Problemi di flusso a costo minimo

È data una rete (grafo orientato e connesso) $G = (V, A)$.

$$(i, j) \in A \quad \rightarrow \quad c_{ij},$$

costo di trasporto unitario lungo l'arco (i, j).

$$(i, j) \in A \quad \rightarrow \quad d_{ij},$$

capacità massima di trasporto lungo l'arco (i, j).

$$i \in V \quad \rightarrow \quad b_i \text{ interi}$$

e tali che $\sum_{i \in V} b_i = 0$.

Classificazione nodi

- **Nodi i tali che $b_i > 0$:** sono denominati nodi sorgente; in essi viene "realizzato" il "prodotto" che viaggia attraverso la rete;
- **Nodi i tali che $b_i < 0$:** sono denominati nodi destinazione; in essi viene "consumato" il "prodotto" che viaggia attraverso la rete;
- **Nodi i tali che $b_i = 0$:** sono denominati nodi transito; in essi il "prodotto" che viaggia attraverso la rete si limita a transitare.

Esempio

Rete $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$A = \{(1,2); (1,3); (1,5); (2,3); (3,4); (4,2); (4,5); (5,3)\}$$

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,2)$	$(4,5)$	$(5,3)$
c_{ij}	5	-2	2	-4	0	6	3	4

i	1	2	3	4	5
b_i	2	5	1	-4	-4

$d_{ij} = +\infty$ per ogni arco (i, j).

Il problema di flusso a costo minimo

Il problema consiste nel far giungere il "prodotto" realizzato nei nodi sorgente ai nodi destinazione facendolo viaggiare attraverso la rete e cercando di spendere il meno possibile per il trasporto.

NB: La condizione $\sum_{i \in V} b_i = 0$ garantisce che ciò che viene prodotto nei nodi sorgente è esattamente pari a ciò che viene consumato nei nodi destinazione.

Modello per Esempio 6

Il problema nell'Esempio 6 può essere modellato come problema di flusso a costo minimo dove:

- i nodi del grafo rappresentano i computer;
- gli archi del grafo rappresentano le linee di collegamento tra i diversi computer;
- i valori c_{ij} rappresentano i costi dei collegamenti per Mb al secondo, mentre i valori d_{ij} rappresentano il numero massimo di Mb inviabili nell'unità di tempo.

Risolvere il problema di come instradare i dati nella rete a un costo minimo equivale a risolvere un problema di flusso a costo minimo sulla rete appena descritta.

Nel seguito vedremo una procedura di risoluzione per questo problema sia per il caso a capacità illimitata ($d_{ij} = +\infty$ per ogni arco (i, j)), che per il caso a capacità limitata.

Base

In un problema di flusso su rete a costo minimo una base coincide con un insieme di $\mid V \mid -1$ archi che formano un albero di supporto.

Soluzioni di base

Base $\rightarrow$ Soluzione di base.

Ottenuta ponendo a 0 il flusso su tutti gli archi che non fanno parte della base, ovvero dell'albero di supporto.

Nell'esempio

Con la base $B_0 = \{(1,5),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ si deve porre nullo il flusso lungo gli archi $(1,2),(1,3),(4,2),(5,3)$.

Di conseguenza si deve avere che il flusso lungo l'arco $(1,5)$ è pari a 2 e lungo l'arco $(2,3)$ è pari a 5. Procedendo, si ottiene anche il flusso 6 lungo l'arco $(3,4)$ e il flusso 2 lungo $(4,5)$.

Indicheremo tale soluzione con

$$x_{12} = x_{13} = x_{42} = x_{53} = 0, \quad x_{15} = 2 \quad x_{23} = 5 \quad x_{34} = 6 \quad x_{45} = 2$$

Il costo totale associato a essa è pari a -10.

Ammisibilità e degenerazione

Se i flussi associati agli archi in base hanno valore non negativo, si parla di soluzione di base *ammissibile*.

Se uno o più dei flussi associati agli archi in base sono uguali a 0 si parla di soluzione di base *degenere*.

Nell'esempio la soluzione di base è ammissibile e non degenere.

Coefficienti di costo ridotto

Data una base con relativa soluzione di base ammissibile, ad ogni arco fuori base è associato un *coefficiente di costo ridotto*. Questo misura:

la variazione del valore dell'obiettivo al crescere di un'unità del valore del flusso su un arco fuori base.

Condizione di ottimalità

Se i coefficienti di costo ridotto di *tutti* gli archi fuori base sono non negativi, questo indica che la crescita del flusso su qualsiasi arco fuori base dal suo valore nullo attuale comporta una crescita dell'obiettivo (se il coefficiente è positivo) o nessuna variazione nell'obiettivo (se ha valore nullo). Quindi ...

... in tal caso possiamo concludere che la soluzione di base attuale è soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo.

Inoltre, è soluzione ottima *unica* se tutti i coefficienti di costo ridotto sono strettamente positivi.

Come si calcolano?

- prendere un arco fuori base;
- aggiungere l'arco all'albero di supporto corrispondente alla base attuale;
- considerare l'unico ciclo che si forma con tale aggiunta;
- fissare come verso del ciclo quello dell'arco fuori base;
- calcolare il coefficiente di costo ridotto sommando tra loro tutti i costi relativi agli archi attraversati dal ciclo nel loro stesso verso e sottraendo al risultato i costi degli archi attraversati dal ciclo in senso opposto.

Nell'esempio

Coefficiente di costo ridotto dell'arco $(1,3)$.

Aggiungiamo l'arco $(1,3)$ all'albero di supporto. Si forma il ciclo:

$$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1.$$

Il ciclo attraversa gli archi $(1,3)$, $(3,4)$ e $(4,5)$ nel loro verso, mentre attraversa l'arco $(1,5)$ nel suo verso opposto. Il coefficiente di costo ridotto relativo all'arco $(1,3)$, indicato con $\bar{c}_{13}$, sarà quindi:

$$\bar{c}_{13} = c_{13} + c_{34} + c_{45} - c_{15} = -2 + 0 + 3 - 2 = -1.$$

Essendo negativo questo ci dice immediatamente che non possiamo concludere che la soluzione di base corrente è ottima.

