目次

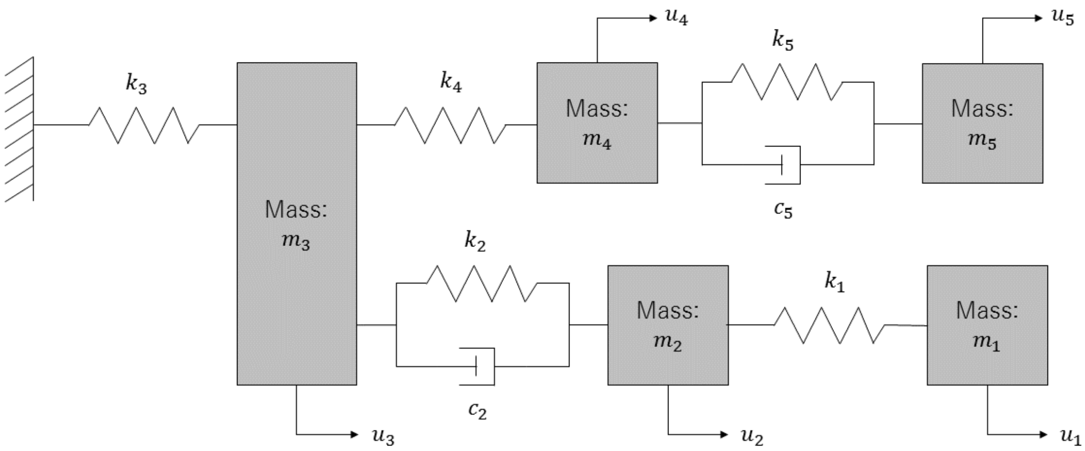

図 1　ローズピアノの簡易モデル

1　ローズ・ピアノの物理モデル

本章ではローズ・ピアノ振動体を簡略化した物理モデルを検討する．簡易モデルに使用するシステムモデルを図 1 に示す．

図はローズ・ピアノのシステムモデルである．k はバネ定数，m は質量，u は変位，c はダッシュポットである．図中上部が Tonebar になり，図中下部が Tine に相当する．Tonebar と Tine をつないでいる Pole は m_3 に相当する．

1.1　連立常微分方程式

主変数 u に関する連立常微分方程式は，

$$M\frac{d^2u}{dt^2} + B_c^T RB\frac{du}{dt} + B_k^T DB_u = f \tag{1}$$

である．M は質量マトリクス，D はバネマトリクス，R は減衰マトリクス，B_c と B_k は剛性マトリクス，f は荷重マトリクスである．連立常微分方程式を粘弾性の運動方程式で一般化すると

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \tag{2}$$

である．u は質点の変位，m は質点の質量，c は減衰，k はバネ定数である．微分形式を省略するため，特に明記がない限り 2 階の時間微分は $\ddot{u}$，1 階の時間微分は $\dot{u}$ で表す．右辺が 0 なのは質点にかかる力を 0 と仮定しているからである．

図 1 より，運動方程式からなる連立方程式は

$$\begin{array}{lclclcl}
m_1\ddot{u_1} & + & & & k_1(u_1 - u_2) & = & 0 \\
m_2\ddot{u_2} & + & c_2(\dot{u_2} - \dot{u_3}) & + & k_2(u_2 - u_3) + k_1(u_2 - u_1) & = & 0 \\
m_3\ddot{u_3} & + & c_2(\dot{u_3} - \dot{u_2}) & + & k_2(u_3 - u_2) + k_3u_3 & = & 0 \\
m_4\ddot{u_4} & + & c_5(\dot{u_4} - \dot{u_5}) & + & k_5(u_4 - u_5) + k_4(u_4 - u_3) & = & 0 \\
m_5\ddot{u_5} & + & c_5(\dot{u_5} - \dot{u_4}) & + & k_5(u_5 - u_4) & = & 0
\end{array} \tag{3}$$

である．連立方程式は変位に着目したとき，対象の変数と接続する変位との差を取ることで求まる．例えば，u_2 の c_2 及び k_2 に着目するならば，u_2 と接続している変位 u_3 について式を立てると，$c_2(\dot{u_2} - \dot{u_3})$ と $k_2(u_2 - u_3)$ が得られる．同じように u_2 と接続している u_1 に着目すると，u_1 を接続しているのは k_1 だけなので減衰項は 0 として $k_2(u_2 - u_1)$ だけが得られる．それぞれの項を足し合わせると u_2 に関する運動方程式を立てられる．これをすべての変位で繰り返すと連立方程式となる．

運動方程式より状態方程式は,

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

である．

剛性マトリクスは連立方程式にかかる係数から行列を作成し，重ね合わせの原理によって足し合わせることで求められる．単に k もしくは c に対して何倍なのか求めればいいだけであるため,

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$