



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Grado

Estudio de flujos turbulentos no newtonianos en  
cuencas semicerradas de Titán

Non-newtonian turbulence flows in Titan's  
semiclosed basins

Autor

Eloy Solanes Gracia

Directores

Víctor Javier Llorente Lázaro

Manuel Díez Minguito

Titulación del autor

Grado en Ingeniería Mecánica

---

## AGRADECIMIENTOS

Este Trabajo Fin de Grado (TFG) nace de mi curiosidad y del interés por aprender, planteándome un reto personal que he tratado de superar con dedicación y esfuerzo.

Quiero agradecer a Víctor Javier Llorente Lázaro y a Manuel Díez Minguito, director y codirector de este TFG, por su compromiso y dedicación a lo largo de todo el proceso. Gracias a ellos he desarrollado con éxito este trabajo y he aprendido enormemente en el camino.

Agradezco también a mi familia y amigos por brindarme apoyo y confianza a lo largo de esta experiencia.



---

## RESUMEN

En este Trabajo Fin de Grado (TFG) se analiza la circulación inducida por viento en cuencas semicerradas considerando flujo no newtoniano. Se pretende dar una aplicación a Ligeia Mare, uno de los principales mares de Titán, la luna más grande de Saturno. Dadas las condiciones ambientales extremas de Titán, existen ríos, lagos y mares de metano líquido en su superficie cuyas propiedades reológicas difieren de las de un fluido newtoniano.

Para ello se parte de un modelo matemático en régimen laminar que permite generalizar una relación entre el gradiente de presión barotrópico y el esfuerzo debido al viento. Esta generalización, denominada  $\zeta_c$ , luego se empleará para estudiar esta relación en flujo no newtoniano. Posteriormente, al modelo se le integra el fenómeno de la turbulencia, introduciendo tres viscosidades: la viscosidad efectiva promedio, la viscosidad turbulenta y la viscosidad no newtoniana. Esta última viscosidad es debido a las correlaciones entre las fluctuaciones del gradiente de velocidad y las fluctuaciones de la viscosidad efectiva, la cual en este TFG es necesario modelizarla para cerrar la turbulencia. Para la modelización de la viscosidad turbulenta se utilizará una fórmula parametrizada y dependiente de la profundidad.

El modelo turbulento se implementa en un código de MATLAB que permite obtener una solución numérica del campo de velocidades en cuencas semicerradas. El código se ha verificado a través de un estudio de convergencia, en el que se compara la solución analítica con la solución numérica. Este análisis permite determinar el número de nodos y la tolerancia de caudal óptimos, garantizando precisión en los resultados.

Mediante simulaciones, se analizan los perfiles de viscosidad y cambio de la reología, así como la evolución de  $\zeta_c$ . También se estudia la influencia que tienen distintos perfiles de viscosidad turbulenta sobre la dinámica del fluido. Por último, se realiza la aplicación en Ligeia Mare, donde el análisis de las componentes horizontal y vertical de la velocidad permiten identificar procesos de recirculación inducidos por viento.



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Objetivos . . . . .	5
1.2	Alcance del trabajo . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modelización matemática</b>	<b>7</b>
2.1	Flujo laminar no newtoniano impulsado por el viento . . . . .	7
2.1.1	Ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno . . . . .	7
2.1.2	Condición del flujo . . . . .	9
2.2	Flujo turbulento no newtoniano impulsado por el viento . . . . .	9
2.2.1	Ecuaciones promediadas . . . . .	9
2.2.2	Cierre de la turbulencia no newtoniana . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Modelo numérico</b>	<b>13</b>
3.1	Código NONASPE . . . . .	13
3.2	Verificación numérica . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>17</b>
4.1	Caso no newtoniano laminar . . . . .	17
4.2	Estudio de la columna de hidrocarburos líquidos . . . . .	19
4.3	Aplicación a Ligeia Mare (Titán) . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>29</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>33</b>
	<b>Lista de Tablas</b>	<b>34</b>

## Anexos (Documento adicional)

<b>I</b>	<b>Desarrollos teóricos</b>
----------	-----------------------------

**II Resultados de convergencia**

**III Perfiles de velocidad y viscosidad**





# Capítulo 1

## Introducción

En la Tierra, la circulación inducida por viento en cuencas semicerradas ha sido ampliamente estudiada [1, 2]. Por un lado, el esfuerzo debido al viento genera una transferencia de momento sobre la vertical induciendo una corriente superficial en la misma dirección que el viento. Cuando esta corriente llega a la costa, el agua se hunde y retorna hacia mar abierto. Esto genera una corriente en el fondo que viaja en sentido contrario y, que en régimen estacionario, se compensa con la corriente superficial dando lugar a caudal cero en la columna de líquido, ver Figura 1.1.

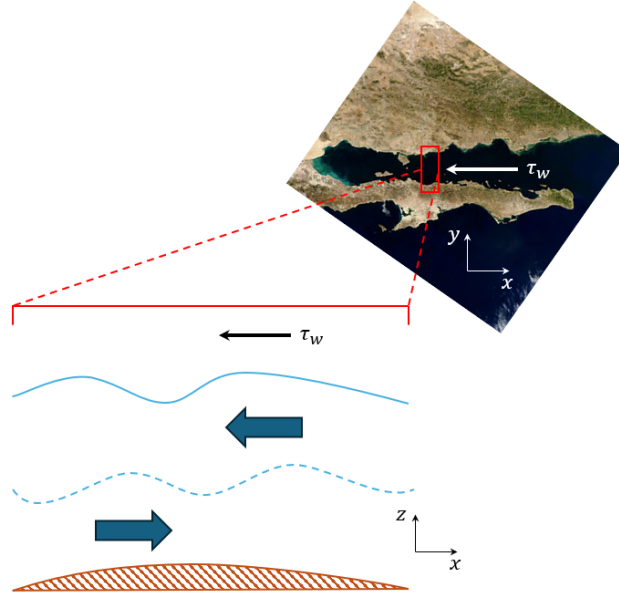


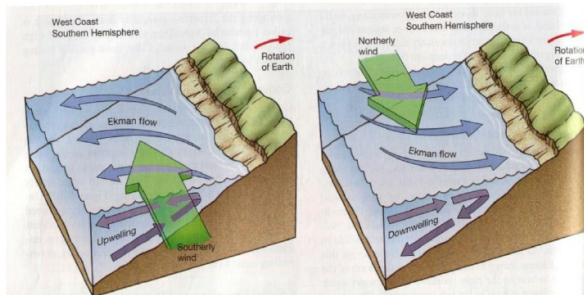
Figura 1.1: Ejemplo de la circulación inducida por viento. La imagen de arriba a la derecha corresponde al Golfo de California (Fuente: Wikipedia<sup>a</sup>). La línea discontinua azul corresponde a la profundidad donde la velocidad se hace nula.

---

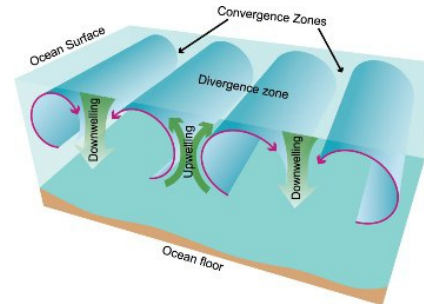
<sup>a</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Golfo\\_de\\_California](https://es.wikipedia.org/wiki/Golfo_de_California)

Por otro lado, el viento da lugar a procesos de *upwelling* (afloramiento) y *downwelling* (hundimiento), tanto en las costas como en mar abierto, ver Figura 1.2.

En el *upwelling*, se produce un transporte de aguas profundas ricas en nutrientes hacia la superficie, favoreciendo la proliferación de fitoplancton y sosteniendo ecosistemas marinos de gran productividad, fundamental para la pesca y el desarrollo del sector primario. El *downwelling* transporta oxígeno desde la superficie hacia capas profundas del océano, donde es utilizado por organismos en descomposición. Estos fenómenos generan una recirculación en los océanos, lo cual resulta esencial para el equilibrio de ecosistemas marinos.



(a) En la costa (Copyright ©2004 Pearson Prentice Hall, Inc.).



(b) En el océano (AE Nieblas, CSIRO).

Figura 1.2: Fenómenos de *upwelling* y *downwelling*.

Este estudio se traslada a Ligeia Mare, uno de los mares más extensos y relevantes de Titán, la mayor luna de Saturno. La atmósfera de Titán está compuesta en un 94 % de nitrógeno, un 5 % de metano y pequeñas cantidades de otros hidrocarburos y nitrilos<sup>1</sup>. Al igual que en la Tierra existe un ciclo hidrológico lo que permite la formación de ríos, lagos y mares en la superficie, pero en este caso de metano en lugar de agua.

El metano líquido se modeliza en este trabajo como un fluido no newtoniano, descrito mediante una ley de potencia. Debido a las condiciones atmosféricas de Titán, la temperatura se encuentra próxima al punto triple del metano. Alrededor de esta temperatura, el metano puede exhibir un comportamiento no newtoniano, ver [3]. Además, los sedimentos que son arrastrados por los ríos de Titán hacen que el carácter reológico del fluido pueda cambiar, ver [4].

Finalmente, cabe señalar que Titán se encuentra en rotación sincrónica con Saturno, lo que implica que el efecto de Coriolis es menor que en la Tierra. Esta circunstancia hace que otros factores que controlan la circulación, como el viento, tomen una mayor relevancia.

En la Tabla 1.1 se resumen las características físicas de Titán que son relevantes para este estudio. Estos parámetros se mantienen constantes a lo largo de todas las simulaciones.

<sup>1</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Tit%C3%A1n\\_\(sat%C3%A9lite\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Tit%C3%A1n_(sat%C3%A9lite))

Variable	Valor
Gravedad, $g$	1.352 m/s <sup>2</sup>
Temperatura, $T_0$	93 K
Presión atmosférica, $p_{\text{atm}}$	150 kPa
Densidad del metano, $\rho$	420 kg/m <sup>3</sup>

Tabla 1.1: Parámetros físicos de Titán

El presente Trabajo Fin de Grado (TFG) se organiza en un total de cinco capítulos. En el Capítulo 1 se describen los objetivos principales y el alcance del TFG. En el Capítulo 2 se introducen los fundamentos teóricos y se desarrolla el modelo matemático, considerando en primer lugar régimen laminar para posteriormente incorporar el fenómeno de la turbulencia. En el Capítulo 3 se describe el código de simulación y se realiza la verificación del algoritmo. El Capítulo 4 recoge los resultados obtenidos, en primer lugar los resultados matemáticos, en segundo lugar las simulaciones numéricas, y finalmente la aplicación al caso práctico de Ligeia Mare. Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones, destacando los resultados más relevantes del TFG.

## 1.1. Objetivos

El presente proyecto tiene como objetivo principal generalizar los perfiles de velocidad en cuencas semicerradas para flujos turbulentos no newtonianos inducidos por viento. Se busca obtener un modelo matemático que permita comprender cómo la turbulencia influye en el campo de velocidades para este tipo de fluidos y de qué manera se establece la relación entre el gradiente barotrópico y el esfuerzo debido al viento. Finalmente, se persigue aplicar el modelo al estudio de Ligeia Mare, un mar de Titán, lo que permite explorar la dinámica de estos fluidos en condiciones realistas.

