

Transformée de Kravchuk réalignée, implémentation efficace et illustration sur signaux élémentaires et réels[†]

Barbara PASCAL¹ Julien FLAMANT² Rémi BARDENET³

¹Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, LS2N, UMR 6004, F-44000 Nantes, France

²Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy France

³Université de Lille, CNRS, Centrale Lille UMR 9189 - CRISTAL, F-59000 Lille, France

Résumé – La transformée de Kravchuk, récemment introduite, représente les signaux discrets sur la sphère unité. Sa formulation initiale possède deux écueils majeurs : d’une part un coût de calcul prohibitif et d’autre part un manque d’interprétabilité de ses coordonnées sphériques. En établissant une connexion entre la transformée de Kravchuk et la décomposition en harmoniques sphériques de spin, une nouvelle transformée réalignée est proposée. Grâce à une implémentation de type transformée de Fourier rapide, le calcul de la nouvelle transformée et de son inverse est à la fois rapide et numériquement stable. En outre, la nouvelle transformée de Kravchuk s’interprète bien comme une transformée temps–fréquence discrète.

Abstract – The recently introduced Kravchuk transform represents discrete signals by a square-integrable function on the unit sphere. Its initial formulation has two major drawbacks: on the one hand, a prohibitive computational cost and, on the other, a lack of interpretability of its spherical coordinates. By establishing a connection between the Kravchuk transform and the decomposition into spin spherical harmonics, a new aligned transform is proposed. Thanks to a new implementation akin to Fast Fourier Transform, the new transform and its inverse are computed in a fast and robust manner. Moreover, the new Kravchuk transform can indeed be interpreted as a time–frequency transform for discrete signals.

1 Introduction

Contexte et état-de-l’art. L’étude récente des zéros de transformées temps–fréquence a motivé la construction d’une première représentation sur la sphère des signaux discrets [2]. Elle vise à fournir une version discrète des transformées temps–fréquence usuelles, telles que la transformée de Fourier à court-terme qui est covariante sous les translations en temps et modulations en fréquence. Or, cette première représentation des signaux discrets sur la sphère ne possède ni propriétés de covariance, ni de préservation de l’énergie, qui sont indispensables pour l’analyse temps–fréquence de signaux réels. En s’appuyant sur la notion d’état cohérent de spin [4], une nouvelle transformée covariante sous l’action du groupe des rotations, dite de Kravchuk, a ainsi été proposée [11, 12]. Cette dernière s’exprime naturellement dans la base des *fonctions de Kravchuk* [15], dont le calcul numérique est instable dès lors que la dimension de l’espace, c’est-à-dire la longueur du signal discret considéré, dépasse une centaine de points. Pour obtenir une implémentation robuste de la transformée de Kravchuk pour des signaux d’un millier de points, une reformulation tirant parti de la fonction génératrice des polynômes de Kravchuk a été proposée, avec pour principal inconvénient qu’elle exclut le recours à des algorithmes de type transformée de Fourier rapide. Cette implémentation, quoique robuste, est coûteuse en temps et en mémoire, et ne passe pas à l’échelle de signaux de plusieurs milliers de points. En outre, les angles sphériques décrivant l’espace des phases n’ont pas d’interprétation concrète en termes de temps et de fréquence.

Contributions. Après un rappel de la définition de la famille des p -transformées de Kravchuk, ces transformées sont ré-écrites sous forme de décompositions sur la base des harmoniques sphériques de spin en Section 2.1. Puis, une nouvelle transformée réalignée est proposée en Section 2.2. L’implémentation rapide et robuste de cette transformée réalignée et de son inverse, grâce à des algorithmes efficaces issus de l’analyse spectrale sur la sphère, est illustrée numériquement et ses coordonnées sphériques sont interprétées en termes de temps et de fréquence. En Section 3, cette nouvelle transformée est appliquée à plusieurs signaux élémentaires et à un signal réel.

