

Fondamenti di controlli automatici

Lorenzo Bozzoni

March 2021

1 Lezione 1

Un po' di definizioni:

- **Sistema:** un sistema è un complesso, normalmente costituito da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (le variabili)
- **Segnale:** le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo si dicono segnali
- **Modello matematico:** si dice modello matematico di un sistema, per esempio con equazioni e parametri, che permette di determinare i segnali delle uscite noti i segnali degli ingressi e le (eventuali) condizioni iniziali
- **Sistema statico:** un sistema è detto statico (o puramente algebrico) quando l'uscita al tempo t dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo t
- **Sistema dinamico:** un sistema è detto dinamico quando l'uscita al tempo t dipende dal segnale dell'ingresso sull'intervallo $(-\infty, t)$
- **B , insieme dei behaviours o behavior:** è l'insieme di tutte le possibili coppie causa-effetto associate ad un sistema
- **Linearità:** un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti
- **Stazionarietà:** un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo)

Ci sono tutti i sistemi retroazionati e non, aggiungere figure e conclusioni

2 Lezione 2

I sistemi lineari possono essere rappresentati da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

Descrizione:

y rappresenta la variabile di uscita, u quella di ingresso

n = ordine dell'eq.diff., per estensione ordine del sistema, $n \geq m$

$\rho := n - m$ ordine relativo o grado relativo di \sum

L'insieme dei behaviors B di \sum è definito come:

$B := (u(t), y(t))$: la coppia dei segnali causa-effetto "soddisfa" l'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

Quindi sia $u(t)$ che $y(t)$ devono essere derivabili tante volte quanto necessario (appartenere a $C^{n/m}$). La classe dei segnali che utilizzeremo è C_p^∞ , l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti

Insieme sparso: un insieme $S \subset \mathbb{R}$ è detto sparso se per ogni intervallo reale $[a, b]$, $S \cap [a, b]$ ha cardinalità finita oppure è l'insieme vuoto

C_p^∞ : Una funzione appartiene a C_p^∞ , insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti (o delle funzioni di classe C^∞ a tratti), se esiste un insieme sparso S per il quale $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus S, \mathbb{R})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in S$ i limiti $f^{(n)}(t^-)$ e $f^{(n)}(t^+)$ esistono e sono finiti. Quando f è definita in $t \in S$, convenzionalmente $f(t) := f(t^+)$; in particolare $C^{-1} := C^\infty(\mathbb{R})$ definisce l'insieme delle funzioni di classe C^∞ a tratti definite su tutto \mathbb{R}

Note: $C^\infty \subset C_p^\infty(\mathbb{R}) \subset C_p^\infty$

Proprietà di C_p^∞ :

- Se $f(t) \in C_p^\infty \Rightarrow Df(t) \in C_p^\infty$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^t f(v)dv \in C_p^\infty$

Grado di continuità di una funzione: Se $f \in C_p^{k,\infty}$, k è il grado di continuità di f .

$$\overline{C_p^{k,\infty}} := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C_p^{k,\infty} \wedge f \notin C_p^{k+1,\infty} \right\} \quad (1)$$

Quindi il grado di continuità rappresenta il grado massimo per cui la derivata di f è continua. Se k è il grado di continuità, la derivata $k+1$ non può essere una funzione continua, per definizione.

3 Lezione 3

Funzione complessa di variabile complessa

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad s \rightarrow f(s) \quad \text{se } s = \sigma + j\omega \Rightarrow f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$$

4 Lezione 4

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che converte una equazione differenziale in una equazione algebrica. Si applica ad una funzione f di variabile reale con codominio \mathbb{R} o (\mathbb{C}) :

1. Assumiamo $f \in C_p^\infty$
2. $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ per il quale $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$

Note:

- Spesso assumeremo $f(t) = 0$ per $t < 0$
- Se vale la condizione 2 allora $\forall \sigma_1 > \sigma : \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$

Di conseguenza possiamo definire il primo valore per cui l'integrale converge i.e. **Ascissa di convergenza di $f(t)$** :

$$\sigma_c := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty \right\} \quad (2)$$

Trasformata di Laplace: la trasformata di Laplace di un segnale (funzione) $f(t)$ è la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ definita da

$$F(s) = \int_{0-}^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (3)$$

per i valori $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale converge.
 $F(s)$ è ben definito per $\sigma > \sigma_c$ ovvero $\text{Re}\{s\} > \sigma_c$.

Proprietà

La trasformata di Laplace $F(s)$ è una funzione analitica sul semipiano

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_c\} \quad (4)$$

σ_c rappresenta un valore sull'asse reale quindi il semipiano in cui la trasformata è analitica è delimitato da una linea verticale parallela all'asse immaginario posta in corrispondenza proprio del valore σ_c .

Proprietà

$$\overline{F(s)} = F(\bar{s}) \quad (5)$$

Dove la barra sopra indica il coniugato. La dimostrazione di questa proprietà è su onenote e sfrutta le formule di eulero per scrivere l'esponenziale in forma trigonometrica e, dopodichè, la simmetria pari della funzione seno.

Trasformata notevole (gradino unitario)

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (6)$$

È ben definita e analitica per $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Trasformata notevole (esponenziale)

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a} \quad (7)$$

È ben definita e analitica per $\operatorname{Re}\{s\} > a$. In realtà in entrambi i casi precedenti, sfruttando la continuazione analitica, possiamo dire che la trasformata è definita su tutto \mathbb{C} a meno rispettivamente di 0 e di a .

Proprietà

La trasformata di Laplace è un operatore lineare: per ogni segnale $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e per ogni scalare c_1 e c_2

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (8)$$

Questa proprietà discende direttamente dalla proprietà di linearità dell'integrale che è presente nella trasformata.

Proprietà La trasformata di Laplace è iniettiva:

$$\text{se } \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f(t) = g(t) \text{ su } [0, +\infty] \quad (9)$$

$F(s)$ determina univocamente $f(t)$ su $[0, +\infty)$ per cui è ben definita la trasformata inversa di Laplace \mathcal{L}^{-1} .

Trasformata inversa di Laplace

Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ allora

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (10)$$

Per ogni $\sigma_0 > \sigma_c$. Considerando che σ_0 è un valore sull'asse dei reali, l'antitrasformata corrisponde a una operazione di integrale di linea (infinita).

Trasformata della derivata

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$ segue

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0_+) \quad (11)$$

Per le derivate di ordine superiore si ragiona ricorsivamente. La formula generale della trasformata della derivata i -esima di una funzione/segnale è:

$$\mathcal{L}[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+ \quad (12)$$

Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v) dv\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (13)$$

Un modo per capire da dove viene questa formula è quella di considerare una generica funzione $f(t)$ come la derivata dell'integrale. Ma noi la trasformata della derivata la sappiamo calcolare quindi l'integrale diventa la funzione della formula (11).

Teorema del valore finale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (14)$$

Teorema del valore iniziale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Se esiste il limite $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ vale

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (15)$$

Traslazione nel tempo

Per ogni $t_0 \geq 0$ vale

$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s) \quad (16)$$

Dove $1(t - t_0)$ rappresenta il gradino unitario ritardato di t_0 per cui il segnale f prima di t_0 viene annullato, mentre per valori successivi rimane inalterato. La dimostrazione si può fare considerando la trasformata del gradino come la somma delle trasformate di due segnali che, sommati, danno il gradino unitario (sfruttando quindi la linearità dell'operatore trasformata di Laplace).

Traslazione nella variabile complessa (s)

Per ogni $a \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$ vale

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad (17)$$

Similitudine con la traslazione temporale della trasformata di Fourier.

Trasformata-antitrasformata notevole

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - a)^n}\right] = \frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1} e^{at} \quad (18)$$

Teorema di convoluzione

Si abbia $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La convoluzione dei segnali f e g , spesso indicata come $f * g$, è il segnale

$$\int_0^t f(v)g(t - v)dv \quad \Leftarrow \text{op. commutativa} \Rightarrow \quad \int_0^t g(v)f(t - v)dv \quad (19)$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)g(t - v)dv\right] = F(s)G(s) \quad (20)$$

Antitrasformazione delle funzioni razionali (il caso dei poli semplici)

Dato $F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, funzione razionale strettamente propria (grado di $b(s) < a(s)$) con poli tutti semplici (con molteplicità 1, vedi nota dopo frazione che segue) si determini $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Siano $a(s)$ e $b(s)$ polinomi con coefficienti reali ed $n := \deg(a(s))$ (grado di $a(s)$). Soluzione:

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad \text{con } p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j$$

idea: **sviluppo in fratti semplici** di $F(s)$

$$\exists! k_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ni F(s) = \frac{k_1}{(s - p_1)} + \frac{k_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}$$

k_i è il residuo di $F(s)$ in p_i che si ottiene sfruttando la cancellazione polo-zero e ottenendo:

$$k_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ora possiamo procedere al calcolo della antitrasformata per trovare $f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1}{(s - p_1)} + \frac{k_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1}{(s - p_1)}\right] + \dots + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_n}{(s - p_n)}\right] = k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_n e^{p_n t}$$

Generalizzando:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} \quad (21)$$

5 Lezione 5

Cenni di teoria delle funzioni impulsive

Gradino unitario $1(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Introduciamo $f(t; \tau) \in C_p^{0,\infty} := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}t & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$

La parte di funzione compresa tra 0 e 1 rappresenta una retta crescente (coeff. maggiore di 0) in particolare è tanto crescente quanto τ è piccolo. Di conseguenza, facendo tendere τ a 0 otteniamo una retta con pendenza infinita, approssimabile alla verticale. Abbiamo costruito un gradino unitario.