Nell'esempio-continua

Altri coefficienti di costo ridotto:

$$\overline{c}_{42} = 2 \quad \overline{c}_{12} = 2 \quad \overline{c}_{53} = 7.$$

Condizione di illimitatezza

Se l'aggiunta all'albero di supporto/base attuale di un arco fuori base con coefficiente di costo ridotto negativo crea un ciclo orientato, allora il problema di flusso a costo minimo ha obiettivo illimitato.

Dimostrazione

Sia dato un flusso ammissibile $\{\overline{x}_{ij}\}_{(i,j)\in A}$ corrispondente a un certo albero di supporto/base e con valore dell'obiettivo C.

Sia $\overline{c}_{rs} < 0$ il coefficiente di costo ridotto dell'arco fuori base (r, s).

Sia:

$$r \to s \to \ell_1 \to \cdots \ell_t \to r$$

il ciclo orientato creato aggiungendo all'albero di supporto/base attuale l'arco (r, s).

Per ogni $\Delta \geq 0$ il seguente aggiornamento del flusso lungo gli archi del ciclo orientato dà origine a un flusso ancora ammissibile:

$$x_{rs} = \Delta, \quad x_{s\ell_1} = \overline{x}_{s\ell_1} + \Delta, \quad x_{\ell_t r} = \overline{x}_{\ell_t r} + \Delta$$

$$x_{\ell_h,\ell_{h+1}} = \overline{x}_{\ell_h,\ell_{h+1}} + \Delta, \quad h = 1, \ldots, t-1$$

Il valore dell'obiettivo in corrispondenza di questo flusso ammissibile è

$$C + \underbrace{\overline{c}_{rs}}_{<0} \Delta \to -\infty \quad \text{per } \Delta \to +\infty.$$

il che mostra come l'obiettivo diverga a $-\infty$ sulla regione ammissibile.

Cambio di base

Come si procede se le condizioni di ottimalità e illimitatezza non sono soddisfatte?

Si procede a un cambio di base, ovvero:

- scelgo un arco fuori base da inserire nella nuova base;
- scelgo un arco in base per farlo uscire.

Le scelte devono garantire il mantenimento dell'ammissibilità e, possibilmente, il miglioramento (decrescita) del valore dell'obiettivo.

Arco entrante in base

Si deve scegliere uno di quelli con coefficiente di costo ridotto negativo (perché?).

Fisseremo come regola quella di selezionare l'arco a coefficiente di costo ridotto minimo.

Aggiornamento del flusso

- Aggiungere l'arco che si farà entrare in base;
- si forma un ciclo che viene orientato secondo il verso di questo arco;
- si porti a Δ il flusso lungo tale arco;
- si incrementi di Δ il flusso lungo gli archi del ciclo attraversati secondo il proprio verso;
- si decrementi di Δ il flusso lungo gli archi attraversati in verso opposto al proprio.

Mantenimento vincoli di uguaglianza

La procedura appena vista garantisce che il flusso aggiornato in questo modo continui a soddisfare i vincoli relativi alla differenza tra flusso uscente e flusso entrante nei vari nodi.

Variabile uscente dalla base

Se il flusso viene decrementato su uno o più archi, si farà uscire dalla base il primo arco il cui flusso si annulla al crescere di Δ (con scelta arbitraria se questo accade contemporaneamente per più archi).

Indicheremo con $\bar{\Delta}$ il massimo valore che può assumere Δ senza far diventare negativa alcuna delle variabili in base.

Nell'esempio

Arco entrante in base: $(1,3)$.

Aggiornamento flusso:

$$x_{13} = \Delta \quad x_{34} = 6 + \Delta \quad x_{45} = 2 + \Delta \quad x_{15} = 2 - \Delta.$$

Quindi, Δ può crescere fino al valore $\bar{\Delta} = 2$ e l'arco uscente dalla base è $(1,5)$.

La nuova base è $\{(1,3),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ e la nuova soluzione di base è:

$$x_{13} = 2 \quad x_{23} = 5 \quad x_{34} = 8 \quad x_{45} = 4 \quad x_{12} = x_{15} = x_{42} = x_{53} = 0$$

con valore dell'obiettivo $-10 + \overline{c}_{13}\bar{\Delta} = -12$.

Algoritmo del simplesso su rete

Una volta completate le operazioni relative a una base e definita una nuova base l'algoritmo del simplesso su rete ripete le operazioni appena viste sulla nuova base, cioè:

- verifica di ottimalità;
- verifica di illimitatezza;
- cambio di base.

e itera questo procedimento fino a quando arriva ad una base che soddisfi la condizione di ottimalità o quella di illimitatezza.

Nell'esempio

Il calcolo dei coefficienti di costo ridotto per i nuovi archi fuori base porta a questo risultato:

$$\overline{c}_{42} = 2 \;\; \overline{c}_{12} = 3 \;\; \overline{c}_{53} = 7 \;\; \overline{c}_{15} = 1,$$

da cui possiamo concludere che la soluzione di base attuale è l'unica soluzione ottima del nostro problema e quindi il valore ottimo dello stesso è pari a -12.

Nota bene

L'algoritmo del simplesso su rete è un algoritmo di raffinamento locale.

Infatti, a ogni iterazione l'algoritmo cerca di spostarsi da una soluzione a un'altra vicina (con la sostituzione di un solo arco nella base) in modo da migliorare il valore dell'obiettivo.

Problema da risolvere

L'algoritmo del simplesso parte da una base ammissibile iniziale, ma:

- esiste sempre una base ammissibile?
- se esiste, come faccio a trovarla?

A questo si risponde con il metodo due fasi.

