Capitolo 3

Problemi nella classe P

3.1 Matrici totalmente unimodulari.

ESERCIZIO 3.1. Dire se le seguenti matrici sono TU o no. Giustificare le risposte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f)

ESERCIZIO 3.2. Si consideri il problema (P) di Programmazione Lineare sotto riportato. (a) Provare che la matrice A dei vincoli è TU. (b) Scrivere il duale P^* del problema P (tralasciando i vincoli di interezza). Si può affermare che ogni soluzione di base di P^* avrà valori interi? Motivare la risposta.

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_4 \geq 1\\
&x_1 + x_5 \geq 1\\
&x_1 + x_6 \geq 1\\
&x_2 + x_4 \geq 1\\
&x_2 + x_6 \geq 1\\
&x_3 + x_5 \geq 1\\
&x_1, x_2, \ldots, x_6 \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{P}$$

3.2 Problemi di flusso a costo minimo.

Nel problema del flusso a costo minimo si considera un grafo $G(V, A)$, con costi c_{ij} associati ad ogni arco $(ij) \in A$. Ai nodi $i \in V$ sno associati valori b_i che identificano nodi sorgente ($b_i > 0$, il flusso viene generato a tali nodi), nodi destinazione ($b_i < 0$, il flusso viene "consumato") e nodi di transito ($b_i = 0$). Il modello di Programmazione Lineare del problema è il seguente.

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j:\ (i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:\ (j,i)\in A} x_{ji} = b_i \qquad \forall i \in A, && \text{(I)}\\
&x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}$$

I vincoli (I) esprimono la conservazione del flusso nella rete.

ESERCIZIO 3.3. Per ognuno dei grafi di Figura 3.1, dire se i seguenti insiemi di archi identificano basi del problema, ed in caso affermativo calcolare, quando possibile, i valori dei flussi nelle soluzioni ammissibili ad essi associate.

(*a*) $B_1 = \{(1,2), (2,3), (2,6), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8)\}$,
$B_2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,6), (3,5), (5,8), (7,8)\}$,
$B_3 = \{(1,2), (1,4), (2,6), (4,5), (5,6), (5,8), (6,7)\}$.

(*b*) $B_1 = \{(2,1), (3,6), (4,1), (4,5), (5,7), (6,2)\}$,
$B_2 = \{(1,3), (3,5), (3,6), (4,1), (6,2), (6,7)\}$,
$B_3 = \{(1,3), (3,5), (3,6), (4,5), (5,7), (6,2)\}$.

(*c*) $B_1 = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,5), (5,6)\}$,
$B_2 = \{(1,2), (2,4), (3,4), (4,5), (5,6)\}$,
$B_3 = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (5,6)\}$.

(d) $B_1 = \{(1,2),(2,6),(3,4),(5,4),(6,3)\}$,
$B_2 = \{(1,2),(3,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$,
$B_3 = \{(1,2),(1,6),(3,2),(3,4),(5,3)\}$.

(e) $B_1 = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,8),(6,3),(8,7)\}$,
$B_2 = \{(1,2),(2,4),(3,2),(5,7),(6,3),(6,5),(8,7)\}$,
$B_3 = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(5,7),(6,3)\}$.

(f) $B_1 = \{(1,2),(2,5),(3,6),(4,2),(4,7),(5,3)\}$,
$B_2 = \{(1,2),(3,2),(3,6),(4,7),(5,3),(5,7)\}$,
$B_3 = \{(1,2),(3,2),(3,6),(4,2),(5,3),(5,7)\}$.

ESERCIZIO 3.4. Per ognuno dei grafi di Figura 3.1 determinare un flusso a costo minimo applicando il simplesso su rete, partendo dalla base B_0 specificata.

(a) $B_0 = \{(1,2),(1,4),(2,3),(4,5),(5,6),(5,8),(6,7)\}$;

(b) $B_0 = \{(1,3),(1,6),(3,5),(4,1),(5,7),(6,2)\}$;

(c) $B_0 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$;

(d) $B_0 = \{(1,2),(2,6),(3,4),(4,6),(5,4)\}$;

(e) $B_0 = \{(1,2),(1,3),(1,6),(2,4),(3,5),(4,8),(8,7)\}$;

(f) $B_0 = \{(1,2),(2,5),(3,6),(4,2),(5,3),(5,7)\}$.

ESERCIZIO 3.5. Commentare il risultato dell'esercizio precedente, punto (e). La presenza di soluzioni illimitate implica la possibilità di assegnare ad alcune variabili valori arbitrariamente grandi, mentre la rete dispone di una quantità $b_1 = -(b_7 + b_8) = 10$ *limitata* di flusso da mettere in circolazione. La conservazione del flusso sembra quindi, intuitivamente, violata. Giustificare questo (apparente) paradosso.

ESERCIZIO 3.6. Si consideri la particolare variante del problema del flusso a costo minimo dove $b_i = 0$, $\forall\, i \in V$:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{j:\,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:\,(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \qquad \forall i \in A, \tag{II}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A.$$

Dire se e quando il modello (II) possiede soluzioni ammissibili *non nulle* (*suggerimento:* considerare un flusso $\Delta > 0$ instradato lungo un circuito, se il grafo ne possiede uno...).

ESERCIZIO 3.7. Discutere la forma della regione di ammissibilità del modello di flusso a costo minimo: quando è un politopo (o poliedro) convesso? E quando è un poliedro illimitato (troncone)?

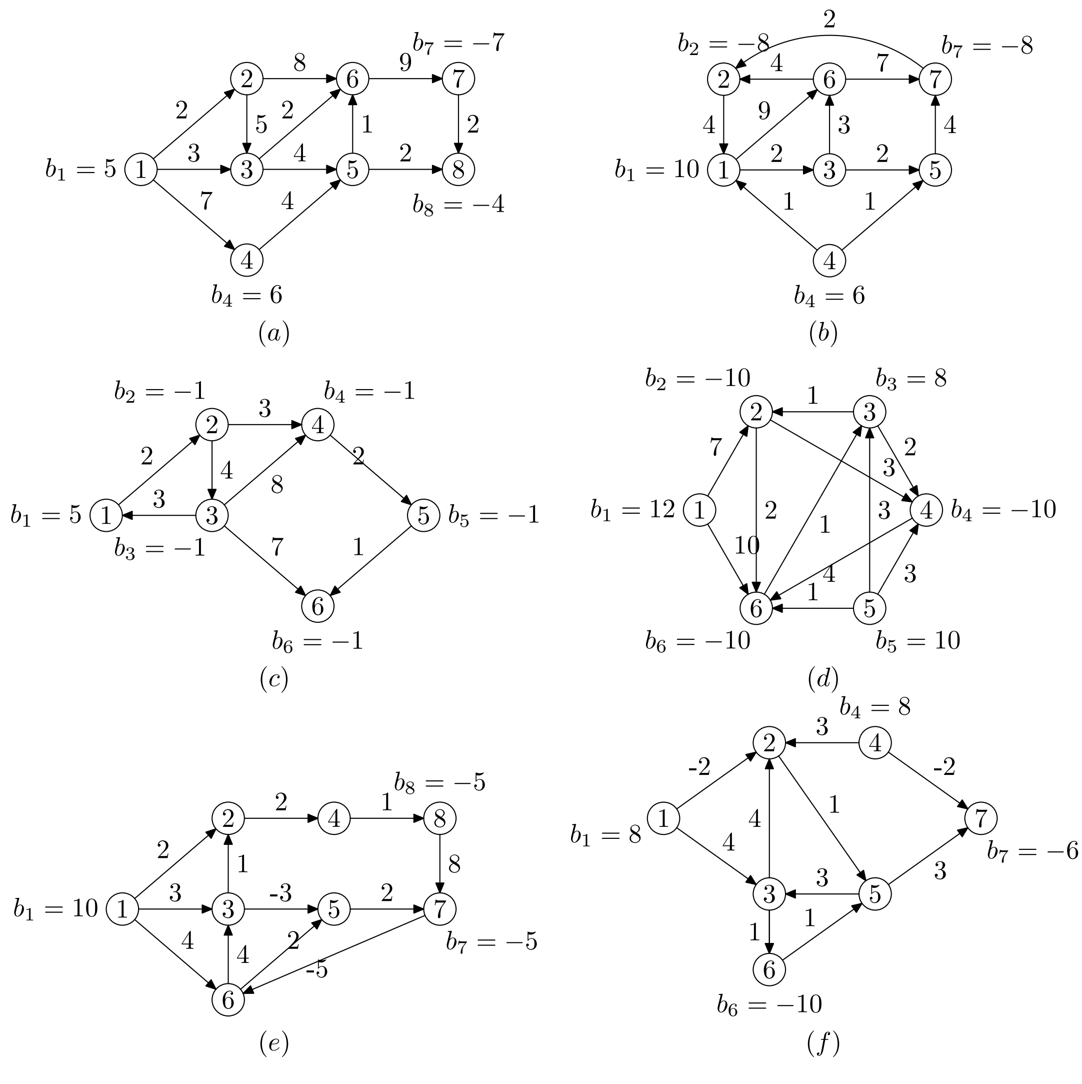


Figura 3.1: Reti di flusso. I costi unitari di trasporto c_{ij} sono indicati sugli archi, i termini noti b_i accanto ai nodi (si assume $b_i = 0$ quando non indicato).

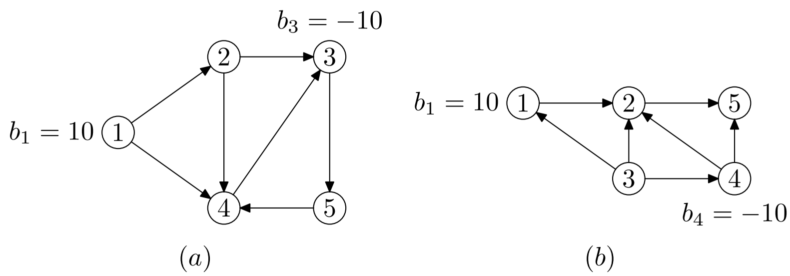


Figura 3.2: Reti di flusso ($b_i = 0$ quando omesso).

ESERCIZIO 3.8. Applicare sui grafi di Figura 3.2 la procedura per determinare una soluzione ammissibile di base iniziale.

ESERCIZIO 3.9. Per ognuno dei grafi di Figura 3.3, per i quali sono specificati sia costi (c_{ij}) che capacità (d_{ij}), determinare una soluzione ottima per il problema di flusso di costo minimo, partendo dalle rispettive basi iniziali.

(a) $B_0 = \{(1,3),(1,4),(3,6),(4,6),(5,6)\}$, $N_1^0 = \{(1,3),(2,5),(3,2)\}$.

(b) $B_0 = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,5),(5,6)\}$, $N_1^0 = \{(2,5),(4,6)\}$.

(c) $B_0 = \{(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(4,6),(6,7)\}$, $N_1^0 = \{(1,3),(3,6)\}$.

ESERCIZIO 3.10. Si consideri la procedura per la determinazione di una soluzione ammissibile di base iniziale nel problema del flusso a costo minimo. Dire quando la soluzione di base finale prodotta da questa procedura è degenere.

3.3 Problema del massimo flusso.

Nel problema del massimo flusso sono dati un grafo orientato $G(V, A)$ con *capacità* $c_{ij} > 0$ specificate per ogni arco $(i, j) \in A$, un nodo sorgente s ed un nodo destinazione d, e si richiede di determinare il massimo flusso che può transitare sulla rete tra s e d rispettando le capacità degli archi. Il modello in Programmazione Lineare del problema è

$$\max \sum_{i:\ (s,i)\in A} x_{si}$$

soggetto a

$$\sum_{j:\ (i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:\ (j,i)\in A} x_{ji} = 0, \qquad i \in V - \{s, d\},$$
$$x_{ij} \le c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad \forall (i,j) \in A.$$

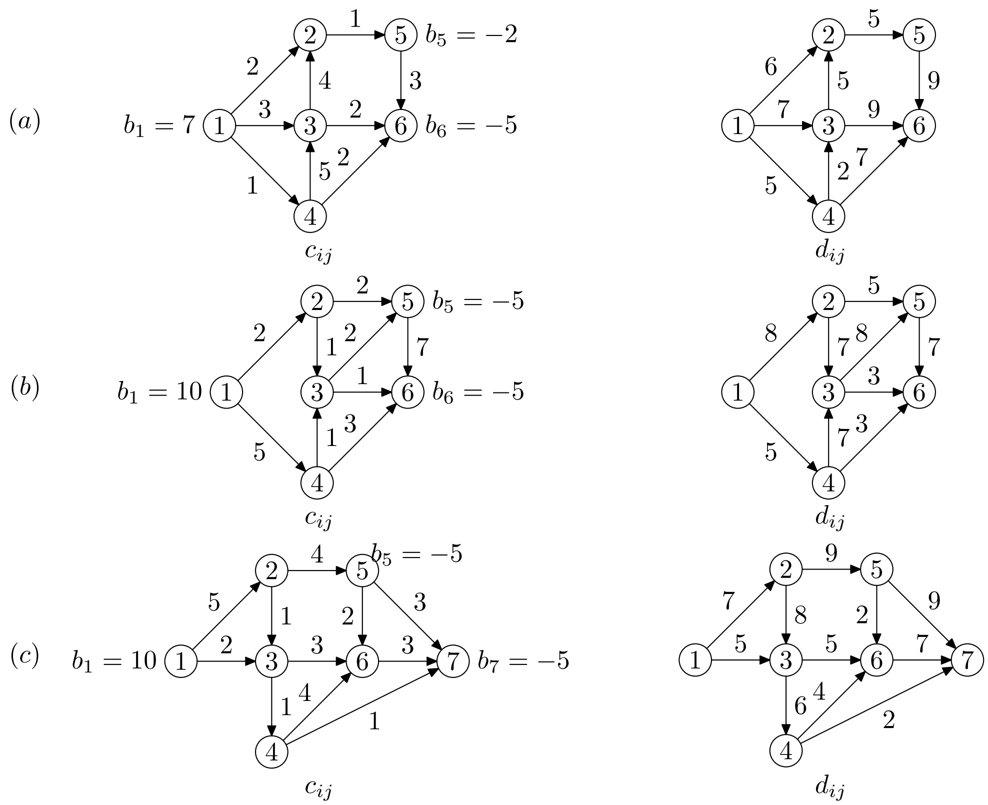


Figura 3.3: Reti di flusso con costi (c_{ij}) e capacità (d_{ij}).

