Tracce delle soluzioni

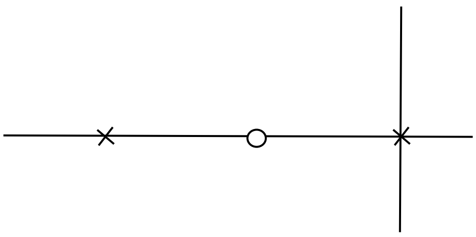
1.
vedi dispense del corso.

2.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_{t,i}} = -\frac{R + \frac{1}{sC}}{2R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}}} = -\frac{1 + RCs}{2RCs + R^2C^2s^2} = -\frac{1 + Ts}{Ts(2 + Ts)}$$

2.

$$G(s) = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{s + \frac{1}{T}}{s\left(s + \frac{2}{T}\right)} \qquad \text{zeri: } z_1 = -\frac{1}{T}\ ; \quad \text{poli: } p_1 = 0\ ,\ p_2 = -\frac{2}{T}$$



3. $G(s) = \dfrac{-s - \frac{1}{T}}{Ts^2 + 2s} \qquad \Rightarrow \qquad TD^2y + 2Dy = -Du - \dfrac{1}{T}u$

3

1) $Du = -2e^{-t}$ $\quad D^2u = 2e^{-t}$ $\quad Dy = -2e^{-2t}$ $\quad D^2y = 4e^{-2t}$

$4e^{-2t} + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) =$

$= 2e^{-t} + 2(-2e^{-t}) + 2e^{-t}$ $\quad$ OK! vero $\forall t < 0$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t = 0-$.

$$y(t) = e^{-2t} \Rightarrow y(0-) = 1$$

$$Dy = -2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-) = -2$$

$$u(t) = 2e^{-t} \Rightarrow u(0-) = 2$$

$$Du(t) = -2e^{-t} \Rightarrow Du(0-) = -2$$

$$s^2Y(s) - sy(0-) - Dy(0-) + 4\big(sY(s) - y(0-)\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - su(0-) - Du(0-) + 2\big(sU(s) - u(0-)\big) + U(s)$$

$$s^2Y(s) - s + 2 + 4\big(sY(s) - 1\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - 2s + 2 + 2\big(sU(s) - 2\big) + U(s)$$

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) - s - \cancel{2} =$$

$$= (s^2 + 2s + 1)U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) = (s^2 + 2s + 1)U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 4s + 4}U(s) - \frac{s}{s^2 + 4s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2} \cdot \frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left. \frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2} \right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left. \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s} \right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \implies K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

