

Projet de fin de session

Interaction pont-piéton

Thomas LE MEUR, Gaétan RAYNAUD
MEC8302A - Vibrations et stabilité

28 novembre 2019

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation du modèle de l'article	2
3	Descriptions des modèles simplifiés proposés	5
3.1	Premier modèle : Forçage continu	5
3.2	Deuxième modèle : Forçage discontinu	6
3.2.1	Approche numérique	7
4	Discussion des résultats	8
4.1	Forçage continu	8
4.2	Forçage discontinu	9
5	Perspectives et conclusion	11
A	Méthodes numériques - précisions	12
A.1	Matrice de l'opérateur de dérivée spatiale	12
A.2	Calcul du pic d'amplitude pour l'excitation discontinue	12
B	Code Python	12

1 Introduction

Afin de domestiquer le territoire, l'Homme a conçu des structures pour lui permettre de franchir les obstacles qu'il rencontrait : rivières, fossés, plaines... Originellement assez massives, l'essor des connaissances en mécanique ainsi que la maîtrise de nouveaux matériaux a permis la réalisation de structures plus élancées, mais également plus sensibles aux vibrations.

Les exemples ne manquent pas quand il s'agit d'illustrer les effets des vibrations indésirables sur les ponts. Ces accidents peuvent généralement être classés selon la nature de leur cause. Par exemple, on peut penser aux tremblements de terre qui causa notamment l'effondrement d'une partie du Bay Bridge (Californie, 1989 [4]). De même les interactions fluide-structure sont à prendre au sérieux, avec notamment le célèbre pont de Tacoma dont les raisons de la rupture n'ont été comprises que très tardivement [6]. L'objet de notre projet, quant à lui, s'oriente vers une excitation d'une autre nature : l'être humain lui-même avec comme jalon la chute du pont de la Basse-Chaine au dessus du Maine à Angers (France) en 1850 qui s'effondra lors du passage d'un régiment marchant au pas [3]. Le bilan, lourd, de 223 mort, incita à prendre en compte ce phénomène.

Un siècle et demi plus tard, l'exemple du Millenium Bridge à Londres illustre particulièrement le fait que ces questions ne sont pas si triviales. Lors de son inauguration en l'an 2000, il se mit à osciller latéralement d'une amplitude de 5 à 10 cm à une fréquence proche du Hertz. Cela a eu pour effet de forcer la synchronisation entre la marche des nombreux piétons et les vibrations de la structure. L'ouvrage dut être fermé pendant plusieurs mois afin que des modifications structurelles permette une utilisation normale et sécuritaire de l'édifice, comme le précise [7].

2 Présentation du modèle de l'article

L'exemple du Millenium Bridge est révélateur d'un phénomène crucial dans des problèmes d'interaction entre des physiques de nature différente : la synchronisation. Dans le cas d'un piéton évoluant sur un sol rigide, sa fréquence de marche est, à priori, décorrélée des propriétés mécaniques du sol. Il en est de même pour un problème de lâcher tourbillonnaire en aval d'un câble sous-marin. Lorsque les mouvements de la structure ne sont plus négligeables devant ceux de l'excitation (fluide ou piéton), des couplages se forment et l'on doit considérer le système comme un tout : excitation et structure.

Le cas des vibrations induites par des vortex est assez connu, et de nombreux articles font état d'une synchronisation entre le Strouhal (la fréquence du lâcher tourbillonnaire) et celle de la structure [9]. En ce qui concerne les interactions entre humains et structure, le sujet est moins développé et nous nous proposons d'analyser quelques éléments extraits de l'article *Pedestrian-bridge dynamic interaction, including human participation* ([8]).

Celui-ci propose notamment de prendre en compte l'interaction piéton-pont par un système d'oscillateurs couplés. Il s'agit d'une démarche plutôt récurrente dans certains problèmes fluide-structure (par exemple [5] où les variations d'une grandeur fluide sont modélisées par un oscillateur non linéaire). Dans notre cas, la fréquence de marche du piéton n'est pas fixe, mais est déterminée par un système masse-ressort-amortisseur couplé avec la structure pont. Le pont quant à lui est modélisé par une poutre unidimensionnelle en appui simple de chaque côté comme présenté à la figure 2.

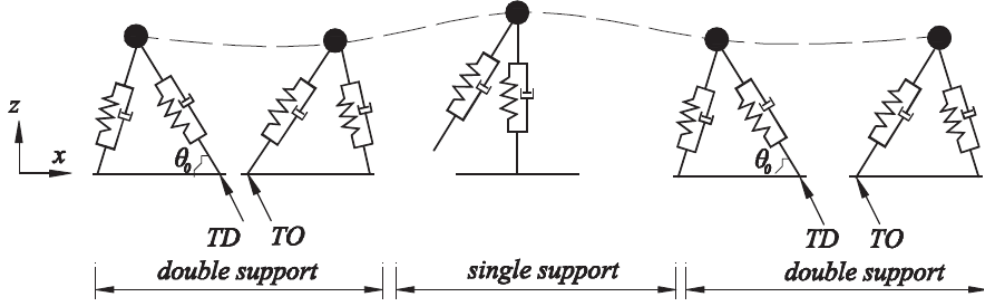


FIGURE 1 – Schéma du modèle de marche (θ_0 est l'angle d'attaque), extrait de [8]. Par la suite nous choisirons de considérer $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ l'angle complémentaire

