Processi stocastici

Mc128k

2015-12-22

Contenuti

Indice

1 Processi stocastici

Un processo stocastico è una funzione nel parametro t (quasi sempre il tempo) che per ogni valore della variabile indipendente produce una variabile aleatoria.

Esso si può vedere anche al contrario, una variabile aleatoria che per ogni uscita sperimentale associa una funzione nel tempo, detta **realizzazione** o **funzione campione**.

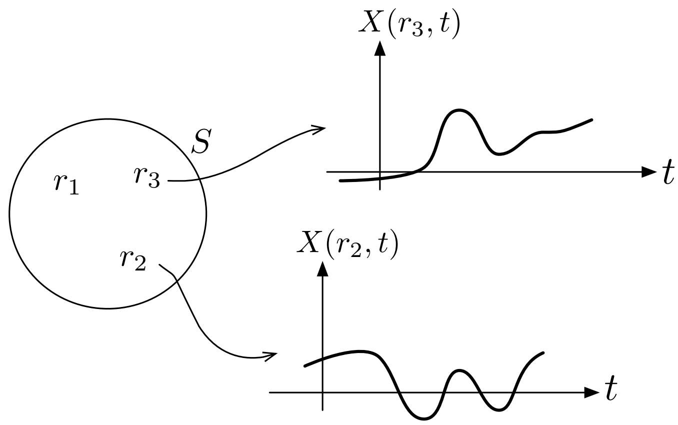

Figura 1: Processo stocastico

Di solito si usa per rappresentare fenomeni che variano nel tempo in modo casuale con certe caratteristiche, per esempio diverse voci umane che dicono la stessa cosa o un segnale elettrico.

Come una variabile aleatoria serve per analizzare dal punto di vista statistico un determinato valore, un processo fa la stessa cosa con un intero segnale, quindi un numero infinito di valori.

1.1 Processi parametrici

Sono funzioni nel tempo che contengono un parametro che a sua volta è una variabile aleatoria. Vengono indicati con $X(t)$.

A livello intuitivo, dato un qualche tipo di segnale, il processo indica in che modo e quanto viene modificato lo stesso dalla variabile aleatoria.

Esempio 1.1.
Un processo stocastico è definito come:

$$X(t) = e^{-At}u(t)$$

Dove A rappresenta una variabile aleatoria con densità uniforme da 0 a a_m. In questo caso si ha una funzione esponenziale che varia a seconda del parametro dato dalla V.A. (fig.2).

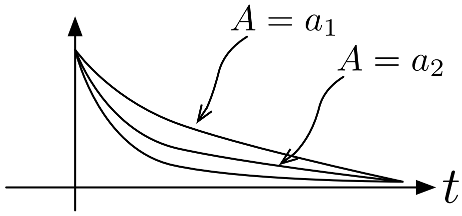

Figura 2: Esempio di processo

1.2 Distribuzione e densità

In un processo si può fissare r oppure t, nel primo caso si ottengono diverse **funzioni nel tempo**, una per ogni r scelto, se si fissa il tempo si hanno una serie di **realizzazioni** per lo stesso istante, che sono date variando r.

Fissando t quindi si ottiene una **variabile aleatoria**, se si fissano due istanti nel tempo se ne ottengono due, e così via dicendo, ne esistono infinite; se si fissa r si ottiene un **segnale determinato**, se si fissano entrambi viene prodotto un numero, una specifica realizzazione.

- $X(\bar{r}, t)$: Segnale determinato
- $X(r, \bar{t})$: Variabile aleatoria
- $X(\bar{r}, \bar{t})$: Realizzazione di $X(r, \bar{t})$

È possibile trovare una funzione che individua il processo tramite la sua distribuzione e la relativa densità di probabilità, detta **distribuzione di primo ordine**

del processo:

$$F_x(x,t) := P\{X(t) \leq x\} \tag{1.1}$$

$$f_x(x,t) = \frac{\partial F_x(x,t)}{\partial x} \tag{1.2}$$

Un processo può essere legato ad una sola variabile aleatoria (come nell'esempio 1.1) oppure più di una come in $X(t) = A + Bt$. Ogni variabile aleatoria possiede una sua densità di probabilità; si dice quindi che la **densità di probabilità** del processo è di **primo ordine** se è presente una sola V.A., altrimenti si ha una densità di **ordine n**:

$$f_x(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) \tag{1.3}$$

Dove le x individuano le variabili indipendenti reali e t gli istanti in cui sono state estratte le V.A. dal processo.

Teoricamente si potrebbe univocamente individuare il processo conoscendo tutti gli eventi x e gli istanti t, ma normalmente ci si accontenta di una conoscenza più limitata.

