Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

1) Sia $L(s) := \dfrac{100(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

$$L(j\omega) = \frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{100(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

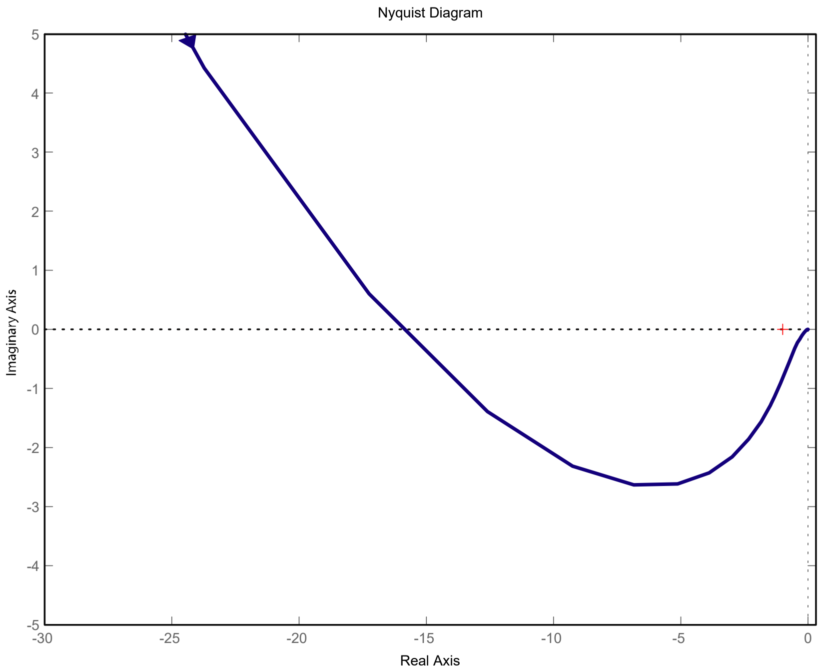
$$1 + tg(2arctg\,\omega)\cdot 0.1\omega = 0$$

$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} - \frac{\omega}{10} = 0$$

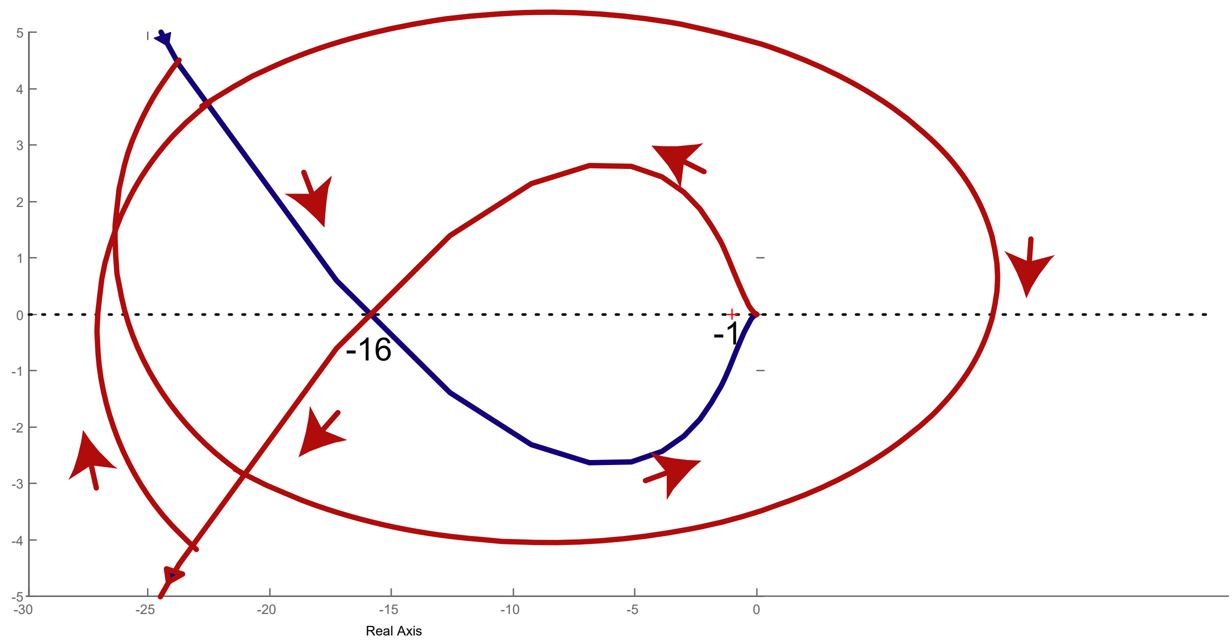
$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = 16$$
$$L\left(j\omega_p\right) = -16$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