2 Transformée réalignée et rapide

2.1 Une famille de transformées covariantes

La famille des p -transformées de Kravchuk. Pour $N \in \mathbb{N}$, la transformée de Kravchuk de paramètre $p \in (0,1)$ d’un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ est définie, pour tout point $(\vartheta, \varphi) \in \mathbb{S}^2$ sur la sphère unité repéré par ses coordonnées sphériques $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, par [11, 12] :

$$T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n c_\vartheta^n s_\vartheta^{N-n}} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n], \quad (1)$$

où \mathcal{B}_N^n est un coefficient binomial, $c_\vartheta = \cos(\vartheta/2)$, $s_\vartheta = \sin(\vartheta/2)$ et $(\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{q}_n^{(p)}, \mathbf{y} \rangle$ est la $n^{\text{ème}}$ composante du signal \mathbf{y} dans la base orthonormée des fonctions de Kravchuk

[†] Avec le soutien du financement ERC Blackjack (ERC-2019-STG-851866) et de la chaire IA Baccarat (ANR-20-CHIA-0002).

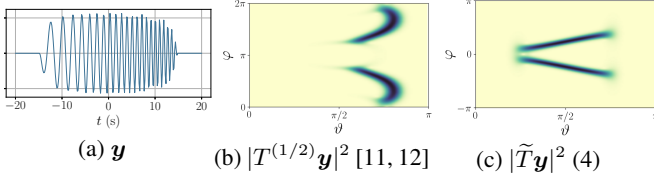


FIGURE 1 – Réalignement de la transformée de Kravchuk.

de paramètre p , notées^a $q_n^{(p)} = (q_n(\kappa; N, p))_{\kappa=0}^N$ avec

$$q_n(\kappa; N, p) = \sqrt{B_N^\kappa B_N^\kappa} \frac{\eta^{n+\kappa} Q_n(\kappa; N, p)}{(1 + \eta^2)^{N/2}}, \quad (2)$$

où $Q_n(\cdot; N, p)$ est le polynôme de Kravchuk de paramètre p et $\eta = p^{1/2}(1-p)^{-1/2}$, voir aussi [12, Section 2].

Lien avec les harmoniques sphériques de spin. Les harmoniques sphériques de spin, introduites par Newman et Penrose [9], ont été rapidement reliées aux fonctions de Wigner [5] qui permettent de décrire les rotations de la sphère unité en termes d'action sur un espace vectoriel. Toute fonction de carré intégrable définie sur la sphère unité peut se décomposer sur la base des harmoniques sphériques de spin, voir par exemple [8]. En particulier, pour un signal discret y , la fonction $(\vartheta, \phi) \mapsto T^{(p)}y(\vartheta, \phi)$ possède une décomposition, *a priori* sous forme d'une somme infinie, dans cette base. Le théorème suivant démontre que la transformée de Kravchuk peut se formuler *uniquement* avec les harmoniques sphériques de spin d'une *seule* couche, qui sont en nombre fini. Ce point crucial permet le calcul exact de la transformée de Kravchuk par ce moyen, sans nécessiter d'imposer une coupure de bande comme c'est le cas pour une fonction générique définie sur la sphère. Dit autrement, la transformée de Kravchuk d'un signal $y \in \mathbb{C}^{N+1}$ avec N pair est une fonction de spin $N/2$ qui se décompose donc intégralement sur la couche $N/2$ des harmoniques sphériques de spin.

Théorème 1. Soit $p \in (0, 1)$, $N \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, et $y \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal discret à valeurs complexes. La p -transformée de Kravchuk de y vérifie : $\forall (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$,

$$T^{(p)}y(\vartheta, \varphi) = C_N e^{i \frac{N\varphi}{2}} \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\pi - \vartheta, \varphi) \overline{\tilde{y}[n]} \quad (3)$$

où C_N est un facteur de normalisation explicite, pour $s, m \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $|s| \leq \ell$, $|m| \leq \ell$, ${}_s Y_m^\ell$ sont les harmoniques sphériques de spin, définies à partir des fonctions D de Wigner, e.g., dans [8, Éq.(8)], et \tilde{y} correspond au vecteur y ayant subi une rotation d'angles d'Euler $(0, \beta, 0)$ avec $\beta = 2 \arcsin(\sqrt{p})$.