## 1.2. Alcance del trabajo

El trabajo se enmarca en un análisis teórico para generalizar la relación entre el gradiente de presión barotrópico y el esfuerzo debido al viento, en régimen laminar. Por otro lado, se realiza un análisis numérico del comportamiento de flujos turbulentos no newtonianos aplicados a cuencas semicerradas de Titán. Para ello, se han formulado y simplificado las ecuaciones de Navier-Stokes, a las que se ha aplicado la descomposición de Reynolds con el fin de estudiar los efectos de la turbulencia modelizando la correlación entre las fluctuaciones de velocidad y las fluctuaciones de viscosidad aparente. Se ha verificado y adaptado un código numérico que permite obtener simulaciones orientadas al estudio del campo de velocidades en este tipo de flujos. Para

el estudio específico de un mar de Titán, se ha ajustado el código para incorporar la batimetría de Ligeia Mare. El presente trabajo se limita únicamente a la modelización y simulación turbulenta no newtoniana.

# Capítulo 2

## Modelización matemática

### 2.1. Flujo laminar no newtoniano impulsado por el viento

#### 2.1.1. Ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno

El modelo matemático se basa en las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales describen el movimiento de un fluido. Se considera una cuenca homogénea en donde el flujo se desarrolla a lo largo de la cuenca (eje  $x$ ) y en estado estacionario con un número de Rossby pequeño y un radio de deformación de Rossby grande. En esta primera parte se considera que el fluido en la cuenca tiene régimen laminar, para posteriormente ver como cambian las soluciones cuando se considere turbulencia, Capítulo 4 (Sección 2). Aplicando la aproximación *rigid-lid*, dicho flujo geofísico se considera en equilibrio hidrostático, en el que el gradiente de presión barotrópico se equilibra con la divergencia del esfuerzo viscoso vertical. Se seguirán los mismos conceptos fundamentales de cuencas semicerradas y cerradas, ver [1, Capítulo 6], añadiendo en este trabajo el comportamiento no newtoniano del fluido. La ecuación de gobierno queda de la siguiente manera:

$$0 = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad (2.1)$$

donde  $g$  es la gravedad,  $\rho$  es una densidad de referencia,  $\eta$  es la elevación de la lamina del fluido y  $\tau$  el esfuerzo viscoso. El desarrollo de la Ecuación (2.1) se realiza en la Sección I.1 del Anexo I. El primer término del lado derecho de la Ecuación (2.1) es el gradiente de presión barotrópico. Este gradiente depende únicamente de la coordenada longitudinal de la cuenca y no de la profundidad. La velocidad del fluido se puede representar como  $u = u(x, z)$ , ver Figura 2.1.

A la Ecuación (2.1) es necesario añadirle una ecuación constitutiva que describa el comportamiento reológico del fluido no newtoniano y relacione el esfuerzo cortante ( $\tau$ ) con la velocidad de cizallamiento ( $\partial u / \partial z$ ). De manera general, esta relación se puede

expresar como

$$\tau = \nu_e \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.2a)$$

donde  $\nu_e$  es la viscosidad (cinemática) efectiva y cuya dependencia con la velocidad de cizallamiento dependerá del modelo no newtoniano utilizado, ver [5]. En este trabajo se ha modelizado  $\nu_e$  mediante una ley de potencia. En esta ley, la viscosidad efectiva depende de la velocidad de cizallamiento de la siguiente manera:

$$\nu_e = K \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1}, \quad (2.2b)$$

donde los parámetros  $K$  y  $n$  son el índice de consistencia y el índice de potencia del fluido, respectivamente. Si  $n < 1$ , el fluido se denomina pseudoplástico (*shear thinning* en inglés), y esto quiere decir que la viscosidad efectiva disminuye cuando aumentamos la velocidad de deformación. En el caso de  $n > 1$ , el fluido se denomina dilatante (*shear thickening* en inglés) y la viscosidad efectiva aumenta cuando aumentamos la velocidad de deformación. Si  $n = 1$  entonces recuperamos el comportamiento newtoniano con  $K$  igual a la viscosidad molecular del fluido. En este trabajo se considera unos valores de índice de potencia entre 0.4 y 1.8. Esto es debido a que el modelo de ley de potencia de la Ecuación (2.2b) muestra un comportamiento no físico a velocidades de cizallamiento muy bajas y muy altas si  $n \approx 0$  o  $n \gg 1$ , ver [6, 7].

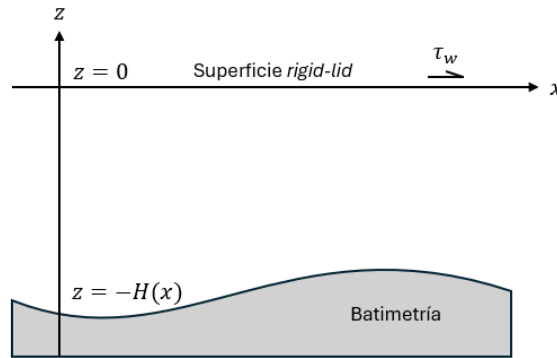


Figura 2.1: Dominio de trabajo de la Ecuación (2.1).

Para resolver la Ecuación (2.1), junto con las Ecuaciones (2.2), se imponen dos condiciones de contorno. En la superficie libre ( $z = 0$ ) se establece que el movimiento entre el líquido y el gas es producido por esfuerzo cortante debido al viento. En el fondo ( $z = -H$ ) se considera que no hay deslizamiento entre el fluido y el lecho marino, por tanto, la velocidad será nula en esa coordenada.

Finalmente, como resultado se obtiene el siguiente problema de valor de contorno

(PVC):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial z} \right) = g \frac{\partial \eta}{\partial x}, & -H < z < 0 \\ \rho \Gamma|_0 \frac{\partial u}{\partial z}|_0 = \tau_w, & z = 0 \\ u(-H) = 0, & z = -H \end{cases} \quad (2.3)$$

con  $\Gamma = \nu_e$  de la Ecuación (2.2b). El esfuerzo cortante debido al viento se denota por  $\tau_w$  y se calcula como  $\tau_w = \rho_a C_D U_{10}^2$ , donde  $\rho_a$  es la densidad del aire,  $U_{10}$  es la velocidad del viento calculada a 10 metros de altura y  $C_D$  es el coeficiente de arrastre aerodinámico. Este último se define mediante una parametrización empírica válida para un amplio rango de intensidades de viento [8],  $C_D = (0.8 + 0.0065 U_{10}) 10^{-3}$ .

### 2.1.2. Condición del flujo

Además de las condiciones de contorno, es necesario imponer una condición de flujo neto nulo en la columna de hidrocarburos líquidos y a lo largo de la longitud  $x$  de la cuenca, es decir:

$$\int_{-H}^0 u(x, z) dz = 0. \quad (2.4)$$

Esta condición hace que exista una relación entre el gradiente de presión barotrópico ( $\partial\eta/\partial x$ ) y el esfuerzo debido al viento ( $\tau_w$ ).

## 2.2. Flujo turbulento no newtoniano impulsado por el viento

### 2.2.1. Ecuaciones promediadas

En condiciones realistas, los flujos oceánicos y estuarinos son turbulentos [9]. La turbulencia oceánica se refiere a los movimientos caóticos del mar causados por factores como el viento, las corrientes, las mareas o los gradientes de densidad. Esta dinámica contribuye a la mezcla de las capas del océano afectando a todo, tanto al clima como a la diversidad de los ecosistemas marinos.

Una aproximación que se utiliza en oceanografía, al igual que en la industria, para el estudio de flujos turbulentos es el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS). Las ecuaciones RANS se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante la descomposición de las variables de flujo,  $\phi(x, y, z, t)$ , en componentes medias,  $\bar{\phi}(x, y, z)$ , y fluctuantes,  $\phi'(x, y, z, t)$ . Esta descomposición, conocida como promedio de Reynolds, permite separar el flujo



medio a gran escala de las fluctuaciones turbulentas a pequeña escala. Las ecuaciones RANS resultantes describen la evolución del flujo medio, mientras que los efectos de la turbulencia se modelan mediante términos adicionales [10].

Realizando las mismas simplificaciones que en el apartado anterior sobre las ecuaciones RANS para flujos oceánicos, teniendo en cuenta un modelo de ley de potencia, ver Sección I.1 del Anexo I; la ecuación de gobierno queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\nu}_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau^{\text{RANS}} + \tau^{\text{NN}} \right) = g\rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}. \quad (2.5)$$

El primer término dentro del paréntesis es un esfuerzo de tipo newtoniano el cual representa los esfuerzos viscosos debido al promedio de la viscosidad efectiva. El segundo término es el llamado esfuerzo de Reynolds,  $\tau^{\text{RANS}} = -\overline{u'w'}$ , el cual representa las fluctuaciones turbulentas. El tercer y nuevo término es el esfuerzo de tipo no newtoniano,  $\tau^{\text{NN}} = \overline{\nu'_e \partial u' / \partial z}$ , el cual representa las fluctuaciones turbulentas de la viscosidad efectiva. Faltaría por modelizar  $\bar{\nu}_e$ ,  $\tau^{\text{RANS}}$  y  $\tau^{\text{NN}}$ .

### 2.2.2. Cierre de la turbulencia no newtoniana

En lo que se refiere al promedio de la viscosidad efectiva, se asumirá que se trabaja con valores de  $n$  pequeños [11]. Por consiguiente,

$$\bar{\nu}_e = K \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|^{n-1} \simeq K \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|^{n-1}. \quad (2.6)$$

Para modelizar los esfuerzos de Reynolds y no newtonianos, se asume una aproximación de primer orden en donde los esfuerzos se describen como el producto de los gradientes de velocidad promedio por una viscosidad a modelizar, es decir,

$$\tau^{\text{RANS}} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (2.7a)$$

$$\tau^{\text{NN}} = \nu_{\text{NN}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (2.7b)$$

donde  $\nu_t$  y  $\nu_{\text{NN}}$  son la viscosidad turbulenta y viscosidad no newtoniana respectivamente. Por un lado, la viscosidad turbulenta se modeliza como en Llorente et al. (2024) [12]. La parametrización de  $\nu_t$  busca reproducir una familia de perfiles que representen de manera adecuada tanto las observaciones experimentales [13] como los resultados teóricos [14]. El comportamiento de la viscosidad turbulenta, que resulta de la transferencia de energía por cizalladura del viento y de la competencia entre la mezcla turbulenta y la estratificación por diferencias de densidad en la columna líquida,

se divide en dos regiones o capas:

$$\nu_t = \begin{cases} \nu_{t0}[1 - 2az_m z + az^2] & \text{si } z > z_h \\ \nu_{t0}b \left| \frac{z}{z_h} \right|^{-p} & \text{si } z \leq z_h \end{cases} \quad (2.8)$$

donde el parámetro  $\nu_{t0}$  caracteriza una viscosidad en superficie, que fija el orden de magnitud de los valores de  $\nu_t$  a lo largo de la columna de líquido; los parámetros  $z_m$  y  $z_h$  caracterizan la profundidad a la cual la viscosidad alcanza su valor máximo y la profundidad que separa las dos capas en la Ecuación (2.8), respectivamente; y el parámetro  $p > 0$  caracteriza que tan rápido decrecen los valores de viscosidad turbulenta en la capa inferior desde su valor máximo a medida que aumenta la profundidad. Los coeficientes  $a = (2z_h[z_m - z_h]/p - z_h[z_h - 2z_m])^{-1}$  y  $b = 2az_h[z_m - z_h]/p$  aseguran la continuidad de  $\nu_t$  y  $\partial\nu_t/\partial z$  en  $z_h$ . En la Figura (2.2) se muestra diferentes perfiles de  $\nu_t$  según diferentes valores del parámetro  $z_m$ .

