No. 信安数学第四章
Date. / /

1、$\because$ 在群中 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

$\therefore (a_1a_2\cdots a_n)^{-1}=(a_1(a_2\cdots a_n))^{-1}=(a_2\cdots a_n)^{-1}a_1^{-1}$

$\therefore$ 同理易得 $(a_1a_2\cdots a_n)^{-1}=a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}$

2. 已知 $H\subseteq G$，$1\in H$，且 $(H,\cdot)$ 是群

则 ① $\because (H,\cdot)$ 是群 $\therefore \forall a,b\in H$，$a\cdot b\in H$

② $\because (H,\cdot)$ 是群 $\therefore \forall a\in H$，$a^{-1}\in H$

$\therefore$ 由子群判定定理一，H为G的子群

3、$Z_5^*=\{1,2,3,4\}$，阶为4的乘法阿贝尔群

$Z_4=\{0,1,2,3\}$，阶为4的加法阿贝尔群

若定义 $f: Z_5^*\to Z_4$，$f(1)=0$，$f(2)=1$，$f(3)=3$，$f(4)=2$

则 $\forall x,y\in Z_5^*$，$f((x\cdot y)\bmod 5)=(f(x)+f(y))\bmod 4$

$\therefore$ f是同构 $\therefore (Z_5^*,\cdot)\cong(Z_4,+)$

4. (1) 正确，$|S_n|=n!$ $\therefore$ 由拉格朗日定理，任何子群A，$|A|\mid n!$

(2) 错误，ϕ 无幺元

(3) 正确，如零同态 $f(n)=0$

(4) 错误，Z_4 和克莱因四元群不同构

(5) 正确，G/N 的运算为 $(aN)(bN)=(ab)N$，若G为阿贝尔群，则 $ab=ba$，故 G/N 为阿贝尔群

5. ① 同态性：$f(xy)=axya^{-1}=axa^{-1}aya^{-1}=f(x)f(y)$

② 双射性：若 $f(x)=f(y)$，则 $axa^{-1}=aya^{-1}$，故 $x=y$ $\therefore$ 单射

对 $\forall y\in G$，存在 $x=a^{-1}ya$ 使 $f(x)=y$

$\therefore$ f为自同构

No.
Date.　　/　　/

6、① 证G阿贝尔 $\Rightarrow$ f同态

$f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}=f(a)f(b)$　∴同态

② 证f同态 $\Rightarrow$ G阿贝尔

$a^{-1}b^{-1}=f(a)f(b)=f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

∴ $ba=ab$　∴阿贝尔群

∴综上G是阿贝尔群 $\Leftrightarrow f(a)=a^{-1}$ 为一同态

7、$|x|=k$，则 $x^k=1$

∴ $f(x)^k=f(x^k)=f(1)=1$

∴若 $|f(x)|=m$

则 $m|k$

Wengu