La preuve de ce résultat combine [10] et [6] pour relier les fonctions de Kravchuk et les fonctions d de Wigner. Essentiellement calculatoire, elle sera développée dans [14].

2.2 Transformée réalignée et calculs rapides

Réalignement de la transformée de Kravchuk. Ce lien avec les harmoniques sphériques de spin suggère une redéfinition de la transformée de Kravchuk,

$$\tilde{T}y(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}. \quad (4)$$

^aLes fonctions de Kravchuk sont des fonctions discrètes à support fini. Elles sont donc assimilées à des vecteurs de \mathbb{C}^{N+1} .

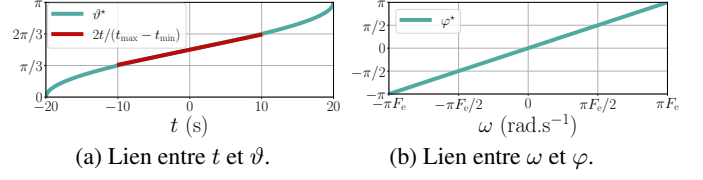


FIGURE 2 – Interprétation temps-fréquence des variables sphériques. Échantillonnage à la fréquence $F_e = 6,4$ Hz entre $t_{\min} = -20$ s et $t_{\max} = 20$ s, soit $N + 1 = 257$ points.

afin d'aligner ses axes avec les variables usuelles de temps et de fréquence. En effet, bien que les transformées de Kravchuk standard et réalignées soient toutes deux *covariantes* sous l'action du groupe des rotations $SO(3)$, un obstacle à leur utilisation pratique est que les angles ϑ et φ qui paramétrisent l'espace des phases n'ont pas, *per se*, d'interprétation physique évidente. Les Lemmes 1 et 2 et les expériences numériques de la Section 3 montrent que la transformée de Kravchuk réalignée fournit un cadre de référence dans lequel ϑ s'interprète comme une variable de *temps* et φ comme une variable de *fréquence*. La Figure 1 illustre l'avantage du réalignement dans le cadre d'un chirp linéaire.

Lemme 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, la fonction $\vartheta \mapsto \left| \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \right|$, définie pour $\vartheta \in [0, \pi]$, atteint son maximum en un unique point :

$$\vartheta_n^* = 2 \arctan \sqrt{\frac{n}{N-n}}, \quad \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

où par convention $N/0 = +\infty$ et $\arctan(+\infty) = \pi$.

Ainsi, pour un signal localisé en temps autour du temps t_n correspondant à la composante n du vecteur y , l'énergie du spectrogramme de Kravchuk réaligné $|\tilde{T}y(\vartheta, \varphi)|^2$ sera concentrée autour de l'angle ϑ_n^* . Dans le cas particulier d'un signal échantillonné régulièrement à la fréquence $F_e = 1/T_e = N/(t_{\max} - t_{\min})$ sur $[t_{\min}, t_{\max}]$ aux points

$$t_n = t_{\min} + nT_e, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

le Lemme 1 fournit une correspondance directe entre la variable de temps t et la variable d'angle sphérique ϑ :

$$\vartheta^*(t) = 2 \arctan \sqrt{\frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t}}. \quad (6)$$

La fonction $\vartheta^*(t)$ de l'Équation (6) est tracée en Figure 2a. Il est intéressant de remarquer qu'au voisinage de $\vartheta = \pi/2$, c'est-à-dire au centre de la *fenêtre* sur laquelle est calculée la transformée de Kravchuk en coordonnées (ϑ, φ) , cette relation est bien approchée par une droite de pente $2/(t_{\max} - t_{\min})$ et d'ordonnée à l'origine $\pi/2$ qui provient de la dérivée de $t \mapsto \vartheta^*(t)$ en $t = (t_{\max} + t_{\min})/2$.

