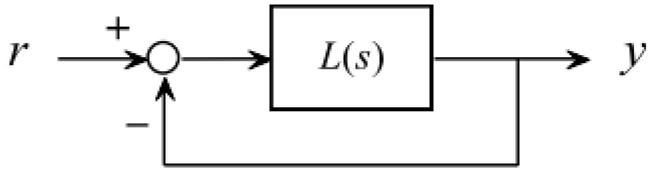
5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 2\dfrac{1+5s}{(1+s)^2(1+0,5s)^2}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il Criterio di Nyquist.

5.
a)

$$L(j\omega) = 2\frac{1+5j\omega}{(1+j\omega)^2(1+0,5j\omega)^2}$$

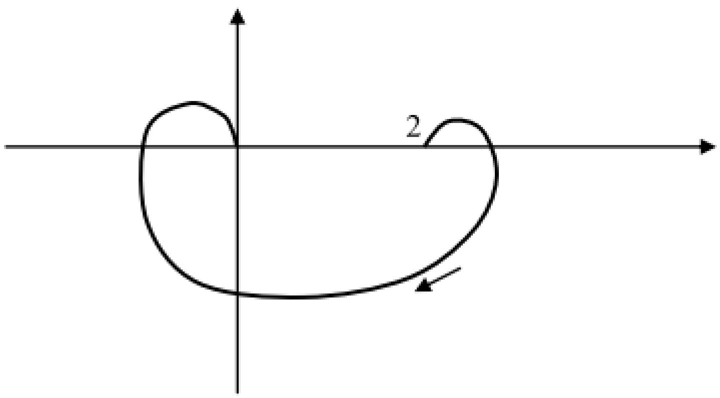
$$|L(j\omega)| = 2\frac{\sqrt{1+25\omega^2}}{(1+\omega^2)(1+\omega^2/4)}$$

$$\arg L(j\omega) = \arctan(5\omega) - 2\arctan(\omega) - 2\arctan(0,5\omega)$$

$$L(j0) = 2$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Per ω piccolo vale $\arg L(j\omega) \simeq 5\omega - 2\omega - 2\cdot 0,5\omega = 2\omega > 0$ e $|L(j\omega)| > |L(j0)|$. Ne consegue quindi il seguente tracciamento qualitativo del diagramma polare:



Si prevedono quindi la presenza di due intersezioni del diagramma con l'asse reale (escluse quelle in 0 e 2). Le pulsazioni corrispondenti a tali intersezioni possono essere determinate risolvendo l'equazione

$$\arg L(j\omega) = 0 \quad (-\pi)$$

ovvero

$$\arctan(5\omega) + 0 \ (+\pi) = 2\arctan\omega + 2\arctan(0,5\omega)$$

Applicando la funzione $\tan(\cdot)$ ad entrambi i membri si ottiene:

$$5\omega = \frac{\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} + \dfrac{\omega}{1-\dfrac{1}{4}\omega^2}}{1 - \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\dfrac{\omega}{1-\dfrac{1}{4}\omega^2}}$$

Eliminando la soluzione $\omega = 0$ e ponendo $x := \omega^2$ si giunge all'equazione algebrica di secondo grado

$$5x^2 - 59x + 8 = 0$$

da cui le soluzioni $x_1 = 0,137188$ e $x_2 = 11,6628$. Considerando le soluzioni positive di ω otteniamo

$$\begin{cases} \omega_1 = 0,37038 \quad \text{rad/sec} \\ \omega_2 = 3,41508 \quad \text{rad/sec} \end{cases}$$

Le intersezioni cercate sono quindi

$$\begin{cases} L(j\omega_1) = 3,5788 \\ L(j\omega_2) = -0,6899 \end{cases}$$

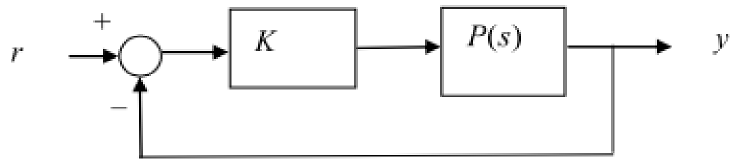
b)

Il guadagno di anello L(s) non ha poli a parte reale positiva ed il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Si noti che il margine di ampiezza associato è facilmente determinabile come

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_2)|} \cong 1,45$$

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $K = 10$ e $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

a. Determinare il guadagno di anello del sistema retroazionato e tracciarne il diagramma polare. Calcolare in particolare l'intersezione del diagramma con l'asse reale negativo e la corrispondente pulsazione ω_p (pulsazione di fase pi greco).

b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist. Determinare il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

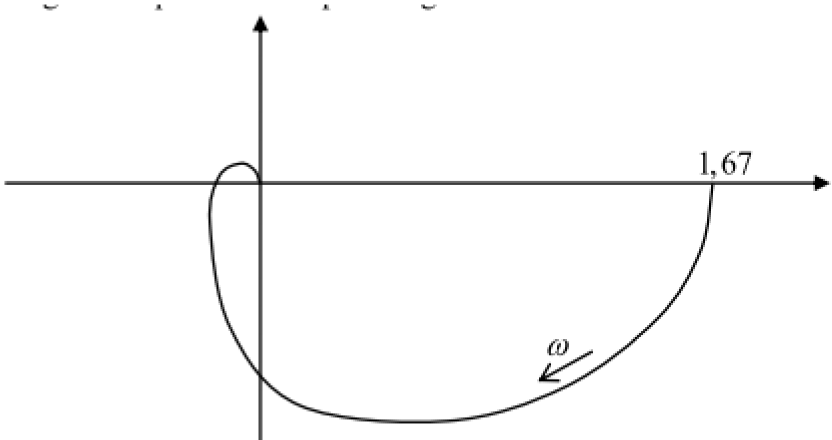
a.

$$L(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}; \quad L(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2} - \arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0) = \dfrac{5}{3} \cong 1{,}67$ e $\lim\limits_{\omega\to+\infty} |L(j\omega)| = 0$, $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \arg L(j\omega) = -3\dfrac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p) = -\pi$:

$$\arctan\frac{\omega_p}{2} + \arctan\frac{\omega_p}{3} = \pi - \arctan\omega_p$$

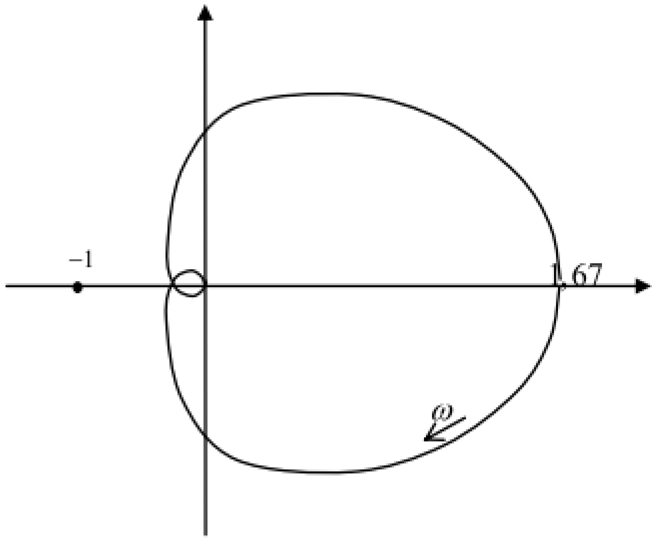
Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2 - 11 = 0$ da cui $\omega_p = \sqrt{11} \cong 3{,}32\ \text{ rad/s}$.

$$\left|L(j\omega_p)\right| = \frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}} = \frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p) = -\frac{1}{6}\right)$.

b.

Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$\left|L(j\omega_c)\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;

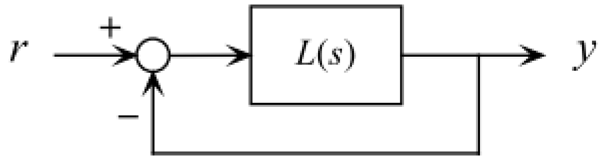
in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

$\Rightarrow \omega_c \ = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

5. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = 10\frac{s+1}{s^3(s+2)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

a) $L(j\omega) = 10\,\dfrac{j\omega+1}{(j\omega)^3(j\omega+2)}$, $\arg L(j\omega) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{2}$

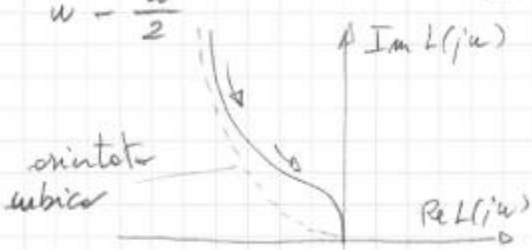
$\omega \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to 0$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \dfrac{\pi}{2} + \omega - \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\omega}{2} > \dfrac{\pi}{2}$;
quindi l'emergenza del d.p. avviene nel II quadrante.

