SOLUZIONI – 1° turno
Parte A

1) $\{\text{modi di }\Sigma\} = \{e^t \sin(4t+\varphi_1),\ te^t \sin(4t+\varphi_2),\ t^2 e^t \sin(4t+\varphi_3)\}$

2) $G_1(s) = \dfrac{1-2s}{1+2s}$

3)
a) Σ è asintoticamente stabile: F
b) Σ è semplicemente stabile: V
c) Σ è instabile: F
d) Σ è a fase minima: V
e) Σ è stabile ingresso-limitato uscita limitata: F

4) $y(t) = \dfrac{15}{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

5) $\delta = 1/2$ $\omega_n = 3$ rad/s

6) $\sigma_a = -5$

7) $f(t) = \dfrac{1}{2} t^2 e^{-2t}$

8) $g_s(t) = \dfrac{3}{2} t^2 \cdot 1(t)$

9) $g(t) = e^{-2t} \cdot 1(t)$

10)
a) $\sigma_a = -4$.
b) F

11) $\mathcal{Z}[x(k-4)] = z^{-4}\mathcal{Z}[x(k)] + x(-4) + x(-3)z^{-1} + x(-2)z^{-2} + x(-1)z^{-3}$

12) $\mathcal{Z}[k2^k] = \frac{2z}{(z-2)^2}$

13) $C_d(z) = \frac{0.1}{z-1}$

14) a) $H(1) = 2$
b) $h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1)$

15) $2cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

16)
a) $T_a = 0.5$ sec.
b) $S = 0\%$

17) $n_+(a) = 2$ $n_-(a) = 1$ $n_0(a) = 0$

18) Rete ritardatrice, $\tau = 5$ sec., $\alpha = 0.1$

Parte B

1.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b.1) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2 X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

b.2) In alternativa, operando nel dominio del tempo si ottiene

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - K x_1 + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -b(D x_2 - D x_1) - K x_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (m D^2 + bD + K) x_1 - f = bD x_2 \\ bD x_1 = (m D^2 + bD + K) x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (m D^2 + bD + K)^2 x_1 - (m D^2 + bD + K) f = (bD)(m D^2 + bD + K) x_2 \\ (bD)^2 x_1 = (bD)(m D^2 + bD + K) x_2 \end{cases}$$

PRENDENDO LA DIFFERENZA DELLE 2 EQ.:

$$(m D^2 + bD + K)^2 x_1 - (m D^2 + bD + K) f = (bD)^2 x_1 \iff$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + 2 m K D^2 x_1 + 2 b K D x_1 + K^2 x_1 = m D^2 f + bD f + K f$$

DA CUI SI OTTIENE:

$$\boxed{G(s) := \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m s^2 + b s + K}{m^2 s^4 + 2 m b s^3 + 2 m K s^2 + 2 b K s + K^2}}$$

2.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{s^2 (s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4(s+1)^{3}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \Rightarrow K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1) \left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + 2t^2 e^{-t} + 6te^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

Parte C

3.

1)

$$L(j\omega) = \frac{5(1+j\omega)^2}{(j\omega)^3\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{5(1+\omega^2)}{\omega^3\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)^{1/2}}$$

$$arg\,L\,(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to 0+}\left|L(j\omega)\right| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Data la presenza del polo triplo nell'origine, il d.p. parte adiacente ad un ramo della cubica di equazione $y^2 = -\frac{1}{k\tau_a^3}x^3$dove $k = 5, \tau_a = 1 + 1 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10}$. Inoltre, essendo il termine $-\frac{1}{k\tau_a^3} < 0$, il diagramma polare parte dal secondo quadrante.

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega = -\pi$$

$$-arctg0.1\omega + 2arctg\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\omega)\cdot 0.1\omega = 0$$

$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2}\cdot\frac{\omega}{10} = 0$$

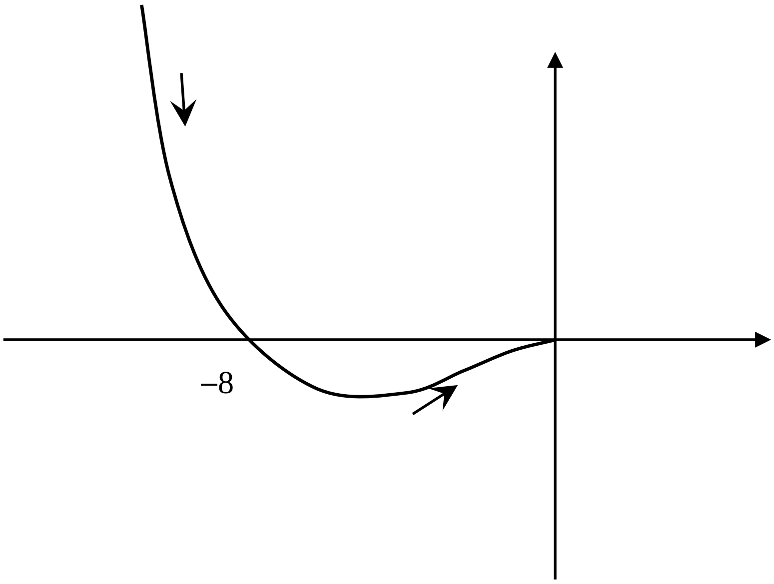
$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

