Traccia delle soluzioni

1.

$$
\begin{aligned}
D^{*}f(t) = {} & Df(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta(t) \\
& + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

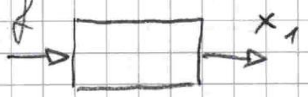
$$
\begin{aligned}
D^{2*}f(t) = {} & D^{2}f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta^{(1)}(t) \\
& + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta^{(1)}(t-3) + \\
& + \big(Df(0+) - Df(0-)\big)\,\delta(t) + \\
& + \big(Df(3+) - Df(3-)\big)\,\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{3*}f(t) = {} & D^{3}f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta^{(2)}(t) + \\
& + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta^{(2)}(t-3) + \\
& + \big(Df(0+) - Df(0-)\big)\,\delta^{(1)}(t) + \\
& + \big(Df(3+) - Df(3-)\big)\,\delta^{(1)}(t-3) + \\
& + \big(D^{2}f(0+) - D^{2}f(0-)\big)\,\delta(t) + \\
& + \big(D^{2}f(3+) - D^{2}f(3-)\big)\,\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

2.
Vedi le dispense del corso.

3.
Vedi le dispense del corso.

4.



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad k x_2 = m D^2 x_1 + k x_1 - f \\ m D^2 x_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ m D^2 x_3 = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_3 = m D^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1 \\ m D^2 x_3 + k x_3 = k x_2 \end{cases} \qquad (m D^2 + k) x_3 = k x_2$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 x_2 + 2 k x_2 - k x_1) = k^2 x_2$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 + 2k) x_2 - k (m D^2 + k) x_1 = k^2 x_2$$

$$(m^2 D^4 + 2 k m D^2 + k m D^2 + 2k^2 - k^2) x_2 = k (m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2) x_2 = k (m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2)(m D^2 x_1 + k x_1 - f) = k^2 (m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2 \cancel{+ k^2})(m D^2 + k) x_1 \cancel{- k^2 (m D^2 + k) x_1} = (m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2) f$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2)(m D^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2) f$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2}{(m^2 s^4 + 3 k m s^2)(m s^2 + k)} = \frac{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2}{m \cdot s^2 (m s^2 + 3k)(m s^2 + k)}$$

5.

(5) a. $\mathcal{L}[g_s(t)] = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[g_s(t)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = 2 \cdot \frac{s + 1/2}{(s+1)(s+2)}$$

b. $u(t) = 1(t) + t \cdot 1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) = \frac{2s+1}{\cancel{(s+1)}(s+2)} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+2)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left. \frac{2s+1}{s+2} \right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left. \frac{2s+1}{s^2} \right|_{s=-2} = -\frac{3}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{12} = \frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$$

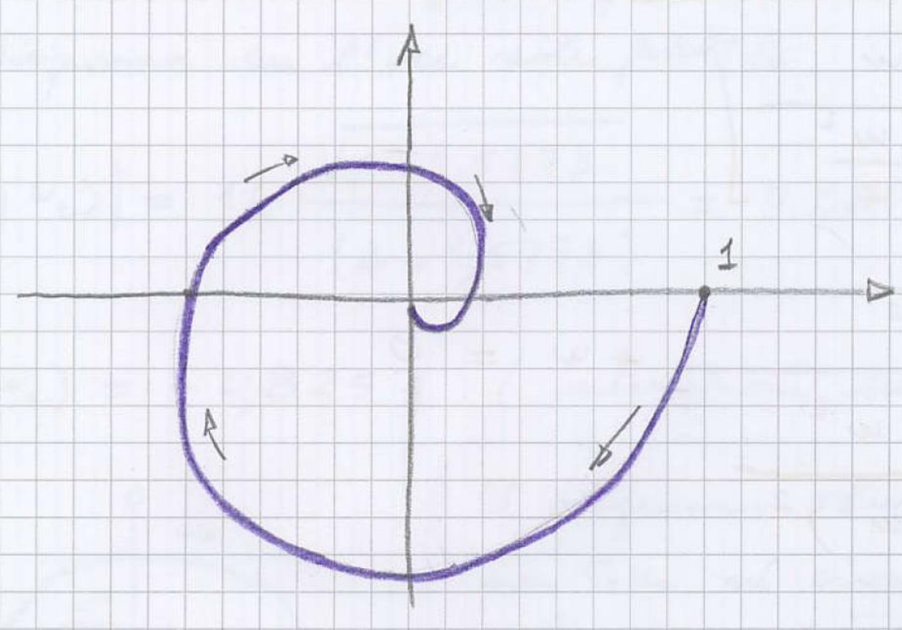
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left(\frac{1}{2} t + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} e^{-2t} \right) \cdot 1(t)$$

6.

a) $L(j\omega) = 16\dfrac{1-j\omega}{(j\omega+2)^4}$; $L(j0) = 1$

$$|L(j\omega)| = 16\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\arg L(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\,\omega$$



$$\lim_{\omega\to+\infty} L(j\omega) = -5\frac{\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega) = -\pi$$

$$+4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} + \operatorname{arctg} \omega = +\pi$$

$$\operatorname{tg}\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}\right) + \omega = 0$$

$$\frac{2 \operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}\right)}{1 - \left[\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}\right)\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\left[\dfrac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{4}}\right]}{1 - \left[\dfrac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{4}}\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2 \dfrac{4\omega}{4 - \omega^2}}{1 - \dfrac{16\omega^2}{(4-\omega^2)^2}} + \omega = 0$$

$$\frac{\dfrac{8\omega}{\cancel{4-\omega^2}}}{\dfrac{(4-\omega^2)^2 - 16\omega^2}{(4-\omega^2)^{\cancel{2}}}} + \omega = 0$$

