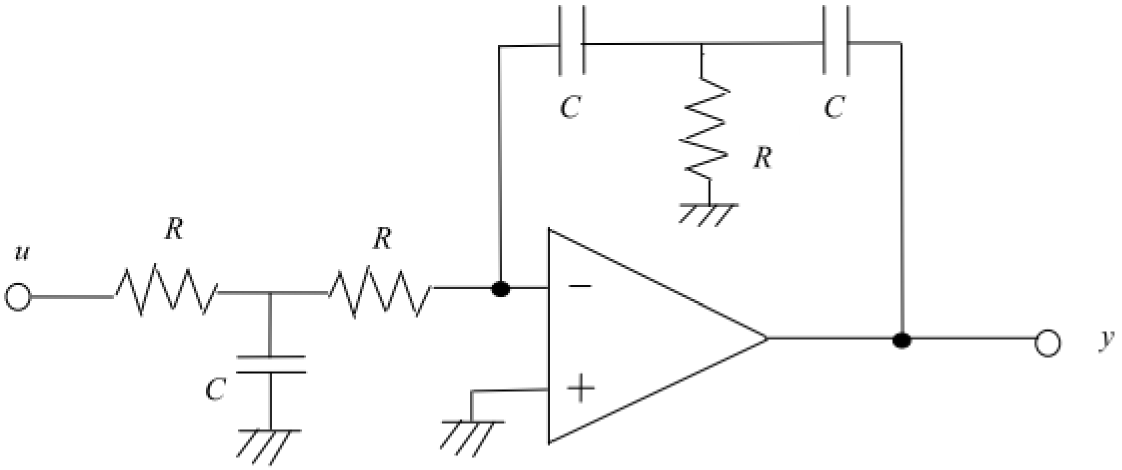
2. [punti 4] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

2.

1.

$$G(s) = -\frac{Z_{tf}}{Z_{ti}}$$

$$Z_{tf} = \frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + \frac{\frac{1}{sC} \cdot \frac{1}{sC}}{R} = \frac{1+2RCs}{RC^2 s^2}$$

$$Z_{ti} = R + R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}} = R\left(2 + RCs\right)$$

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)}$$

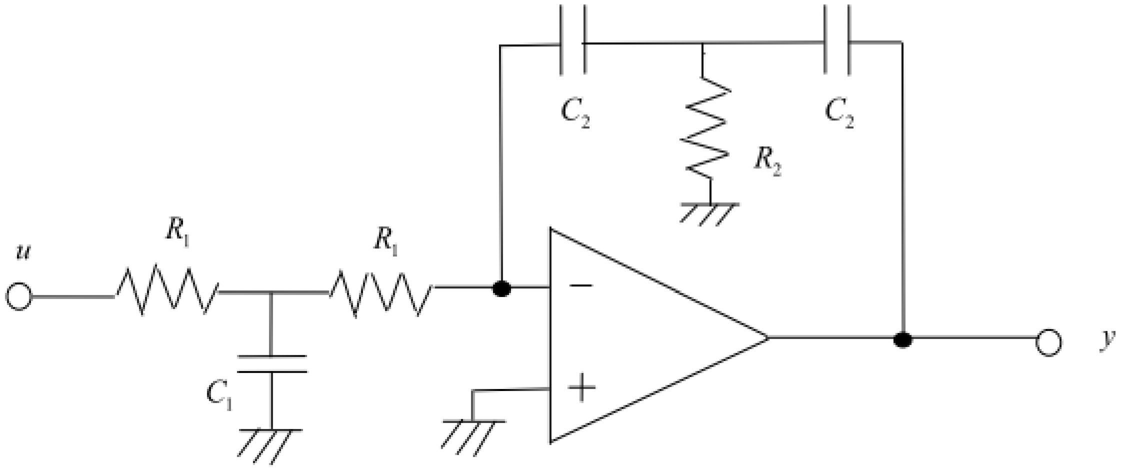
2. Σ ha uno zero in $-\frac{1}{2RC}$ e tre poli in $0, 0,$ e $-\frac{2}{RC}$. I modi sono $1, t, e^{-\frac{2}{RC}t}$.

3.

