# Tracce delle soluzioni

**1.**
Vedi dispense dell'insegnamento.

**2**

Impedenza del parallelo capacità e resistenza $Z_p$:

$$Z_p = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+RCs}$$

Impedenza di trasferimento del tripolo $Z_t$:

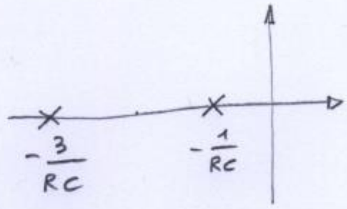
$$Z_t = R + R + \frac{R \cdot R}{Z_p} = 2R + \frac{R^2}{\frac{R}{1+RCs}} = 2R + R(1+RCs)$$

$$G(s) = -\frac{Z_p}{Z_t} = -\frac{\frac{R}{1+RCs}}{2R + R(1+RCs)}$$

1

$$\boxed{G(s) = -\frac{1}{(1+RCs)(3+RCs)}}$$

2 Poli: $-\frac{1}{RC}$, $-\frac{3}{RC}$




$$\text{modi di } \Sigma = \left\{ e^{-\frac{t}{RC}},\ e^{-\frac{3t}{RC}} \right\}$$

3

$$(1+RCs)(3+RCs) = 3 + RCs + 3RCs + (RC)^2 s^2 =$$
$$= (RC)^2 s^2 + 4RCs + 3$$

$$G(s) = \frac{-1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 3}$$

$$\boxed{\text{eq. diff.} \quad (RC)^2 D^2 y + 4RC\, Dy + 3y = -u}$$

**3.**

$$Y(s) = 10 \cdot \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{s+5}$$

Calcolando i residui con le formule usuali otteniamo $k_1 = 1$ , $k_2 = -5$ , $k_3 = 5,\ k_4 = -1$ . Quindi

$$y(t) = 0 \quad \text{per } \ t < 0$$
$$y(t) = 1 - 5e^{-t} + 5e^{-2t} - e^{-5t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

L'ingresso applicato al sistema $u(t) = 1(t)$ (gradino unitario) è una funzione discontinua e l'ordine relativo del sistema è $\rho = 2 \geq 1$. Quindi da una nota proprietà $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}} = \overline{C^{1,\infty}}$ , ovvero il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di $y(t)$ è 1.

**4.**

Vedi appunti dell'insegnamento.

**5.**

1) Sia $L(s) := P_1(s) \cdot P_2(s) = \dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)}$$

$$\left|L(j\omega)\right| = \frac{1}{\omega\left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\omega + arctg\omega = -\frac{\pi}{2} - arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma = 1(-1-1+1) = -1$

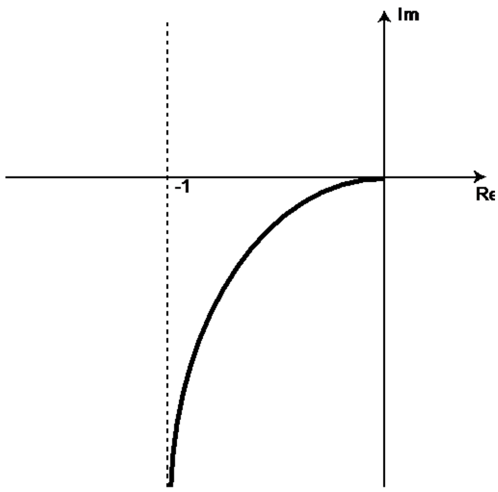
$$\lim_{\omega \to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo
$\lim_{\omega \to \infty} \left|L(j\omega)\right| = 0$