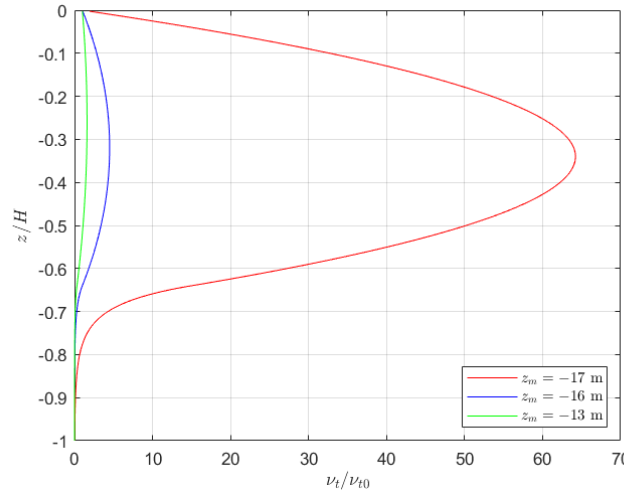


Figura 2.2: Perfiles de viscosidad turbulenta (2.8) variando la posición del máximo y manteniendo constantes  $\nu_{t0} = 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $z_h = -32 \text{ m}$  y  $p = 14$ .

La modelización de la viscosidad no newtoniana  $\nu_{\text{NN}}$  es el núcleo de las investigaciones en turbulencia. Tras realizar una revisión bibliográfica se encontró el artículo de Gavrilov et al. (2016) [11] que modela esta viscosidad como el ratio entre el ratio de disipación turbulenta ( $\epsilon$ ) y los gradientes de velocidad. Posteriormente, Amani et al. (2023) [15] modifica la ecuación de Gavrilov et al. (2016) [11] incorporando en el denominador un término proporcional a  $\epsilon$  para evitar que  $\nu_{\text{NN}}$  crezca indefinidamente a medida que los gradientes de velocidad sean pequeños o casi nulos. En este trabajo se utilizará la ecuación de la viscosidad no newtoniana de Amani et al. (2023) [15], esto es,

$$\nu_{\text{NN}} = (n - 1) \frac{\epsilon}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \frac{\epsilon}{\bar{\nu}_e}}. \quad (2.9)$$

Como se observa para un fluido newtoniano  $\nu_{\text{NN}} = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , por lo que la fórmula es consistente. Sin embargo, la Ecuación (2.9) requiere el cálculo del ratio de disipación turbulenta. Es necesario relacionar este ratio de disipación turbulenta con la parametrización de la viscosidad turbulenta (2.8). Para ello, se recurre a la formulación del modelo  $k - \epsilon$ , en el cual la viscosidad turbulenta se modela como:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (2.10)$$

donde  $C_\mu (= 0.09)$  es una constante del modelo  $k - \epsilon$  y  $k$  es la energía cinética turbulenta definida como  $k = 0.5 \overline{(u')^2}$ . Para relacionar la perturbaciones  $u'$  con la velocidad promedio  $\bar{u}$  utilizaremos la definición de intensidad turbulenta,  $I$ . Esta variable cuantifica la fuerza de las fluctuaciones de velocidad respecto a su velocidad media, refleja qué tan turbulento es el flujo. Se calcula como el ratio entre la media cuadrática de las fluctuaciones turbulentas de velocidad y el módulo de la velocidad promedio. En nuestro problema, se considera  $I = u'/\bar{u}$ . Por consiguiente, la energía cinética turbulenta quedaría escrita como:

$$k = \frac{1}{2} I^2 \bar{u}^2. \quad (2.11)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.11) en la Ecuación (2.10), para posteriormente despejar  $\epsilon$  y sustituyéndola en la Ecuación (2.9), la viscosidad no newtoniana quedaría escrita de la siguiente manera:

$$\nu_{\text{NN}} = (n - 1) \bar{\nu}_e \frac{\lambda \bar{u}^4}{4 \bar{\nu}_e \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \lambda \bar{u}^4}. \quad (2.12)$$

donde  $\lambda = C_\mu I^4$  es una constante del modelo. Por consiguiente, al analizar como se cierra la turbulencia mediante las ecuaciones propuestas en este TFG, este enfoque entraría dentro de los “modelos algebraicos para la turbulencia”.

Finalmente, el problema de valor de contorno que se resuelve es análogo al planteado en las Ecuaciones (2.3) y (2.4), pero considerando la velocidad promedio  $\bar{u}$  en lugar de la velocidad instantánea y la viscosidad  $\Gamma$  como la suma de las tres viscosidades:  $\Gamma = \bar{\nu}_e + \nu_t + \nu_{\text{NN}}$  donde  $\bar{\nu}_e$  se calcula a través de la Ec. (2.6);  $\nu_t$ , Ec. (2.8);  $\nu_{\text{NN}}$ , Ec. (2.12). De este modo, la ecuación de gobierno queda cerrada y lista para su resolución numérica bajo las condiciones de contorno.

# Capítulo 3

## Modelo numérico

### 3.1. Código NONASPE

Para resolver el PVC (2.3), junto con la condición (2.4), se ha trabajado con el código numérico NONASPE (**NON**-newtonian **A**ccurate **S**olver for **P**lanetary **E**stuarines), desarrollado en el Grupo de Dinámica Ambiental del Instituto Interuniversitario de Investigación del Sistema Tierra en Andalucía. El código está escrito en MATLAB y disponible en GitHub<sup>1</sup>. A continuación se comentará brevemente el código incidiendo en las modificaciones realizadas para este TFG. Los detalles técnicos se detallan en la Sección I.2 y I.3 del Anexo I.

El código se divide en tres partes: pre-procesado, procesado y post-procesado. En el pre-procesado se definen los parámetros físicos de nuestro problema como la profundidad del estuario ( $H$ ), la densidad del fluido ( $\rho$ ), el índice de potencia reológico ( $n$ ), la gravedad ( $g$ ), el esfuerzo debido al viento ( $\tau_w$ ), el índice de consistencia ( $K$ ) y el gradiente barotrópico inicial ( $\partial\eta/\partial x|^{ini}$ ); y los parámetros numéricos como el número de nodos de la malla ( $N$ ), la tolerancia y el máximo de iteraciones para la convergencia, y la tolerancia y máximo de iteraciones para cumplir la condición de caudal neto nulo. Al código se le añadieron otros parámetros físico-matemáticos como la viscosidad turbulenta en superficie ( $\nu_{t0}$ ), la profundidad a la cual la viscosidad turbulenta alcanza su valor máximo ( $z_m$ ), la profundidad que separa las dos capas ( $z_h$ ), el índice de decaimiento ( $p$ ), la constante del modelo ( $C_\mu$ ) y la intensidad turbulenta ( $I$ ).

En el procesado se obtiene la solución numérica del campo de velocidad en cada nodo de la malla,  $\mathbf{u} = \{u_i | i = 0, 1, \dots, N - 1\}$  donde  $u_i = u(x_i)$ , y el gradiente de presión barotrópico que hace que cumpla la condición (2.4) dado un esfuerzo debido al viento. Los gradientes del flujo difusivo,  $\Gamma\partial u/\partial z$ , y de la velocidad están discretizados mediante unas diferencias finitas centradas de segundo orden. La condición de contorno

---

<sup>1</sup><https://github.com/GRANADA-gdfa/NONASPE>

en superficie esta discretizado mediante unas diferencias finitas hacia adelante de primer orden. Esto da como lugar a un sistema de ecuaciones no lineal  $\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{b}$  donde  $\mathbf{A}$  es la matriz del sistema en función de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{b}$  es el término fuente, el cual depende de  $\partial\eta/\partial x$  y  $\tau_w$ .

El algoritmo principal está formado por dos bucles anidados. Partiendo de un gradiente de presión barotrópico dado,  $\partial\eta/\partial x|^m$ , el bucle interno resuelve el sistema no lineal mediante un método iterativo tipo Picard [16]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(0)} \text{ arbitrario} \\ \mathbf{A}(\mathbf{u}^{(k-1)})\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{b}^{(m)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

Se parte de una solución inicial  $\mathbf{u}^{(0)}$  y se calcula el gradiente de velocidad. A continuación, se calcula la viscosidad efectiva  $\nu_e$ , para el caso laminar, o la viscosidad efectiva promedio  $\overline{\nu_e}$  y la viscosidad no newtoniana  $\nu_{NN}$ , para el caso turbulento, y se construye la matriz  $\mathbf{A}$ . Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener un nuevo perfil de velocidades. Si el error relativo entre el perfil de velocidad obtenido  $\mathbf{u}^{(k)}$  y el anterior  $\mathbf{u}^{(k-1)}$  es menor que una tolerancia dada, se da por válida la solución; renombrándola como  $\mathbf{u}^{(m)}$ . En caso contrario, se sigue ejecutando el bucle.

El bucle externo se encarga, una vez obtenido  $\mathbf{u}^{(m)}$  en el bucle interno, de recalcular el gradiente de presión barotrópico. Para ello se calcula el valor del caudal  $q^{(m)}$  mediante la regla del trapecio y se comprueba si el valor absoluto está por debajo de una tolerancia. Si se cumple, se sale del bucle y se da por válida la solución  $\mathbf{u}^{(m)}$  y  $\partial\eta/\partial x|^m$ . Si no se cumple, se recalcula el valor del gradiente barotrópico de la siguiente manera:

$$\left. \frac{\partial\eta}{\partial x} \right|^{(m+1)} = \left. \frac{\partial\eta}{\partial x} \right|^{(m)} + \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)})\|_1}{C_1\kappa_1(\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(m)}))} q^{(m)}, \quad (3.2)$$

donde  $\|\cdot\|_1$  es la norma 1 matricial,  $\kappa_1(\cdot)$  el número de condición y  $C_1$  una constante; y se vuelve a obtener un perfil de velocidad mediante el método iterativo (3.1).

## 3.2. Verificación numérica

Para alcanzar los objetivos propuestos en este TFG, se ha realizado un análisis de convergencia de malla para elegir el número de nodos ( $N$ ) y un valor de tolerancia de caudal ( $TolQ$ ) con el que realizar las simulaciones del Capítulo 4, Secciones 4.2 y 4.3. Dado que en Llorente et al. (2023) [17] se obtuvieron unas soluciones exactas al PVC (2.3) para el régimen laminar y que, además, en la Sección 4.1 del Capítulo 4 se dedujo una relación teórica entre  $\partial\eta/\partial x$  y  $\tau_w$  ( $\zeta_c = \tau_w/(\rho g H \partial\eta/\partial x)$ ), se han usado estos resultados para compararlos con los resultados numéricos obtenidos con el código NONASPE. En las simulaciones de esta sección se utiliza un índice de consistencia

$K = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ , altura  $H = 50 \text{ m}$ , velocidad medida a 10 metros de altura  $U_{10} = 3.15 \text{ m/s}$ , gradiente barotrópico inicial  $|\partial\eta/\partial x|^{\text{ini.}} = 10^{-6}$  y una tolerancia para el algoritmo (3.1) de  $10^{-5}$ .

Las distintas simulaciones fueron ejecutadas para las diversas combinaciones de las siguientes variables: tolerancia de caudal, número de nodos e índice de potencia reológico ( $n$ ):

$$\begin{cases} TolQ \in [10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}] \\ N \in [50, 100, 150, 200, 500] \\ n \in [0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8] \end{cases}$$

En cada simulación se registran los valores de la norma  $L_2$  de la solución  $u$ , el error absoluto del valor  $\zeta_c$  y el tiempo de computacional (tiempo CPU).