Andiamo a derivare la funzione appena introdotta e otteniamo:

$$Df(t; \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

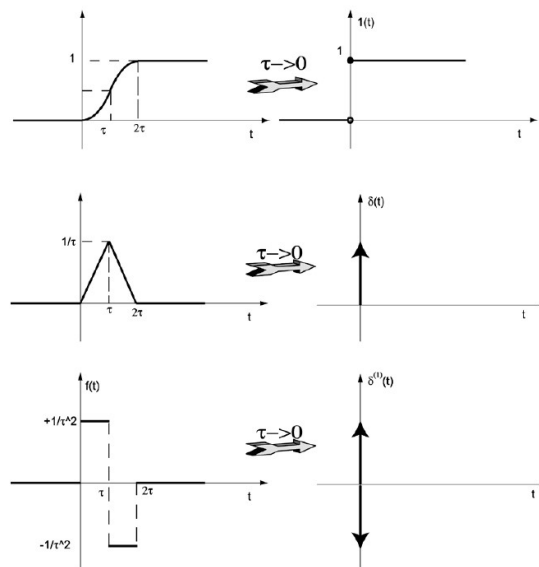
Formalmente definiamo $\delta(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0^+} Df(t; \tau)$ **delta di Dirac**. È una distribuzione o, più informalmente, una funzione impulsiva. $\delta(t)$ è la **derivata generalizzata** del gradino unitario: $\delta(t) := D^*1(t)$. D^* è l'operatore della derivata generalizzata (in senso distribuzionale): è un operatore lineare. Introduciamo le derivate generalizzate di

$\delta(t)$:

$D^{*i}\delta(t) \equiv$ derivata generalizzata di ordine i della delta di Dirac. Possiamo riscrivere il tutto in maniera più compatta:

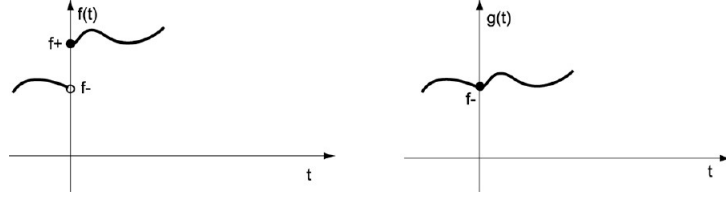
$$\delta^{(i)} := D^{*i}\delta(t) \quad (22)$$

Sapendo poi che la delta corrisponde alla derivata del gradino unitario sappiamo che la equazione soprastante può essere scritta anche come $\delta^{(n-1)} = D^{*n}1(t)$



Derivate generalizzate di una funzione discontinua

$f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ e sia $t = 0$ il solo istante di discontinuità della funzione.



$$g(t) := \begin{cases} f(t) & t < 0 \\ f(t) - (f_+ - f_-) & t \geq 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo riscrivere la funzione g in questo modo:

$$g(t) = f(t) - (f_+ - f_-)1(t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = g(t) + (f_+ - f_-)1(t)$$

Quindi, derivando entrambi i membri otteniamo:

$$D^*f(t) = Dg(t) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

La derivata di f è generalizzata perchè è una funzione discontinua, motivo per il quale con g non si può dire lo stesso. Per g inoltre si fa l'**assunzione** per cui la derivata generalizzata di una funzione continua sia $D^*g(t) := Dg(t)$. Per cui possiamo dire che la derivata generalizzata di ordine 1 è formata dalla somma di una funzione impulsiva e una discontinua. Inoltre notiamo come se il tempo t è diverso da 0 la derivata generalizzata coincide con quella "normale" mentre in 0 è uguale a:

$$D^*f(0) = Df(0^+) + (f_+ - f_-)\delta(0) = (f_+ - f_-)\delta(0)$$

L'ultima uguaglianza è una assunzione che facciamo noi perchè il primo termine diventa trascurabile considerando il fatto che la delta tende a un valore infinito in 0.

Per calcolare le derivate di ordini superiori possiamo sfruttare il fatto che sappiamo che la derivata di ordine 1 è formata dalla somma di una funzione discontinua e una impulsiva. In particolare, ogni segnale discontinuo può essere a sua volta scomposto in una parte a gradini e una continua per cui, com'è intuitivo credere, basta iterare questo ragionamento e sfruttare la proprietà di linearità per ottenere derivate ennesime. La formula che si raggiunge è la seguente:

$$D^{*n}f(t) = D^n f(t^+) + (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(t) + \dots + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(t) \quad (23)$$

Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive

$$c_{-1} + c_0\delta(0) + c_1\delta^{(1)}(0) + \dots + c_{k_1}\delta^{(k_1)}(0) \quad \text{e} \quad d_{-1} + d_0\delta(0) + d_1\delta^{(1)}(0) + \dots + d_{k_2}\delta^{(k_2)}(0)$$

sono uguali fra loro se e solo se

$$\begin{aligned} c_i &= d_i, i = 0, 1, 2, \dots, \min\{k_1, k_2\} \\ \text{se } k_1 > k_2 \quad c_i &= 0, i = k_2 + 1, \dots, k_1 \\ \text{se } k_1 < k_2 \quad d_i &= 0, i = k_1 + 1, \dots, k_2 \end{aligned}$$

Insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce insieme dei behaviors, o **behavior**, di Σ

$$\mathbf{B} := \left\{ (u, v) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\} \quad (24)$$

Relazioni di continuità ingresso-uscita

Proprietà

Sia $(u, y) \in \mathbf{B}$. Allora $y \in C^{\rho-1}$

Proprietà

Sia $(u, y) \in \mathbf{B}$ e $p \in \mathbb{Z}$ con $p \geq -1$. Allora $u \in C^p$ se e solo se $y \in C^{p+\rho}$

Grado massimo di continuità

Dato un segnale f in $C_p^\infty(\mathbb{R})$ ($=: C^{-1}$) questo ha grado massimo di continuità $k \geq -1$ se $f \in C^k$ e $f \notin C^{k+1}$.

Proprietà

Sia $(u, y) \in \mathbf{B}$. L'ingresso u ha grado di levigatezza k se e solo se l'uscita y ha grado di levigatezza $\rho + k$. É una doppia implicazione quindi possiamo fare lo stesso ragionamento all'inverso, per verificare la correttezza di un risultato ad esempio.

6 Lezione 6

Spazio delle sequenze impulsive:

$$I^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}(t - t_i), c_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \quad (25)$$

Rappresenta l'estensione distribuzionale delle funzioni derivabili a tratti: $C_p^\infty(\mathbb{R})^* \triangleq C_p^\infty(\mathbb{R}) + I^*$. Stiamo considerando le funzioni C^∞ a tratti a cui possiamo aggiungere sequenze impulsive. Le componenti impulsive compaiono ad esempio quando si tratta di funzioni con discontinuità e si calcola la derivata.

La trasformata della derivata generalizzata

Sia $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})(C_p^\infty(\mathbb{R})^*)$ segue

$$\mathcal{L}[D^* f(t)] = sF(s) - f(0_-)$$

Da notare che per la derivata semplice la trasformata di Laplace prevedeva che il secondo addendo della operazione fosse la funzione calcolata in 0_+ . Questo non succede perchè la derivata generalizzata è definita come la derivata semplice più un secondo membro dove la delta di Dirac moltiplica la differenza di $f_+ - f_-$. Procedendo poi a fare la trasformata la componente calcolata da destra (f_+) si semplifica e quindi rimane solo quella negativa.

Come già fatto in precedenza, ragioniamo per ricorsione e otteniamo la formula per la trasformata di derivate generalizzate di ordine superiore:

$$\mathcal{L}[D^{*i} f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_-$$

Trasformata notevole

$$\mathcal{L}[\delta^{(i)}(t)] = s^i, i \in \mathbb{N} \quad (26)$$

Si può ragionare sull'ottenimento di questa funzione considerando il fatto che la delta rappresenta la derivata del gradino unitario e abbiamo visto prima come calcolare la trasformata sia della derivata che del gradino.

Estensione dell'insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce estensione impulsiva dei behaviors o **behavior esteso** di Σ

$$\mathbf{B}^* := \left\{ (u, v) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^* \times C_p^\infty(\mathbb{R})^* : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\} \quad (27)$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{B} \subset \mathbf{B}^* \quad \Leftarrow \quad C_p \subset C_p^* \quad \Leftarrow \quad D \subset D^*$$

Visto che mi sbaglio sempre, il simbolo \subset si legge "è contenuto" infatti qua indichiamo che il behavior normale è contenuto in quello che abbiamo chiamato per l'appunto esteso. Le implicazioni esplicitano il fatto che questa relazione dipende dalle definizioni date in precedenza di funzione continua a tratti e di derivata generalizzata.

Possiamo quindi considerare anche la seguente **proprietà**

$$\text{Sia } (u, v) \in \mathbf{B}^*, \text{ segue } (D^* u, D^* y) \in \mathbf{B}^*$$

Un segnale di ingresso $u(t) \neq 0$ per $t > 0$ è detto **azione forzante** (su \sum).

Sia $(u, y) \in \mathbf{B}$ con $u(t)$ azione forzante e con condizioni iniziali al tempo $t = 0_-$ tutte nulle (funzioni u e y e tutte le loro derivate nulle per $t = 0_-$):

$$y_- = 0, Dy_- = 0, \dots, D^{n-1}y_- = 0 \quad \text{e} \quad u_- = 0, Du_- = 0, \dots, D^{m-1}u_- = 0$$

Il segnale $y(t)$ per $t > 0$ è detto **risposta (evoluzione) forzata** (di \sum).

Proprietà (della coppia azione forzante - risposta forzata)

Sia $(u, y) \in \mathbf{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante ed $y(t)$ risposta forzata. Segue

$$\left(\int_{0_-}^t u(v)dv, \int_{0_-}^t y(v)dv \right) \in \mathbf{B}^* \quad (28)$$

Il problema fondamentale dell'analisi nel dominio del tempo di un sistema \sum

Note le condizioni iniziali al tempo 0_- , $y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t)$, $t > 0$ determinare la risposta $y(t)$, $t > 0$.

I segnali $u(t)$ e $y(t)$ soddisfano in senso distribuzionale l'equazione differenziale di \sum :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applichiamo all'equazione la trasformata di Laplace sfruttando la linearità di tale operatore:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)]$$

Possiamo esprimere subito la trasformata dell'elemento dell'equazione con derivata uguale a 0, cioè la funzione normale. Per gli altri elementi, che sono differenziati, bisogna applicare la trasformata notevole delle derivate generalizzate (discusse a inizio pagina).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] + a_0 Y(s) &= \sum_{i=1}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)] + b_0 U(s) \\ \sum_{i=1}^n a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} y_- \right) + a_0 Y(s) &= \sum_{i=1}^m b_i \left(s^i U(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} u_- \right) + b_0 U(s) \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} y_- s^j &= \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i \right) U(s) - \sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} u_- s^j \\ Y(s) &= \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \end{aligned} \quad (29)$$

In particolare, consideriamo un membro alla volta e li definiamo

$$\begin{aligned} Y_{for}(s) &:= \mathcal{L}[y_{for}(t)] := \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) \\ Y_{lib}(s) &:= \mathcal{L}[y_{lib}(t)] := \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \end{aligned}$$

Quindi possiamo dire che:

$$Y(s) = Y_{for}(s) + Y_{lib}(s) \quad \rightarrow \quad y(t) = y_{for}(t) + y_{lib}(t) \quad , t > 0$$

Dove

- $y_{for}(t)$ è la **risposta forzata** di Σ all'azione forzante
- $y_{lib}(t)$ è definita quale **risposta (evoluzione) libera** di Σ

Definizione di **funzione di trasferimento**

Si definisce f.d.t di un sistema la funzione di variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)] \quad (30)$$

$\forall ((u(t), y(t)) \in \mathbf{B} \text{ con } u(t) = 0, y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$

Proprietà

La f.d.t del sistema dinamico Σ introdotto è

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \left(=: \frac{b(s)}{a(s)} \right)$$

È un modello matematico alternativo all'equazione differenziale. Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per $t = 0_-$): $Y(s) = G(s)U(s)$, $Y_{for}(s) = G(s)U(s)$

Sia $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ con $g(t) = 0, t < 0$: $g(t)$ è la **risposta all'impulso** a partire da una condizione di quiete: $(\delta(t), g(t)) \in \mathbf{B}^*$. Dal teorema di convoluzione:

$$y_{for}(t) = \int_0^t g(v)u(t-v)dv \quad \text{od anche} \quad \int_0^t u(v)g(t-v)dv \quad (31)$$

Soluzione generale dell'equazione differenziale ($t > 0$)

$$y(t) = \int_0^t g(v)u(t-v)dv + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right] \quad (32)$$

Quindi il segnale di uscita y si trova nel dominio del tempo si sfrutta la sua equivalenza nel dominio della trasformata di Laplace. In particolare la risposta forzata viene antitrasformata sfruttando il teorema di convoluzione mentre quella libera viene non viene esplicitata perchè dipenderà dal caso specifico (deduco, intendendo il tipo di operazioni che conviene fare).

