练习1.

(1) $\langle A,+\rangle$ 不是群，因 $x_1,x_2\in A$，x_1+x_2 为偶数

$\therefore x_1+x_2\notin A$，不封闭

(2) $\langle B,+\rangle$ 是群

① $\forall x_1,x_2\in B$，$x_1+x_2\in B$，封闭

② 易知，满足结合律

③ $\forall x\in B$，$0+x=x+0=x$ $\therefore$ 有幺元 0

④ $\forall x\in B$，$-x\in B$，且 $e+(-e)=0$ $\therefore$ 均可逆

练习2.

设 $S_n=\left\{\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\2,1,3,\cdots,n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\1,3,2,\cdots,n\end{pmatrix},\cdots\right\}$

其中 $\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\2,1,3,\cdots,n\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\1,3,2,\cdots,n\end{pmatrix}$ 除前3个元素置换规则均相同

则 $\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\2,1,3,\cdots,n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\1,3,2,\cdots,n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\3,1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$

$\neq\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\1,3,2,\cdots,n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\2,1,3,\cdots,n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,n\\2,3,1,\cdots,n\end{pmatrix}$

$\therefore$ 不满足交换律，不是阿贝尔群

练习3.

(a) ① $\forall\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$，$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2 & a_1b_2+b_1\\0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$ $\therefore$ 封闭

② $\forall\underbrace{\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\0 & 1\end{pmatrix}}_{A_1},\underbrace{\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\0 & 1\end{pmatrix}}_{A_2},\underbrace{\begin{pmatrix}a_3 & b_3\\0 & 1\end{pmatrix}}_{A_3}$，

$(A_1\times A_2)\times A_3=\begin{pmatrix}a_1a_2 & a_1b_2+b_1\\0 & 1\end{pmatrix}\times A_3$

$=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$A_1\times(A_2\times A_3)=A_1\times\begin{pmatrix}a_2a_3 & a_2b_3+b_2\\0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3+a_1b_2+b_1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore A_1\times(A_2\times A_3)=(A_1\times A_2)\times A_3$ $\therefore$ 可结合

③ $\forall A\in\mathcal{A}$，$A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$ 且 $A\times A_0=A_0\times A=A$ $\therefore$ 有幺元

④ $\forall A=\begin{pmatrix}a & b\\0 & 1\end{pmatrix}$，有 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{a}\\0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$ 且 $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=A_0$ $\therefore$ 均可逆

$\therefore$ 综上，为群

(b) $A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$，$A_1\times A_2=\begin{pmatrix}2 & 5\\0 & 1\end{pmatrix}$；$A_2\times A_1=\begin{pmatrix}2 & 7\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore A_1\times A_2\neq A_2\times A_1$ $\therefore$ 不可交换

$\therefore$ 不是阿贝尔群