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)} = \frac{-2RCs-1}{R^3C^3s^3 + 2R^2C^2s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^3C^3D^3y(t) + 2R^2C^2D^2y(t) = -2RCDu(t) - u(t)$$

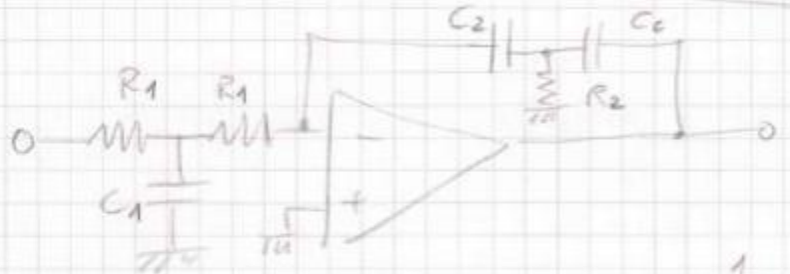
1. [punti 6] Il seguente circuito elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore differenziale come ideale:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

1)



$$G(s) = -\frac{Z_{t,f}}{Z_{t,i}} = -\frac{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\frac{1}{C_2 s}\cdot\frac{1}{C_2 s}}{R_2}}{R_1 + R_1 + \frac{R_1^2}{\frac{1}{C_1 s}}}$$

$$= -\frac{\frac{2}{C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_2^2 s^2}}{2R_1 + R_1^2 C_1 s} = -\frac{\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_2 C_2^2 s^2}}{R_1(2 + R_1 C_1 s)}$$

$$= -\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)}$$

2) zeri: $z_1 = -\frac{1}{2R_2C_2}$ poli: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -\frac{2}{R_1C_1}$

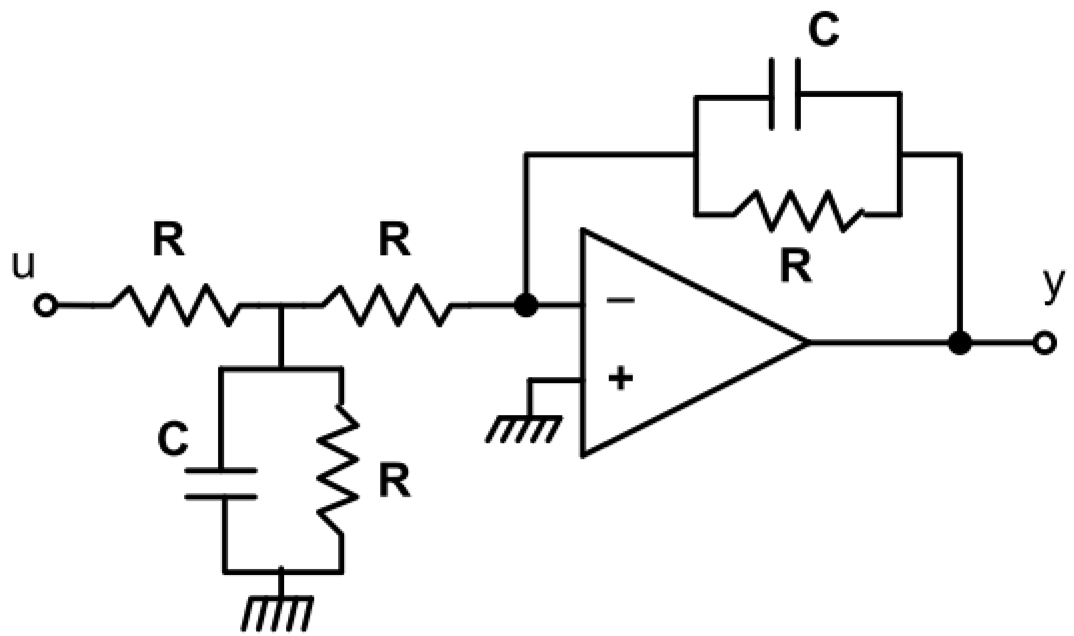
modi $= \left\{1,\ t,\ \exp\left\{-\frac{2}{R_1C_1}\right\}\right\}$

3) $G(s) = -\dfrac{1+2R_2C_2 s}{R_1R_2C_2^2 s^2(2+R_1C_1 s)} = \dfrac{-2R_2C_2 s - 1}{R_1^2R_2C_1C_2^2 s^3 + 2R_1R_2C_2^2 s^2}$

eq. differenziale

$$R_1^2R_2C_1C_2^2 D^3y(t) + 2R_1R_2C_2^2 D^2y(t) = -2R_2C_2 Du(t) - u(t)$$

2. [punti 5] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale.

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

2.

