Sono partito dal seguente modello cinematico:

$$\dot{x} = \frac{\eta_R cos(\theta)}{2} v_R + \frac{\eta_L cos(\theta)}{2} v_L$$
$$\dot{y} = \frac{\eta_R sin(\theta)}{2} v_R + \frac{\eta_L sin(\theta)}{2} v_L$$
$$\dot{\theta} = \frac{\eta_R}{2d} - \frac{\eta_L}{2d}$$

Dove $\eta_R = 1 - s_R$ e $\eta_L = 1 - s_L$, con s_R e s_L rispettivamente slip del lato destro e del lato sinistro.
L'output della feedback linearization, in generale restituisce v_x e ω. Queste due si possono convertire in input di controllo al modello cinematico tramite le relazioni

$$v_R = v_x + d\omega$$
$$v_L = v_x - d\omega$$

Applicata a un robot mobile, la feedback linearization è un processo per cui si approssima la cinematica del robot a quella di un punto nello spazio; dato un sistema di riferimento fisso, le coordinate di questo punto virtuale saranno:

$$x_P = x + \epsilon cos(\theta)$$
$$y_P = y + \epsilon sin(\theta)$$

dove ϵ è un punto lungo l'asse longitudinale del robot. Derivando queste equazioni si ottiene

$$\dot{x_P} = \dot{x} - \epsilon\dot{\theta} sin(\theta)$$
$$\dot{y_P} = \dot{y} + \epsilon\dot{\theta} cos(\theta)$$

A condizione che

$$\dot{x_P} = v_{x_P}$$
$$\dot{y_P} = v_{y_P}$$

Ora, è facile vedere come questo sia un modello MIMO composto da due integratori puri. Sostituendo il modello cinematico nelle equazioni si ottiene (passaggi algebrici saltati per brevità)

$$\dot{x_P} = \frac{\eta_R}{2}(cos(\theta) - \frac{\epsilon}{d} sin(\theta))(v_x + d\omega) + \frac{\eta_L}{2}(cos(\theta) + \frac{\epsilon}{d} sin(\theta))(v_x - d\omega)$$
$$\dot{y_P} = \frac{\eta_R}{2}(\frac{\epsilon}{d} cos(\theta) + sin(\theta))(v_x + d\omega) + \frac{\eta_L}{2}(-\frac{\epsilon}{d} cos(\theta) + sin(\theta))(v_x - d\omega)$$

Nel caso della feedback linearization basata su un differential drive vehicle, v_x e ω sono dati da

$$v_x = v_{x_P} cos(\theta) + v_{y_P} sin(\theta)$$
$$\omega = -\frac{1}{\epsilon} sin(\theta) v_{x_P} + \frac{1}{\epsilon} cos(\theta) v_{y_P}$$

Sostituendo queste due equazioni dentro il modello cinematico ideale dopo feedback linearization, si ottiene:

$$\dot{x_P} = f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{x_P} + f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{y_P}$$
$$\dot{y_P} = f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{x_P} + f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) v_{y_P}$$

dove si ottengono i seguenti valori

$$f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{\eta_R}{2}(1 - \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} sin(2\theta)) + \frac{\eta_L}{2}(1 + \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} sin(2\theta))$$
$$f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = (\frac{\eta_R}{2} - \frac{\eta_L}{2})(\frac{d}{\epsilon} cos^2(\theta) - \frac{\epsilon}{d} sin^2(\theta))$$
$$f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = (\frac{\eta_R}{2} - \frac{\eta_L}{2})(\frac{\epsilon}{d} cos^2(\theta) - \frac{d}{\epsilon} sin^2(\theta))$$
$$f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{\eta_R}{2}(1 + \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} sin(2\theta)) + \frac{\eta_L}{2}(1 - \frac{d^2 + \epsilon^2}{2de} sin(2\theta))$$

Per ottenere un comportamento ideale, bisognerebbe far sì che

$$f_{xx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = 1$$
$$f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = 0$$
$$f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = 0$$
$$f_{yy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = 1$$

Appare immediatamente chiaro che quando gli slittamenti sono uguali da entrambi i lati, il sistema è disaccoppiato (poiché $\eta_R = \eta_L$). Tuttavia, questo è un caso "triviale", nel senso che annulla la possibilità che il robot cambi orientamento, quindi affinché il robot possa sterzare è essenziale che lo slip sia differente fra i due lati.
Inoltre, risolvendo l'equazione $\frac{d}{\epsilon} cos^2(\theta) - \frac{\epsilon}{d} sin^2(\theta) = 0$ e la sua controparte $\frac{\epsilon}{d} cos^2(\theta) - \frac{d}{\epsilon} sin^2(\theta) = 0$ si ha

$$tan(\theta) = \pm \frac{d}{\epsilon} \tag{1}$$
$$tan(\theta) = \pm \frac{\epsilon}{d} \tag{2}$$