1.3 Valor medio

Il valore medio del processo sarà definito come una funzione del tempo, dato che fa la media di tutti i valori delle variabili aleatorie istante per istante.

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x,t)\, dx = \eta_x(t) \tag{1.4}$$

Il valore quadratico medio (potenza media statistica istantanea) è dato da:

$$E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x,t)\, dx \tag{1.5}$$

1.4 Varianza

$$\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_x(t))^2 \cdot f_x(x,t)\, dx \tag{1.6}$$

$$= E\{X^2(t)\} - \eta_x^2(t) \tag{1.7}$$

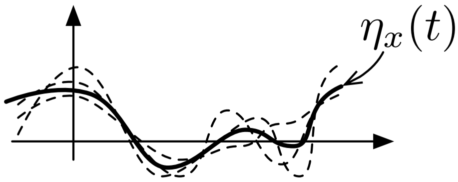

Figura 3: Valor medio

Esempio 1.2.
Un processo è dato da:

$$X(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

La variabile aleatoria θ determina la fase iniziale della sinusoidale, ed è costante da 0 a π (quindi con altezza $1/\pi$).

Il valor medio trovato in un istante t si ottiene con il teorema dell'aspettazione:

$$E\{X(t)\} = E\{a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot f_\theta(\theta)\, d\theta$$

$$Y = g(t), \quad E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot f_x(t) dx$$

$$g(x) \to a\cos(2\pi f_0 t + \theta), \quad f_x(t) \to f_\theta(\theta)$$

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot \frac{1}{\pi}\, d\theta =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\sin(2\pi f_0 t + \theta)\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\sin(w\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t + 0)\right] =$$

$$= -\frac{2a}{\pi}\sin(2\pi f_0 t) = \eta_x(t)$$

1.5 Funzione di autocorrelazione

Si vuole ottenere la correlazione fra due V.A. estratte in due istanti t_1 e t_2. Bisogna ricordarsi che due istanti diversi estraggono due variabili aleatorie dal processo.

$$R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx1\, dx2 \tag{1.8}$$

Quanto più i due istanti sono lontani tra di loro, più la correlazione tende a decrescere.

1.6 Funzione di covarianza

$$C_x(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \tag{1.9}$$
$$= E\{[X(t_1) - \eta_x(t_1)][X(t_2) - \eta_x(t_2)]\} = \tag{1.10}$$
$$= R_x(t_1, t_2) - \eta_x(t_1) \cdot \eta_x(t_2) \tag{1.11}$$

Se si prende un istante fissando $t_1 = t_2$ si ottiene il valore quadratico medio:

$$R_x(t_1, t_1) = E\{X^2(t_1)\} \tag{1.12}$$

2 Processi stazionari

Un processo è detto stazionario quando le caratteristiche statistiche non risentono di traslazioni temporali, quindi per qualunque intervallo uguale di tempo il processo somiglia a sè stesso.

Essi sono adatti a costruire modelli per fenomeni di regime, quindi dove si ha una certa costanza nel tempo. Indicano che il segnale varia in modo simile a sè stesso, quindi le proprietà statistiche sono uguali anche se si prende lo stesso processo traslato nel tempo.

Un processo è stazionario di ordine n se la densità di probabilità di ordine n è insensibile alle traslazioni.

$$f_x(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n) = f_x(x_1, x_2, \dots x_n; t_1 + \tau, \dots t_n + \tau), \forall \tau \tag{2.1}$$

Si dice **stazionario in senso stretto** se è stazionario per tutti gli ordini $n = 1, \dots \infty$. Se si conosce la densità di probabilità di ordine n si conoscono anche gli ordini inferiori (integrando in variabili da eliminare).

Normalmente si analizzano i primi due ordini di stazionarietà. Considerando τ come la distanza fra i due istanti si indica che il processo è **stazionario di ordine 2** se:

$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; \tau) \tag{2.2}$$
$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1 \tag{2.3}$$

Un processo **stazionario di ordine 1** invece non dipende dal tempo, di conseguenza la media e la varianza sono **costanti**:

$$f_x(x_1; t_1) = f_x(x) \quad (2.4)$$
$$\eta_x(t) = \eta_x \quad (2.5)$$
$$E\{X^2(t)\} = E\{X^2\} \quad (2.6)$$
$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 \quad (2.7)$$

2.1 Stazionarietà in senso lato

Un processo è stazionario in senso lato se è stazionario per il valor medio $\eta_x(t) = \eta_x$ e per l'autocorrelazione, $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$ (che quindi non dipende dal momento scelto ma solo dalla dimensione dell'intervallo).

