Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_{tf}}{Z_{ti}}$$

$$Z_{tf} = \frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\frac{1}{sC}}{R} = \frac{1+2RCs}{RC^2s^2}$$

$$Z_{ti} = R + R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}} = R\left(2+RCs\right)$$

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)}$$

2. Σ ha uno zero in $-\frac{1}{2RC}$ e tre poli in $0, 0,$ e $-\frac{2}{RC}$. I modi sono $1, t, e^{-\frac{2}{RC}t}$.

3.

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)} = \frac{-2RCs-1}{R^3C^3s^3+2R^2C^2s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^3C^3D^3y(t) + 2R^2C^2D^2y(t) = -2RCDu(t) - u(t)$$

3.

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4}$$

Eq. differenziale $\quad D^{*2} y(t) + 4 D^{*} y(t) + 4 y(t) = D^{*2} u(t) + u(t)$

$$y_- := y(0^-) \qquad Dy_- := Dy(0^-)$$

$$s^2 Y - y_- s - Dy_- + 4(sY - y_-) + 4Y = s^2 U + U$$

$$(s^2+4s+4)\,Y = (s^2+1)\,U + y_- s + Dy_- + 4y_-$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4}\,U(s) + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[5 \sin(t)] = 5 \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{s^2+1}}{s^2+4s+4} \cdot \frac{5}{\cancel{s^2+1}} + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$$

Imponiamo $\quad Y(s) = 0 \iff y(t) = 0,\ t \geq 0$

$$5 + y_- s + Dy_- + 4y_- = 0 \iff \boxed{\begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}}$$

Altro metodo:

$$\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 0,\ t \geq 0 \implies y_+ = 0,\ Dy_+ = 0$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5\sin(t) & t \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_- = 0, & Du_- = 0 \\ u_+ = 0 & Du_+ = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_- \\ -Dy_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y_- = 0 \\ -4y_- - Dy_- = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}$$

4.
Vedi dispense del corso.

5.
1)

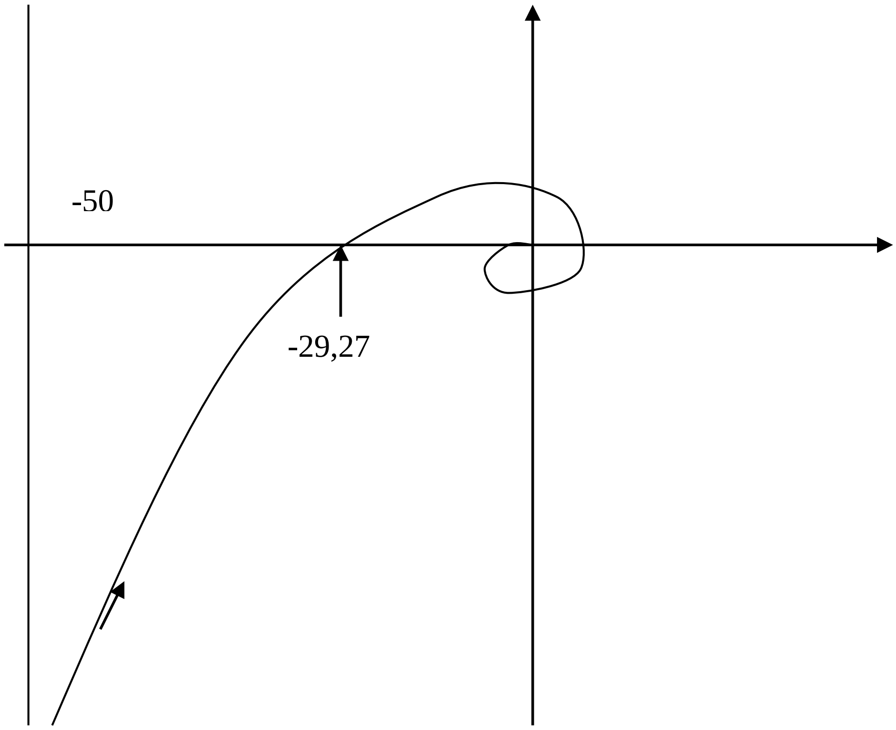
$$P(j\omega) = \frac{10(1 - j\omega)^2}{(j\omega)(1 + j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5 \text{ arctg } \omega$$

$$\left| P(j\omega) \right| = \frac{10}{\omega\sqrt{1 + \omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