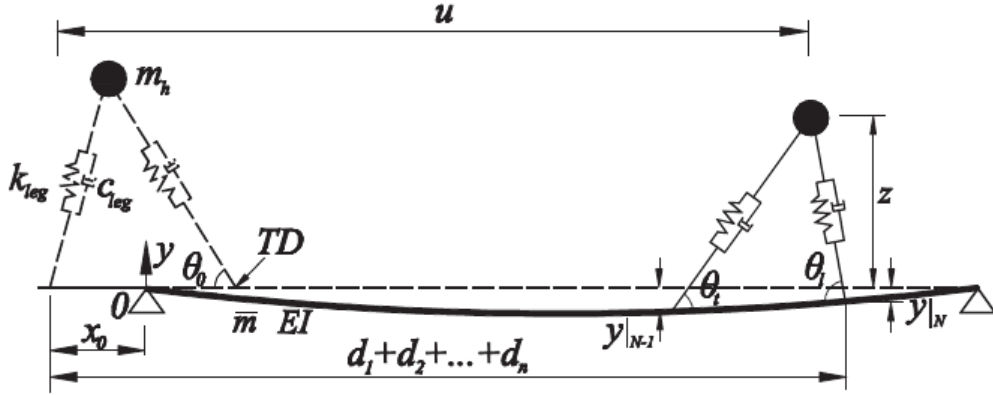


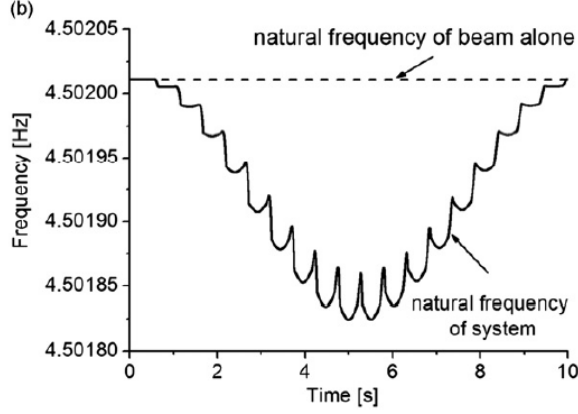
FIGURE 2 – Modèle mathématique pour l'analyse de l'interaction piéton-pont, extrait de [8]

La résolution du système couplé permet donc d'obtenir les fréquences de marches et d'oscillation couplées et en conséquence d'évaluer l'influence de l'une sur l'autre, le cas extrême étant une synchronisation "complète". Pour ce faire, le modèle d'oscillateur proposé par l'article pour le piéton est décrit à la figure 1. La complexité de ce modèle réside dans le fait qu'un pas se décompose en plusieurs périodes, l'une où les deux pieds sont en appui, les autres où seul un pied est en appui. Pendant cette durée, l'effort tranchant reçu par le pont est obtenu en prenant en compte la composante verticale de l'appui du pied, ce qui fait apparaître l'angle du pied. Cette angle vaut θ_0 au moment de la pose du pied : c'est l'angle d'attaque. Une analyse de cet angle est proposée par la suite.

Du fait de la dissipation d'énergie dans les amortisseurs, le modèle propose de prendre en compte une rétroaction sous la forme d'une force horizontale appliquée à la masse afin que celle-ci conserve son mouvement d'avancement (son énergie cinétique). Cette rétroaction permet de laisser libre la fréquence de marche.

Nous proposons de mettre deux résultats de l'article en lumière au moyen de la figure 3. D'une part du fait du fort couplage entre le piéton et le pont, la fréquence du système évolue au cours de la traversée (Fig 3.a). Elle a tendance 0 diminuer lorsque le piéton est éloigné des bords ce qui peut se comprendre intuitivement par le fait que la taille caractéristique de la vibration due à l'excitation augmente avec la distance du piéton aux bords. Elle est maximale quand le piéton est

a.



b.

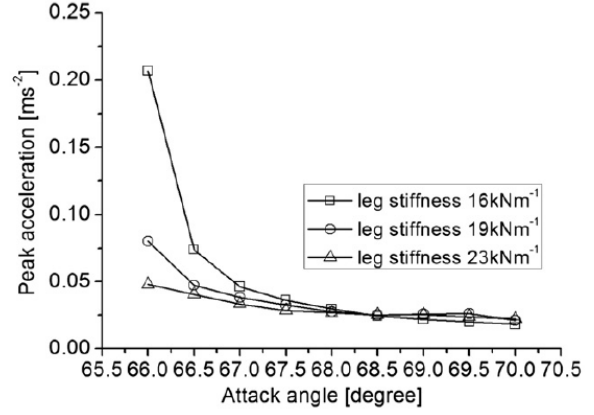
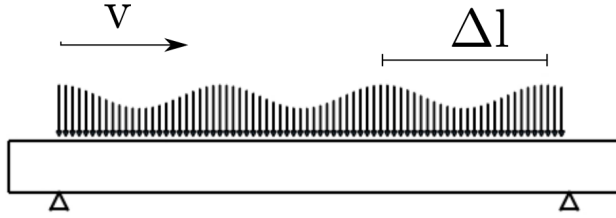


FIGURE 3 – (a). Évolution de la fréquence de la structure lors du passage d'un piéton. (b) Influence de l'angle d'attaque du pied du piéton sur la réponse structurelle dans le modèle biomécanique. Les deux figures sont reproduites de [8]

a.



b.

