No.
Date.　/　/

1、$\because 10 \equiv -1 \pmod{11}$

若 $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ (十进制)

则 $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (-1)^i \pmod{11}$

因此 $n \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow$ 各位交替和能被11整除

2、$\because a_i$ 和 b_i 是完全剩余系

$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}$

$\because n \equiv 0 \pmod{2}$ $\therefore \frac{n(n-1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \equiv n \equiv 0 \pmod{n}$

但若 $a_i + b_i$ 是完全剩余系，则应有 $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$，矛盾

$\therefore a_i + b_i$ 不是模 n 的完全剩余系

3、① 证：$a=1$ 时 $h_1^p \equiv h_1^p$，显然成立

$a=2$ 时 对 $\forall h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$

$(h_1+h_2)^p = \sum_{k=0}^{p} h_1^{p-k} h_2^k$ $\because 0<k<p$ 时，$p \mid C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$

$\therefore (h_1+h_2)^p \equiv h_1^p + h_2^p \pmod{p}$

若 $a=m$ 时成立且 $m \in N_+$

则当 $a=m+1$ 时，使 $n = h_1 + \cdots + h_m$ $\therefore$ 左 $= (n+h_{m+1})^p \equiv n^p + h_{m+1}^p \pmod{p}$

$\because n^p \equiv h_1^p + h_2^p + \cdots + h_m^p$ $\therefore a = m+1$ 时亦成立

$\therefore$ 综上，若 p 为素数，则对 $\forall h_1, h_2, \cdots, h_a \in \mathbb{Z}$，$(h_1 + \cdots + h_a)^p \equiv h_1^p + \cdots + h_a^p \pmod{p}$

② 若 $h_1 = h_2 = \cdots = h_a = 1$，则 $a^p \equiv a \pmod{p}$ $\therefore$ 费马小定理成立

③ $\because (a, m) = 1$ $\therefore \prod_{i=1}^{\phi(n)} (a r_i) \equiv \prod_{i=1}^{\phi(n)} r_i \pmod{n}$ ($r_1, \cdots, r_{\phi(n)}$ 是所有与 n 互质的剩余类)

即 $a^{\phi(n)} \prod_{i=1}^{\phi(n)} r_i \equiv \prod_{i=1}^{\phi(n)} r_i \pmod{n}$

$\because \prod r_i$ 与 n 互质

$\therefore a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

REMEMBER · MEMORY

No.
Date. / /

4. 当$k=1$时，显然x_1通过m_1的完全剩余系

当$k=\lambda-1$时若成立，则当$k=\lambda$时

若使$y=x_1+m_1x_2+\cdots+m_1m_2\cdots m_{\lambda-2}x_{\lambda-1}$

则y通过$m_1m_2\cdots m_{\lambda}$的完全剩余系，使$M=m_1m_2\cdots m_{\lambda-1}$

$\because (m_1m_2\cdots m_{\lambda-1},m_\lambda)=1$ 且x_λ通过m_λ的完全剩余系

① 若$k=2$ 且 $x_1+m_1x_2\equiv x_1'+m_1x_2' \pmod{m_1m_2}$

$\Rightarrow x_1+m_1x_2\equiv x_1'+m_1x_2' \pmod{m_1}$

$\Rightarrow x_1\equiv x_1' \pmod{m_1} \Rightarrow x_1=x_1'$

$\therefore x_2=x_2'$ $\therefore x_1+m_1x_2$通过m_1m_2的完全剩余系

② 若$k>2$，则令$y=x_1$，$M=m_1$，$x_\lambda=x_2$

则 $y+Mx_\lambda$通过Mm_λ的完全剩余系

$\therefore$综上，成立

5.

$\because a_1,\cdots,a_{\varphi(m)}$为$m$的一个缩系

$\therefore (m-a_1),(m-a_2),\cdots(m-a_{\varphi(m)})$也是$m$的一个缩系

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{\varphi(m)}a_i\equiv\sum\limits_{i=1}^{\varphi(m)}(m-a_i) \pmod m$

$\therefore 2\sum\limits_{i=1}^{\varphi(m)}a_i\equiv m\varphi(m) \pmod m$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{\varphi(m)}a_i\equiv m\dfrac{\varphi(m)}{2} \pmod m\equiv 0 \pmod m$

6. (1) $\because p-i\equiv -i \pmod p$ 且p是奇素数

又$(p-1)!\equiv -1 \pmod p$ $\therefore 1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1)!\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$

(2) 同理 $2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1)!\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$

No.

Date. / /

7. 若证 $\forall x \in \mathbb{Z}, \left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x\right) \in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow \frac{1}{15}(3x^5+5x^3+7x)$

$\Leftarrow 3x^5+5x^3+7x \equiv 0 \pmod{15}$，设 $f(x)=3x^5+5x^3+7x$

$\Leftarrow f(x) \equiv 0 \pmod{15}$ 则 解此同余式等价于

$\begin{cases} f(x)\equiv 0 \pmod 3 & \Rightarrow x \equiv 0,1,2 \pmod 3 \\ f(x) \equiv 0 \pmod 5 & \Rightarrow x \equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5 \end{cases}$

由中国剩余定理 $\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod 5 \\ x \equiv b_2 \pmod 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 5b_1+3b_2 \pmod{15}$

$\therefore$ b_1 取 0, 1, 2, 3, 4；b_2 取 0, 1, 2 时，可得解集为 $\mathbb{Z}$ $\therefore$ 成立

$\therefore \forall x \in \mathbb{Z}, \left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x\right) \in \mathbb{Z}$

8. $111x \equiv 75 \pmod{321}$

① 求 $d=(111,321)$ $321=2\times111+99 \Rightarrow 111=1\times99+12 \Rightarrow 99=8\times12+3 \Rightarrow 12=4\times3+0$

$\therefore d=3$ 且 $3 \mid 75$ $\therefore$ 有解且恰有3个

② 经化简，原式等价于 $37x \equiv 25 \pmod{107}$

③ 求 $37^{-1} \pmod{107}$： $107=2\times37+33 \Rightarrow 37=1\times33+4 \Rightarrow 33=8\times4+1 \Rightarrow 4=1\times4+0$

$\therefore$ 回代 $1=33-8\times4=33-8\times(37-1\times33)=9\times33-8\times37=9\times(107-2\times37)-8\times37=9\times107-26\times37$

$\therefore 37^{-1} \equiv -26 \equiv 81 \pmod{107}$

④ $\therefore$ 原式等价于 $x \equiv 25\times81 \equiv 99 \pmod{107}$

$\therefore$ 原方程的解为 $99,\ 99+107,\ 99+214$

$\therefore x \equiv 99, 206, 313 \pmod{321}$

No.

Date.　　/　　/

9. $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod 4 \\ 5x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 15 \pmod 4 \\ x \equiv 6 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$

$\therefore x = 4k+3 \Rightarrow 4k+3 \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow 4k \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow k \equiv 6 \pmod 7$

$\therefore x \equiv 4 \times 6 + 3 \equiv 27 \pmod{28}$

$\therefore x \equiv 27 \pmod{28}$