Lemme 2. Soit N un entier pair et $\omega \in \mathbb{R}$ une pulsation. Soit $s \in L^2(\mathbb{R})$ un signal continu échantillonné régulièrement entre t_{\min} et t_{\max} selon (5) de sorte que $y[n] = s(t_n)$. Alors, le signal modulé en fréquence $g(t) = e^{i\omega t} s(t)$, échantillonné de la même manière, fournit un signal discret $v \in \mathbb{C}^{N+1}$ dont la transformée de Kravchuk est liée à celle de y via

$$\tilde{T}v(\vartheta, \varphi) = e^{-i\omega \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2}} \tilde{T}y(\vartheta, \varphi - \omega F_e^{-1}) \quad (7)$$

où F_e est la fréquence d'échantillonnage des signaux s et g .

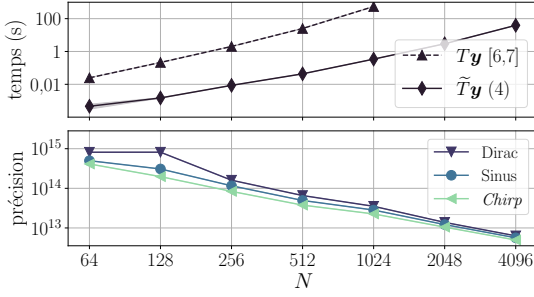


FIGURE 3 – **Temps de calcul et précision vs. N .** Quantités moyennées sur 100 réalisations accompagnées d’intervalles de confiance gaussien à 95%. (*Haut*) Temps de calcul de la transformée de Kravchuk originale (1), en pointillés, et de la transformée réalignée (4), en trait plein, du *chirp* linéaire de la Figure 4c. (*Bas*) Rapport signal-à-bruit (8) de la reconstruction d’un signal par transformée de Kravchuk suivie de son inverse pour plusieurs signaux élémentaires.

D’après le Lemme 2, si la transformée de Kravchuk d’un signal discret est localisée autour d’un angle φ , alors la transformée de Kravchuk de ce signal modulé par une porteuse de pulsation ω est localisée autour de $\varphi - \omega F_e^{-1}$ où F_e est la fréquence d’échantillonnage des signaux discrets. Or, on observe numériquementⁱ que le spectrogramme de Kravchuk réaligné d’une constante est invariant selon ϑ et d’énergie concentrée autour de $\varphi = 0$. Ainsi, le Lemme 2 induit une relation linéaire entre la pulsation ω et l’angle φ , illustrée à la Figure 2b.

Calcul rapide. Une implémentation rapide de la transformée de Kravchuk réalignée \tilde{T} peut alors être mise en œuvre en s’appuyant sur la bibliothèque `pyssht`^b qui calcule efficacement le développement en harmoniques sphériques de spin. Pour quantifier le gain d’efficacité, la transformée de Kravchuk du *chirp* linéaire de la Figure 4c est calculée pour différentes tailles N de signal discret, via l’implémentation proposée initialement dans [11, 12].^c Puis la transformée de Kravchuk réalignée est calculée sur les mêmes signaux. Les temps de calcul sur un processeur 2 GHz Intel Core i5 quatre cœurs moyennés sur 100 réalisations identiques sont tracés en haut de la Figure 3.^d La transformée réalignée est significativement moins coûteuse à évaluer et, contrairement à la transformée originale, elle passe à l’échelle de plusieurs milliers de points.

Inversion numériquement stable. L’interprétation de la transformée de Kravchuk comme un développement sur la base des harmoniques sphériques de spin permet d’identifier l’inverse de la transformée de Kravchuk comme la décomposition dans cette base de la fonction de la sphère unité $\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi)$ et ainsi d’obtenir via `pyssht` une implémentation rapide et numériquement stable de la transformée de Kravchuk inverse. La précision de cette implémentation est quantifiée en Figure 3 par le rapport signal-à-erreur

$$\mathcal{P} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}^r - \mathbf{y}\|}, \quad \text{pour } \mathbf{y}^r = \tilde{T}^{-1}\tilde{T}\mathbf{y} \quad (8)$$

pour \mathbf{y} un pic de Dirac (en bleu foncé), une sinusoïde (en bleu clair) et un *chirp* (en vert) comportant un nombre de points N allant de 64 à 4096 et \mathbf{y}^r la reconstruction obtenue par application successive de la transformée et de son inverse. Les rapports signal-à-erreur reportés en Figure 3, moyennés sur

^bpypi.org/project/pyssht

^cgithub.com/bpascal-fr/kravchuk-transform-and-its-zeros

^dLes intervalles de confiance sont trop petits pour être visibles.

