

Sono partito dal seguente modello cinematico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\eta_R \cos(\theta)}{2} v_R + \frac{\eta_L \cos(\theta)}{2} v_L \\ \dot{y} &= \frac{\eta_R \sin(\theta)}{2} v_R + \frac{\eta_L \sin(\theta)}{2} v_L \\ \dot{\theta} &= \frac{\eta_R}{2d} - \frac{\eta_L}{2d}\end{aligned}$$

Dove $\eta_R = 1 - s_R$ e $\eta_L = 1 - s_L$, con s_R e s_L rispettivamente slip del lato destro e del lato sinistro.

L'output della feedback linearization, in generale restituisce v_x e ω . Queste due si possono convertire in input di controllo al modello cinematico tramite le relazioni

$$\begin{aligned}v_R &= v_x + d\omega \\ v_L &= v_x - d\omega\end{aligned}$$

Applicata a un robot mobile, la feedback linearization è un processo per cui si approssima la cinematica del robot a quella di un punto nello spazio; dato un sistema di riferimento fisso, le coordinate di questo punto virtuale saranno:

$$\begin{aligned}x_P &= x + \epsilon \cos(\theta) \\ y_P &= y + \epsilon \sin(\theta)\end{aligned}$$

dove ϵ è un punto lungo l'asse longitudinale del robot. Derivando queste equazioni si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_P &= \dot{x} - \epsilon \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y}_P &= \dot{y} + \epsilon \dot{\theta} \cos(\theta)\end{aligned}$$

A condizione che

$$\begin{aligned}\dot{x}_P &= v_{x_P} \\ \dot{y}_P &= v_{y_P}\end{aligned}$$

Ora, è facile vedere come questo sia un modello MIMO composto da due integratori puri. Sostituendo il modello cinematico nelle equazioni si ottiene (passaggi algebrici saltati per brevità)

$$\begin{aligned}\dot{x}_P &= \frac{\eta_R}{2} (\cos(\theta) - \frac{\epsilon}{d} \sin(\theta)) (v_x + d\omega) + \frac{\eta_L}{2} (\cos(\theta) + \frac{\epsilon}{d} \sin(\theta)) (v_x - d\omega) \\ \dot{y}_P &= \frac{\eta_R}{2} (\frac{\epsilon}{d} \cos(\theta) + \sin(\theta)) (v_x + d\omega) + \frac{\eta_L}{2} (-\frac{\epsilon}{d} \cos(\theta) + \sin(\theta)) (v_x - d\omega)\end{aligned}$$

Nel caso della feedback linearization basata su un differential drive vehicle, v_x e ω sono dati da

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x_P} \cos(\theta) + v_{y_P} \sin(\theta) \\ \omega &= -\frac{1}{\epsilon} \sin(\theta) v_{x_P} + \frac{1}{\epsilon} \cos(\theta) v_{y_P} \end{aligned}$$

Sostituendo queste due equazioni dentro il modello cinematico ideale dopo feedback linearization, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{x_P} + f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{y_P} \\ \dot{y}_P &= f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{x_P} + f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{y_P} \end{aligned}$$

dove si ottengono i seguenti valori

$$\begin{aligned} f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= \frac{\eta_R}{2} \left(1 - \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} \sin(2\theta)\right) + \frac{\eta_L}{2} \left(1 + \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} \sin(2\theta)\right) \\ f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= \left(\frac{\eta_R}{2} - \frac{\eta_L}{2}\right) \left(\frac{d}{\epsilon} \cos^2(\theta) - \frac{\epsilon}{d} \sin^2(\theta)\right) \\ f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= \left(\frac{\eta_R}{2} - \frac{\eta_L}{2}\right) \left(\frac{\epsilon}{d} \cos^2(\theta) - \frac{d}{\epsilon} \sin^2(\theta)\right) \\ f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= \frac{\eta_R}{2} \left(1 + \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} \sin(2\theta)\right) + \frac{\eta_L}{2} \left(1 - \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} \sin(2\theta)\right) \end{aligned}$$

Per ottenere un comportamento ideale, bisognerebbe far sì che

$$\begin{aligned} f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= 1 \\ f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= 0 \\ f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= 0 \\ f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= 1 \end{aligned}$$

Appare immediatamente chiaro che quando gli slittamenti sono uguali da entrambi i lati, il sistema è disaccoppiato (poiché $\eta_R = \eta_L$).

Inoltre, risolvendo l'equazione $\frac{d}{\epsilon} \cos^2(\theta) - \frac{\epsilon}{d} \sin^2(\theta) = 0$ e la sua controparte $\frac{\epsilon}{d} \cos^2(\theta) - \frac{d}{\epsilon} \sin^2(\theta) = 0$ si ha

$$\tan(\theta) = \pm \frac{d}{\epsilon} \tag{1}$$

$$\tan(\theta) = \pm \frac{\epsilon}{d} \tag{2}$$

Questo sistema ha soluzione solo se $d = \epsilon$, nel qual caso si ha $\tan(\theta) = \pm 1$, che corrisponde a $\theta = \frac{n\pi}{4} + k\pi$ con n e k numeri interi.

In generale, un disaccoppiatore per funzionare generalmente dovrebbe forzare gli slip a essere uguali in entrambi i lati.

Per quanto riguarda f_{xx} e f_{yy} , fissato $\eta_R = \eta_L = \eta$, si ottiene che

$$\begin{aligned} f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= \frac{\eta}{2}(1 - A) + \frac{\eta}{2}(1 + A) \\ f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) &= \frac{\eta}{2}(1 + A) + \frac{\eta}{2}(1 - A) \\ A &= \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

Di conseguenza il sistema risultante è $f_{xx} = \eta$; $f_{yy} = \eta$.

In conclusione, per attuare la DDV feedback linearization è essenziale che il compensatore imponga lo slittamento a essere uguale per i due lati e a quel punto imporre un guadagno di $\frac{1}{\eta}$.