Un sistema Σ si dice **(strettamente) proprio** se la sua funzione di trasferimento è **(strettamente propria)**. Quindi se $n \geq m$ ($\rho \geq 0$) $\iff \Sigma$ proprio; se $n > m$ ($\rho \geq 1$) $\iff \Sigma$ strettamente proprio.

Il **guadagno statico** di Σ è il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ($\neq 0$) quando il sistema è all'equilibrio:

$$K := \frac{y_c}{u_c} \text{ con } (u_c, y_c) \in \mathbf{B} \text{ e } u_c \neq 0$$

Dall'equazione differenziale si deduce:

$$K = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow K = G(0)$$

Infatti abbiamo detto che il guadagno statico si ottiene, per l'appunto, proprio con il rapporto degli ingressi statici, ovvero costanti. Quando queste condizioni sono soddisfatte, automaticamente tutte le derivate valgono 0 per cui rimangono soltanto le funzioni semplici, ovvero a_0 e b_0 .

Polinomio caratteristico

Dato il sistema Σ descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t)$, il polinomio $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ è detto polinomio caratteristico di Σ .

Nota: è il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento $G(s)$. I **poli** e gli **zeri** di Σ corrispondono ai poli e zeri della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema stesso.

Modi del sistema dinamico Σ

Sono le funzioni tipiche associate ai poli del sistema secondo la regola:

- Se p è un **polo reale** di molteplicità $h \rightarrow e^{pt}, te^{pt}, t^2 e^{pt}, \dots, t^{h-1} e^{pt}$

- Se $\sigma \pm j\omega$ è una coppia di **poli complessi coniugati** di molteplicità h le soluzioni sono equivalentemente:

$$\begin{aligned} & - e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_1), t e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_2), \dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_h) \\ & - e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t), t e^{\sigma t} \sin(\omega t), t e^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t), t^{h-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Dalla definizione, sappiamo che i poli sono i valori per cui la funzione si annulla al denominatore. In questo caso è presente un polinomio differenziale. Abbiamo infatti introdotto appena sopra il polinomio caratteristico $a(s)$ e sappiamo dalla teoria (analisi 2) che le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono quelle che qua vengono chiamate modi. Nella seguente proprietà viene approfondito questo aspetto.

Proprietà di risposta libera e modi di Σ

Sia Σ un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro). Allora la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi. Dimostrazione:

$$\mathcal{L}[y_{lib}(t)] = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_{-} s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_{-} s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right] \quad (33)$$

Il numeratore è un polinomio di grado $\leq n-1$ dipendente dalle c.i. Dall'assunzione fatta i modi di Σ sono associati alle radici di $a(s) = 0$. Quindi dallo sviluppo in fratti semplici segue la tesi...

Nota: $\{\text{poli di } \Sigma\} \subseteq \{\text{radici del polinomio caratteristico di } \Sigma\}$

$\{\text{poli di } \Sigma\} = \{\text{radici del polinomio caratteristico di } \Sigma\}$ se $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi.

Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da f.d.t razionali.

Segnali tipici per l'ingresso di Σ :

- $\delta(t)$ impulso unitario (delta di Dirac) $\rightarrow \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
- $1(t)$ gradino unitario $\rightarrow \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$
- $t \cdot 1(t)$ rampa unitaria $\rightarrow \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$
- $\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$ parabola unitaria $\rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$

È detta **Risposta canonica** la risposta forzata di Σ ad un segnale tipico all'ingresso.

Le risposte canoniche usualmente adottate sono:

- $g(t) \equiv$ risposta all'impulso $\delta(t)$ o **risposta impulsiva**
- $g_s(t) \equiv$ risposta al gradino $1(t)$ o **risposta indiciale**

Sapendo quindi che $g(t) = g_s(t) = 0$ per $t < 0$

Proprietà

$$\int_{0-}^t g(v) dv = g_s(t), \quad g(t) = D^* g_s(t)$$

Per i sistemi strettamente propri $g(t) = D g_s(t^+)$.

Proprietà (integrali di Vaschy)

Nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la risposta forzata $y_{for}(t)$, $t \geq 0$ effetto dell'azione forzante $u(t)$, $t \geq 0$ è determinabile come:

$$y_{for}(t) = \int_0^t u'(v) g_s(t-v) dv + u(0_+) g_s(t) \quad (34)$$

o, equivalentemente:

$$y_{for}(t) = \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + u(0_+) g_s(t) \quad (35)$$

7 Lezione 7

Studiare le caratteristiche dei sistemi dinamici più semplici: primo ordine con grado relativo uno e secondo ordine con grado relativo due. Semplificare lo studio di un sistema più complesso (ordine maggiore di due) comparandolo ad un sistema del secondo ordine.

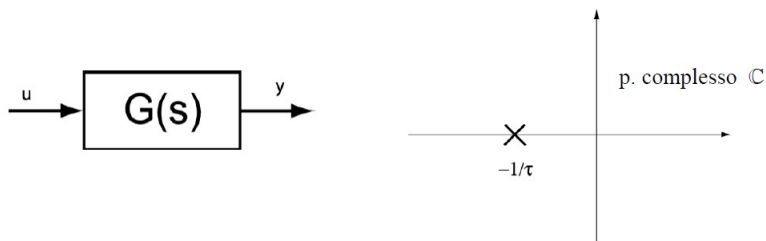
Sistemi del primo ordine (strettamente propri)

Abbiamo $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$ guadagno statico normalizzato a 1. L'equazione differenziale univocamente associata è la seguente: $\tau Dy + y = u$ con $\tau \equiv$ costante di tempo (> 0). Si può spiegare questo fatto considerando il calcolo fatto nella lezione 6 in cui si mostra come, calcolando la trasformata della equazione differenziale che descrive il sistema, si ottengono due addendi, risposta libera e forzata.

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t) \quad \rightarrow \quad Y_{for}(s) := \mathcal{L}[y_{for}(t)] := \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \left(=: \frac{b(s)}{a(s)} \right)$$

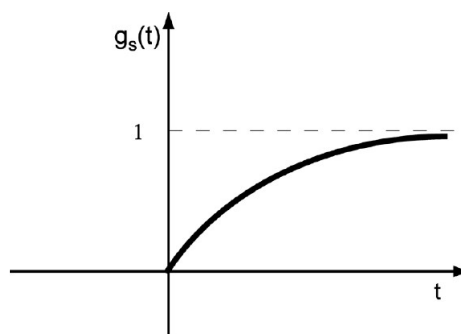
Mettendo vicino queste relazioni è possibile notare con più semplicità come il valore 1 presente sia al numeratore che al denominatore sia causato da una elevazione alla potenza 0, quindi $i = 0$, quindi corrisponde a una derivata di ordine 0. Al denominatore però, è presente anche un altro valore per cui si può ragionare in modo analogo, dicendo quindi che i sarà uguale a 1 e infatti nel membro di sinistra della scrittura differenziale del sistema abbiamo una derivata del primo ordine.

Di conseguenza: $\{ \text{poli di } \Sigma \} = \left\{ -\frac{1}{\tau} \right\} \quad \{ \text{modi di } \Sigma \} = \left\{ e^{-\frac{1}{\tau}t} \right\}$



Determinazione di $g_s(t)$ (risposta al gradino unitario)

$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \tau s} \cdot \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , t \geq 0$$

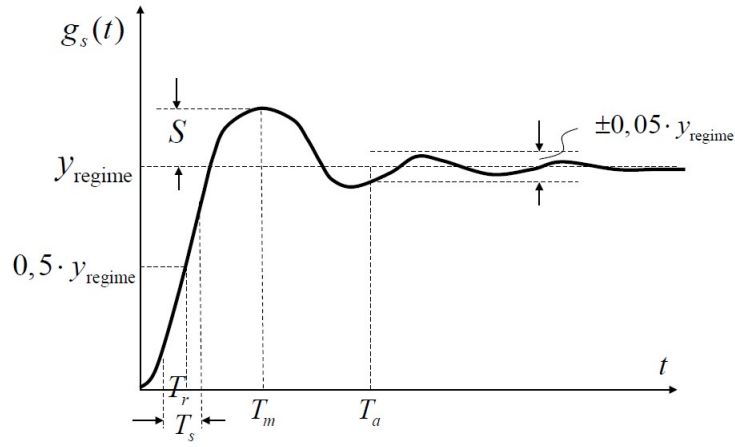


Nel dominio della trasformata di Laplace l'uscita del sistema è determinata dalla moltiplicazione della funzione di trasferimento con l'ingresso. Nel calcolo sovraesposto vogliamo studiare cosa accade quando in ingresso abbiamo il gradino unitario per cui il facciamo il prodotto della funzione di trasferimento introdotta in precedenza e la trasformata di $1(t) = 1/s$. Il tutto viene antitrasformato per trovare un segnale nel dominio del tempo.

Parametri della risposta al gradino

Spesso la risposta al gradino unitario di un sistema dinamico generico ha l'andamento di figura dove si evidenziano "parametri" caratteristici.

Parte da 0, raggiunge un valore massimo che è individuato dalla sovraelevazione S che viene calcolata come rapporto in percentuale di S con il valore di regime cioè con il valore che, per t tendente a infinito, assume la risposta al gradino



- $S \equiv$ massima sovraelongazione (in % del valore di regime)
- $T_r \equiv$ tempo di ritardo, valore per il quale la risposta al gradino assume il 50% del valore finale (regime)
- $T_s \equiv$ tempo di salita, tempo per il quale la risposta al gradino passa da 0,1 del valore di regime (10%) al 0,9 del valore di regime (90%). Rappresenta la velocità di salita del fronte. Parte dal 10% perché per valori inferiori ci potrebbero essere fenomeni di sottoelongazione ovvero potrebbero esserci degli istanti in cui la curva assume valori minori di 0
- $T_m \equiv$ istante di massima sovraelongazione
- $T_a \equiv$ tempo di assestamento, è il tempo minimo per il quale la risposta al gradino si porta dentro una fascia di più o meno il 5% del valore di regime (valore convenzionale), ovvero

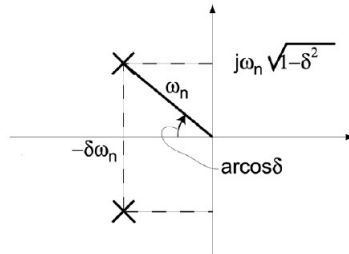
$$T_a := \inf \left\{ T > 0 : \left| g_s(t) - y_{regime} \right| \leq 0,05 \cdot y_{regime} \quad \forall t \geq T \right\}$$

Sistemi del secondo ordine (senza zeri)

La funzione di trasferimento $G(s)$ sia così parametrizzata: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ con $G(0) = 1$. Quest'ultimo elemento è il guadagno statico (quando ingresso e uscita sono a regime) ed è uguale a 1 perché quando l'ingresso è a costante le derivate dell'equazione differenziale si annullano e di conseguenza anche i primi due addendi del denominatore, rimanendo di fatto l'ultimo termine che, annullandosi col numeratore, fa risultare in totale 1, ciò che volevamo. Come per i sistemi del primo ordine possiamo esprimere la equazione differenziale univocamente associata $D^2y + 2\delta\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$.

