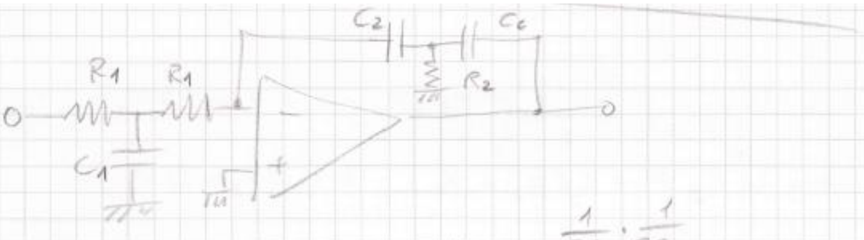
Tracce delle soluzioni

1.

1)



$$G(s) = -\frac{Z_{t,f}}{Z_{t,i}} = -\frac{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\frac{1}{C_2 s}\cdot\frac{1}{C_2 s}}{R_2}}{R_1 + R_1 + \frac{R_1^2}{\frac{1}{C_1 s}}}$$

$$= -\frac{\frac{2}{C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_2^2 s^2}}{2R_1 + R_1^2 C_1 s} = -\frac{\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_2 C_2^2 s^2}}{R_1(2 + R_1 C_1 s)}$$

$$= -\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)}$$

2) zeri: $z_1 = -\frac{1}{2R_2 C_2}$ poli: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -\frac{2}{R_1 C_1}$

modi $= \left\{1, t, \exp\left\{-\frac{2}{R_1 C_1}\right\}\right\}$

3) $$G(s) = -\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)} = \frac{-2R_2 C_2 s - 1}{R_1^2 R_2 C_1 C_2^2 s^3 + 2R_1 R_2 C_2^2 s^2}$$

eq. differenziale

$$R_1^2 R_2 C_1 C_2^2 D^3 y(t) + 2R_1 R_2 C_2^2 D^2 y(t) = -2R_2 C_2 D u(t) - u(t)$$

2.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

$$G(s) = \frac{k}{s\left[m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & m^2 & b^2 + 2 m k & 0 \\ 2 & \cancel{2} m \cancel{b} & \cancel{2} b k & 0 \\ 1 & \dfrac{\underbrace{b^2 m + 2 m^2 k - k m^2}}{b^2 m + m^2 k} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il criterio di Routh il polinomio $m^2 s^3 + 2mbs^2 + (b^2 + 2mk)s + 2bk$ è hurwitziano. Quindi Σ ha un polo semplice nell'origine ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il teorema sulla stabilità alle perturbazioni Σ è SEMPLICEMENTE STABILE.

3.
Vedi dispense dell’insegnamento.

4.

Eq. differenziale: $D^3 y + 4D^2 y + 8Dy + 9y = 3D^2 u + Du + 7u$

$$\mathfrak{B} := \left\{ (u,y) \in PC^\infty \times PC^\infty : \; D^{*3} y + 4D^{*2} y + 8D^* y + 9y = 3D^{*2} u + D^* u + 7u \right\}$$

$D^* \equiv$ operatore della derivata generalizzata

Le relazioni fra i valori al tempo $0-$

$y_-,\ Dy_-,\ D^2 y_-\ ;\ u_-,\ Du_-$

ed i valori al tempo $0+$

$y_+,\ Dy_+,\ D^2 y_+\ ;\ u_+,\ Du_+$

sono deducibili uguagliando le espressioni impulsive dell’eq. differenziale generalizzata al tempo $t = 0$.

∘ ∘ ∘ ∘

$$\begin{cases} y_+ = y_- \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dy_+ - Dy_- \\ D^2 y_+ - D^2 y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix} \end{cases}$$

5.

$$U(s) = \frac{3}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{4s^2+2s+1}{s^2+3s+2} \cdot \frac{3}{s^2} = \frac{3(4s^2+2s+1)}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{3(4s^2+2s+1)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{3}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{3(4s^2+2s+1)}{s^2(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{3(3)}{1} = 9$$

$$K_3 = \left.\frac{3(4s^2+2s+1)}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{3(16-4+1)}{4(-1)} = \frac{3 \cdot 13}{-4} = -\frac{39}{4}$$

$$K_{12} + K_2 + K_3 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 - K_3 = -9 + \frac{39}{4} = \frac{-36+39}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} + 9e^{-t} - \frac{39}{4}e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Il grado relativo di $G(s)$ è zero e il grado minimo di continuità dell'ingresso è zero. Quindi dalla proprietà

$$u \in \overline{C}^{p,\infty} \iff y \in \overline{C}^{p+\rho,\infty} \qquad (p=0 \text{ e } \rho=0)$$

segue che l'uscita ha grado minimo di continuità uguale a zero ($y(t)$ è continua su $\mathbb{R}$ mentre $y^{(1)}(t)$ è discontinua su $\mathbb{R}$).

6.

$$P(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{s(s+1)^2(s+2)} \qquad 1 + K\frac{s^2-3s+2}{s(s^2+2s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^3+2s^2+s)(s+2) + Ks^2 - 3Ks + 2K = 0$$

$$s^4+2s^3+s^2+2s^3+4s^2+2s+Ks^2-3Ks+2K=0$$

$$s^4+4s^3+(5+K)s^2+(2-3K)s+2K=0$$

4	1	$5+K$	$2K$	0
3	4	$2-3K$	0	0
2	α	$8K$	0	
1	β	0		
0	$8K$			

$$\alpha = 4(5+K)-2+3K = 20+4K-2+3K = 18+7K$$

$$\beta = (18+7K)(2-3K) - 32K = 36+14K-54K-21K^2-32K = -21K^2-72K+36$$

Per il criterio di Routh, la stabilità asintotica del sistema retroazionato è associata alle condizioni: $\alpha>0$, $\beta>0$, $8K>0$.

Se $K>0 \Rightarrow \alpha>0$

$\beta>0$, $\quad -7K^2-24K+12>0 \qquad K_{1,2} = \dfrac{12\pm\sqrt{228}}{-7}$ $= -3.8714$, $= 0.4428$

$$K \in \left(-\frac{12+2\sqrt{57}}{7}, \frac{-12+2\sqrt{57}}{7}\right)$$

La soluzione è quindi

$$K \in \left(0, \frac{-12+2\sqrt{57}}{7}\right) \simeq (0, 0.4428)$$