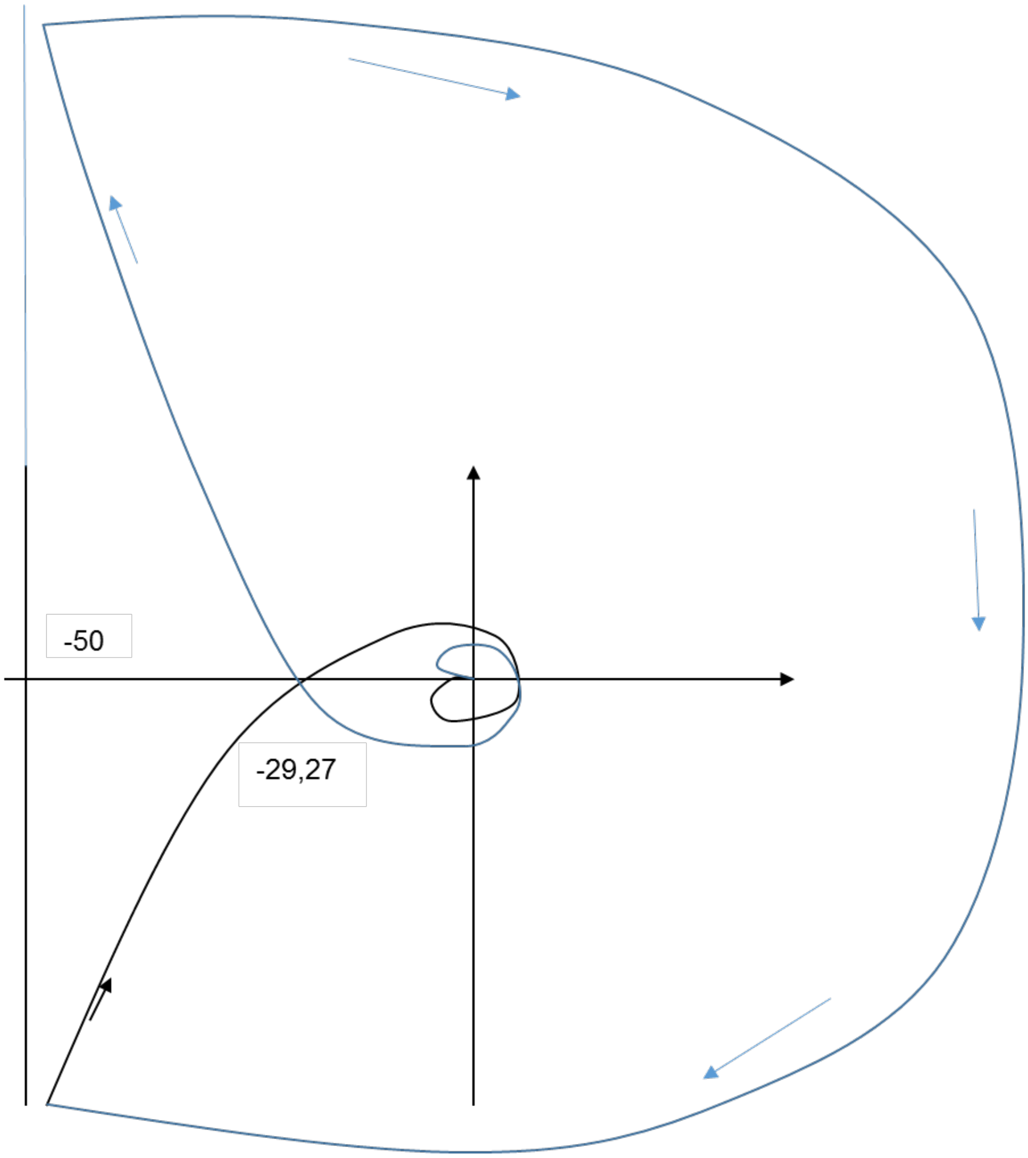
$$\left| P(j\omega_p) \right| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa (sistema retroazionato asintoticamente stabile) se e solo se il diagramma polare completo (vedi disegno qui sotto) non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