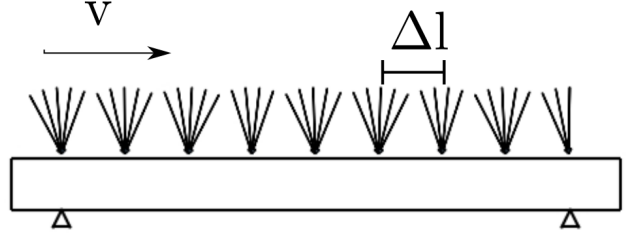


FIGURE 4 – Proposition d'excitations par un marcheur : (a). L'excitation est localisée et se déplace continûment à la vitesse v avec une ondulation de longueur d'onde le pas Δl . (b). L'excitation est localisée seulement au niveau des pas, elle évolue donc par sauts de Δl . La variation d'intensité est prise en compte par la projection verticale de l'effort

au centre. Une plus grande longueur correspond usuellement à un mode à fréquence plus faible.

L'influence de l'angle d'attaque du pied est assez sensible puisqu'il semble exister des valeurs pour lesquelles on obtient des pics d'accélération singulièrement plus élevés (Fig 3.b). Cela dépend de la valeur de la raideur de la jambe, dont dépend la vitesse de traversée. Néanmoins un pic semble exister autour de la valeur $\theta_0 \approx 65^\circ$. Il pourrait être intéressant de retrouver ces résultats avec des modèles plus simples où l'on découple à nouveau excitation et structure.

3 Descriptions des modèles simplifiés proposés

3.1 Premier modèle : Forçage continu

Comme présenté à la figure 4.a, on souhaite modéliser l'excitation sur la poutre par un piéton en mouvement rectiligne uniforme à vitesse v par une force ponctuelle $P(x, t)$ à la position $x = vt$: $f(x, t) = P(x, t)\delta(x - vt)$ où δ est la fonction de dirac. Par la suite, on module l'effort tranchant par une fonction oscillante à la fréquence du pas entre mg (jambe verticale) et $mg \cos(\alpha_0)$. α_0 désigne ici l'angle entre la jambe et la verticale. (Avec les notations de l'article [8], on a $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$) On a alors :

$$f(x, t) = -mg \left[\frac{1 + \cos(\alpha_0)}{2} + \frac{1 - \cos(\alpha_0)}{2} \cos(2\pi \frac{vt}{\Delta l}) \right] \delta(x - vt) \quad (1)$$

En notant l_J la longueur de la jambe du piéton, on a :

$$\Delta l = 2l_J \sin \alpha_0 \quad (2)$$

Le pont étant approximé par une poutre unidimensionnelle, l'équation de mouvement du système s'écrit :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3)$$

La poutre étant bi-appuyée, on a les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y(0, t) = y(L, t) = 0 \\ y''(0, t) = y''(L, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

De plus, on considère initialement que la déformation du pont est nulle. On a alors les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \dot{y}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

On suppose que le système est découplé et on cherche une solution sous la forme :

$$y(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (6)$$

Les modes propres du système s'écrivent alors :

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

On cherche donc une solution sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)q_k(t) \quad (8)$$

L'équation différentielle régissant q_k s'écrit alors :

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = Q_k(t) \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned}
Q_k(t) &= \int_0^L f(x, t) \phi_k(t) dt \\
&= mg \left[\frac{1 + \cos(\alpha_0)}{2} + \frac{1 - \cos(\alpha_0)}{2} \cos(2\pi \frac{vt}{\Delta l}) \right] \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \sin\left(\frac{k\pi vt}{L}\right) \\
&= B \sin(\Omega_k t) + C \cos(\beta t) \sin(\Omega_k t) \\
&= B \sin(\Omega_k t) + \frac{C}{2} \sin((\Omega_k + \beta)t) + \frac{C}{2} \sin((\Omega_k - \beta)t)
\end{aligned} \tag{10}$$

et

$$\begin{cases} \omega_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ \Omega_k = \frac{k\pi v}{L} \\ \beta = \frac{2\pi v}{\Delta l} = \frac{\pi v}{l_J \sin \alpha_0} \\ B = mg \frac{1 + \cos(\alpha_0)}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \\ C = mg \frac{1 - \cos(\alpha_0)}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \end{cases} \tag{11}$$

On s'aperçoit alors qu'apparaissent 3 nouvelles pulsations caractéristiques de l'excitation que sont $\Omega_k, |\Omega_k + \beta|$ et $|\Omega_k - \beta|$.