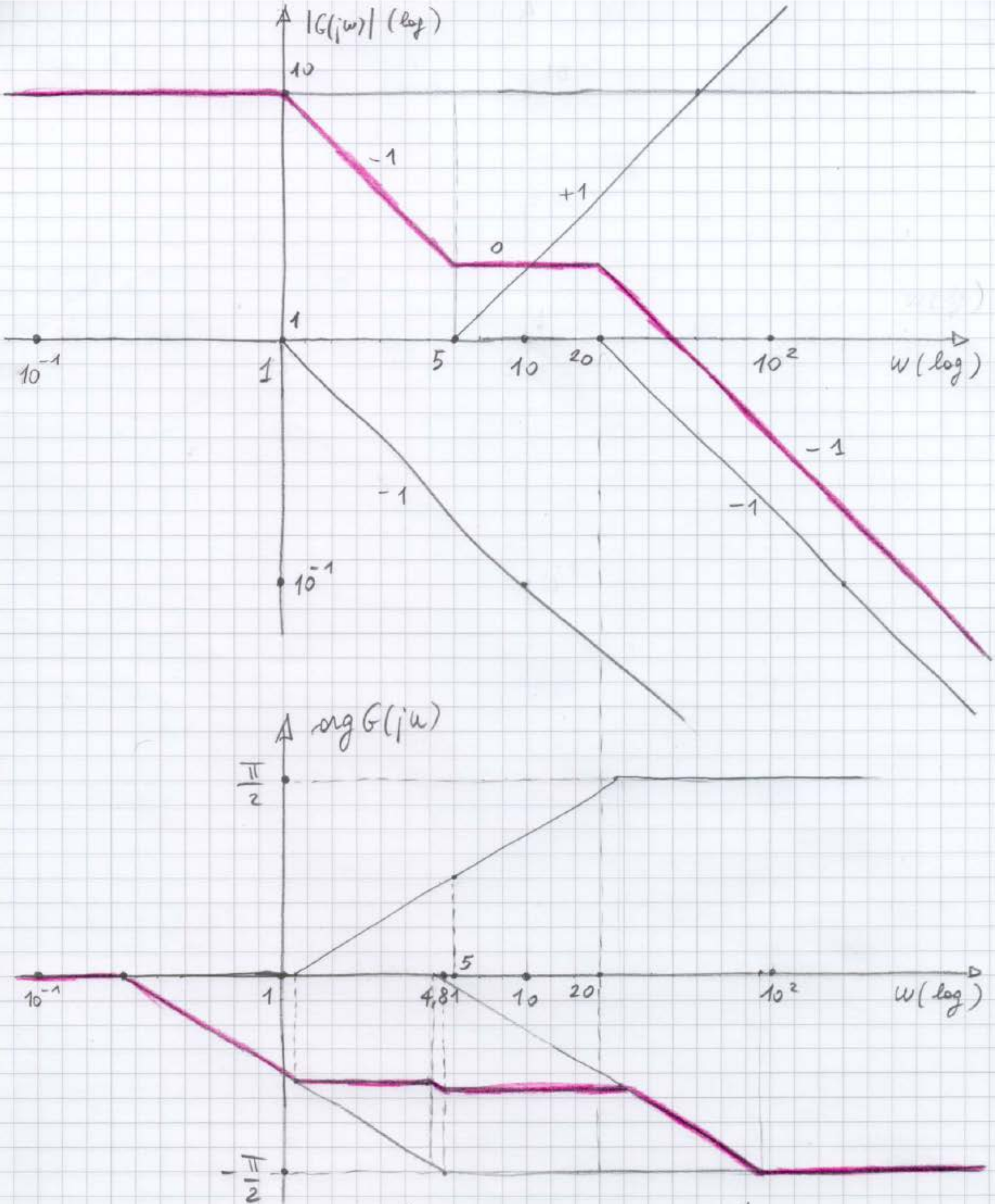
(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3\,t\,e^{-2t} + \frac{13}{2} e^{-2t}}$$

4.
Vedi dispense dell'insegnamento.

5.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

6.

7

a. $1 + K\dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $K>0$, poli: 0, $-2 \pm j$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60°$, $+180°$, $-60°$ e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

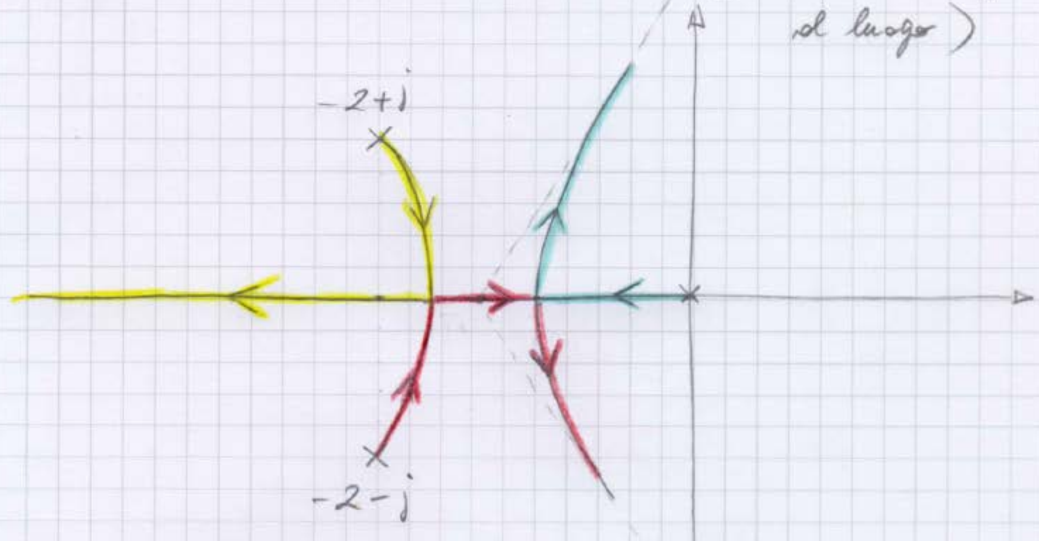
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180°$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è φ :

