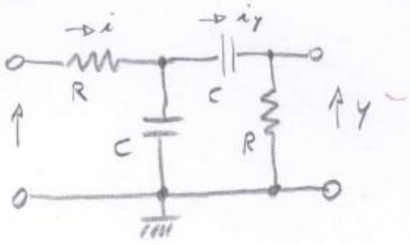
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.



$$Y = R\, I_y$$

$$I_y = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + R} = I \cdot \frac{1}{2 + RCs}$$

$$I = \frac{U}{R + \dfrac{\frac{1}{sC}\cdot\left(\frac{1}{sC} + R\right)}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + R}} = \frac{U}{R + \dfrac{R + \frac{1}{sC}}{2 + RCs}}$$

$$Y = R \frac{U}{R + \dfrac{R + \frac{1}{sC}}{2 + RCs}} \cdot \frac{1}{2 + RCs} = \frac{U}{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{sCR}}{2 + RCs}} \cdot \frac{1}{2 + RCs}$$

$$G(s) = \frac{1}{2 + RCs + 1 + \frac{1}{RCs}} = \frac{RCs}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1} \quad \text{f.d.t.}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y(t) + 3RC\,Dy(t) + y(t) = RC\,Du(t)$

zeri: $z_1 = 0$ poli: $p_{1,2} = \dfrac{-3RC \pm \sqrt{9(RC)^2 - 4(RC)^2}}{2(RC)^2} =$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2RC}$$

modi: $\left\{ \exp\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2RC}\right),\ \exp\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2RC}\right) \right\}$

guadagno statico: $G(0) = 0$.

3.

1° metodo:

$$g_s(t) = \int_0^t g(v)dv$$

$$g_s(t) = \int_0^t \left(15e^{-2v} - 10ve^{-2v} - 15e^{-4v}\right)dv =$$

$$= 15\int_0^t e^{-2v}dv - 10\int_0^t ve^{-2v}dv - 15\int_0^t e^{-4v}dv =$$

$$= 15\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right)\right] - 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\right] - 15\left[-\frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{4} - 5e^{-2t} + 5te^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

2° metodo:

$$G(s) = \mathcal{L}\left[g(t)\right] = 20 \cdot \frac{s+1}{(s+2)^2(s+4)}$$

$$\mathcal{L}\left[g_s(t)\right] = \frac{G(s)}{s} = 20 \cdot \frac{s+1}{s(s+2)^2(s+4)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{21}}{(s+2)^2} + \frac{k_{22}}{s+2} + \frac{k_3}{s+4} =$$

$$= \frac{5/4}{s} + \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{(-5)}{s+2} + \frac{15/4}{s+4}$$

$$\Rightarrow g_s(t) = \frac{5}{4} + 5te^{-2t} - 5e^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

4.
Vedi appunti delle lezioni.

5.
1)

$$L\left(j\omega\right) = \frac{50\left(j\omega + 1\right)^2}{\left(j\omega\right)^3\left(j\omega + 10\right)}$$

$$\left|L\left(j\omega\right)\right| = \frac{50\left(1+\omega^2\right)}{\omega^3\left(100+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\arg L\left(j\omega\right) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L\left(j\omega\right)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to 0+}\left|L(j\omega)\right| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega\to\infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg\left(2arctg\,\omega\right)\cdot 0.1\omega = 0$$