$$\frac{8w(4-w^2)}{(4-w^2)^2-16w^2}+w=0$$

Si scarta la soluzione $w=0$

$$8(4-w^2)+(4-w^2)^2-16w^2=0$$

$$x \triangleq w^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

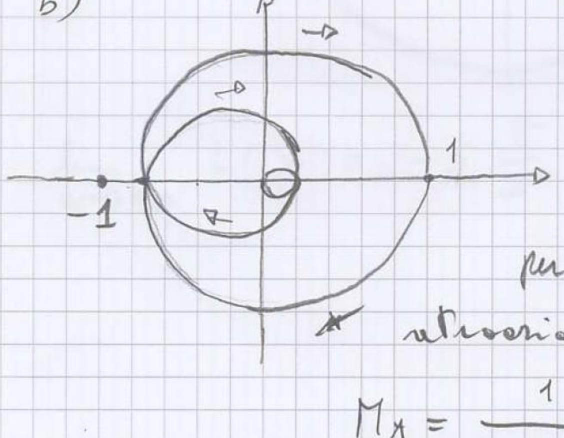
$$x_{1,2} = \begin{cases} 30{,}4222 \\ 1{,}5778 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = 5{,}5156 \text{ rad/sec} \\ w_2 = 1{,}2561 \text{ rad/sec} \end{array}$$

Si scarta la soluzione w_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(jw_2)| = 16\,\frac{\sqrt{1+1{,}5778}}{(4+1{,}5778)} = 0{,}8257$$

$$L(jw_2) = -0{,}8257 \quad (\text{intersezione cercata})$$

b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è asin. stabile.

$$M_A = \frac{1}{0{,}8257} \simeq 1{,}21$$

7.

$$(s^2+3s+2)(s+2a)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+2s+2a(s^2+3s+2)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+3s+2a\left(s^2+3s+2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$1+2a\,\frac{s^2+3s+5/2}{s(s^2+3s+3)}=0$$

$$1+2a\,\frac{\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}\right)}{s\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=0$$

Calcolo delle radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}=0$$

$$f(s)\triangleq\frac{1}{s}+2(s+1{,}5)\left[\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}\right]$$

L'asse reale negativo appartiene al luogo ($a>0$) e quindi, tentativamente, si cercano le radici nell'intervallo $[-5,-1]$

$f(-5) = -0,178$

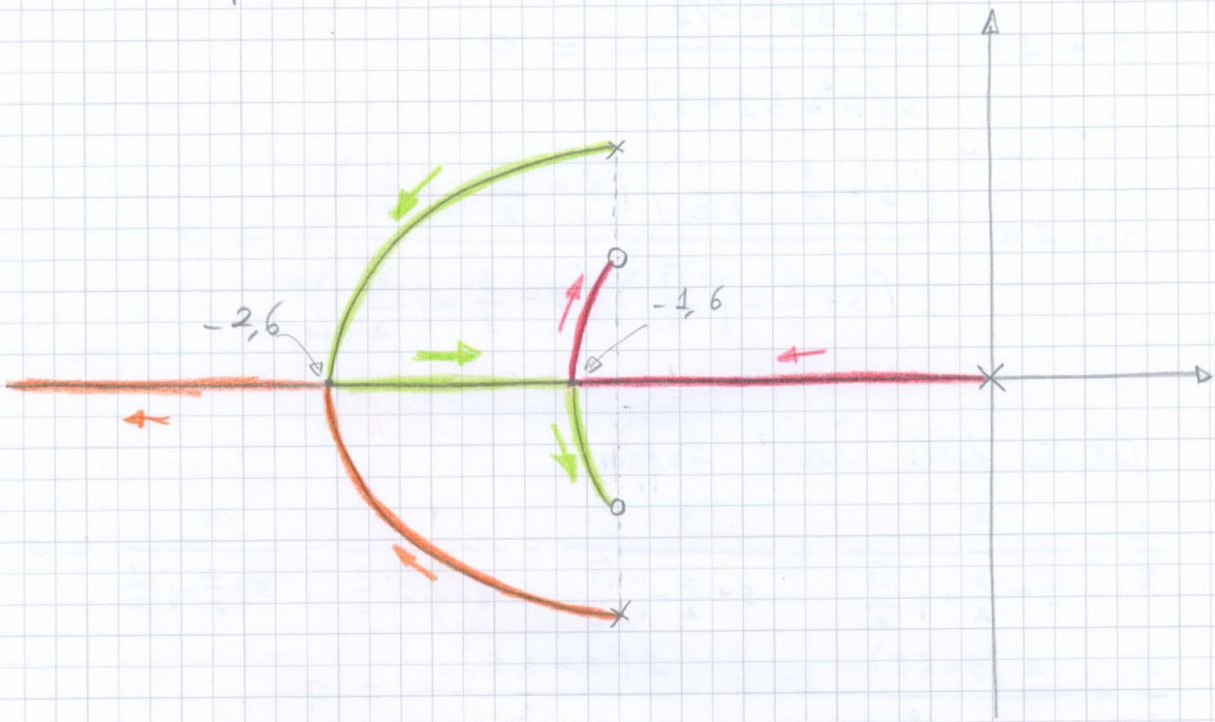
$f(-4) = -0,195$

$\left.\begin{array}{l} f(-3) = -0,133 \\ f(-2) = 0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2,5) = 0,057 ; f(-2,6) = -0,0002$

$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 0,5 \\ f(-1) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1,5) = -0,666$

$f(-1,6) = -0,118$

radici doppie in $s_1 \simeq -2,6$ e $s_2 \simeq -1,6$



8.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\, s^4 + 102\, s^3 + 287\, s^2 + 392\, s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$