目次

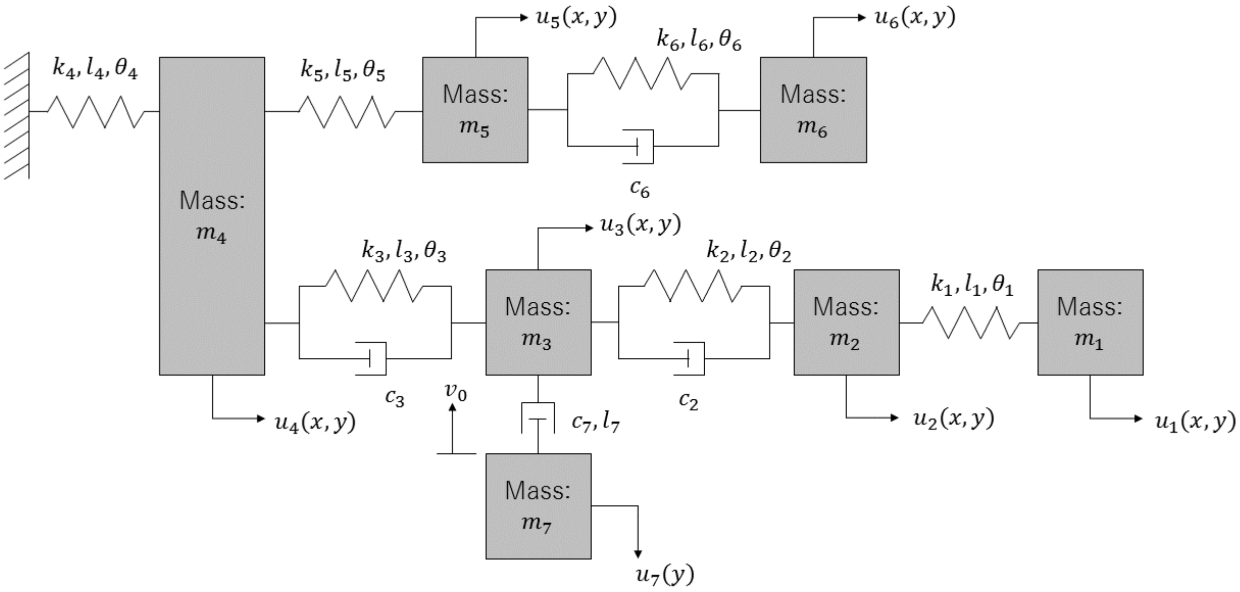

図 1　ローズ・ピアノの簡易物理モデル

1　ローズ・ピアノの簡易物理モデル

本章ではローズ・ピアノ振動体を簡略化した物理モデルを検討する．本章では，ローズ・ピアノのシステムモデルを連立常微分方程式として表し，Tine と Tonebar の連成振動を考慮した簡易物理モデルを提案する．

1.1　簡易物理モデル

簡易物理モデルに使用するシステムモデルを図 1 に示す．

図はローズ・ピアノのシステムモデルである．k はバネ定数，m は質量，u は変位，c はダッシュポット，l は節の長さ，θ は節の角度である．図中上部が Tonebar になり，図中下部が Tine に相当する．Tonebar と Tine をつないでいる Pole は m_3 に相当する．

質点に着目すると，m_1 が Tine 先端，m_6 が Tonebar 先端である．m_2 は Tuning Spring となっている．m_3 は Hammer の打点であり，m_7 は Hammer である．Tonebar は 3 つに分けて考えている．m_4 は Pole が取り付けられているところである．m_5 は Tonebar がねじれている部分であり，m_6 は Tonebar が共鳴器として作用する部分である．m_7 は Hammer であるため実際にはリンクしないが，Hammer と打点の衝突をモデル化するためにダッシュポット c_7 が存在する．m_7 は初期速度 v_0 で変位し，m_3 と衝突する．m_7 はダッシュポットによって速度比例の減衰力が働くので，m_3 に急激な変位は発生しない．

Hammer を除き，境界条件を含めると質点は 7 つ存在する．本章ではラグランジュ方程式を利用するため角度を用いるが，各質点が回転対偶な自由度を持つとすると，リンクは 6 つ存在する．全体の自由度 N は

$$N = 3(n-1) - 2n_1 - n_2 \tag{1}$$

で表される．このとき n はリンクの数，n_1 は自由度 1 の回転対偶の総数，n_2 は自由度 2 の回転対偶の総数である．リンクの数及び自由度に代入すると，

$$
\begin{array}{rcl}
N & = & 3\times(6-1)-2\times4-1 \\
 & = & 15-8-1=6
\end{array} \tag{2}
$$