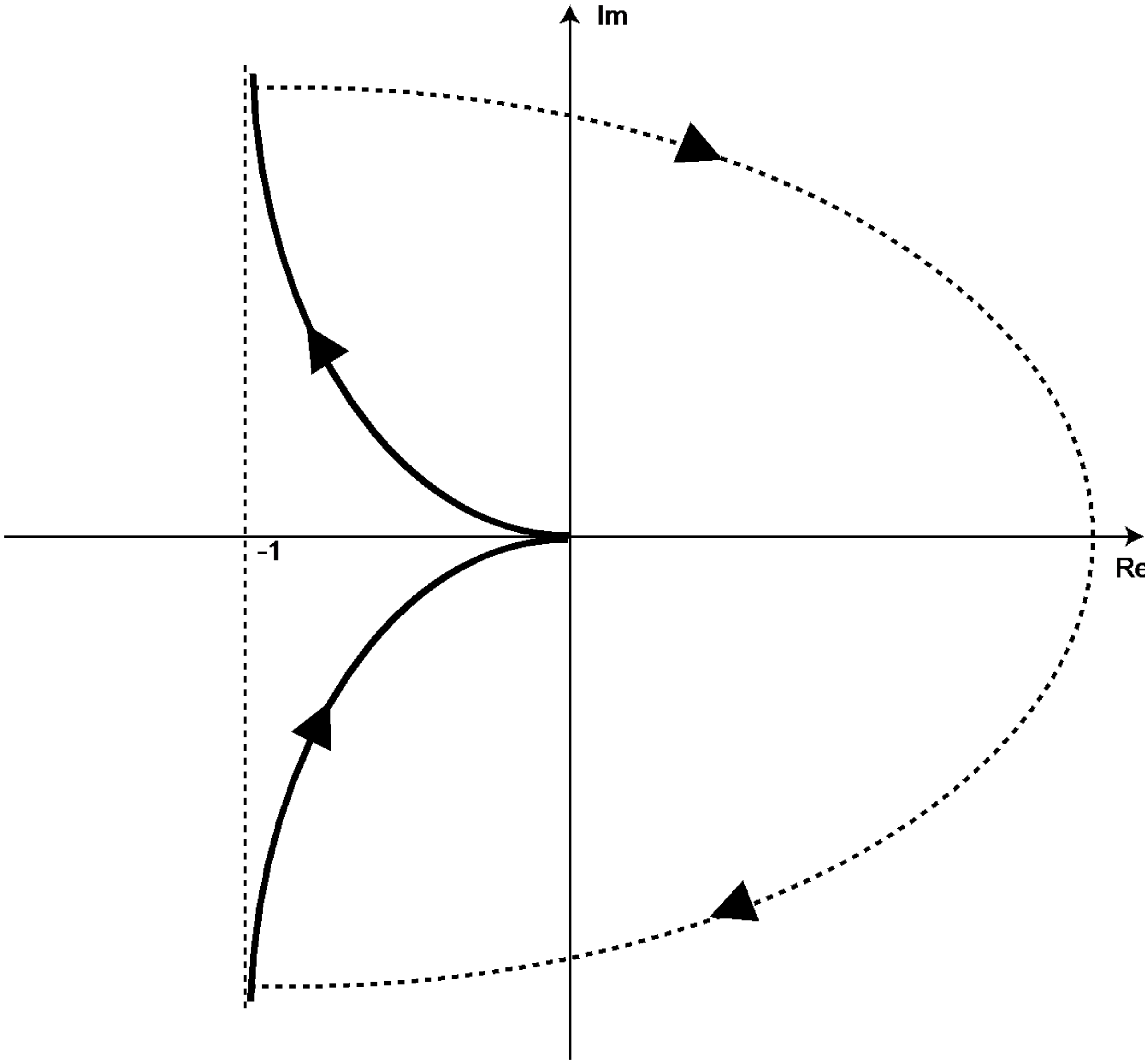
$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Si può subito dedurre che il diagramma polare non presenta intersezioni con l'asse reale.

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:




2) Il diagramma polare completo è:




Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **instabile** poichè il diagramma polare completo non circonda in senso antiorario 1 volta il punto critico -1. (Si ricorda che il guadagno di anello presenta 1 polo a parte reale positiva).

3) $$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)} e^{-j\omega}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\omega - \omega$$

osservando che

$\omega \to 0^+ \qquad e^{-j\omega} \to 1 - j\omega$

L'asintoto verticale ha ascissa

$\sigma = 1[-1-1] = -2$

Si può calcolare la prima intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_p\right) = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - arctg\,\omega_p - \omega_p = -\pi$$