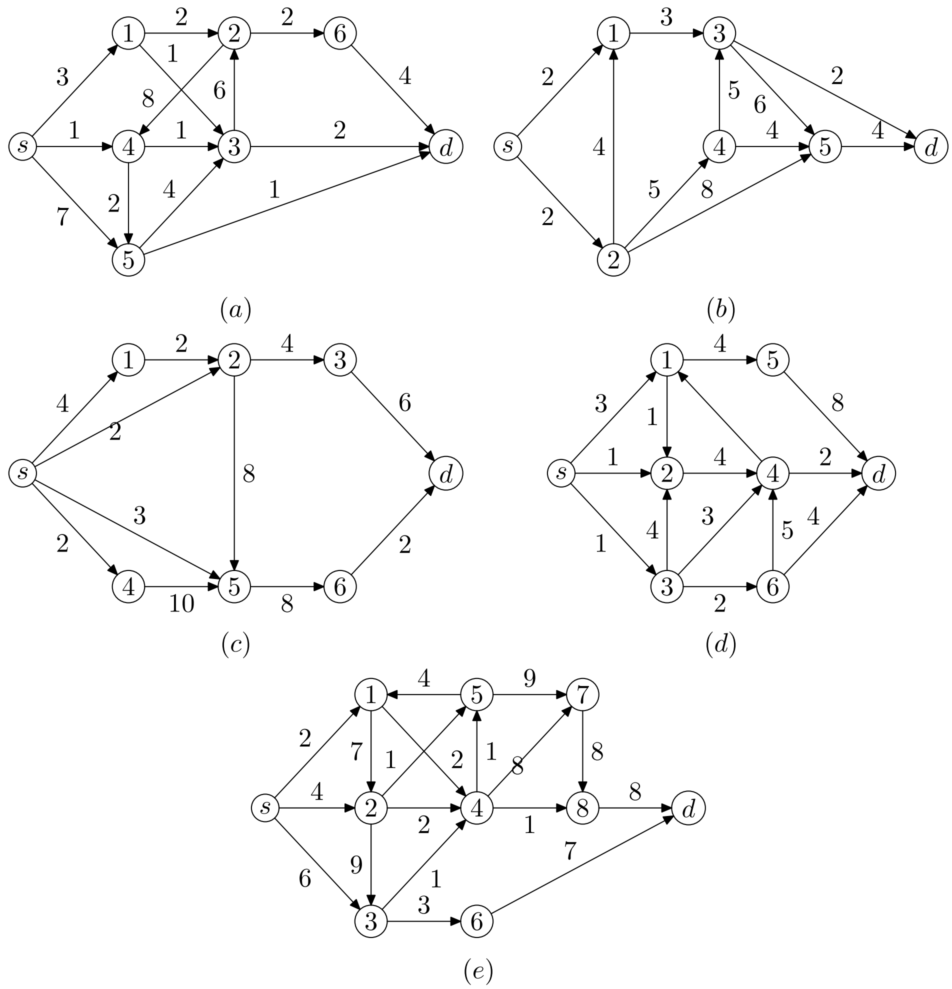


Figura 3.4: Reti di flusso con archi capacitati.

ESERCIZIO 3.11. Per ognuno dei grafi di Figura 3.4, determinare il massimo flusso tra la sorgente s e la destinazione d, partendo dal flusso iniziale indicato. Determinare anche un taglio di capacità minima.
(a) $x_{s1} = 3$, $x_{12} = 2$, $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{26} = 1$, $x_{6d} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{3d} = 2$ (tutte le altre $x_{ij} = 0$).
(b)–(e) Flusso nullo.

ESERCIZIO 3.12. Dire se e quando la regione di ammissibilità del problema del massimo flusso può essere un poliedro illimitato (troncone).

ESERCIZIO 3.13. Si supponga di avere un problema di massimo flusso con capacità associate ai nodi anzichè agli archi; si suppone cioè che gli archi abbiano capacitrà infinita, ma in ogni nodo i possa transitare al massimo una quantità c_i di flusso. Proporre una procedura per risolvere tale problema.

ESERCIZIO 3.14. Scrivere il duale del problema del massimo flusso. È possibile affermare che in ogni soluzione di base di tale duale le variabili assumeranno solo valori interi? Motivare la risposta.

ESERCIZIO 3.15. Si consideri il duale del problema del massimo flusso formato nell'esercizio precedente, con variabili u_i ($i \in V - \{s, d\}$) e w_{ij} ($(i,j) \in A$). Verificare che, ad ogni taglio indotto da un insieme $U \subseteq V$ (con $s \in U$), é possibile associare una soluzione ammissibile duale, definita da

$$u_i = \begin{cases} -1, & \text{se } i \in U, \\ 0, & \text{se } i \notin U, \end{cases} \qquad w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in U,\, j \notin U, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3.4 Problema del massimo matching.

Nel problema del massimo matching è dato un grafo *non orientato* $G(V, A)$; un *matching* in G è un insieme di archi $M \subseteq A$ tale che nessuna coppia di archi di M abbia un nodo in comune. Si richiede di trovare il matching di cardinalità massima. Nel seguito si considerano *solo* problemi su grafo bipartito. Il problema ammette il seguente modello di Programmazione Lineare,

$$\max \sum_{(i,j) \in A} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{(i,j) \in \delta(i)} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall\, i \in V \tag{III}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

dove $\delta(i)$ è l'insieme degli archi incidenti sul nodo i.

ESERCIZIO 3.16. (a) Formare la matrice dei coefficienti del sistema (III), e provare che è TU. (b) Si può dimostrare la stessa cosa per un grafo non bipartito?

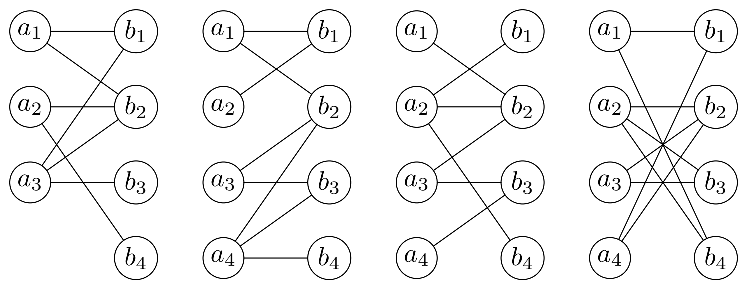
ESERCIZIO 3.17. Determinare per ognuno dei seguenti grafi bipartiti un massimo matching, partendo dai matching iniziali M_0 specificati di seguito.

(a) $M_0 = \emptyset$.

(b) $M_0 = \emptyset$, e $M_0 = \{(a_1, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}$.

(c) $M_0 = \emptyset$, e $M_0 = \{(a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$.

(d) $M_0 = \emptyset$, e $M_0 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$.



(a) (b) (c) (d)

3.5 Problema del trasporto.

Nel problema del trasporto sono dati m "depositi" con disponibilità $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ed n "negozi" con domande $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Inoltre per ogni "collegamento" deposito-negozio (i, j) è specificato un costo unitario di trasporto c_{ij}. Si richiede di determinare un piano di trasporto a costo minimo per rifornire i negozi rispettando le disponibilità dei depositi, cioè

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n, \\
&x_{ij} \geq 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m, \quad \forall j = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{IV}$$

Si assume $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, eventualmente dopo l'applicazione della procedura di bilanciamento.

ESERCIZIO 3.18. Le tabelle seguenti riportano i costi di trasporto c_{ij} e, a margine, i valori di a_i e b_j. Risolvere i problemi di trasporto corrispondenti (applicare la procedura di bilanciamento quando necessario).

	1	2	3	4	a_i
1	8	5	8	9	90
2	4	6	10	4	50
3	2	11	4	3	60
b_j	80	60	30	50	

(a)

	1	2	3	a_i
1	2	8	4	20
2	3	4	9	20
3	8	7	10	40
b_j	20	30	20	

(b)

	1	2	3	4	a_i
1	4	7	12	8	50
2	9	2	6	11	50
3	7	9	2	1	20
b_j	40	60	10	30	

(c)

	1	2	3	4	a_i
1	5	8	15	9	50
2	7	4	2	2	60
3	4	2	3	1	20
b_j	50	40	30	10	

(d)

	1	2	3	4	a_i
1	10	8	4	3	40
2	7	9	8	8	20
3	9	9	7	8	80
4	4	2	1	9	60
b_j	50	50	60	40	

(e)

	1	2	3	4	a_i
1	10	7	2	15	150
2	4	8	9	8	50
3	2	3	4	6	50
b_j	100	100	25	25	

(f)

ESERCIZIO 3.19. Considerare il punto (f) dell'esercizio precedente. Dato un $\delta > 0$, formulare il problema di trasporto con gli stessi costi ed i seguenti termini noti.

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 150, & a_2 = 50 + \delta, & a_3 = 50, \\
b_1 = 100, & b_2 = 100, & b_3 = 25 + \delta.
\end{array}
$$

Confrontare le soluzioni ottime dei due problemi. Calcolare il costo totale per le due soluzioni ottime, confrontare e giustificare i risultati.

3.6 Problema dell'assegnamento.

Il problema dell'assegnamento $n \times n$ consiste nel selezionare n coppie (i, j), con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tali che se due (i, j) e (k, l) sono parte della soluzione, allora $i \neq k$ e $j \neq l$. Il problema ammette la seguente formulazione in Programmazione Lineare.

$$
\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}
$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\
&x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.
\end{aligned} \tag{II}$$

ESERCIZIO 3.20. Formare la matrice dei coefficienti del sistema (II), e verificare che la matrice è TU.

ESERCIZIO 3.21. Dimostrare che aggiungendo alla matrice dei costi c_{ij} una costante δ ad una riga o ad una colonna, la soluzione ottima del problema dell'assegnamento non cambia.

ESERCIZIO 3.22. Risolvere i problemi di assegnamento corrispondenti alle seguenti matrici.

$$(a)\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 11 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
(b)\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 10 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 16 & 3 \\ 8 & 6 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 8 \\ 10 & 8 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
(d)\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 16 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(e)\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
(f)\quad \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Capitolo 4

Algoritmi esatti per problemi NP-completi

4.1 Il problema dello zaino.

Il problema dello zaino 0/1 richiede di selezionare da un insieme di oggetti $N = \{1, 2 \ldots, n\}$ dotati ognuno di un ingombro p_i e di un profitto v_i, un sottoinsieme S tale che $\sum_{i \in S} p_i \leq b$ e che $\sum_{i \in S} v_i$ sia massimo. Il parametro b rappresenta la *capacità* dello zaino. Il problema ammette una formulazione in Programmazione Lineare Intera data da

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq b \qquad\qquad (\mathrm{I}) \\ &x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Un *upper bound* UB per il modello (I) è dato dalla soluzione del suo *rilassamento continuo* ottenuto sostituendo il campo di esistenza delle variabili $x_i \in \{0, 1\}$ con $0 \leq x_i \leq 1$, $\forall\, i$. Si può dimostrare che la soluzione del modello continuo (senza ricorrere al simplesso) si ricava come segue.

Si supponga che gli oggetti siano numerati in modo tale che

$$\frac{v_1}{p_1} \geq \frac{v_2}{p_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{p_n},$$

e sia s il *minimo* indice per il quale risulta $\sum_{i=1}^{s} p_i > b$. La soluzione ottima continua è data da

$$x_1, \ldots, x_{s-1} = 1, \qquad x_s = \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i}{p_s}, \qquad x_{s+1}, \ldots, x_n = 0,$$

ed il suo valore da

$$\mathrm{UB} = \sum_{i=1}^{s-1} v_i + \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i}{p_s} v_s.$$

Se tutti i p_i sono interi, è consigliabile arrotondare UB all'intero inferiore.

Si noti che il calcolo di UB fornisce anche immediatamente una soluzione ammissibile $\{1, \ldots, s-1\}$ che può essere impiegata per il calcolo di un lower bound.

