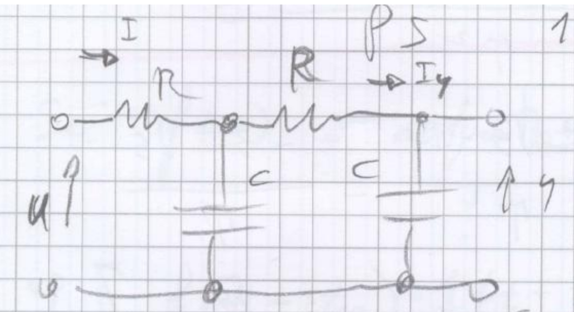
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

P5 13/7/10



$$Z_{t} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot\frac{U}{R+\frac{\frac{1}{sC}\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}\,U}{R^2+\frac{2R}{sC}+\frac{R}{sC}+\frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1+3R(sC)+R^2(sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2s^2+3RCs+1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: assenti

poli $T := RC \qquad T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} =$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5}\cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

modi: $\left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T}\cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $(T := RC)$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

3.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{10}{(s+1)^4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_1 = \left.\frac{10}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 10 \quad , \quad K_{21} = \left.\frac{10}{s}\right|_{s=-1} = -10$$

$$K_1 + K_{24} = 0 \Rightarrow K_{24} = -K_1 = -10$$

$$K_{22} = \frac{1}{(2-1)!} D^{2-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = 10\left[-s^{-2}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$K_{23} = \frac{1}{(3-1)!} D^{3-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{(s+1)^4} - \frac{10}{(s+1)^3} - \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{s+1}$$

$$y(t) = 10 - \frac{5}{3} t^3 e^{-t} - 5t^2 e^{-t} - 10 t e^{-t} - 10 e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Il gradino è una funzione discontinua, quindi $y(t) \in \overline{C^{\rho-1}}$.

$\rho = 4 \Rightarrow y(t) \in \overline{C^3}$ (il grado minimo di continuità dell'uscita è pari a 3).

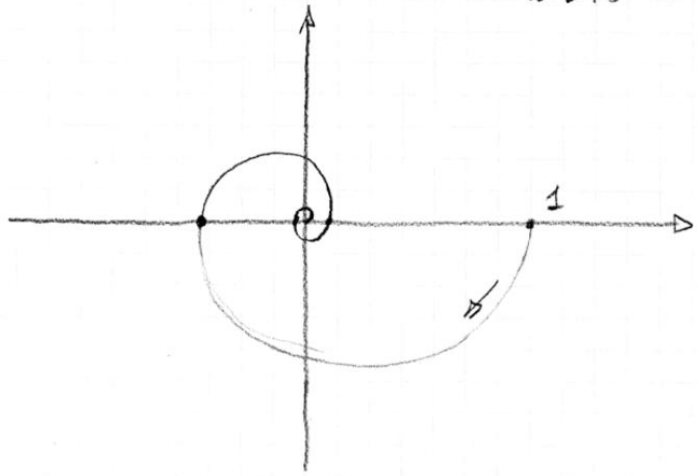
4.
Vedi bibliografia del corso.

5.

a) $L(s) = \dfrac{1}{(1+s)^8}$ $\qquad L(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)^8}$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2)^4}$$

$$\arg L(j\omega) = -8 \,\mathrm{arctg}\, \omega \qquad \lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -4\pi$$



$\arg L(j\omega_1) = -\pi \qquad -8\,\mathrm{arctg}\,\omega_1 = -\pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega_1 = \frac{\pi}{8}$

$\omega_1 = 0{,}4142 \qquad |L(j\omega_1)| = 0{,}5308 \;,\; L(j\omega_1) = -0{,}5308$

$\arg L(j\omega_2) = -2\pi \qquad -8\,\mathrm{arctg}\,\omega_2 = -2\pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega_2 = \frac{\pi}{4}$

$\omega_2 = 1 \qquad |L(j\omega_2)| = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \;,\; L(j\omega_2) = 0{,}0625$

$\arg L(j\omega_3) = -3\pi \qquad -8\,\mathrm{arctg}\,\omega_3 = -3\pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega_3 = \frac{3}{8}\pi$

$\omega_3 = 2{,}4142 \qquad |L(j\omega_3)| = 0{,}0004599$

$L(j\omega_3) = -0{,}0004599$

b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1 e quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. ($L(s)$ non ha poli a parte reale positiva).