Une solution particulière de $\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = D \sin \Omega t$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
- q_{k,p}(t) &= \frac{D}{\omega_k^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t) \text{ si } \Omega \neq \omega_k \\
- q_{k,p}(t) &= -\frac{D}{\Omega} t \cos(\Omega t) \text{ si } \Omega = \omega_k
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut conclure que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega_k \in \{\Omega_k, |\Omega_k + \beta|, |\Omega_k - \beta|\}$ (i.e. si une des pulsations caractéristiques du pont est égale à une pulsation propre du pont), alors le pont va rentrer en résonance.

L'amplitude du pont au cours du temps dans le cas général (i.e. pas de résonance) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) + \frac{B}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} \sin(\Omega_k t) + \frac{C}{2[\omega_k^2 - (\Omega_k + \beta)^2]} \sin((\Omega_k + \beta)t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{C}{2[\omega_k^2 - (\Omega_k - \beta)^2]} \sin((\Omega_k - \beta)t) \right] \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

Grâce aux conditions initiales (5), on obtient :

$$\begin{cases} a_k = 0 \\ b_k = -\frac{1}{\omega_k} \left[\frac{\Omega_k B}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} + \frac{(\Omega_k + \beta)C}{2[\omega_k^2 - (\Omega_k + \beta)^2]} + \frac{(\Omega_k - \beta)C}{2[\omega_k^2 - (\Omega_k - \beta)^2]} \right] \end{cases} \tag{13}$$

3.2 Deuxième modèle : Forçage discontinu

On souhaite prendre en compte les discontinuités dans le processus de marche sans pour autant rentrer dans un modèle aussi complexe que celui présenté dans l'article. Pour ce faire on suppose que l'effort tranchant va être appliqué seulement au niveau de l'endroit où un pied va se poser.

On aura ainsi des points d'appuis espacés régulièrement tous les Δl . Cela demande de modifier un peu la fonction de localisation spatiale $\delta(x - vt)$ en $\delta(x - \lfloor \frac{vt}{\Delta l} \rfloor \Delta l)$.

D'autre part, entre le moment où le pied touche le sol et celui où il se lève, on suppose que l'angle d'appui $\alpha(t)$ évolue linéairement avec le temps de $-\alpha_0$ à $+\alpha_0$. Ainsi la fonction $\alpha(t) = \alpha_0 \left(2 \left(\frac{vt}{\Delta l} - \lfloor \frac{vt}{\Delta l} \rfloor \right) - 1 \right)$ est en dents de scie à la fréquence de la marche.

Une représentation de la modélisation est proposée avec la figure 4.b. Enfin, la composante verticale est obtenue en prenant le cosinus de l'angle $\alpha(t)$ pondéré par le poids mg du marcheur :

$$f(x, t) = -mg \cos \left[\alpha_0 \left(2 \left(\frac{vt}{\Delta l} - \lfloor \frac{vt}{\Delta l} \rfloor \right) - 1 \right) \right] \delta \left(x - \lfloor \frac{vt}{\Delta l} \rfloor \Delta l \right) \quad (14)$$

3.2.1 Approche numérique

Bien que la résolution analytique de la réponse vibratoire du système soit accessible, la nature discontinue de la seconde forme d'excitation proposée imposerait une décomposition en série de Fourier et des calculs assez lourds. Afin d'évaluer les écarts entre ces deux excitations, nous proposons ici une approche numérique pour la résolution temporelle de ces équations.

La discrétisation de l'espace et du temps sont effectués de manière homogène avec un pas de temps dt et d'espace dx . Soit $N = \lfloor \frac{L}{dx} \rfloor$ le nombre de degrés de liberté pour la discrétisation spatiale et Nt pour le temps. On appelle $\underline{y}^k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_{N-1}^k)^T \in \mathbb{R}^{N-1}$ le vecteur spatial qui discrétise $y(x)$ à un instant donné avec $y_j^k = y(jdx, kdt)$. Avec les conditions aux limites on a $y_0 = y_N = 0$ ce qui justifie le fait de se passer des premiers et derniers indices dans le vecteur \underline{y}^k .

On choisit un schéma de discrétisation spatiale pour la dérivée d'ordre de 4 de la forme :

$$(\underline{y}_n^k)^{(4)} = \frac{y_{n+2}^k - 4y_{n+1}^k + 6y_n^k - 4y_{n-1}^k + y_{n-2}^k}{dx^4} + o(dx^4) \quad (15)$$

On peut alors écrire cette relation matriciellement avec $\partial_x^4 \underline{y}^k = \underline{\underline{A}} \underline{y}^k$ où $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ est une matrice dont la diagonale vaut 6, les sous et sur diagonales d'ordre 1 valent -4 et les sous et sur diagonales d'ordre 2 valent 1. De plus la première et la dernière ligne sont modifiées afin de prendre en compte les conditions aux limites dynamiques ($\partial_x^2 \underline{y} = 0$). La forme précise de la matrice est proposée en annexe et dans le code python.