Para calcular el error absoluto de  $\zeta_c$ , el valor de  $\zeta_c$  exacto se obtiene resolviendo las raíces de la función  $F_n(\zeta_c)$ , Ecuación (4.5) de la página 18. Esta raíz se calculó mediante una función MATLAB que permite encontrar las raíces a una función. Este algoritmo se implementado a parte del código NONASPE. Por otro lado, la norma  $L_2$  se calcula de la siguiente manera:

$$L_2\text{-norm} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |u_i^{\text{exa.}} - u_i^{\text{num.}}|^2}. \quad (3.3)$$

donde  $u_i^{\text{exa.}} = u^{\text{exa.}}(x_i)$  es la solución exacta al problema y  $u_i^{\text{num.}} = u^{\text{num.}}(x_i)$  es la solución numérica en los nodos de la malla. Finalmente, el tiempo de CPU, medido en segundos, representa el tiempo que ha tardado el código en ejecutar los bucles interno y externo hasta dar por válida la solución numérica. El código ha corrido en un portátil modelo ACER LAPTOP-KO0S5EUB con un procesador Intel(R) Core(TM) i7-10210U CPU @ 1.60GHz.

Los resultados obtenidos se presentan en las tablas contenidas en la Sección II.1 del Anexo II. A partir de los resultados, se han representado gráficas que muestran la norma  $L_2$  en función del espaciado entre nodos,  $\Delta z$ . El resto de las gráficas se presentan también en la Sección II.2 del Anexo II. Se ha creado una para cada valor de  $n$ .

Para representar los resultados, se ha escogido una simulación con índice de potencia  $n = 1.6$ . En la Figura 3.1a se muestra la evolución que toma la norma  $L_2$  en función del espaciado vertical entre nodos para cuatro tolerancias de caudal distintas. Se observa que la norma  $L_2$  disminuye en un orden de magnitud cuando  $\Delta z$  disminuye una década. Este comportamiento es característico de un esquema numérico de primer orden, lo cual limita la precisión del método. Además, las diferencias de la norma con las diferentes tolerancias de caudal es muy pequeña, lo que hace que las cuatro líneas se solapen.

Que la simulación se comporte de primer orden es debido a la discretización de la condición de contorno. NONASPE discretizaba esta condición de tipo Neumann con una diferencia finita de primer orden, lo que hace que domine globalmente el error numérico del esquema. Para solventarlo, se decidió implementar una diferencia finita hacia adelante de segundo orden (ver Tabla 3 de Fornberg (1988) [18]). Esto hizo que los coeficientes de la primera fila de la matriz  $\mathbf{A}$  cambien de  $(1, -1)$  a  $(3/2, -2, 1/2)$ . El efecto de este cambio se aprecia en la Figura 3.1b, donde la pendiente de la recta aumenta linealmente siguiendo un comportamiento de segundo orden para tolerancias de caudal de  $TolQ > 10^{-4}$ . Este cambio asegura una mayor precisión en la aproximación de los perfiles de velocidad. También se observa una mejora de los errores en  $\zeta_c$  en casi dos órdenes de magnitud.

Se observó que para valores de  $n = 1.8$  y superiores la norma  $L_2$  empeoraba un poco, mientras que para valores de  $n = 0.4$  e inferior la norma  $L_2$  aumentaba hasta llegar a una cota superior. Esto era debido a que, en los nodos cercanos al punto donde el gradiente de  $u$  se hace cero, los valores de viscosidad efectiva eran muy pequeños o muy grandes para  $n \geq 1.8$  y  $n \leq 0.4$ . Esto hacía que la matriz  $\mathbf{A}$  tuviese filas de coeficientes muy pequeños o muy grandes en comparación con las filas vecinas.

A partir de estos resultados, se concluye que un número de nodos  $N = 400$  y una tolerancia de caudal  $TolQ = 10^{-6}$  garantizan un equilibrio adecuado entre precisión y coste computacional, ya que la norma y los errores estaban entorno  $[10^{-4}, 10^{-6}]$  y las simulaciones no tardaron más de 45 minutos.

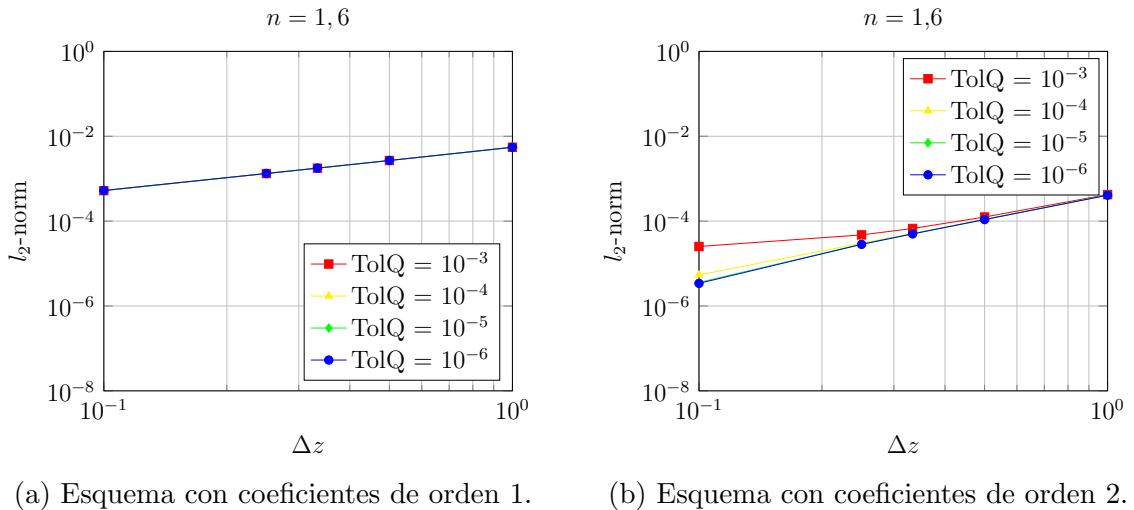


Figura 3.1: Convergencia de la norma  $L_2$  para  $n = 1.6$ .

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Caso no newtoniano laminar

En esta primera sección del Capítulo 4 se realizará un estudio teórico de como está relacionado el gradiente de presión barotrópico ( $\partial\eta/\partial x$ ) con el esfuerzo debido al viento ( $\tau_w$ ) en función del índice de potencia  $n$  para flujo laminar. La razón para realizar dicha generalización es, por un lado, uno de los puntos de los objetivos de este TFG, y por otro, en Llorente et al. (2023) [17] no se realizó este estudio. Por tanto, los resultados en esta sección complementan a los resultados en [17].

Para obtener una generalización entre  $\partial\eta/\partial x$  y  $\tau_w$ , partimos de las soluciones exactas del PVC (2.3), las cuales vienen dadas en [17]:

$$u(z) = \frac{n}{\alpha[n+1]} (|\beta + \alpha z|^{1+1/n} - |\beta - \alpha H|^{1+1/n}) , \quad (4.1)$$

donde  $\alpha = (g/K)\partial\eta/\partial x$  y  $\beta = \tau_w/(\rho K)$  son dos coeficientes reales. A continuación, se define la profundidad normalizada como

$$\zeta = \frac{z}{H} ,$$

donde  $\zeta \in (-1, 0)$  y la profundidad crítica normalizada como

$$\zeta_c = -\frac{z_c}{H} ,$$

donde  $\zeta_c \in (0, 1)$  y  $z_c = -\beta/\alpha$  representa el punto donde el gradiente vertical de la velocidad ( $\partial u/\partial z$ ) cambia de signo. Como el coeficiente  $\alpha$  depende de  $\partial\eta/\partial x$  y  $\beta$  de  $\tau_w$ , se llega a la siguiente fórmula explícita:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{\zeta_c} \frac{\tau_w}{\rho g H} , \quad (4.2)$$

la cual generaliza la relación entre el gradiente de presión barotrópico y el esfuerzo debido al viento a través de la función  $\zeta_c = \zeta_c(n)$ . Para encontrar esta función se deberá integrar la solución (4.1) en  $z$  e imponer que dicha integral valga cero (condición



(2.4)). Para ello, se adimensionaliza la solución, como se desarrolla en la Sección I.4 del Anexo I, obteniendo como resultado la siguiente expresión para el perfil de velocidades en función de los parámetros normalizados:

$$u(\zeta) = u_0 \frac{|\zeta_c + \zeta|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}}{|\zeta_c|^{\frac{n+1}{n}} - |\zeta_c - 1|^{\frac{n+1}{n}}}, \quad (4.3)$$

donde

$$u_0 = r \frac{\tau_w H}{\rho K}, \quad r = \frac{n}{n+1} \zeta_c \left| \frac{\tau_w}{\rho K} \right|^{\frac{1-n}{n}} \left[ 1 - \left| 1 - \frac{1}{\zeta_c} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad (4.4)$$

$u_0$  representa la velocidad en superficie. La condición de flujo neto nulo se expresa como

$$\int_{-H}^0 u(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{-1}^0 \left| \frac{\zeta_c + \zeta}{\zeta_c - 1} \right|^{\frac{n+1}{n}} d\zeta = 1.$$

Resolviendo esta integral, ver Sección I.5 del Anexo I, se deduce la siguiente función que relaciona  $\zeta_c$  con el índice de potencia  $n$ :

$$F_n(\zeta_c) := \zeta_c^{\frac{2n+1}{n}} + (1 - \zeta_c)^{\frac{2n+1}{n}} - \frac{2n+1}{n} (1 - \zeta_c)^{\frac{n+1}{n}} = 0. \quad (4.5)$$

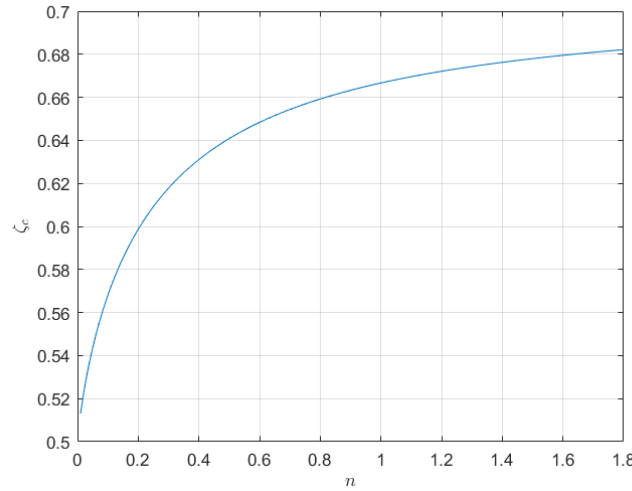


Figura 4.1: Distintos valores de la profundidad crítica  $\zeta_c$  para cada valor de  $n$ .