numero radici $\in \mathbb{C}_+ = 2$

numero radici $\in j\mathbb{R} = 0$

numero radici $\in \mathbb{C}_- = 4-2=2$



6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-7$ con molteplicità 1

Essendo $n-m=1$ il luogo (sia diretto che inverso) presenta un asintoto.

LUOGO DIRETTO ($K_1 \in [0,+\infty)$):

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell’asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1 > 0$) ha l’andamento riportato in figura 1.

LUOGO INVERSO ($K_1 \in (-\infty, 0]$):

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell’asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.
- Il luogo, oltre a due porzioni dell’asse reale, comprende una circonferenza con centro nello zero e raggio $R = \sqrt{d_1 d_2} = 4$ (con $d_1 = 2$ e $d_2 = 8$).

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1 < 0$) ha l’andamento riportato in figura 2 e interseca l’asse reale nei punti di ascissa -3 e 5.

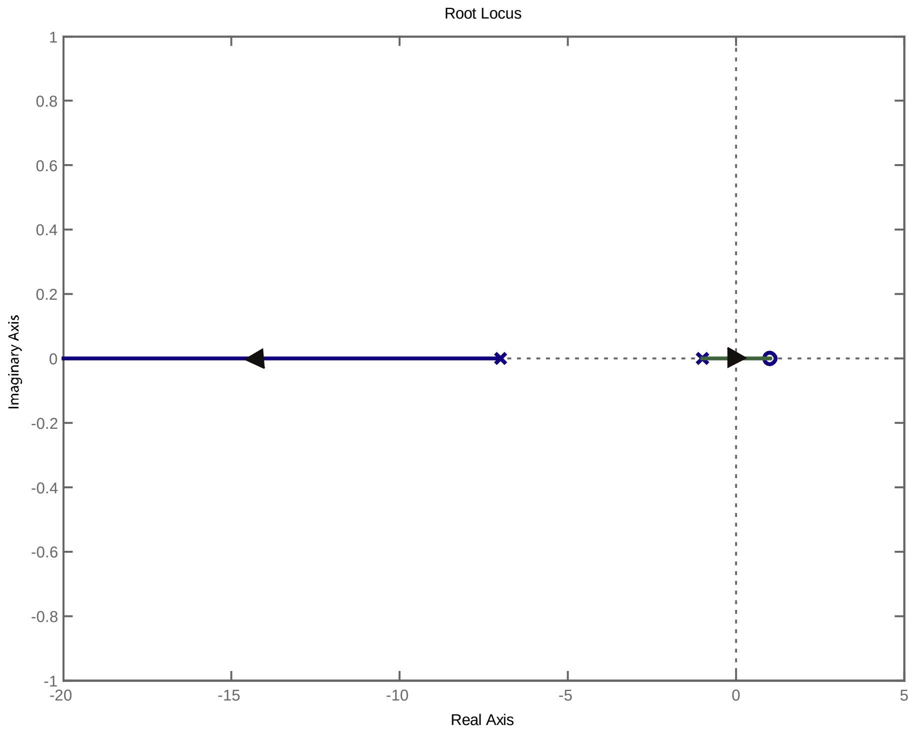


Figura 1. Luogo diretto

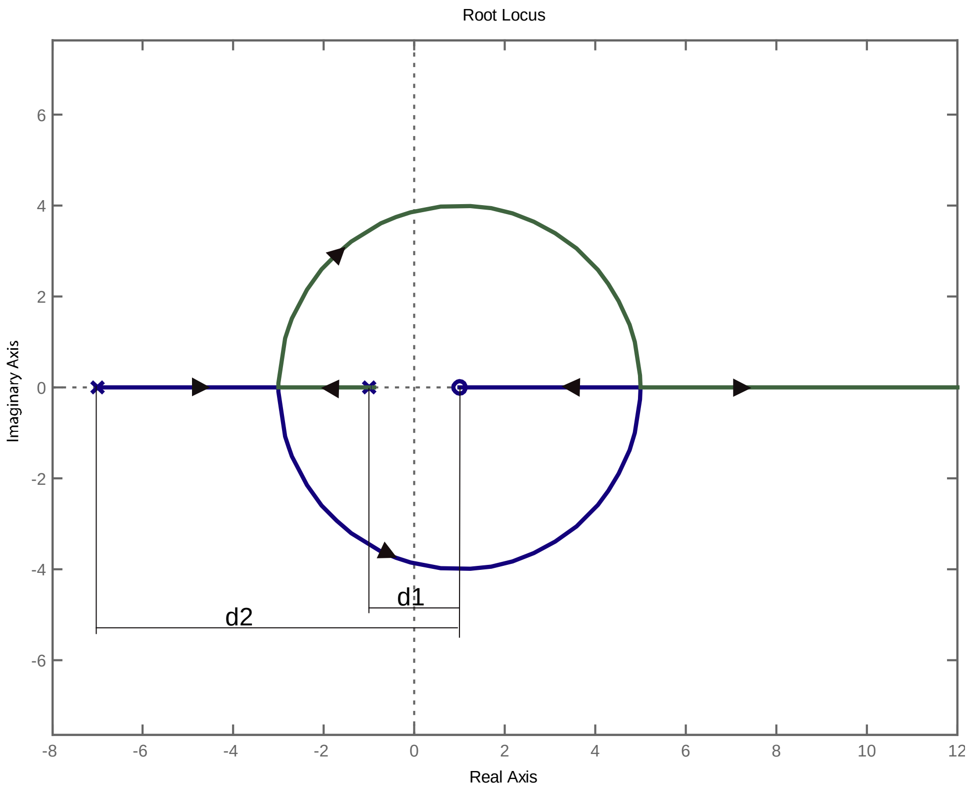


Figura 2. Luogo inverso

7.
L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:
$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Re}\, p_2, ..., \mathrm{Re}\, p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.
Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2 s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$