Quant au schéma en temps, on propose une méthode implicite avec θ -schéma dans le cas $\theta = 1/2$. On discrétise la dérivée seconde par :

$$\partial_t^2 \underline{y}^k = \frac{\underline{y}^k - 2\underline{y}^{k-1} + \underline{y}^{k-2}}{dt^2} + o(dt^2) \quad (16)$$

Le schéma complet s'écrit donc vectoriellement comme

$$\frac{EI}{2} \underline{\underline{A}} (\underline{y}^{k+1} + \underline{y}^k) + \frac{\rho A}{dt^2} (\underline{y}^{k+1} - 2\underline{y}^k + \underline{y}^{k-1}) = \underline{f}(t) = (f(dx, t), f(2dx, t), \dots, f((N-1)dx, t))^T \quad (17)$$

Le schéma étant implicite, il faut donc inverser la matrice $B = \underline{\underline{Id}} + \frac{EI dt^2}{2\rho A} \underline{\underline{A}}$ et l'on peut alors intégrer en temps avec le protocole suivant :

$$\underline{y}^{k+1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \left(2\underline{y}^k - \underline{y}^{k-1} - \frac{EI dt^2}{2\rho A} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y}^k + \frac{dt^2}{2\rho A} \underline{f}(t) \right) \quad (18)$$

On pourra se référer à [1] quant aux méthodes numériques utilisées. Ici, les vecteurs sont soulignés simplement $\underline{}$ et les matrices doublement $\underline{\underline{}}$. Le système est initialisé avec $\underline{y}^0 = \underline{y}^1 = 0$ pour des conditions initiales nulles en vitesse et position.

Enfin la discrétisation de $f(x, t)$ et notamment du dirac $\delta(x - vt)$ est transformée en une gaussienne très étroite (écart type de l'ordre de dx).

4 Discussion des résultats

Dans les applications numériques à suivre, nous prenons les mêmes valeurs numériques que dans [8] afin de pouvoir comparer les résultats obtenus. On a alors $L = 11m$, $l_j = 1m$, $EI = 1.64 \times 10^8 N.m^2$, $\rho A = 1.364 \times 10^3 kg.m^{-1}$ et $m = 80kg$.

4.1 Forçage continu

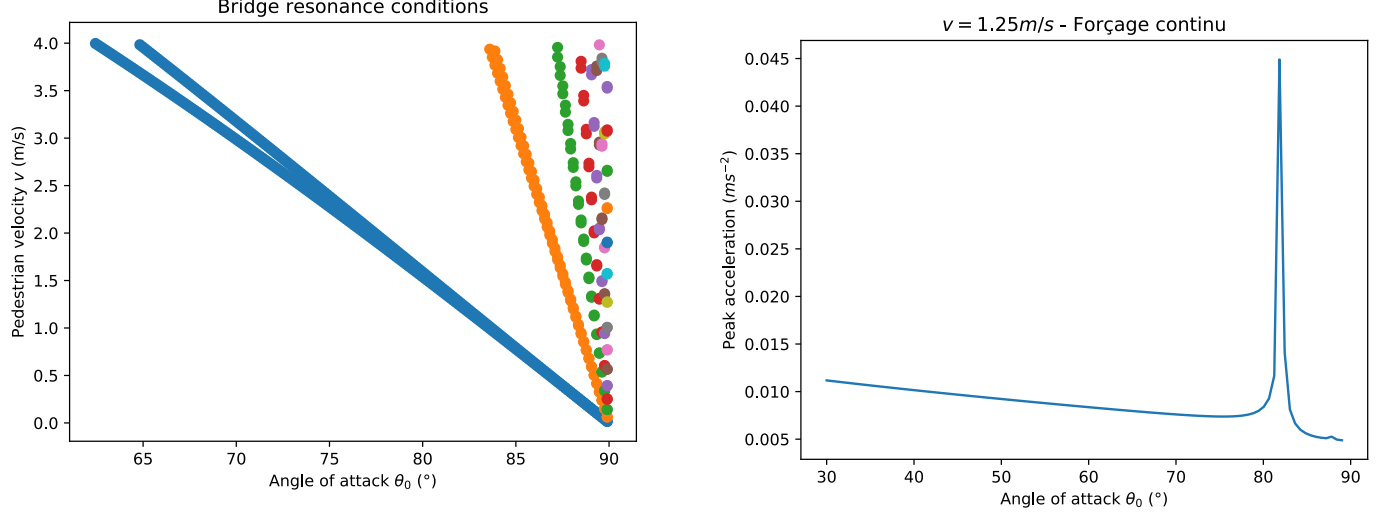
Dans un premier temps, nous nous intéressons aux conditions qui mènent à la résonance du pont. Nous avons vu dans la section 3.1 que cela arrive lorsque l'une des pulsations caractéristiques de l'excitation ($\Omega_k + \gamma\beta, \gamma \in \{-1, 0, 1\}$) est égale à la pulsation propre du pont (ω_k). Grâce aux expressions des différentes pulsations données en (11), on peut écrire la relation liant la vitesse v du piéton à l'angle d'attaque α_0 ($\alpha_0 = \frac{p^i}{2} - \theta_0$) menant à la résonance du pont :

$$v = \frac{\frac{k^2\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{\left| \frac{k}{L} + \frac{\gamma}{l_j \sin(\alpha_0)} \right|} \quad (19)$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$