となるので，ラグランジアンで角度を対象とすると 7 質点 6 自由度のバネ-マス-ダンパー系の物理モデルとなる．並進を考慮すると，

$$
\begin{array}{rcl}
N & = & 3\times(6-1)-2\times0-6 \\
 & = & 15-0-6=9
\end{array} \tag{3}
$$

となるので，7 質点 9 自由度となり，計 15 自由度のバネ-マス-ダンパー系の物理モデルとなる．

1.2 ラグランジュ方程式

簡易物理モデルは 3 ないしは 4 重振り子の複雑な物理モデルとなっている．変位を一般化する前に，ラグランジュ方程式で変位を表せることを検討する．

ラグランジュ方程式は

$$
L = T - U \tag{4}
$$

で与えられる方程式である．T は運動エネルギ，U はポテンシャルエネルギ，L はラグランジアンである．

簡易物理モデルを u を x と y の座標成分として表すと

$$
\begin{array}{rcccccccc}
x_1 & = & l_1\cos\theta_1 & + & l_2\cos\theta_2 & + & l_3\cos\theta_3 & + & l_4\cos\theta_4 \\
x_2 & = & l_2\cos\theta_2 & + & l_3\cos\theta_3 & + & l_4\cos\theta_4 & & \\
x_3 & = & l_3\cos\theta_3 & + & l_4\cos\theta_4 & & & & \\
x_4 & = & l_4\cos\theta_4 & & & & & & \\
x_5 & = & l_5\cos\theta_5 & + & l_4\cos\theta_4 & & & & \\
x_6 & = & l_6\cos\theta_6 & + & l_5\cos\theta_5 & + & l_4\cos\theta_4 & &
\end{array} \tag{5}
$$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
y_1 & = & l_1\sin\theta_1 & + & l_2\sin\theta_2 & + & l_3\sin\theta_3 & + & l_4\sin\theta_4 \\
y_2 & = & l_2\sin\theta_2 & + & l_3\sin\theta_3 & + & l_4\sin\theta_4 & & \\
y_3 & = & l_3\sin\theta_3 & + & l_4\sin\theta_4 & & & & \\
y_4 & = & l_4\sin\theta_4 & & & & & & \\
y_5 & = & l_5\sin\theta_5 & + & l_4\sin\theta_4 & & & & \\
y_6 & = & l_6\sin\theta_6 & + & l_5\sin\theta_5 & + & l_4\sin\theta_4 & &
\end{array} \tag{6}
$$

である．u_7 は Hammer であり，位置関係は拘束されていないので本節では除外する．

運動エネルギ T は

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{2}m_i({x'}_i^2+{y'}_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{6}T_i
\end{aligned} \tag{7}
$$

である．このとき，θ を時刻 t の時間関数とすると合成関数の微分であるため，$(l\sin\theta)' = l\dot{\theta}\cos\theta$ と $(l\cos\theta)' = -l\dot{\theta}\sin\theta$ となる．

式 7 を展開すると，

$$T_1 = m_1 \left(-\dot{\theta}_1 l_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 l_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) \right)^2 \\ + m_1 \left(\dot{\theta}_1 l_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) \right)^2 \tag{8}$$

$$T_2 = m_2 \left(-\dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 l_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) \right)^2 \\ + m_2 \left(\dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) \right)^2 \tag{9}$$

$$T_3 = m_3 \left(-\dot{\theta}_3 l_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) \right)^2 \\ + m_3 \left(\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) \right)^2 \tag{10}$$

$$T_4 = m_4 \left(\dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) + \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) \right)^2 \tag{11}$$

$$T_5 = m_5 \left(-\dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) - \dot{\theta}_5 l_5 \sin(\theta_5) \right)^2 \\ + m_5 \left(\dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) + \dot{\theta}_5 l_5 \cos(\theta_5) \right)^2 \tag{12}$$

$$T_6 = m_6 \left(-\dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) - \dot{\theta}_5 l_5 \sin(\theta_5) - \dot{\theta}_6 l_6 \sin(\theta_6) \right)^2 \\ + m_6 \left(\dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) + \dot{\theta}_5 l_5 \cos(\theta_5) + \dot{\theta}_6 l_6 \cos(\theta_6) \right)^2 \tag{13}$$

