Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.
a)

$$L(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2\left(1+\frac{1}{4}s\right)}$$

$$L(j\omega)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2\left(1+\frac{1}{4}j\omega\right)}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-4\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{4}$$

ascissa dell'asintoto verticale: $\sigma_a=\frac{1}{4}\left(-1-1-1-1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{17}{16}\cong-1,06$

Calcolo dell'intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega)=-\pi \Leftrightarrow 4\arctan\omega+\arctan\frac{\omega}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$1-\frac{\omega}{4}\tan\left(4\arctan\omega\right)=0$$

sviluppando questa equazione e definendo $x:=\omega^2$ si ottiene

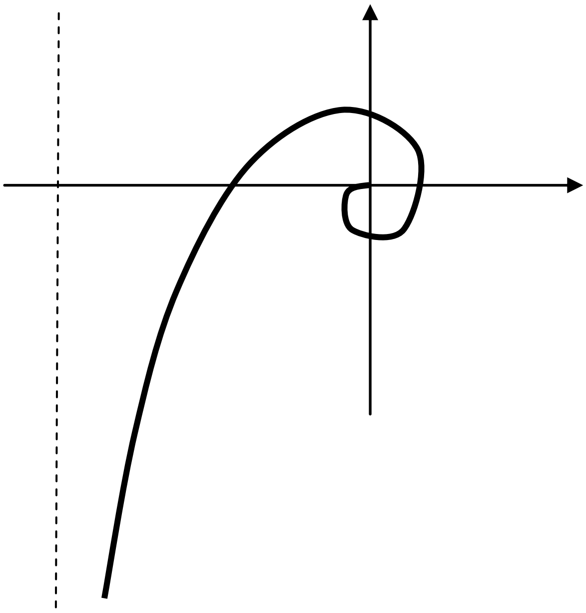
$$2x^2-7x+1=0$$

$x_{1,2}=0{,}1492 \quad 3{,}3508 \qquad \Rightarrow \quad \omega_1=0{,}3863 \quad \omega_2=1{,}8305$

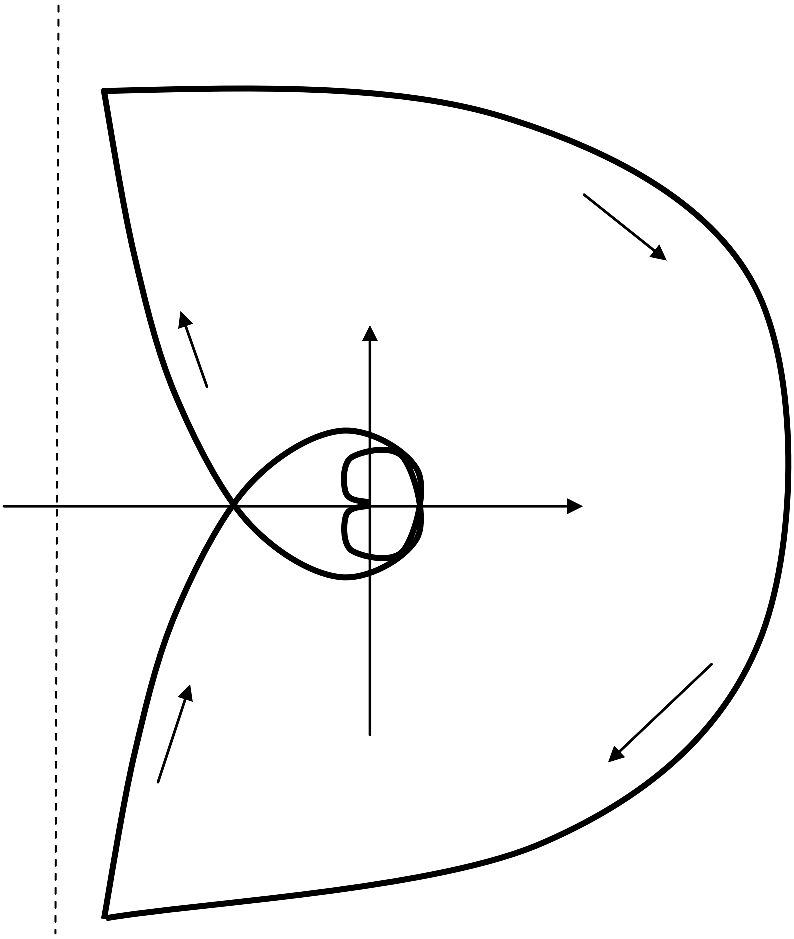
$\arg L(j\omega_1)=-3{,}1416 \qquad \arg L(j\omega_2)=-6{,}2832$

si scarta la seconda soluzione (che corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo) e si ottiene:

$L(j\omega_1)=-0{,}6442$



b) Si traccia il diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale negativa ed il d.p.c. non tocca né circonda il punto critico – 1. Ne consegue, per il criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c)

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_1)|} = \frac{1}{0,6442} = 1,55$$

3.
Vedi appunti dell'insegnamento.

4.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + k\frac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+4\right)(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^4 + (3+k)s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8 = 0$$

I valori di k per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che che garantiscono la positività della prima colonna della tabella di Routh associata all'equazione caratteristica.

4	1	6
	8	
3	3+k	12+k
	0	
2	α(k)	24+8k
	0	
1	β(k)	0
0	24+8k	

$$\alpha(k) = 6(3+k) - 12 - k = 5k + 6$$

$$\beta(k) = (5k+6)(12+k) - (3+k)(24+8k) = -3k^2 + 18k$$

Il sistema di disequazioni risultante ha come soluzione $0 < k < 6$.

2) Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = +j$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = +2j$ con molteplicità 1

Essendo $n-m=1$ il luogo presenta un asintoto.

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- Angolo di partenza del luogo dal polo +2j:

  $\{\text{angolo di p. da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$

  $\{\text{angolo di p. dal polo +2j}\} = \pi + \left[\arg(2j) + \arg(2j+j) + \arg(2j-j)\right] +$

  $-\left[\arg(2j+2j) + \arg(2j+1) + \arg(2j+2)\right] =$

  $\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + arctg(2) + arctg(1)\right) = -108.43°$

- Angolo di arrivo del luogo sullo zero 2j:

  $\{\text{angolo di a. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$

  $\{\text{angolo di a. sullo zero +j}\} = \pi + \left[\arg(j+2j) + \arg(j-2j) + \arg(j+1) + \arg(j+2)\right] +$

  $-\left[\arg(j+j) + \arg(j)\right] =$

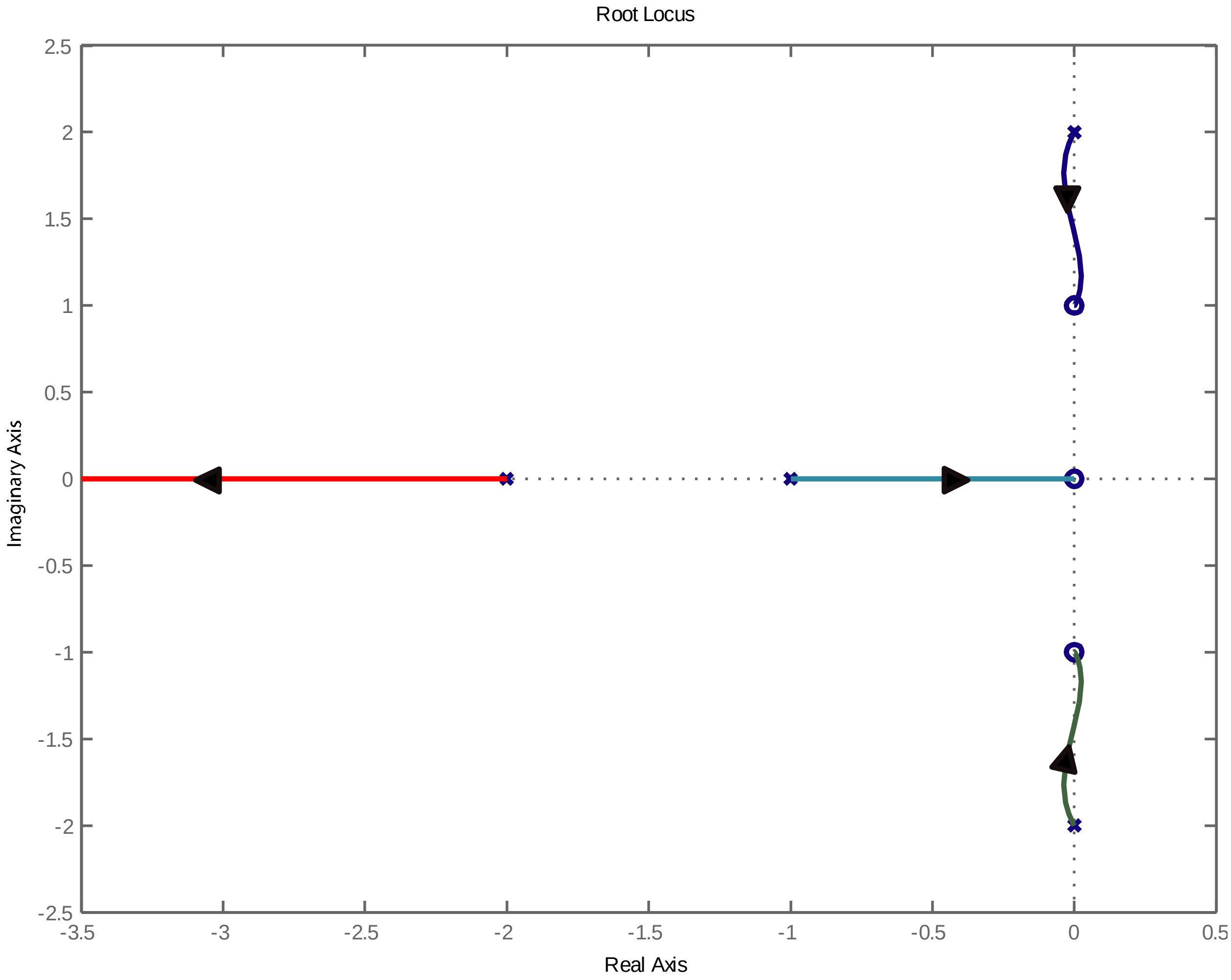
  $\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + arctg(1) + arctg(1/2)\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 71.56°$