100 réalisations,^b démontrent l’excellente précision numérique de la transformée de Kravchuk réalignée et de son inverse.

3 Signaux élémentaires et réels

La Figure 4a (resp. 4b) illustre le Lemme 1 (resp. 2) : la transformée de Kravchuk d’un Dirac (resp. d’une sinusoïde) parfaitement localisée en temps (resp. en fréquence) est bien localisée en ϑ (resp. φ). Les *chirps* [3, Chap. 2] se rencontrent dans des domaines aussi variés que la cosmologie et l’écologie. Un *chirp* linéaire est un signal dont la fréquence instantanée varie linéairement au cours du temps, modélisé par

$$x(t) = A_\Omega(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right), \quad (9)$$

avec $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ deux fréquences positives, et $A_\Omega(t)$ une fonction lisse de support $\Omega = [t_1, t_2]$. La Figure 4c représente un *chirp* linéaire d’une durée 30 s observé sur une fenêtre de 40 s, de fréquences $\nu_1 = 0,5$ et $\nu_2 = 1$ Hz et échantillonné à la fréquence $F_e = 6,4$ Hz, correspondant à un signal discret de $N = 256$ points. Grâce au réaligement de la transformée de Kravchuk (4), le spectrogramme de Kravchuk d’un *chirp* linéaire présente deux lignes de crêtes, correspondant aux fréquences positives et négatives, qui sont quasi-linéaires et permettent de retrouver, grâce à l’identification temps-fréquence de (ϑ, φ) illustrée à la Figure 2, les paramètres du *chirp* (9). Enfin, un *état cohérent* pour une transformée temps-fréquence donnée est un état maximalelement concentré dans l’espace des phases. Dans le cas de la transformée de Fourier à court-terme de fenêtre gaussienne, il s’agit des atomes de Gabor-Heisenberg [3, Chap. 4]. Étant donné un état cohérent, $\Psi_{0,0}$ aussi appelé *ondelette mère*, la famille entière^e $\{\Psi_{\vartheta, \varphi}, (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi]\}$ s’obtient en lui appliquant toutes les rotations d’angles $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ [4]. Le choix $\Psi_{0,0} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$ conduit à

$$\Psi_{\vartheta, \varphi}[n] = \mathcal{B}_N^n c_\vartheta^{N-n} s_\vartheta^n e^{-in\varphi}, \quad n \in \{0, \dots, N\} \quad (10)$$

avec les notations de l’Équation (4). L’état cohérent indexé par $\vartheta = 3\pi/4$ et $\varphi = \pi/2$ est représenté^f en haut de la Figure 4d, avec son spectrogramme de Kravchuk, en bas, qui montre effectivement une concentration de l’énergie autour du point de coordonnées sphériques $(3\pi/4, \pi/2)$.

Un exemple réel permet d’illustrer la pertinence de la transformée de Kravchuk réalignée pour des tâches de traitement du signal concrètes. Un cri de chauve-souris,^g typique du processus d’écholocalisation, de longueur $N = 4096$ échantillons temporels avec une fréquence d’échantillonnage $F_e = 4000$ Hz est représenté en Figure 5a. Le spectrogramme de Kravchuk réaligné, en Figure 5b, est comparé au spectrogramme de Fourier, obtenu comme le module au carré de la transformée de Fourier à court-terme de fenêtre gaussienne normalisée $g(t) = \pi^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ en Figure 5c. Le spectrogramme de Fourier discret est calculé via la fonction `stft` de `SciPy`,

^eLe réaligement de φ en $\varphi - \pi$ dans la transformée de Kravchuk \tilde{T} motive la convention inhabituelle $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

^fUn état cohérent est en général à valeurs complexes, seule sa partie réelle est tracée ; la transformée de Kravchuk est calculée sur le signal complexe.

