8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k+5) - 0.6y(k+4) - 0.71y(k+3) + 0.24y(k+2) + 0.16y(k+1) = u(k+3) \ .$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

b) Studiare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

a) ordine n di $\Sigma_d = k+5-(k+1) = 4$

grado relativo ρ di $\Sigma_d = k+5-(k+3) = 2$

Sostituzione $k \leftarrow k-5$ (si ottiene l'eq. in forma standard)

$$y(k) - 0.6\,y(k-1) - 0.71\,y(k-2) + 0.24\,y(k-3) + 0.16\,y(k-4) = u(k-2)$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^4 - 0.6\,z^3 - 0.71\,z^2 + 0.24\,z + 0.16} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

b) Si applica il criterio di Jury al pol. $a(z)$

1) $a(1) = 1 - 0.6 - 0.71 + 0.24 + 0.16 = 0.09 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) = a(-1) = 1 + 0.6 - 0.71 - 0.24 + 0.16 = 0.81 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_n$, $0.16 < 1$ ok!

1	0.16	0.24	-0.71	-0.6	1
2	1	-0.6	-0.71	0.24	0.16
3	-0.9744	0.6384	0.5964	-0.336	
4	-0.336	0.5964	0.6384	-0.9744	
5	0.83655936	*	-0.36662976		

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9744 > 0.336$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.83655936 > 0.3666297$ ok!

Tutte le radici di $a(z)$ hanno modulo minore di uno, quindi Σ_d è asintoticamente stabile.

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\text{lib}} = \dfrac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2+1)}$. Determinare l'evoluzione libera dell'uscita $y_{\text{lib}}(k),\ k \geq 0$.

$$Y_{lib} = z \cdot \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2+1)} \triangleq z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-j)(z+j)} = \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z-j} + \frac{\overline{K_2}}{z+j}$$

$$K_{11} = \left.\frac{z}{z^2+1}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$K_2 = \left.\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+j)}\right|_{z=j} = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+j\right)^2} = -\frac{6}{25} + \frac{8}{25}j$$

$$K_{12} + K_2 + \overline{K_2} = 0 \qquad K_{12} = -K_2 - \overline{K_2} = \frac{12}{25}$$

$$Y_{lib} = \frac{2}{5} \cdot \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{12}{25} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}j\right)\frac{z}{z-j} + \left(-\frac{6}{25}-\frac{8}{25}j\right) \cdot \frac{z}{z+j}$$

$$\left|-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}j\right| = \frac{2}{5} \qquad \arg\left(-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}j\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$|j| = 1 \qquad \arg(j) = \frac{\pi}{2}$$

$$y_{lib}(k) = \frac{2}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right), \quad k \geq 0$$

anche esprimibile come

$$y_{lib}(k) = \frac{4}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{12}{25}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{16}{25}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

8. [punti 4,5] Sia dato un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$H(z)=\frac{z^2-z-1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}.$$

a) Determinare l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.
b) Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=k\cdot 1(k)$.

8.

a) $H(z)=\dfrac{z^2-z-1}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}$, quindi l'equazione alle differenze è

$$y(k)-\frac{1}{2}y(k-1)-\frac{1}{2}y(k-2)=u(k)-u(k-1)-u(k-2)$$

b)

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{z^2-z-1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z(z^2-z-1)}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y\cdot z^{-1}=\frac{z^2-z-1}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{c_{1,1}}{(z-1)^3}+\frac{c_{1,2}}{(z-1)^2}+\frac{c_{1,3}}{z-1}+\frac{c_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}}{(z-1)^3}+\frac{\frac{10}{9}}{(z-1)^2}+\frac{-\frac{2}{27}}{z-1}+\frac{\frac{2}{27}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y=-\frac{2}{3}\frac{z}{(z-1)^3}+\frac{10}{9}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2}{27}\frac{z}{z-1}+\frac{2}{27}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(k)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{10}{9}k-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\ge 0$$

$$y(k)=-\frac{1}{3}k^2+\frac{13}{9}k-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\ge 0$$

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\text{lib}} = \dfrac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)}$. Determinare l'evoluzione libera dell'uscita $y_{\text{lib}}(k),\ k \geq 0$.

$$Y = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)(z-1)}$$

$$= \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z+1} + \frac{K_3}{z-1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{1}{(z^2-1)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{\frac{1-4}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{1}{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2(-2)} = \frac{1}{\frac{9}{4}(-2)} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)}\right|_{z=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 2} = \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 2} = 2$$