3.
Vedi dispense dell’insegnamento.

4.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

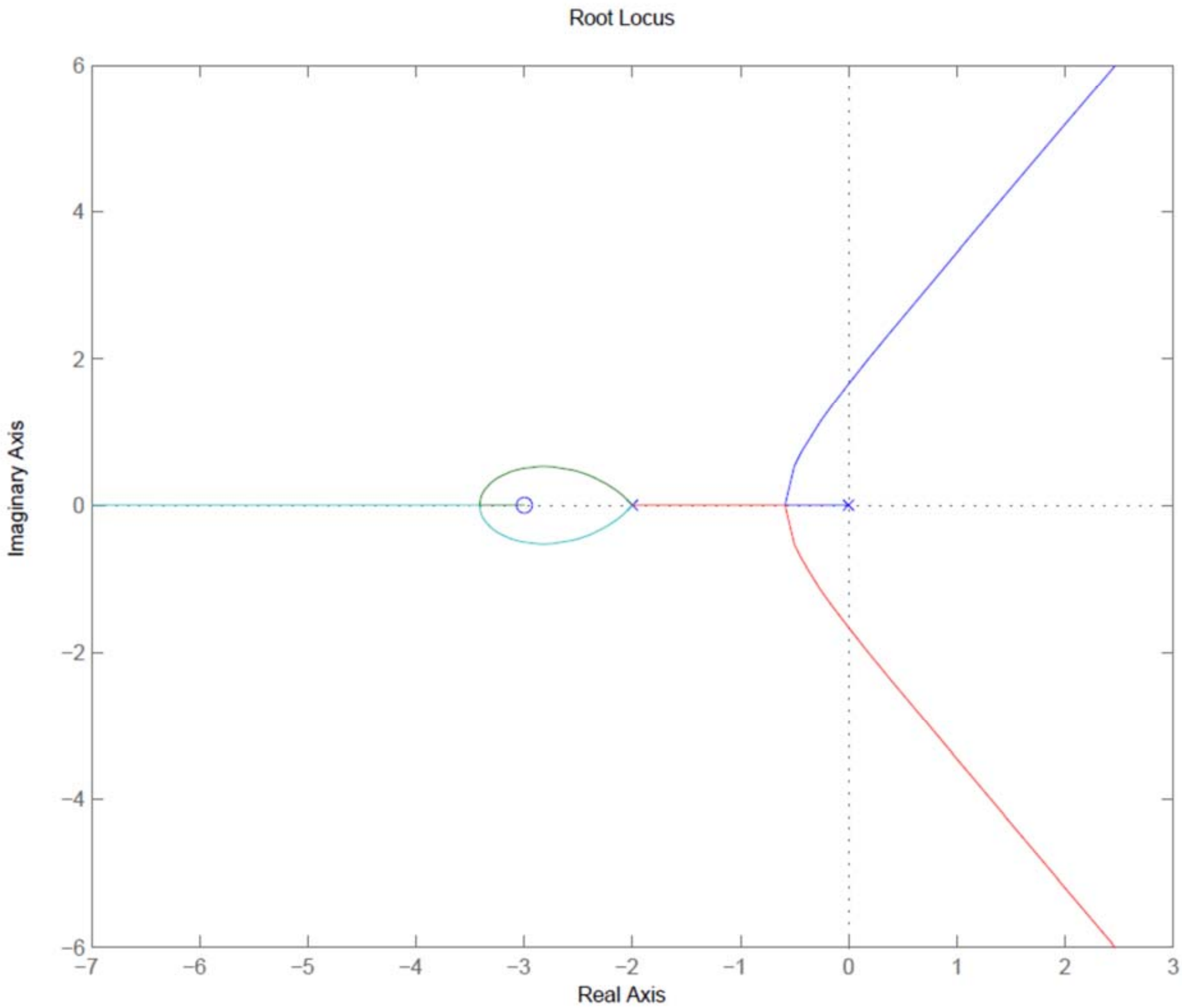
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

5.