Definiamo $\omega_n \equiv$ pulsazione naturale (> 0) e $\delta \equiv$ coefficiente di smorzamento, $\in (0,1)$. Se fosse maggiore di uno i poli sarebbero reali e positivi (la radice sarebbe negativa e comparirebbe un'unità immaginaria che, moltiplicandosi con quella già presente, si semplificherebbe aggiungendo un segno meno).

Di conseguenza: $\{ \text{poli di } G(s) \} = \{ -\sigma\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \}$ $\{ \text{modi di } G(s) \} = \{ e^{-\sigma\omega_n t} \text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t + \varphi_1) \}$

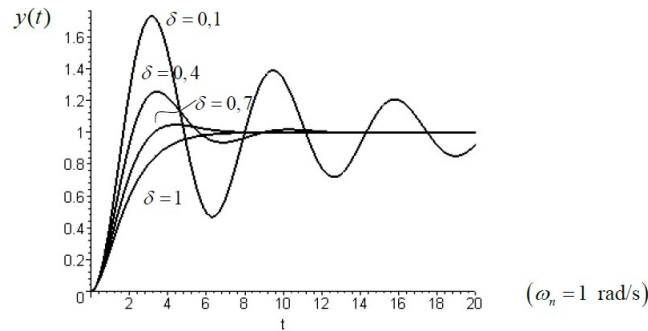
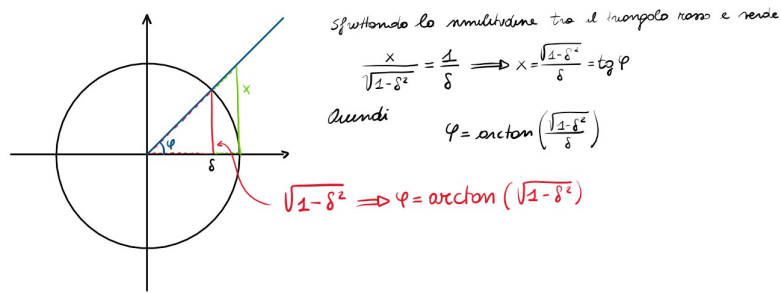


Determinazione della risposta al gradino unitario

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\omega := \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad A := \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad \varphi := \arccos(\delta) \left(= \arcsen \sqrt{1 - \delta^2} = \arctg \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \right)$$

Dove, l'ultima relazione è facilmente comprensibile per via geometrica, come mostrato nel disegno sottostante:



- Per $\delta = 0 \Rightarrow y(t) = 1 - \sin\left(\omega_n t \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos(\omega_n t)$, il sistema non è più asintoticamente stabile e continua ad oscillare
 - Per $\delta = 1$ non posso utilizzare l'espressione precedente ($A = +\infty$) ma rifacendo i calcoli
- $$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right] = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

Calcolo della massima sovraelongazione S

$$A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi) - A e^{-\delta\omega_n t} \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) = 0$$

$$\delta \sin(\omega_n t + \varphi) = \sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega_n t + \varphi)$$

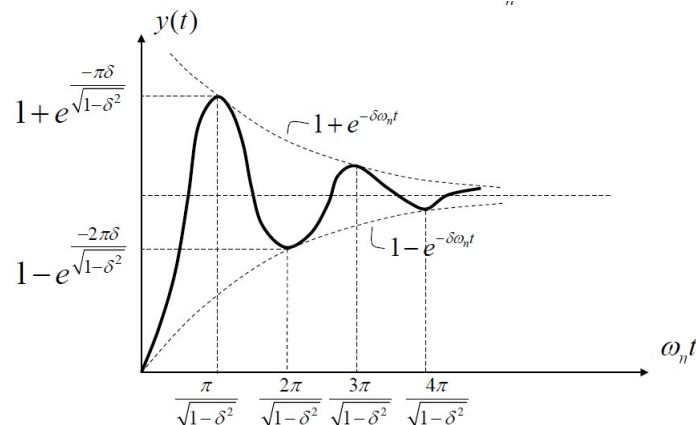
$$\tan(\omega_n t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \iff \omega_n t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t)|_{min,max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{\left(-\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \sin(n\pi + \varphi) =$$

$$\text{dato che } \varphi = \arcsin(\sqrt{1-\delta^2}) \Rightarrow \sin(n\pi + \varphi) = (-1)^n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$y(t)|_{min,max} = 1 - (-1)^n e^{\left(-\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} = 1 - (-1)^n e^{(-\delta\omega_n t)} \quad \text{dove } t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

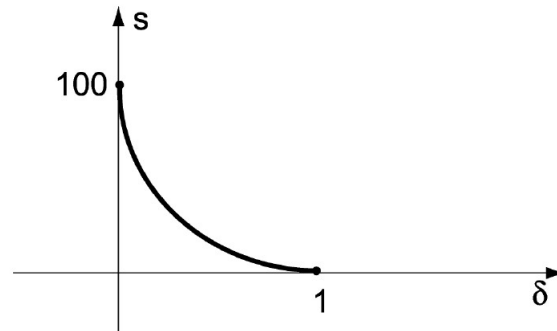


Valore massimo raggiunto da y (in corrispondenza del primo picco, gli altri sono sempre più smorzati):

$$y_{max} = 1 + e^{\left(-\frac{\delta n \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)}$$

Introduciamo la funzione S che rappresenta la percentuale di sovraelongazione

$$S = 100(y_{max} - 1) \iff S = 100e^{\left(-\frac{\delta n \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)}$$



Calcolo del tempo di assestamento T_a

Una stima può essere determinata risolvendo l'equazione:

$$e^{(-\delta \omega_n T_a)} = 0,05 \iff -\delta \omega_n T_a = \ln(0.05) \cong -3 \iff T_a \cong \frac{3}{\delta \omega_n}$$

Dove il denominatore del membro di destra della ultima equazione corrisponde alla distanza dei poli dall'asse immaginario.

Tempo di salita T_s

Interpolando i dati numerici si ottiene la seguente relazione approssimata:

$$T_s \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

Valori dallo studio della risposta al gradino:

- $S = 100e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \rightarrow$ sovraelongazione in %, quando $\delta = 0$ S al 100%, quando $\delta = 1$ S allo 0%, cioè si annulla
- $T_a \cong \frac{3}{\delta \omega_n}$
- $T_s \cong \frac{1,8}{\omega_n} \rightarrow$ relazione approssimata dedotta interpolando dati numerici

Poli dominanti di un sistema dinamico

Sistema Σ generico con f.d.t $G(s) = b(s)/a(s)$, n poli ed m zeri, tutti i poli hanno parte reale negativa (tutti i modi convergono a zero per $t \rightarrow +\infty$ (perchè i modi corrispondono alle soluzioni delle equazioni differenziali ed è sempre presente un esponenziale avente come esponente i poli i quali dovranno necessariamente aver parte reale negativa per fare convergere)). I poli dominanti sono quelli più vicini all'asse Immaginario nel piano di Gauss, a questi poli sono associati i modi più lenti a convergere (sono al denominatore, pensa ad esempio al filtro RC in cui il condensatore si scarica più velocemente se RC sono molto piccoli perchè il suo andamento è $e^{t/RC}$) quindi presumibilmente quelli che danno il maggior effetto in relazione, ad esempio, al gradino del sistema. Questo è vero a patto che il valore del polo avente le proprietà descritte sopra non sia anche uno zero del sistema. In questo caso non sarebbe più valido il ragionamento e bisognerebbe considerare il secondo polo più vicino (che non sia zero ovviamente). Infatti, la **definizione** vera e propria è la seguente: si dicono dominanti i poli (normalmente una coppia), non soggetti a quasi cancellazione polo-zero, più vicini all'asse immaginario.

Proprietà qualitativa: la risposta al gradino unitario dipende approssimativamente dai soli poli dominanti di Σ .

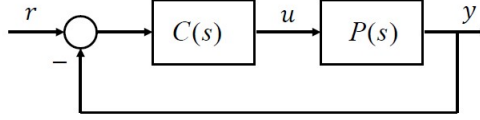
Conseguenza: se i poli dominanti sono complessi coniugati i parametri della risposta S , T_a e T_s sono determinabili approssimativamente dalle relazioni presentate per i sistemi di ordine due.

Precisazioni:

1. Il concetto di poli dominanti porta ad una approssimazione del comportamento transiente che può essere anche molto rozza
2. Non è sempre possibile individuare un insieme significativo di poli dominanti

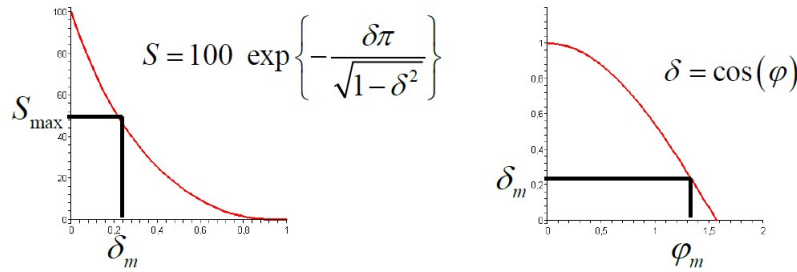
Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo

Introduciamo una impostazione di progetto di sistema di controllo, ipotizziamo che sia retroazionato. É richiesto il progetto di un controllore $C(s)$ in modo tale che $S \leq S_{max}$ e $T_a \leq T_{a-max}$.



$$G_{ry}(s) \cong G_{ry-a}(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad \omega_n > 0, \delta \in (0, 1)$$

Il primo passo è quello di applicare il concetto di poli dominanti al sistema (per questo è presente il simbolo \cong), successivamente possiamo trovare, sfruttando S_{max} che conosciamo, δ_m (vedi relazione nell'elenco puntato sopra). Fatto ciò possiamo usare la relazione che lega l'angolo che i poli formano con l'origine con delta: $\varphi := \arccos(\delta)$.

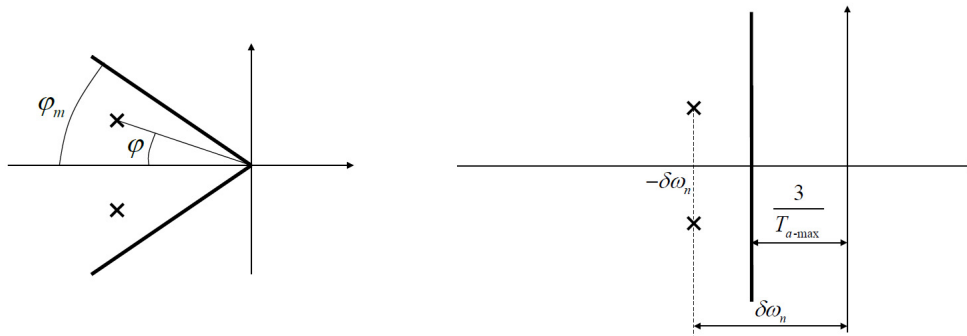


$$S \leq S_{max}, S(\delta) \leq S_{max} \iff \delta \geq \delta_m, \delta(\varphi) \geq \delta_m \iff \varphi \leq \varphi_m$$

Questo si può dedurre facilmente sfruttando i vari grafici. L'ultima condizione a destra esprime la richiesta di trovare i poli all'interno di un angolo con vertice nell'origine del piano complesso.