Nous traçons alors en figure 5a les couples (α_0, v) vérifiant l'équation (19). On observe que pour une vitesse v du piéton donnée, il existe plusieurs angles d'attaque critiques θ_0 menant à la résonance du pont. Cependant, avec les valeurs numériques choisies, on s'aperçoit qu'il n'y a qu'une branche principale (en bleu sur le graphique, relatif au mode principal) qui correspond à des valeurs admissibles pour la marche humaine ($\theta_0 < 85^\circ$). Cette branche principale est en réalité constituée de deux branches collées pour des petites vitesses et qui se séparent pour des valeurs de v plus importantes. Ainsi, pour des vitesses de marche humaine (comprises entre 1 et 1.5 m/s), on s'aperçoit qu'il n'y a réellement qu'un angle critique à éviter si on ne souhaite pas faire entrer le pont en résonance.

Nous vérifions le résultat précédent en traçant en figure 5b le pic d'accélération en fonction de l'angle d'attaque θ_0 , en fixant la vitesse du piéton. Ici, nous avons choisi $v = 1.25$ m/s afin de pouvoir comparer le résultat obtenu avec celui de l'article [8] en figure 3b. Nous observons alors que la figure 5b présente un pic principal en $\theta_0 \approx 82^\circ$, ce qui correspond à l'angle pouvant être lu sur la branche principale de la figure 5a. Ceci confirme le phénomène de résonance décrit précédemment pour cet angle critique. Cependant, même si nous retrouvons la même allure de courbe en aval du pic qu'en figure 3b, nous observons que l'angle critique associé au pic est sensiblement différent



(a) Conditions de résonance du pont (en bleu : liées au mode $k=1$, en orange : $k=2$, ...)

(b) Pic d'accélération selon l'angle d'attaque du piéton

FIGURE 5 – Résultats analytiques pour le modèle de forçage discontinu

($\approx 66^\circ$ pour ce dernier). Ainsi, même si le modèle de forçage continu permet de prendre en compte l'influence de l'angle d'attaque du piéton, il ne permet pas de retrouver les mêmes résultats que ceux du modèle présenté dans l'article [8].

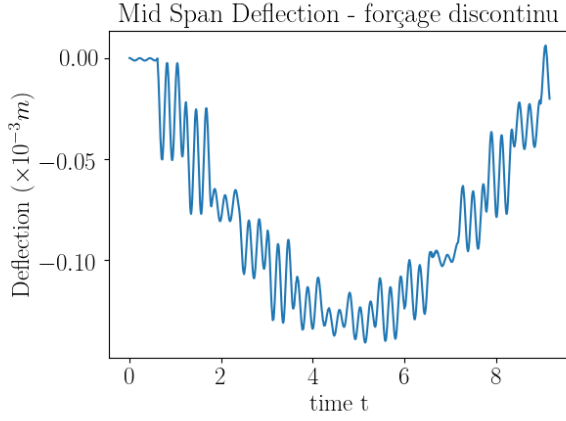
4.2 Forçage discontinu

L'intégration numérique du système avec excitation discontinue permet d'obtenir des résultats tels que décrits à la figure 6.a. En ordre de grandeur, les déflexions sont cohérentes avec celles précédemment constatées. En analysant le spectre fréquentiel de la déformée au milieu du pont, on relève un certain nombre de pics que l'on associe à des fréquences particulières du système précédemment explicitées : $(\Omega_1, \beta - \Omega_1, 2\beta - \Omega_1, \omega_1, 3\beta - \Omega_1, 3\beta + \Omega_2)$. On note surtout l'apparition des harmoniques de la fréquence β qui est liée au pas Δl . Ceci peut être compris comme la conséquence des discontinuités dans l'excitation $f(x, t)$ qui font apparaître des termes harmoniques dans la décomposition en série de Fourier d'un signal en dents de scie. En outre, on note que les fréquences liées à la troisième harmonique : $\beta - \Omega_1$ et $3\beta + \Omega_2$ sont assez proches de la fréquence naturelle de la structure ω_1 .

Nous proposons d'observer l'influence de l'angle d'attaque sur la réponse dynamique du système dans nos modèles simplifiés, en comparaison des résultats présentés en figure 3.b. En effet nous faisons clairement apparaître $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ qui influencent les fréquences caractéristiques du problème proposées dans la section 3.1. Ainsi l'on détermine les pics d'accélération au niveau de la moitié du pont au cours de la traversée d'un piéton (régime transitoire). Dans cette étude, la longueur de la jambe est fixée à la valeur de référence de l'article et on effectue le calcul pour plusieurs vitesses v . Les figures 7.a et b. présentent plusieurs pics. Ces pics semblent se produire pour des angles d'attaque plus grands lorsque la vitesse diminue.

