Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_i}, \quad Z_i = \frac{\frac{R_1}{s\,C_1}}{\frac{1}{s\,C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + R_1\,C_1\,s}, \quad Z_f = \frac{R_2}{1 + R_2\,C_2\,s}$$

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1 + R_1\,C_1\,s}{1 + R_2\,C_2\,s} = -\frac{R_1\,R_2\,C_1\,s + R_2}{R_1\,R_2\,C_2\,s + R_1}$$

Guadagno statico: $G(0) = -\frac{R_2}{R_1}$
Eq. Differenziale:

$$R_1\,R_2\,C_2\,Dy(t) + R_1 y(t) = -R_1\,R_2\,C_1\,Du(t) - R_2 u(t)$$

zeri: $-\frac{1}{R_1\,C_1}$, poli: $-\frac{1}{R_2\,C_2}$, modi: $\{e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\}$

3.
1° metodo :
Calcolo di $y(t)$ per $0 \le t < 1$:

$$u(t) = 1, \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2};$$

$$k_1 = \left.\frac{4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2\ ; \quad k_2 = \left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4\ ; \quad k_3 = \left.\frac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 2\ ;$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Calcolo di $y(t)$ per $t \ge 1$:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Considerato che $\rho = 2$ e $y \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{C^{1,\infty}}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases},$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \quad \text{per } t \ge 1\ ; \qquad Dy(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t} \quad \text{per } 0 \le t < 1$$

$$\begin{cases} 2 - 4e^{-1} + 2e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ 4e^{-1} - 4e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 4e - 4\ ; \ c_2 = 2 - 2e^2\ ;$$

$$y(t) = 4(e-1)\cdot e^{-t} + 2(1-e^2)\cdot e^{-2t}$$

2° metodo :

$$u(t)=1(t)-1(t-1),\quad U(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}$$

$$\Rightarrow\quad Y(s)=G(s)U(s)=\frac{4}{(s+1)(s+2)}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right]$$

$$Y(s)=\frac{4}{s(s+1)(s+2)}-\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{2}{s+2}\right]=2-4e^{-t}+2e^{-2t}\quad \text{per } t\geq 0$$

Digressione: dal teorema di traslazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\right]=e^{-t_0 s}F(s)\ ;\quad F(s):=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\Rightarrow f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}F(s)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right]=\left[2-4e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)\quad \text{per } t\geq 0$$

$$y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}-\left[2-4e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

da cui per $0\leq t<1$: $y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}$

e per $t\geq 1$: $y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}-\left[2-4e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right]=$

$$=(-4+4e)e^{-t}+(2-2e^{2})e^{-2t}$$

4.

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) =$$
$$= b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

$$a_2 Y(z) + a_1 \{ z^{-1} Y(z) + y_{-1} \} + a_0 \{ z^{-2} Y(z) + y_{-2} + y_{-1} z^{-1} \} =$$
$$= b_2 U(z) + b_1 \{ z^{-1} U(z) + u_{-1} \} + b_0 \{ z^{-2} U(z) + u_{-2} + u_{-1} z^{-1} \}$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 (z Y + y_{-1} z^2) + a_0 (Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z) =$$
$$= b_2 z^2 U + b_1 (z U + u_{-1} z^2) + b_0 (U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z)$$