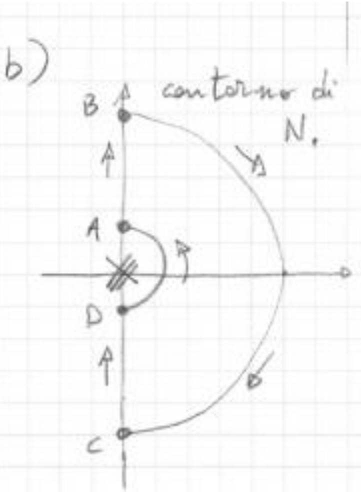
$\arg L(j\omega) = \pi \qquad \operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ per $\omega > 0$

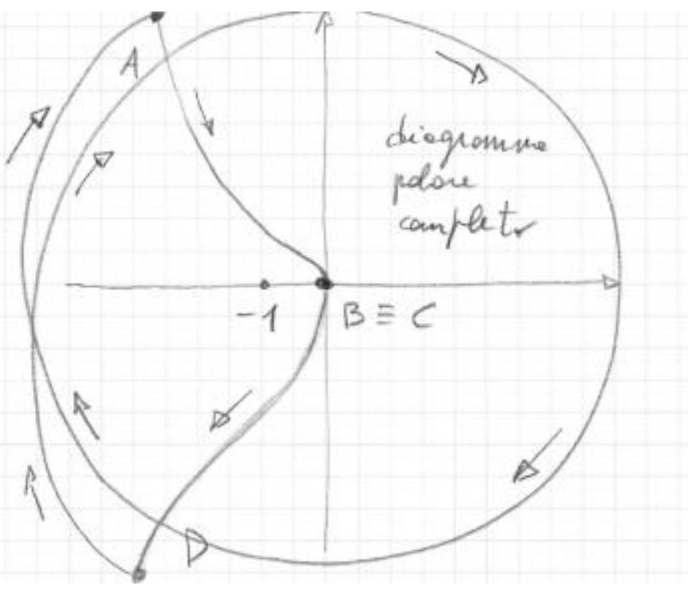
$$\frac{1+\omega\cdot\frac{\omega}{2}}{\omega-\frac{\omega}{2}} = 0 \qquad 1+\frac{\omega^2}{2} = 0$$ nessuna soluzione



Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo del diagramma polare

b)





L(s) non ha poli a parte reale negativa. Per il criterio di N. la stabilità sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca -1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte -1. Quindi il sistema retroazionato è instabile.

5. [punti 4,5 1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10(1-s)^2}{s(s+1)^3}$$

determinando in particolare asintoti e le intersezioni con l'asse reale negativo.
2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

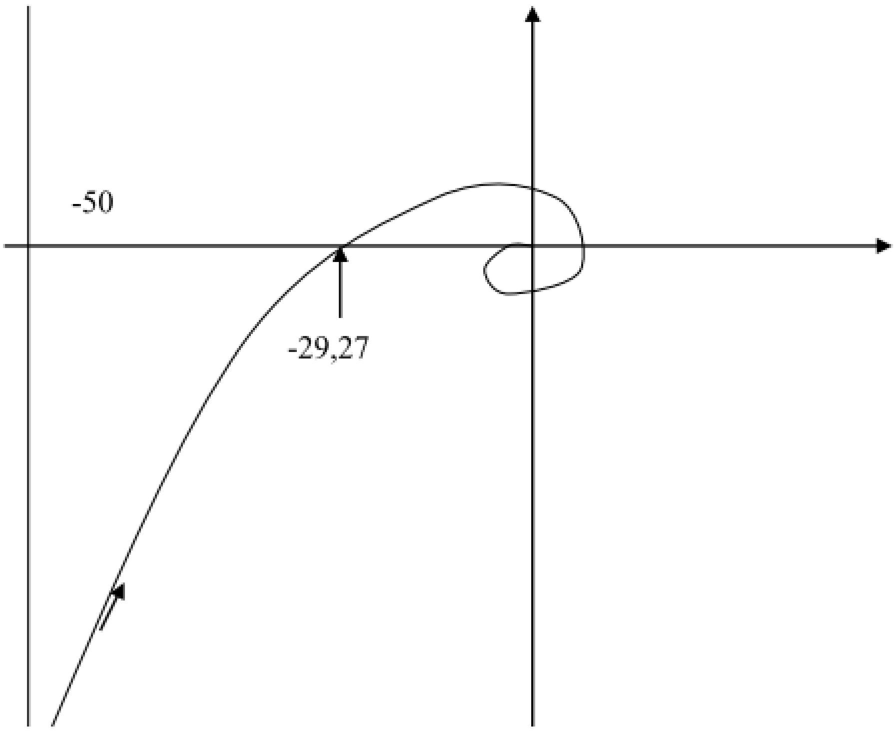
$$P(j\omega) = \frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5 \text{ arctg } \omega$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

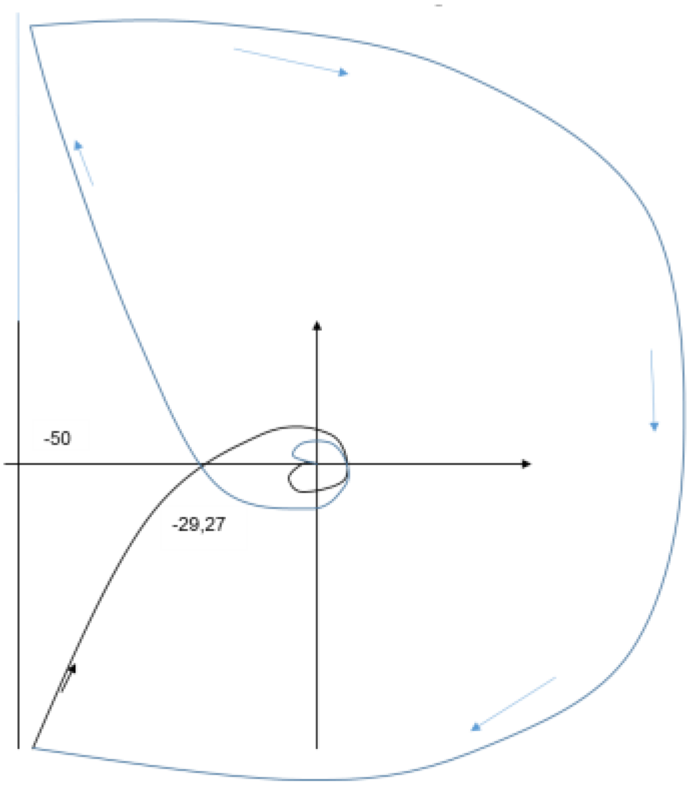
$$\left|P(j\omega_p)\right| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa (sistema retroazionato asintoticamente stabile) se e solo se il diagramma polare completo (vedi disegno qui sotto) non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

numero radici $\in \mathbb{C}_+ = 2$

numero radici $\in j\mathbb{R} = 0$

numero radici $\in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$



5. [punti 4,5]

1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{100(1-s)^2}{s(s+2)^3}$$

determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione con l'asse reale negativo.

2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1 + P(s) = 0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

a) Funzione di Trasferimento:

$$P(s) = 100\,\frac{(1-s)^2}{s\,(s+2)^3} \;\Rightarrow\; P(j\omega) = 12.5\,\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega\,(1+0.5\,j\omega)^3}$$

Ascissa dell'asintoto: $\nabla_a = 12.5\,(-1-1-0.5-0.5-0.5) = -43.75$
Argomento della funzione di trasferimento:

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 3\ \arctan(0.5\,\omega) - 2\ \arctan\omega$$