Con el objetivo de analizar la dependencia de  $\zeta_c$  con  $n$ , se ha desarrollado un código en MATLAB para la obtención de las raíces de la función (4.5). En la Figura 4.1 se muestra dichos resultados en un intervalo  $(0, 1.8]$  para el índice de potencia  $n$ . Para flujos pseudoplásticos ( $n < 1$ ), a medida que  $n$  disminuye, el valor del gradiente de presión barotrópico va aumentando (asumiendo que el esfuerzo debido al viento y profundidad se mantienen constantes). Para flujos dilatantes ( $n > 1$ ), a medida que  $n$  aumenta, el gradiente de presión barotrópico disminuye hasta un determinado valor. Se observa que  $\zeta_c \rightarrow \sqrt{2}/2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Finalmente, si se particulariza para un fluido newtoniano ( $n = 1$ ), ver Sección I.6 del Anexo I, la resolución de la función (4.5) conduce a  $\zeta_c = 2/3$ . Sustituyendo este valor en las expresiones (4.3) y (4.4), se obtienen los perfiles clásicos de flujo inducido por viento en cuencas semicerradas [1]:

$$u(\zeta) = u_0[3\zeta^2 + 4\zeta + 1], \quad (4.6)$$

donde  $u_0 = \tau_w H / (4\rho K)$ , ver Figura 4.2.

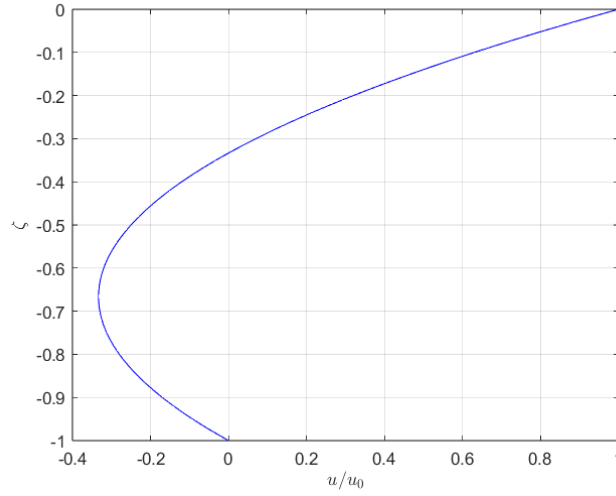


Figura 4.2: Perfil de velocidad para flujo newtoniano en una cuenca semicerrada, solución (4.6).

Dado que se ha podido encontrar una generalización entre  $\partial\eta/\partial x$  y  $\tau_w$  a través de  $\zeta_c$ , se propone la variable  $\zeta_c$  como número adimensional para poder estudiar mejor la relación entre el gradiente de presión barotrópica y el esfuerzo debido al viento para flujos no newtonianos.

## 4.2. Estudio de la columna de hidrocarburos líquidos

En esta primera parte, se emplea en las simulaciones un perfil de viscosidad turbulenta caracterizado por  $z_m = -17$  m, que servirá como referencia para comparar resultados con los casos  $z_m = -15$  m y  $z_m = -13$  m. En el Capítulo 2, se han mostrado los distintos perfiles que se usan en este trabajo (Fig. 2.2). Los resultados de esta sección se han obtenido manteniendo constantes las siguientes variables:  $\nu_{t0} = 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $z_h = -32$  m,  $p = 14$  y  $H = 50$  m.

En primer lugar, se analizan los perfiles de viscosidad (Fig. 4.3) y los perfiles de velocidad (Fig. 4.4) en la columna de hidrocarburos líquidos para distintos valores de

$n$ , tomando  $n \in (0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8)$ . El resto de resultados de perfiles de viscosidad y perfiles de velocidad, correspondientes a otros valores de  $n$ , se recogen en el Anexo III.

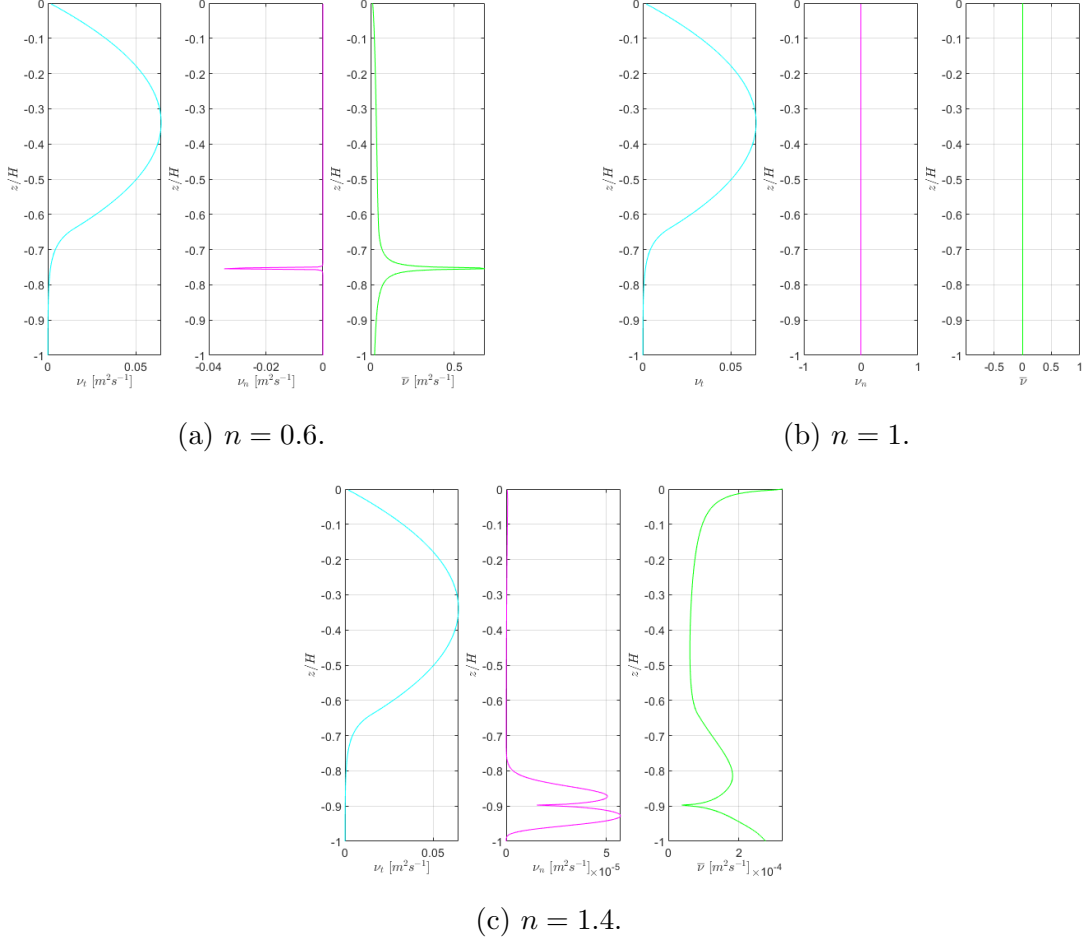


Figura 4.3: Perfiles de viscosidad para distintos valores de  $n$ .

En la Figura 4.3 se representa la viscosidad turbulenta  $\nu_t$ , la viscosidad no newtoniana  $\nu_{NN}$  y la viscosidad efectiva promedio  $\overline{\nu_e}$ . La viscosidad turbulenta es la única que se mantiene constante en todos los casos simulados. Para valores de  $n$  pequeños (Fig. 4.3a), los perfiles de  $\nu_{NN}$  y  $\overline{\nu_e}$  son prácticamente planos, a excepción de un pico pronunciado que alcanza valores elevados. Al aumentar  $n$  hacia valores próximos a la unidad, la magnitud de este pico disminuye progresivamente. En el caso newtoniano (Fig. 4.3b), tanto  $\nu_{NN}$  como  $\overline{\nu_e}$  se anulan. Para valores de  $n$  altos (Fig. 4.3c),  $\nu_{NN}$  muestra máximos localizados cerca del fondo, mientras que  $\overline{\nu_e}$  conserva una cresta más suave en la misma región.

En la Figura 4.4 se comparan los perfiles de velocidad en régimen laminar y turbulento a lo largo de la columna de líquido. A su vez, se muestra cómo evolucionan los perfiles en régimen turbulento al variar el valor de  $n$ . Para valores de  $n$  pequeños

(Fig. 4.4a), el perfil en régimen turbulento resulta similar al laminar. Ambos muestran una transición uniforme en la zona de velocidades negativas y un máximo situado ligeramente por debajo de la mitad de la columna de líquido. Al aumentar  $n$  (Fig. 4.4c), el perfil turbulento se separa del laminar. Se desarrolla una región dónde se intensifica la velocidad en forma de *jet*. Este fenómeno acentúa el máximo y lo aproxima al fondo.

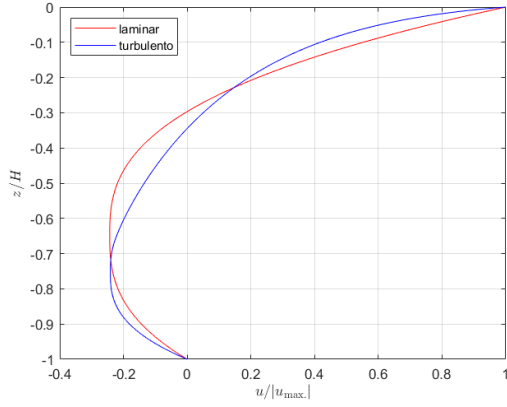
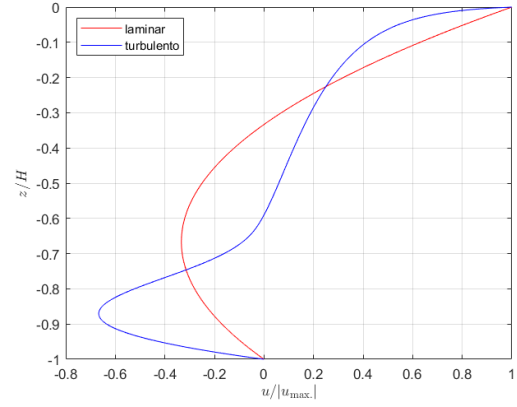
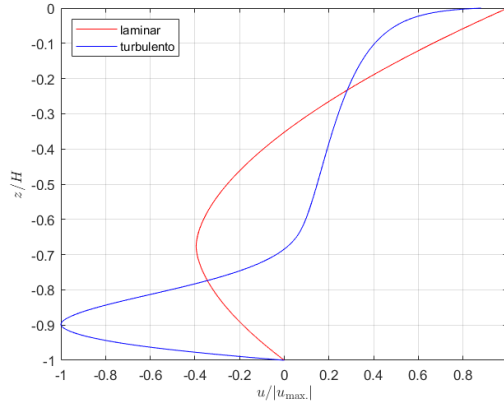
(a)  $n = 0.6$ .(b)  $n = 1$ .(c)  $n = 1.4$ .

Figura 4.4: Perfiles de velocidad en régimen laminar y turbulento para distintos valores de  $n$ .

Con el fin de visualizar de manera global la influencia de  $n$  en los perfiles de velocidades, se han generado mapas de contorno que representan la velocidad normalizada en función de  $n$  y de la profundidad, tanto para flujo laminar como turbulento (Fig. 4.5). Para el caso laminar (Fig. 4.5a), los perfiles son relativamente planos en la región donde la velocidad alcanza un máximo. Conforme aumenta  $n$ , se observa que la magnitud aumenta en esta región y se acentúa el máximo. Este punto crítico se sitúa de forma estable entre los valores  $\zeta = -0.6$  y  $\zeta = -0.7$ . Por otro lado, en el caso turbulento (Fig. 4.5b), para valores de  $n$  pequeños presenta perfiles uniformes

al igual que en el caso laminar (Fig. 4.5a). Al aumentar  $n$  se va representando el efecto del *jet*, intensificando rápidamente la velocidad máxima en el fondo. Para  $n > 1.2$ , la velocidad máxima se mantiene constante.