ESERCIZIO 4.1. Risolvere i seguenti problemi dello zaino 0/1 applicando la tecnica del branch and bound.

(a) $v_1, \ldots, v_5 = 7, 5, 9, 10, 11,$
$p_1, \ldots, p_5 = 4, 1, 3, 5, 6,$ $\quad b = 12.$

(b) $v_1, \ldots, v_4 = 6, 10, 8, 18,$
$p_1, \ldots, p_4 = 5, 7, 1, 7,$ $\quad b = 17.$

(c) $v_1, \ldots, v_4 = 18, 14, 10, 19,$
$p_1, \ldots, p_4 = 5, 4, 3, 6,$ $\quad b = 13.$

(d) $v_1, \ldots, v_4 = 3, 5, 3, 2,$
$p_1, \ldots, p_4 = 5, 2, 3, 4,$ $\quad b = 9.$

(e) $v_1, \ldots, v_6 = 6, 8, 9, 14, 12, 8,$
$p_1, \ldots, p_6 = 4, 5, 8, 10, 12, 6,$ $\quad b = 23.$

(f) $v_1, \ldots, v_7 = 12, 8, 9, 10, 12, 6, 12,$
$p_1, \ldots, p_7 = 10, 8, 8, 9, 7, 4, 12,$ $\quad b = 30.$

ESERCIZIO 4.2. (Upper bound di Martello e Toth) Un upper bound migliore del rilassamento continuo di (I) è basato sulla seguente osservazione: in ogni soluzione ammissibile di (I), $s \in I_1$ o $s \in I_0$. Allora, si definiscano

$$U^1 = \sum_{i=1}^{s} v_i - \frac{p_s - \left(b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i\right)}{p_{s-1}} v_{s-1},$$

$$U^0 = \sum_{i=1}^{s-1} v_i + \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i}{p_{s+1}} v_{s+1},$$

e quindi

$$\mathrm{UB}^{MT} = \max\{U^1, U^0\}.$$

(a) (Difficile) Dimostrare che su ogni istanza, $\mathrm{UB}^{MT} \leq \mathrm{UB}$ (*suggerimento:* dimostrare che $\mathrm{UB} \geq U^1$ e $\mathrm{UB} \geq U^0$).
(b) Risolvere le istanze dell'esercizio precedente usando UB^{MT} anziché UB.

ESERCIZIO 4.3. (Criteri di dominanza) L'uso di criteri logici relativamente semplici può permettere di semplificare l'enumerazione in atto nel branch and bound. Verificare i seguenti criteri, e controllare la loro applicabilità negli alberi sviluppati per l'esercizio 4.1.

(1) Se in un nodo si ha, per un oggetto $j \notin I_1$: $b - \sum_{i \in I_1} p_i < p_j$, allora obbligatoriamente $j \in I_0$.

(2) Se per due oggetti i, j, risulta $v_i > v_j$ e $p_i \leq p_j$, allora in ogni soluzione ottima

$$j \in I_1 \implies i \in I_1 \qquad \text{(dimostrare per esercizio).}$$

ESERCIZIO 4.4. Risolvere i problemi dello zaino dell'esercizio 4.1 mediante programmazione dinamica.

4.2 Il problema del commesso viaggiatore.

Il problema del commesso viaggiatore richiede di trovare su un grafo orientato $G(V, A)$ con costi di percorrenza c_{ij} associati agli archi $(i, j) \in A$ un circuito hamiltoniano di costo totale minimo. Il problema ammette il seguente modello in Programmazione Lineare.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 && \forall j \in V, \\
&\sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = 1 && \forall j \in V, \\
&\sum_{(i,j) \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, && \forall S \subset V : 2 \leq |S| \leq |V| - 1. \quad (*) \\
&x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A.
\end{aligned} \tag{II}$$

Un lower bound per questo problema si ottiene rilassando i vincoli $(*)$; il problema si riduce allora ad un assegnamento.

ESERCIZIO 4.5. Risolvere le istanze del problema del commesso viaggiatore associate alle seguenti matrici di costi c_{ij} ($c_{ij} = \infty$ quando l'arco (i, j) non esiste).

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 & 4 & 5\\ \infty & \infty & 4 & 4 & 8\\ 2 & 6 & \infty & \infty & 5\\ 5 & 4 & \infty & \infty & 3\\ 5 & 5 & 12 & 3 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad (a)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 8 & 7 & 2 & 9\\ 4 & \infty & 8 & 6 & 4\\ 9 & 8 & \infty & 3 & 2\\ 4 & 2 & 1 & \infty & 8\\ 5 & 8 & 7 & 4 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad (b)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 6 & 8 & 7 & 6\\ 3 & \infty & 6 & 5 & 4\\ 4 & 6 & \infty & 2 & 3\\ 8 & 6 & 10 & \infty & 4\\ 4 & 5 & 5 & 6 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad (c)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 4 & 5 & 1 & 3\\ 6 & \infty & 4 & \infty & 5\\ 3 & 0 & \infty & 4 & \infty\\ \infty & 1 & 4 & \infty & 0\\ 2 & 1 & 4 & 1 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad (d)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 & 8 & \infty\\ 1 & \infty & 2 & 1 & \infty\\ 5 & \infty & \infty & 2 & 1\\ 4 & 3 & 2 & \infty & 7\\ 1 & 8 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad (e)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & 8 & 4 & 4\\ 1 & \infty & 3 & 2 & 8\\ \infty & 4 & \infty & 5 & 6\\ \infty & 2 & 4 & \infty & 0\\ 7 & 1 & 2 & 2 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad (f)$$

4.3 Facility location

ESERCIZIO 4.6. Risolvere le seguenti istanze di facility location.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 & 9\\ 12 & 5 & 6 & 4\\ 8 & 3 & 0 & 1\\ 9 & 4 & 4 & 3\\ 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}\end{array}$$
$$f_1, \ldots, f_4 = 2, 3, 1, 5 \quad (a)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 10\\ 1 & 8 & 8 & 4\\ 8 & 3 & 0 & 1\\ 9 & 11 & 4 & 3\\ 6 & 7 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}\end{array}$$
$$f_1, \ldots, f_4 = 2, 2, 4, 8 \quad (b)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 & 9\\ 4 & 10 & 6 & 4\\ 3 & 6 & 1 & 1\\ 2 & 8 & 4 & 3\\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}\end{array}$$
$$f_1, \ldots, f_4 = 2, 3, 4, 7 \quad (c)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 10\\ 1 & 7 & 8 & 4\\ 8 & 3 & 0 & 1\\ 10 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 7 & 8 & 4\\ 9 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}\end{array}$$
$$f_1, \ldots, f_4 = 1, 2, 4, 3 \quad (d)$$

ESERCIZIO 4.7. Proporre altri rilassamenti lagrangiani per il problema dell'esempio 24 delle dispense del corso (lavorare sulle altre serie di vincoli). Dire se i rilassamenti ottenuti possono essere risolti in tempo polinomiale.

Capitolo 5

Algoritmi di approssimazione e tecniche euristiche

ESERCIZIO 5.1. Le seguenti matrici rappresentano istanze di TSP metrico. Determinare le soluzioni prodotte dall'algoritmo DST.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 5 & 5 & 11 & 8 \\ & \infty & 2 & 6 & 3 \\ & & \infty & 6 & 3 \\ & & & \infty & 3 \\ & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 6 & 4 & 2 & 14 \\ & \infty & 2 & 4 & 8 \\ & & \infty & 2 & 10 \\ & & & \infty & 12 \\ & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) $\qquad$ (b)

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 12 & 7 & 12 & 6 \\ & \infty & 7 & 4 & 4 \\ & & \infty & 5 & 9 \\ & & & \infty & 4 \\ & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 9 & 3 & 6 & 12 \\ & \infty & 6 & 3 & 5 \\ & & \infty & 3 & 9 \\ & & & \infty & 6 \\ & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) $\qquad$ (d)

ESERCIZIO 5.2. Applicare l'algoritmo greedy alle seguenti istanze di TSP simmetrico (si assuma 1 come nodo di partenza).

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 \\ & \infty & 8 & 9 & 2 & 2 \\ & & \infty & 4 & 4 & 6 \\ & & & \infty & 5 & 8 \\ & & & & \infty & 7 \\ & & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 5 & 5 & 9 & 2 & 8 \\ & \infty & 7 & 7 & 2 & 3 \\ & & \infty & 6 & 7 & 8 \\ & & & \infty & 2 & 4 \\ & & & & \infty & 12 \\ & & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) $\qquad$ (b)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\infty & 3 & 7 & 9 & 12 & 8 \\
 & \infty & 8 & 6 & 5 & 10 \\
 & & \infty & 9 & 7 & 2 \\
 & & & \infty & 8 & 2 \\
 & & & & \infty & 11 \\
 & & & & & \infty
\end{pmatrix}
\end{array} \\
(c)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\infty & 8 & 10 & 6 & 7 & 11 \\
 & \infty & 7 & 2 & 7 & 4 \\
 & & \infty & 8 & 3 & 9 \\
 & & & \infty & 4 & 12 \\
 & & & & \infty & 8 \\
 & & & & & \infty
\end{pmatrix}
\end{array} \\
(d)
\end{array}
$$

ESERCIZIO 5.3. Si consideri il seguente algoritmo greedy per il problema dello zaino.

KP-greedy
    Input: n, v_i, p_i, b;
    Output: una soluzione S;
    Ordina gli oggeti in modo che $\dfrac{v_1}{p_1} \geq \dfrac{v_2}{p_2} \geq \cdots \geq \dfrac{v_n}{p_n}$;
    $S := \emptyset$; $r := b$;
    for $i := 1$ **to** n **do**
        if $p_i \leq r$ **then**
            $S := S \cup \{i\}$; $r := r - p_i$;
    end for
    return S;

(a) Si può affermare che **KP-greedy** ha un errore di approssimazione limitato? Studiare il suo comportamento sull'istanza

$$n = 2, \qquad v_1 = 2, v_2 = M, \qquad p_1 = 1, p_2 = M, \qquad b = M,$$

per $M \to \infty$.
(b) Si può dimostrare che **KP-greedy** con la seguente modifica

    Sia k tale che $v_k = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$;
    if $v_k > \sum_{i \in S} v_i$ **then**
        $S := \{k\}$;
    return S;

è un algoritmo di 1-approssimazione per il problema dello zaino. Verificare l'affermazione sulle istanze dell'esercizio 4.1.

ESERCIZIO 5.4. Applicare la vicinanza $N_2(C)$ alle soluzioni delle istanze di TSP simmetrico ottenute per l'esercizio 5.2, determinando se tali soluzioni sono localmente ottime.

Capitolo 3

Problemi nella classe P

3.1. (a) La matrice è TU. Usare il Corollario 1 oppure l'Osservazione 1 sulle righe 1–4 con $Q_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_2 = \emptyset$. (b) La matrice è TU. Usare l'Osservazione 1 sulle righe 1–6 con $Q_1 = \{1, 2, 3\}$, $Q_2 = \{4, 5, 6\}$. (c) La matrice è stata ottenuta dalla matrice di (a), duplicandone le colonne 1 e 3 e poi cambiandole di segno, quindi è totalmente unimodulare per la Proprietà 1, punti 3 e 4. Alternativamente, è sufficiente usare il Corollario 1 sulle righe, con $Q_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_2 = \emptyset$. (d) La matrice è stata ottenuta dalla matrice di (b) duplicando le colonne 2 e 4 e cambiando segno, quindi è TU per la Proprietà 1, punti 3 e 4. Alternativamente, usare l'Osservazione 1 sulle righe, con $Q_1 = \{1, 2, 3\}$, $Q_2 = \{4, 5, 6\}$. (e) La matrice è TU. Benché la matrice non soddisfi le ipotesi richieste dall'Osservazione 1 e dai corollari seguenti, si può procedere come segue. Si noti che la matrice è del tipo (I, A), con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ottenuta (duplicando una riga) dalla seguente matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' è TU: si può applicare l'Osservazione 1 alle sue righe con $Q_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_2 = \emptyset$. Provato che A' è TU, la Proprietà 1 implica che A è TU (punto 3) e quindi che (I, A) è TU (punto 1). (f) La matrice *non* è TU, in quanto contiene sottomatrici quadrate con determinante diverso da 1, 0, -1. Ad esempio, per la sottomatrice A_1 formata dalle righe e colonne 1 e 2, risulta

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \det A_1 = -2.$$

Si ricordi che la Proprietà 1 ed i risultati che seguono da essa forniscono solo condizioni sufficienti per stabilire che una matrice è TU. Per provare che una matrice con elementi 1, 0, -1 non è TU occorre trovare esplicitamente almeno una sottomatrice quadrata con determinante $\neq 1, 0, -1$.