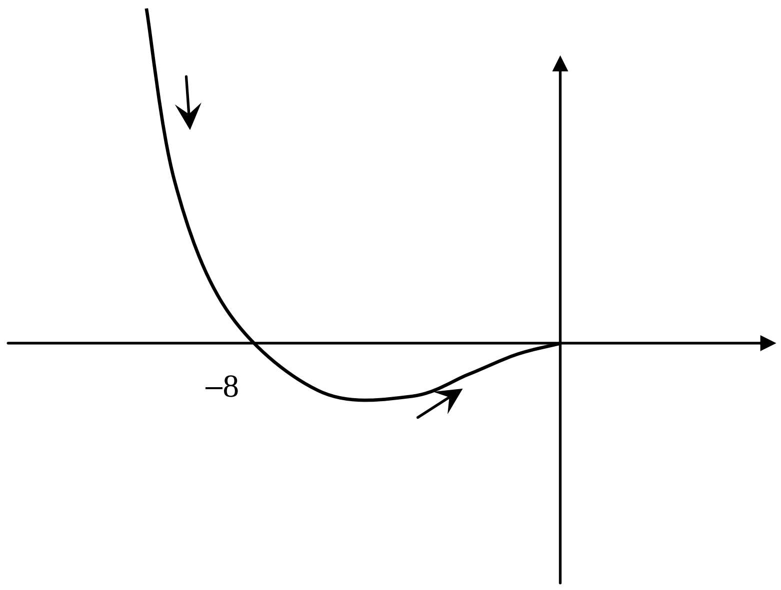
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2}\cdot\frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