Impedenza del parallelo capacità e resistenza Z_p :

$$Z_p = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1 + RCs}$$

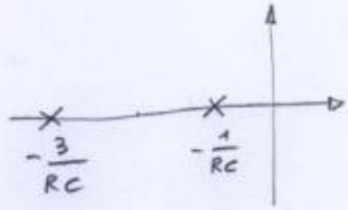
Impedenza di trasferimento del tripolo Z_t :

$$Z_t = R + R + \frac{R \cdot R}{Z_p} = 2R + \frac{R^2}{\frac{R}{1+RCs}} = 2R + R(1+RCs)$$

$$G(s) = -\frac{Z_p}{Z_t} = -\frac{\frac{R}{1+RCs}}{2R + R(1+RCs)}$$

①
$$G(s) = -\frac{1}{(1+RCs)(3+RCs)}$$

② Poli : $-\frac{1}{RC}$, $-\frac{3}{RC}$



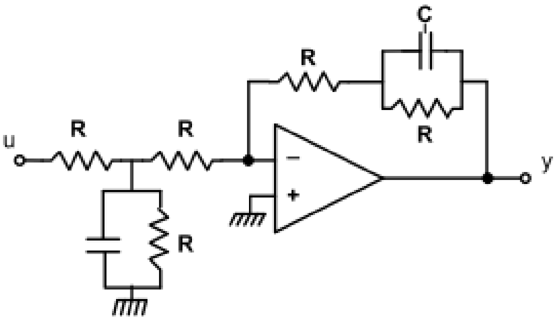
modi di $\Sigma = \left\{ e^{-\frac{t}{RC}}, e^{-\frac{3t}{RC}} \right\}$

③
$$(1+RCs)(3+RCs) = 3 + RCs + 3RCs + (RC)^2 s^2 =$$
$$= (RC)^2 s^2 + 4RCs + 3$$

$$G(s) = \frac{-1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 3}$$

eq. diff. $\quad (RC)^2 D^2 y + 4RC\, Dy + 3y = -u$

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

$$T_{uy}(s) = -\frac{R + \dfrac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}{R+R+\dfrac{R^2}{\dfrac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}} = -\frac{R+\dfrac{R}{1+RCs}}{2R+\dfrac{R^2}{\dfrac{R}{1+RCs}}} =$$

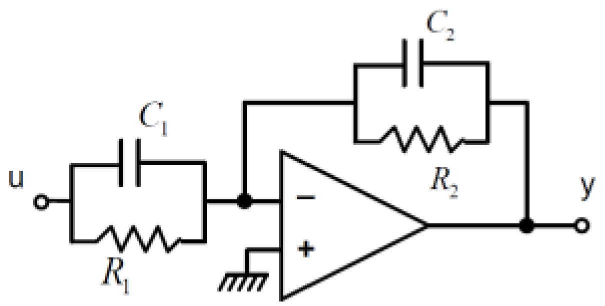
$$= -\frac{2+RCs}{(1+RCs)(3+RCs)} = \frac{-RCs-2}{R^2C^2s^2+4RCs+3}$$

eq. diff. $R^2C^2D^2y(t) + 4RC\,Dy(t) + 3y(t) = -RC\,Du(t) - 2u(t)$

zeri: $z_1 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = -\frac{1}{RC}$, $p_2 = -\frac{3}{RC}$

modi $= \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{RC}t\right\}, \exp\left\{-\frac{3}{RC}\cdot t\right\} \right\}$

2. [punti 5] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

2.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_i}, \quad Z_i = \frac{\frac{R_1}{s\,C_1}}{\frac{1}{s\,C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + R_1\,C_1\,s}, \quad Z_f = \frac{R_2}{1 + R_2\,C_2\,s}$$

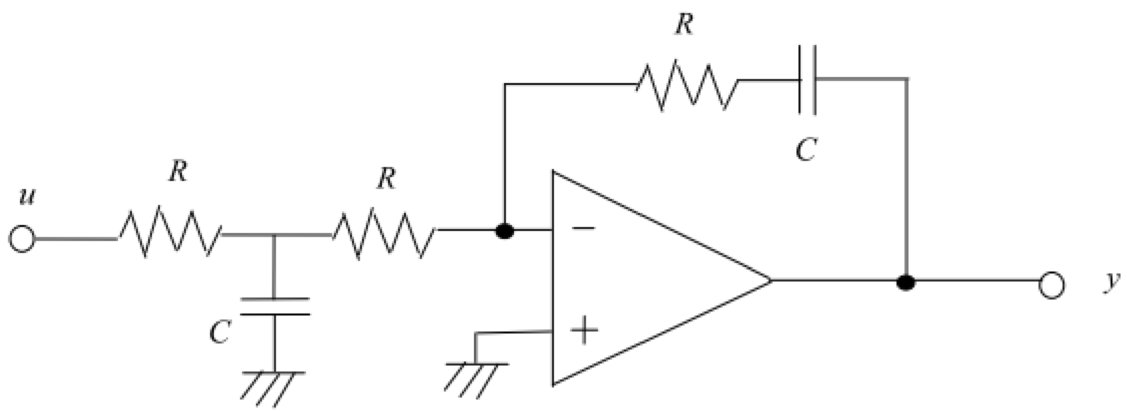
$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1 + R_1\,C_1\,s}{1 + R_2\,C_2\,s} = -\frac{R_1\,R_2\,C_1\,s + R_2}{R_1\,R_2\,C_2\,s + R_1}$$