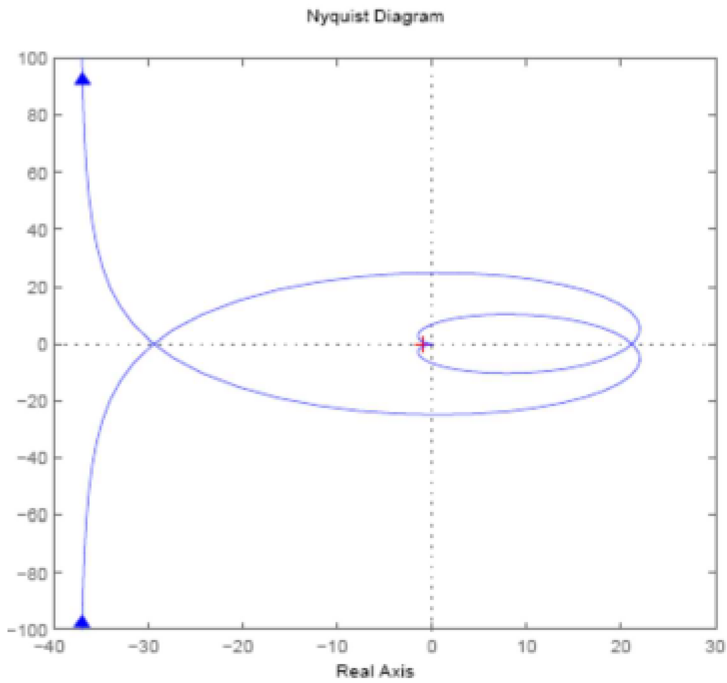
$$\text{per}\,\omega \to 0 \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -\frac{\pi}{2} \qquad \text{per}\,\omega \to +\inf \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -3\,\pi$$

Intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow 3\ \arctan\frac{\omega_p}{2} + 2\ \arctan\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

Attraverso una stima numerica si ottiene: $\omega_p \simeq 0,47$ [rad/s]
Intesezione:

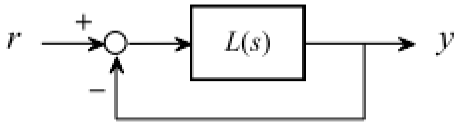
$$|P(j\omega_p)| = 12.5\,\frac{(1+\omega_p^2)}{\omega_p\,\left(1+(\frac{\omega_p}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq 29.95$$



b) Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1 e il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva, quindi le radici di $1+P(s)$ sono:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{C}_+ &: \quad 2 \\ n \in \mathbb{C}_- &: \quad 2\ \ (4-2) \\ n \in j\,\mathbb{R} &: \quad 0 \end{aligned}$$

5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 16\dfrac{1-s}{(s+2)^4}$.

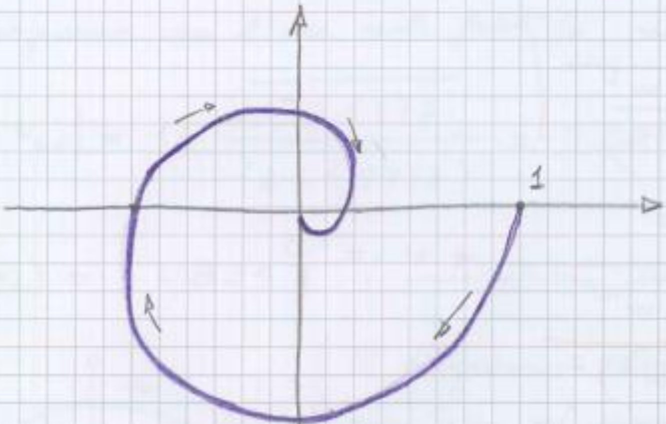
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.

b) Dimostrare mediante il criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e determinare il corrispondente margine di ampiezza M_A.

a) $L(j\omega) = 16\dfrac{1-j\omega}{(j\omega+2)^4}$; $L(j0) = 1$

$$|L(j\omega)| = 16\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\arg L(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\,\omega$$



$$\lim_{\omega\to+\infty} L(j\omega) = -5\frac{\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega) = -\pi$$

$$+4\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{2} + \mathrm{arctg}\,\omega = +\pi$$

$$tg\left(4\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{2}\right) + \omega = 0$$

$$\frac{2\,tg\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{2}\right)}{1-\left[tg\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]}{1-\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}}{1-\dfrac{16\omega^2}{(4-\omega^2)^2}} + \omega = 0$$

$$\frac{\dfrac{8\omega}{\cancel{4-\omega^2}}}{\dfrac{(4-\omega^2)^2-16\omega^2}{(4-\omega^2)^{\cancel{2}}}} + \omega = 0$$

$$\frac{8\omega(4-\omega^2)}{(4-\omega^2)^2-16\omega^2}+\omega=0$$

Si scarta la soluzione $\omega=0$

$$8(4-\omega^2)+(4-\omega^2)^2-16\omega^2=0$$

$$x \triangleq \omega^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

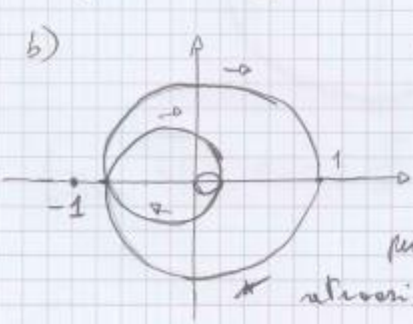
$$x_{1,2}= \begin{cases} 30,4222 \\ 1,5778 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = 5,5156 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 = 1,2561 \text{ rad/sec} \end{array}$$

Si scarta la soluzione ω_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(j\omega_2)| = 16\,\frac{\sqrt{1+1,5778}}{(4+1,5778)} = 0,8257$$

$$L(j\omega_2) = -0,8257 \quad \text{(intersezione cercata)}$$

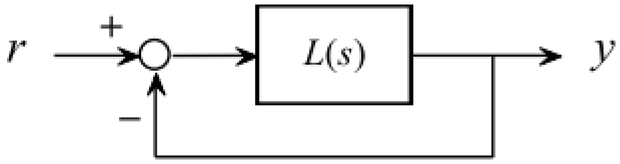
b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è asin. stabile.

$$M_A = \frac{1}{0,8257} \simeq 1,21$$

5. [punti 4] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$.

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'asintoto, il comportamento per $\omega \to +\infty$ e l'intersezione con l'asse reale negativo.

2. Stabilire mediante applicazione del criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

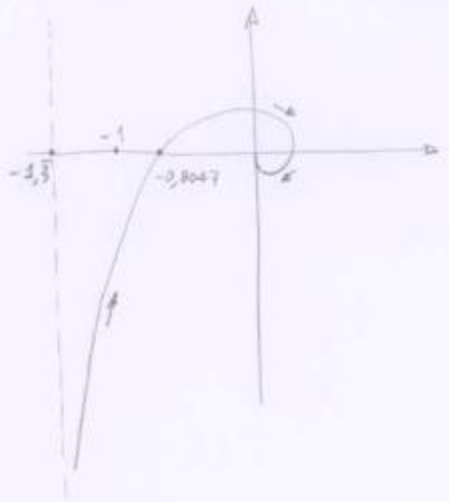
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3}\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$

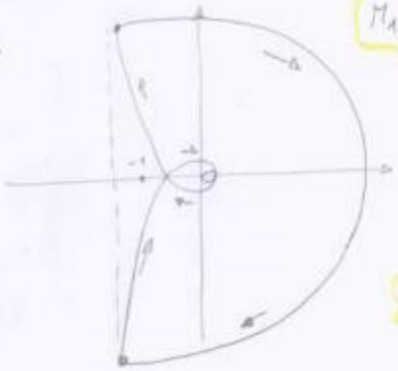
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

$\arg L(j\omega_c) = -163°,74$

$M_F = 16°,26$

L(s) non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto −1. Quindi per il C. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

5. [punti 5] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 100\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

1) Sia $L(s) := \dfrac{100(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

$$L(j\omega) = \frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{100(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} \left|L(j\omega)\right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega = -\pi$$

$$-arctg0.1\omega + 2arctg\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\omega) \cdot 0.1\omega = 0$$

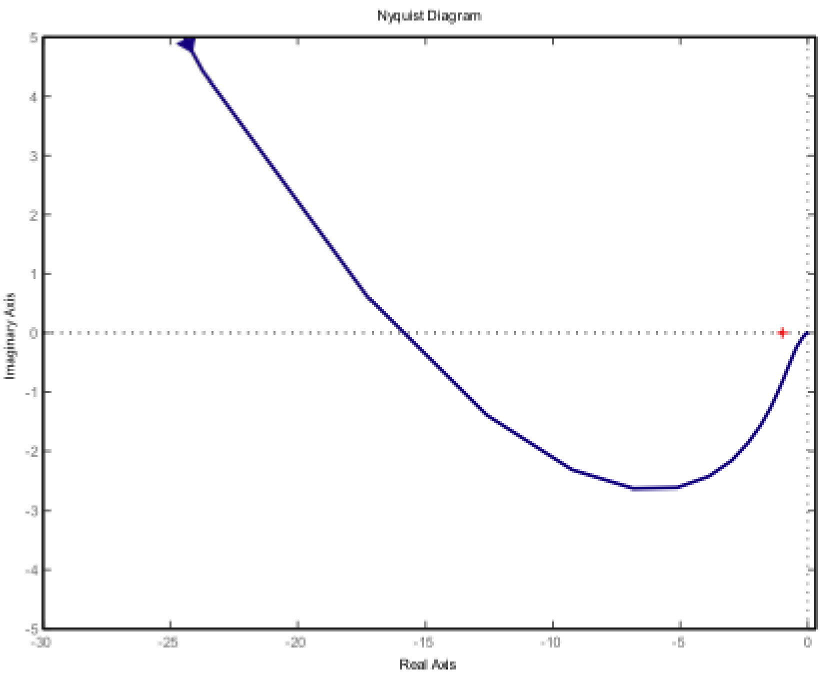
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} - \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