La comparaison avec la figure présentant les maxima d'accélération pour différents angles d'attaque

a.



b.

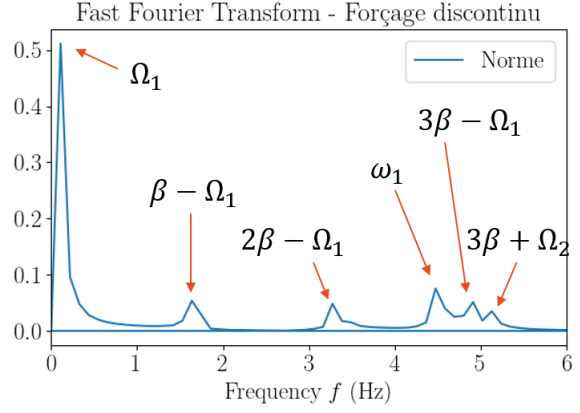
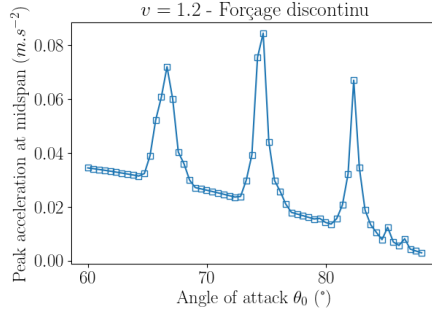
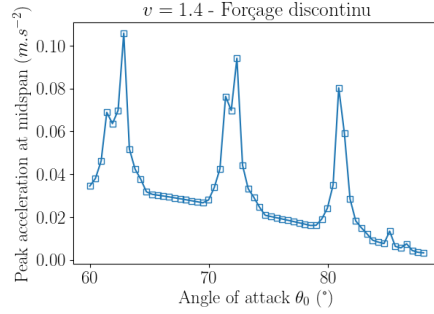


FIGURE 6 – Résultats numériques pour le modèle de forçage discontinu. Les valeurs numériques utilisées sont celles de l'article. La vitesse et l'angle d'attaque sont fixés. Avec les valeurs numériques on a $\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 4.5$ Hz, $\frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{v}{2L} = 0.055$ Hz et $\frac{\beta}{2\pi} = \frac{v}{\Delta l} = 1.67$ Hz. La figure (b) montre dans l'ordre croissant des fréquences ($\Omega_1, \beta - \Omega_1, 2\beta - \Omega_1, \omega_1, 3\beta - \Omega_1, 3\beta + \Omega_2$).

a.



b.



c.

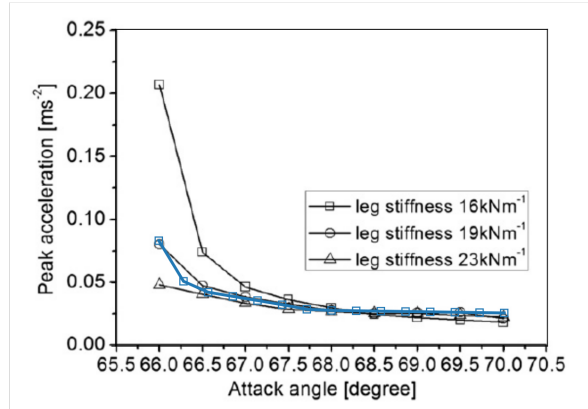


FIGURE 7 – (a) et (b) : Pic d'accélération pour différents angles d'attaques à deux vitesses d'avancement cohérentes avec les valeurs trouvées dans l'article [8]. (c) : comparaison quantitative entre les résultats de l'article (en noir) et ceux obtenus avec notre modèle simplifié dans le cas $v = 1.25$ m/s et $l_j = 1$ m (en bleu)

dans le cadre du forçage continu (figure 5b) montre un accord qualitatif quant au pic autour de $\theta \approx 82^\circ$. Néanmoins, l'article présente lui des pics à des valeurs inférieures que le forçage discontinu semble être en mesure de reproduire. On peut supposer, au regard de l'analyse fréquentielle de la figure 6.b que les harmoniques de β obtenues avec le modèle discontinu jouent un rôle important puisqu'elles se rapprochent de la fréquence fondamentale de la poutre ω_1 .

La figure 7.c obtenue pour une vitesse de marche de $v = 1.25$ m/s dans le cas de l'excitation discontinue présente un très bon accord qualitatif et quantitatif avec le modèle bien plus complexe de l'article étudié. L'amplitude des pics pour des angles relativement grands est sensiblement identique. Quand on se rapproche de l'angle critique par valeurs supérieures, on semble être proche du cas $k_l = 19$ kN/m ce qui correspond à une vitesse de déplacement de 1.17 m/s.