展開して整理すると，

$$\begin{aligned} T = m_1 & \left(\left(-\dot{\theta}_1 l_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 l_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_1 l_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_4 l_4 \right. \right. \\ & m_2 \left(\left(-\dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 l_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) \right)^2 \right) + \\ & m_3 \left(\left(-\dot{\theta}_3 l_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) \right)^2 \right) + \\ & m_4 \left(\dot{\theta}_4{}^2 l_4^2 \sin^2(\theta_4) + \dot{\theta}_4{}^2 l_4^2 \cos^2(\theta_4) \right) + \\ & m_5 \left(\left(-\dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) - \dot{\theta}_5 l_5 \sin(\theta_5) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) + \dot{\theta}_5 l_5 \cos(\theta_5) \right)^2 \right) + \\ & m_6 \left(\left(-\dot{\theta}_4 l_4 \sin(\theta_4) - \dot{\theta}_5 l_5 \sin(\theta_5) - \dot{\theta}_6 l_6 \sin(\theta_6) \right)^2 + \left(\dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_4) + \dot{\theta}_5 l_5 \cos(\theta_5) + \dot{\theta}_6 l_6 \cos(\theta_6) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

1.3　連立常微分方程式

主変数 u に関する連立常微分方程式は，

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + B_c^T R B_c \frac{du}{dt} + B_k^T D B_k = f \tag{20}$$

である．M は質量マトリクス，D はバネマトリクス，R は減衰マトリクス，B_c と B_k は剛性マトリクス，f は荷重マトリクスである．連立常微分方程式を粘弾性の運動方程式で一般化すると

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \tag{21}$$

である．u は質点の変位，m は質点の質量，c は減衰，k はバネ定数である．微分形式を省略するため，特に明記がない限り 2 階の時間微分は $\ddot{u}$，1 階の時間微分は $\dot{u}$ で表す．

図 1 より，運動方程式からなる連立方程式は

$$\begin{array}{lcccccl}
m_1\ddot{u_1} & + & & & k_1(u_1-u_2) & = & 0 \\
m_2\ddot{u_2} & + & c_2(\dot{u_2}-\dot{u_3}) & + & k_2(u_2-u_3)-k_1(u_2-u_1) & = & 0 \\
m_3\ddot{u_3} & + & c_2(\dot{u_3}-\dot{u_2})-c_3(\dot{u_3}-\dot{u_4}) & + & k_2(u_3-u_2)-k_3(u_3-u_4) & = & 0 \\
m_4\ddot{u_4} & + & c_3(\dot{u_4}-\dot{u_3}) & + & k_3(u_4-u_3)-k_5(u_4-u_5)-k_4u_4 & = & 0 \\
m_5\ddot{u_5} & + & c_6(\dot{u_5}-\dot{u_6}) & + & k_6(u_5-u_6)-k_5(u_5-u_4) & = & 0 \\
m_6\ddot{u_6} & + & c_6(\dot{u_6}-\dot{u_5}) & + & k_6(u_6-u_5) & = & 0
\end{array} \tag{22}$$

である．連立方程式は変位に着目したとき，対象の変数と接続する変位との差を取ることで求まる．例えば，u_2 の c_2 及び k_2 に着目するならば，u_2 と接続している変位 u_3 について式を立てると，$c_2(\dot{u_2}-\dot{u_3})$ と $k_2(u_2-u_3)$ が得られる．同じように u_2 と接続している u_1 に着目すると，u_1 を接続しているのは k_1 だけなので減衰項は 0 として $k_2(u_2-u_1)$ だけが得られる．それぞれの項を足し合わせると u_2 に関する運動方程式を立てられる．これをすべての変位で繰り返すと連立方程式となる．

連立方程式より状態方程式は，

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix} \tag{27}$$

である．

剛性マトリクスは連立方程式にかかる剛性マトリクスから行列を作成し，重ね合わせの原理によって足し合わせることで求められる．単に k もしくは c に対して何倍なのか求めればいいだけであるため，連立方程式より

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

が得られる．よって，

$$M\ddot{u} = \begin{bmatrix} m_1\ddot{u_1} \\ m_2\ddot{u_2} \\ m_3\ddot{u_3} \\ m_4\ddot{u_4} \\ m_5\ddot{u_5} \\ m_6\ddot{u_6} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$B_k^T R B_k \dot{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2(\dot{u_2} - \dot{u_3}) + c_3(\dot{u_3} - \dot{u_4}) \\ c_3(\dot{u_3} - \dot{u_4}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_6(\dot{u_6} - \dot{u_5}) \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$B_k^T D B_k u = \begin{bmatrix} k_1(u_1 - u_2) \\ k_2(u_2 - u_3) - k_1(u_1 - u_2) \\ k_3(u_3 - u_4) - k_2(u_2 - u_1) - k_1(u_1 - u_2) \\ k_4u_4 - k_3(u_3 - u_2) - k_2(u_2 - u_1) - k_1(u_1 - u_2) - k_5(u_4 - u_5) - k_6(u_5 - u_6) \\ k_5(u_5 - u_4) - k_6(u_6 - u_5) \\ k_6(u_6 - u_5) \end{bmatrix} \tag{32}$$

である．