^gtfb.nongnu.org/demos, *Animals : the bat call*

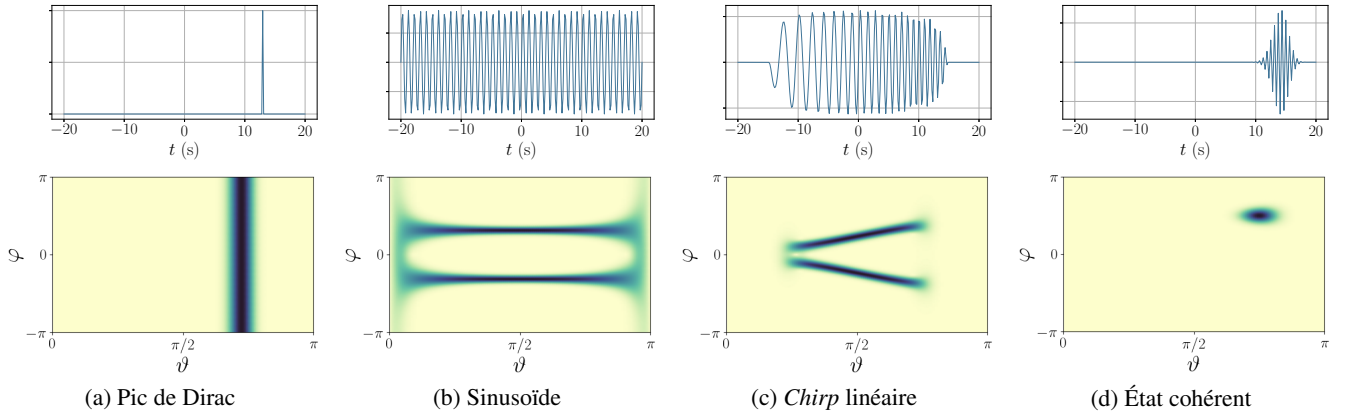


FIGURE 4 – **Transformée de Kravchuk de signaux élémentaires.** (a) Pic de Dirac en $t = 13$ s. (b) Sinusoïde de fréquence $\nu = 1$ Hz. (d) État-cohérent $\Psi_{\theta, \varphi}$ localisé en $(\vartheta, \varphi) = (3\pi/4, \pi/2)$. Les signaux sont échantillonnés à une fréquence $F_e = 6,4$ Hz.

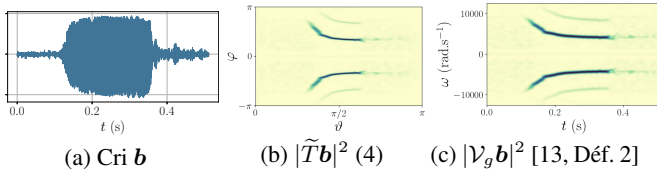


FIGURE 5 – **Spectrogrammes de Kravchuk et spectrogramme gaussien d'un cri de chauve-souris.** [3] Signal de $N = 4096$ points échantillonné à la fréquence $F_e = 4000$ Hz. avec $N + 1$ segments et un recouvrement sur N points. ^h On remarque tout d'abord une grande similitude entre ces deux spectrogrammes, gain direct du réaligement de la transformée de Kravchuk à l'Équation (4) et des Lemmes 1 et 2. La transformée de Kravchuk rend parfaitement compte de la structure de *chirp* non-linéaire décroissant du cri de chauve-souris. En outre, *sans aucun réglage préalable*, il est intéressant de noter que la transformée de Kravchuk, en Figure 5b localise extrêmement bien ce signal : les lignes de crêtes correspondant aux deux portions, fréquences positives et négatives, du *chirp* sont plus fines qu'avec le spectrogramme de Fourier *typique* de la Figure 5c. Ainsi, la transformée de Kravchuk réalignée fournit une représentation temps–fréquence *universelle*, particulièrement adaptée à l'analyse *a priori* de signaux discrets.