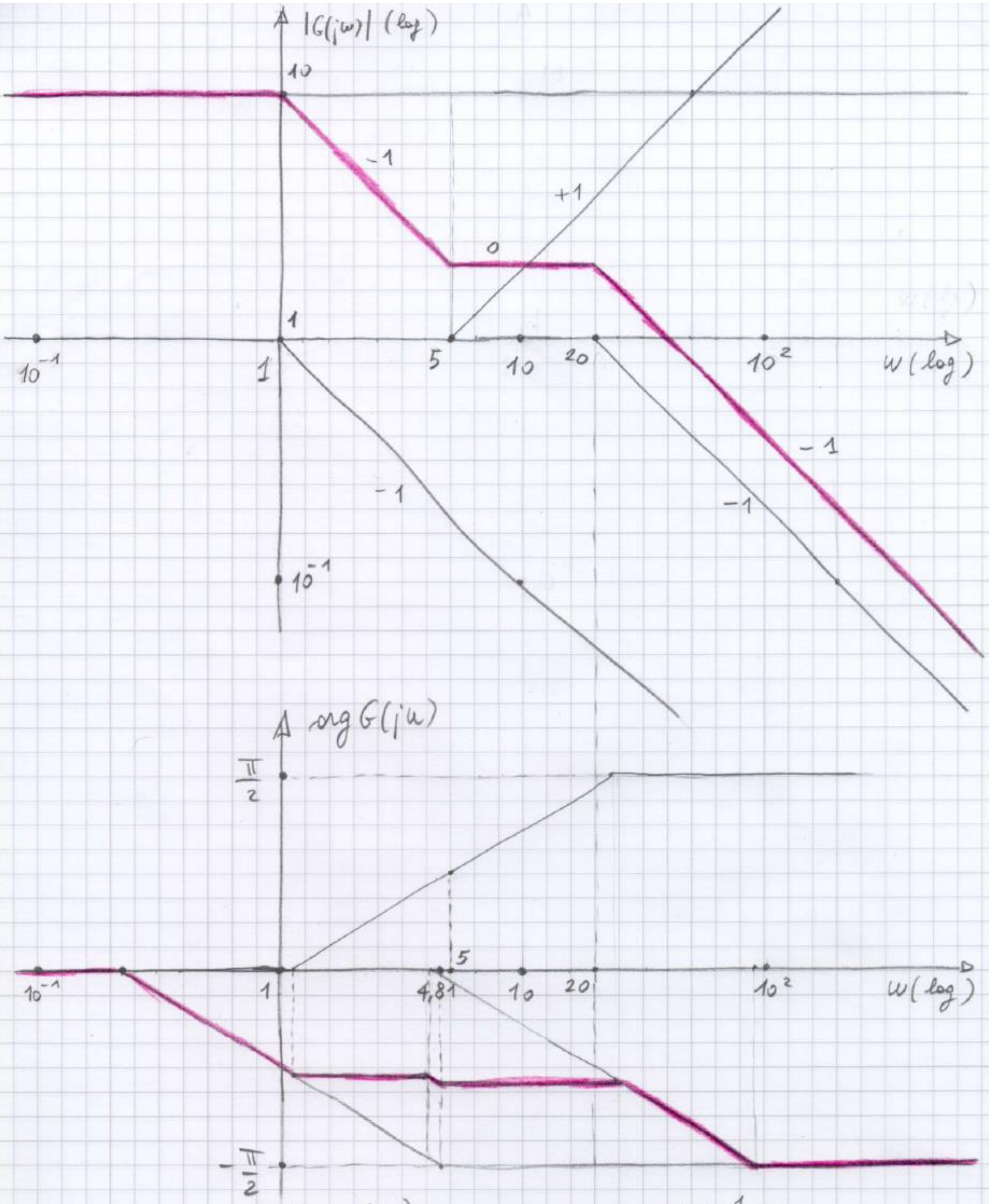
$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$
$$= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{C(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$C(z) \triangleq c_2 z^2 + c_1 z$$

$$c_2 \triangleq b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$
$$c_1 \triangleq b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

5.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K \frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di $120°$ che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