$$\left|L(j\omega_p)\right| = 8$$

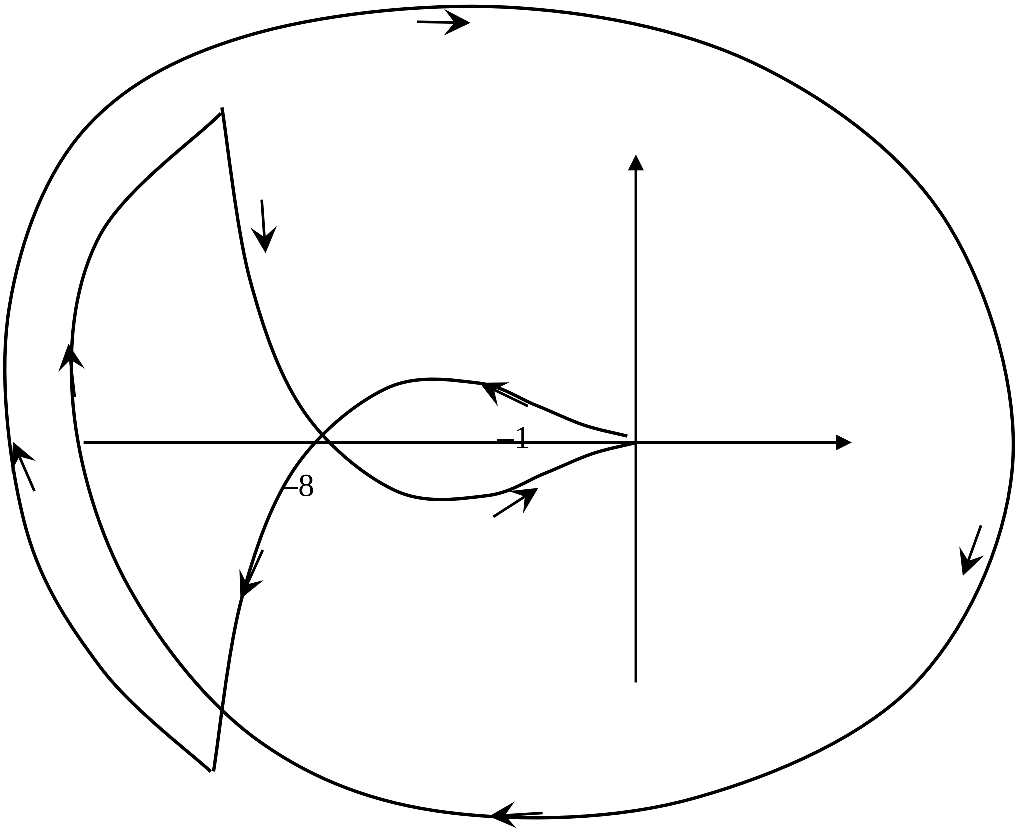
$$L(j\omega_p) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:

4.



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

4.

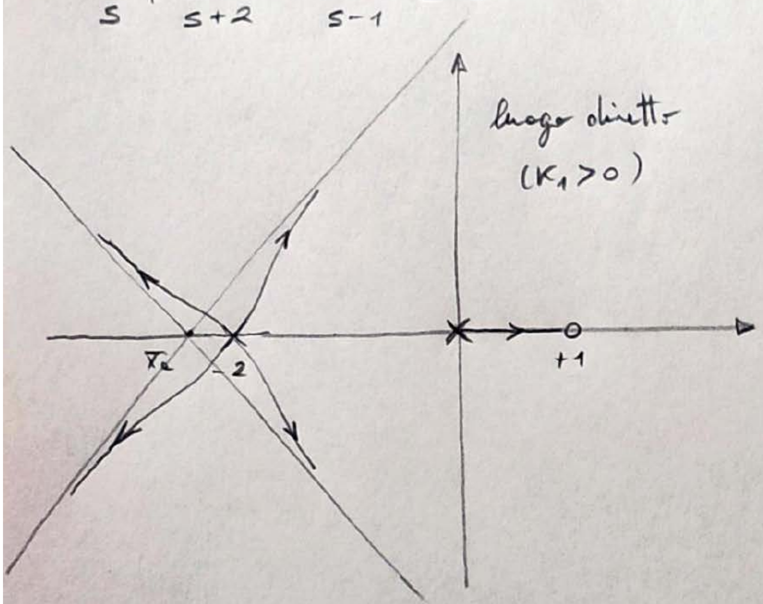
Luogo delle radici di $1 + K_1 \dfrac{s-1}{s(s+2)^4} = 0$

