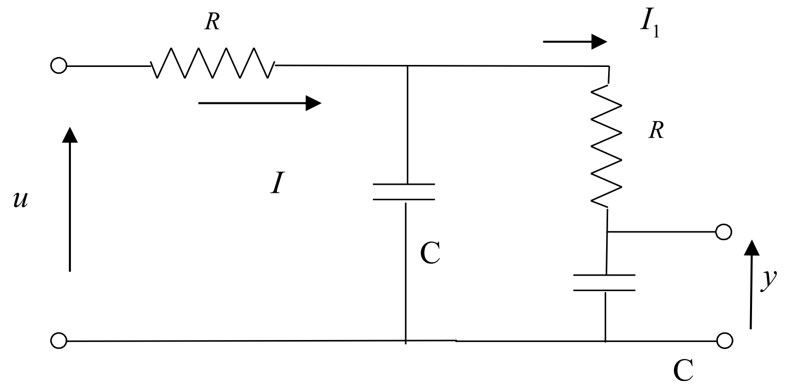
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.
1)



$$U = ZI$$

$$Z = R + \frac{RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

$$Y = \frac{1}{Cs}\cdot I_1 = \frac{1}{Cs}\cdot I\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Cs}\cdot\frac{U}{Z}\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}$$

$$G(s) := \frac{Y}{U} = \frac{1}{T^2s^2+3Ts+1}$$

2) I poli del sistema sono $\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$ e quindi i corrispondenti modi sono $\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$, $\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$.

3) L'equazione differenziale associata a G(s) è

$$T^2D^2y + 3TDy + y = u$$

3.

Soluzione

Metodo dei modi: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c_2 = -c_1 \\ -c_1 - 2(-c_1) = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{array}$$

Quindi $\boxed{y(t) = e^{-t} - e^{-2t}}$

Metodo dell'eq. differenziale: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

$D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = Du(t) + 3u(t)$

Applichiamo la Trasformata di Laplace

$s^2 Y - y(0+)s - Dy(0+) + 3(sY - y(0+)) + 2Y = 0$

$(s^2+3s+2)Y - 1 = 0 \qquad Y = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$K_1 = \left.\dfrac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1 \qquad K_1 + K_2 = 0 \qquad K_2 = -1$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-t} - e^{-2t}}$$

4.

Vedi dispense dell'insegnamento.

5.