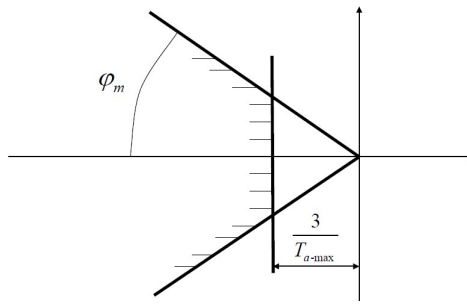
Se adesso ragioniamo sulla seconda richiesta dal progetto otteniamo:

$$T_a \leq T_{a-max}, \frac{3}{\delta\omega_n} \leq T_{a-max} \iff \delta\omega_n \geq \frac{3}{T_{a-max}}$$



Dove il membro a sinistra indica la distanza dei poli dall'asse immaginario mentre quello a destra indica un valore, funzione del denominatore ovviamente, che rappresenta anch'esso la distanza dalle ordinate. Quindi nell'ultima disequazione stiamo dicendo che la distanza dei poli deve essere maggiore di un certo valore dipendente da T_{a-max} .

Le specifiche $S \leq S_{max}$ e $T_a \leq T_{a-max}$ devono essere soddisfatte entrambe. Quindi i poli $-\sigma\omega_n \pm j\omega_n s\sqrt{1-\delta^2}$ devono appartenere al cono troncato di figura. In pratica, si impone che tutti i poli di $G_{ry}(s)$ appartengano al cono troncato.



8 Lezione 8

Stabilità: definizione e teoremi

Si consideri il sistema dinamico Σ descritto dall'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t)$$

I punti di equilibrio di Σ sono caratterizzati da valori costanti nel tempo di u ed y (u_c, y_c) $\in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti la relazione $y_c = G(0) \cdot u_c$ con $u_c \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $G(s)$ è la funzione di trasferimento e che il suo valore in 0 rappresenta il guadagno statico (infatti sia l'ingresso u che l'uscita y sono costanti). $G(0)$ è una costante di proporzionalità tra ingresso-uscita per cui si grafica come una retta passante per l'origine (se non passasse nell'origine vorrebbe dire che per ingresso nullo ci sarebbe uscita non nulla, il che è impossibile).

Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio di Σ si scelga l'origine della caratteristica statica di Σ : $u_c = 0, y_c = 0$. Come vedremo tale studio porta alle medesime conclusioni per qualsivoglia punto di equilibrio. Per semplicità assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro, ovvero che non hanno radici in comune e ricordando che sono i polinomi della funzione di trasferimento (numeratore e denominatore).

Il punto di equilibrio $u_c = 0, y_c = 0$ venga perturbato nell'intervallo temporale $[t_0, 0)$, $t_0 < 0$ mediante perturbazioni introdotte con il segnale di ingresso u o con modifiche delle condizioni iniziali sull'uscita.

$$u(t) = 0 \text{ per } t < t_0, u(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), u(t) = 0 \text{ per } t \geq 0$$

$$y(t) = 0 \text{ per } t < t_0, y(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), y_{lib}(t) = y(t) \text{ per } t \geq 0$$

Conseguenze: l'uscita è in evoluzione libera per $t \geq 0$, quindi $y_{lib}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_L(s)]$ dove l'elemento antitrasformato è rappresentato dalla formula (32).

Comportamento della risposta libera $y_{lib}(t)$ a seguito delle perturbazioni introdotte:

- $y_{lib}(t)$ limitata su $[0, +\infty)$ punto di equilibrio **stabile**
- $y_{lib}(t)$ non limitata su $[0, +\infty)$ punto di equilibrio **instabile**
- $y_{lib}(t)$ limitata su $[0, +\infty)$ e convergente a zero per $t \rightarrow +\infty$: punto di equilibrio **asintoticamente stabile**

Proprietà: per il sistema lineare Σ il comportamento della risposta libera a seguito di perturbazioni su di un punto di equilibrio rimane il medesimo per qualsivoglia altro punto di equilibrio.

Di **conseguenza** possiamo parlare di stabilità/instabilità del sistema anziché stabilità/instabilità di un punto di equilibrio.

Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico lineare

Il sistema lineare Σ si dice:

1. **stabile** se per ogni perturbazione $y_{lib}(t)$ è limitata su $[0, +\infty)$
2. **asintoticamente stabile** se è stabile ed inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = 0$ per ogni perturbazione introdotta
3. **semplicemente stabile** se è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = y_\infty \neq 0 \vee \{\text{non esiste } \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t)\}$
4. **instabile** se non è stabile ovvero se esiste almeno una perturbazione per cui la risposta libera diverge

Teorema dei poli di sistema e stabilità

Sia Σ un sistema lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro).

1. \sum è **stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici
2. \sum è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa. Si dimostra sfruttando il fatto che la risposta libera può essere scritta come la combinazione lineare dei modi. Questi ultimi rappresentano le soluzioni delle equazioni differenziali e presentano, in ogni tipo di soluzione possibile, un esponenziale che ha per esponente la parte reale dei poli che, essendo negativa, converge a zero per forza ad andare all'infinito
3. \sum è **semplicemente stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e quelli puramente immaginari (che devono esistere) sono semplici
4. \sum è **instabile** se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di uno

Stabilità ingresso-limitato uscita-limitata (BIBO)

\sum è BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata. Formalmente:

$$\left[\|f(t)\|_\infty \triangleq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right] \forall (u(t), y(t)) \in \mathbf{B} \text{ con } u(t) = 0, y(t) = 0 \text{ per } t < 0 \text{ e } \|u(t)\|_\infty < +\infty \Rightarrow \|y(t)\|_\infty < +\infty \quad (36)$$

Teorema della stabilità BIBO

\sum è BIBO stabile se e solo se

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty$$

Quindi l'area in valore assoluto deve essere minore di infinito, questo è possibile solo se la funzione converge per τ che tende a infinito.

Si assuma $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro. Vale quindi la seguente equivalenza:

Teorema della equivalenza tra stabilità BIBO e stabilità asintotica

\sum è BIBO stabile se e solo se \sum è asintoticamente stabile.

Criterio di Routh

Si consideri il sistema lineare \sum descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$; la sua f.d.t è $G(s) =$

$b(s)/a(s)$ con $a(s)$ polinomio caratteristico di \sum .

Definizione di **equazione caratteristica**: dato il sistema \sum l'equazione $a(s) = 0$ ovvero

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

è detta equazione caratteristica di \sum .

La stabilità di \sum è associata alle radici dell'equazione caratteristica.

Polinomio di Hurwitz

Un polinomio $a(s)$ è detto di Hurwitz o hurwitziano se tutte le sue radici hanno parte reale negativa

Proprietà: si assuma $a_n > 0$. Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono positivi.

È possibile determinare il segno delle radici di $a(s)$ ($\Re > 0, \Re = 0, \Re < 0$) mediante la cosiddetta *Tabella di Routh*.

- Costruzione della tabella di Routh

n	$\gamma_{0,1}$	$\gamma_{0,2}$	$\gamma_{0,3}$...
n - 1	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{1,3}$...
n - 2	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{2,3}$...
n - 3	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{3,3}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots				
2	$\gamma_{n-2,1}$	$\gamma_{n-2,2}$		
1	$\gamma_{n-1,1}$			
0	$\gamma_{n,1}$			

- Regole di costruzione della T.d.R. (algoritmo base)

1. Le prime due righe riportano in modo alterno i coefficienti di $a(s)$:

$$\begin{array}{llll} \gamma_{0,1} = a_n & \gamma_{0,2} = a_{n-2} & \gamma_{0,4} = a_{n-4} & \dots \\ \gamma_{1,1} = a_{n-1} & \gamma_{1,2} = a_{n-3} & \gamma_{1,3} = a_{n-5} & \dots \end{array}$$

Ove non esplicitamente definiti i coefficienti gamma assumono il valore di zero.

2. Le righe successive vengono definite dalla regola ($k = 2, 3, \dots, n$):

$$\gamma_{k,j} = - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \\ \gamma_{k-1,1} & \gamma_{k-1,j+1} \end{vmatrix}}{\gamma_{k-1,1}} = \frac{\gamma_{k-1,1} \cdot \gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1} \cdot \gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}}$$

Al numeratore viene calcolato il determinante, al contrario perchè davanti alla frazione era presente il segno meno, mentre al denominatore è presente il primo elemento della riga appena sopra che dovrà quindi necessariamente essere diverso da zero.

Teorema di Routh

Si assuma che la tabella di Routh possa essere completata. Allora ad ogni variazione di segno, degli elementi consecutivi della prima colonna, corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice a parte reale negativa.

Criterio di Routh

Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh può essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze di segno.

Proprietà: durante la costruzione della tabella di Routh i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi le variazioni (o permanenze) di segno nella prima colonna.

Casi singolari nella costruzione della tabella di Routh

1. Il primo elemento di una riga è zero (si dovrebbe dividere per 0, impossibile)
2. Tutti gli elementi di una riga sono nulli

Il caso numero (1) si risolve con il **metodo di Benidir-Picinbono** il quale dice che: ogni riga, non nulla, che inizia con p zeri viene sommata con la riga da questa ottenuta moltiplicandola per $(-1)^p$ e traslandola verso sinistra di p posizioni. La tabella di Routh viene poi continuata ed interpretata nel modo usuale.

Nel caso (2) tutti gli elementi di una riga sono nulli: quando il polinomio $a(s)$ non ha radici nell'origine ($a_0 \neq 0$) questo accade sempre su di una riga dispari, ovvero:

$$\begin{array}{c|cccccc} 2i & \gamma_{n-2i,1} & \gamma_{n-2i,2} & \gamma_{n-2i,3} & \dots & \gamma_{n-2i,i+1} & 0 \\ 2i-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

Definiamo il polinomio ausiliario $\beta(s)$

$$\beta(s) := \gamma_{n-2i,1} s^{2i} + \gamma_{n-2i,2} s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3} s^{2i-4} + \dots + \gamma_{n-2i,i} s^2 + \gamma_{n-2i,i+1}$$

L'equazione ausiliaria è quindi $\beta(s) = 0$ (notiamo come nel polinomio siano presenti solo potenze pari di s).

Proprietà

- Il polinomio ausiliario $\beta(s)$ divide $a(s)$. Quindi esiste un polinomio $\alpha(s)$ tale che $a(s) = \alpha(s)\beta(s)$
- La prima parte della tabella (fino alla riga $2i$) dà informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$.

Proprietà di simmetria delle radici del polinomio ausiliario

Le radici del polinomio ausiliario $\beta(s)$ sono disposte simmetricamente rispetto all'origine del piano complesso.

Corollario: l'equazione ausiliaria $\beta(s) = 0$ ha tante radici a parte reale negativa quante sono quelle a parte reale positiva e può anche presentare radici puramente immaginarie.