Guadagno statico: $G(0) = -\frac{R_2}{R_1}$
Eq. Differenziale:

$$R_1\,R_2\,C_2\,Dy(t) + R_1 y(t) = -R_1\,R_2\,C_1\,Du(t) - R_2 u(t)$$

zeri: $-\frac{1}{R_1\,C_1}$, poli: $-\frac{1}{R_2\,C_2}$, modi: $\{e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\}$

2. [punti 4] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:
1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Scrivere $G(s)$ nella forma standard con poli e zeri e disegnare la configurazione poli-zeri di Σ.
3. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

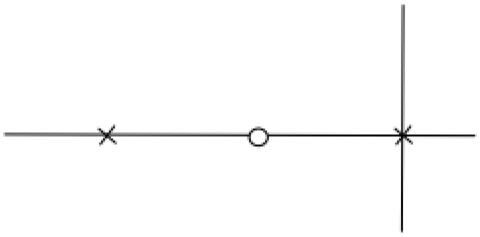
2.

1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_{i,i}} = -\frac{R + \dfrac{1}{sC}}{2R + \dfrac{R^2}{\dfrac{1}{sC}}} = -\frac{1 + RCs}{2RCs + R^2C^2s^2} = -\frac{1 + Ts}{Ts(2 + Ts)}$$

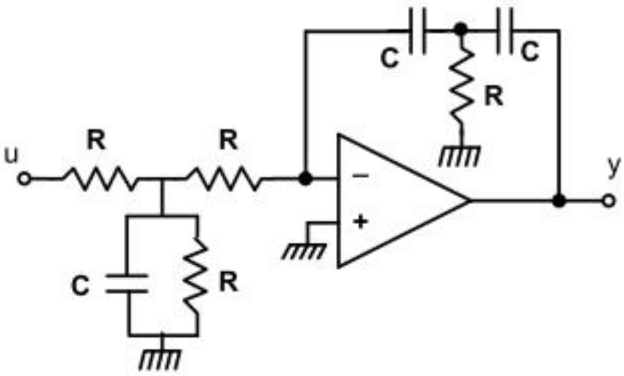
2.

$$G(s) = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{s + \dfrac{1}{T}}{s\left(s + \dfrac{2}{T}\right)} \qquad \text{zeri: } z_1 = -\frac{1}{T}\ ; \quad \text{poli: } p_1 = 0\ ,\ p_2 = -\frac{2}{T}$$



3. $G(s) = \dfrac{-s - \dfrac{1}{T}}{Ts^2 + 2s} \qquad \Rightarrow \qquad TD^2y + 2Dy = -Du - \dfrac{1}{T}u$

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

1.

$$> G := -\frac{\frac{1}{sC}+\frac{1}{sC}+\frac{\frac{1}{sC}\cdot\frac{1}{sC}}{R}}{R+R+\frac{RR}{\frac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{sC}+\frac{1}{s^2C^2R}}{2R+RsC\left(\frac{1}{sC}+R\right)}$$

$$-\frac{2sCR+1}{s^2C^2R^2(3+sCR)}$$

$$G(s)=\frac{-2RCs-1}{(RC)^3s^3+3(RC)^2s^2}$$

eq. differenziale

$$(RC)^3D^3y(t)+3(RC)^2D^2y(t)=-2(RC)Du(t)-u(t)$$

zeri: $z_1=-\frac{1}{2RC}$

poli: $p_1=0$ $p_2=0$ $p_3=-\frac{3}{RC}$

modi $=\left\{1,\ t,\ \exp\left\{-\frac{3}{RC}t\right\}\right\}$