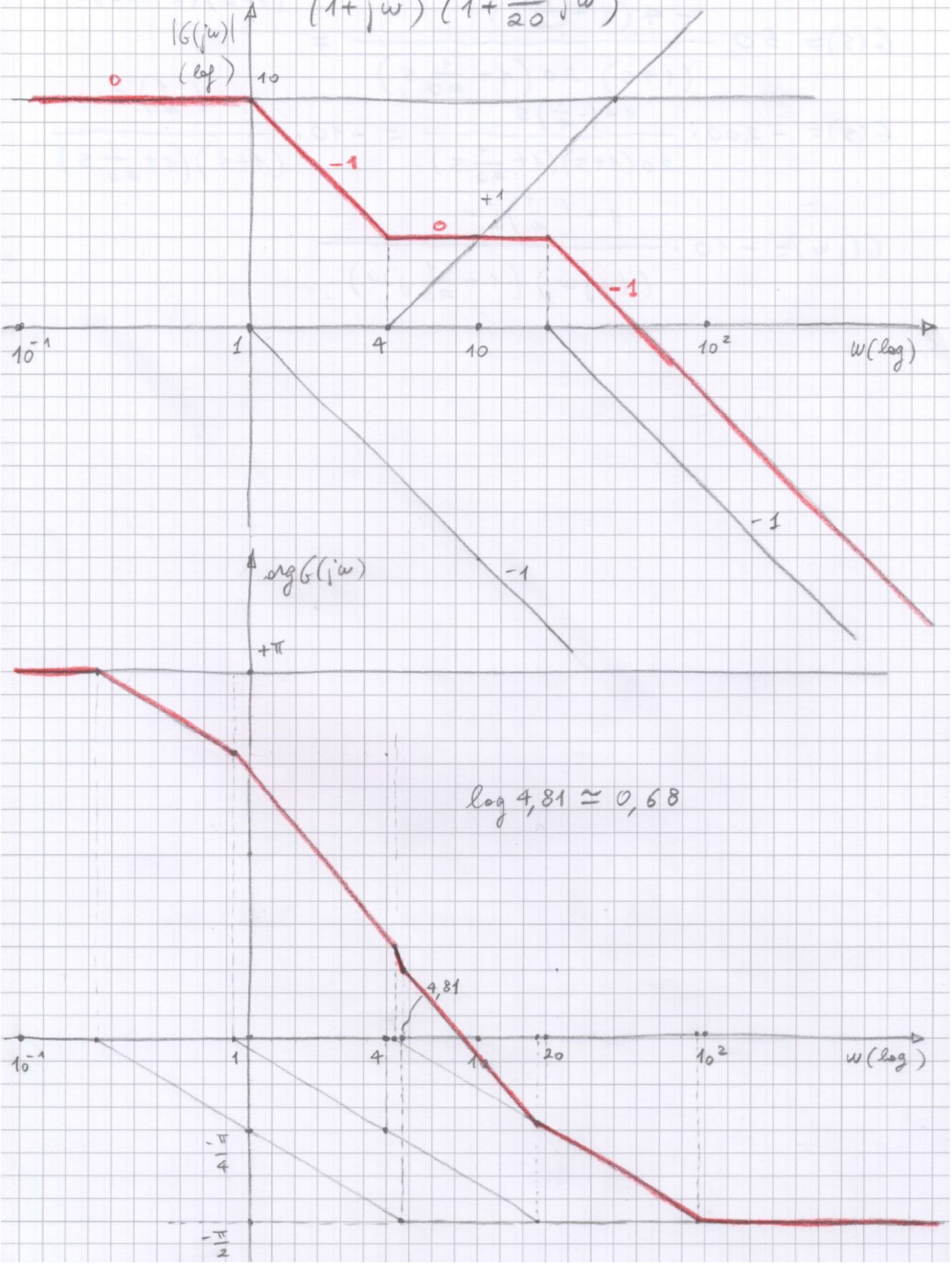
Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s) = 50 \dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$

$$G(s) = 50 \frac{-4\left(1 + \frac{1}{-4} s\right)}{(1+s)\cdot 20 \cdot \left(1 + \frac{1}{20} s\right)} =$$

$$G(s) = -200 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) s}{20 (1+s)\left(1 + \frac{1}{20} s\right)} = -10 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) s}{(1+s)\left(1 + \frac{1}{20} s\right)}$$

$$G(j\omega) = -10 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) j\omega}{(1+j\omega)\left(1 + \frac{1}{20} j\omega\right)}$$

$$G(j\omega) = -10 \cdot \frac{1 + (-\frac{1}{4})\, j\omega}{(1 + j\omega)\,(1 + \frac{1}{20}\, j\omega)}$$