Proprietà della correlazione $Rx(\tau)$

La funzione è pari:

$$R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t)X(T+\tau)\} = R_x(\tau) \quad (2.8)$$
$$R_x(-\tau) = E\{X(t)X(T-\tau)\},\ t-\tau = \lambda, = E\{X(\lambda+\tau)X(\lambda)\} = R_x(\tau) \quad (2.9)$$

La potenza media del processo si ottiene prendendo $\tau = 0$:

$$R_x(0) = E\{X^2(t)\} = P_x \quad (2.10)$$

Esiste un massimo in 0:

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \quad (2.11)$$
$$E\{[X(t) + X(t+\tau)]^2\} \geq 0 \quad (2.12)$$
$$E\{X^2(t) + 2X(t)X(t+\tau) + X^2(t+\tau)\} \geq 0 \quad (2.13)$$
$$2R_x(0) + 2R_x(\tau) \geq 0 \quad (2.14)$$
$$R_x(0) \geq \pm R_x(\tau) \implies R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \quad (2.15)$$

Quindi man mano che l'intervallo τ aumenta i punti diventano meno correlati. In fig.4 si nota che un segnale più uniforme è possibile che abbia lo stesso segno, quindi la correlazione tende meno a decrescere rispetto ad un segnale che varia più frequentemente.

In modo intuitivo la correlazione è legata al contenuto frequenziale, mentre la potenza è legata alla ampiezza del segnale.

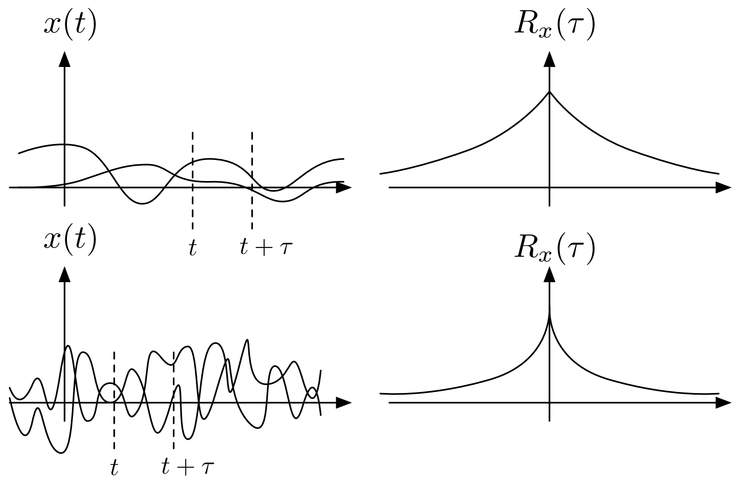

Figura 4: Diverse correlazioni

2.2 Densità spettrale di potenza

Per i processi stazionari almeno in senso lato vale che la densità spettrale di potenza è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$S_x(f) := \mathscr{F}\{R_x(\tau)\} \tag{2.16}$$

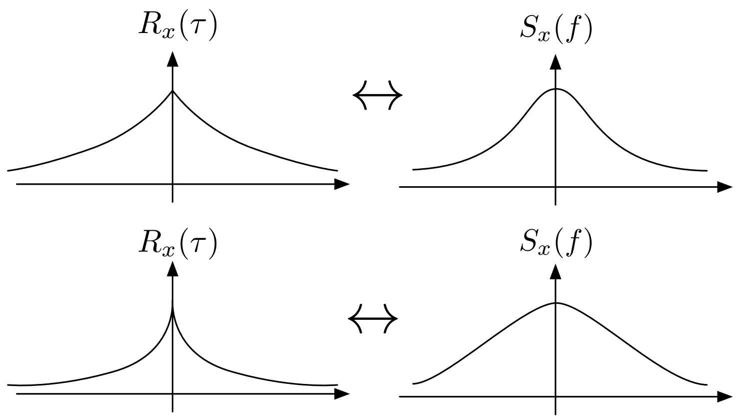

Figura 5: Densità spettrale di potenza

Se si esegue l'area di $S_x(f)$ si trova la potenza media:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = R_x(0) = E\{X^2(t)\} = \eta_x^2 + \sigma_x^2 = P_x \tag{2.17}$$

Il grafico in fig.5 indica chiaramente che la densità spettrale viene influenzata dall'alto contenuto frequenziale. In altre parole, le frequenze alte danno contributi lontani dallo zero in $S_x(t)$ rendendo il grafico più "omogeneo".