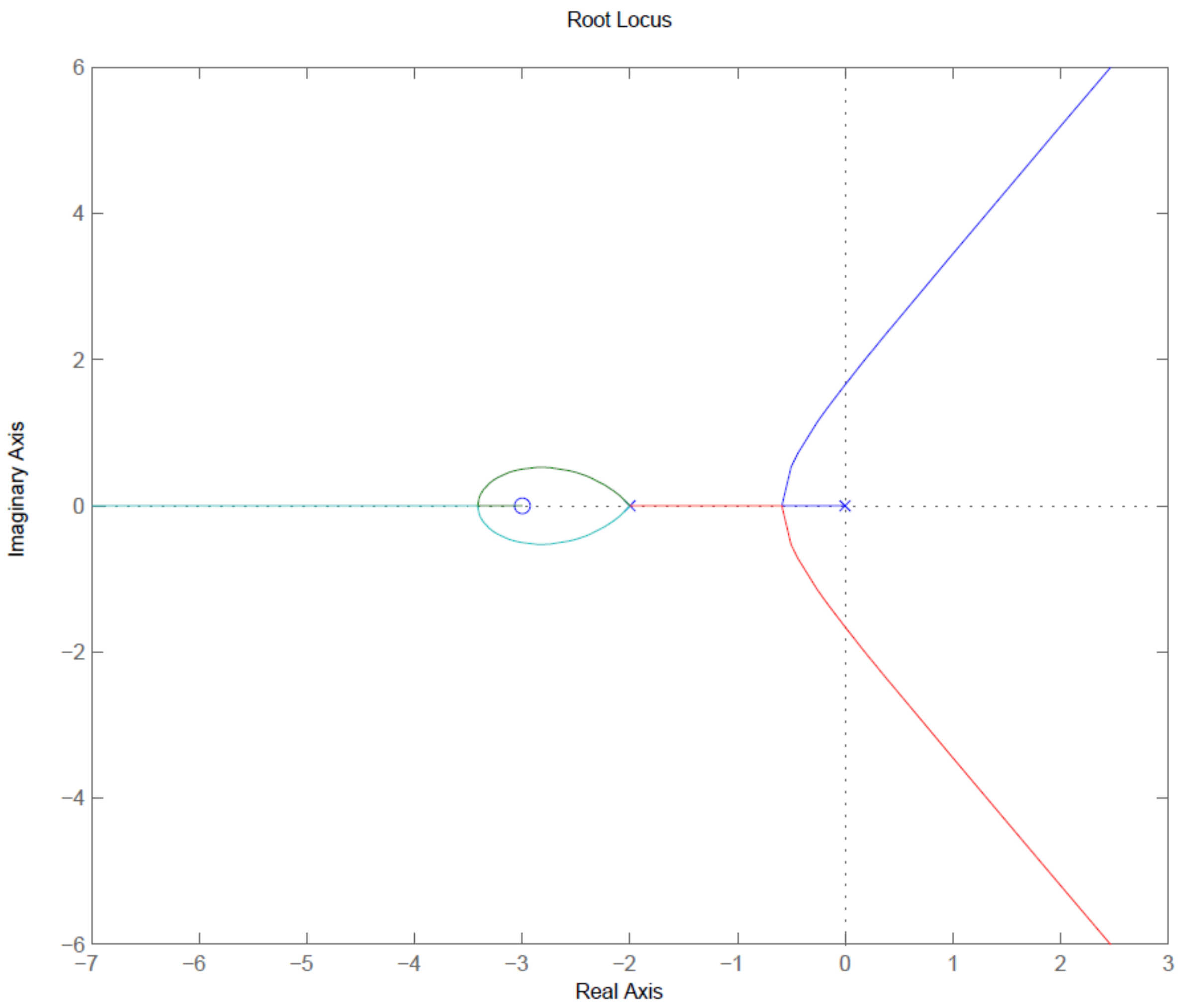
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

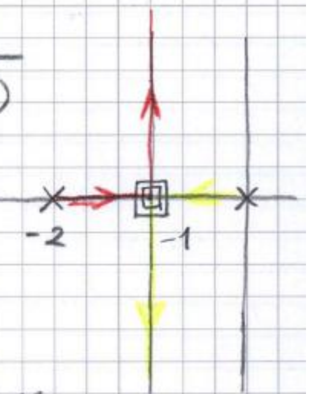
e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

$$C(s) = K\,\frac{s+\alpha}{s}$$; α determinato con cancellazione polo-zero

$$\alpha = 2 \Rightarrow L(s) = C(s)P(s) = K\,\frac{10}{s(s+2)}$$



eq. caratteristica : $1 + K\,\dfrac{10}{s(s+2)} = 0$

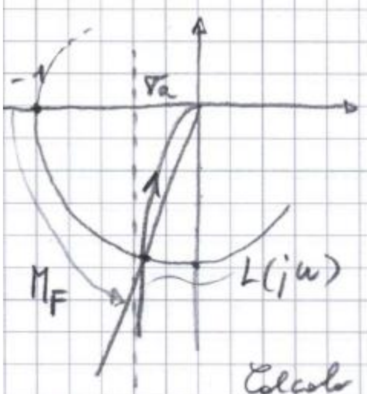
$$T_a = \frac{3}{\sigma_s}\,, \quad T_a = 3 \Leftrightarrow \sigma_s = 1 \text{ rad/sec.}$$

$\sigma_s = 1$ quando il valore di K corrisponde alla radice doppia -1 :

$$1 + K\,\frac{10}{(-1)\cdot(1)} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\boxed{C(s) = 0{,}1 \cdot \frac{s+2}{s}}$$

a) $$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{0{,}5}{j\omega(1+0{,}5\,j\omega)}$$



$M_A = +\infty$

$\sigma_a = 0{,}5\,(-0{,}5) = -0{,}25$

Calcolo approssimato di M_F : $0{,}25 = 1 \cdot \cos M_F$

$M_F = \arccos 0{,}25 = 75°{,}5$

Calcolo esatto di M_F : $|L(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \omega = 0{,}4859$ rad/sec è la pulsazione critica

$$M_F = 180° + \arg L(j0{,}4859) = 180° - 90° - \operatorname{arctg}\frac{0{,}4859}{2}$$
$$= 90° - 13°{,}66 = 76°{,}34$$

b) $e_\infty = 0$ perché il sistema è di tipo 1.