$$arctg\,\omega_p + \omega_p = \frac{\pi}{2}$$

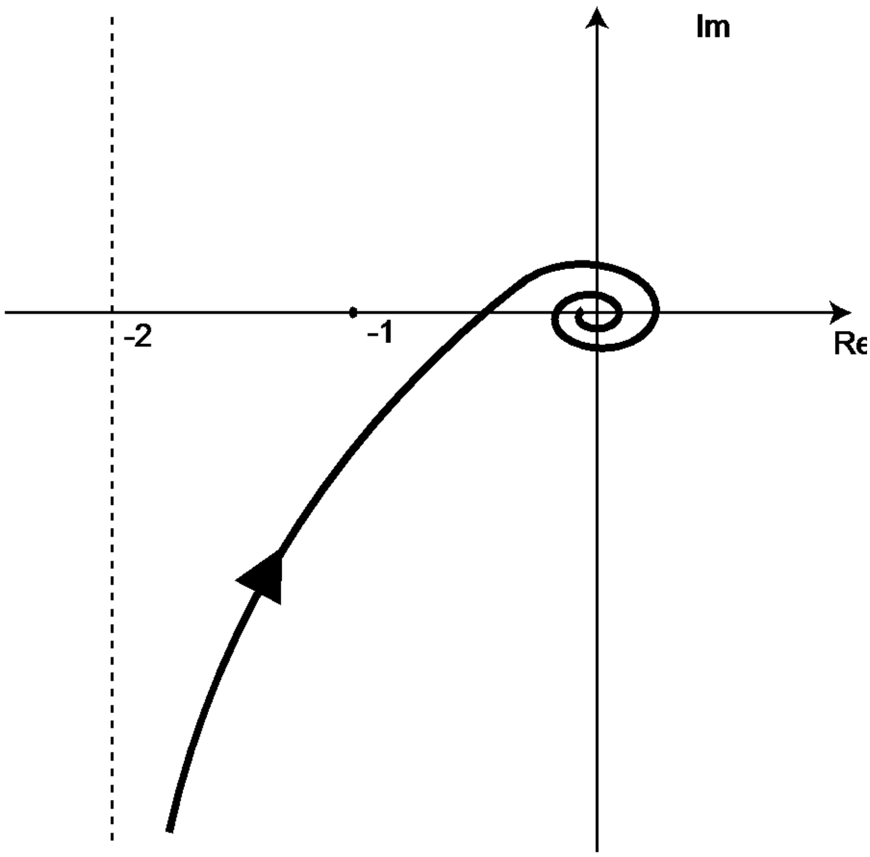
La soluzione a questa equazione può essere ricavata mediante una procedura numerica per tentativi e si ottiene

$$\omega_p \simeq 0.86 rad / \sec$$

$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = \frac{1}{\omega_p\left(1+\omega_p^{\,2}\right)\left(1+\omega_p^{\,2}\right)^{1/2}} \simeq 0.501$$

$$L\left(j\omega_p\right) \simeq -0.501$$

Il diagramma polare del guadagno di anello è del tipo:




Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è ancora **instabile** poiché il d.p.c. non circonda in senso antiorario il punto critico -1+j0.

**6.**
Si noti che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}[-5-5-(1+1)] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

