Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$G(s) = \frac{100\, s}{(1+s)\, 10^2 (1+0.1\, s)^2} = \frac{s}{(1+s)(1+0.1\, s)^2}$$

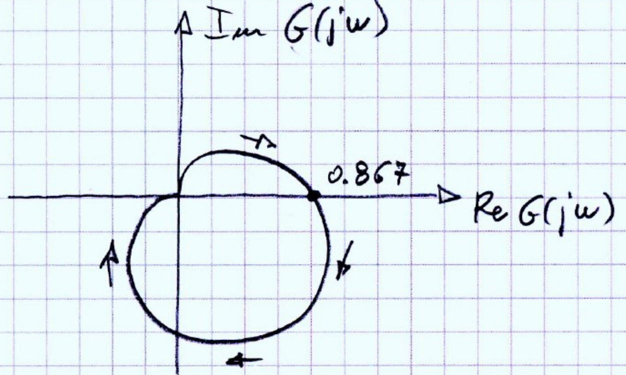
$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)(1+0.1\, j\omega)^2}$$

$$\arg G(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega - 2 \operatorname{arctg} 0.1\, \omega$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot (1+0.01 \cdot \omega^2)}$$

$\omega \to 0^+$ $\quad \arg G(j\omega) \to \frac{\pi}{2}$ $\quad |G(j\omega)| \to 0$

$\omega \to +\infty$ $\quad \arg G(j\omega) \to -\pi$ $\quad |G(j\omega)| \to 0$



determinazione dell'intersezione con l'asse reale positivo:

$1 + K\, G(s) = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$$1 + K \frac{100\, s}{(s+1)(s+10)^2} = 0 \qquad \text{sia } \eta := 100\, K$$

$$(s+1)(s+10)^2 + \eta\, s = 0 \qquad s^3 + 21\, s^2 + (120+\eta)\, s + 100 = 0$$

