Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & m^2 & 2mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

3.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{23} = -\frac{11}{8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - t e^{-2t} - \frac{11}{8}e^{-2t} + 2e^{-t}$$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ é 4.

4.
vedi dispense dell’insegnamento

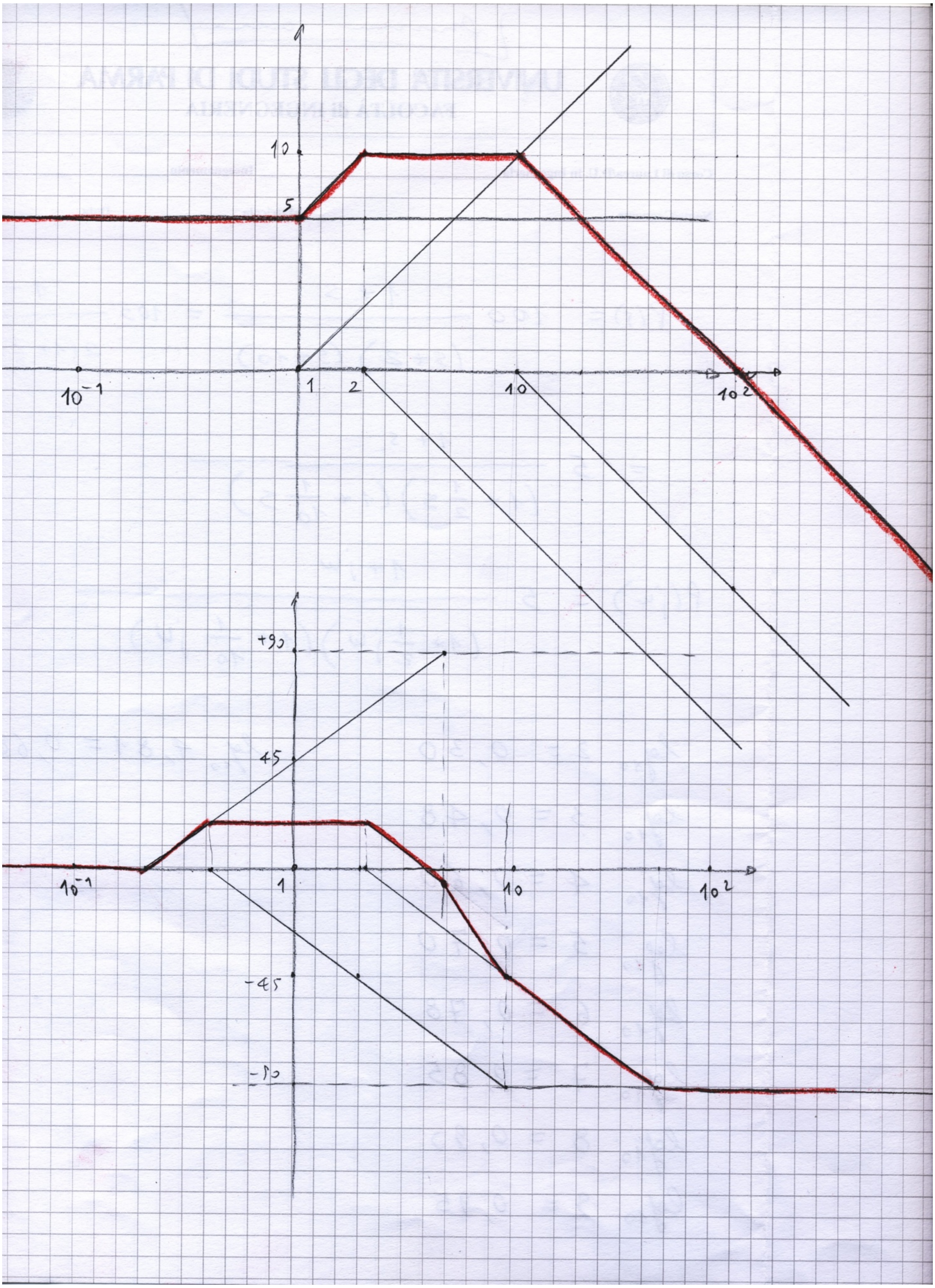
5.
Si riscrive la funzione di trasferimento nella forma standard con le costanti di tempo:

$$P(s) = 5\frac{1+s}{(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{10}s)}$$

da cui la risposta armonica

$$P(j\omega) = 5\frac{1+j\omega}{(1+\frac{1}{2}j\omega)(1+\frac{1}{10}j\omega)}$$

I diagrammi di Bode asintotici sono riportati in figura:


10
5
1
2
10
10^{-1}
10^{2}
+90
45
-45
-90
10^{-1}
1
10
10^{2}

6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=-2$ con molteplicità 2
- uno polo per $s=-4$ con molteplicità 4

Essendo $n-m=2$ il luogo presenta due asintoti che si intersecano in

$$\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-4$$

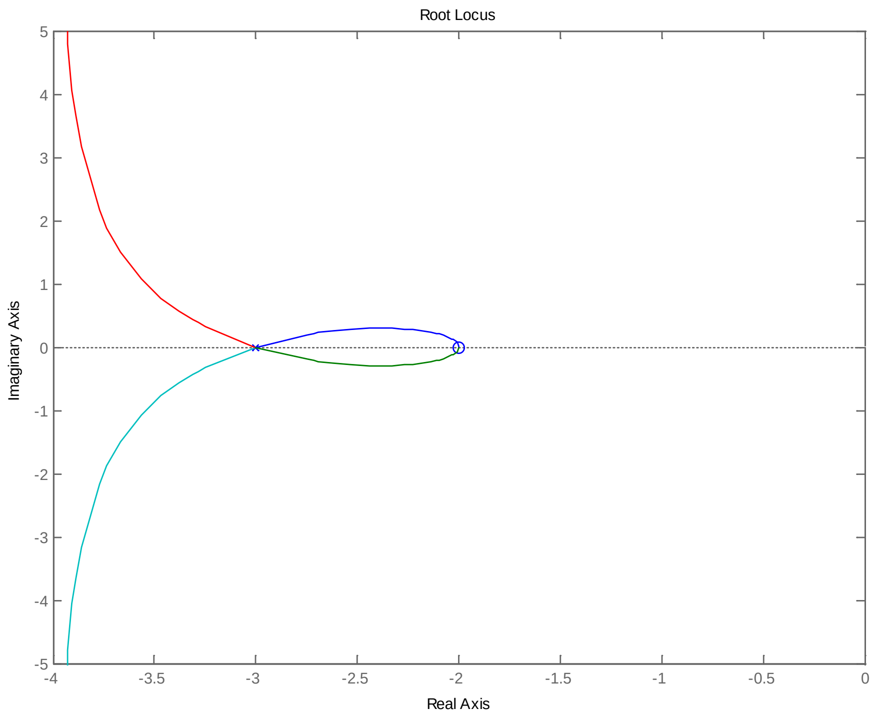
Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli (luogo diretto).
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0}=\frac{\pi}{2};\ \ \theta_{a,1}=\frac{3}{2}\pi$

  al luogo non appartengono radici doppie.

si può dedurre che il luogo delle radici ha l'andamento riportato in figura:



7.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\, s^4 + 102\, s^3 + 287\, s^2 + 392\, s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

8.

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+8} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} := P_s(t)$$

$$\mathcal{Z}[P_s(kT)] = \mathcal{Z}\left[2 - 4e^{-2\cdot k\cdot 0.02} + 2e^{-4\cdot k\cdot 0.02}\right] = \mathcal{Z}\left[2 - 4\left(e^{-0.04}\right)^k + 2\left(e^{-0.08}\right)^k\right]$$

$$= 2\frac{z}{z-1} - 4\cdot\frac{z}{z-0.9608} + 2\frac{z}{z-0.9231}$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}[P_s(kT)] = 2 - 4\frac{z-1}{z-0.9608} + 2\frac{z-1}{z-0.9231} = \frac{0.003000\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)}$$

$$T_{\tilde{r}\tilde{c}}(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)}, \quad L(z) = k\,P_d(z)$$

$$1 + k\frac{0.003\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)} = 0 \qquad z^2 - 1.8839\cdot z + 0.88691448 + 0.003\cdot k\cdot z + 0.00302896k = c$$

$$z^2 + (0.003\cdot k - 1.8839)z + 0.00302896\cdot k + 0.88691448 = 0 \qquad a(z) = 0$$

1) $a(1) > 0$, $\quad 0.00301448 + 0.00602896\cdot k > 0 \qquad k > -0.5$

2) $(-1)^2 a(-1) > 0$, $\quad 3.77081448 + 0.00002896\cdot k > 0 \qquad k > -130207.68$

3) $|a_0| < a_2 \qquad |0.00302896\cdot k + 0.88691448| < 1 \qquad \begin{cases} k < 37.33 \\ k > -622.96 \end{cases}$

$\quad -0.00302896\cdot k - 0.88691448 < 1$

$$\boxed{-0.5 < k < 37.33}$$