2.3 Processi bianchi

Sono processi che contengono contributi frequenziali costanti, quindi la densità spettrale è costante, ha lo stesso contributo di potenza da ogni frequenza:

$$S_x(f) = \gamma \tag{2.18}$$

Vengono chiamati bianchi dato che sono formati da tutte le possibili frequenze, come il colore bianco contiene tutti gli altri colori dello spettro. Esistono anche processi detti "colorati" che contengono contributi frequenziali diversi.

Un processo bianco (teorico) ha potenza infinita, essendo le realizzazioni estremamente "agitate" e con ampiezza infinita. La funzione di autocorrelazione (facendo la antitrasformata) di conseguenza è un delta di Dirac, che indica nessuna correlazione fra un punto e un altro del segnale.

Quello che si ha in natura sono processi quasi costanti che ad un certo punto calano. Un esempio può essere il rumore termico di una resistenza, essa possiede una tensione di rumore ai capi $v_n(t)$ ('n' sta per 'noise') che ha le caratteristiche di un processo stocastico che ha densità simile ad un processo bianco.

Bisogna comunque tenere in considerazione che nè $R_x(\tau)$ nè $S_x(f)$ individuano il processo.

3 Filtraggio di processi

Si fa passare un processo attraverso un sistema LTI, quindi un processo $X(t)$ viene trasformato da $h(t) \leftrightarrow H(f)$ che produce $Y(t)$.

$$Y(r_1, t) = X(r_1, t) * h(t) \tag{3.1}$$

Ad ogni uscita sperimentale si associa una funzione campione del processo. Ciò nonostante, se si conosce il processo in ingresso e il filtro *in generale* non si può determinare il processo in uscita. Questo principalmente deriva dal fatto che non si riescono a conoscere tutti gli ordini di densità di probabilità del processo, e anche se si conoscessero potrebbe essere comunque impossibile determinare un risultato. Normalmente ci si accontenta di meno.

Sia $X(t)$ stazionario **almeno in senso lato**, ci si chiede come è fatto il valore medio del processo in uscita:

$$\begin{aligned}
E\{Y(t)\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)\,d\alpha\right\} = && (3.2)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)E\{X(t-\alpha)\}\,d\alpha = && (3.3)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\eta_x(t-\alpha)\,d\alpha = && (3.4)\\
&= \eta_x(t) * h(t) && (3.5)
\end{aligned}$$

Il valore medio dell'integrale è uguale alla somma dei valori medi, dopodiché si riconosce all'interno dell'integrale una operazione di convoluzione.

3.1 Proc. stazionari in senso lato

Se il processo è stazionario in senso lato, valgono due condizioni, le prima implica quindi che se $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$ allora anche la uscita dipende da τ:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \tag{3.6}$$

Aggiungendo la seconda condizione di stazionarietà, se il processo in ingresso ha valore medio costante, di conseguenza ce lo ha anche quello in uscita:

$$\eta_x(t) = \eta_x \to \eta_y(t) = \eta_y = \eta_x \cdot H(0) \tag{3.7}$$

Mettendo tutto assieme si ha che un ingresso stazionario in senso lato implica che anche la uscita sia tale.

A questo punto si osserva cosa succede alla densità spettrale di potenza $S_x(f)$ (da ricordarsi che si trova con la trasformata della funzione di autocorrelazione):

$$\begin{array}{ccl}
R_x(\tau) & \xrightarrow{h(t)} & R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \\
\big\downarrow & & \\
S_x(f) & \xrightarrow{H(f)} & S_y(f) = S_x(f) \cdot H(f) \cdot H(-f)
\end{array} \tag{3.8}$$

Se il sistema è reale vale la simmetria hermitiana, quindi:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 \tag{3.9}$$

3.2 Processi gaussiani

Si tratta di processi la cui densità di probabilità di qualunque ordine è di tipo gaussiano, per esempio il rumore termico.

$$f_x(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n) \text{ gaussiana } \forall n \tag{3.10}$$

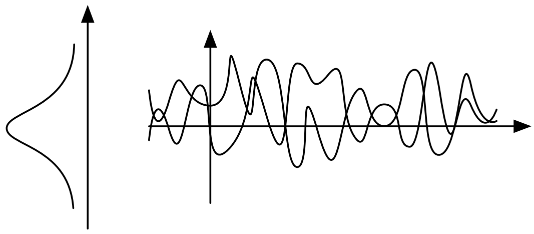

Figura 6: Processo gaussiano

Per quello che riguarda il filtraggio, se la entrata del sistema è gaussiana allora anche la uscita è gaussiana. Inoltre se il segnale è gaussiano e **stazionario in senso lato** lo è anche in senso stretto.

