Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

$$G(s) = 4 - \frac{10s + 7}{s^2 + 3s + 2} = 4 - \frac{10s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \left(4 - \frac{10s + 7}{(s+1)(s+2)}\right)L[3t \cdot 1(t)] = L[12t \cdot 1(t)] - \frac{10s + 7}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{3}{s^2} =$$

$$= L[12t \cdot 1(t)] - 3 \cdot \frac{10s + 7}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{10s + 7}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

Calcolando i coefficienti incogniti con le formule usuali otteniamo $B = \frac{7}{2}$, $\mathrm{C} = -3$, $\mathrm{D} = \frac{13}{4}$. Dalla relazione $A + C + D = 0$ si ottiene $A = -\frac{1}{4}$.

Quindi antitrasformando $Y(s)$ si ottiene (si noti che $y(t) = 0$ per $t < 0$)

per $t \geq 0$:

$$y(t) = 12t + \frac{3}{4} - \frac{21}{2}t + 9e^{-t} - \frac{39}{4}e^{-2t} =$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{2}t + 9e^{-t} - \frac{39}{4}e^{-2t}$$

L'ingresso applicato al sistema $u(t) = 3t \cdot 1(t)$ è di classe C^0 e l'ordine relativo del sistema è 0. Quindi dalla nota proprietà l'uscita è di classe $0+0$ ovvero $y(t) \in C^0$ (segnale d'uscita continuo con derivata prima discontinua in t = 0).

4.

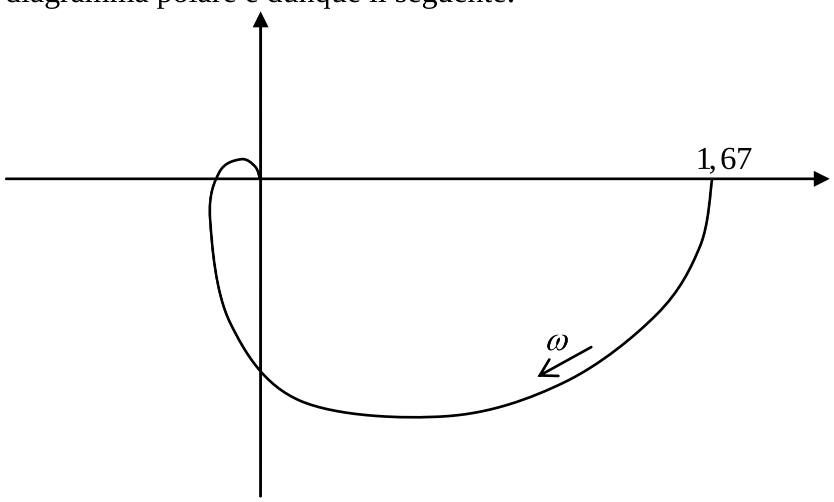
Vedi appunti delle lezioni.

5.

a.

$$L(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}; \quad L(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$
$$|L(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$
$$\arg L(j\omega) = -\arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2} - \arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0) = \frac{5}{3} \cong 1,67$ e $\lim_{\omega\to+\infty} |L(j\omega)| = 0$, $\lim_{\omega\to+\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p) = -\pi$:

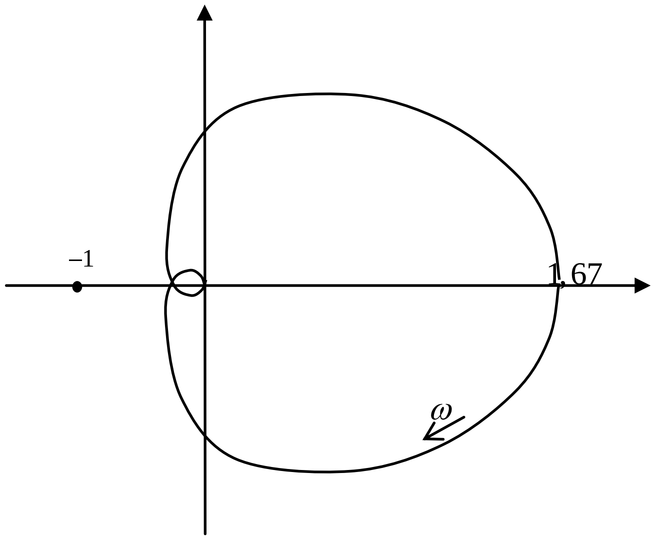
$$\arctan\frac{\omega_p}{2} + \arctan\frac{\omega_p}{3} = \pi - \arctan\omega_p$$

Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2 - 11 = 0$ da cui $\omega_p = \sqrt{11} \cong 3{,}32$ rad/s.

$$|L(j\omega_p)| = \frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}} = \frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p) = -\frac{1}{6} \right)$.

b.
Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;
in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

$\Rightarrow \omega_c = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K \, \frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