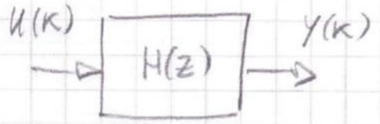
$$K_{12} + K_2 + K_3 = 0 \Rightarrow K_{12} = -K_2 - K_3 = \frac{2}{9} - 2 = \frac{2-18}{9} = -\frac{16}{9}$$

$$y(k) = -\frac{4}{3}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1)$$
$$-\frac{2}{9}(-1)^{k-1} \cdot 1(k-1) + 2 \cdot 1(k-1) \quad , k \geq 0$$

anche esprimibile come

$$y(k) = 2 - 4\delta(k) - \frac{16}{3}k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{9}(-1)^k, \ k \geq 0$$

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z)=\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$.



$$H(z)=\frac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \qquad u(k)=1(k)$$

$$U(z)=\frac{z}{z-1} \qquad Y(z)=H(z)U(z)=\frac{(z^2+z+1)\,z}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y(z)\cdot z^{-1}=\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{c_{11}}{(z-1)^2}+\frac{c_{12}}{z-1}+\frac{c_2}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11}=\left.\frac{z^2+z+1}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=1}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

$$c_2=\left.\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{\,3}}=\frac{1}{3}$$

$$c_{12}+c_2=1 \qquad c_{12}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$Y(z)=2\,\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]=2k\cdot 1(k)+\frac{2}{3}\,1(k)+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$$

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k)+\frac{1}{4}y(k-1)-\frac{1}{8}y(k-2)=u(k)+4u(k-1)+4u(k-2)\ .$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z)=\frac{z^2+4z+4}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}=\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$Y(z)=H(z)\,U(z)=\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=z\cdot\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)}=z\cdot\left(\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z+\frac{1}{2}}+\frac{K_3}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

$$K_1=\left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=1}=8$$

$$K_2=\left.\frac{(z+2)^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=2$$

$$K_1+K_2+K_3=1\ \Rightarrow\ K_3=-9$$

$$Y(z)=8\,\frac{z}{z-1}+2\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}}-9\,\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]=8+2\left(-\frac{1}{2}\right)^k-9\left(\frac{1}{4}\right)^k\ ,\quad k\geq 0$$

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k)-8y(k+2)+16y(k+4)=16u(k+4)+16u(k+1) \ .$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

b) Verificare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

La differenza massima fra gli argomenti della funzione $y(\cdot)$ è 4.
Quindi l'ordine del sistema è $n=4$.
Si effettua la sostituzione $(k-4) \to k$:

$$y(k-4)-8y(k-4+2)+16y(k-4+4)=16u(k-4+4)+16u(k-4+1)$$

$$16y(k)-8y(k-2)+y(k-4)=16u(k)+16u(k-3)$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z)=\frac{16z^4+16z}{16z^4-8z^2+1} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

Per un sistema del 4° ordine il criterio di Jury afferma:
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1) $a(1)>0$: $16-8+1=9>0$ ok!
2) $(-1)^4 a(-1)>0$: $16-8+1=9>0$ ok!
3) $|a_0|<a_4$: $1<16$ ok!
4) $|b_0|>|b_3|$: $255>0$ ok!
5) $|c_0|>|c_2|$: $255^2>255\cdot 120$ ok!

Tabella di Jury

1	1	0	-8	0	16
2	16	0	-8	0	1
3	-255	0	120	0	
4	0	120	0	-255	
5	255^2	0	$-255\cdot 120$		

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 2 \cdot 1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)}$.

6. $u(k) = 2 \cdot 1(k) \qquad U(z) = 2 \cdot \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)} \cdot \frac{2 \cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{(z^2+1)\cdot \cancel{2} \cdot z}{(z+1)^2 \cdot \cancel{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot(z-1)} = \frac{z(z^2+1)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2}$$

$$\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_{31}}{(z+1)^2} + \frac{c_{32}}{z+1}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{\cancel{2}}{\frac{3}{2}\cdot 2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} = -5\cdot\frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$c_{31} = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)} = 2$$

$c_1 + c_2 + c_{32} = 0 \qquad c_{32} = -c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{10}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{z}{(z+1)^2} + 3\,\frac{z}{z+1}$$

$$y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2\cdot k\cdot(-1)^{k-1} + 3\cdot(-1)^k, \quad k \geq 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\cdot k\cdot(-1)^k + 3\cdot(-1)^k, \quad k \geq 0$$

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, con ingresso u ed uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-2) + 0.06y(k-4) = u(k-1) \ .$$

a) Determinarne la funzione di trasferimento.
b) Verificarne la stabilità asintotica applicando il criterio di Jury.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0.5z^2 + 0.06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0.5 z^2 + 0.06$

Si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $a(1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $a(-1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0.06 < 1$ ok!