Problema di I fase

- aggiungo alla rete un nuovo nodo q;
- collego tale nodo ad ogni nodo $i \in V$ con $b_i < 0$ con un arco (q, i);
- collego tale nodo ad ogni nodo $i \in V$ con $b_i \geq 0$ con un arco (i, q);
- i valori b_i per $i \in V$ sono quelli della rete originaria, mentre $b_q = 0$;
- si pone $c_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A$, $c_{iq} = 1$ per ogni $i \in V$ con $b_i \geq 0$, $c_{qi} = 1$ per ogni $i \in V$ con $b_i < 0$.

Base ammissibile iniziale

Per questo problema si ha immediatamente a disposizione un albero di supporto ammissibile, quello formato da tutti gli archi incidenti su q, con la corrispondente soluzione ammissibile di base:

$$x_{qi} = -b_i \ \ \forall\, i : \ b_i < 0$$
$$x_{iq} = b_i \ \ \forall\, i : \ b_i \geq 0$$

mentre tutte gli altri flussi sono nulli.

Possibile semplificazione

Si possono omettere gli archi che collegano il nodo q con i nodi transito.

In tal caso una base ammissibile iniziale si può ottenere partendo dai soli archi aventi come estremo il nodo q e aggiungendo altri archi (scelti in modo arbitrario) fino a ottenere un albero di supporto.

Cosa ci dice il problema di I fase

A questo punto risolviamo questo problema con il simplesso su rete nel modo già visto in precedenza.

Valore ottimo problema I fase $> 0 \Rightarrow$ il problema originario ha regione ammissibile vuota.

Valore ottimo problema I fase $= 0 \Rightarrow$ il problema originario ha regione ammissibile non vuota.

Inoltre, in tal caso esiste un albero di supporto ottimo che contiene solo uno dei nuovi archi (quelli incidenti su q). Eliminando tale arco si ottiene un albero di supporto (base) ammissibile per il problema originario.

Esempi

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
c_{ij}	2	3	5

i	1	2	2
b_i	1	3	-4

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
c_{ij}	2	4	5

i	1	2	3
b_i	-1	0	1

Capacità limitate sugli archi

Vediamo ora come si procede quando esistono dei limiti di capacità finiti d_{ij} associati agli archi.

Si utilizzerà un approccio simile a quello visto ma con qualche variante.

Risoluzione: una variante del simplesso

Dal punto di vista della risoluzione non potremo più utilizzare l'algoritmo del simplesso come lo abbiamo visto in precedenza ma dovremo utilizzare una sua variante in grado di trattare archi con limitazioni superiori.

Resta del tutto invariata la corrispondenza uno a uno tra basi e alberi di supporto.

Continua

Ciò che cambia è che se in precedenza in corrispondenza di ogni base un arco poteva trovarsi in uno solo tra due possibili stati (*in base* oppure *fuori base*), ora i possibili stati di un arco (i, j) sono tre:

- in base;
- fuori base *a valore nullo* (ovvero $x_{ij} = 0$);
- fuori base *a valore pari al proprio limite superiore* (ovvero $x_{ij} = d_{ij}$).

Notazione

- B insieme degli archi in base;
- N_0 insieme degli archi fuori base con flusso nullo;
- N_1 insieme degli archi fuori base con flusso pari alla capacità.

Soluzione di base

Soluzione di base associata alla tripla (B, N_0, N_1):

è ottenuta ponendo pari a 0 il flusso lungo tutti gli archi in N_0, pari alla capacità il flusso lungo tutti gli archi in N_1 e trovando di conseguenza il flusso lungo tutti gli archi in base.

Una soluzione di base si definisce ammissibile se tutte gli archi in base hanno flusso compreso tra 0 e la propria capacità.

Inoltre, si parlerà di soluzione di base ammissibile non degenere nel caso in cui nessun arco in base abbia flusso pari a 0 o alla propria capacità.

Esempio

Problema di flusso a costo minimo su una rete con 5 nodi con i seguenti valori b_i:

$$b_1 = 8 \quad b_4 = -8 \quad b_2 = b_3 = b_5 = 0$$

e archi aventi i seguenti costi unitari di trasporto e limiti di capacità:

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(5,4)$
c_{ij}	5	2	15	3	2	3	2
d_{ij}	9	7	3	11	2	7	7

Base di partenza

Risolvere l'esempio partendo dalla seguente suddivisione:

$$B^0 = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5)\} \quad N_0^0 = \{(3,4),(5,4)\} \quad N_1^0 = \{(1,4)\}.$$

Soluzione di base

Per ottenere il valore del flusso sugli archi in base imponiamo che il flusso lungo ogni arco fuori base sia pari a 0 (se l'arco è in N_0^0) oppure alla capacità dell'arco (se l'arco è in N_1^0).

Si arriva alla soluzione di base:

$$x_{12} = 5 \quad x_{24} = 5 \quad x_{13} = 0 \quad x_{35} = 0 \quad x_{34} = x_{54} = 0 \quad x_{14} = 3$$

con valore dell'obiettivo pari a $5 \times 5 + 15 \times 3 + 3 \times 5 = 85$.

Tale soluzione di base è ammissibile ed è degenere (gli archi in base $(1,3)$ e $(3,5)$ hanno flusso nullo).

Coefficienti di costo ridotto

Il calcolo si effettua in modo del tutto identico a quanto già visto. In particolare per la base del nostro esempio abbiamo:

$$\overline{c}_{14} = 7 \quad \overline{c}_{34} = -4 \quad \overline{c}_{54} = -1$$

Condizione di ottimalità

Per gli archi fuori base a valore nullo vale il discorso già fatto in precedenza: tra questi quelli il cui flusso conviene far crescere se vogliamo ridurre il valore dell'obiettivo sono quelli a coefficiente di costo ridotto negativo.

La novità è rappresentata dal fatto che per gli archi fuori base con valore pari alla propria capacità non è ovviamente possibile far crescere il flusso (sono, appunto, già al loro limite superiore) ma solo farlo decrescere. Ne consegue che per archi fuori base al proprio limite superiore quelli la cui variazione del flusso (ovvero diminuzione) consente un decremento del valore dell'obiettivo sono quelli con coefficiente di costo ridotto positivo.