6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

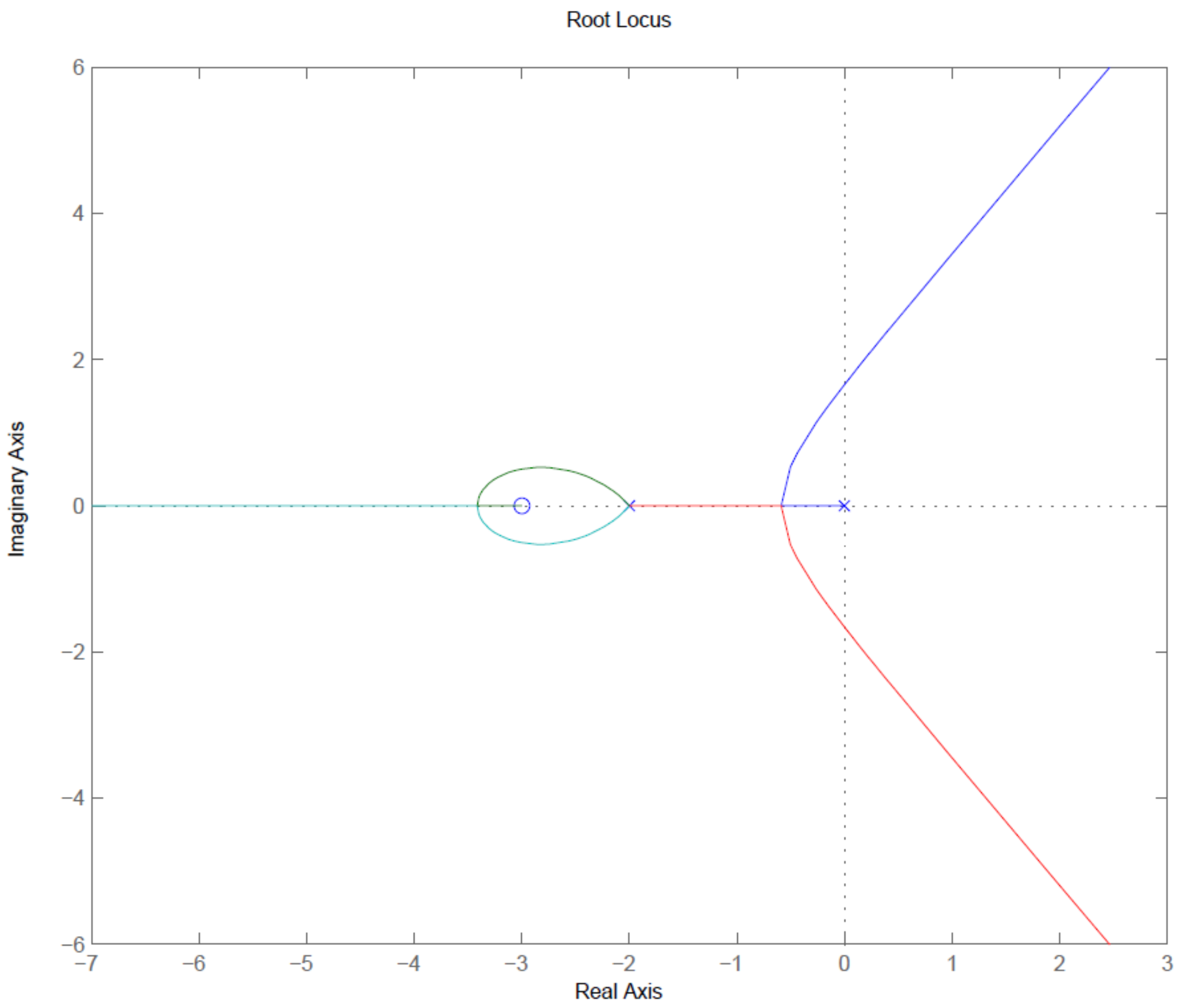
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
−2
−4
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

4	1	12	$3\,K$	0
3	6	$8+K$	0	0
2	64-K	18K	0	
1	$f(K)$	0		
0	$18\,K$	0		

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

1) Sia $F(s) := C(s)G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)^2}$

$$F(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{10}{\omega(\omega^2+4)}$$

$$\arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\frac{\omega}{2}$$

Studio del diagramma polare di $F(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma) = -2.5$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |F(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg F(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

L'intersezione con l'asse reale negativo si può calcolare con il metodo della tabella di Routh, imponendo che l'equazione $F(s)+\eta$ abbia radici puramente immaginarie, con $\eta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{10}{s(s+2)^2} + \eta = 0$$