3	1	$120+\eta$	0
2	21	100	0
1	α		

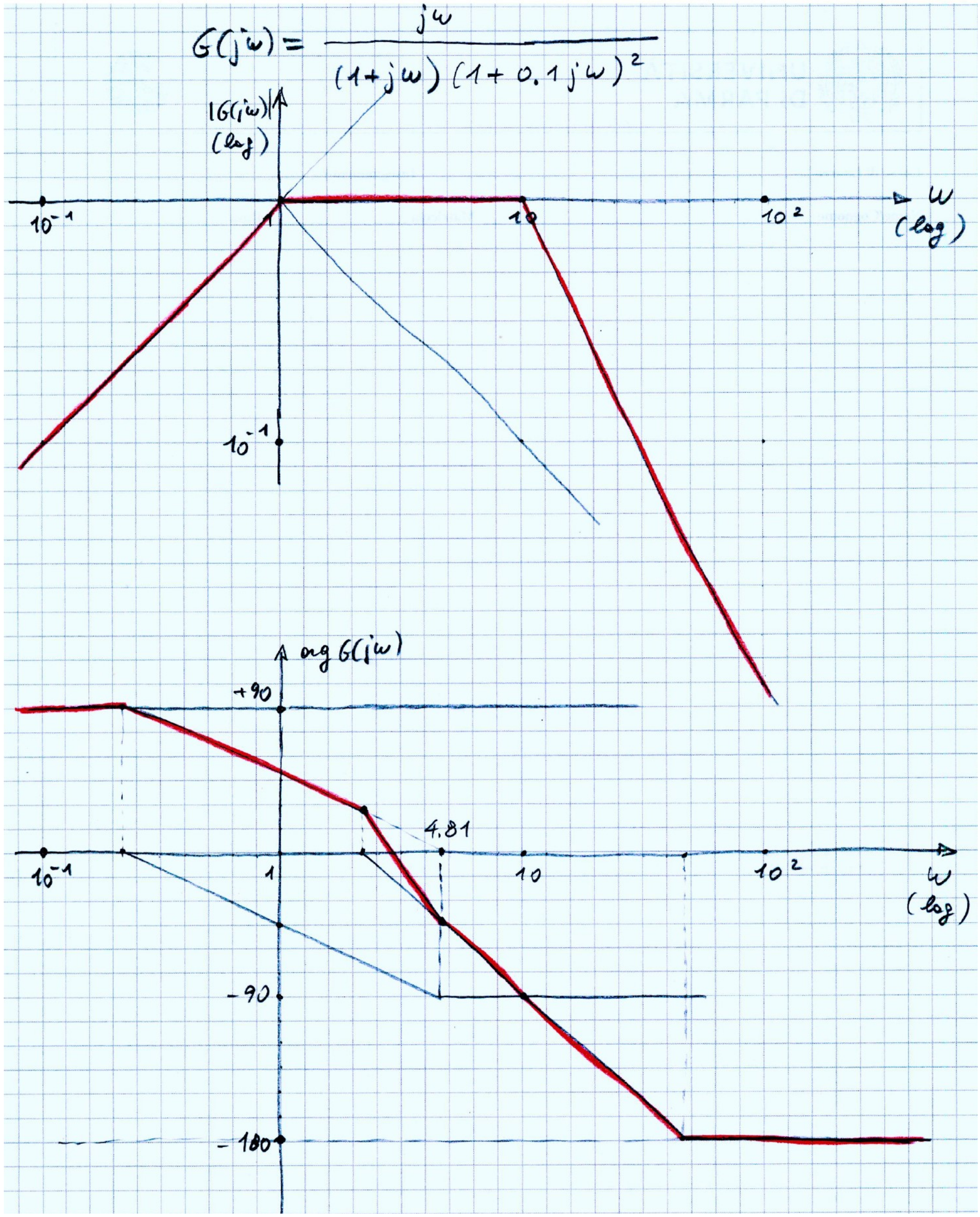
$$\alpha = 21\eta + 2420 = 0$$

$$K = -\frac{2420}{2100}$$

$$1 + K\, G(j\omega) = 0 \qquad G(j\omega) = -\frac{1}{K} = \frac{2100}{2420} = 0.867$$

eq. ausiliaria $\quad 21\, s^2 + 100 = 0$

$$s = \pm j \sqrt{\frac{100}{21}} = \pm j\, 2.18 \quad , \quad \omega = 2.18 \text{ rad/sec}$$



3.
Vedi dispese dell'insegnamento.

4.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K_1 \frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)} = 0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4 + 12s^3 + 32s^2 + K_1 s + K_1 = 0$$