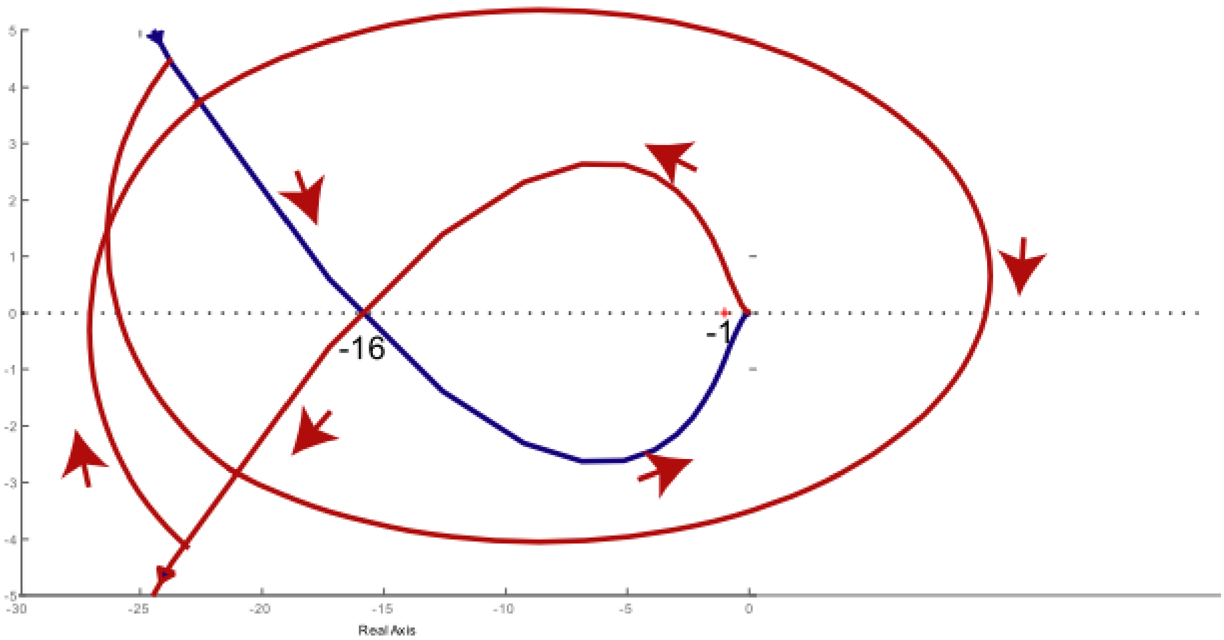
$$\left|L(j\omega_p)\right| = 16$$

$$L(j\omega_p) = -16$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:

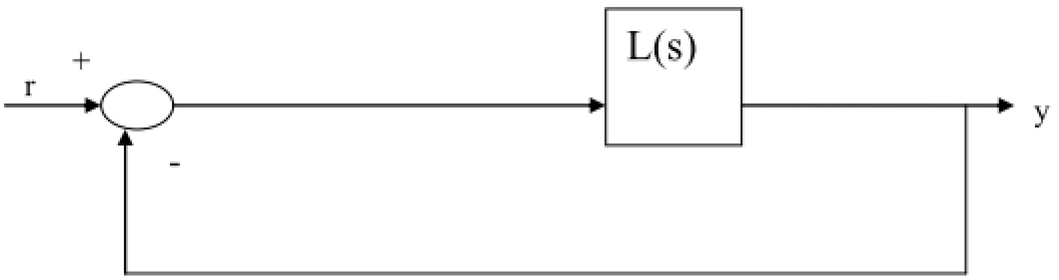


2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

5. **[punti 5]** Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 100\dfrac{(1-s)^2}{(s+1)^2(s+10)^2}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale negativo.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist.

5.
Il sistema ammette la seguente funzione di risposta armonica

$$L(j\omega) = 100\frac{(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^2(10+j\omega)^2}$$

il cui modulo è dato da

$$|L(j\omega)| = 100\frac{(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{100}{(100+\omega^2)}$$

e la cui fase è data da

$$\arg L(j\omega) = -2\arctan\omega - 2\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10} = -4\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10}.$$

Valutando i valori al limite si ottiene

$$\lim_{\omega\to 0}|L(j\omega)| = 1 \qquad \lim_{\omega\to 0}\arg L(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -4\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = -3\pi\,.$$

Al fine di ottenere un miglior tracciamento e di valutare la stabilità del sistema è necessario valutare l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-4\arctan\omega_p - 2\arctan\frac{\omega_p}{10} = -\pi$$

$$2\arctan\omega_p + \arctan\frac{\omega_p}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan\left(2\arctan\omega_p\right) + \dfrac{\omega_p}{10}}{1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\dfrac{\omega_p}{10}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10} = 0$$

Poiché si ha che

$$\tan\left(2\arctan\omega_p\right) = \tan\left(\arctan\omega_p + \arctan\omega_p\right) = \frac{\omega_p + \omega_p}{1 - \omega_p\omega_p} = \frac{2\omega_p}{1 - \omega_p^2}$$

l'equazione da risolvere sarà

$$1 - \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}\frac{\omega_p}{10} = 1 - \frac{\omega_p^2}{5(1-\omega_p^2)} = 0$$

$$5 - 5\omega_p^2 - \omega_p^2 = 5 - 6\omega_p^2 = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}9129\,\text{rad/s}$$

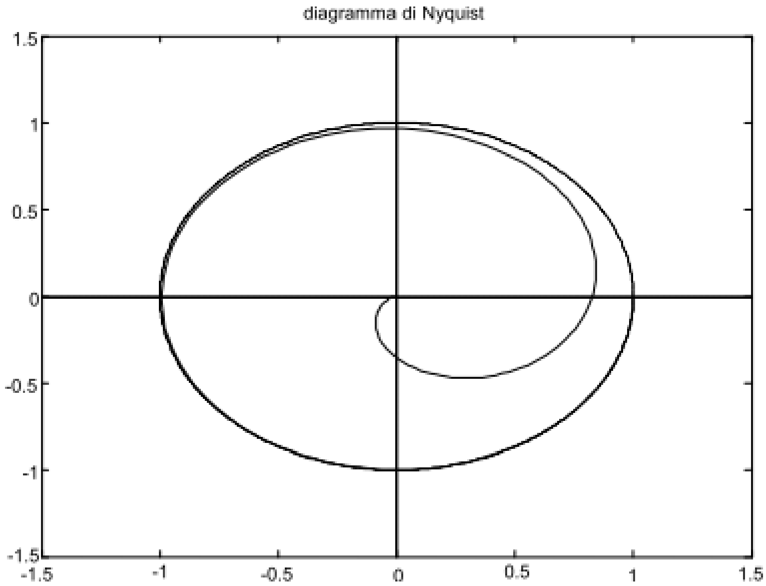
e l'intersezione sarà data da

$$\left|L(j\omega_p)\right| = \frac{100}{(100+\omega_p^2)} = \frac{100}{\left(100 + \dfrac{5}{6}\right)} = 0.9917$$

Pertanto

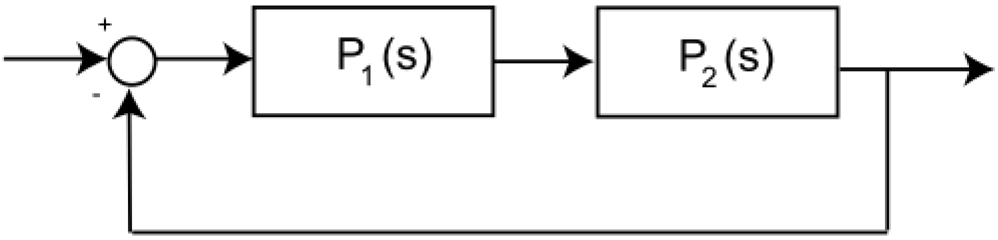
$$L(j\omega_p) = -0{,}9917$$

In accordo con i risultati ottenuti, il diagramma complessivo sarà il seguente



b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che L(s) non presenta poli a parte reale negativa ne consegue, per il Criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si osservi che tale stabilità è, da un punto di vista realizzativo, alquanto precaria in virtù di un margine di ampiezza estremamente piccolo (M_A=1,0083).

5. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P_1(s) = \dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$.

1. Posto $P_2(s) = 1$ tracciare il diagramma di Nyquist del guadagno di anello *L(s)* del sistema determinando in particolare asintoti e intersezioni con l'asse reale.
2. Nelle condizioni di cui al punto 1) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.
3. Posto $P_2(s) = \exp(-s)$ (ritardo finito di 1 secondo) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.

1) Sia $L(s) := P_1(s) \cdot P_2(s) = \dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\omega(1+\omega^2)(1+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\omega + arctg\omega = -\frac{\pi}{2} - arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma = 1(-1-1+1) = -1$

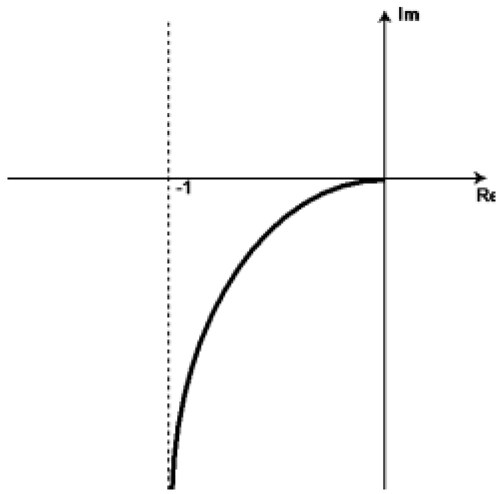
$$\lim_{\omega \to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo
$\lim_{\omega \to \infty} |L(j\omega)| = 0$

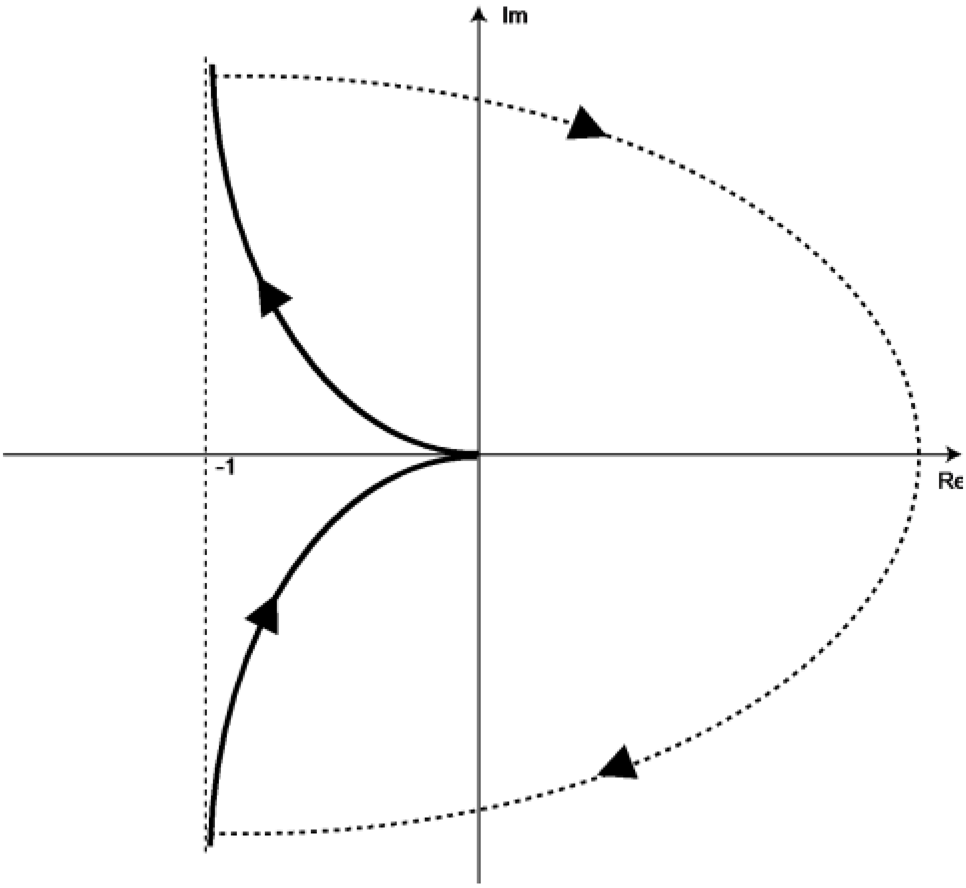
$$\lim_{\omega \to \infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Si può subito dedurre che il diagramma polare non presenta intersezioni con l'asse reale.

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **instabile** poichè il diagramma polare completo non circonda in senso antiorario 1 volta il punto critico -1. (Si ricorda che il guadagno di anello presenta 1 polo a parte reale positiva).

3) $$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)} e^{-j\omega}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\omega - \omega$$

osservando che

$\omega \to 0^+ \qquad e^{-j\omega} \to 1 - j\omega$

L'asintoto verticale ha ascissa

$\sigma = 1[-1-1] = -2$

Si può calcolare la prima intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_p\right) = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - arctg\omega_p - \omega_p = -\pi$$

$$arctg\omega_p + \omega_p = \frac{\pi}{2}$$

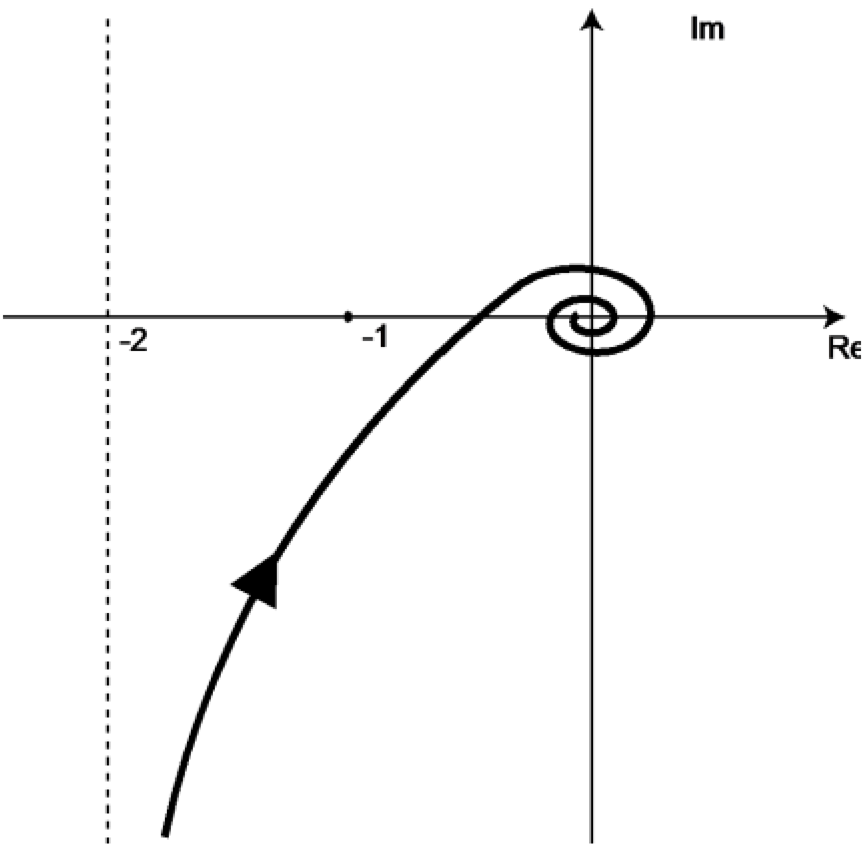
La soluzione a questa equazione può essere ricavata mediante una procedura numerica per tentativi e si ottiene

$$\omega_p \simeq 0.86 rad/\sec$$

$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = \frac{1}{\omega_p\left(1+\omega_p^{\ 2}\right)\left(1+\omega_p^{\ 2}\right)^{1/2}} \simeq 0.501$$

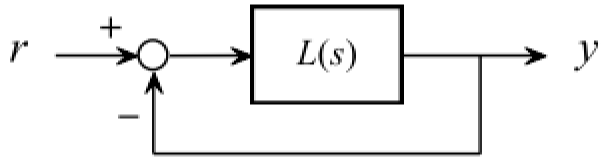
$$L\left(j\omega_p\right) \simeq -0.501$$

Il diagramma polare del guadagno di anello è del tipo:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è ancora **instabile** poiché il d.p.c. non circonda in senso antiorario il punto critico -1+j0.

