Tracce delle soluzioni

**1**. Vedi dispense del corso.

**2.**

$$\begin{cases} m\, D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\, D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{matrix} \begin{cases} k x_2 = m\, D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (m D^2 + k)\, x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(m D^2 x_1 + 2k x_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\, D^2 x_1 + km\, D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\, D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\, s^2 + k^2} \qquad \text{f. d. t.}$$

$$m^2 s^4 + 3km\, s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} = $$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di $\Sigma$:

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

modi di $\Sigma$:

$$\text{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \text{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\text{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \text{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

**3.**

determiniamo la risposta forzata per $t \in (0,2)$

$u(t) = t \qquad U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{10}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_{11} = \left.\frac{10}{s+3}\right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{10}{s^2}\right|_{s=-3} = \frac{10}{9}$$

$K_{12} + K_2 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 = -\frac{10}{9}$

$$Y(s) = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{10}{9}\,\frac{1}{s} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \frac{10}{3}\,t - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\,e^{-3t}$$ ok!

per $t > 2$ il sistema è in evoluzione libera.

$\Rightarrow \quad y(t) = c\,e^{-3t}$

Studio delle relazioni fra le condizioni iniziali al tempo $t = 2$.

$$y(2-) = \frac{10}{3} \cdot 2 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10 - 10}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} = \frac{50}{9} +$$

$y(2+) = ?$

$$= \frac{50}{9} + \frac{10}{9} e^{-6}$$

$\rho = 1 \qquad u(t) \in C^{-1} \Rightarrow y(t) \in C^{-1+1} = C^{0}$

$$\Rightarrow \quad y(2+) = y(2-)$$

$$y(2+) = c\, e^{-6}$$

$$\frac{50}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} = c\, e^{-6}$$

$$c = \frac{50}{9} e^{6} + \frac{10}{9}$$

Quindi per $t > 2$

$$\boxed{y(t) = \left( \frac{50}{9} e^{6} + \frac{10}{9} \right) e^{-3t}}$$

**4.**

Vedi dispense dell'insegnamento.

**5.**

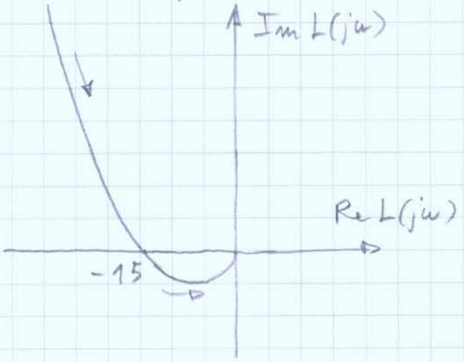
a) $L(j\omega) = 10 \, \dfrac{(j\omega+1)(j\omega+2)}{(j\omega)^3}$

$\arg L(j\omega) = \operatorname{arctg} \omega + \operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{2} - 3 \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to 0+ \quad |L(j\omega)| \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -3 \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\dfrac{\pi}{2}$

Per $\omega$ piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \omega + \dfrac{\omega}{2} - 3 \cdot \dfrac{\pi}{2} > -3\dfrac{\pi}{2}$, quindi il diagramma di N. emerge da un punto all'infinito del secondo quadrante di $\mathbb{C}$.




Determinazione dell'intersezione con l'asse reale

$1 + K \dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3} = 0 \quad , K \neq 0$

$s^3 + K s^2 + 3Ks + 2K = 0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $3K$ | 0 |
| 2 | $K$ | $2K$ | 0 |
| 1 | $3K^2 - 2K$ | 0 | |

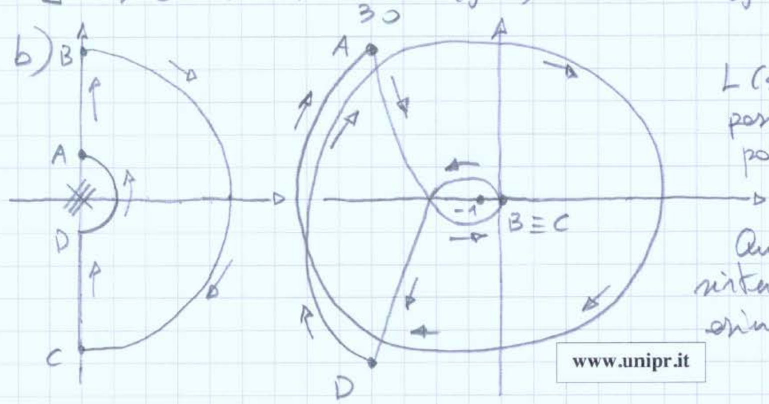
$K(3K-2) = 0$

$K = \dfrac{2}{3}$

L'eq. $1 + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{10} L(s) = 0$ ha radici puramente immaginarie.

$\exists \, \omega > 0 \ni 1 + \dfrac{2}{30} L(j\omega) = 0 \quad L(j\omega) = -15$

b)




L(s) non ha poli a parte reale positiva. Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto −1.

Quindi per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

**6.**

Gli angoli di partenza da 0 e – 2 sono +/- 90°

Gli asintoti sono tre, hanno centro in 0 + j0, con angoli +60°, +180°, -60° .

