① $n\in Z$ ∴易知 $2|n(n+1)$

② 若 $n\equiv 0 \bmod 3$，则 $3|n$

若 $n\equiv 1 \bmod 3$，则 $(2n+1)\equiv 2\times 1+1=3\equiv 0 \bmod 3$

若 $n\equiv 2 \bmod 3$，则 $3|n+1$

∴综上 $2|n(n+1)(2n+1)$ 且 $3|n(n+1)(2n+1)$

∴ $6|n(n+1)(2n+1)$

2、若整数为 $a, a+1, \dots, a+n-1$

①存在性：这些整数包括了 $a \bmod n$，$(a+1) \bmod n$，…，$(a+n-1) \bmod n$

余数包含了从0到 $n-1$ 的所有可能值

∴其中必存在 $a+k$ 使 $a+k\equiv 0 \bmod n$ 即 $n|(a+k)$

②唯一性：

若 $a+k$ 与 $a+m$ 均可被 n 整除，且 $0<k<m<n-1$

则 $a+m-(a+k)=m-k\equiv 0 \bmod n$

但 $0<m-k<n$，矛盾

∴综上，有且仅有一个数可被 n 整除

3. $(mn+pq)-(mq+pn)=mn-np+pq-mq=n(m-p)+q(p-m)=(m-p)(q-n)$

∵ $m-p|(mn+pq)$ 且 $m-p|(m-p)(q-n)$

∴ $m-p|(mn+pq)-(m-p)(q-n)$

∴ $m-p|(mq+np)$

4、设 $d=(a+b, a-b)$ ∴ $d|(a+b)$ 且 $d|(a-b)$

∴ $d|(a+b)+(a-b)\Rightarrow d|2a$

$d|(a+b)-(a-b)\Rightarrow d|2b$

∴ d 是 $2a$ 和 $2b$ 的公约数

∵ $(a,b)=1$

∴ d 只能是1或2

5. ∵ $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 是即约分数 ∴ $(a,b)=1$ 且 $(c,d)=1$

且 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=k\in\mathbb{Z}$

∴ $d\frac{a}{b}+c=kb$, $k\in\mathbb{Z}$ ∴ $d\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$ ∵ $(a,b)=1$ ∴ $\frac{d}{b}\in\mathbb{Z}$

同理, $\frac{b}{d}\in\mathbb{Z}$ ∴ $|b|=|d|$

6. 设 $d=(a,b)$, $d_1=(am,bm)$

∵ $\exists s,t\in\mathbb{Z}$, $sa+tb=d$

∴ $sma+tmb=dm$

∴ $d_1|dm$

又 $dm|am$ 且 $dm|bm$

∴ $dm|d_1$ ∴ $d_1=dm$

∴ $dm=(am,bm)$

∴ $(am,bm)=(a,b)m$

7. $\gcd(21n+4,14n+3)$ $\quad 21n+4=(14n+3)+7n+1$

$=\gcd(14n+3,7n+1)$ $\quad 14n+3=2(7n+1)+1$

$=\gcd(7n+1,1)=1$

∴ $\gcd(21n+4,14n+3)=1$

∴ $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是既约分数

8: ① 对 $n=1$, $p_1=2<2^{2^1}=4$

② 若 $n=k\in N_+$, $p_k<2^{2^k}$

则对 $n=k+1$:

取 $N=p_1p_2\cdots p_k+1<2^{2^1}\cdot 2^{2^2}\cdot\ldots\cdot 2^{2^k}+1=2^{2^{k+1}-2}+1<2^{2^{k+1}}$

∵ $p_{k+1}\le N$

∴ $N<2^{2^{k+1}}$

∴ $p_{k+1}<2^{2^{k+1}}$

∴ 对 $n=k+1$ 仍成立

∴ 对 $n\in N_+$, $p_n<2^{2^n}$

9. ① $\gcd(1245, 233)$ $\quad 1245 = 5\times233+80$

$= (233, 80)$ $\quad 233 = 2\times80+73$

$= (80, 73)$ $\quad 80 = 73+7$

$= (73, 7)$ $\quad 73 = 7\times10+3$

$= (7, 3)$

$= 1$

② $\gcd(189, 211)$ $\quad 211 = 189+22$

$= (189, 22)$ $\quad 189 = 8\times22+13$

$= (22, 13)$ $\quad 22 = 13+9$

$= (13, 9)$ $\quad 13 = 9+4$

$= (9, 4)$

$= 1$

10. $1895 = 2\times782+331$

$782 = 2\times331+120$

$331 = 2\times120+91$

$120 = 91+29$

$91 = 3\times29+4$

$29 = 7\times4+1$

$4 = 4\times1+0$

$\therefore\ 1 = 29-7\times4$

$1 = 29-7\times(91-3\times29) = 22\times29-7\times91$

$1 = 22\times(120-1\times91)-7\times91 = 22\times120-29\times91$

...

$1 = 80\times782-189\times(1895-2\times782) = 458\times782-189\times1895$

$\therefore\ 782^{-1} \equiv 458 \bmod 1895$