3.2. (a) La matrice A dei vincoli del sistema risulta la seguente.

$$A = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Applicando l'Osservazione 1 sulle colonne di A, con $Q_1 = \{1, 2, 3\}$, $Q_2 = \{4, 5, 6\}$, risulta che A è TU. (b) Il problema P* si formula come segue, con variabili $v_1, \dots, v_6$ associate ai vincoli di P.

$$\begin{aligned} \max \quad & v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 \\ \text{soggetto a} \quad & \\ & v_1 + v_2 + v_3 \leq 1 \\ & v_5 + v_6 \leq 1 \\ & v_6 \leq 1 \\ & v_1 + v_4 \leq 1 \\ & v_2 + v_6 \leq 1 \\ & v_3 + v_5 \leq 1 \\ & v_1, \dots, v_6 \geq 0. \end{aligned} \tag{P*}$$

Questo problema ha come matrice del sistema di vincoli la matrice $A^* = A^T$, che in base alla Proprietà 1 risulta TU. Inoltre i termini noti di P* sono interi, quindi ogni soluzione di base di P* avrà valori interi.

3.3. (a) B_1 è una base, infatti i suoi archi formano un albero di supporto per il grafo di Figura 3.1(a). Formando i vincoli di conservazione del flusso limitati alle variabli in base, si ottiene

$$\begin{aligned} & x_{12} = 5 \\ & -x_{12} + x_{23} + x_{26} = 0 \\ & -x_{23} = 0 \\ & -x_{26} - x_{56} + x_{67} = 0 \\ & x_{56} - x_{45} = 0 \\ & x_{45} = 6 \\ & x_{78} - x_{67} = -7 \\ & -x_{78} = -4 \end{aligned}$$

che ammette la soluzione (unica) non negativa

$$\begin{array}{llll} x_{12} = 5, & x_{23} = 0, & x_{26} = 5, & x_{45} = 6, \\ x_{56} = 6, & x_{67} = 11, & x_{78} = 4. & \end{array}$$

B_2 è una base, infatti i suoi archi formano un albero di supporto del grafo di Figura 3.1(a); tuttavia, formando i vincoli di conservazione del flusso, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}
&x_{13} + x_{14} = 5\\
&-x_{23} = 0\\
&x_{35} + x_{36} - x_{13} + x_{23} = 0\\
&-x_{14} = 6\\
&x_{58} - x_{35} = 0\\
&-x_{36} = 0\\
&x_{78} = -7\\
&-x_{58} - x_{78} = -4
\end{aligned}$$

che *non ammette* soluzioni non negative. Quindi B_2 è una base *non ammissibile.* B_3 *non* è una base, infatti contiene il ciclo formato dagli archi $\{(1,2),(2,6),(5,6),(4,5),(1,4)\}$, quindi i vettori corrispondenti agli archi di B_3 non sono linearmente indipendenti.

(b) B_1 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto del grafo di Figura 3.1, ma è una base non ammissibile in quanto i vincoli di conservazione del flusso ristretti alle variabili di B_1 non ammettono soluzione non negativa (verificare). B_2 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto; dai vincoli di conservazione del flusso si ottiene

$$\begin{array}{lll}
x_{13} = 16, & x_{35} = 0, & x_{36} = 16\\
x_{41} = 6, & x_{62} = 8, & x_{67} = 8.
\end{array}$$

B_3 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto; dai vincoli di conservazione del flusso si ottiene

$$\begin{array}{lll}
x_{13} = 10, & x_{35} = 2, & x_{36} = 8\\
x_{45} = 6, & x_{57} = 8, & x_{62} = 8.
\end{array}$$

(c) B_1 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto del grafo di Figura 3.1(c). Il valore delle variabili in base è

$$\begin{array}{lll}
x_{12} = 5, & x_{23} = 1, & x_{24} = 3\\
x_{45} = 2, & x_{56} = 1. &
\end{array}$$

B_2 è una base non ammissibile, in quanto i suoi archi formano un albero di supporto, ma i vincoli di conservazione del flusso non ammettono soluzione non negativa. B_3 non è una base: contiene il ciclo formato dagli archi $\{(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

(d) B_1 è una base non ammissibile: i suoi archi formano un albero di supporto, ma i vincoli di conservazione del flusso non ammettono soluzione non negativa (verificare). Stesso risultato per B_2; B_3 è una base che detrmina

$$\begin{array}{lll}
x_{12} = 2, & x_{16} = 10, & x_{32} = 8,\\
x_{34} = 10, & x_{53} = 10. &
\end{array}$$

(e) B_1 è una base che determina

$$x_{12} = 10, \quad x_{13} = 0, \quad x_{24} = 10, \quad x_{35} = 0,$$
$$x_{48} = 10, \quad x_{63} = 0, \quad x_{87} = 5.$$

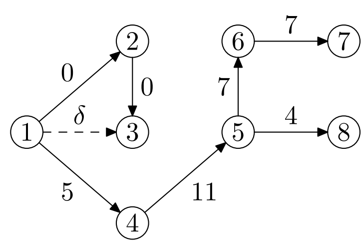
B_2 e B_3 sono basi non ammissibili (verificare).

(f) B_1 è una base che determina

$$x_{12} = 8, \quad x_{25} = 10, \quad x_{36} = 10,$$
$$x_{42} = 2, \quad x_{47} = 6, \quad x_{53} = 10.$$

B_2 e B_3 sono basi non ammissibili.

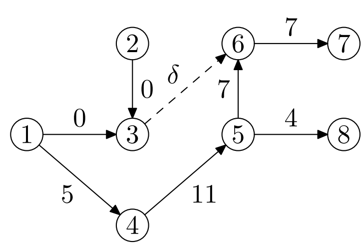
3.4. (a) La base B_0 con i valori di x_{ij} riportati sugli archi è rappresentata di seguito, insieme ai valori dei costi ridotti $\bar{c}_{ij}$ relativi agli archi fuori base.



$$\bar{c}_{13} = -4, \quad \bar{c}_{26} = -2, \quad \bar{c}_{35} = 0, \quad \bar{c}_{36} = -3, \quad \bar{c}_{78} = 10.$$

La variabile entrante, scelta con il criterio del minimo costo ridotto è x_{13}, che entra con valore $\delta = \min\{x_{12}, x_{23}\} = 0$. La variabile uscente risulta x_{12} (anche x_{23} è una scelta lecita). Allora (spostando uno “zero pesante”) si ottiene

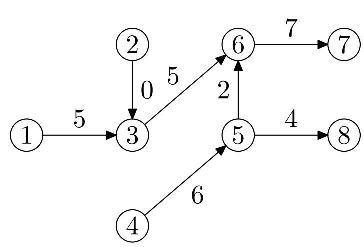
$$B_1 = B_0 + (1,3) - (1,2) = \{(1,3),(1,4),(2,3),(4,5),(5,6),(5,8),(6,7)\}$$



$$\bar{c}_{12} = 4, \quad \bar{c}_{26} = -6, \quad \bar{c}_{35} = -4, \quad \bar{c}_{36} = -7 \quad \bar{c}_{78} = 10.$$

Entra quindi in base x_{36}, con valore $\delta = \min\{x_{14}, x_{45}, x_{56}\} = 5$, esce x_{14}. Risulta allora

$$B_2 = B_1 + (3,6) - (1,4) = \{(1,3),(2,3),(3,6),(4,5),(5,6),(5,8),(6,7)\}$$



$$\bar{c}_{12} = 4, \quad \bar{c}_{14} = 7, \quad \bar{c}_{26} = 1, \quad \bar{c}_{35} = 3, \quad \bar{c}_{78} = 10.$$

La base B_2 risulta quindi ottima.

(b) Basi, valori di flusso e costi ridotti risultano come segue:

$$\begin{aligned}
&B_0 = \{(1,3),(1,6),(3,5),(4,1),(5,7),(6,2)\},\\
&x_{13} = 8, \quad x_{16} = 8, \qquad\quad x_{35} = 8,\\
&x_{41} = 6, \quad x_{58} = 8, \quad x_{62} = 8,
\end{aligned}$$

e costi ridotti

$$\begin{aligned}
&\bar{c}_{21} = 17, \quad \bar{c}_{36} = -4, \quad \bar{c}_{45} = -4,\\
&\bar{c}_{67} = 8, \qquad \bar{c}_{72} = -3.
\end{aligned}$$

La variabile entrante risulta x_{36} (alternativamente, x_{45} se l'unica discriminante è il costo ridotto). La x_{36} entra in base con valore di flusso $x_{36} = \delta = \min\{x_{16}\} = 8$. Esce la x_{16}. Si ha

$$\begin{aligned}
&B_1 = \{(1,3),(3,5),(3,6),(4,1),(5,7),(6,2)\},\\
&x_{13} = 16, \quad x_{35} = 8, \quad x_{36} = 8,\\
&x_{41} = 6, \qquad x_{58} = 8, \quad x_{62} = 8,
\end{aligned}$$

e costi ridotti

$$\begin{aligned}
&\bar{c}_{16} = 4, \quad \bar{c}_{21} = 13, \quad \bar{c}_{45} = -4,\\
&\bar{c}_{67} = 4, \quad \bar{c}_{72} = 5.
\end{aligned}$$

Entra in base x_{45} con valore $\delta = \min\{x_{13}, x_{35}\} = 6$. Esce x_{41}.

$$\begin{aligned}
&B_2 = \{(1,3),(3,5),(3,6),(4,5),(5,7),(6,2)\},\\
&x_{13} = 10, \quad x_{35} = 2, \qquad\quad x_{36} = 8,\\
&x_{45} = 6, \qquad x_{58} = 8, \quad x_{62} = 8,
\end{aligned}$$

e costi ridotti

$$\begin{aligned}
&\bar{c}_{16} = 4, \quad \bar{c}_{14} = 4, \quad \bar{c}_{21} = 13,\\
&\bar{c}_{67} = 4, \quad \bar{c}_{72} = 5.
\end{aligned}$$

La base B_2 è ottima.
(c) Risulta

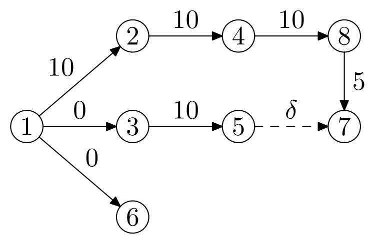
$$\begin{aligned}
&B_0 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\} \qquad (\bar{c}_{24} = -9),\\
&B_1 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,6)\}
\end{aligned}$$

ottima con $x_{12} = 5$, $x_{23} = 1$, $x_{24} = 3$, $x_{45} = 2$, $x_{56} = 1$ (verificare).
(d) Risulta

$$\begin{aligned}
&B_0 = \{(1,2),(2,6),(3,4),(4,6),(5,4)\} \qquad (\bar{c}_{56} = -6),\\
&B_1 = \{(1,2),(2,6),(3,4),(5,4),(5,6)\} \qquad (\bar{c}_{24} = -1),\\
&B_2 = \{(1,2),(2,4),(3,4),(5,4),(5,6)\},
\end{aligned}$$

ottima con $x_{12} = 12$, $x_{24} = 2$, $x_{34} = 8$, $x_{54} = 0$, $x_{56} = 10$ (verificare).
(e) La base iniziale B_0 con valori dei flussi e costi ridotti relativi agli archi fuori base è riportata di seguito.

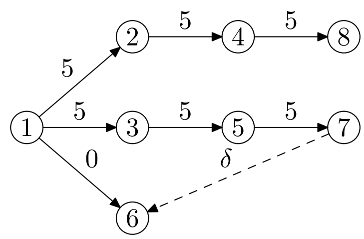
$$B_0 = \{(1,2),(1,3),(1,6),(2,4),(3,5),(4,8),(8,7)\},$$



$$\bar{c}_{32} = 2 \quad \bar{c}_{57} = -11 \quad \bar{c}_{63} = 5, \quad \bar{c}_{65} = 6, \quad \bar{c}_{76} = 4.$$

Entra $x_{57} = \delta = 5$, esce x_{87}.

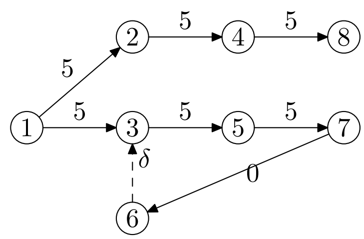
$$B_1 = \{(1,2),(1,3),(1,6),(2,4),(3,5),(4,8),(5,7)\},$$



$$\bar{c}_{32} = 2 \quad \bar{c}_{63} = 5 \quad \bar{c}_{65} = 6, \quad \bar{c}_{76} = -7, \quad \bar{c}_{87} = 11.$$

Entra $x_{76} = \delta = 0$, esce x_{16}. Si noti lo spostamento dello "0 pesante".

$$B_2 = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,8),(5,7),(7,6)\},$$



$$\bar{c}_{32} = 2 \quad \bar{c}_{63} = -2 \quad \bar{c}_{65} = -1, \quad \bar{c}_{16} = 7, \quad \bar{c}_{87} = 11.$$

La variabile x_{63} è selezionata per entrare in base, ma il ciclo $\{(6,3),(3,5),(5,7),(7,6)\}$ (che è anche un *circuito*) non permette la selezione di una variabile uscente. Questo indica la presenza di una soluzione illimitata.
(f) Risulta

$$B_0 = \{(1,2),(2,5),(3,6),(4,2),(5,3),(5,7)\} \qquad (\bar{c}_{47} = -9),$$
$$B_1 = \{(1,2),(2,5),(3,6),(4,2),(4,7),(5,3)\},$$

con $x_{12} = 8$, $x_{25} = x_{53} = x_{36} = 10$, $x_{42} = 2$, $x_{47} = 6$ (verificare).