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,2\right) = -\mathrm{arctg}\,2 = -63°{,}43$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63°{,}43$

Calcolo delle radici doppie: $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+2+j} + \dfrac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2+8s+5=0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$1 + K^* \left. \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} \right|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 2$$

c. $$e_r = \frac{5}{K_r}, \quad K_r = \lim_{s\to 0} s \frac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \frac{2}{5}$$

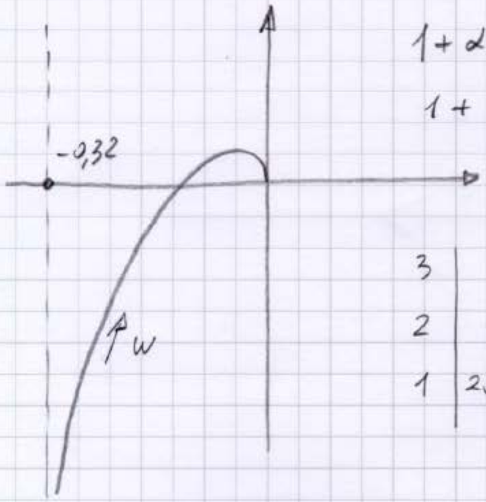
$$e_r = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

d. $$L(s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s\left(1 + \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5}\right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(j\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{5} + j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0{,}32$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1 + \alpha L(s) = 0$ abbia radici puram. immaginarie

$$1 + \alpha \cdot \frac{2}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0, \quad \beta \triangleq 2\alpha$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + \beta = 0$$

3	1	5	0
2	4	β	0
1	$20-\beta$	0	

$20 - \beta = 0 \quad \beta = 20$

$\Rightarrow \alpha = 10$

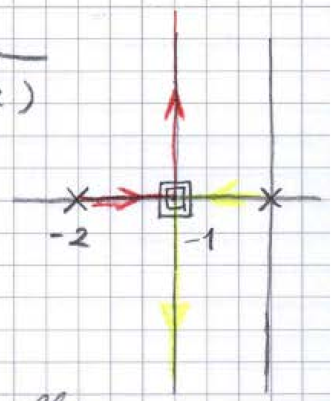
Intersezione in $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow M_A = 10$$

7.

$$C(s) = K\frac{s+\alpha}{s}$$; α determinato con cancellazione polo-zero

$$\alpha = 2 \Rightarrow L(s) = C(s)P(s) = K\frac{10}{s(s+2)}$$



eq. caratteristica : $1 + K\frac{10}{s(s+2)} = 0$

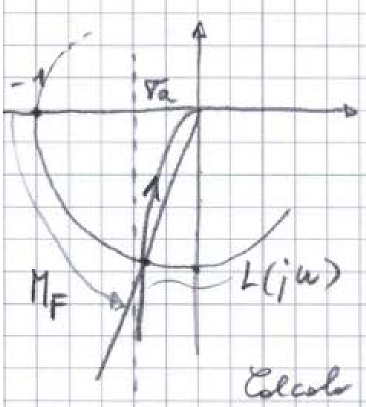
$T_a = \frac{3}{G_s}$, $T_a = 3 \Leftrightarrow G_s = 1$ rad/sec.