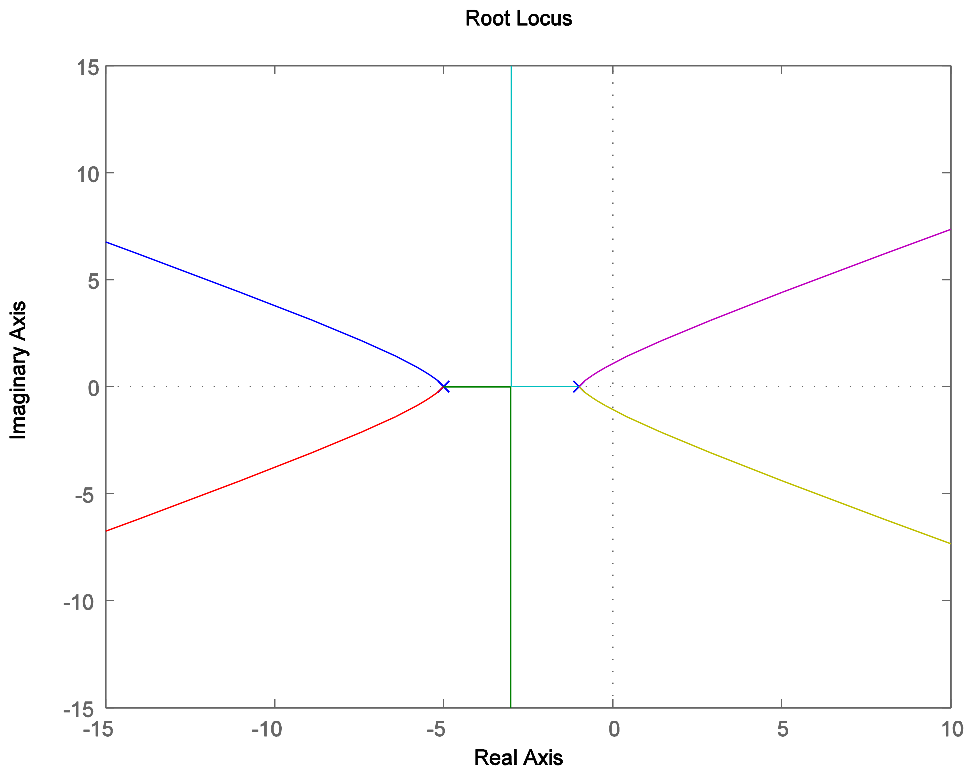
6.
Il luogo è composto da sei rami convergenti a sei asintototi rettilinei con angoli rispetto all'asse reale di $+30^0, +90^0, +150^0, -30^0, -90^0, -150^0$. Il centro degli asintoti è dato da

$$\sigma_a = \frac{-1-1-1-5-5-5}{6} = -3$$

Il segmento dell'asse reale fra -5 e -1 appartiene al luogo ed in un suo punto interno si rivela una radice doppia determinabile risolvendo l'equazione:

$$\frac{3}{s+1} + \frac{3}{s+5} = 0 \qquad \text{radice doppia in } s = -3$$

Il luogo è riportato in figura:



7.

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)P(s) = \lim_{s \to 0} K \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot \frac{10}{(s+1)^3} = 10K$$

$$K_p = 20 \implies \boxed{K = 2}$$

Sia $L(s) \triangleq \dfrac{20}{(s+1)^3}$ (guadagno di anello non compensato)

e $L_c(s) = \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot L(s)$ (g. di anello compensato)

È richiesto $M_F = 40° = 0.6981317$ rad

$$L(j\omega) = \frac{20}{(j\omega+1)^3}, \quad |L(j\omega)| = \frac{20}{(1+\omega^2)^{3/2}}, \quad \arg L(j\omega) = -3\,\mathrm{arctg}\,\omega$$

Scegliamo per tentativi una pulsazione ω_0 affinché

$$\varphi_0 \triangleq \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F > 0 \quad e \quad \cos\varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}.$$

Sia $\omega_0 = 1$ rad/sec

$\varphi_0 = 0.0873$ rad $(\sim 5°)$, $|L(j\omega_0)| = 7.0711$

$$\cos\varphi_0 = 0.9962 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|} = 0.1414 \quad \text{ok!}$$

$\varphi := \varphi_0$, $M := |L(j\omega_0)|$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \boxed{69.67 \text{ sec}}, \quad \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \boxed{0.1407}$$

8.

Soluzione L'equazione caratteristica è

$$Q(z) = z^3 - az^2 + 0.5\ ,$$

le condizioni per la stabilità sono

1) $1 > 0.5$, verificata sempre
2) $a < 1.5$
3) $a > -0.5$
4) Dalla tabella di Jury $3/2 > 0.5|a|$.

Mettendo insieme le diverse condizioni si trova che il sistema è asintoticamente stabile se $-0.5 < a < 3/2$.