4 Conclusion et perspectives

Après avoir établi un lien entre la transformée de Kravchuk et les harmoniques sphériques de spin, une nouvelle version réalignée de cette transformée est proposée. Deux lemmes, illustrés sur plusieurs signaux de complexité croissante, permettent d'identifier les angles sphériques paramétrant l'espace des phases de la transformée réalignée à des variables de temps et de fréquence respectivement. Le lien avec les harmoniques sphériques de spin permet un calcul rapide et une inversion robuste, ouvrant la voie pour des applications à des problèmes réels, notamment la mise en œuvre la stratégie de détection de signal à partir des zéros du spectrogramme de Kravchuk développée dans [11] et inspirée de [1] sur des signaux réels de cri d'oiseaux [7] pour la surveillance des populations et le suivi de

^hL'objectif est d'avoir le spectrogramme le plus universel possible à comparer à la transformée de Kravchuk qui est elle-même une transformée *sans paramètre à régler*. Il est clair qu'une adaptation de la fenêtre, voir de la réallocation dans le plan temps–fréquence, fourniraient un spectrogramme de Fourier mieux résolu mais requérant une expertise de l'utilisateur.

leurs migrations. Sur le plan théorique, un lien asymptotique à grand nombre de points N entre la transformée de Kravchuk et la transformée de Fourier à court-terme est à l'étude. Des codes publics documentés accompagnent ce papier.ⁱ

Références

- [1] R. BARDENET, J. FLAMANT et P. CHAINAIS : On the zeros of the spectrogram of white noise. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 48(2):682–705, 2020.
- [2] R. BARDENET et A. HARDY : Time-frequency transforms of white noises and gaussian analytic functions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 50:73–104, 2021.
- [3] P. FLANDRIN : *Explorations in time-frequency analysis*. Cambridge University Press, 2018.
- [4] J.-P. GAZEAU : *Coherent States in Quantum Physics*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2009.
- [5] Joshua N GOLDBERG, Alan J MACFARLANE, Ezra T NEWMAN, Fritz ROHRICH et EC George SUDARSHAN : Spin- s Spherical Harmonics and δ . *J. Math. Phys.*, 8(11):2155–2161, 1967.
- [6] R. A. KENNEDY et P. SADEGHI : *Hilbert space methods in signal processing*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] V. LOSTANLEN, J. SALAMON, A. FARNSWORTH, S. KELLING et J. P. BELLO : Birdvox-full-night : A dataset and benchmark for avian flight call detection. In *IEEE Acoust. Speech Signal Process.*, pages 266–270. IEEE, 2018.
- [8] J. D. MCEWEN et Y. WIAUX : A novel sampling theorem on the sphere. *IEEE Trans. Sig. Process.*, 59(12):5876–5887, 2011.
- [9] Ezra T NEWMAN et Roger PENROSE : Note on the Bondi-Metzner-Sachs group. *J. Math. Phys.*, 7(5):863–870, 1966.
- [10] A. F. NIKIFOROV, V. B. UVAROV et S. K. SUSLOV : *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*. Springer, 1991.
- [11] B. PASCAL et R. BARDENET : A covariant, discrete time-frequency representation tailored for zero-based signal detection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 70:2950–2961, 2022.
- [12] B. PASCAL et R. BARDENET : Une famille de représentations covariantes de signaux discrets et son application à la détection de signaux à partir de leurs zéros. Nancy, France, Sept. 6 - 9 2022.
- [13] B. PASCAL et R. BARDENET : Point Processes and spatial statistics in time-frequency analysis, 2024.
- [14] B. PASCAL, J. FLAMANT et R. BARDENET : Interpretation of the Kravchuk transform as a time-frequency representation on the sphere. application to detection and denoising. En préparation.
- [15] Luis Edgar VICENT et Kurt Bernardo WOLF : Unitary transformation between Cartesian and polar-pixelated screens. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(8):1875–1884, 2008.

ⁱgithub.com/bpascal-fr/from-kravchuk-to-ssht