Quindi ...

...avremo la seguente condizione di ottimalità: una soluzione di base ammissibile è soluzione ottima del problema se:

- **a)** tutti gli archi in base a flusso nullo hanno coefficiente di costo ridotto non negativo;
- **b)** tutti gli archi fuori base a flusso pari al limite superiore hanno coefficiente di costo ridotto non positivo.

Formalmente:

$$\overline{c}_{ij} \geq 0 \;\; \forall \; (i,j) \in N_0 \quad \overline{c}_{ij} \leq 0 \;\; \forall \; (i,j) \in N_1.$$

e se tutte le disuguaglianze sono strette la soluzione ottima è unica.

Condizione di illimitatezza

Se l'aggiunta all'albero di supporto/base attuale di un arco fuori base con coefficiente di costo ridotto negativo crea un ciclo orientato e tutti gli archi del ciclo hanno capacità pari a ∞, allora il problema di flusso a costo minimo ha obiettivo illimitato.

In particolare, se tutti gli archi hanno capacità finita il problema non può certamente avere obiettivo illimitato e quindi possiamo evitare di verificare la condizione di illimitatezza.

Arco entrante in base

Nel nostro esempio le condizioni di ottimalità e illimitatezza non sono soddisfatte e si dovrà procedere a un cambio di base.

L'arco che si decide di far entrare in base è il più promettente (quello la cui variazione del flusso modifica più rapidamente il valore dell'obiettivo). Questo lo si identifica prendendo quello che fornisce il massimo tra i coefficienti di costo ridotto degli archi fuori base a valore pari al limite superiore e quelli cambiati di segno degli archi fuori base a flusso nullo. Formalmente:

$$(i,j) \in \arg\max\{\max_{(i,j)\in N_1} \bar{c}_{ij}, \max_{(i,j)\in N_0} -\bar{c}_{ij}\}$$

Nel nostro esempio sceglieremo l'arco $(1,4)$.

Arco uscente dalla base

Procedimento simile a quanto visto nel caso senza capacità sugli archi ma con qualche variante.

Se l'arco che decidiamo di far entrare in base è fuori base con flusso nullo, allora si procede esattamente come nel caso senza capacità.

Se l'arco che stiamo cercando di far entrare in base è fuori base con flusso pari al proprio limite superiore si riduce il suo valore da d_{ij} a $d_{ij} - \Delta$ mentre sugli archi del ciclo che si forma con l'aggiunta di tale arco i flussi sono aggiornati secondo regole inverse rispetto a quelle viste in precedenza (il flusso viene diminuito di Δ lungo gli archi attraversati secondo il proprio verso dal ciclo ed incrementato di Δ lungo gli archi attraversati dal ciclo in verso opposto al proprio).

Fino a quanto cresce Δ?

- il flusso di un arco in base si annulla (in tal caso esso uscirà dalla base e diventerà fuori base a valore nullo, cioè passerà in N_0, mentre in B entrerà il nostro arco fuori base);
- il flusso di un arco in base raggiunge il proprio limite superiore (in tal caso esso uscirà dalla base e diventerà fuori base a valore pari al proprio limite superiore, cioè passerà in N_1, mentre in B entrerà il nostro arco fuori base);

- il flusso dell'arco fuori base che stiamo cercando di far entrare in base raggiunge il proprio limite superiore (se era a valore nullo) o si annulla (se era a valore pari al proprio limite superiore): in tal caso la base B non cambia, cambia solamente lo stato dell'arco fuori base che abbiamo tentato di far entrare in base, il quale passa da fuori base a valore nullo a fuori base a valore pari al proprio limite superiore (cioè da N_0 in N_1) o viceversa.

Nell'esempio

Se cerchiamo di far entrare in base $(1, 4)$ abbiamo le seguenti variazioni nei valori dei flussi

$$x_{12} = 5 + \Delta \quad x_{24} = 5 + \Delta \quad x_{13} = 0 \quad x_{35} = 0$$

$$x_{34} = x_{54} = 0 \quad x_{14} = 3 - \Delta$$

con un valore dell'obiettivo pari a $85 - 7\Delta$.

Continua

Si vede che Δ può crescere al massimo fino al valore $\bar{\Delta} = 3$ (in corrispondenza di tale valore il flusso x_{14} si annulla).

Quindi la base non cambia ma cambia lo stato dell'arco $(1, 4)$ che da fuori base al proprio limite superiore passa a fuori base a valore nullo.

La nuova soluzione di base è la seguente:

$$x_{12} = 8 \quad x_{24} = 8 \quad x_{13} = 0 \quad x_{35} = 0 \quad x_{34} = x_{54} = x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a 64. In questo momento abbiamo:

$$B^1 = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5)\} \quad N_0^1 = \{(1,4),(3,4),(5,4)\} \quad N_1^1 = \emptyset.$$

Algoritmo del simplesso

Una volta effettuato un cambio di base (o spostato un arco da N_0 a N_1 o viceversa) i passi dell'agoritmo vengono ripetuti e si procede fino ad arrivare ad una tripla (B^k, N_0^k, N_1^k) che soddisfa la condizione di ottimalità.

Nell'esempio

Coefficienti di costo ridotto (in realtà non essendo cambiata la base essi rimangono identici a prima):

$$\bar{c}_{14} = 7 \quad \bar{c}_{34} = -4 \quad \bar{c}_{54} = -1.$$

Condizione di ottimalità non soddisfatta (i coefficienti di costo ridotto di $(3,4)$ e $(5,4)$, entrambe in N_0, sono negativi).

Continua

Entra in base $(3,4)$. Abbiamo le seguenti variazioni nei valori dei flussi:

$$x_{12} = 8 - \Delta \quad x_{24} = 8 - \Delta \quad x_{13} = \Delta \quad x_{35} = 0$$

$$x_{34} = \Delta \quad x_{54} = x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a $64 - 4\Delta$.