5 Perspectives et conclusion

Comprendre et modéliser l'effet de l'excitation d'un piéton sur un pont est une première étape. Le modèle que nous avons présenté demeure linéaire, ce qui signifie que l'on ne peut espérer tirer beaucoup plus d'informations pour une foule de piétons : les réponses seront en effet sommées et les seuls effets nouveaux apparaîtront du fait des interférences entre les différentes excitations. Il resterait alors à fixer les décalages en vitesse et position de chacun des marcheurs.

Pour aller plus loin, on pourra se référer à l'article [10] qui observe expérimentalement l'effet du nombre et de la position des piétons sur un pont. Ils évaluent ainsi l'influence de la taille de la foule sur la réponse vibratoire en notant un décalage en fréquence et une raideur du système qui semblent augmenter avec le nombre de piétons. De même l'amortissement de chacun des modes évolue à la hausse.

Un peu plus récemment, les effets de synchronisation de la marche sur une structure oscillante ont été constatés expérimentalement chez [2]. Dans le cas d'oscillations latérales, la marche se trouve affectée par les mouvements latéraux seulement dans un certain intervalle de fréquence et d'amplitude de la structure. Des effets de verrouillage de la marche à fréquence simple et double sont alors mis en lumière.

Le modèle de [8] a été utilisé à plusieurs reprises car il permet une première estimation de l'amortissement et la masse ajoutée par la marche du piéton sur la structure complète. De plus, comme nous l'avons observé avec la version discontinue du forçage simplifié que nous avons proposé, la discontinuité d'appui semble jouer un rôle important. Toutefois, les expériences plus récentes incitent à penser que des effets plus complexes influent la dynamique couplée pont-piéton, et, à fortiori, lorsqu'il s'agit d'une foule.

A Méthodes numériques - précisions

A.1 Matrice de l'opérateur de dérivée spatiale

La matrice de discrétisation spatiale est de la forme

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

La première et la dernière ligne traduisent $\partial_x^2 y(x) = 0$ discrétisé en $y_0^k - 2y_1^k + y_2^k = 0$ avec $y_0^k = 0$ non représenté. Pour la deuxième et avant dernière ligne, le coefficient 1 qui dépasse de la matrice n'est pas pris en compte car il pondère y_0 ou y_N dont on fixe la valeur à 0 due aux conditions aux limites $y(0) = y(L) = 0$.

A.2 Calcul du pic d'amplitude pour l'excitation discontinue

Le pic d'amplitude présenté est extrait à partir de la valeur absolue du signal d'accélération. Celui-ci est obtenu en différenciant à deux reprises la valeur de déflexion au milieu du pont. Le signal obtenu est bruité à haute fréquence. Pour obtenir des pics qui soient de nature physique, on filtre le signal par un filtre Butterworth d'ordre 3 dont la fréquence de coupure est le double de la plus grande fréquence naturelle du système (entre celle naturelle de la structure, celle du déplacement et celle du pas).

Concernant la transformée de Fourier discrète, les bibliothèques de Python sont utilisées. On fournit le déplacement vertical en milieu de pont dont on retranche la valeur moyenne. En effet cela permet d'avoir une transformée de Fourier qui vaut 0 à fréquence nulle. Cela permet de distinguer clairement la première fréquence qui se situe autour de 0.06 Hz. De plus on filtre les hautes fréquences par le même procédé que précédemment décrit. Enfin on affiche le graphe de la norme de la transformée de Fourier.

B Code Python

Le code Python proposé utilise les dépendances suivantes :

- Numpy
- Matplotlib.pyplot
- Scipy.signal

Le code python est disponible au téléchargement à l'adresse :

<https://github.com/GRaynaud/ProjetVibrationsPoly>

Références

- [1] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005. Google-Books-ID : vReEuE4margC.
- [2] Mateusz Bocian, Jeremy F. Burn, John H. G. Macdonald, and James M. W. Brownjohn. From phase drift to synchronisation – pedestrian stepping behaviour on laterally oscillating structures and consequences for dynamic stability. *Journal of Sound and Vibration*, 392 :382–399, March 2017.
- [3] Encyclopedie Wikipedia. Pont de la Basse-Chaine, June 2019. Page Version ID : 160261737.
- [4] Encyclopédie Wikipedia. Séisme de 1989 à Loma Prieta, October 2018. Page Version ID : 153164650.
- [5] M.L. Facchinetti, E. de Langre, and F. Biolley. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 19(2) :123–140, February 2004.
- [6] Daniel Green and William G. Unruh. The failure of the Tacoma Bridge : A physical model. *American Journal of Physics*, 74(8) :706–716, July 2006.
- [7] David E. Newland. Vibration of the London Millennium Bridge : Cause and Cure. 2003.
- [8] J. W. Qin, S. S. Law, Q. S. Yang, and N. Yang. Pedestrian–bridge dynamic interaction, including human participation. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) :1107–1124, February 2013.
- [9] T. Sarpkaya. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 19(4) :389–447, May 2004.
- [10] E. Shahabpoor, A. Pavic, V. Racic, and S. Zivanovic. Effect of group walking traffic on dynamic properties of pedestrian structures. *Journal of Sound and Vibration*, 387 :207–225, January 2017.