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9964 > 0$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.99281 > 0.4683$ ok!

Tabella di Jury

1	0.06	0	-0.5	0	1
2	1	0	-0.5	0	0.06
3	-0.9964	0	0.47	0	
4	0	0.47	0	-0.9964	
5	0.99281	*	-0.4683		

Tutte le disequaglianze di Jury sono soddisfatte e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k)-\frac{1}{4}y(k-2)=u(k)+u(k-2)\ .$$

La funzione di trasferimento è $H(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}}=\dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{z}{z-1}=z\cdot A(z)$$

$$A(z)=\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{C_1}{z-1}+\frac{C_2}{z+\frac{1}{2}}+\frac{C_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$C_1=\left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1}=\frac{8}{3}\qquad C_2=\left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}$$

$$C_3=\left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{5}{2}$$

$$Y(z)=\frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{5}{6}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k)=\frac{8}{3}+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k\ ,\quad k\geq 0}$$

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k)+y(k-1)+\frac{1}{4}y(k-2)=u(k)+4u(k-1)+4u(k-2)\ .$$

La funzione di trasferimento è $H(z)=\dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}}=\dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{z}{z-1}\stackrel{\Delta}{=}z\cdot A(z)$$

$$A(z)=\frac{(z+2)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{2})^2}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_{21}}{(z+\frac{1}{2})^2}+\frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1=\left.\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right|_{z=1}=4 \qquad c_{21}=\left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}$$

$$c_1+c_{22}=1 \Rightarrow c_{22}=1-c_1=1-4=-3$$

$$Y(z)=4\frac{z}{z-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2}-3\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\ ,\ k\geq 0$$

$$y(k)=4-\frac{3}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k=$$

$$=4+3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k)=4+3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\geq 0}$$

8. **[punti 4,5]** Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$y(k)+0.5y(k-1)+0.5y(k-2)+0.5y(k-3)=u(k-3)$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita) se ne studi la stabilità alle perturbazioni.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z)=\frac{1}{z^3+0.5z^2+0.5z+0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3+0.5z^2+0.5z+0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1)>0$ ok!

2) $(-1)^3 a(-1)>0$

$$(-1)(-1+\cancel{0.5}-\cancel{0.5}+0.5)>0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0|<a_n$

$$|0.5|<1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0|>|b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	-0.75	*	-0.25	

$$|-0.75|>|-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$ (rampa unitaria) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

$$\mathcal{Z}\left[k \cdot 1(k) \right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k) \right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 + z + \frac{1}{4}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)^2}$$

$$Y_1(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = \frac{3^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$$

$$c_{12} + c_{22} = 0$$

$$C_{12} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right]_{|z=1} =$$

$$= \frac{2(z+2)(z+\frac{1}{2})^2 - (z+2)^2 2(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^4}\Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot(\frac{3}{2})^2 - (3)^2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\frac{3^2}{2^2} - 3^2\cdot 3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{3^3}{2} - 3^3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{3}{2^4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{2^{\cancel{4}\,3}}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$C_{22} = -C_{12} = \frac{8}{3}$$

$$Y(z) = 4\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4k - \frac{8}{3} - 2k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, con ingresso u ed uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-2) + 0.5y(k-3) + 0.06y(k-4) = u(k-1)\ .$$

a) Determinarne la funzione di trasferimento.

b) Verificarne la stabilità asintotica applicando il criterio di Jury.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0{,}5\,z^2 + 0{,}5\,z + 0{,}06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0{,}5\,z^2 + 0{,}5\,z + 0{,}06$

Si applica il criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $1 - 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}06 = 1{,}06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $1 - 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}06 = 0{,}06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0{,}06 < 1$ ok!

Tabella di Jury

1	0,06	0,5	−0,5	0	1
2	1	0	−0,5	0,5	0,06
3	−0,9964	0,03	0,47	−0,5	
4	−0,5	0,47	0,03	−0,9964	
5	0,7428	*	0,2051		

4) $|b_0| > |b_3|$ $\quad |-0{,}9964| > |-0{,}5|$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$ $\quad |0{,}7428| > |0{,}2051|$ ok!

Tutte le disuguaglianze sono soddisfatte: il sistema è asintoticamente stabile.