-Roisin, B., & Beckers, J. (2009). *Introduction to Geophysical FLuid Dynamics. Physical and Numerical Aspects*. Academic Press.
- [5] Wilcox, D. (2006). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries.
- [6] Llorente, V., Padilla, E., & Díez-Minguito, M. (2023). Non-newtonian wind-driven flows in homogeneous semiclosed basins. *arXiv*.

Lista de Figuras

II.1	Convergencia de la norma L2 para $n=0,4$ con coeficientes de orden 1.	18
II.2	Convergencia de la norma L2 para $n=0,6$ con coeficientes de orden 1.	18
II.3	Convergencia de la norma L2 para $n=0,8$ con coeficientes de orden 1.	19
II.4	Convergencia de la norma L2 para $n=1$ con coeficientes de orden 1.	19
II.5	Convergencia de la norma L2 para $n=1,2$ con coeficientes de orden 1.	20
II.6	Convergencia de la norma L2 para $n=1,4$ con coeficientes de orden 1.	20
II.7	Convergencia de la norma L2 para $n=1,8$ con coeficientes de orden 1.	21
II.8	Convergencia de la norma L2 para $n=0,4$ con coeficientes de orden 2.	21
II.9	Convergencia de la norma L2 para $n=0,6$ con coeficientes de orden 2.	22
II.10	Convergencia de la norma L2 para $n=0,8$ con coeficientes de orden 2.	22
II.11	Convergencia de la norma L2 para $n=1$ con coeficientes de orden 2.	23
II.12	Convergencia de la norma L2 para $n=1,2$ con coeficientes de orden 2.	23
II.13	Convergencia de la norma L2 para $n=1,4$ con coeficientes de orden 2.	24
II.14	Convergencia de la norma L2 para $n=1,8$ con coeficientes de orden 2.	24
III.1	Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 0.4$.	25
III.2	Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 0.8$.	25
III.3	Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 1.2$.	26
III.4	Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 1.6$.	26
III.5	Perfil de velocidad en régimen laminar y turbulento para $n = 1.8$.	26
III.6	Perfiles de viscosidad para $n = 0.4$.	27
III.7	Perfiles de viscosidad para $n = 0.8$.	27
III.8	Perfiles de viscosidad para $n = 1.2$.	27
III.9	Perfiles de viscosidad para $n = 1.6$.	28
III.10	Perfiles de viscosidad para $n = 1.8$.	28

Lista de Tablas

II.1	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-3}$ con condiciones de contorno de orden 1. .	14
II.2	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-4}$ con condiciones de contorno de orden 1. .	14
II.3	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-5}$ con condiciones de contorno de orden 1. .	15
II.4	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-6}$ con condiciones de contorno de orden 1. .	15
II.5	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-3}$ con condiciones de contorno de orden 2. .	16
II.6	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-4}$ con condiciones de contorno de orden 2. .	16
II.7	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-5}$ con condiciones de contorno de orden 2. .	17
II.8	Resultados para $\text{TolQ} = 10^{-6}$ con condiciones de contorno de orden 2. .	17