Si vede che Δ può crescere al massimo fino al valore $\bar{\Delta} = 2$ (in corrispondenza di tale valore il flusso x_{34} raggiunge il proprio limite superiore).

Continua

Quindi la base non cambia ma cambia lo stato dell'arco $(3,4)$ che da fuori base a valore nullo passa a fuori base al proprio limite superiore. La nuova soluzione di base è la seguente:

$$x_{12} = 6 \quad x_{24} = 6 \quad x_{13} = 2 \quad x_{35} = 0$$

$$x_{34} = 2 \quad x_{54} = x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a 56.

In questo momento abbiamo:

$$B^2 = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5)\} \quad N_0^2 = \{(1,4),(5,4)\} \quad N_1^2 = \{(3,4)\}.$$

Continua

Iteriamo la nostra procedura.

Coefficienti di costo ridotto (in realtà non essendo cambiata la base essi continuano a rimanere identici a prima):

$$\overline{c}_{14} = 7 \quad \overline{c}_{34} = -4 \quad \overline{c}_{54} = -1.$$

Condizione di ottimalità non soddisfatta.

Continua

Entra in base $(5,4)$.

Se cerchiamo di far entrare in base $(5,4)$ abbiamo le seguenti variazioni nei valori dei flussi

$$x_{12} = 6 - \Delta \quad x_{24} = 6 - \Delta \quad x_{13} = 2 + \Delta$$

$$x_{35} = \Delta \quad x_{54} = \Delta \quad x_{34} = 2 \quad x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a $56 - \Delta$.

Si vede che Δ può crescere al massimo fino al valore $\bar{\Delta} = 5$ (in corrispondenza di tale valore il flusso x_{13} raggiunge il proprio limite superiore).

Continua

Ora la base cambia in quanto in essa l'arco $(1,3)$ viene sostituito dall'arco $(5,4)$.

La nuova soluzione di base è la seguente:

$$x_{12} = 1 \quad x_{54} = 5 \quad x_{13} = 7 \quad x_{35} = 5 \quad x_{34} = 2 \quad x_{24} = 1 \quad x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a 51.

In questo momento abbiamo:

$$B^3 = \{(1,2),(2,4),(5,4),(3,5)\} \;\; N_0^3 = \{(1,4)\} \;\; N_1^3 = \{(1,3),(3,4)\}.$$

Continua

Coefficienti di costo ridotto:

$$\bar{c}_{14} = 7 \quad \bar{c}_{34} = -3 \quad \bar{c}_{13} = -1.$$

Da essi possiamo concludere che la soluzione di base ammissibile attuale è soluzione ottima (unica) del nostro problema.

Soluzione di base ammissibile

Il problema di stabilire se esistono o meno soluzioni ammissibili del problema si risolve con una procedura a due fasi del tutto analoga a quella vista per il problema senza vincoli di capacità sugli archi (nel problema di I fase agli archi incidenti sul nodo aggiuntivo q si assegna capacità infinita, mentre quelli originari mantengono la loro capacità).

Problema di flusso massimo

Si consideri una rete, ovvero un grafo orientato $G = (V, A)$.

Attraverso tale rete si fa viaggiare quello che chiameremo genericamente un *flusso* di "prodotto".

I nodi della rete

Nella rete avremo:

- un nodo *sorgente*, che nel seguito indicheremo con S, da cui il flusso parte;
- un nodo *destinazione*, che nel seguito indicheremo con D, a cui il flusso arriva;
- tutti gli altri nodi vengono detti *intermedi* e sono caratterizzati dal fatto che in essi la quantità di flusso entrante è sempre pari a quella uscente (vincoli di *equilibrio*).

Gli archi (i, j) della rete hanno una *capacità* limitata c_{ij} che rappresenta la quantità massima di flusso che può attraversare tali archi.

Descrizione problema

Vogliamo determinare la quantità massima di flusso che partendo dal nodo sorgente si può far giungere fino al nodo destinazione, tenuto conto dei vincoli di capacità sugli archi e di quelli di equilibrio nei nodi intermedi.

Modello per Esempio 7

Il problema nell'Esempio 7 può essere modellato come problema di flusso massimo dove:

- i nodi del grafo rappresentano i computer;
- gli archi del grafo rappresentano le linee di collegamento tra i diversi computer;
- i valori c_{ij} rappresentano il numero massimo di Mb inviabili nell'unità di tempo.

Risolvere il problema di come instradare i dati nella rete in modo da rendere massimo il numeor di Mb inviati nell'unità di tempo dal computer S al computer D equivale a risolvere un problema di flusso massimo sulla rete appena descritta.

Nel seguito vedremo una procedura di risoluzione per questo problema

Esempio

È data la rete con le seguenti capacità sugli archi:

Arco	Capacità	Arco	Capacità
$(S, 1)$	3	$(2, 3)$	1
$(S, 2)$	2	$(2, 4)$	1
$(1, 3)$	1	$(3, D)$	1
$(1, 4)$	4	$(4, D)$	7

Tagli nella rete

Definizione *Si consideri* $U \subset V$ *con la proprietà che:*

$$S \in U \quad D \notin U.$$

L'insieme di archi

$$\mathcal{S}_U = \{(i,j) \in A \ : \ i \in U, \ j \notin U\},$$

ovvero gli archi con il primo estremo in U *e l'altro al di fuori di* U*, viene detto* taglio *della rete.*

Ad un taglio si associa un *costo* pari alla somma delle capacità degli archi del taglio, cioè:

$$C(\mathcal{S}_U) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_U} c_{ij}.$$

Osservazione

Eliminando tutti gli archi di un taglio dalla rete rendo impossibile raggiungere D a partire da S in quanto ciò equivale ad eliminare tutti gli archi che vanno da U (contenente S) al suo complementare $\overline{U} = V \setminus U$ (contenente D).