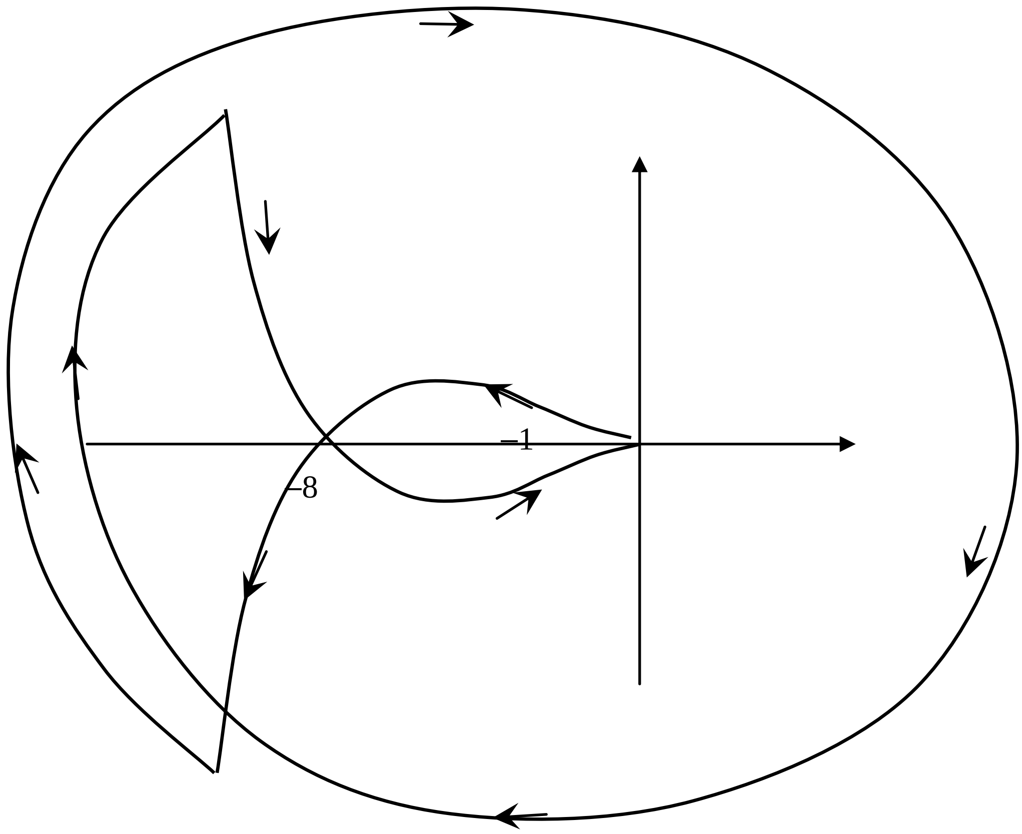
$$\left|L(j\omega_p)\right| = 8$$

$$L(j\omega_p) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



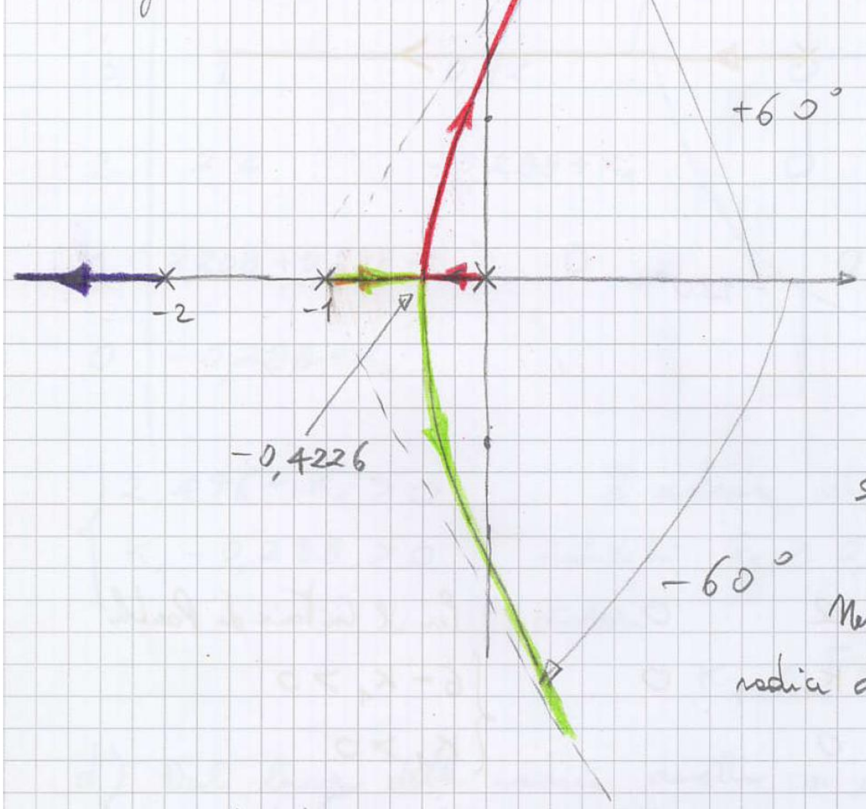
2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

6.

Luogo delle radici diretto $(K_1 > 0)$



$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

Calcolo radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} -1{,}5774 \\ -0{,}4226 \end{cases}$$