5) $C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4}$

$L(s) \triangleq C(s)\,P(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4} \cdot \dfrac{4}{s+2}$; $L(0) = \dfrac{b_0}{2}$

$K_p = L(0) = \dfrac{b_0}{2}$. Da $K_p = 4 \Rightarrow b_0 = 8$

$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \dfrac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 8)}{(s^2+4)(s+2)} = 0$

$(s^2+4)(s+2) + 4(b_2 s^2 + b_1 s + 8) = 0$

polinomio caratteristico associato al controllore:

$P_c(s) \triangleq s^3 + (4b_2+2)s^2 + (4b_1+4)s + 40$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$P_d(s) \triangleq (s+2)(s+3)(s+c) = s^3 + (c+5)s^2 + (5c+6)s + 6c$

con $c \gg 3$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4b_2 + 2 = c+5 & \Rightarrow b_2 = \dfrac{29}{12} \\ 4b_1 + 4 = 5c+6 & \Rightarrow b_1 = \dfrac{53}{6} \\ 40 = 6c & \Rightarrow c = \dfrac{20}{3} \gg 3 \text{ ok!} \end{cases}$$

$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \dfrac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \qquad F \cdot \dfrac{4}{1+4} = 1 \qquad F = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

6.

1)

$$P(s)=\frac{10}{s(s+10)}\ ,\ T=0.02\ \text{sec}$$

$$P_d(z)=\frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s},T\right]$$

$$\frac{P(s)}{s}=\frac{10}{s^2(s+10)}=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_2}{s+10}=\frac{1}{s^2}-\frac{0.1}{s}+\frac{0.1}{s+10}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]=t-0.1+0.1\cdot e^{-10\cdot t}\ ,\ t\geq 0$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s},T\right]=\mathcal{Z}\left[P_s(kT)\right]=\mathcal{Z}\left[k\cdot 0.02-0.1+0.1\cdot e^{-10\cdot k\cdot 0.02}\right]=$$

$$=0.02\cdot\frac{z}{(z-1)^2}-0.1\frac{z}{z-1}+0.1\,\mathcal{Z}\left[\left(e^{-0.2}\right)^k\right]=$$

$$=0.02\frac{z}{(z-1)^2}-0.1\frac{z}{z-1}+0.1\frac{z}{z-0.8187}$$

$$P_d(z)=0.02\frac{1}{z-1}-0.1+0.1\frac{z-1}{z-0.8187}=$$

$$=\frac{0.02\cdot(z-0.8187)-0.1(z-1)(z-0.8187)+0.1(z-1)^2}{(z-1)(z-0.8187)}=$$

$$=\frac{0.00187\cdot z+0.001756}{(z-1)(z-0.8187)}$$

$$T_{\tilde{z}\tilde{c}}(z)=\frac{L(z)}{1+L(z)}\ ;\ L(z):=k\,P_d(z)$$

eq. caratteristica : $1+k\,P_d(z)=0$

$$1 + k \frac{0{,}00187 \cdot z + 0{,}001756}{(z-1)(z-0{,}8187)} = 0$$

$$(z-1)(z-0{,}8187) + k(0{,}00187 \cdot z + 0{,}001756) = 0$$

$$z^2 + (0.00187 \cdot k - 1{,}8187) z + 0{,}001756 \cdot k + 0{,}8187 = 0$$

$$a(z) = 0$$

Condizioni di stabilità asintotica

1) $a(1) > 0$

2) $(-1)^n a(-1) > 0$

3) $|a_0| < a_2$

1) $\cancel{1} + 0.00187 \cdot k - \cancel{1{,}8187} + 0{,}001756 \cdot k + \cancel{0{,}8187} > 0$

$$k > 0$$

2) $1 - 0{,}00187 \cdot k + 1{,}8187 + 0{,}001756 \cdot k + 0{,}8187 > 0$

$$-0{,}000114 \cdot k + 3{,}6374 > 0$$

$$3{,}6374 > 0{,}000114 \cdot k$$

$$k < \frac{3{,}6374}{0{,}000114} \qquad k < 31907{,}02$$

3) $|0{,}001756 \cdot k + 0{,}8187| < 1$

$0{,}001756 \cdot k + 0{,}8187 < 1 \qquad 0{,}001756\, k < 0{,}1813$

$$k < 103{,}25$$

$-0{,}001756\, k - 0{,}8187 < 1$

$-0{,}001756\, k < 1{,}8187 \qquad 0{,}001756\, k > -1{,}8187$

$$k > -1035{,}71$$

Quindi $\boxed{0 < k < 103{,}25}$