Come proseguire la costruzione della tabella nel caso (2)

1. Si deriva il polinomio ausiliario
2. I coefficienti del polinomio così ottenuto sostituiscono gli zeri della riga nulla
3. Si prosegue la tabella con l'algoritmo uguale: in questo caso però le permanenze corrispondono anche a radici puramente immaginarie

Interpretazione della tabella di Routh nel caso di singolarità completa (caso (2))

1. La prima colonna della tabella dalla riga n alla riga $2i$ da informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$: una variazione \rightarrow una radice a parte reale positiva, una permanenza \rightarrow una radice a parte reale negativa
2. La prima colonna della tabella dalla riga $2i$ alla riga 0 da informazioni sul segno delle radici di $\beta(s)$: una variazione \rightarrow una radice a parte reale positiva, una permanenza \rightarrow una radice a parte reale negativa oppure una radice puramente immaginaria

La simmetria delle radici di $\beta(s)$ (pol. ausiliario) permette di stabilire il segno della parte reale di tutte le radici.

9 Lezione 9

Consideriamo un sistema dinamico Σ , asintoticamente stabile, descritto dall'eq. differenziale $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$

($a(s)$ e $b(s)$ siano coprimi fra loro). La sua f.d.t è $G(s) = b(s)/a(s)$.

Fenomeno di risposta armonica: col sistema in quiete, all'istante $t = 0^-$, si applichi $u(t) = U \sin(\omega t)$, $\omega \geq 0$, $U \geq 0$. La risposta forzata di Σ per $t \rightarrow +\infty$ assume la forma:

$$y_\infty(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (37)$$

Possiamo quindi definire la **funzione di risposta armonica**

$$F: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C} \quad \omega \rightarrow F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{U} e^{j\varphi(\omega)} \quad (38)$$

In virtù della linearità di Σ , $F(\omega)$ è indipendente da U . Cambia la ampiezza (frazione con num. e den. ampiezze) ma la frequenza rimane uguale (formula di Eulero con ω), tipico dei sistemi lineari.

Teorema di analisi armonica

Sia Σ un sistema asintoticamente stabile con f.d.t $G(s)$ razionale. La risposta forzata di Σ ad un segnale armonico all'ingresso è ancora, a regime ($t \rightarrow \infty$), un segnale armonico con la stessa frequenza dell'ingresso. La funzione di risposta armonica associata soddisfa la relazione:

$$F(\omega) = G(j\omega) \quad (39)$$

La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è un modello matematico di Σ (alternativo all'eq. diff., f.d.t., risposta all'impulso, risposta al gradino, ecc.). $F(\omega)$ può essere determinata sperimentalmente. Sfruttando la relazione $F(\omega) = G(j\omega)$ la funzione di risposta armonica è definibile anche per sistemi non asintoticamente stabili.

Proprietà Sia dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)$. Allora

$$(U \sin(\omega t), U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))) \in \mathbf{B} \text{ per ogni } U \geq 0 \text{ e } \omega \geq 0$$

Il membro sinistro dentro la parentesi è l'ingresso armonico mentre quello destro è l'uscita. Come già sappiamo l'uscita si ottiene moltiplicando l'ingresso per la funzione di trasferimento, in particolare il modulo risultante sarà il prodotto dei moduli e l'argomento la somma degli argomenti (dalle proprietà degli esponenziali). **Nota:** non vengono espresse ipotesi riguardo la tipologia di sistemi per cui questa proprietà vale anche per i sistemi instabili.

Relazioni fra la risposta armonica $G(j\omega)$ e la risposta all'impulso $g(t)$:

$$\begin{cases} G(j\omega) = \int_{0-}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (40)$$

Sostituendo $\omega = 2\pi f$ si nota che quelle sopra sono le operazioni di trasformata e antitrasformata di Fourier. Ponendo $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ si potrebbe dimostrare:

$$\begin{cases} R(\omega) = \int_0^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt \\ I(\omega) = - \int_0^{+\infty} g(t) \sin(\omega t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} R(\omega) \cos(\omega t) d\omega \\ g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} I(\omega) \sin(\omega t) d\omega \end{cases}$$

Guadagni del sistema lineare Σ

f.d.t (guadagno dinamico) $G(s) \Rightarrow \begin{cases} s := j\omega \rightarrow \text{f di risp. armonica anche risp. in freq. (guad. armonico)} G(j\omega) \\ s := 0 \rightarrow \text{guadagno statico } G(0) \end{cases}$

I diagrammi di Bode

Sono diagrammi cartesiani logaritmici della risposta armonica

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri

$$\ln G(j\omega) = \ln(|G(j\omega)|) + j \arg G(j\omega) =: \alpha + j\beta$$

Quindi esprimiamo:

$$\alpha = \ln(|G(j\omega)|) \cong 2,3025 \cdot \log_{10}|G(j\omega)| \quad \beta = \arg G(j\omega) \quad (41)$$

Diagrammi:

- **Diagramma delle ampiezze o dei moduli o diagramma α :** riporta il logaritmo del modulo della r.a. in funzione della pulsazione ω
- **Diagramma delle fasi o degli argomenti o diagramma β :** riporta l'argomento della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω

Vantaggi della rappresentazione logaritmica:

1. è possibile rappresentare grandezze variabili in campi molto estesi
2. è possibile sommare i diagrammi di sistema in cascata
3. è possibile costruire i diagrammi come somme di diagrammi elementari

Rappresentazioni e parametri della f.d.t

Una f.d.t razionale $G(s)=b(s)/a(s)$ si può scrivere nella **forma standard con polinomi monici**:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (42)$$

o nella **forma standard con poli e zeri**:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (43)$$

con $K_1 \equiv$ costante di trasferimento.

Ipotizzando la presenza di un polo nell'origine di molteplicità h (il valore di h definisce il cosiddetto "tipo" del sistema in oggetto):

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_{h+1})(s - p_{h+2}) \dots (s - p_n)}$$

e da questa si può ottenere

$$G(s) = K_1 \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_1'}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2'}\right) \dots (s^2 + 2\delta_1' \omega_{n1}' s + \omega_{n1}'^2) (s^2 + 2\delta_2' \omega_{n2}' s + \omega_{n2}'^2) \dots}{s^h \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots (s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2) (s^2 + 2\delta_2 \omega_{n2} s + \omega_{n2}^2) \dots}$$

In particolare:

- $\tau_i(\tau'_i) \equiv$ costante di tempo associata ad un polo (zero) reale; $\tau_i(\tau'_i) < 0$ se il polo (zero) è positivo
- $\omega_{ni}(\omega'_{ni}) \equiv$ pulsazione naturale associata ad una coppia di poli (zeri) complessi coniugati ($\omega_{ni}, \omega'_{ni} > 0$)
- $\delta_i(\delta'_i) \equiv$ coefficiente di smorzamento associato ad una coppia di poli (zeri) complessi coniugati (se $\in (0,1)$)

$$G(s) = K_1 \frac{\omega'_{n1}{}^2 \omega'_{n2}{}^2 \cdots \tau_1 \tau_2 \cdots}{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau'_1 \tau'_2 \cdots} \cdot \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'_{n1}{}^2}\right)}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)}$$

Forma standard con le costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'_{n1}{}^2}\right) \left(1 + 2\delta'_2 \frac{s}{\omega'_{n2}} + \frac{s^2}{\omega'_{n2}{}^2}\right) \cdots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right) \cdots} \quad (44)$$

$$\text{Con } K = K_1 \frac{\omega'_{n1}{}^2 \omega'_{n2}{}^2 \cdots \tau_1 \tau_2 \cdots}{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau'_1 \tau'_2 \cdots} \text{ costante di guadagno}$$

Discriminiamo:

- Se $h = 0$ (\sum di tipo zero), $K \equiv$ guadagno statico
- Se $h = 1$ (\sum di tipo uno), $K \equiv$ guadagno di velocità
- Se $h = 2$ (\sum di tipo due), $K \equiv$ guadagno di accelerazione

Rappresentazione della risposta armonica con le costanti di tempo:

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + \tau'_1 j\omega)(1 + \tau'_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega'_{n1}{}^2} + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega'_{n2}{}^2} + 2\delta'_2 \frac{j\omega}{\omega'_{n2}}\right) \cdots}{(j\omega)^h (1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots} \quad (45)$$

Diagrammi elementari associati a:

- K
- $(j\omega)^{-h}$
- $(1 + \tau j\omega)^{\pm 1}$
- $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

Parametri caratteristici della risposta armonica

1. Pulsazione di risonanza $\omega_R \rightarrow \omega_R := \arg \max_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |G(j\omega)|$
2. Picco di risonanza $M_R \rightarrow M_R := \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$ oppure $M_R := |G(j\omega_R)|$
3. Larghezza di banda $B_\omega \rightarrow B_\omega := \omega_{t2} - \omega_{t1}; \omega_{t2} > \omega_{t1} \geq 0$
 $\omega_{t2} \equiv$ pulsazione di taglio superiore e $\omega_{t1} \equiv$ pulsazione di taglio inferiore

- Con una risposta armonica del tipo passa-basso:

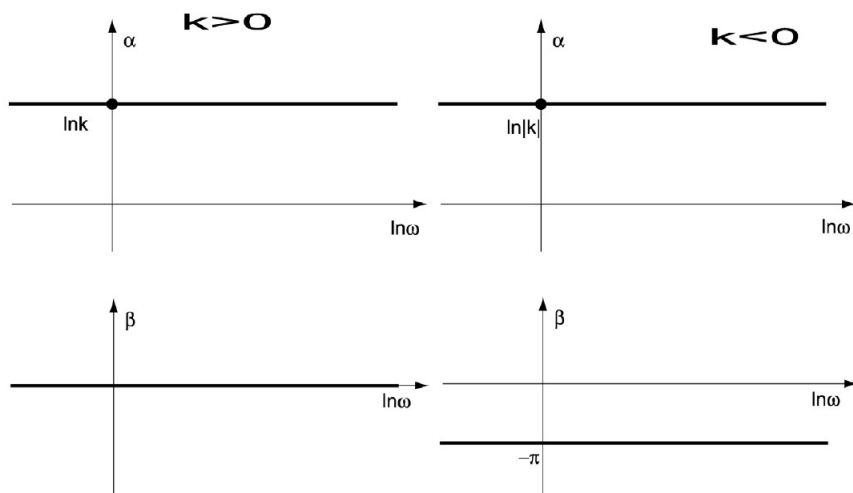
$$\omega_{t1} = 0, \quad |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j0)|}{\sqrt{2}} \in \omega_{t2}$$

- Con una risposta armonica del tipo passa-banda:

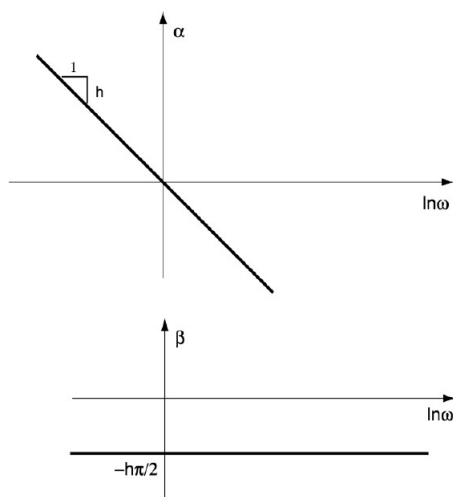
$$\begin{aligned} |G(j\omega_{t1})| &= \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}} \in \omega_{t1} & \text{e} & & \omega_{t1} < \omega_R \\ |G(j\omega_{t2})| &= \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}} \in \omega_{t2} & \text{e} & & \omega_{t2} > \omega_R \end{aligned}$$