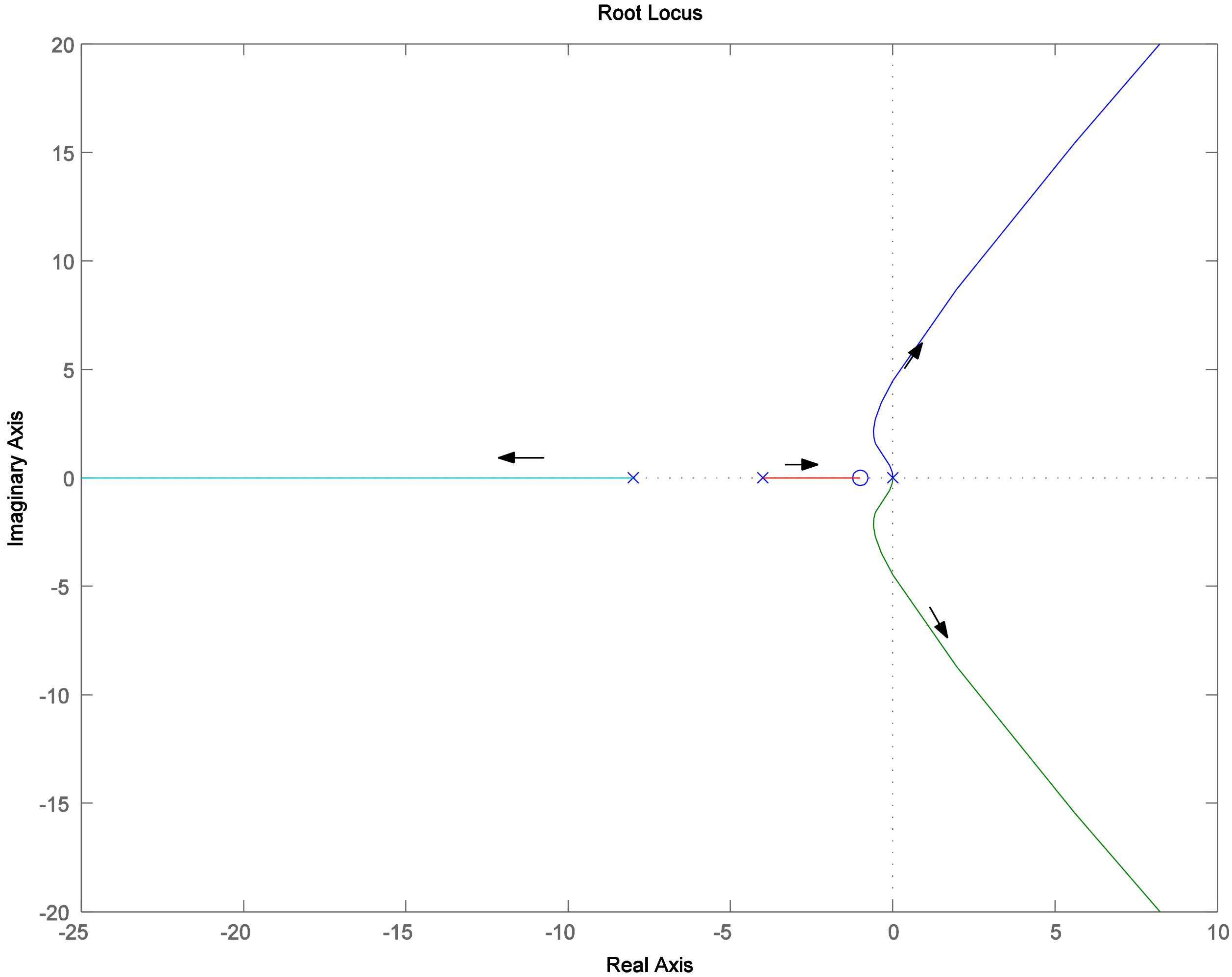
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384 - K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240 - K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1} = +60°,\ \vartheta_{a,2} = +180°,\ \vartheta_{a,3} = -60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a = \frac{-4-8-(-1)}{3} = -\frac{11}{3} \cong -3{,}67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2+12\cdot 240=0$$

$$s^2+20=0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s=\pm j\sqrt{20}\cong \pm j4{,}47$.

5.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s)=\frac{b_4\,s^4+b_3\,s^3+b_2\,s^2+b_1\,s+b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s)=C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1+L(s)=0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4)+b_4\,s^4+b_3\,s^3+b_2\,s^2+b_1\,s+b_0= \\ &= s^5+(4+b_4)\,s^4+(5+b_3)\,s^3+(20+b_2)\,s^2+(4+b_1)\,s+16+b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6)= \\ &= s^5+17\,s^4+107\,s^3+307\,s^2+396\,s+180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s)=p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4+4=17 \\ b_3+5=107 \\ b_2+20=307 \\ b_1+4=396 \\ b_0+16=180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4=13 \quad b_3=102 \quad b_2=287 \quad b_1=392 \quad b_0=164$$

Il controllore è quindi

$$C(s)=\frac{13\,s^4+102\,s^3+287\,s^2+392\,s+164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0)=1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1+C(0)\,P(0)}=F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1+\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}=F\,\frac{41}{45}=1$$

Si impone quindi

$$F=\frac{45}{41}=1.0976$$

6.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0.5z^2 + 0.06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0.5 z^2 + 0.06$

Si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $a(1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $a(-1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0.06 < 1$ ok!

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9964 > 0$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.99281 > 0.4683$ ok!

Tabella di Jury

1	0.06	0	−0.5	0	1
2	1	0	−0.5	0	0.06
3	−0.9964	0	0.47	0	
4	0	0.47	0	−0.9964	
5	0.99281	*	−0.4683		

Tutte le disequaglianze di Jury sono soddisfatte e quindi il sistema è asintoticamente stabile.