Dato un taglio $\mathcal{S}_U$ qualsiasi, il valore del flusso massimo nella rete non può superare quello del costo del taglio.

Infatti, per poter passare dall'insieme di nodi U contenente la sorgente S al suo complementare $\overline{U}$ contenente la destinazione D il flusso può solo passare attraverso gli archi del taglio $\mathcal{S}_U$ e quindi il flusso non può superare la somma delle capacità di tali archi, ovvero il costo del taglio.

Nell'esempio

L'insieme $U = \{S, 1, 2\}$ induce il taglio

$$\mathcal{S}_U = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}.$$

con capacità $C(\mathcal{S}_U) = 1 + 4 + 1 + 1 = 7$.

Quindi il flusso massimo non può superare il valore 7, che è il costo del taglio indotto da $U = \{S, 1, 2\}$.

Problema del taglio a costo minimo

Determinare, tra tutti i tagli possibili all'interno di una rete, quello il cui costo sia il più piccolo possibile, ovvero

$$\min_{U \subset V \ : \ S \in U, \ D \notin U} C(\mathcal{S}_U).$$

NB1: Il problema può anche essere definito come il probelma dell'individuazione del *collo di bottiglia* della rete.

NB2 Si noti che il valore ottimo di questo problema rappresenta una limitazione superiore del valore ottimo del problema di flusso massimo. In realtà ...

... i valori ottimi del problema di flusso massimo e quello di taglio a costo minimo sono uguali tra loro.

Vedremo anche che l'algoritmo con cui risolveremo il problema di flusso massimo ci darà immediatamente anche una soluzione per il problema di taglio a costo minimo.

Archi saturi

Supponiamo di avere un flusso ammissibile:

$$\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x}_{ij})_{(i,j)\in A},$$

ovvero un flusso che soddisfa i vincoli di equilibrio e quelli di capacità degli archi.

Se $\overline{x}_{ij} = c_{ij}$ diremo che l'arco (i,j) è *saturo*.

Cammini privi di archi saturi

Si consideri ora un cammino orientato nella rete dal nodo S al nodo D:

$$S = q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow \cdots \rightarrow q_r \rightarrow q_{r+1} = D,$$

privo di archi saturi, ovvero nessuno degli archi

$$(q_i, q_{i+1}) \in A \quad i = 0, \ldots, r$$

è saturo.

In tal caso il flusso $\overline{\mathbf{X}}$ non è ottimo.

Infatti, posso aumentare il flusso lungo ciascun arco del cammino di una quantità Δ definita nel seguente modo:

$$\Delta = \min_{i=0,\dots,r} \left[c_{q_i q_{i+1}} - \overline{x}_{q_i q_{i+1}} \right] \; > \; 0,$$

senza violare i vincoli di capacità degli archi.

Si noti anche che i vincoli di equilibrio continuano ad essere rispettati in quanto in ogni nodo intermedio del grafo facente parte del cammino si ha che il flusso in entrata aumenta di Δ ma contemporaneamente aumenta di Δ anche quello in uscita.

Esempio

Rete con nodi $V = \{S, 1, 2, D\}$ e archi:

Archi	Capacità
$(S, 1)$	2
$(S, 2)$	2
$(1, 2)$	1
$(1, D)$	2
$(2, D)$	2

Continua

Flusso ammissibile:

$$\overline{x}_{S1} = 1 \quad \overline{x}_{S2} = 1 \quad \overline{x}_{12} = 0 \quad \overline{x}_{1D} = 1 \quad \overline{x}_{2D} = 1$$

Cammino privo di archi saturi:

$$S \to 1 \to 2 \to D$$

$$\Delta = \min\{2-1, 1-0, 2-1\} = 1$$

Aggiornamento flusso:

$$\overline{x}_{S1} = 1{+}1 = 2 \quad \overline{x}_{S2} = 1 \quad \overline{x}_{12} = 0{+}1 = 1 \quad \overline{x}_{1D} = 1 \quad \overline{x}_{2D} = 1{+}1 = 2$$

Nuovo valore del flusso:

$$\overline{x}_{S1} + \overline{x}_{S2} = 3$$

Ma ...

... se non esistono cammini orientati da S a D privi di archi saturi, allora possiamo concludere che il flusso attuale è ottimo?

La risposta è NO.

Grafo associato ad un flusso ammissibile

Definiamo un nuovo grafo orientato $G(\overline{\mathbf{X}}) = (V, A(\overline{\mathbf{X}}))$ detto *grafo associato al flusso* $\overline{\mathbf{X}}$.

Il nuovo grafo ha gli stessi nodi della rete originaria e ha il seguente insieme di archi:

$$A(\overline{\mathbf{X}}) = \underbrace{\{(i,j)\ :\ (i,j) \in A,\ \overline{x}_{ij} < c_{ij}\}}_{A_f(\overline{\mathbf{X}})} \cup \underbrace{\{(i,j)\ :\ (j,i) \in A,\ \overline{x}_{ji} > 0\}}_{A_b(\overline{\mathbf{X}})},$$

ovvero ...

Continua

... $A(\overline{\mathbf{X}})$ contiene tutti gli archi di A non saturi (l'insieme $A_f(\overline{\mathbf{X}})$, detto insieme degli archi *forward*) e tutti gli archi di A lungo cui è stata inviata una quantità positiva di flusso, cambiati però di verso (l'insieme $A_b(\overline{\mathbf{X}})$, detto insieme degli archi *backward*).

Nell'esempio

$$A_f(\overline{\mathbf{X}}) = \{(S,2);(1,D)\}$$

$$A_b(\overline{\mathbf{X}}) = \{(1,S);(2,S);(2,1);(D,1);(D,2)\}$$

Ipotesi

Supponiamo che esista un cammino orientato P da S a D in $G(\overline{\mathbf{X}})$.