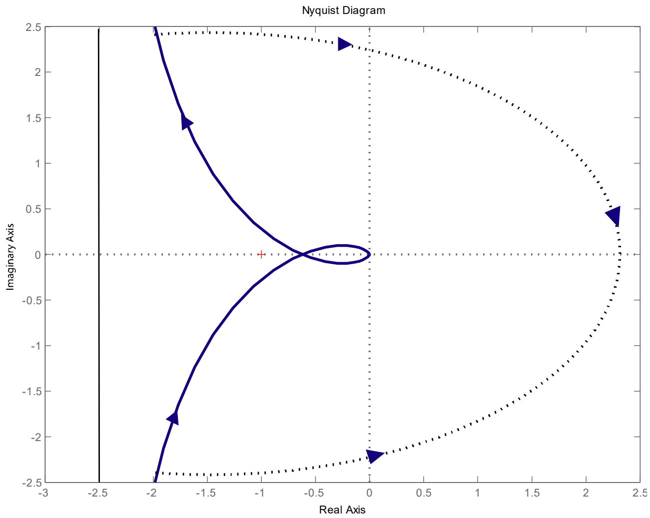
$$s^3 + 4s^2 + 4s + \frac{10}{\eta} = 0$$

3	1	4
2	2	$\frac{5}{\eta}$
1	$8-\frac{5}{\eta}$	0
0		

Si deve cercare la soluzione (con $\eta > 0$) tale che sia nulla la riga 1:

$$8 - \frac{5}{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \frac{5}{8}$$

L'attraversamento dell'asse reale avverrà nel punto $-5/8$.



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è stabile con margine di ampiezza $M_A = \frac{8}{5} = 1.6$, infatti il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1.

2) Si può progettare la rete anticipatrice per cancellazione polo-zero fissando $\tau = 0.5\sec$.

$$C(s) = K_c \frac{1+0.5s}{1+\alpha 0.5s} = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s}$$

Posto

$$L(s) = C(s)F(s) = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s} \cdot \frac{10}{s(s+2)^2} = K_c \frac{10}{s(2+\alpha s)(s+2)}$$

Dalla specifica sulla costante di velocità si ricava:

$$k_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{10k_c}{4}$$

$$k_v = 10 \quad \Rightarrow \quad k_c = 4$$

e quindi

$$L(s) = \frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)}$$

Qualitativamente il diagramma polare di $L(j\omega)$ è dello stesso tipo di quello tracciato per $F(j\omega)$. La stabilità è assicurata con $M_A = 5$ se l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo avviene in $-1/5$.

Per fare in modo che ciò avvenga bisogna imporre che l'equazione $L(s)+\frac{1}{5}=0$ abbia radici puramente immaginarie.

$$\frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)}+\frac{1}{5}=0$$

$$\alpha s^2+(2+2\alpha)s^2+4s+200=0$$

3	α	4
2	$1+\alpha$	100
1	$4(1+\alpha)-100\alpha$	0
0		

Bisogna imporre $4(1+\alpha)-100\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{4}{96}\simeq$ (soluzione ammissibile in quanto $\alpha\in(0,1)$).

In definitiva la rete correttrice cercata è

$$C(s)=4\frac{1+0.5s}{1+\frac{4}{96}\cdot 0.5s}$$

Il problema poteva essere risolto anche utilizzando le formule di inversione …….

8.

6. $u(k) = 2 \cdot 1(k) \qquad U(z) = 2 \cdot \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)} \cdot \frac{2 \cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{(z^2+1) \cdot \cancel{2} \cdot z}{(z+1)^2 \cdot \cancel{2}\left(z+\frac{1}{2}\right) \cdot (z-1)} = \frac{z\left(z^2+1\right)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2}$$

$$\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_{31}}{(z+1)^2} + \frac{c_{32}}{z+1}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{\cancel{2}}{\frac{3}{2} \cdot 2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}}} = -5 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$c_{31} = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)} = 2$$

$$c_1 + c_2 + c_{32} = 0 \qquad c_{32} = -c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3$$

$$Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{10}{3} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{z}{(z+1)^2} + 3\frac{z}{z+1}$$

$$y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2 \cdot k \cdot (-1)^{k-1} + 3 \cdot (-1)^k, \quad k \geq 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \cdot k \cdot (-1)^k + 3 \cdot (-1)^k, \quad k \geq 0$$