- Intersezioni del luogo con l'asse immaginario
  Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario si possono ottenere come soluzioni dell'equazione ausiliaria associata alla tabella di Routh in 1) per k=6:

  $(5 \cdot 6 + 6)s^2 + 24 + 8 \cdot 6 = 0$

  $36s^2 + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} = \pm\, j1.41$

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

5.

(3) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{4\,(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4\,b_0}{9 \cdot 2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4\,(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4b_2 s^2 + 4b_1 s + 72 = 0$$

$$s^3 + (2 + 4b_2)s^2 + (9 + 4b_1)s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4b_2)s^2 + (9 + 4b_1)s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s + 2 - j)(s + 2 + j)(s + c)$$

dove $c \gg 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+c) =$$
$$= (s^2+4s+5)(s+c) =$$
$$= s^3+4s^2+5s +$$
$$+cs^2+4cs+5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3+(4+c)s^2+(5+4c)s+5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_c(s)$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 9+4b_1 = 5+4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4+72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2+17s+18}{s^2+9}}$$

$$C(s) = 5\,\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F:

$$T_{ry}(s) = F\cdot\frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Imponiamo $T_{ry}(0) = 1$

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad K_p = L(0) = 4$$

$$F\,\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$

6.

La differenza massima fra gli argomenti della funzione $y(\cdot)$ è 4.
Quindi l'ordine del sistema è $n=4$.
Si effettua la sostituzione $(k-4) \to k$:

$$y(k-4) - 8\,y(k-4+2) + 16\,y(k-4+4) = 16\,u(k-4+4) + 16\,u(k-4+1)$$

$$16\,y(k) - 8\,y(k-2) + y(k-4) = 16\,u(k) + 16\,u(k-3)$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{16\,z^4 + 16\,z}{16\,z^4 - 8\,z^2 + 1} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

Per un sistema del 4° ordine il criterio di Jury afferma:
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1) $a(1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
2) $(-1)^4 a(-1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
3) $|a_0| < a_4$: $1 < 16$ ok!
4) $|b_0| > |b_3|$: $255 > 0$ ok!
5) $|c_0| > |c_2|$: $255^2 > 255 \cdot 120$ ok!

Tabella di Jury

1	1	0	-8	0	16
2	16	0	-8	0	1
3	-255	0	120	0	
4	0	120	0	-255	
5	255^2	0	$-255 \cdot 120$		