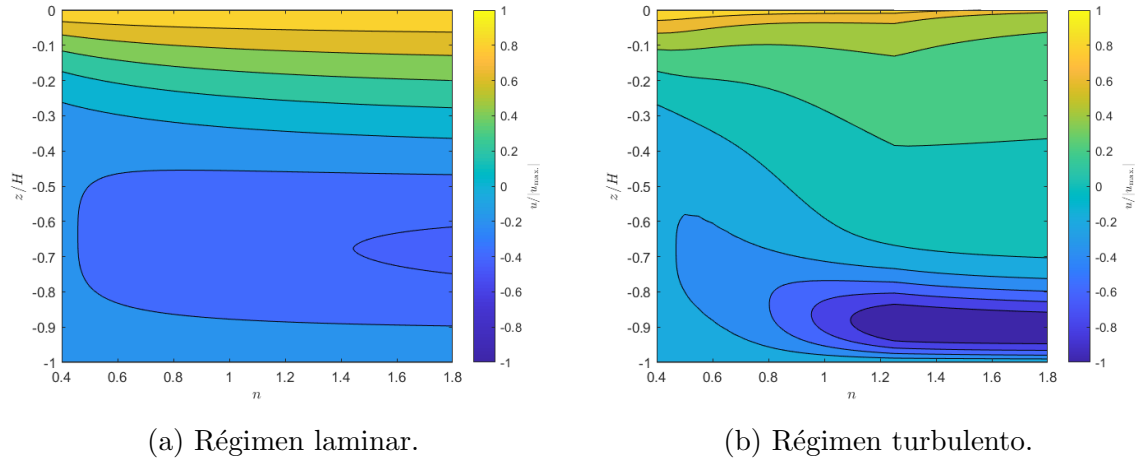


Figura 4.5: Mapa de contorno que muestra la variación de la velocidad normalizada respecto a la profundidad y a  $n$ , con  $z_m = -17$  m.

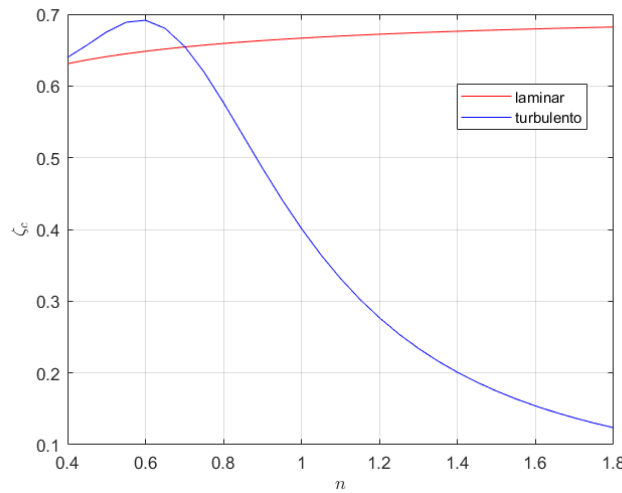


Figura 4.6: Distintos valores de la profundidad crítica  $\zeta_c$  para cada valor de  $n$  en régimen laminar y turbulento, con  $z_m = -17$  m.

En la Figura 4.6 se representa la variación de la profundidad crítica  $\zeta_c$  en función de  $n$ . En la figura se muestran las funciones obtenidas en el caso de régimen laminar y turbulento. En régimen laminar, la función muestra la misma progresión explicada en el Capítulo 4, Apartado 1 (Fig. 4.1). En régimen turbulento,  $\zeta_c$  presenta un crecimiento con  $n$  hasta alcanzar un máximo alrededor de  $n \approx 0.6$ . A partir de este punto, la función comienza a decrecer rápidamente hasta alcanzar una tendencia asintótica.

Una vez analizados los resultados con el perfil de viscosidad turbulenta de referencia ( $z_m = -17$  m), se estudia la influencia de la variable  $z_m$ . Se han considerado dos casos adicionales correspondientes a  $z_m = -16$  m y  $z_m = -13$  m. Para ambos casos, se han generado mapas de contorno de velocidad en régimen turbulento (Fig. 4.7), junto con la variación de la profundidad crítica  $\zeta_c$  en función de  $n$  (Fig. 4.8).

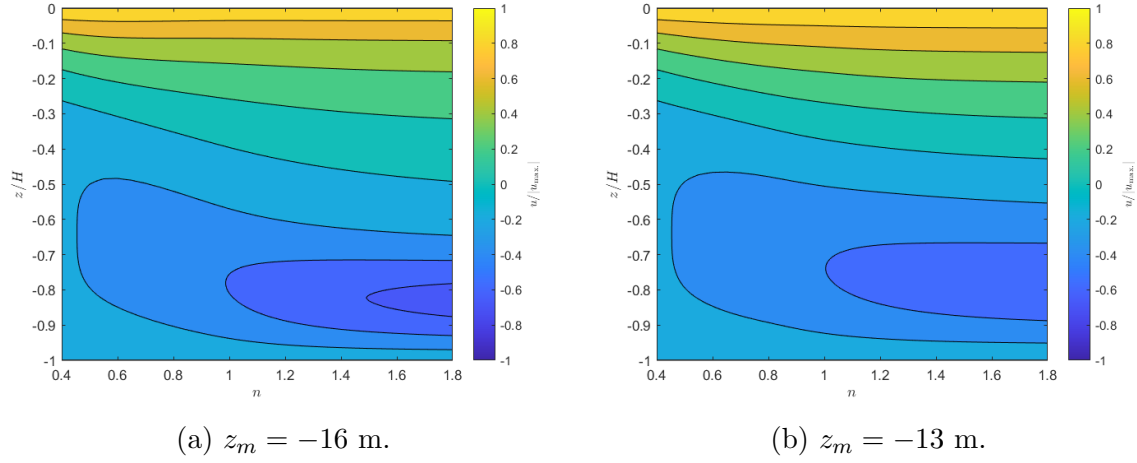


Figura 4.7: Mapa de contorno que muestra la variación de la velocidad normalizada respecto a la profundidad y a  $n$ , para distintos valores de  $z_m$ .

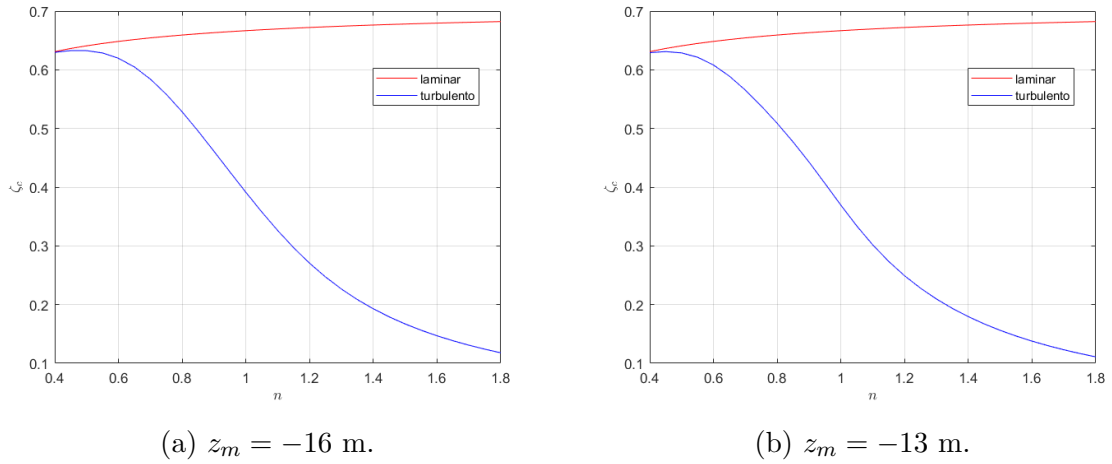


Figura 4.8: Distintos valores de la profundidad crítica  $\zeta_c$  para cada valor de  $n$  en régimen laminar y turbulento, para distintos valores de  $z_m$ .

En las Figuras 4.5b, 4.7a y 4.7b se aprecia que el aumento de  $z_m$  hace que los perfiles de velocidad se asemejen más al caso laminar, con transiciones suaves y un espaciado uniforme entre las curvas de contorno. Cuando  $z_m$  disminuye, las curvas de contorno se concentran en la región cercana a la superficie para valores pequeños de  $n$ , mientras que para valores altos de  $n$  lo hacen en la región próxima al fondo. Este espaciado pequeño entre curvas de contorno muestra la rapidez con la que varían las velocidades

a lo largo de la columna de líquido.

En las Figuras 4.6, 4.8a y 4.8b se observa que disminuir  $z_m$  conlleva un crecimiento más notorio en los valores de  $\zeta_c$  de la función en régimen turbulento hasta alcanzar un máximo. La influencia de  $z_m$  se ve reflejada en valores de  $n$  pequeños. Para valores de  $n$  altos, la función sigue una progresión similar en todos los casos, independientemente de  $z_m$ .

### 4.3. Aplicación a Ligeia Mare (Titán)

En este apartado se analiza la dinámica del flujo en Ligeia Mare (Fig. 4.9), uno de los principales mares de Titán, situado aproximadamente a  $78^\circ$  N y  $249^\circ$  W. La batimetría empleada se ha obtenido a partir de los datos presentados por Mastrogiuseppe et al. (2014) [19], ajustando los puntos experimentales a un polinomio de tercer grado,

$$H(x) = -0.000018x^3 + 0.012322x^2 - 1.955119x - 60.654995.$$

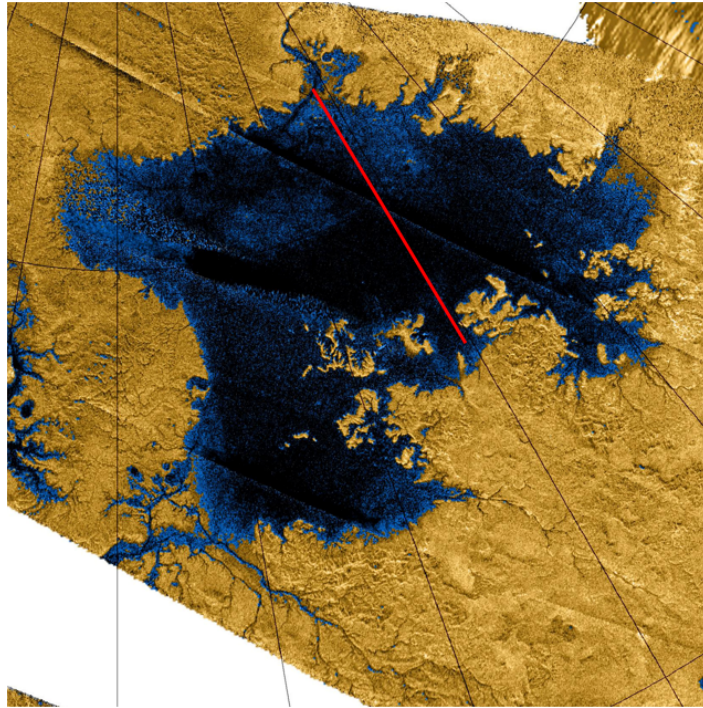


Figura 4.9: Imagen satelital de Ligeia Mare. Fuente: Wikipedia<sup>a</sup>. La línea roja indica el dominio en el eje  $x$  del modelo batimétrico.