Sono presenti 4 asintoti con centro in $\sigma_a = \dfrac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{n-m} = \dfrac{-8-(1)}{4}$

$= -2.25$

Calcolo delle radici doppie

$$\frac{1}{s} + \frac{4}{s+2} - \frac{1}{s-1} = 0 \qquad 4s^2 - 5s - 2 = 0 \qquad s_{1,2} = \begin{cases} -0.3187 \\ +1.5687 \end{cases}$$

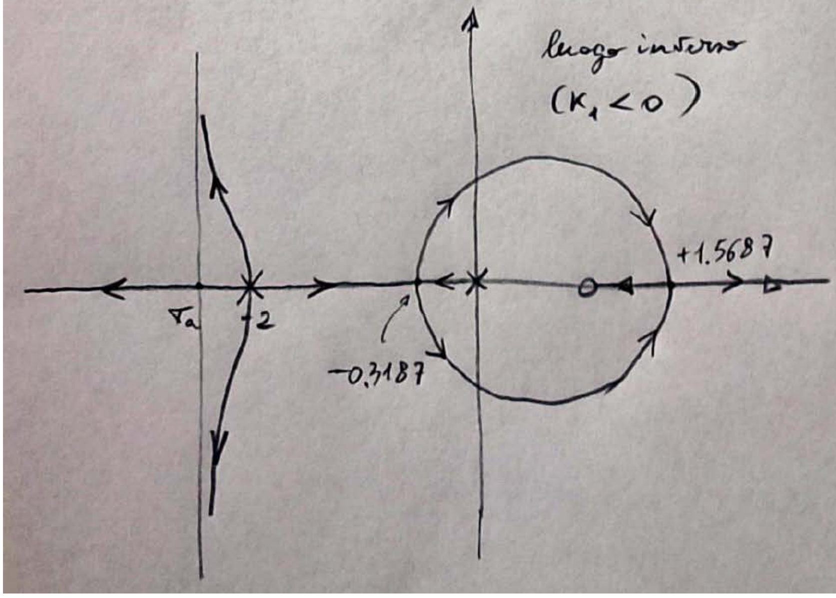


angoli di partenza da -2:

$4\varphi = \pi + (\cancel{\pi}) - (\cancel{\pi}) \mod 2\pi$

$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4} \quad \varphi_2 = -\dfrac{\pi}{4}$

$\varphi_3 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\ , \ \varphi_4 = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}$



angoli di partenza da -2:

$4\varphi = (\cancel{\pi}) - (\cancel{\pi}) \mod 2\pi$

$\varphi_1 = 0$

$\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$

$\varphi_3 = -\dfrac{\pi}{2}$

$\varphi_4 = \pi$

Parte D

5.

3) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4 b_0}{9 \cdot 2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4 b_2 s^2 + 4 b_1 s + 72 = 0$$

$$s^3 + (2 + 4 b_2) s^2 + (9 + 4 b_1) s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4b_2)s^2 + (9 + 4b_1)s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s+2-j)(s+2+j)(s+c)$$

dove $c >> 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+c) =$$
$$= (s^2+4s+5)(s+c) =$$
$$= s^3+4s^2+5s+$$
$$+cs^2+4cs+5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3+(4+c)s^2+(5+4c)s+5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_\varepsilon(s)$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 9+4b_1 = 5+4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4+72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2+17s+18}{s^2+9}}$$

$$C(s) = 5\,\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F:

$$T_{ry}(s) = F\cdot\frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Imponiamo $T_{ry}(0) = 1$

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad k_p = L(0) = 4$$

$$F\,\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$

6.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \to k$.
L'eq. diventa

$$16\,y(k) - 12\,y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\,u(k-2) + 16\,u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16z + 16}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16z^3 - 12z^2 + 1$.

$$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
$-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	0	-12	16
2	16	-12	0	1
3	-255	192	-12	

Dall'ultima riga della tabella otteniamo una questa condizione

4. $|-255| > |-12|$ OK!

Quindi per il criterio di Jury il sistema è asintoticamente stabile.