$G_s = 1$ quando il valore di K corrisponde alla radice doppia -1 :

$$1 + K\frac{10}{(-1)\cdot(1)} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\boxed{C(s) = 0,1\cdot\frac{s+2}{s}}$$

a) $L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{0,5}{j\omega(1+0,5j\omega)}$



$M_A = +\infty$

$\sigma_a = 0,5\,(-0,5) = -0,25$

Calcolo approssimato di M_F : $0,25 = 1\cdot\cos M_F$

$M_F = \arccos 0,25 = 75°,5$

Calcolo esatto di M_F : $|L(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \omega = 0,4859$ rad/sec è la pulsazione critica

$$M_F = 180° + \arg L(j0,4859) = 180° - 90° - \operatorname{arctg}\frac{0,4859}{2}$$
$$= 90° - 13°,66 = 76°,34$$

b) $e_\infty = 0$ perché il sistema è di tipo 1.

Un approccio alternativo, più generale, per determinare il controllore è il seguente:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \quad \text{(imposizione specifica 1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_a = 3 \text{ sec.} \Rightarrow \sigma_s = 1 \text{ rad./sec.} \\ S = 0 \end{array}\right\} \text{imposizione specifica 2}$$

Quindi il polinomio caratteristico desiderato può essere descritto come

$$P_d(s) = (s+1)(s^2 + \alpha s + \beta)$$

radici $s_{1,2}$ del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$: $Re\, s_{1,2} < -1$

Sia $z = s+1$, $s = z-1$, $Re\, s < -1 \Leftrightarrow Re\, z < 0$

$$(z-1)^2 + \alpha(z-1) + \beta = 0$$

$$z^2 + (\alpha - 2) z + \beta - \alpha + 1 = 0$$

Quindi $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - \alpha + 1 > 0 \end{cases}$

$$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$$

$$1 + \frac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)^2} = 0$$

$$s(s+2)^2 + 10 b_1 s + 10 b_0 = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + 10 b_1)s + 10 b_0$$

Si impone $\quad P_d(s) \equiv P_c(s)$

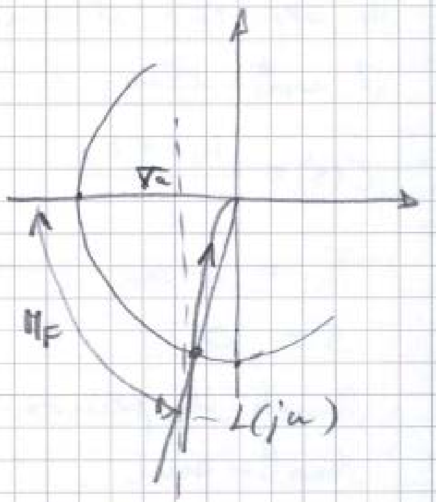
$$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 \\ \alpha + \beta = 4 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{ok!} \quad \beta > 2 \\ \beta = 1 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 \end{array}$$

I poli non dominanti sono $-1.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\beta}$

Sagliamo β : $9 - 4\beta = 0$, $\beta = \frac{9}{4}$ $(\beta > 2 \text{ ok!})$

$$b_0 = \frac{9}{40} = 0.225 \qquad b_1 = \frac{5}{40} = 0.125 \qquad \boxed{C(s) = \frac{0.125 \cdot s + 0.225}{s}}$$

a) $L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1+\frac{5}{9}s}{s\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2}$



$L(j\omega) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1+\frac{5}{9}j\omega}{j\omega\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)^2}$

$\sigma_a = \frac{9}{16}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{9}\right)\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$

calcolo app. di M_F : $0,25 = 1\cdot\cos M_F$

$M_F \simeq \arccos 0.25 = 75{,}5^\circ$

$M_F = +\infty$

8.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z) = \frac{1}{z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$ ok!

2) $(-1)^3 a(-1) > 0$

$$(-1)\,(-1 + \cancel{0.5} - \cancel{0.5} + 0.5) > 0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0| < a_n$

$$|0.5| < 1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	−0.75	*	−0.25	

$$|-0.75| > |-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.