3.5. Si osservi che G possiede (almeno) un circuito C con costo totale negativo (ad esempio $C = \{(6,5),(5,7),(7,6)\}$). Data una soluzione ammissibile (non necessariamente di base), $\bar{x}_{ij}$, ed un $\Delta_C > 0$, si definisca la soluzione $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} + \Delta_C$ se $(i,j) \in C$, altrimenti $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij}$. Si possono constatare i seguenti fatti.

(1) Le $\hat{x}_{ij}$ soddisfano i vincoli di bilanciamento del flusso, cioè formano una soluzione ammissibile. Infatti per qualunque nodo $i \in V$:

- se $i \notin C$, il bilanciamento al nodo i è sicuramente soddisfatto:

$$\sum_{j\colon (i,j)\in A} \hat{x}_{ij} - \sum_{j\colon (j,i)\in A} \hat{x}_{ji} = \sum_{j\colon (i,j)\in A} \bar{x}_{ij} - \sum_{j\colon (j,i)\in A} \bar{x}_{ji} = b_i.$$

- se $i \in C$, esiste un unico arco di C che entra in i ed un unico arco che ne esce, quindi

$$\sum_{j\colon (i,j)\in A} \hat{x}_{ij} - \sum_{j\colon (j,i)\in A} \hat{x}_{ji} = \sum_{j\colon (i,j)\in A} \bar{x}_{ij} + \Delta_C - \sum_{j\colon (j,i)\in A} \bar{x}_{ji} - \Delta_C = b_i.$$

(2) Si possono definire $\hat{x}_{ij}$ per valori di Δ_C *arbitrariamente* grandi.

(3) Tale procedimento si può applicare a qualunque circuito del grafo.

Quindi ogni flusso su G *non è definito in modo univoco,* ma a meno di costanti Δ_C non negative arbitrarie legate ai circuiti del grafo. Il costo addizionale di questo "flusso fantasma" Δ_C è pari a $\Delta_C\big(\sum_{(i,j)\in C} c_{ij}\big)$. La presenza di un ciclo di costo totale negativo dà quindi la possibilità di generare soluzioni con costo arbitrariamente basso (tendente a $-\infty$ per $\Delta_C \to \infty$).

Nota. Le soluzioni di base considerate dal simplesso corrispondono sempre a flussi per i quali $\Delta_C = 0$ (le soluzioni di base non possono — ovviamente — contenere circuiti).

3.6. Applicando le considerazioni dell'esercizio precedente (basta porre $\bar{x}_{ij} = 0$), se G contiene almeno un circuito C, la soluzione non negativa

$$\hat{x}_{ij} = \begin{cases} \Delta, & \text{se } (i,j) \in C, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è ammissibile, per ogni $\Delta \geq 0$ (verificare).

3.7. In base alle considerazioni dei due esercizi precedenti, quando G contiene circuiti è possibile costruire soluzioni con variabili a valori arbitrariamente grandi, e quindi la regione di ammissibilità è un poliedro illimitato. Quando G non contiene circuiti tale costruzione non è possibile, e la regione di ammissibilità è un politopo o poliedro convesso.

3.8. (a) Il problema della prima fase si imposta aggiungendo il nodo artificiale q e gli archi $(1,q)$, $(q,2)$, $(q,3)$, $(q,4)$, $(q,5)$. Una base ammissibile è effettivamente

$$B_0 = \{(1,q),(q,2),(q,3),(q,4),(q,5)\},$$

con $x_{1q} = x_{q3} = 10$, $x_{q2} = x_{q4} = x_{q5} = 0$, e

$$\begin{aligned} &r_{12} = -2, \quad r_{14} = -2, \quad r_{23} = 0, \quad r_{24} = 0, \\ &r_{43} = 0, \qquad r_{53} = 0, \qquad r_{54} = 0. \end{aligned}$$

Entra in base x_{12} con valore $\delta = 0$, esce x_{12}. Quindi si ha

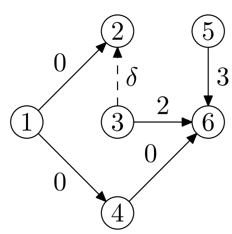
$$\begin{aligned}
&B_1 = \{(1,q),(1,2),(q,3),(q,4),(q,5)\}, && (r_{23} = -2)\\
&B_2 = \{(1,q),(1,2),(1,3),(q,4),(q,5)\}, && (r_{24} = -2)\\
&B_3 = \{(1,q),(1,2),(1,3),(2,4),(q,5)\}, && (r_{35} = -2)\\
&B_4 = \{(1,q),(1,2),(1,3),(2,4),(3,5)\} && \text{(ottimo).}
\end{aligned}$$

Quindi $B = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5)\}$ è una base ammissibile con $x_{12} = x_{13} = 10$, $x_{24} = x_{35} = 0$. (b) Non esiste una base ammissibile.

3.9. (a) Dati $B = \{(1,3),(1,4),(3,6),(4,6),(5,6)\}$ e $N_1 = \{(1,3),(2,5),(3,2)\}$, per determinare i flussi x_{ij} si impostano i vincoli di conservazione del flusso, con $x_{ij} = 0$ se $(i,j) \notin B \cup N_1$, $x_{ij} = d_{ij}$ se $(i,j) \in N_1$. Risulta quindi (si noti che l'ultima equazione è ridondante) quanto segue.

$$\begin{array}{lr}
\text{(Nodo 1)} & x_{12} + 7 + x_{14} = 7\\
\text{(Nodo 2)} & -x_{12} - 5 + 5 = 0\\
\text{(Nodo 3)} & -7 + x_{36} + 5 = 0\\
\text{(Nodo 4)} & x_{46} - x_{14} = 0\\
\text{(Nodo 5)} & x_{56} - 5 = -2\\
\text{(Nodo 6)} & -x_{36} - x_{46} - x_{56} = -5
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ll}
x_{12} = 0 & \\
x_{14} = 0 & x_{13} = 7\\
x_{36} = 2 & x_{25} = 5\\
x_{46} = 0 & x_{32} = 5\\
x_{56} = 3 &
\end{array}$$

Valutando i costi ridotti si ottiene



$$\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= 2\\
\bar{c}_{25} &= 3\\
\bar{c}_{32} &= 3\\
\bar{c}_{43} &= 5
\end{aligned}$$

Le condizioni di ottimalità sono violate dagli archi

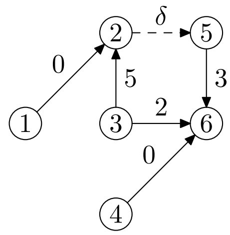
$$\begin{array}{ll}
(1,3), & \text{perché } (1,3) \in N_1 \text{ e } \bar{c}_{13} > 0,\\
(2,5), & \text{perché } (2,5) \in N_1 \text{ e } \bar{c}_{25} > 0,\\
(3,2), & \text{perché } (3,2) \in N_1 \text{ e } \bar{c}_{32} > 0.
\end{array}$$

L'arco $(3,2)$ è quindi idoneo ad entrare in base; esso individua il ciclo $\{(3,2),(1,2),(1,4),(4,6),(3,6)\}$. L'ammontare della variazione di flusso sugli archi del ciclo è data da

$$\begin{aligned}
\delta &= \min\{x_{32}, d_{12} - x_{12}, x_{14}, x_{46}, d_{36} - x_{36}\}\\
&= \min\{5, 6, 0, 0, 7\} = 0.
\end{aligned}$$

Gli archi candidati a lasciare la base sono $(1,4)$ e $(4,6)$; arbitrariamente, si è scelto $B_1 = B_0 + (3,2) - (1,4)$. Si passa quindi alla nuova soluzione di base degenere

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{(1,2),(3,2),(3,6),(4,6),(5,6)\},\\
N_1^1 &= \{(1,3),(2,5)\}.
\end{aligned}
$$



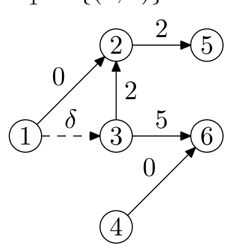
$\bar{c}_{14} = 3$
$\bar{c}_{13} = 5$
$\bar{c}_{25} = 6$
$\bar{c}_{43} = 5$

L'arco $(2,5) \in N_1^1$ viola le condizioni di ottimalità ($x_{25} = d_{25}, \bar{c}_{25} > 0$), e può quindi entrare in base. Esso induce il ciclo $\{(2,5),(5,6),(3,6),(3,2)\}$, con

$$
\begin{aligned}
\delta &= \min\{x_{25}, x_{56}, d_{36} - x_{36}, x_{32}\}\\
&= \min\{5,3,7,5\} = 3.
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi

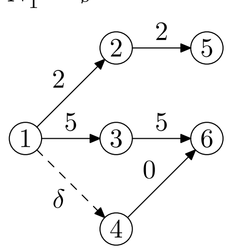
$$
\begin{aligned}
B_2 &= B_1 - (3,6) + (2,5) = \{(1,2),(2,5),(3,2),(3,6),(4,6)\}\\
N_1^2 &= \{(1,3)\}.
\end{aligned}
$$



$\bar{c}_{13} = 5$
$\bar{c}_{14} = 3$
$\bar{c}_{43} = 5$
$\bar{c}_{56} = 6$

Entra quindi in base l'arco $(1,3)$ mentre esce $(2,3)$ ($\delta = 2$).

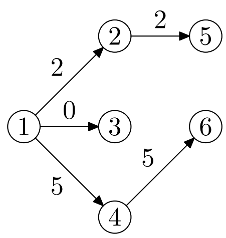
$$
\begin{aligned}
B_3 &= \{(1,2),(1,3),(2,5),(3,6),(4,6)\}\\
N_1^3 &= \emptyset
\end{aligned}
$$



$\bar{c}_{14} = -2$
$\bar{c}_{32} = 5$
$\bar{c}_{43} = 5$
$\bar{c}_{56} = 1$

Infine si ottiene, con $\delta = 5$,

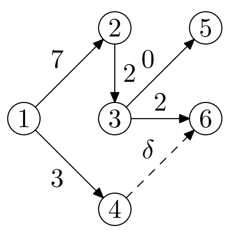
$$B_4 = B_5 + (1,4) - (3,6) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,5),(4,6)\}$$
$$N_1^4 = \emptyset.$$



$$\bar{c}_{32} = 5$$
$$\bar{c}_{36} = 2$$
$$\bar{c}_{43} = 3$$
$$\bar{c}_{56} = 3.$$

La soluzione risulta ottima, poiché tutte le condizioni di ottimalità sono rispettate.
(b) Valutando i costi ridotti rispetto alla base B_0 si ottiene quanto segue.

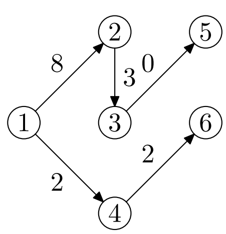
$$B_0 = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,5),(3,6)\},$$
$$N_1^0 = \{(2,5),(4,6)\}$$



$$\bar{c}_{25} = -1$$
$$\bar{c}_{43} = 3$$
$$\bar{c}_{46} = 4$$
$$\bar{c}_{56} = 8$$

L'arco saturo $(4,6)$ viola le condizioni di ottimalità, e può quindi entrare in base.

$$B_1 = B_0 + (4,6) - (3,6) = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,5),(4,6)\}$$
$$N_1^1 = \{(2,5),(3,6)\}$$

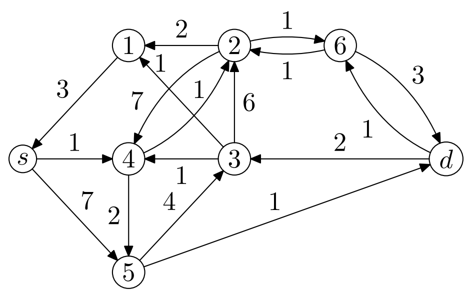


$$\bar{c}_{25} = -1$$
$$\bar{c}_{36} = -4$$
$$\bar{c}_{43} = 3$$
$$\bar{c}_{56} = 4$$

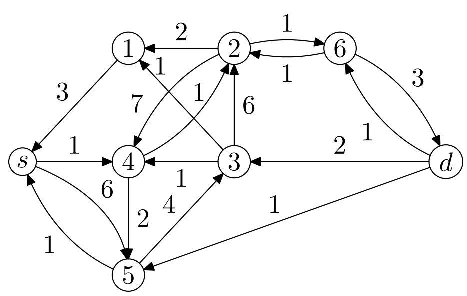
La nuova soluzione rispetta le condizioni di ottimalità.
(c) Base ottima $B^* = \{(1,2),(1,3),(2,5),(3,4),(3,6),(6,7)\}$, $N_1^* = \{(4,7)\}$.

3.10. Se il problema ammette soluzioni ammssibili, allora la base finale prodotta dalla procedura per la determinazione della soluzione iniziale *deve* essere degenere. Infatti il nodo supplementare q deve essere collegato da (esattamente) un arco all'albero di supporto corrispondente alla base finale. Inoltre se esiste una soluzione ammissibile tale arco deve essere scarico (altrimenti la soluzione della prima fase non avrebbe costo nullo).