$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

8.

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+8} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} := P_s(t)$$

$$\mathcal{Z}[P_s(kT)] = \mathcal{Z}\left[2 - 4e^{-2\cdot k\cdot 0.02} + 2e^{-4\cdot k\cdot 0.02}\right] = \mathcal{Z}\left[2 - 4\left(e^{-0.04}\right)^k + 2\left(e^{-0.08}\right)^k\right]$$

$$= 2\frac{z}{z-1} - 4\cdot\frac{z}{z-0.9608} + 2\frac{z}{z-0.9231}$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}[P_s(kT)] = 2 - 4\frac{z-1}{z-0.9608} + 2\frac{z-1}{z-0.9231} = \frac{0.003000\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)}$$

$$T_{\tilde{r}\tilde{c}}(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)}, \quad L(z) = k P_d(z)$$

$$1 + k\frac{0.003\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)} = 0 \qquad z^2 - 1.8839\cdot z + 0.88691448 + 0.003\cdot k\cdot z + 0.00302896 k = 0$$

$$z^2 + (0.003\cdot k - 1.8839) z + 0.00302896\cdot k + 0.88691448 = 0 \qquad a(z) = 0$$

1) $a(1) > 0, \quad 0.00301448 + 0.00602896\cdot k > 0 \qquad k > -0.5$

2) $(-1)^2 a(-1) > 0, \quad 3.77081448 + 0.00002896\cdot k > 0 \qquad k > -130207.68$

3) $|a_0| < a_2 \qquad |0.00302896\cdot k + 0.88691448| < 1 \qquad \begin{cases} k < 37.33 \\ k > -622.96 \end{cases}$

$\qquad -0.00302896\cdot k - 0.88691448 < 1$

$$\boxed{-0.5 < k < 37.33}$$