<sup>a</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Mar\\_de\\_Ligeia](https://es.wikipedia.org/wiki/Mar_de_Ligeia)

El dominio horizontal tiene una longitud de 300 kilómetros y se discretiza en 300 puntos, de forma que a cada punto le corresponda una columna de líquido. Esta distancia se ha comparado con el radio de deformación de Rossby  $L_R = \sqrt{gD}/f$  [20],

siendo  $g$  la gravedad de Titan,  $D$  una profundidad de referencia (en Ligeia Mare se toma como  $D$  la profundidad máxima de la cuenca) y  $f$  el parámetro de Coriolis. Este último se calcula como  $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ , donde  $\varphi$  es la latitud geográfica y  $\Omega$  es la velocidad angular de Titán calculada como  $\Omega = 2\pi/T$  donde  $T$  es el periodo de rotación de Titan. Para los cálculos se ha tomado la profundidad  $H_{\max.} = 150$  m y el periodo  $T = 382$  h. Finalmente el radio de Rossby tiene un valor aproximado de 1600 km, que al ser superior que la longitud de la cuenca, conlleva que la fuerza de Coriolis no tiene relevancia en la circulación. El número de nodos verticales es constante en todas las columnas. El estudio se realiza para tres valores representativos del índice de potencia:  $n = 0.6$  (fluido pseudoplástico),  $n = 1$  (fluido newtoniano) y  $n = 1.2$  (fluido dilatante). El objetivo es comparar el contraste del comportamiento reológico. La Figura 4.10 muestra resultados normalizados respecto al valor máximo de velocidad alcanzado, aproximadamente  $u = 1.7$  m/s para  $n = 1.2$ . Los resultados de esta sección se han obtenido manteniendo constantes las siguientes variables:  $\nu_{t0} = 10^{-3}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>,  $z_m = -17$  m,  $z_h = -32$  m y  $p = 10$ .

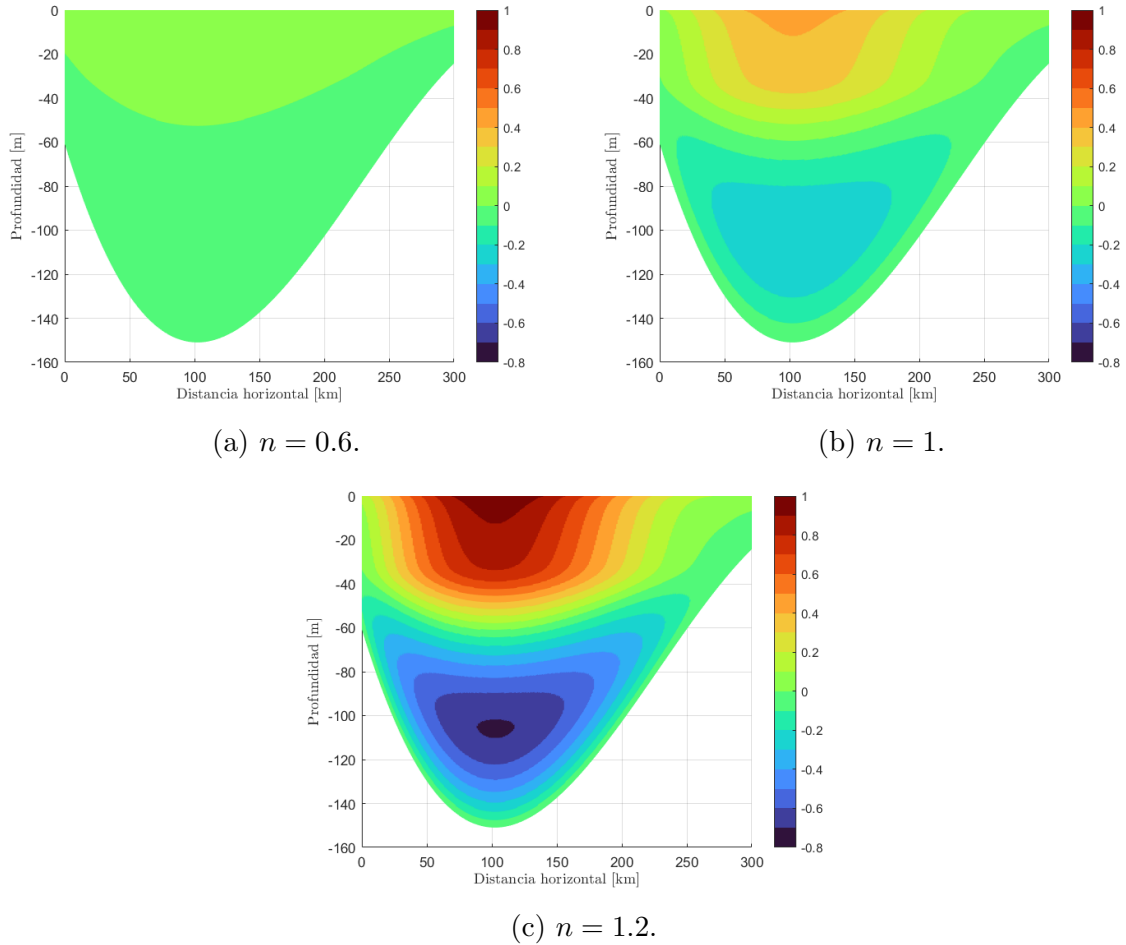


Figura 4.10: Circulación inducida por viento (positivo hacia la derecha),  $u(x, z)$ .



Para valores de  $n$  pequeños (Fig. 4.10a) se distinguen dos regiones de velocidades, una superior con velocidades positivas y otra inferior con velocidades negativas. Las magnitudes en ambas regiones se mantienen bastante uniformes debido a los perfiles planos de velocidad. En este caso, el fluido tiene un comportamiento similar a un sólido, dado que las velocidades son muy reducidas. En el caso newtoniano (Fig. 4.10b) comienza a apreciarse un gradiente más pronunciado entre las zonas de velocidad positiva y negativa. Al aumentar  $n$  (Fig. 4.10c), el contraste entre ambas zonas se intensifica. En conclusión, para  $n < 1$  los perfiles de velocidad son más uniformes y el flujo se asemeja a un sólido dado su baja velocidad de movimiento, mientras que para  $n > 1$  se genera un contraste más marcado entre capas y un aumento significativo de las velocidades máximas.

Con el fin de ampliar este análisis, se estudia la componente vertical de la velocidad  $w(x, z)$ , ver Figura 4.11. Esta componente se calcula a partir de la ecuación de conservación de la masa [21]:

$$\frac{\partial(ub)}{\partial x} + \frac{\partial(wb)}{\partial z} = 0, \quad (4.7)$$

donde  $b = b(x)$  es la anchura efectiva de la cuenca. En las simulaciones se ha aproximado esta anchura a un perfil parabólico desplazado expresado como

$$b(x) = b_{\min.} + (b_{\max.} - b_{\min.}) \left( 1 - \left( \frac{x - 230}{150} \right)^2 \right),$$

donde  $b_{\max.} = 50$  km y  $b_{\min.} = 40$  km representan los valores máximo y mínimo de la anchura respectivamente. Una vez conocido el campo de velocidades  $u(x, z)$ , la Ecuación (4.7) nos permite calcular  $w(x, z)$  en cada punto del dominio. Al igual que en el caso anterior, se analizan los resultados para los tres valores de  $n$ .

En la Figura 4.11 se puede apreciar dos regiones diferenciadas: una región de *upwelling* en la parte izquierda de la cuenca, caracterizada por corrientes ascendentes, y una región de *downwelling* en la parte derecha de la cuenca, caracterizada por corrientes descendentes. Para valores de  $n$  pequeños (Fig. 4.11a), ambas regiones presentan valores relativamente homogéneos. A medida que aumenta  $n$  (Fig. 4.11b y 4.11c), se obtiene un mayor contraste entre ambas regiones.

La comparación conjunta de las componentes  $u$  y  $w$  nos indica la existencia de una recirculación interna en la cuenca. En la superficie, el flujo horizontal se dirige hacia la costa derecha hasta alcanzar el límite donde se produce el efecto de *downwelling*, transportando el fluido hacia el fondo. Posteriormente, en las capas más profundas el fluido retorna en sentido contrario hacia la otra costa donde emerge debido al efecto de *upwelling* produciendo una emanación de hidrocarburos.

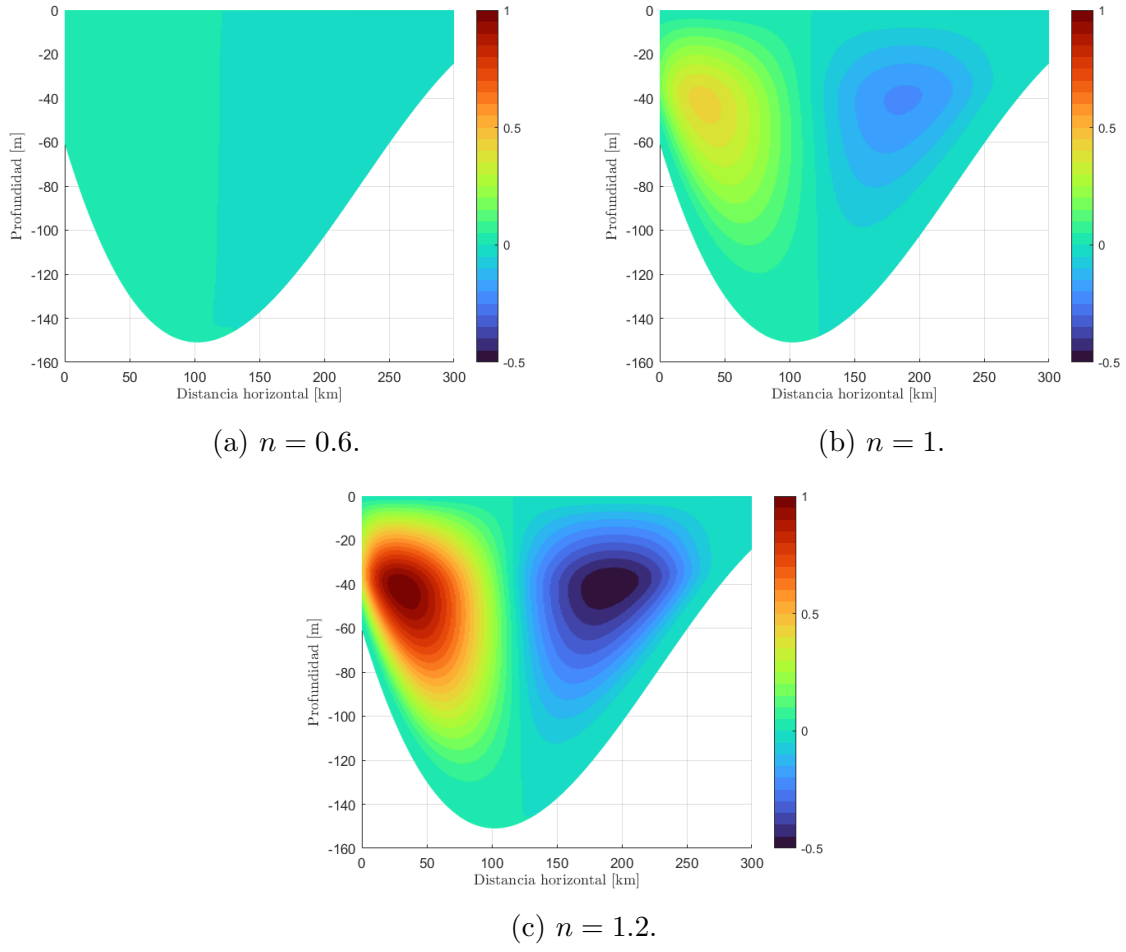


Figura 4.11: Circulación inducida por viento (positivo hacia arriba),  $w(x, z)$ .