5. [punti 4] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = \dfrac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.
b. Applicando il criterio di Nyquist studiare la stabilità del sistema retroazionato.

a. $L(jw) = \dfrac{1000}{(jw+1)(jw+2)(jw+5)(jw+10)}$

$L(j0) = 10$

$w \to +\infty \quad |L(jw)| \to 0 \quad \arg L(jw) \to -2\pi$

$1 + KL(s) = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$1 + K\dfrac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)} = 0 \qquad \beta := 1000\,K$

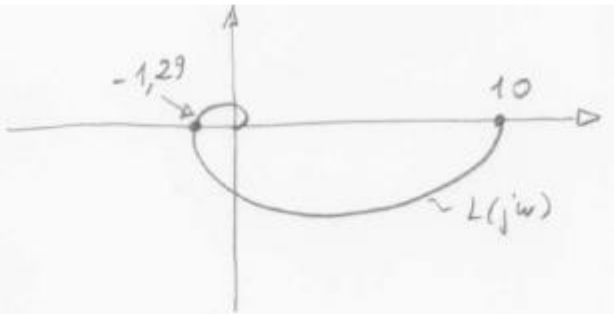
$s^4 + 18s^3 + 97s^2 + 180s + 100 + \beta = 0$

4	1	97	$100+\beta$
3	$\cancel{18}$ 1	$\cancel{180}$ 10	0
2	87	$100+\beta$	0
1	$870-100-\beta$		

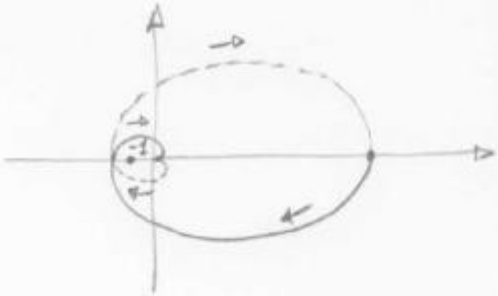
$770 - \beta = 0 \qquad \beta = 770$

$K = \dfrac{77}{100} = 0{,}77$

L'intersezione si ottiene in $-\dfrac{1}{K} = -\dfrac{100}{77} = -1{,}2987$

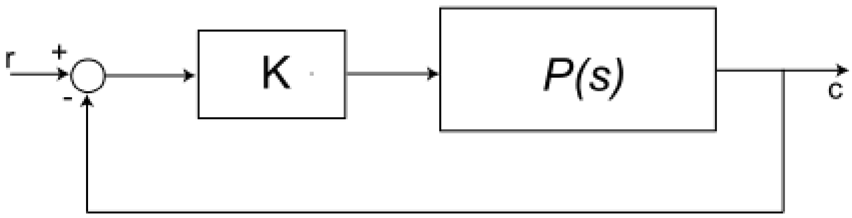


b.



Il diagramma polare completo circonda due volte, in senso orario, il punto critico -1. $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva, quindi per il Criterio di N. il sistema retroazionato è instabile.

5. **[punti 4.5]** Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{s^2}{(s^3-8)(s-1)}$.

1. Posto $K = 10$ tracciare il diagramma di Nyquist del guadagno di anello *L(s)* del sistema determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.
2. Nelle condizioni di cui al punto 1) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.

Sia $L(s) := K \cdot P(s) = \dfrac{10s^2}{(s^3-8)(s-1)}$

$$L(j\omega) = \frac{10(j\omega)^2}{\left[(j\omega)^3 - 8\right](j\omega - 1)} = \frac{10\omega^2}{(j\omega^3+8)(j\omega-1)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{10\omega^2}{(\omega^6+64)^{1/2} \cdot (\omega^2+1)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = \pi - arctg\frac{\omega^3}{8} + arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:

Il diagramma polare parte da un punto dell'asse reale e precisamente da:

$$\lim_{\omega\to 0^+} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = \pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:

Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = \pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$\pi - arctg\frac{\omega_p^{\ 3}}{8} + arctg\omega_p = -\pi$$

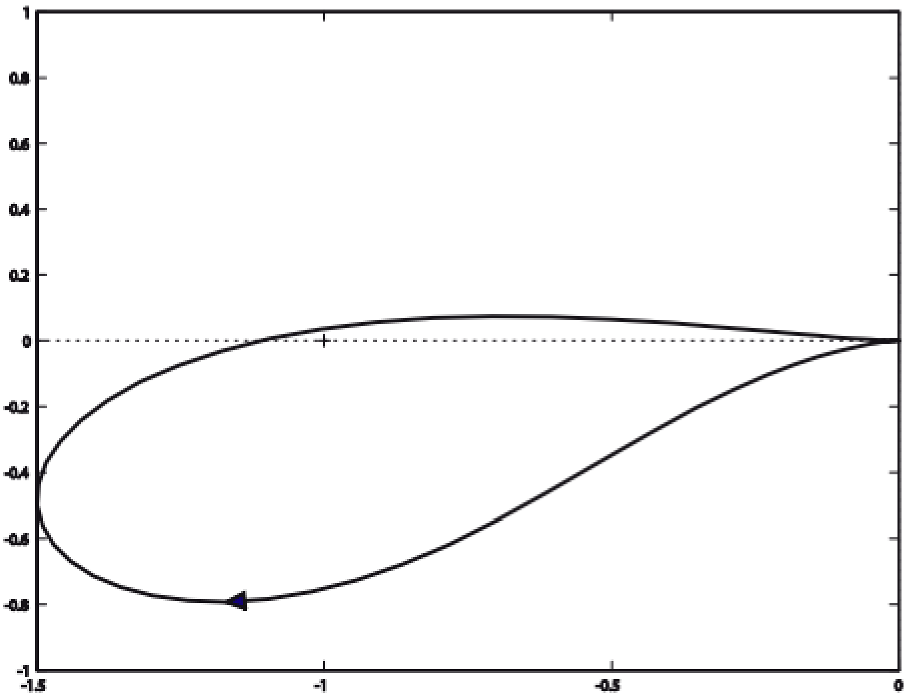
$$arctg\omega_p - arctg\frac{\omega_p^{\ 3}}{8} = -2\pi$$

$$\omega_p = 2\sqrt{2} rad/\sec$$

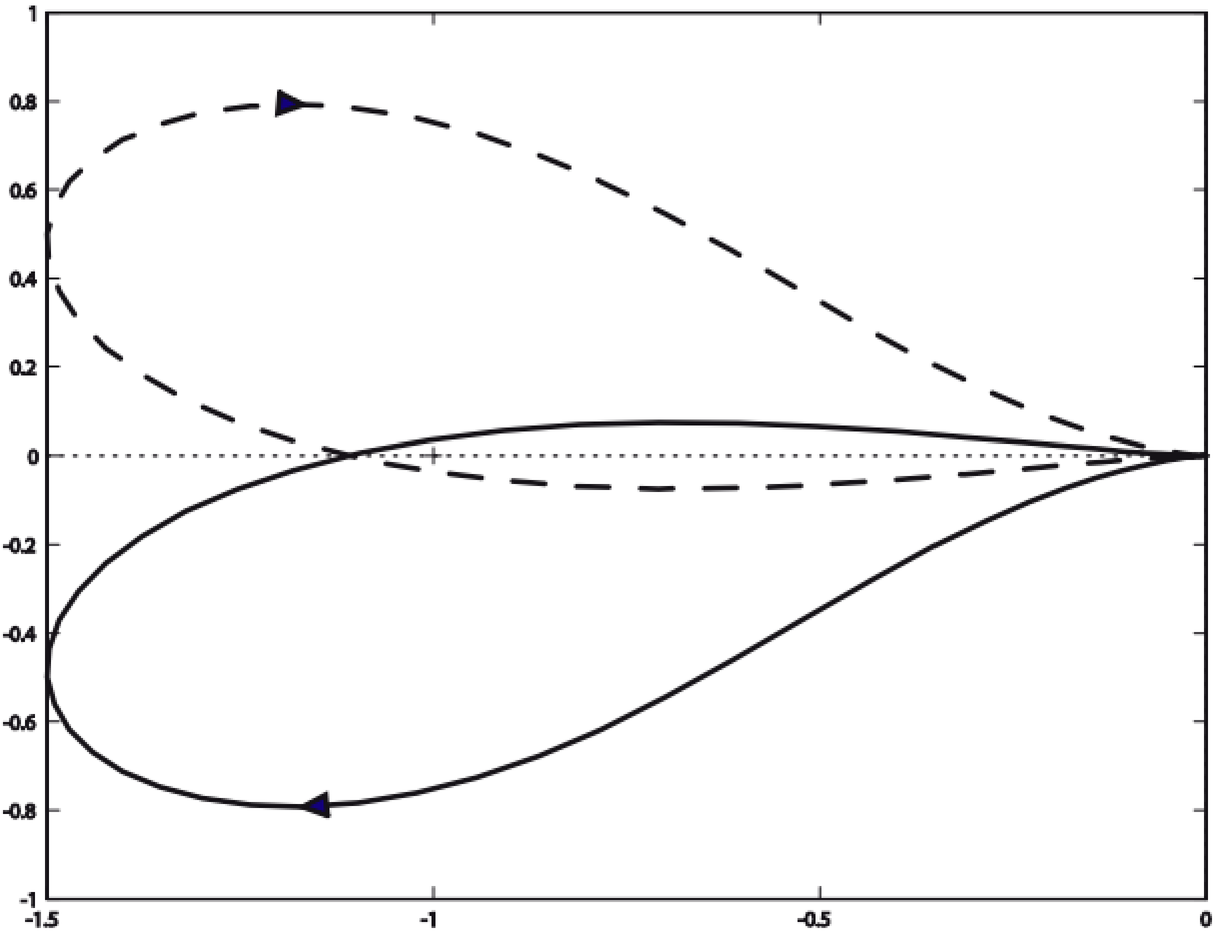
$$|L(j\omega_p)| = \frac{10\cdot(2\sqrt{2})^2}{\left((2\sqrt{2})^6+64\right)^{1/2} \cdot \left((2\sqrt{2})^2+1\right)^{1/2}} = 1.1111$$