3.11. (a) A partire dal flusso iniziale specificato (totale $f = 3$), si ottiene il primo grafo di scarto, riportato di seguito.



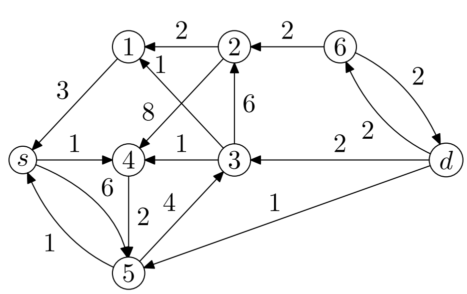
Si noti che $(4, 2)$, $(6, 2)$, $(d, 6)$ sono archi *backward.* Un possibile cammino orientato $s - d$ è $(s, 5, d)$, che dà $\Delta = \min\{7, 1\} = 1$. Si aumenta quindi di 1 il flusso lungo gli archi $(s, 5)$ e $(5, d)$ del grafo originale, ottenendo $x_{s5} = x_{5d} = 1$ e portando il flusso totale a $f = 4$. Ridisegnando il grafo di scarto per il nuovo flusso, si ottiene



sul quale esiste il cammino $s-d$ $(1, 4, 2, 6, d)$. Si noti che questo cammino utilizza l'arco backward $(4, 2)$. Risulta $\Delta = \min\{1, 1, 1, 3\} = 1$, ed i nuovi flussi degli archi interessati sono

$$x_{s4} = 1, \qquad x_{24} = 1 - 1 = 0, \qquad x_{26} = 1 + 1 = 2,$$
$$x_{6d} = 1 + 1 = 2,$$

ed il nuovo valore di flusso nella rete è $f = 4 + 1 = 5$. Il nuovo grafo di scarto è il seguente.



Sull'ultimo grafo di scarto nonesistono cammini orientati $s - d$ (facile verifica), quindi un flusso massimo è dato da

$$\begin{array}{lllll} x_{s1} = 3, & x_{12} = 2, & x_{13} = 1, & x_{26} = 2, & x_{6d} = 2, \\ x_{s4} = 1, & x_{43} = 1, & x_{3d} = 2, & & \\ x_{s5} = 1, & x_{5d} = 1, & & & \end{array}$$

con $f = 5$. Un taglio di capacità minima è determinato dall'insieme dei nodi raggiungibili da s sull'ultimo grafo di scarto mediante cammini orientati. Qui, $U = \{s, 1, 2, 3, 4, 5\}$ è un taglio di capacità minima (verificare che $C(S_U) = 5$).

(b) Ottimo $f = 4$, $U = \{s, 1, 2\}$.

(c) Ottimo $f = 6$, $U = \{s, 1, 2, 4, 5, 6\}$.

(d) Ottimo $f = 5$, $U = \{s\}$.

(e) Ottimo $f = 9$, $U = \{s, 2, 3\}$.

3.12. Se i vincoli di capacità $x_{ij} \leq c_{ij}$ sono specificati per tutti gli archi del grafo, la regione di ammissibilità non può essere un troncone. Se invece il grafo contiene archi a capacità illimitata, e se esiste un circuito formato da archi di tale genere, la regione di ammissibilità è un poliedro illimitato (valgono le considerazioni degli esercizi 3.5 e seguenti).

3.13. È sufficiente, dato il grafo G capacitato sui nodi, costruire un grafo G' capacitato sugli archi, definito come segue.

- Ad ogni nodo i con capacità c_i di G corrispondono in G' due nodi i_1, i_2 collegati da un singolo arco (i_1, i_2) di capacità c_i.
- Ad ogni arco (i, j) di G corrisponde l'arco (i_2, j_1) di capacità infinita.

Su G' si può applicare il tradizionale algoritmo per trovare il flusso massimo.

3.14. Definite le variabili u_i, $i \in V - \{s, d\}$ associate ai vincoli di conservazione del flusso, e le variabili w_{ij}, $(i, j) \in A$ associate ai vincoli di capacità, il duale del modello del massimo flusso è

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} w_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{array}{l} u_i - u_j + w_{ij} \geq 0 \qquad (i, j) \in A,\ i, j \notin \{s, d\}, \\ -u_j + w_{sj} \geq 1 \qquad (s, j) \in A, \\ u_i + w_{id} \geq 0, \qquad (i, d) \in A, \\ u_i \text{ libere}, \forall\, i \in V - \{s, d\},\ w_{ij} \geq 0,\ \forall (i, j) \in A. \end{array}$$

La matrice dei vincoli è TU (verificare), ed i termini noti appartengono all'insieme $\{0, 1\}$. Quindi le soluzioni di base avranno valori interi.

3.15. Per la serie di vincoli $u_i - u_j + w_{ij} \geq 0$, si può verificare che, per ogni taglio $(U, V - U)$, per i valori specificati risulta, per $i, j \neq s, d$:

	u_i	u_j	w_{ij}	$u_i - u_j + w_{ij}$
$i \in U, j \notin U$	-1	0	1	0
$i \notin U, j \in U$	0	-1	0	1
$i \in U, j \in U$	-1	-1	0	0
$i \notin U, j \notin U$	0	0	0	0

quindi questi vincoli sono soddisfatti. Analogamente si possono verificare le altre serie di vincoli:

	u_j	w_{sj}	$-u_j + w_{sj}$
$s \in U, j \notin U$	0	1	1
$s \in U, j \in U$	-1	0	1

	u_i	w_{id}	$u_i + e_{id}$
$i \in U, d \notin U$	-1	1	0
$i \notin U, d \notin U$	0	0	0

3.16. (a) La matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli coincide con la matrice di incidenza nodi-archi del grafo G, quindi se G è bipartito la matrice è TU.
(b) No, la matrice di incidenza di un grafo non bipartito non è, in generale, TU (facile verifica).

3.17. (a) $\Delta^* = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$ è immediato.
(b) Da $M_0 = \{(a_1, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}$ si etichetta $a_2(E, -)$, $b_1(O, a_2)$, $a_1(E, b_1)$, $b_2(O, a_1)$, $a_3(E, b_2)$, $b_3(O, a_3)$, $a_4(E, b_3)$, $b_4(O, a_4)$. b_4 è esposto, ed il cammino alternante individuato è

$$((a_2, b_1), (b_1, a_1), (a_1, b_2), (b_2, a_3), (a_3, b_3), (b_3, a_4), (a_4, b_4)),$$

Quindi il matching risulta, dopo l'aumento:

$$\Delta = \{(a_1, b_2), (a_2, b1), (a_3, b_3), (a_4, b_4)\}.$$

Riapplicando la procedura di etichettatura, non si possono etichettare altri nodi esposti, quindi Δ è ottimo.
(c) Ottimo $\Delta^* = \{(a_1, b_2), (a_2, b_4), (a_3, b_3)\}$.
(d) Ottimo $\Delta^* = \{(a_1, b_4), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_1)\}$.

3.18. (a) Poiché risulta $\sum_i a_i = 200$ e $\sum_j b_j = 220$, occorre bilanciare il problema aggiungendo un deposito fittizio 4, con $a_4 = 20$. In mancanza di ulteriori indicazioni, si assume $c_{4j} = 0$ per ogni j. La matrice del problema bilanciato è quindi la seguente.

	1	2	3	4	a_i
1	8	5	8	9	90
2	4	6	10	4	50
3	2	11	4	3	60
4	0	0	0	0	20
b_j	80	60	30	50	

L'applicazione del metodo dell'angolo Nord-Ovest fornisce la base iniziale $B_0 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, con valori e costi ridotti riportati di seguito (in grassetto i costi ridotti nulli delle variabili in base).

	1	2	3	4	a_i
1	80^-	10^+			90
2	$+$	50^-	0		50
3			30	30	60
4				20	20
b_j	80	60	30	50	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	-1	1
2	-5	**0**	**0**	-5
3	-1	11	**0**	**0**
4	0	3	-1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

Il costo ridotto minimo (-5) si ha in corrispondenza della casella $(2,1)$, che entra in base (anche $(2,4)$ è una scelta lecita). Individuando il ciclo $\{(2,1)^+, (2,2)^-, (1,2)^+, (1,1)^-\}$ e ponendo $\Delta = \min\{x_{11}, x_{22}\} = 50$ si effettua il cambio di base

$$B_1 = B_0 + (2,1) - (2,2) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\},$$

da cui risultano valori e costi ridotti come segue.

	1	2	3	4	a_i
1	30^-	60	$+$		90
2	50^+		0^-		50
3			30	30	60
4				20	20
b_j	80	60	30	50	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	-6	-4
2	**0**	5	**0**	-5
3	4	16	**0**	**0**
4	5	8	-1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

Proseguendo (ora $\Delta = \min\{x_{11}, x_{23}\} = 0$), si ha lo spostamento di uno "zero pesante". I passaggi successivi non presentano caratteristiche particolari, e vengono riportati senza commenti.

$$B_2 = B_1 + (1,3) - (2,3) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,3),(3,4),(4,4)\},$$

	1	2	3	4	a_i
1	30^-	60	0^+		90
2	50				50
3	$+$		30^-	30	60
4				20	20
b_j	80	60	30	50	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	**0**	2
2	**0**	5	6	1
3	-2	10	**0**	**0**
4	-1	2	-1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$$B_3 = B_2 + (3,1) - (1,1) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,3),(3,4),(4,4)\},$$

(con $\Delta = \min\{x_{11}, x_{33}\} = 30$, la scelta della casella uscente tra $(1,1)$ e $(3,3)$ è arbitraria)

	1	2	3	4	a_i
1		60	30^+		90
2	50^-			$+$	50
3	30^+		0	30^-	60
4				20	20
b_j	80	60	30	50	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	2	**0**	**0**	2
2	**0**	3	4	-1
3	**0**	10	**0**	**0**
4	-1	2	-1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$$B_4 = B_3 + (2,4) - (3,4) = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(3,1),(3,3),(4,4)\},$$

(con $\Delta = \min\{x_{21}, x_{34}\} = 30$)

	1	2	3	4	a_i
1		60	30		90
2	20^-			30^+	50
3	60^+		0^-		60
4			$+$	20^-	20
b_j	80	60	30	50	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	2	**0**	**0**	3
2	**0**	3	4	**0**
3	**0**	10	**0**	1
4	0	1	-2	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$$B_5 = B_4 + (4,3) - (3,3) = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,4), (3,1), (4,3), (4,4)\},$$

(il ciclo individuato è $\{(4,3)^+, (3,3)^-, (3,1)^+, (2,1)^-, (2,4)^+, (4,4)-\}$, $\Delta = 0$)

	1	2	3	4	a_i
1		60	30		90
2	20			30	50
3	60				60
4			0	20	20
b_j	80	60	30	50	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	0	**0**	**0**	1
2	**0**	5	6	**0**
3	**0**	12	2	1
4	0	3	**0**	**0**

$\bar{c}_{ij}$

B_5 risulta quindi ottima, avendo $\bar{c}_{ij} \geq 0$ per ogni i, j.
(b) Essendo $\sum_i a_i = 80$ e $\sum_j b_j = 70$, la procedura di bilanciamento richiede di inserire un negozio fittizio 4, con $b_4 = 10$ e $c_{i4} = 0$ per ogni i, non essendo stato specificato altrimenti. La tabella seguente riassume il problema bilanciato.

	1	2	3	4	a_i
1	2	8	4	0	20
2	3	4	9	0	20
3	8	7	10	0	40
b_j	20	30	20	10	

Si ottiene quindi, mediante la procedura dell'angolo di Nord-Ovest,

$$B_0 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

	1	2	3	4	a_i
1	20	0^-	$+$		20
2		20			20
3		10^+	20^-	10	40
b_j	20	30	20	10	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	-7	-1
2	5	**0**	2	3
3	7	**0**	**0**	**0**

$\bar{c}_{ij}$

e successivamente

$B_1 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	20^-		0^+		20
2	$+$	20^-			20
3		10^+	20^-	10	40
b_j	20	30	20	10	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	7	**0**	6
2	−2	**0**	2	3
3	0	**0**	**0**	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$B_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1			20		20
2	20	0			20
3		30	0	10	40
b_j	20	30	20	10	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	2	7	**0**	6
2	**0**	**0**	2	3
3	2	**0**	**0**	**0**

$\bar{c}_{ij}$

(soluzione ottima).

(c) Si ha $\sum_i a_i = 120$, $\sum_j b_j = 140$, quindi occorre inserire un magazzino fittizio 4 con $a_4 = 20$ e formare il seguente problema bilanciato.

	1	2	3	4	a_i
1	4	7	12	8	50
2	9	2	6	11	50
3	7	9	2	1	20
4	0	0	0	0	20
b_j	40	60	10	30	

da cui, cominciando con la B_0 generata dalla procedura dell'angolo Nord-Ovest,

$B_0 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	40	10^-		$+$	50
2		50^+	0^-		50
3			10^+	10^-	20
4				20	20
b_j	40	60	10	30	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	1	-2
2	10	**0**	**0**	6
3	12	11	**0**	**0**
4	6	3	-1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$B_1 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	40	10		0	50
2		50			50
3			10^-	10^+	20
4			$+$	20^-	20
b_j	40	60	10	30	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	3	**0**
2	10	**0**	2	8
3	10	9	**0**	**0**
4	4	1	-1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$B_2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	40	10		0	50
2		50			50
3				20	20
4			10	10	20
b_j	40	60	10	30	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	4	**0**
2	10	**0**	3	8
3	10	9	1	**0**
4	4	1	**0**	**0**

$\bar{c}_{ij}$

(soluzione ottima).
(d) Il problema è bilanciato ($\sum_i a_i = \sum_j b_j = 130$), quindi si procede direttamente, senza bisogno di bilanciamento.

