

E6.1

① 首先由 $y_1 = \alpha^k \pmod{p}$, 根据 a 计算 $y_1^a = (\alpha^k)^a = \alpha^{ak} \pmod{p}$

又因 $\beta = \alpha^a \pmod{p}$, 所以 $y_1^a = \beta^k \pmod{p}$

而 $y_2 = x + \beta^k \pmod{p}$, 那么 $x = y_2 - \beta^k \pmod{p}$, 将 $\beta^k = y_1^a \pmod{p}$ 代入得

$$x = y_2 - y_1^a \pmod{p}$$

② I. 解密 \rightarrow 解决 CDH.

已知 (y_1, y_2) , 且能解密出 x , 已知 $y_2 = x + \beta^k \pmod{p}$, 那么 $\beta^k = y_2 - x \pmod{p}$

这里 $y_1 = \alpha^k \pmod{p}$, $\beta = \alpha^a \pmod{p}$

$\therefore \beta^k = \alpha^{ak} \pmod{p}$, 即 CDH 问题的解

II. 密文为 (y_1, y_2) , 其中 $y_1 = \alpha^k \pmod{p}$, $\beta = \alpha^a \pmod{p}$,

如有解 CDH 的算法, 则可根据 y_1 和 β 计算出 $\beta^k = \alpha^{ak} \pmod{p}$

\therefore 可通过 $x = y_2 - \beta^k \pmod{p}$ 得到 x

E6.2

若泄露了随机数 k , 则若攻击者知道密文及公钥 α, β, p

则因 $\beta = \alpha^a$, \therefore 可知 $\beta^k = \alpha^{ak} = K$

则可由 $y_2 = x \cdot K$ 解密得到 $x = y_2 \cdot K^{-1}$

则此次 ElGamal 加密被破解