Nel luogo diretto l'unica radice doppia è $-0{,}4226$

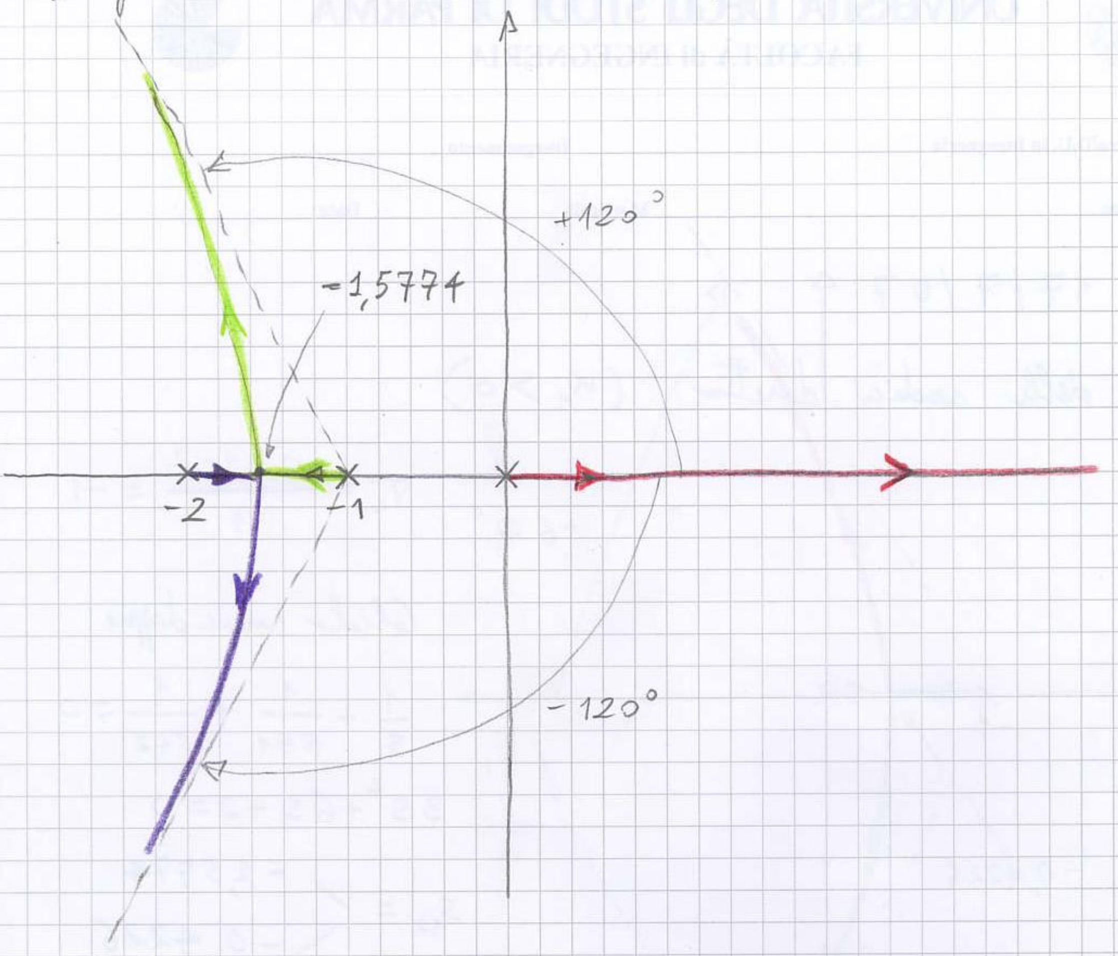
Eq. caratteristica $\quad 1 + K_1 P(s) = 0$

$$1 + K_1 \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+s)(s+2) + K_1 = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

Luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$)



b)

3	1	2	0
2	3	K_1	0
1	$6-K_1$	0	
0	K_1		

Per il Criterio di Routh

$$\begin{cases} 6-K_1>0 \\ K_1>0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è asint. stabile per tutti e soli valori

$$K_1 \in (0, 6)$$

c) Cambio di variabile complesso $z = s + 0{,}2$

$$\operatorname{Re} z < 0 \iff \operatorname{Re} s < -0{,}2$$

$$s = z - 0{,}2$$

$$(z-0{,}2)^3 + 3(z-0{,}2)^2 + 2(z-0{,}2) + K_1 = 0$$

$$z^3 + 2{,}4\, z^2 + 0{,}92\, z - 0{,}288 + K_1 = 0$$

3	1	$0{,}92$	0
2	$2{,}4$	$-0{,}288+K_1$	0
1	$2{,}208+0{,}288-K_1$	0	0
0	$-0{,}288+K_1$		

$$\begin{cases} 2{,}496 - K_1 > 0 \\ K_1 - 0{,}288 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_S \geq 0{,}2$ per tutti e soli valori

$$K_1 \in [0{,}288\ ,\ 2{,}496]$$

d) Dal luogo delle radici diretto si evince che per il valore ottimo K_1^* l'eq. caratteristica ha fra le sue radici, la radice doppia $-0{,}4226$. Quindi

$$K_1^* = -s(s+1)(s+2)\Big|_{s=-0{,}4226} \cong 1{,}456$$

Attenzione: il valore corretto di K_1^* è 0,3849

7.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\, s^4 + 102\, s^3 + 287\, s^2 + 392\, s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

8.

4) a)

$$P(z) = \frac{z-1}{z-2}\,.$$

b)

$$p(k) = \delta(k) + 1(k-1)2^{k-1}\,.$$

c)

$$y(k) = 2y(k-1) + u(k) - u(k-1)\,.$$