$B_0 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	50	0			50
2		40^-	20^+		60
3		$+$	10^-	10	20
b_j	50	40	30	10	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	9	5
2	6	**0**	**0**	2
3	2	-3	**0**	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$B_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	50	0			50
2		30^-	30	$+$	60
3		10^+		10^-	20
b_j	50	40	30	10	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	9	5
2	6	**0**	**0**	-1
3	5	**0**	3	**0**

$\bar{c}_{ij}$

$B_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2)\}$

	1	2	3	4	a_i
1	50	0			50
2		20	30	10	60
3		20			20
b_j	50	40	30	10	

x_{ij}

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	9	6
2	6	**0**	**0**	**0**
3	5	**0**	3	1

$\bar{c}_{ij}$

(soluzione ottima).

(e) Il problema è bilanciato. Risulta:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)\} \qquad (\bar{c}_{14} = -15)),\\
B_1 &= \{(1,1),(1,4),(1,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)\} \qquad (\bar{c}_{31} = -13),\\
B_2 &= \{(1,4),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)\} \qquad (\bar{c}_{34} = -7),\\
B_3 &= \{(1,4),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3)\},
\end{aligned}$$

ottima con $x_{14} = 40$, $x_{21} = 20$, $x_{31} = 30$, $x_{32} = 50$, $x_{33} = x_{34} = 0$, $x_{43} = 60$.

(f) Il problema è bilanciato. Quindi si ottiene

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\} \qquad (\bar{c}_{21} = -7),\\
B_1 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,3),(3,4)\} \qquad (\bar{c}_{13} = -13),\\
B_2 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,3),(3,4)\} \qquad (\bar{c}_{31} = -10),\\
B_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4)\},
\end{aligned}$$

ottima con $x_{11} = 25$, $x_{12} = 100$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 50$, $x_{31} = 25$, $x_{34} = 25$.

3.19. (Il "paradosso dei trasporti") La base B_3 ottenuta nell'esercizio precedente continua ad essere ammissibile, con $x_{11} = 25 - \delta$, $x_{12} = 100$, $x_{13} = 25 + \delta$, $x_{21} = 50 + \delta$, $x_{31} = 25$, $x_{34} = 25$. L'analisi dei costi ridotti (che non dipendono da a_i, b_j) mostra che anche l'ottimalità di B_3 è preservata. Nei due casi, i costi di trasporto totali risultano pari a 1400 e $1400 - 4\delta$, rispettivamente. Quindi in questo caso, trasportando una maggiore quantità di merce si paga *di meno*. La giustificazione di questo fenomeno si ha in base al migliore sfruttamento dei collegamenti magazzini-negozi: δ unità di merce possono essere stornate dal collegamento $(1,1)$ (con costo unitario 10) e spostate invece sui due collegamenti $(2,1)$ e $(1,3)$ (con costi 4 e 2 rispettivamente) con un risparmio complessivo di $(10 - 4 - 2) \times \delta$ (confrontare le due soluzioni).

3.20. La matrice dei coefficienti del sistema (II) è la matrice di incidenza del grafo bipartito $\mathbb{K}_{n,n}$, quindi è TU.

3.21. Se k è la riga alla quale si aggiunge δ ai costi, sia

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{se } i \neq k,\\ c_{kj} + \delta, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

il vincolo $\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 1$ implica che con i nuovi costi, qualunque sia la soluzione ammissibile x_{ij}:

$$\sum_{i,j} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i \neq k, j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j} c_{kj} x_{kj} + \delta,$$

ed è noto che aggiungere una costante alla funzione obiettivo non cambia la soluzione ottima. Analogo ragionamento per le colonne.

3.22. (a) Riducendo la matrice per righe, occorre sottrarre 1, 2, 3, 2 ed 1 alle righe $a_1, \ldots, a_5$ rispettivamente. Quindi occorre sottrarre 1 e 2 alle colonne b_1 e b_4 rispettivamente. La matrice risultante è

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 6 & 7 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & 1 & 3 \\ 4 & \mathbf{0} & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Lavorando sul grafo bipartito con archi $\{(a_1, b_5)$, (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_2), (a_5, b_3), $(a_5, b_4)\}$ si ottiene il matching

$$\Delta = \{(a_1, b_5), (a_3, b_1), (a_4, b_2), (a_5, b_3)\}.$$

Per questo Δ, le etichette finali lasciate dall'algoritmo per il massimo matching sono associate ai nodi a_2, a_4, b_2, pertanto $\{a_1, a_3, a_5, b_2\}$ costituisce una copertura minima degli zeri in matrice. Scegliendo $\varepsilon = \bar{c}_{43} = 1$ ed effettuando il passo di aggiornamento della matrice, si arriva a

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & 6 & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix} \end{array},$$

dalla quale si ricava l' assegnamento ottimo $\Delta^* = \{(a_1, b_5), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_4, b_3), (a_5, b_4)\}$, di costo $c(\Delta) = 13$.

(b) $\Delta^* = \{(a_1, b_1), (a_2, b_4), (a_3, b_2), (a_4, b_5), (a_5, b_3)\}$, $c(\Delta^*) = 24$.

(c) $\Delta^* = \{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_5, b_5)\}$, $c(\Delta^*) = 11$.

(d) $\Delta^* = \{(a_1, b_2), (a_2, b_5), (a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_5, b_3)\}$, $c(\Delta^*) = 9$.

(e) $\Delta^* = \{(a_1, b_4), (a_2, b_5), (a_3, b_1), (a_4, b_3), (a_5, b_2)\}$, $c(\Delta^*) = 13$.

(f) $\Delta^* = \{(a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_3), (a_5, b_5)\}$, $c(\Delta^*) = 14$.

Capitolo 4

Algoritmi esatti per problemi NP-completi

4.1. (a) Volendo utilizzare l'upper bound continuo, è conveniente riordinare gli oggetti per rapporti v_i/p_i non crescenti. L'ordinamento è $(2,3,4,5,1)$. Al nodo radice 0, risulta

$$p_2+p_3+p_4=9<b, \qquad p_2+p_3+p_4+p_5=15>b,$$

e quindi

$$\mathrm{UB}_0=5+9+10+\left\lfloor\frac{3}{6}11\right\rfloor=29.$$

Dal calcolo dell'upper bound si deriva anche immediatamente una soluzione ammissibile $\{2,3,4\}$ che fornisce un lower bound iniziale $\mathrm{LB}=24$. Il branch del nodo 0 avviene sull'oggetto 5, portando a generare i nodi

$$1\,(I_1=\{5\}, i_0=\emptyset) \qquad \text{e} \qquad 2\,(I_1=\emptyset, I_0=\{5\}).$$

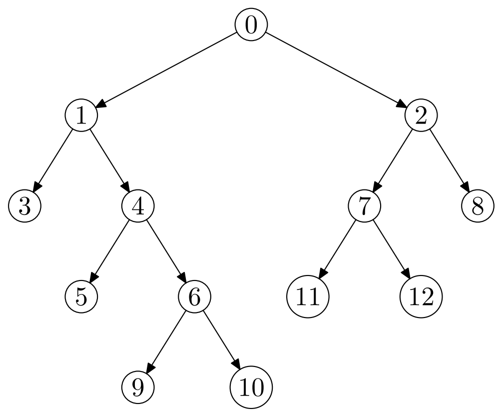
La valutazione dei nodi 1 e 2, tenuto conto degli I_1 ed I_0 associati, produce per 1

$$\mathrm{UB}_1=5+9+10+\left\lfloor\frac{3}{4}7\right\rfloor=29,$$

con soluzione ammissibile derivata $\{2,3,4\}$ che non migliora il LB, e per il nodo 2

$$\mathrm{UB}_2=11+5+9+\left\lfloor\frac{2}{5}10\right\rfloor=29,$$

con soluzione ammissibile derivata $\{2,3,5\}$ di valore $25>LB$, quindi si aggiorna $LB=25$. Continuando lo sviluppo dell'albero effettuando il branch sul nodo aperto con UB massimo, si ottiene l'albero di Figura 4.1. Una soluzione ottima, di valore 26, è $S=\{2,4,5\}$ (incontrata ad esempio al nodo 8).
(b) Soluzione ottima $\{2,3,4\}$, $z=36$.
(c) Soluzione ottima $\{1,2,3\}$, $z=42$.
(d) Soluzione ottima $\{2,3,4\}$, $z=10$.
(e) Soluzione ottima $\{1,2,3,6\}$, $z=31$.
(f) Soluzione ottima $\{1,3,5,6\}$, $z=38$ (banale).



Nodo	I_1	I_0	UB	Note
0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathrm{UB}_0 = 29$	$\mathrm{LB} = 24$
1	$\emptyset$	$\{5\}$	$\mathrm{UB}_1 = 29$	
2	$\{5\}$	$\emptyset$	$\mathrm{UB}_2 = 29$	$\mathrm{LB} = 25$
3	$\emptyset$	$\{1,5\}$	$\mathrm{UB}_3 = 24$	Sol. completa
4	$\{1\}$	$\{5\}$	$\mathrm{UB}_4 = 29$	
5	$\{1\}$	$\{4,5\}$	$\mathrm{UB}_5 = 21$	Sol. completa
6	$\{1,4\}$	$\{5\}$	$\mathrm{UB}_6 = 28$	
7	$\{5\}$	$\{4\}$	$\mathrm{UB}_7 = 28$	
8	$\{4,5\}$	$\emptyset$	$\mathrm{UB}_8 = 26$	Sol. completa, $\mathrm{LB} = 26$
9	$\{1,4\}$	$\{3,5\}$	$\mathrm{UB}_9 = 22$	Sol. completa
10	$\{1,3,4\}$	$\{5\}$	$\mathrm{UB}_{10} = 26$	Sol. completa
11	$\{5\}$	$\{1,4\}$	$\mathrm{UB}_{11} = 25$	Sol. completa
12	$\{1,5\}$	$\{4\}$	$\mathrm{UB}_{12} = 26 \leq \mathrm{LB}$	Nodo chiuso

Figura 4.1: Albero di branch.

4.2. (a) Per $U^0 \leq UB$ risulta, tenendo presente che $\frac{v_{s+1}}{p_{s+1}} \leq \frac{v_s}{p_s}$:

$$U^0 = \sum_{i=1}^{s-1} v_i + \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i}{p_{s+1}} v_{s+1} \leq \sum_{i=1}^{s-1} v_i + \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i}{p_s} v_s = \mathrm{UB}.$$

Per $U_1 \leq UB$, si osservi che

$$\begin{aligned} U^1 - \mathrm{UB} &= v_s - \frac{p_s - \left(b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i\right)}{p_{s-1}} v_{s-1} \\ &= p_s \left(\frac{v_s}{p_s} - \frac{v_{s-1}}{p_{s-1}} \right) + \left(b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i \right) \left(\frac{v_{s-1}}{p_{s-1}} - \frac{v_s}{p_s} \right) \end{aligned}$$

e, poiché $b - \sum_{i=1}^{s-1} p_i \leq p_s$,

$$U^1 - \mathrm{UB} \leq \left(b - \sum_{i=1}^{s-1} p_{s-1} - p_s \right) \left(\frac{v_{s-1}}{p_{s-1}} - \frac{v_s}{p_s} \right) \leq 0.$$

4.3. Il criterio (1) è immediato: se ad un nodo non esiste capacità residua sufficiente a contenere un oggetto i, necessariamente $i \in I_0$ in ogni soluzione ammissibile raggiungibile da quel nodo; questo criterio evita di generare nodo corrispondenti a soluzioni non ammissibili (è bene evitare di generare simili nodi, per l'efficienza della procedura di branch and bound).
Il criterio (2) si può dimostrare nel seguente modo: si supponga per assurdo di avere una soluzione ottima S dove $j \in S$ e $i \notin S$. Allora, sostituendo j con i in S:

$$p(S - j + i) = p(S) - p_j + p_i \leq p(S) \leq b$$

(cioè la nuova soluzione $S - j + i$ è ammissibile), e

$$v(S - j + i) = v(S) - v_j + v_i > v(S),$$

contraddicendo l'ottimalità di S. Questo criterio permette di prendere decisioni su più oggetti ad uno stesso nodo: se j è stato inserito in I_1, occorre inserire anche i; viceversa, se i è stato inserito in I_0, occorre inserirvi anche j.