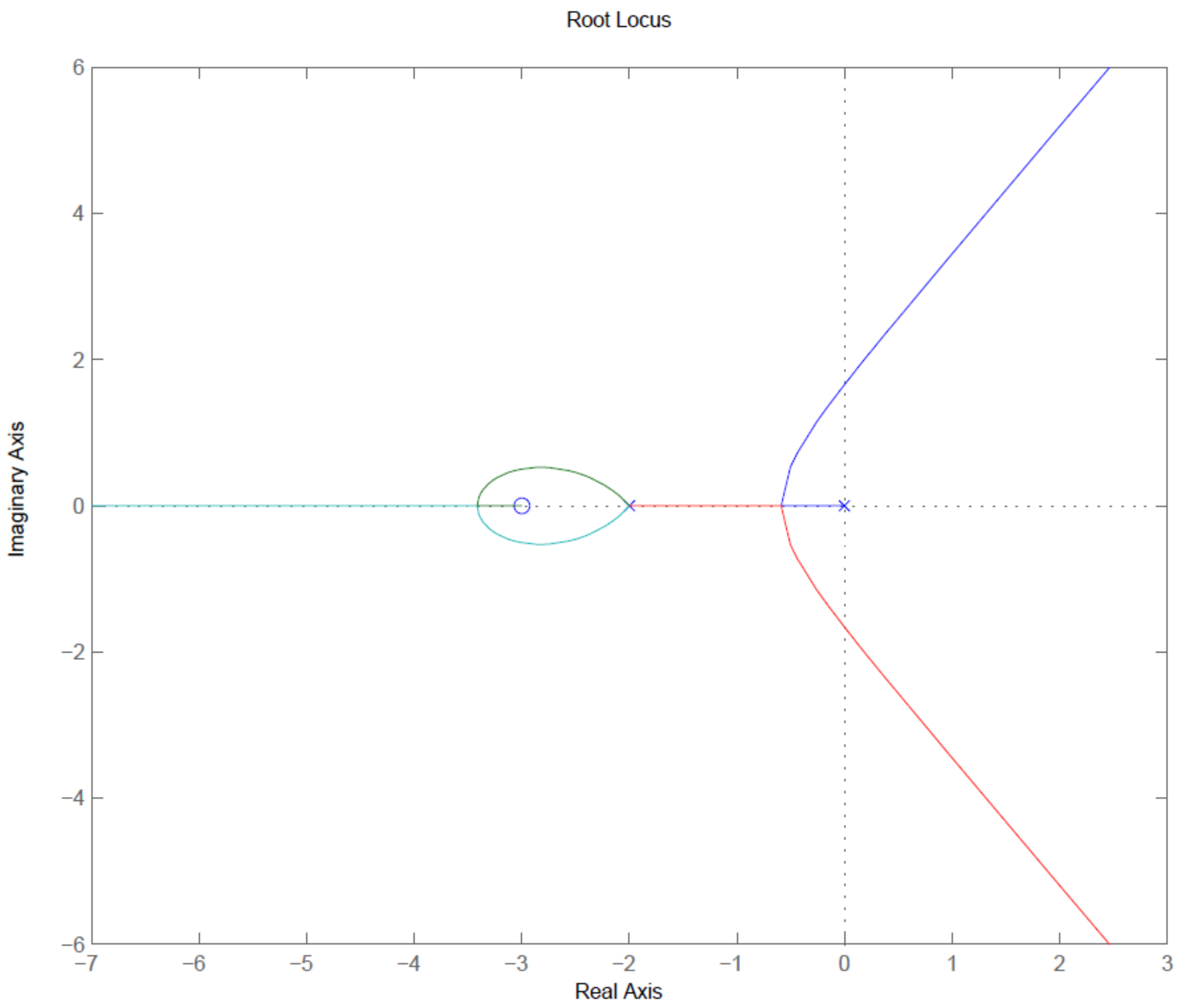
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



Root Locus
6
4
2
0
−2
−4
−6
Imaginary Axis
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
Real Axis

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

4	1	12	$3\,K$	0
3	6	$8+K$	0	0
2	64-K	18K	0	
1	$f(K)$	0		
0	$18\,K$	0		

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

$$P(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$1 + CP = 0 \qquad 1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 (s^2 + a_1 s + a_0)} = 0$$

$$s^3 (s^2 + a_1 s + a_0) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

poli cl. desiderati : $-1, -2, -4, -5 -6$

$$
\begin{aligned}
P_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6) \\
&= (s^2+3s+2)(s^2+9s+20)(s+6) \\
&= (s^4 + 9s^3 + 20s^2 + 3s^3 + 27s^2 + 60s \\
&\quad + 2s^2 + 18s + 40)(s+6) = \\
&= (s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 78s + 40)(s+6) = \\
&= s^5 + 12s^4 + 49s^3 + 78s^2 + 40s + \\
&\quad + 6s^4 + 72s^3 + 294s^2 + 468s + 240 = \\
&= s^5 + 18s^4 + 121s^3 + 372s^2 + 508s + 240
\end{aligned}
$$

ok!

da $P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18, \quad a_0 = 121 \\ b_2 = 372, \; b_1 = 508, \; b_0 = 240 \end{cases}$

$$C(s) = \frac{372\,s^2 + 508\,s + 240}{s^2 + 18\,s + 121}$$ OK!

1. Si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini l'errore a regime e_r $\left[e_r := \lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t))\right]$ ed ~~il tempo~~ una stima del tempo di assestamento

$e_r = 0$ perché è un sistema di tipo 3

$$T_a \simeq \frac{3}{\sigma_0} = \frac{3}{1} \simeq 3 \text{ sec.}$$

8.

$$U(z) = \frac{Y(z)}{P(z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \cdot \frac{(z-1)^2}{z} \quad \Rightarrow \quad u(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k = 0 \\ -\frac{3}{4} & \text{se } k = 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$$