Criteri di rappresentazione dei diagrammi elementari (ricordiamo che α e β sono i diagrammi rispettivamente di fase e ampiezza):

- Costante moltiplicativa $\rightarrow G(j\omega) = K$



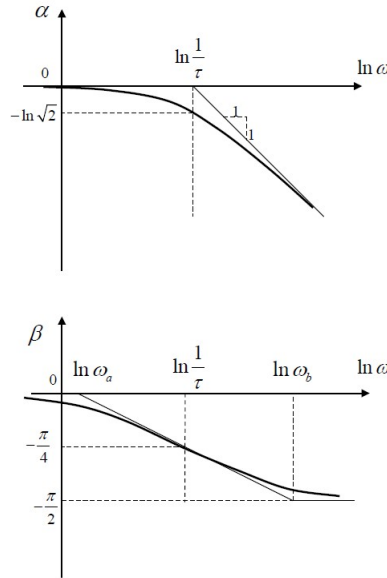
- Polo nell'origine $\rightarrow G(j\omega) = (j\omega)^h$: $\ln(j\omega)^{-h} = -h \cdot \ln(j\omega) = -h \left(\ln|\omega| + j\frac{\pi}{2} \right) = -h\omega - j\frac{\pi}{2}h$



- Polo $\rightarrow G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$: $\ln G(j\omega) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \right) + j(-\arctan(\omega\tau))$

$$\text{Se } \omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \alpha \approx 0$$

$$\text{Se } \omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega\tau} = \ln \frac{1}{\omega} + \ln \frac{1}{\tau} = -\ln\omega + \ln \frac{1}{\tau}$$



Definendo $\omega_0 := \frac{1}{\tau} \equiv$ pulsazione d'angolo, procediamo alla determinazione delle pulsazioni ω_a e ω_b :

$$\beta = -\arctan(\omega\tau) \Rightarrow \left. \frac{d\beta}{d(\ln(\omega))} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{d\beta}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d(\ln(\omega))} \Big|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \cdot \omega_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\ln(\omega_0) - \ln(\omega_a)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\ln(\omega_b) - \ln(\omega_0)} = \frac{1}{2} \iff \ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \iff \frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4,81$$

Quindi

$$\begin{cases} \omega_a = \frac{\omega_0}{4,81} \\ \omega_b = \omega_0 \cdot 4,81 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(\omega_a) = \ln(\omega_0) - \ln(4,81) \\ \ln(\omega_b) = \ln(\omega_0) + \ln(4,81) \end{cases}$$

Per interpretare le formule soprastanti bisogna considerare i diagrammi di Bode. In particolare dal punto di vista geometrico quello della fase in cui si esprime la derivata come divisione della differenza di ordinate ($\pi/4$) fratto la differenza di ascisse ($\ln(\omega_0) - \ln(\omega_a) = \ln(\omega_b) - \ln(\omega_0)$).

- Zeri $\rightarrow G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$. I diagrammi di questa funzione si ottengono per simmetria ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse.

10 Lezione 10

Diagrammi polari o di Nyquist

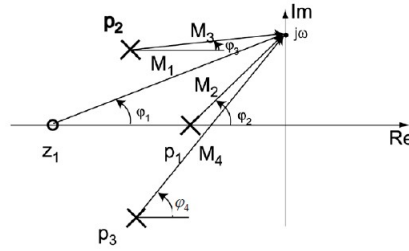
Il diagramma polare o di Nyquist della risposta armonica $G(j\omega)$ o della funzione di trasferimento $G(s)$ è la curva tracciata sul piano complesso dal vettore $G(j\omega)$ per ω che varia da 0 a $+\infty$.

I diagrammi polari sono importanti nello studio della stabilità dei sistemi retroazionati. Per questo fine, è sufficiente un tracciamento qualitativo del d.p. con individuazione dei punti notevoli. Il tracciamento del d.p. può essere coadiuvato dal seguente procedimento grafico. Per esempio, si consideri una f.d.t. descritta con la forma poli-zeri:

$$G(s) = K_1 \cdot \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \Rightarrow G(j\omega) = K_1 \cdot \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)}$$

Possiamo scrivere che

$$|G(j\omega)| = |K_1| \cdot \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} \quad \text{e} \quad \arg G(j\omega) = \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 & \text{se } K_1 > 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \pi & \text{se } K_1 < 0 \end{cases}$$



Per comprendere le formule mostrate sopra la prima cosa da fare è considerare graficamente il piano complesso e in particolare il punto $j\omega$ sull'asse immaginario ad altezza ω . Da questo punto bisogna tracciare il segmento che lo congiunge a ogni polo/zero. La lunghezza di questi tratti coincide con i moduli M_n presenti nella prima formula e, come si può notare, oltre a essere moltiplicati per la costante K_1 , si posizionano al numeratore o al denominatore, in base a fatto che siano rispettivamente zeri o poli. Considerando nuovamente la congiungente con il punto $j\omega$, l'angolo che si forma con la parallela all'asse reale del piano è quello da aggiungere o sottrarre nella seconda formula. Come prima, notiamo che se il segno è positivo se rispetto a uno zero e negativo se rispetto a un polo. Inoltre, se K_1 fosse negativa, bisognerebbe sottrarre ulteriormente pigreco in quanto dobbiamo annullare lo sfasamento che viene introdotto dal segno meno.

Proprietà (comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$): Il diagramma polare di un sistema strettamente proprio (quindi se l'ordine della derivata del segnale di uscita è maggiore strettamente dell'ordine della derivata dell'ingresso) termina (per $\omega \rightarrow +\infty$) sull'origine tangente ad uno degli assi coordinati (l'argomento tende a un multiplo di 2π).

Proprietà (\sum di tipo 0: comportamento per $\omega \rightarrow 0_+$): Il diagramma polare di un sistema di tipo zero (molteplicità di h , polo nell'origine uguale a 0 (vedi sotto formula 42 della f.d.t)) parte da ($\omega = 0$) dal punto dell'asse reale $G(j0) = K = K_1(b_0/a_0)$

Proprietà (comportamento per $\omega \rightarrow 0_+$ del diagramma polare dei sistemi di tipo $h \geq 1$): Si rappresenti $G(j\omega)$ con la forma standard con le costanti di tempo (vedi formula 44) e sia

$$\tau_a := \sum_i \tau'_i - \sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta'_i}{\omega'_{ni}} - \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{ni}}$$

Vale

$$\lim_{\omega \rightarrow 0_+} G(j\omega) = K \frac{1 + j\omega\tau_a}{(j\omega)^h} \quad (46)$$

Corollario (comportamento asintotico del diagramma polare dei sistemi di tipo $h = 1, 2, 3$): Siano x, y gli assi del piano cartesiano in cui si traccia il diagramma polare

- Se $h = 1$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0_+} G(j\omega) = K\tau_a - j \frac{K}{\omega}$$

e il diagramma polare parte adiacente ad una semiretta della retta di equazione $x = K\tau_a$.

- Se $h = 2$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0_+} G(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2} - j \frac{K\tau_a}{\omega}$$

e il diagramma polare parte adiacente ad un ramo della parabola di equazione $x = -\frac{1}{K\tau_a^2}y^2$.

- Se $h = 3$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0_+} G(j\omega) = -\frac{K\tau_a}{\omega^2} + j \frac{K}{\omega^3}$$

e il diagramma polare parte adiacente ad un ramo della curva cubica di equazione $y^2 = -\frac{1}{K\tau_a^3}x^3$.

I sistemi a fase minima

Per una significativa classe di sistemi, detti a fase minima, si nota che, nella funzione di risposta armonica, l'andamento del diagramma delle fasi è strettamente associato a quello delle ampiezze: se in una certa banda di frequenze l'ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla, mentre una pendenza negativa del diagramma delle ampiezze è associata ad un ritardo di fase, una pendenza positiva ad un anticipo di fase.

Sia \sum un sistema lineare e stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ e risposta armonica $G(j\omega)$. \sum è detto a **fase minima (fase non minima)** se il diagramma delle fasi $\beta = \arg[G(j\omega)]$ è (non è) determinato univocamente, modulo 2π , dal diagramma dei moduli $\alpha = \ln|G(j\omega)|$ mediante la **formula di Bode**.

Proposizione: Un sistema con funzione di trasferimento razionale è a fase minima se e solo se non presenta poli o zeri con parte reale positiva.

Formula di Bode

$$\alpha := \ln|G(j\omega)|, \quad \beta := \arg G(j\omega), \quad \beta_c := \arg G(j\omega_c), \quad u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$$

$$\begin{cases} \beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \left(\cotgh \left| \frac{u}{2} \right| \right) du & \text{se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) > 0 \\ \beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \left(\cotgh \left| \frac{u}{2} \right| \right) du - \pi & \text{se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) < 0 \end{cases} \quad (47)$$

Da notare come che la du si può semplificare all'interno dell'integrale. Come al solito h definisce il tipo del sistema \sum :

- $h = 0$: se \sum non presenta nè poli nè zeri nell'origine
- $h > 0$: se \sum presenta un polo di molteplicità h nell'origine
- $h < 0$: se \sum presenta uno zero di molteplicità $|h|$ nell'origine

Ricordiamo inoltre che \cotgh indica la cotangente iperbolica ed è definita come:

$$\cotgh(x) \triangleq \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

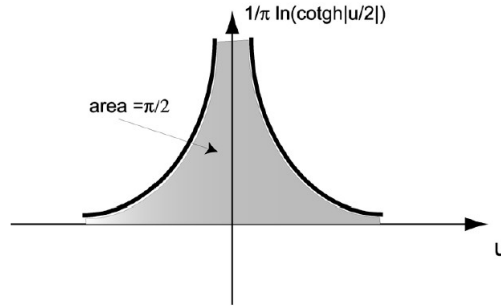
Interpretazione della formula di Bode (se pendenza unitaria: $d\alpha/du = 1$):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(\cotgh \left| \frac{u}{2} \right| \right) du = \frac{\pi}{2}$$

da cui la regola pratica:

Se $\frac{d\alpha}{du}$ è costante per due decadi di pulsazione centrate su ω_c allora

$$\beta_c \approx \left(\frac{d\alpha}{du} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (48)$$



Questa conclusione è comprensibile dal momento che abbiamo esplicitato sopra che quando la derivata $d\alpha/du$ è uguale ad 1 (e quindi si omette dal prodotto nell'integrale) l'area sottesa diventa $\pi/2$. Possiamo generalizzare questo caso perchè, se la derivata è costante (ipotesi scritta sopra), possiamo portarla fuori e otteniamo l'integrale di partenza moltiplicato per questa costante. Il valore dell'area sarà, come prima, uguale a $\pi/2$ però stavolta è presente anche una costante moltiplicativa uguale proprio a $d\alpha/du$, ed ecco che abbiamo trovato la formula qua sopra.

Approssimanti di Padè del ritardo finito

È conveniente sia per problemi di analisi ma anche, soprattutto, per problemi di sintesi approssimare il ritardo finito con una funzione razionale.