4.4. (a) Ricordando che allo stato s_k è associato l'ottimo del problema

$$f^*(s_k) = \max\left\{ \sum_{k=1}^{n} v_i x_i \colon \sum_{k=1}^{n} p_i x_i \leq s_k \right\},$$

e la formulazione ricorsiva $f^*(s_k) = \max_d\{f^*(t(d, s_k))\}$, il calcolo delle f^* fornisce:

$$f^*(s_5) = \begin{cases} 0, & 1 \leq s_5 \leq 6, \\ 11, & 7 \leq s_5 \leq 12. \end{cases} \qquad d_5^*(s_5) = \begin{cases} \text{NO}, & 1 \leq s_5 \leq 6, \\ \text{SI}, & 7 \leq s_5 \leq 12. \end{cases}$$

$$f^*(s_4) = \begin{cases} 0, & 1 \leq s_4 \leq 4, \\ 10, & s_4 = 5, \\ 11, & 6 \leq s_4 \leq 10, \\ 21, & 11 \leq s_4 \leq 12. \end{cases} \qquad d_4^*(s_4) = \begin{cases} \text{NO}, & 1 \leq s_4 \leq 5, \\ \text{SI}, & s_4 = 5, \\ \text{NO}, & 6 \leq s_4 \leq 10, \\ \text{SI}, & 11 \leq s_4 \leq 12. \end{cases}$$

$$f^*(s_3) = \begin{cases} 0, & 1 \leq s_3 \leq 2, \\ 9, & 3 \leq s_3 \leq 4, \\ 10, & s_3 = 5, \\ 11, & 6 \leq s_3 \leq 7, \\ 19, & s_3 = 8, \\ 20, & 9 \leq s_3 \leq 10, \\ 21, & 11 \leq s_3 \leq 12. \end{cases} \qquad d^*(s_3) = \begin{cases} \text{NO}, & 1 \leq s_3 \leq 2, \\ \text{SI}, & 3 \leq s_3 \leq 4, \\ \text{NO}, & 5 \leq s_3 \leq 7, \\ \text{SI}, & 8 \leq s_3 \leq 10, \\ \text{NO}, & 11 \leq s_3 \leq 12. \end{cases}$$

$$f^*(s_2) = \begin{cases} 5, & 1 \leq s_2 \leq 2, \\ 9, & s_3 = 3, \\ 14, & 4 \leq s_2 \leq 5 \\ 15, & s_2 = 6, \\ 16, & s_2 = 7, \\ 19, & s_2 = 8, \\ 20, & s_2 = 9 \\ 21, & 10 \leq s_2 \leq 12. \end{cases} \qquad d_2^*(s_2) = \begin{cases} \text{SI}, & 1 \leq s_2 \leq 2, \\ \text{NO}, & s_3 = 3, \\ \text{SI}, & 4 \leq s_2 \leq 7 \\ \text{NO}, & 8 \leq s_2 \leq 9, \\ \text{SI}, & 10 \leq s_2 \leq 12. \end{cases}$$

Infine,

$$f^*(s_1 = 12) = 26, \qquad d_1^*(s_1 = 12) = \text{SI}.$$

Una soluzione ottima è data da $S = \{1, 3, 4\}$, in quanto

$$d_1^*(12) = \text{SI}, \qquad d_2^*(s_2^* = 8) = \text{NO}, \qquad d_3^*(s_3^* = 8) = \text{SI},$$
$$d_4^*(s_4^* = 5) = \text{SI}, \qquad d_5^*(s_5^* = 0) = \text{NO}.$$

4.5. (a) Al nodo radice 0 si risolve il problema di assegnamento per valutare il LB; l'algoritmo ungherese applicato alla matrice (a) termina con la seguente matrice ridotta (in grassetto le celle dell'assegnamento)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \mathbf{0} & 0 & 4 \\ \mathbf{0} & 3 & \infty & \infty & 3 \\ 2 & 0 & \infty & \infty & \mathbf{0} \\ 2 & 1 & 9 & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix} \end{array},$$

ed assegnamento $\{(1,2), (2,3), (3,1), (4,5), (5,4)\}$. Risulta $\text{LB}_0 = 16$. Questo assegnamento *non* è un circuito hamiltoniano in quanto contiene i due sottocircuiti $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ e $\{(4,5), (5,4)\}$. Per limitare il numero di nodi, si esegue l'operazione di branch sugli archi del sottocircuito più piccolo. Si generano quindi i nodi

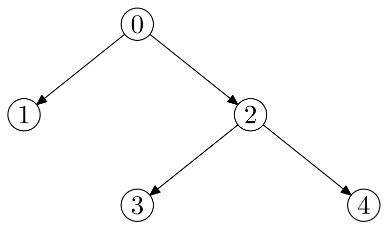
$$1\,(x_{45} = 0) \qquad \text{e} \qquad 2\,(x_{45} = 1, x_{54} = 0),$$

per i quali si considerano rispettivamente le matrici

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 3 \\ 2 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 9 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 9 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Per il nodo 1 si ottiene l'assegnamento $\{(1,5), (2,3), (3,1), (4,2), (5,4)\}$ di costo pari a $\text{LB}_1 = \text{UB1} = \text{LB}_0 + 2 = 18$ (2 è il valore della riduzione applicata alla matrice associata al nodo); questo assegnamento non contiene sottocircuiti (facile verifica), quindi rappresenta la migliore soluzione ammissibile raggiungibile da questo nodo; il nodo viene chiuso per ottimalità, e si pone $\text{UB} = 18$. Al nodo 2 si ottiene l'assegnamento $\{(1,3), (2,4), (3,1), (\mathbf{4}, \mathbf{5}), (5,2)\}$ (costo $\text{LB}_2 = 17$, in grassetto gli archi fissati a 1), che contiene i sottocircuiti $\{(1,3), (3,1)\}$ e $\{(2,4), (4,5), (5,2)\}$. Eseguendo il branch sul sottocircuito più piccolo si ottengono i nodi

$$3\,(x_{45} = 1, x_{54} = 0, x_{13} = 0) \qquad \text{e} \qquad 4\,(x_{45} = 1, x_{54} = 0, x_{13} = 1, x_{31} = 0),$$



Nodo	Assegnamento	LB	Note
0	$\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$	$\mathrm{LB}_0 = 16$	
1	$\{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,4)\}$	$\mathrm{LB}_1 = 18$	Sol. completa, $UB = 18$
2	$\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,5),(5,2)\}$	$\mathrm{LB}_2 = 17$	
3	$\{(1,4),(2,3),(3,1),(4,5),(5,2)\}$	$\mathrm{LB}_3 = 18$	Sol. completa
4	$\{(1,3),(2,4),(3,2),(4,5),(5,1)\}$	$\mathrm{LB}_4 = 21 > UB$	Nodo chiuso

Figura 4.2: Albero di branch per TSP.

con le rispettive matrici

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 8 & \infty \end{pmatrix}
\end{array}
\quad \text{e} \quad
\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ \infty & 3 & \infty \\ 1 & 0 & \infty \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Applicando l'algoritmo ungherese alle due matrici, si ottiene l'assegnamento $\{(1,4),(2,3),(3,1),(\mathbf{4},\mathbf{5}),(5,2)\}$ privo di sottocircuiti e di costo $\mathrm{UB}_1 = 18$ per il nodo 3 (il nodo viene chiuso), e l'assegnamento $\{(\mathbf{1},\mathbf{3}),(2,4),(3,2),(\mathbf{4},\mathbf{5}),(5,1)\}$ di costo $LB_4 = UB_4 = 21$ per il nodo 4. Poiché $LB_4 > UB$, anche il nodo 4 viene chiuso. La soluzione ottima risulta quindi $\{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,4)\}$. L'albero sviluppato è riportato in Figura 4.2.
(b) Soluzione ottima: $\{(1,4),(2,1),(3,5),(4,3),(5,2)\}$, $z = 17$.
(c) Soluzione ottima: $\{(1,3),(2,1),(3,4),(4,5),(5,2)\}$, $z = 22$.
(d) Soluzione ottima: $\{(1,4),(2,3),(3,1),(4,5),(5,2)\}$, $z = 9$.
(e) Soluzione ottima: $\{(1,3),\ (2,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,1)\}$, $z = 9$.

4.6. (a) $y_1 = y_3 = 1$, $x_{11} = x_{21} = x_{23} = x_{41} = 1$, $x_{53} = 1$, $z = 42$.
(b) $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, $x_{11} = x_{22} = x_{31} = x_{42} = x_{53} = x_{63} = 1$, $z = 40$.
(c) $y_2 = 1$, $x_{i2} = 1$, $\forall\, i$, $z = 37$.
(d) $y_1 = y_2 = y_4 = 1$, $x_{14} = x_{22} = x_{31} = x_{41} = x_{52} = x_{61} = 1$, $z = 45$.

4.7. Rilassando i vincoli di assegnamento con moltiplicatori u_i e v_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ si ottiene un rilassamento del tipo

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{n} v_j$$

soggetto a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \leq b$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i,j,$$

che è un problema dello zaino 0/1. Il rilassamento non è quindi risolvibile in tempo polinomiale, ma gli algoritmi di branch and bound noti sono sufficientemente veloci anche per valori significativi di n. Alternativamente, per ottenere un upper bound più velocemente, si può pensare di risolvere il rilassamento continuo di questo problema dello zaino.

Capitolo 5

Algoritmi di approssimazione e tecniche euristiche

5.1. (*a*) L'algoritmo per determinare un MST porta a selezionare i seguenti archi:

$$(2,3),(2,5),(4,5),(1,2).$$

Sull'albero formato da questi archi (Figura 5.1) si può costruire (raddoppiando gli archi) il ciclo euleriano

$$(1,2,5,4,5,2,3,2,1),$$

dal quale eliminando le ripetizioni si ottiene il ciclo hamiltoniano

$$(1,2,5,4,3,1),$$

di costo 22.

(*b*) $(1,4,3,2,5,1)$, costo 28.
(*c*) $(1,3,5,2,4,1)$, costo 32.
(*d*) $(1,3,4,2,5,1)$, costo 26.

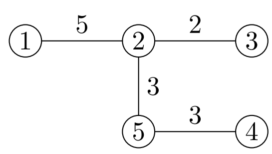


Figura 5.1: Albero ricoprente di costo minimo per l'esercizio 5.1.

5.2. (a) Partendo dal nodo 1, si seleziona l'arco di costo minimo $(1,5)$ ($c_{15} = 2$) come arco del ciclo hamiltoniano. Si analizzano quindi gli archi incidenti su 1 e 5; quello di costo minimo che non crea sottocicli è $(2,5)$ ($c_{25} = 2$), che viene aggiunto al ciclo. Il ciclo è ora $(1,5,2)$. Quindi viene selezionato l'arco $(2,6)$ ($c_{26} = 2$); poi, in sequenza, $(1,3)$, $(3,4)$, $(4,6)$. Il ciclo è quindi $(1,5,2,6,4,3,1)$, di costo $z = 2+2+2+4+4+8 = 22$.

(b) Partendo da 1 si selezionano, nell,ordine: $(1,5)$, $(5,2)$, $(2,6)$, $(4,6)$, $(1,3)$, $(3,4)$; il ciclo risultante è $(1,5,2,6,4,3,1)$, di costo $z = 22$.

(c) Vengono selezionati $(1,2)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,6)$, $(1,4)$; ciclo $(1,2,5,3,6,4,1)$, costo $z = 28$.

(d) Ciclo $(1,4,2,6,3,5,1)$, costo $z = 31$.

5.3. (a) Poiché $\frac{v_1}{p_1} > \frac{v_2}{p_2}$, **KP-greedy** sceglie $S = \{1\}$ alla prima iterazione; questa è anche la soluzione finale prodotta, in quanto $b - p_1 < p_2$. La soluzione ottima è ovviamente $S = \{2\}$. Quindi l'errore relativo dell'euristica è

$$\frac{M-2}{2} \to \infty \qquad (\text{per } M \to \infty).$$

Quindi KP-greedy non ha, in generale, un errore di approssimazione limitato.
(b) Risulta

(a)	$S = \{2,3,4\}$,	$z = 24$,
(b)	$S = \{2,3,4\}$,	$z = 36$,
(c)	$S = \{1,2,3\}$,	$z = 42$,
(d)	$S = \{2,3,4\}$,	$z = 10$,
(e)	$S = \{1,2,4\}$,	$z = 28$,
(f)	$S = \{1,3,5,6\}$,	$z = 39$.

5.4. (a) Si parte da $C = (1,5,2,6,4,3,1)$; il vicinato $N_2(C)$ è costituito da

$$\begin{array}{ll}
C_1 = (1,2,5,6,4,3,1) & z(C_1) = 29, \\
C_2 = (1,6,2,5,4,3,1) & z(C_2) = 23, \\
C_3 = (1,4,6,2,5,3,1) & z(C_3) = 27, \\
C_4 = (1,5,6,2,4,3,1) & z(C_4) = 28, \\
C_5 = (1,5,4,6,2,3,1) & z(C_5) = 29, \\
C_6 = (1,5,3,4,6,2,1) & z(C_6) = 25, \\
C_7 = (1,5,2,4,6,3,1) & z(C_7) = 31, \\
C_8 = (1,5,2,3,4,6,1) & z(C_8) = 30, \\
C_9 = (1,5,2,6,3,4,1) & z(C_8) = 23.
\end{array}$$

La soluzione C risulta localmente ottima.
(b)–(d) Localmente ottime.