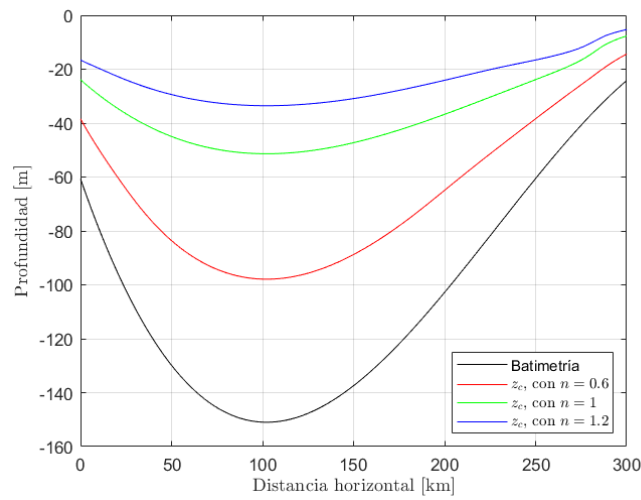


Figura 4.12: Representación de  $z_c = -\zeta_c H$  para cada valor de  $n$ .

En la figura 4.12 se observa que los valores de  $\zeta_c$  disminuyen conforme lo hace  $n$ . Para  $n = 1.2$ , el perfil que describe  $\zeta_c$  está más próximo a la superficie en comparación con el perfil para  $n = 0.6$ . Además los perfiles presentan un mínimo que es más pronunciado para valores de  $n$  pequeños. Dado que el gradiente barotrópico  $\partial\eta/\partial x$  es inversamente proporcional a  $\zeta_c$ , estos resultados implican que el gradiente alcanzaría un máximo donde se encuentra la profundidad máxima de la cuenca.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este Trabajo Fin de Grado (TFG) se ha llevado a cabo un estudio de flujos turbulentos no newtonianos en cuencas semicerradas, con aplicación a Ligeia Mare en Titán. Dadas las condiciones extremas de la mayor luna de Saturno, los hidrocarburos presentes en su superficie pueden presentar reologías no newtonianas. Uno de los objetivos del TFG es generalizar el perfil de velocidad en la columna de líquido y la relación entre el gradiente de presión barotrópico ( $\partial\eta/\partial x$ ) y el esfuerzo debido al viento ( $\tau_w$ ) para un flujo no newtoniano, el cual se modeliza mediante una ley de potencia.

En primer lugar, se realizó un estudio teórico mediante el uso de la solución analítica al problema de valor de contorno del modelo en régimen laminar. A través de la adimensionalización de la solución exacta, se obtuvo una relación entre  $\partial\eta/\partial x$  y  $\tau_w$ , esto es  $\partial\eta/\partial x = \tau_w/(\zeta_c \rho g H)$  donde  $\zeta_c$  es una función del índice de potencia  $n$ . Se ha podido comprobar que  $\zeta_c$  aumenta al aumentar  $n$  y se ha observado que  $\zeta_c \rightarrow \sqrt{2}/2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Posteriormente, el modelo matemático fue ampliado para incluir los fenómenos turbulentos. Al promediar las ecuaciones se obtuvieron tres viscosidades: la viscosidad promedio efectiva, la viscosidad turbulenta y la viscosidad no newtoniana. La viscosidad turbulenta fue modelizada mediante una función dependiente de la profundidad, mientras que la viscosidad no newtoniana fue formulada mediante una fórmula matemática dependiente de la viscosidad promedio efectiva, la viscosidad turbulenta, la velocidad y los gradientes de velocidad. Esta formulación permite describir de forma más realista el comportamiento dinámico en régimen turbulento.

El análisis de las columnas de líquido ha mostrado que la turbulencia genera un *jet* que impulsa el fluido conforme aumenta  $n$ . Este fenómeno aparece para  $n > 1$  y se intensifica progresivamente a la vez que se aproxima al fondo. En cuanto a la evolución de  $\zeta_c$ , se ha observado que alcanza un valor máximo alrededor de  $n \approx 0.6$  y, a partir de este máximo, decrece a medida que aumenta  $n$ .

El estudio de la influencia del perfil de velocidades ha mostrado que al aumentar

$z_m$ , el *jet* se vuelve menos acusado y la magnitud del máximo disminuye. Este comportamiento se debe a la dominancia de la viscosidad turbulenta cuando decrece  $z_m$ .

En el caso aplicado a Ligeia Mare, se ha comprobado la existencia de procesos de *upwelling* y *downwelling*. El análisis de las componentes horizontal y vertical de la velocidad sugiere que existe una recirculación en la cuenca, análogo a lo que sucede en mares y océanos de la Tierra.

Como líneas de trabajo futuro se propone:

- Explorar otros modelos reológicos para describir flujos no newtonianos como el modelo de Carreau [22]. En este modelo, la viscosidad efectiva esta acotada para valores altos y bajos de velocidad de cizallamiento a diferencia del modelo de potencia.
- Implementación de modelos de turbulencia de dos ecuaciones como el modelo Mellor & Yamada [23] utilizado ampliamente en la oceanografía.
- Realizar experimentos controlados en laboratorios para validar el modelo.
- Extender el estudio a otros mares de Titán.

# Bibliografía

- [1] Valle-Levinson, A. (2022). *Introduction to Estuarine Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- [2] Geyer, W., & MacCready, P. (2014). The Estuarine Circulation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46, 175-197.
- [3] Kirichek, O., Church, A., Thomas, M., Cowdery, D., Higgins, S., Dudman, M., & Bowden, Z. (2012). Adhesion, plasticity and other peculiar properties of solid methane. *Cryogenics*, 52, 325-330.
- [4] Burr, D., Perron, J., Lamb, M., Irwin, R., Collins, G., Howard, A., Sklar, L., Moore, J., Ádámkovics, M., Baker, V., Drummond, S., & Black, B. (2013). Fluvial features on Titan: Insights from morphology and modeling. *GSA Bulletin*, 125, 299-321.
- [5] Sun, H., Jiang, Y., Zhang, Y., & Jiang, L. (2024). A review of constitutive models for non-Newtonian fluids. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 27, 1483-1526.
- [6] Boger, D. (1977). Demonstration of upper and lower Newtonian fluid behaviour in a pseudoplastic fluid. *Nature*, 265, 126-128.
- [7] Tasmin, M., Nag, P., Hoque, Z., & Molla, M. (2021). Non-Newtonian effect on heat transfer and entropy generation of natural convection nanofluid flow inside a vertical wavy porous cavity. *SN Applied Science*, 3, 1-29.
- [8] Wu, J. (1982). Wind-stress coefficients over sea surface from breeze to hurricane. *Journal of Geophysical Research*, 87, 9704-9706.
- [9] Thorpe, S. (2007). *An Introduction to Ocean Turbulence*. Cambridge University Press.
- [10] Wilcox, D. (2006). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries.
- [11] Gavrilov, A., & Rudyak, V. (2016). Reynolds-averaged modeling of turbulent flows of power-law fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 227, 45-55.
- [12] Llorente, V., Padilla, E., & Díez-Minguito, M. (2024). Sensitivity of boundary layer features to depth-dependent baroclinic pressure gradient and turbulent mixing in an ocean of finite depth. *Ocean Modelling*, 189, 102359.
- [13] Yoshikawa, Y., & Endoh, T. (2015). Estimating the Eddy Viscosity Profile from Velocity Spirals in the Ekman Boundary Layer. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 32, 793-804.
- [14] Burchard, H. (2002). *Applied Turbulence Modelling in Marine Waters*. Springer Science Business Media.
- [15] Amani, E., Ahmadpour, A., & Aghajari, M. (2023). Large-eddy simulation of turbulent non-Newtonian flows: A comparison with state-of-the-art RANS closures. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 99, 109076.

- [16] Paniconi, C., & Putti, M. (1994). A comparison of Picard and Newton iteration in the numerical solution of multidimensional variably saturated flow problems. *Water Resources Research*, 30(12), 3357-3374.
- [17] Llorente, V., Padilla, E., & Díez-Minguito, M. (2023). Non-newtonian wind-driven flows in homogeneous semiclosed basins. *arXiv*.
- [18] Fornberg, B. (1988). Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids. *Mathematics of computation*, 51(184), 699-706.
- [19] Mastrogiuseppe, M., Poggiali, V., Hayes, A., Lorenz, R., Lumine, J., Picardi, G., Seu, R., Flamini, E., Mitri, G., Notarnicola, C., Paillou, P., & Zebker, H. (2014). The bathymetry of a Titan sea. *Geophysical Research Letters*, 41, 1432-1437.
- [20] Cushman-Roisin, B., & Beckers, J. (2009). *Introduction to Geophysical FLuid Dynamics. Physical and Numerical Aspects*. Academic Press.
- [21] Liu, B. (2017). *Modelling phytoplankton dynamics in estuaries* [PhD thesis]. Utrecht University.
- [22] Carreau, P. (1972). Rheological equations from molecular network theories. *Transactions of The Society of Rheology*, 16, 99-127.
- [23] Mellor, G., & Yamada, T. (1982). Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysics*, 20(4), 851-875.

# Lista de Figuras

1.2	Fenómenos de <i>upwelling</i> y <i>downwelling</i> . . . . .	4
2.1	Domino de trabajo de la Ecuación (2.1). . . . .	8
2.2	Perfiles de viscosidad turbulenta (2.8) variando la posición del máximo y manteniendo constantes $\nu_{t0} = 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , $z_h = -32 \text{ m}$ y $p = 14$ . . . .	11
3.1	Convergencia de la norma $L_2$ para $n = 1.6$ . . . . .	16
4.1	Distintos valores de la profundidad crítica $\zeta_c$ para cada valor de $n$ . . . .	18
4.2	Perfil de velocidad para flujo newtoniano en una cuenca semicerrada, solución (4.6). . . . .	19
4.3	Perfiles de viscosidad para distintos valores de $n$ . . . . .	20
4.4	Perfiles de velocidad en régimen laminar y turbulento para distintos valores de $n$ . . . . .	21
4.5	Mapa de contorno que muestra la variación de la velocidad normalizada respecto a la profundidad y a $n$ , con $z_m = -17 \text{ m}$ . . . . .	22
4.6	Distintos valores de la profundidad crítica $\zeta_c$ para cada valor de $n$ en régimen laminar y turbulento, con $z_m = -17 \text{ m}$ . . . . .	22
4.7	Mapa de contorno que muestra la variación de la velocidad normalizada respecto a la profundidad y a $n$ , para distintos valores de $z_m$ . . . . .	23
4.8	Distintos valores de la profundidad crítica $\zeta_c$ para cada valor de $n$ en régimen laminar y turbulento, para distintos valores de $z_m$ . . . . .	23
4.10	Circulación inducida por viento (positivo hacia la derecha), $u(x, z)$ . . .	25
4.11	Circulación inducida por viento (positivo hacia arriba), $w(x, z)$ . . . .	27
4.12	Representación de $z_c = -\zeta_c H$ para cada valor de $n$ . . . . .	27



# Lista de Tablas

1.1	Parámetros físicos de Titán . . . . .	5
-----	---------------------------------------	---