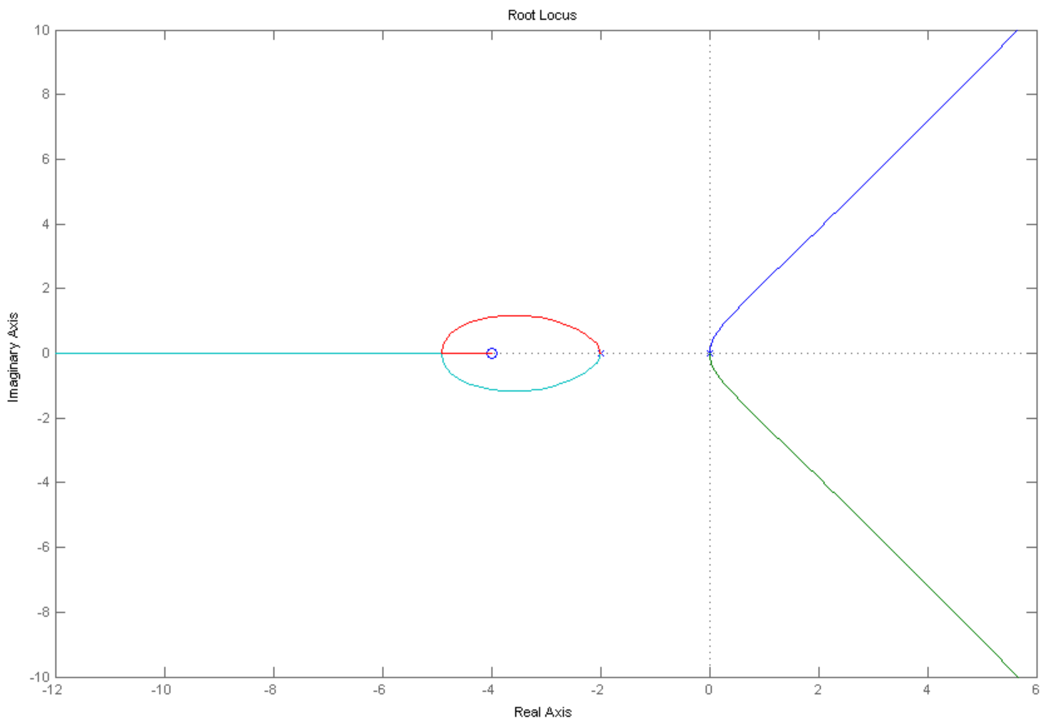
Calcolo delle radici doppie:

$$2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} = 0$$

$$3s^2 + 18s + 16 = 0$$

$$s_{1,2} = -1{,}0851 \quad -4{,}9149$$

si scarta la prima radice in quanto non appartiene al luogo diretto




**7.**

guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$

$K_v = \lim_{s \to 0} s\,L(s) = \frac{b_0}{20} \cdot 10 = \frac{b_0}{2}$

Da $K_v = 4$ si ottiene $\boxed{b_0 = 8}$.

Eq. caratteristica associata al controllore:

$$1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + 8}{s(s+20)} \cdot \frac{10}{(s-1)^2} = 0$$

$$s(s+20)(s-1)^2 + 10\, b_2 s^2 + 10\, b_1 s + 80 = 0$$

$$P_c(s) := s^4 + 18 s^3 + (10 b_2 - 39) s^2 + (10 b_1 + 20) s + 80$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[ (s+1)^2 + \frac{1}{4} \right] (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)$$
$$= s^4 + (\alpha_1 + 2) s^3 + \left(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{5}{4}\right) s^2 + \left(2\alpha_0 + \frac{5}{4}\alpha_1\right) s + \frac{5}{4}\alpha_0$$

Imponendo $P_c(s) \equiv P_d(s)$ si ottiene

$$\begin{cases} 18 = \alpha_1 + 2 \\ 10 b_2 - 39 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{5}{4} \\ 10 b_1 + 20 = 2\alpha_0 + \frac{5}{4}\alpha_1 \\ 80 = \frac{5}{4}\alpha_0 \end{cases}$$

$\alpha_1 = 16$, $\alpha_0 = 64$

$\boxed{b_1 = 12.8}$ $\boxed{b_2 = \frac{109}{8} = 13.625}$

$$C(s) = \frac{13.625\, s^2 + 12.8\, s + 8}{s(s+20)}$$

Le radici di $s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ sono $s_{1,2} = -8, -8$; quindi i poli $-1 \pm j\frac{1}{2}$ sono effettivamente dominanti. I poli del sistema retroazionato sono evidentemente $-1 \pm j\frac{1}{2}, -8, -8$.

**8.**

$$\mathcal{Z}\left[k \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$H(z) = \frac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)^2}$$

$$Y_1(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = \frac{3^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$$

$$c_{12} + c_{22} = 0$$

$$C_{12} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right]_{|z=1} =$$

$$= \frac{2(z+2)(z+\frac{1}{2})^2 - (z+2)^2 2(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^4}\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot (\frac{3}{2})^2 - (3)^2\cdot 2\cdot \frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot \frac{3^2}{2^2} - 3^2\cdot 3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{3^3}{2} - 3^3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2^4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot \frac{2^{\cancel{4}\,3}}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$C_{22} = -C_{12} = \frac{8}{3}$$

$$Y(z) = 4\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$Y(k) = 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4k - \frac{8}{3} - 2k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$