Di conseguenza l'unico modo per cui il sistema risulta completamente disaccoppiato se $\eta_R \neq \eta_L$è che $tan(\theta) = \pm 1$, i.e. che $d = \epsilon$. In questo modo i termini di accoppiamento diventano

$$f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{\eta_R - \eta_L}{2} cos(2\theta)$$
$$f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{\eta_R - \eta_L}{2} cos(2\theta)$$

I massimi valori di accoppiamento si hanno per $cos(2\theta) = 1$ e $cos(2\theta) = -1$, corrispondenti rispettivamente a $\theta = k\pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$; il minimo si ha per $cos(2\theta) = 0$, i.e. per $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Ne consegue che la funzione che lega l'orientamento θ all'accoppiamento è una funzione oscillatoria con periodo $T = \pi$ di ampiezza $\frac{\eta_R - \eta_L}{2}$.
Per $\theta = 0$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_P} \\ \dot{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta_R+\eta_L}{2} & \frac{\eta_R-\eta_L}{2} \\ \frac{\eta_R-\eta_L}{2} & \frac{\eta_R+\eta_L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

Per $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_P} \\ \dot{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_L & 0 \\ 0 & \eta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_P} \\ \dot{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta_R+\eta_L}{2} & -\frac{\eta_R-\eta_L}{2} \\ -\frac{\eta_R-\eta_L}{2} & \frac{\eta_R+\eta_L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

Per $\theta = \frac{3}{4}\pi$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_P} \\ \dot{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_R & 0 \\ 0 & \eta_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

In generale, il sistema è composto da

$$\begin{bmatrix} \dot{x_P} \\ \dot{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta_R}{2}(1 - sin(2\theta)) + \frac{\eta_L}{2}(1 + sin(2\theta)) & \frac{\eta_R-\eta_L}{2} cos(2\theta) \\ \frac{\eta_R-\eta_L}{2} cos(2\theta) & \frac{\eta_R}{2}(1 + sin(2\theta)) + \frac{\eta_L}{2}(1 - sin(2\theta)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

Per disaccoppiare il sistema bisogna trovare una matrice di disaccoppiamento $D(\eta_R, \eta_L, \theta)$ tale che

$$D(\eta_R, \eta_L, \theta) \begin{bmatrix} \dot{x_P} \\ \dot{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

Sostituendo le equazioni per $\dot{x_P}$e $\dot{y_P}$ nell'equazione precedente, si ottiene:

$$D(\eta_R, \eta_L, \theta) \begin{bmatrix} f_x x & f_x y \\ f_y x & f_y y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x_P} \\ v_{y_P} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, si cerca una matrice di disaccoppiamento tale che

$$D(\eta_R, \eta_L, \theta) \begin{bmatrix} f_x x & f_x y \\ f_y x & f_y y \end{bmatrix} = I$$

dove I è la matrice identità. Di conseguenza:

$$D(\eta_R, \eta_L, \theta) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}} \begin{bmatrix} f_{yy} & -f_{xy} \\ -f_{yx} & f_{xx} \end{bmatrix}$$

Sostituendo le espressioni per f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy} si ottiene la matrice di disaccoppiamento

$$D(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{1}{\eta_R \eta_L} \begin{bmatrix} \frac{\eta_R}{2}(1 + sin(2\theta)) + \frac{\eta_L}{2}(1 - sin(2\theta)) & -\frac{\eta_R - \eta_L}{2} cos(2\theta) \\ -\frac{\eta_R - \eta_L}{2} cos(2\theta) & \frac{\eta_R}{2}(1 - sin(2\theta)) + \frac{\eta_L}{2}(1 + sin(2\theta)) \end{bmatrix}$$

Nel caso generale $d \neq \epsilon$ i termini di accoppiamento non saranno mai contemporaneamente nulli, poiché (ricordando che $cos^2(\theta) = \frac{1+cos(2\theta)}{2}$ e $sin^2(\theta) = \frac{1-cos(2\theta)}{2}$) si ottiene:

$$f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{\eta_R - \eta_L}{4d\epsilon}(d^2 - \epsilon^2 + (d^2 + \epsilon^2)cos(2\theta))$$
$$f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = \frac{\eta_R - \eta_L}{4d\epsilon}(\epsilon^2 - d^2 + (d^2 + \epsilon^2)cos(2\theta))$$

Ne consegue che

$$f_{xy}(\eta_R, \eta_L, \theta) = 0 \implies \epsilon = \pm d|tan(\theta)|$$
$$f_{yx}(\eta_R, \eta_L, \theta) = 0 \implies \epsilon = \pm \frac{d}{|tan(\theta)|}$$

ovvero non esiste un valore di θ che renda nulle entrambe le equazioni contemporaneamente.
In conclusione:

- $\eta_R = \eta_L$ è un caso triviale
- se $\eta_R \neq \eta_L$ è opportuno, per disaccoppiare completamente il sistema, che $d = \epsilon$; in questo caso, l'accoppiamento sarà al più pari a $\frac{\eta_R - \eta_L}{2}$