$$L(j\omega_p) = -1.1111$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:

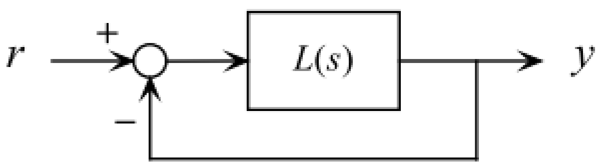


Mediante divisione polinomiale (col metodo di Ruffini per esempio) si constata che $s^3-8=(s-2)(s^2+2s+4)$; quindi s^3-8 ha una radice (semplice) a parte reale positiva ($+2$) e due radici a parte reale negativa.

Il sistema ad anello aperto presenta dunque due poli a parte reale positiva (+1, +2) quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se il d.p.c. circonda due volte in senso antiorario il punto critico -1.

Considerato che in effetti il d.p.c. circonda due volte il punto critico <u>in senso orario</u> si conclude che il sistema retroazionato è **instabile** (a causa di quattro poli a parte reale positiva)

5. [punti 4.5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s)=10\dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

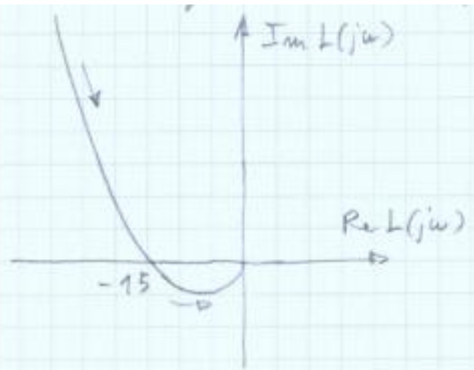
a) $L(j\omega) = 10\,\dfrac{(j\omega+1)(j\omega+2)}{(j\omega)^3}$

$\arg L(j\omega) = \mathrm{arctg}\,\omega + \mathrm{arctg}\,\dfrac{\omega}{2} - 3\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to 0+ \quad |L(j\omega)| \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -3\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\dfrac{\pi}{2}$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \omega + \dfrac{\omega}{2} - 3\cdot\dfrac{\pi}{2} > -3\dfrac{\pi}{2}$, quindi il diagramma di N. emerge da un punto all'infinito del secondo quadrante di $\mathbb{C}$.



Determinazione dell'intersezione con l'asse reale

$$1+K\frac{(s+1)(s+2)}{s^3}=0\ ,\quad K\neq 0$$

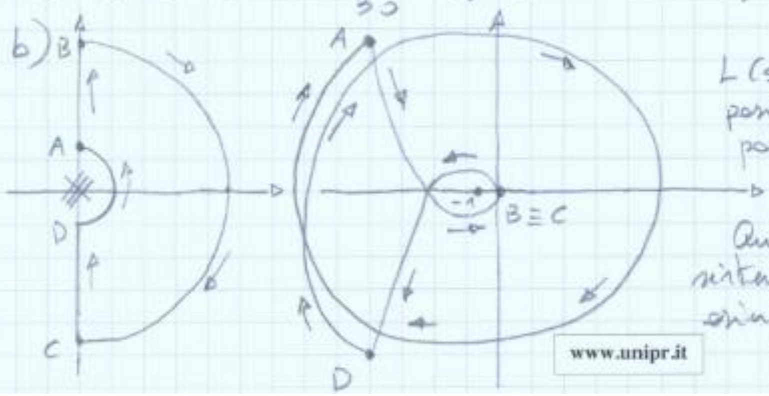
$$s^3+Ks^2+3Ks+2K=0$$

3	1	3K	0	$K(3K-2)=0$
2	K	2K	0	$K=\frac{2}{3}$
1	$3K^2-2K$	0		

L'eq. $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}L(s)=0$ ha radici puramente immaginarie.

$\exists\,\omega>0 \ni 1+\frac{2}{30}L(j\omega)=0 \qquad L(j\omega)=-15$

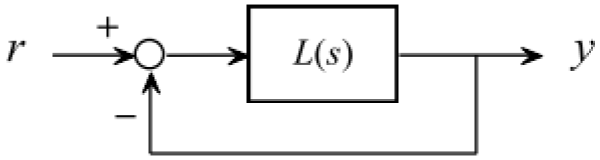
b)



L(s) non ha poli a parte reale positiva. Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto −1.

Quindi per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

2. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s)=10\frac{s+2}{s^2(s+1)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

a) $L(j\omega) = 10 \dfrac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 (j\omega + 1)}$

$\arg L(j\omega) = -\pi + \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\,\omega$

$\omega \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\pi \qquad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -\pi \qquad |L(j\omega)| \to 0$

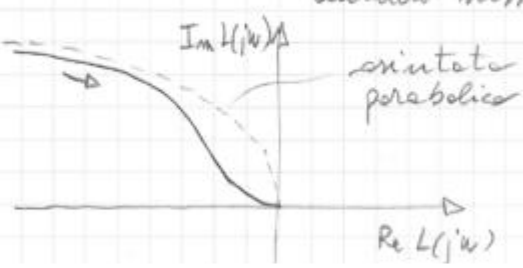
Per ω piccolo e positivo : $\arg L(j\omega) \cong -\pi + \frac{\omega}{2} - \omega = -\pi - \frac{\omega}{2} < -\pi$

$\Rightarrow$ emergenza del diagramma polare dal secondo quadrante.

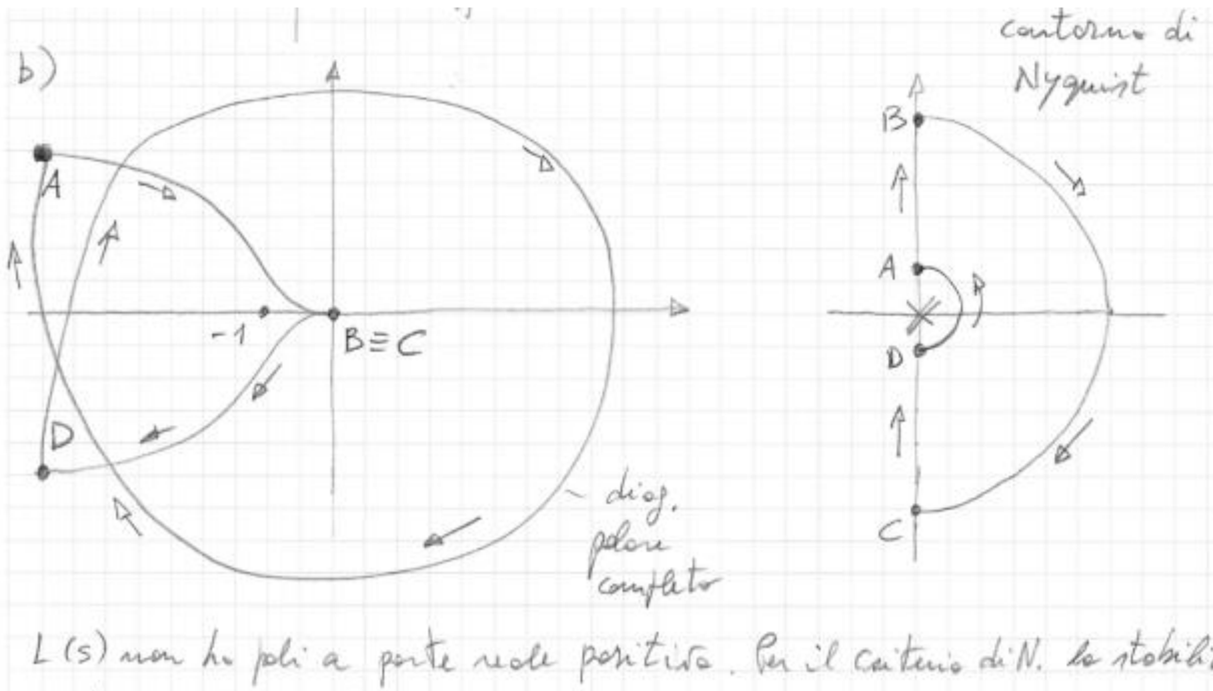
$\arg L(j\omega) = -\pi$ con $\omega > 0$: $\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\,\omega = 0$

$\dfrac{\frac{\omega}{2} - \omega}{1 + \frac{\omega}{2} \cdot \omega} = 0 \qquad -\frac{1}{2}\omega = 0$ nessuna soluzione per $\omega > 0$

Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo.