Modifichiamo il flusso nel modo seguente. Per ogni arco (i,j) del cammino P si calcoli il seguente valore:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - \overline{x}_{ij} & \text{se } (i,j) \in A_f(\overline{X}) \cap P \\ \overline{x}_{ji} & \text{se } (i,j) \in A_b(\overline{X}) \cap P \end{cases}$$

e quindi sia

$$\Delta = \min_{(i,j)\in P} \alpha_{ij}$$

il minimo di tali valori.

Nell'esempio

Cammino orientato da S a D in $G(\overline{X})$:

$$S \to 2 \to 1 \to D$$

$$\alpha_{S2} = 2 - 1 = 1 \qquad \alpha_{21} = 1 \qquad \alpha_{1D} = 2 - 1 = 1$$

$$\Delta = \min\{1, 1, 1\} = 1$$

Continua

- Per gli archi forward il valore α_{ij} rappresenta quanto flusso posso ancora inviare lungo l'arco $(i,j) \in A$ della rete originaria;
- per gli archi backward il valore α_{ij} rappresenta quanto flusso posso rispedire indietro lungo l'arco $(j,i) \in A$ della rete originaria.

Aggiornamento del flusso

Il flusso viene aggiornato nel modo seguente:

$$\overline{x}_{ij} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} + \Delta & \text{se } (i,j) \in A_f(\overline{\mathbf{X}}) \cap P \\ \overline{x}_{ij} - \Delta & \text{se } (j,i) \in A_b(\overline{\mathbf{X}}) \cap P \\ \overline{x}_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NB: L'aggiornamento del flusso garantisce che questo sia ancora ammissibile, cioè soddisfa i vincoli di non negatività delle variabili, i vincoli di capacità sugli archi e i vincoli di equilibrio nei nodi intermedi.

Quindi ...

... sulla rete originaria incrementiamo di Δ il flusso lungo gli archi corrispondenti ad archi forward del grafo associato al flusso attuale appartenenti al cammino P, rispediamo indietro Δ unità di flusso lungo gli archi che, cambiati di verso, corrispondono ad archi backward del grafo associato appartenenti al cammino P, e quindi decrementiamo il flusso della stessa quantità lungo tali archi. Infine, lungo gli archi che non fanno parte del cammino P il flusso rimane invariato.

Il nuovo flusso è ammissibile e la quantità di flusso uscente da S è anch'essa aumentata proprio della quantità Δ il che dimostra che il flusso precedente non era ottimo.

Nell’esempio

Aggiornamento del flusso:

$\overline{x}_{S1} = 2 \quad \overline{x}_{S2} = 1{+}1 = 2 \quad \overline{x}_{12} = 1{-}1 = 0 \quad \overline{x}_{1D} = 1{+}1 = 2 \quad \overline{x}_{2D} = 2$

Nuovo valore del flusso:

$$\overline{x}_{S1} + \overline{x}_{S2} = 4$$

E se ...

... il grafo $G(\overline{\mathbf{X}})$ non contiene cammini orientati da S a D?

In tal caso possiamo immediatamente concludere che il flusso $\overline{\mathbf{X}}$ è soluzione ottima del problema di flusso massimo.

Nell'esempio

$$A_f(\overline{\mathbf{X}}) = \{(1,2)\}$$

$$A_b(\overline{\mathbf{X}}) = \{(1,S);(2,S);(2,1);(D,1);(D,2)\}$$

Non ci sono cammini orientati da S a D in $G(\overline{\mathbf{X}})$, quindi il flusso attuale è ottimo.

Algoritmo di Ford-Fulkerson

- **Passo 0 - Inizializzazione** È dato un flusso ammissibile iniziale $\overline{\mathbf{X}}$ (si noti che si può sempre partire con il flusso nullo $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$).
- **Passo 1** Si costruisca il grafo $G(\overline{\mathbf{X}})$ associato al flusso attuale $\overline{\mathbf{X}}$.
- **Passo 2** Se non esiste alcun cammino orientato da S a D in $G(\overline{\mathbf{X}})$, allora STOP: il flusso attuale $\overline{X}$ è ottimo. Altrimenti, si individui un tale cammino P e si aggiorni il flusso $\overline{\mathbf{X}}$ come visto in precedenza e si ritorni al Passo 1.

Il taglio minimo

Quando termina l'esecuzione dell'algoritmo di Ford-Fulkerson con la soluzione ottima indicata con $\mathbf{X}^*$, la soluzione ottima del problema di taglio minimo è rappresentata dal sottinsieme di nodi U^* che sono raggiungibili a partire da S con un cammino orientato in $G(\mathbf{X}^*)$.

Nell'esempio si ha $U^* = \{S\}$.

Nota bene

Nello schema visto dell'algoritmo di Ford-Fulkerson dobbiamo chiarire come si stabilisce se in $G(\overline{X})$ esiste un cammino orientato da S a D e, nel caso esista, come determinarlo.

Tutto questo verrà realizzato con la procedura di etichettatura.

La procedura di etichettatura

- **Passo 0** Si parta con un flusso ammissibile $\overline{\mathbf{X}}$. Si noti che è sempre possibile partire con il flusso nullo $\overline{\mathbf{X}} = 0$.
- **Passo 1** Si associ alla sorgente S l'etichetta (S, ∞). L'insieme R dei nodi *analizzati* è vuoto, ovvero $R = \emptyset$, mentre l'insieme E dei nodi *etichettati* contiene il solo nodo S, ovvero $E = \{S\}$.

- **Passo 2** Se $E \setminus R = \emptyset$, il flusso attuale $\overline{\mathbf{X}}$ è ottimo. Altrimenti si selezioni un nodo $i \in E \setminus R$, cioè etichettato, con etichetta (k, Δ), ma non ancora analizzato e lo si analizzi, cioè si compiano le seguenti operazioni: per ogni nodo $j \notin E$, cioè non ancora etichettato, e tale che $(i, j) \in A(\overline{\mathbf{X}})$, si etichetti j con la seguente etichetta:

$$(i, \min(\Delta, c_{ij} - \overline{x}_{ij})) \quad \text{se } (i, j) \in A_f(\overline{\mathbf{X}})$$

$$(i, \min(\Delta, \overline{x}_{ji})) \quad \text{se } (i, j) \in A_b(\overline{\mathbf{X}})$$

  Quindi si ponga:

$$E = E \cup \{j \notin E \ : \ (i, j) \in A(\overline{\mathbf{X}})\} \quad R = R \cup \{i\}.$$

  Se $D \in E$, cioè se la destinazione è stata etichettata, si vada al Passo 3, altrimenti si ripeta il Passo 2.