Un approccio alternativo, più generale, per determinare il controllore è il seguente:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \quad \text{(imposizione specifica 1)}$$

$T_a = 3$ sec. $\Rightarrow \sigma_s = 1$ rad./sec. $\Big\}$ imposizione
$S = 0$ $\Big\}$ specifica 2

Quindi il polinomio caratteristico desiderato può essere descritto come

$$P_d(s) = (s+1)(s^2 + \alpha s + \beta)$$

radici $s_{1,2}$ del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$: $Re\, s_{1,2} < -1$

Sia $z = s+1$, $s = z-1$, $Re\, s < -1 \Leftrightarrow Re\, z < 0$

$$(z-1)^2 + \alpha(z-1) + \beta = 0$$

$$z^2 + (\alpha - 2) z + \beta - \alpha + 1 = 0$$

Quindi $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - \alpha + 1 > 0 \end{cases}$

$$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$$

$$1 + \frac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)^2} = 0$$

$$s(s+2)^2 + 10 b_1 s + 10 b_0 = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + 10 b_1)s + 10 b_0$$

Si impone $P_d(s) \equiv P_c(s)$

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 & \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{ok! } \beta > 2 \\ \alpha + \beta = 4 + 10 b_1 & \beta = 1 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 & \beta = 10 b_0 \end{cases}$$

I poli non dominanti sono $-1.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\beta}$

Scegliamo β : $9 - 4\beta = 0$, $\beta = \frac{9}{4}$ ($\beta > 2$ ok!)

$b_0 = \frac{9}{40} = 0.225$ $\quad b_1 = \frac{5}{40} = 0.125$ $\quad \boxed{C(s) = \frac{0.125 \cdot s + 0.225}{s}}$

a) $L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1+\frac{5}{9}s}{s\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2}$

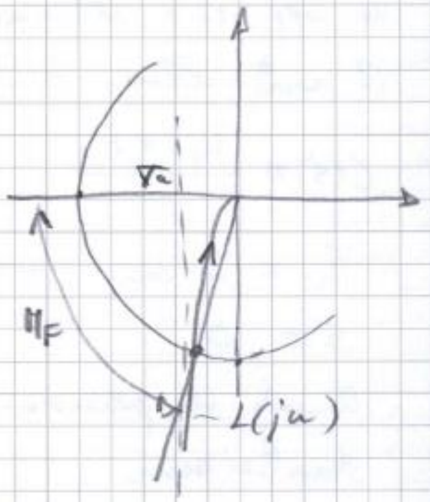
$L(j\omega) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1+\frac{5}{9}j\omega}{j\omega\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)^2}$

$\sigma_a = \frac{9}{16}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{9}\right)\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$

calcolo app. di M_F : $0,25 = 1 \cdot \cos M_F$

$M_F \simeq \arccos 0.25 = 75^\circ,5$

$M_F = +\infty$



8.

6. $u(k) = 2 \cdot 1(k) \qquad U(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)} \cdot \frac{2 \cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{(z^2+1) \cdot \cancel{2} \cdot z}{(z+1)^2 \cdot \cancel{2}\left(z+\frac{1}{2}\right) \cdot (z-1)} = \frac{z(z^2+1)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2}$$

$$\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_{31}}{(z+1)^2} + \frac{c_{32}}{z+1}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{\cancel{2}}{\frac{3}{2} \cdot 2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}}} = -5 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$c_{31} = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)} = 2$$

$c_1 + c_2 + c_{32} = 0 \qquad c_{32} = -c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3$

$$Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{10}{3} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{z}{(z+1)^2} + 3\frac{z}{z+1}$$

$$y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2 \cdot k \cdot (-1)^{k-1} + 3 \cdot (-1)^k, \quad k \geq 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \cdot k \cdot (-1)^k + 3 \cdot (-1)^k, \quad k \geq 0$$