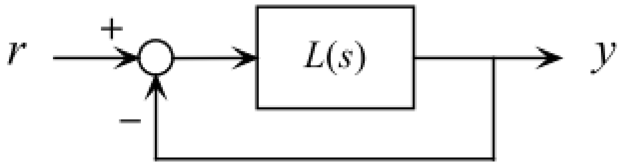


b)



L(s) non ha poli a parte reale positiva. Per il criterio di N. la stabilità asint. sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca il punto -1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte -1. Quindi il sistema ret. è instabile.

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 10 \cdot \dfrac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare mediante il criterio di Nyquist la stabilità del sistema retroazionato.

5.

$\boxed{1.}$ $L(j\omega) = 10 \dfrac{1+10j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)}$

$\arg L(j\omega) = \operatorname{arctg} 10\omega - \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{3}$

per ω piccolo $\arg L(j\omega) \simeq 10\omega - \omega - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = \frac{49}{6}\omega$,

quindi per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) > 0$.

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -\pi, \quad |L(j\omega)| \to 0$

$L(j0) = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$

Calcolo intersezioni: $1 + \eta L(s) = 0$ abbia radici pur. im.

$1 + \eta \cdot 10 \dfrac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0, \quad K := 10\eta$

$$1 + K\frac{1+10s}{(s^2+3s+2)(s+3)} = 0 \,, \quad s^3+6s^2+(11+10K)s+6+K=0$$

3	1	$11+10K$	0
2	6	$6+K$	0
1	$60+59K$	0	

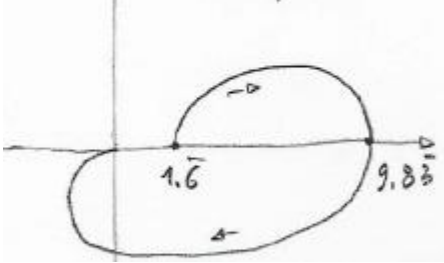
Si impone $60+59K=0$

$K = -\frac{60}{59}$. Per questo valore l'eq. ausiliaria $6s^2+6+K=0$ ammette radici pur. im.

$$\eta = \frac{K}{10} = -\frac{6}{59}$$

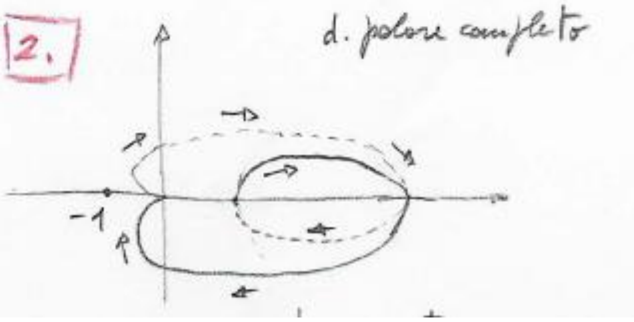
Da $1+\eta L(j\omega)=0$ segue $L(j\omega) = -\frac{1}{\eta} = \frac{59}{6} = 9.8\bar{3}$

d. polare



2.

d. polare completo



Il diagramma polare completo non tocca né circonda -1 e $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

5. **[punti 4.5]** Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 50\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

5.

1)

$$L(j\omega) = \frac{50(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{50(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega \to 0+} \left| L(j\omega) \right| = \infty$$

$$\lim_{\omega \to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| L(j\omega) \right| = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg 0.1\omega + 2 arctg \omega = -\pi$$

$$-arctg 0.1\omega + 2 arctg \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2 arctg \omega) \cdot 0.1\omega = 0$$

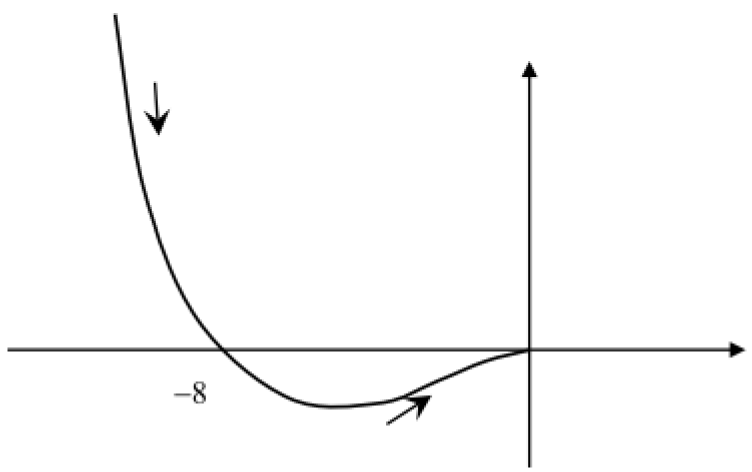
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} \cdot \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

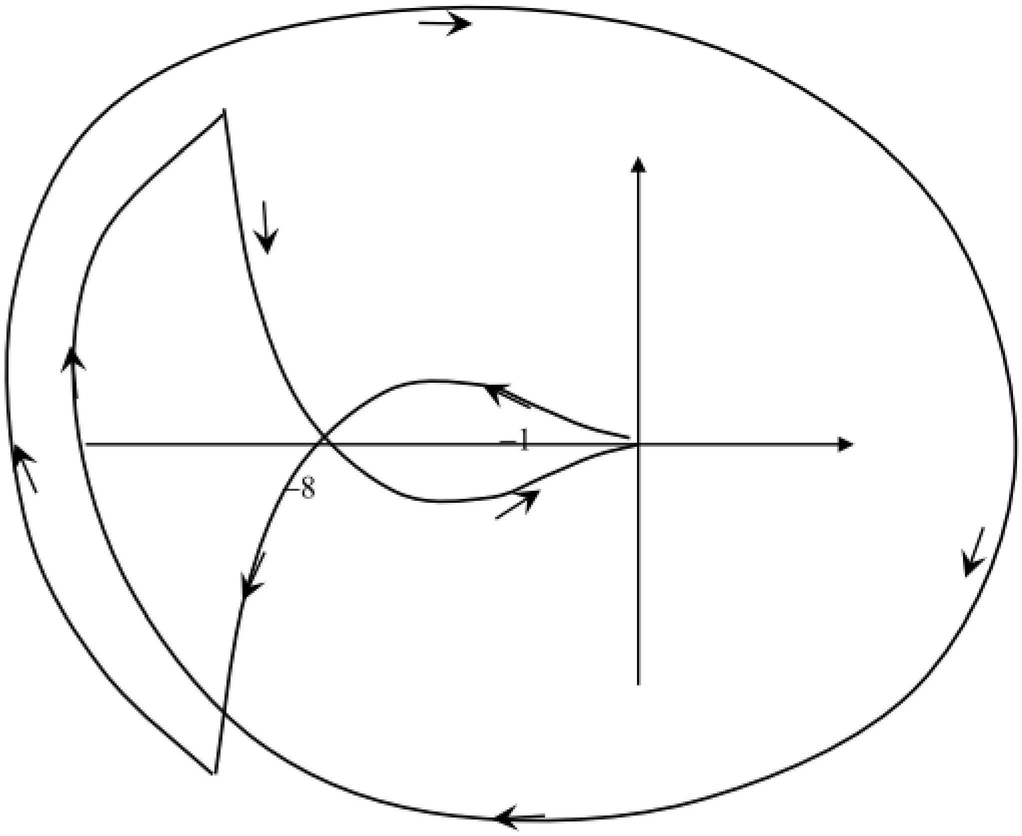
$$\left| L(j\omega_p) \right| = 8$$

$$L(j\omega_p) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.