- **Passo 3** Si ricostruisca un cammino orientato da S a D in $G(\overline{X})$ procedendo a ritroso da D verso S ed usando le prime componenti delle etichette. A questo punto il cammino trovato

$$S \to q_1 \to \cdots \to q_{r-1} \to q_r \to D$$

con insieme di archi

$$P = \{(S, q_1), \ldots, (q_{r-1}, q_r), (q_r, D)\}$$

è un cammino orientato da S a D in $G(\overline{\mathbf{X}})$. Ora possiamo aggiornare $\overline{\mathbf{X}}$ come visto in precedenza, dove il valore Δ è dato dalla seconda componente dell'etichetta del nodo D, e ritornare al Passo 1.

Teorema

Se si pone $U = E$, dove E è l'insieme dei nodi etichettati al momento della terminazione dell'algoritmo, si ha che il taglio $\mathcal{S}_U$ indotto da U è soluzione ottima del problema di taglio minimo e il flusso attuale è soluzione ottima del problema di flusso massimo.

Dimostrazione

Osservazione 1: *Al momento della terminazione dell'algoritmo si ha $S \in E$ (il nodo S viene sempre etichettato al Passo 1) e $D \notin E$ (altrimenti dovremmo andare al Passo 3 ed aggiornare il flusso attuale). Quindi l'insieme E induce effettivamente un taglio.*

Vediamo ora qual è il valore di questo taglio. Se riusciamo a dimostrare che esso coincide con il valore del flusso uscente da S, avendo già osservato che il costo di ogni taglio è non inferiore al valore del flusso massimo, possiamo concludere che esso è il taglio a costo minimo e il flusso attualmente uscente da S è il massimo possibile.

Flusso uscente da S

Questo coincide con tutto il flusso che dai nodi in E viene spostato verso i nodi nel complemento $\overline{E} = V \setminus E$ di E meno il flusso che va in senso opposto, cioè quello dai nodi nel complemento $\overline{E}$ verso i nodi in E

In formule il flusso uscente da S ed entrante in D è quindi pari a:

$$\sum_{(i,j)\ :\ (i,j)\in A,\ i\in E,\ j\in\overline{E}} \overline{x}_{ij} - \sum_{(j,i)\ :\ (j,i)\in A,\ i\in E,\ j\in\overline{E}} \overline{x}_{ji}.$$

Continua

Osservazione 2: *Si deve avere che*

$$\forall\ (i,j) \in A,\ i \in E,\ j \in \overline{E} \quad \overline{x}_{ij} = c_{ij}.$$

Infatti, per assurdo si supponga che esista un $(i_1, j_1) \in A,\ i_1 \in E,\ j_1 \in \overline{E}$ con $\overline{x}_{i_1 j_1} < c_{i_1 j_1}$. In tal caso $(i_1, j_1) \in A_f(\overline{\mathbf{X}})$ e quindi al Passo 2 dovremmo assegnare un'etichetta a j_1, il che contraddice l'ipotesi che $j_1 \notin E$.

Continua

Osservazione 3: *Si deve avere che*

$$\forall\ (j,i) \in A,\ i \in E,\ j \in \overline{E} \quad \overline{x}_{ji} = 0.$$

Infatti, per assurdo si supponga che esista un $(j_1, i_1) \in A,\ i_1 \in E,\ j_1 \in \overline{E}$ con $\overline{x}_{j_1 i_1} > 0$. In tal caso $(i_1, j_1) \in A_b(\overline{\mathbf{X}})$ e quindi al Passo 2 dovremmo assegnare un'etichetta a j_1, il che contraddice ancora l'ipotesi che $j_1 \notin E$.

Quindi ...

... sostituendo i valori trovati nelle Osservazioni 2 e 3 si ottiene che il valore del flusso è pari a

$$\sum_{(i,j)\,:\,(i,j)\in A,\ i\in E,\ j\in \overline{E}} c_{ij} = C(\mathcal{S}_E),$$

cioè è pari al costo del taglio indotto da E, il che conclude la dimostrazione.

Complessità dell'algoritmo

Si può dimostrare che se la scelta del nodi $i \in E \setminus R$ da analizzare viene fatta secondo una disciplina FIFO, cioè i nodi vengono analizzati nello stesso ordine in cui vengono etichettati, allora il numero di operazioni richieste dall'algoritmo è pari a $O(\mid A \mid\mid V \mid^2)$. L'algoritmo ha quindi complessità polinomiale.

Va anche sottolineato come questa non sia la migliore complessità possibile per questo problema. Esistono algoritmi più sofisticati con una complessità pari a $O(\mid V \mid^3)$.

Senza disciplina FIFO

Rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{S, 1, 2, 3, 4, 5, 6, D\}$$

$$A = \{(S,1), (S,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,6), (5,D), (6,D)\}$$

Capacità: tutti gli archi hanno capacità pari a M, tranne l'arco $(3,4)$ che ha capacità pari a 1.

Se come percorso aumentante scelgo alternativamente

$$S \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow D$$

e

$$S \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow D$$

incremento di una sola unità il flusso ad ogni iterazione e il numero di iterazioni è quindi pari a $2M$.

Nota bene

L'algoritmo di Ford-Fulkerson è un algoritmo di raffinamento locale.

Infatti, a ogni iterazione l'algoritmo va a modificare il flusso solo lungo gli archi di una cammino orientato da S a D sul grafo associato al flusso ammissibile attuale, con lo scopo di migliorare il valore dell'obiettivo.