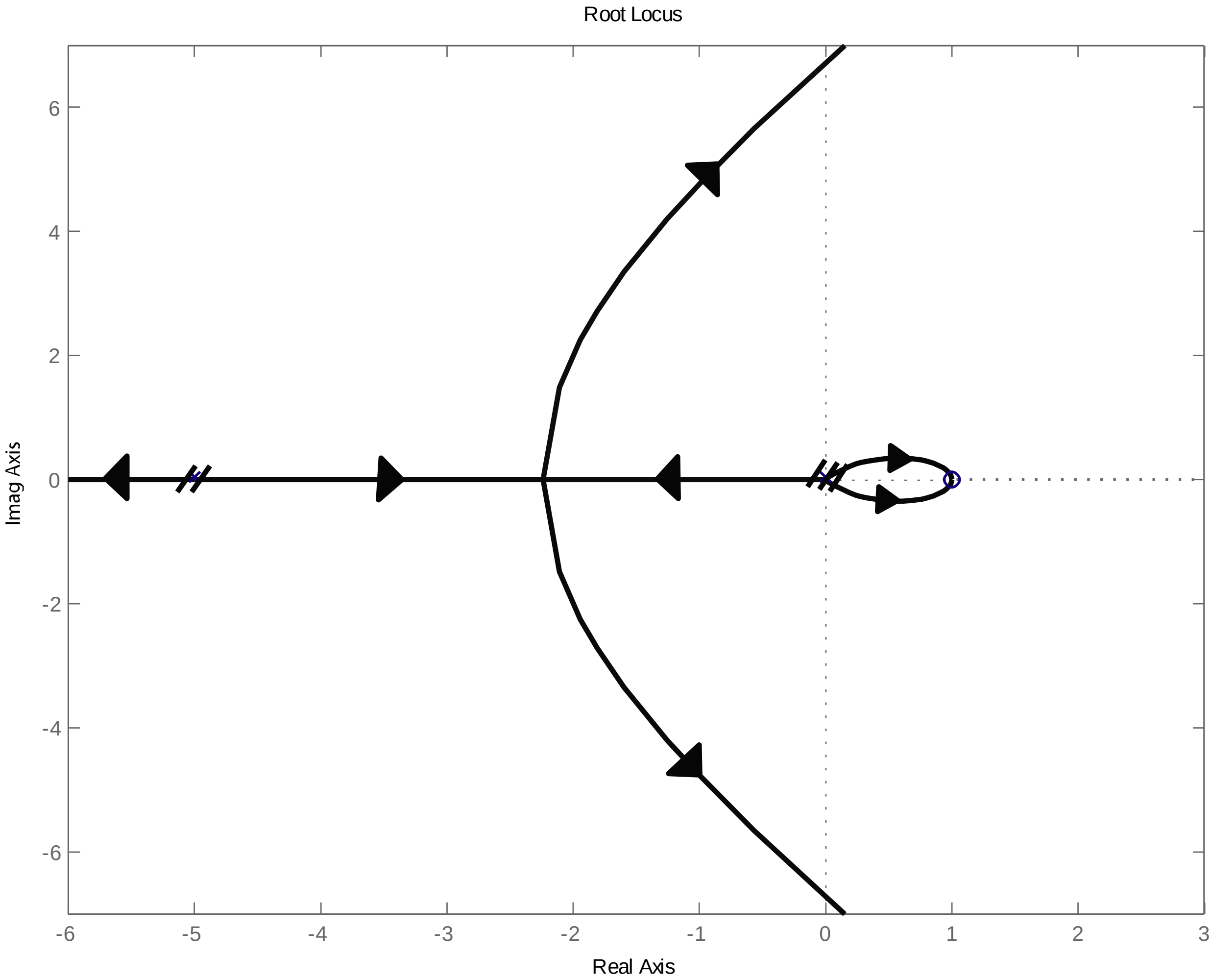
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



**7.**

Per soddisfare la specifica 1 basterebbe un controllore proporzionale (di ordine zero) in quanto nell'impianto è già presente un polo nell'origine. La specifica 2 richiede la presenza di un polo nell'origine per il controllore $C(s)$.

1° tentativo

$$C(s) = K\frac{s+b}{s}, \quad K, b \in \mathbb{R} \Rightarrow L(s) := CP = K\frac{s+b}{s^2(s+1)}$$

eq. caratteristica $\quad 1+L(s)=0, \quad 1+K\frac{s+b}{s^2(s+1)}=0$

$$s^2(s+1)+K(s+b)=0 \qquad s^3+s^2+Ks+Kb=0$$

$$P_c(s) \triangleq s^3+s^2+Ks+Kb$$

$$P_d(s) = \left[(s+1)^2+1\right](s+\alpha) = s^3+(2+\alpha)s^2+(2+2\alpha)s+2\alpha$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 1 = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1$$

il sistema retroazionato risulta instabile!

Conclusione: un controllore di ordine 1 non può soddisfare le specifiche richieste.

2° tentativo

$$C(s) = K\frac{(s+1)(s+b)}{s(s+a)}$$

(per semplificare il progetto si è imposta una cancellazione polo-zero fra $C$ e $P$)

eq. caratteristica $\quad 1+K\frac{s+b}{s^2(s+a)}=0, \quad s^3+as^2+Ks+Kb=0$

$P_c(s) \triangleq s^3+as^2+Ks+Kb$, $P_d(s)$ come sopra e si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} a = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases}$$

Scegliamo $\alpha = 5$ affinché $-1 \pm j$ siano i poli dominanti.

$$\Rightarrow a = 7, \; K = 12, \; b = \frac{5}{6} = 0{,}8\bar{3}$$

$$\boxed{C(s) = 12 \cdot \frac{(s+1)(s+0{,}8\bar{3})}{s(s+7)}}$$

**8.**

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{z}{z-1} \triangleq z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{(z+2)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right|_{z=1} = 4 \qquad c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1 - c_1 = 1 - 4 = -3$$

$$Y(z) = 4\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} - 3\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \quad , k \geq 0$$

$$y(k) = 4 - \frac{3}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4 + 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k) = 4 + 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \; k \geq 0}$$