Approssimante di Padè di $e^{-t_0 s}$ (di ordine q)

$$G_q(s; t_0) := \frac{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} (-1)^k t_0^k s^k}{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} t_0^k s^k} \quad (49)$$

L'approssimante è un sistema asintoticamente stabile e si potrebbe dimostrare che lo è per qualunque ordine e la configurazione di poli e zeri è simmetrica rispetto all'asse immaginario (si vede bene nell'esempio del primo ordine).

Proprietà: Lo sviluppo in serie di McLaurin di $G_q(s; t_0)$ coincide con l'analogo sviluppo di $e^{-t_0 s}$ fino alla potenza $(2q)$ -esima.

$$e^{-t_0 s} = 1 - t_0 s + \frac{t_0^2}{2!} s^2 - \frac{t_0^3}{3!} s^3 + \frac{t_0^4}{4!} s^4 - \frac{t_0^5}{5!} s^5 + \dots$$

Approssimante di Padè del primo ordine (ottenuto sostituendo $k = 1$):

$$G_1(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s}{1 + \frac{t_0}{2} s}$$

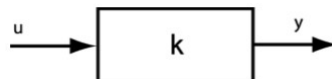
Per capire come funzionano gli approssimanti di Padè andiamo a riportare il diagramma polare dell'esponenziale $e^{-t_0 j\omega}$ sul piano complesso. Immaginiamo quindi di disegnare il d.p del ritardo finito esatto che è descritto dalla funzione esponenziale. Questo diagramma è una circonferenza perfetta centrata nell'origine di raggio unitario percorsa infinite volte al variare di ω .

Il diagramma polare di: $G_1(j\omega, t_0)$ è una semicirconferenza unitaria centrata nell'origine, $G_2(j\omega, t_0)$ è una circonferenza unitaria percorsa una volta sola, $G_3(j\omega, t_0)$ è una circonferenza unitaria percorsa una volta e mezzo, etc... Maggiore è il grado di approssimazione, maggiore sarà il numero di volte che la circonferenza verrà percorsa, come avviene per il ritardo finito.

11 Lezione 11

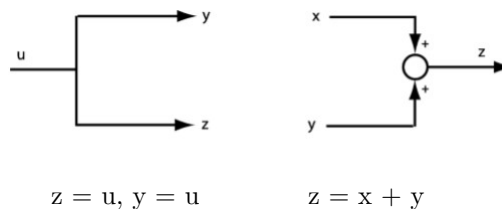
Gli schemi a blocchi

I sistemi complessi possono essere rappresentati con schemi a blocchi i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.



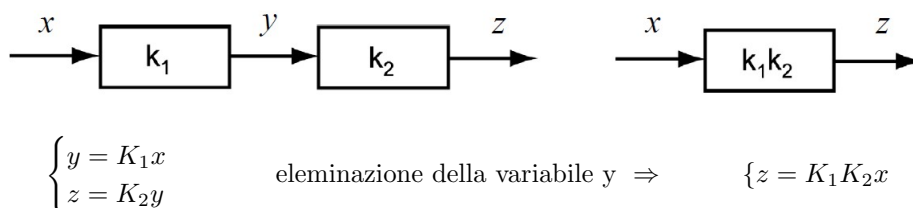
$y = Ku$, $K \equiv$ guadagno dell'elemento o blocco elementare.

I blocchi sono collegati fra loro mediante i **punti di diramazione** e le **giunzioni sommant**:

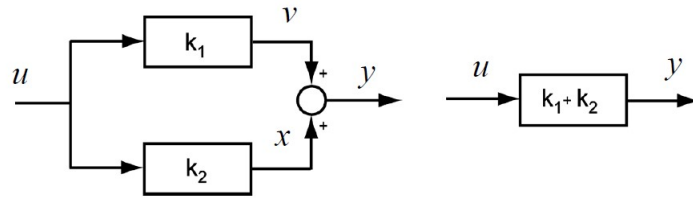


Regole di riduzione

1. Riduzione di blocchi in cascata



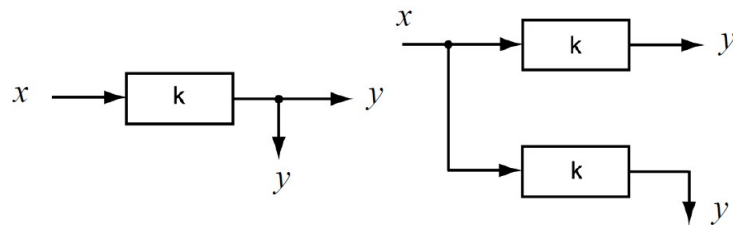
2. Riduzione di blocchi in parallelo



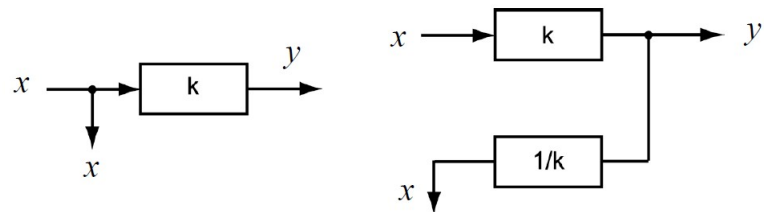
3. Scambio di giunzioni sommanti



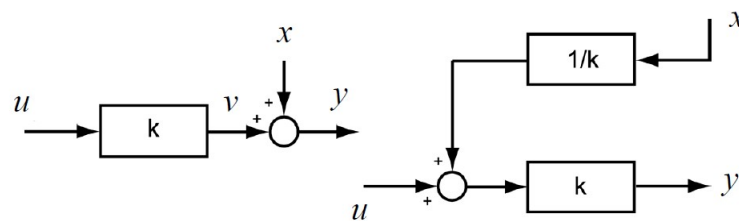
4. Spostamento di prelievo di segnale a monte di un blocco



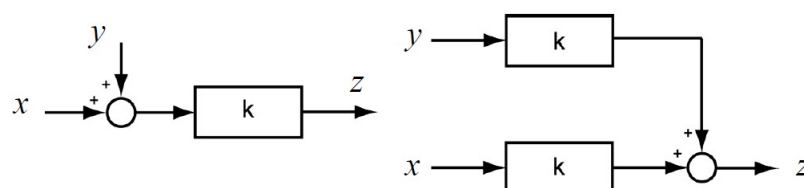
5. Spostamento di prelievo di segnale a valle di un blocco



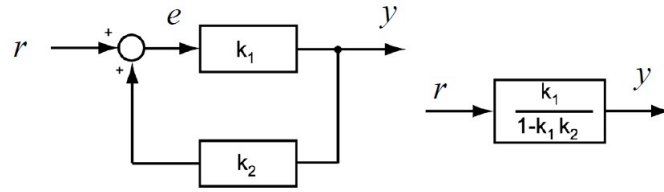
6. Spostamento di giunzione sommannte a monte di un blocco



7. Spostamento di giunzione sommannte a valle di un blocco



8. Eliminazione di un anello



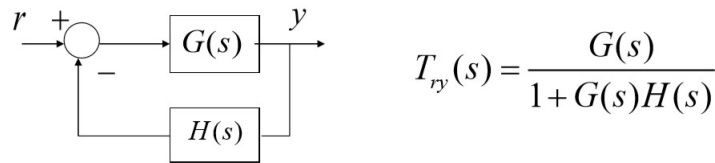
$$\begin{cases} y = K_1 e \\ z = r + K_2 y \end{cases} \quad \text{possiamo scrivere l'uscita } y \text{ come } \Rightarrow \quad y = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2} r$$

Proprietà generali dei sistemi in retroazione

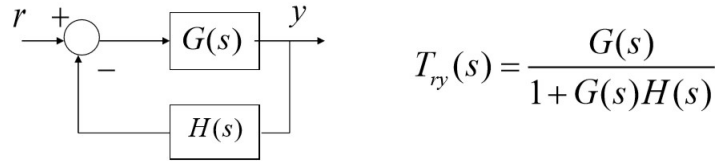
Regola rapida per il calcolo della f.d.t. nei sistemi retroazionati (singolo anello con il segnale retroazionato sottratto nella giunzione sommante):

$$\{ \text{f.d.t.} \} = \left\{ \frac{\text{f.d.t. del percorso di segnale diretto}}{1 + \text{guadagno di anello}} \right\} \quad (50)$$

Quindi, un semplice esempio:



Sensibilità a variazioni di parametri nei sistemi retroazionati



- 1° caso: **variazione di un parametro nella catena diretta** (quella che collega r e y)
 $G(s)$ è in realtà $G(s; \alpha)$ con $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\alpha_0 \equiv \{ \text{valore nominale del parametro} \}$

$$\Delta\alpha \rightarrow \Delta G := G(s; \alpha) - G(s; \alpha_0) \rightarrow \frac{\Delta G}{G(s; \alpha)} \equiv \{ \text{Variazione relativa di } G \}$$

$$\Delta\alpha \rightarrow \Delta T := T(s; \alpha) - T(s; \alpha_0) \rightarrow \frac{\Delta T}{T(s; \alpha)} \equiv \{ \text{Variazione relativa di } T \}$$

Possiamo quindi definire:

$$S_G^T \equiv \{ \text{Sensibilità di } T \text{ a variazioni di } G \} := \frac{\frac{\Delta T}{T(s; \alpha_0)}}{\frac{\Delta G}{G(s; \alpha_0)}} \quad (51)$$

Questa sensibilità è bassa, tantomeno il sistema retroazionato risulta essere perturbato da quello che accade nel percorso diretto a causa delle variazioni di α_0 . Quindi, situazione buona quando la sensibilità è un valore piccolo, non buona quando valore grande.

Considerando $\Delta\alpha$ variazione infinitesimale il rapporto di delta diventa una derivata per cui si ha:

$$S_G^T = \left. \frac{dT}{dG} \right|_{\alpha=\alpha_0} \cdot \frac{G(s; \alpha_0)}{T(s; \alpha_0)} \quad \text{ma} \quad T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \Rightarrow \quad S_G^T = \frac{1}{1 + G(s; \alpha_0)H(s)}$$

Avevamo già trovato la funzione di trasferimento T poco sopra parlando di proprietà generali di sistemi retroazionati. L'espressione che troviamo alla fine ci dice che la sensibilità è uguale a 1 diviso il **guadagno di**

anello. Diciamo quindi che se abbiamo un guadagno di anello elevato riusciamo ad avere una sensibilità bassa che è proprio quello che vogliamo ottenere in un sistema di controllo. Noi vogliamo avere una funzione di trasferimento T dal segnale di comando al segnale controllato che sia stabile e quindi con una sensibilità di T a variazione di G che sia la più bassa possibile. Quando il guadagno di anello è elevato, questo è possibile. In termini frequenziali:

$$\text{se } |G(j\omega; \alpha_0)H(j\omega)| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\Delta T(j\omega)}{T(j\omega; \alpha_0)} \right| \ll \left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega; \alpha_0)} \right|$$

Conclusione: un guadagno di anello elevato rende (relativamente) insensibile la f.d.t. del sistema retroazionato a variazioni della f.d.t. del sistema controllato.

• 2° caso: **variazione di un parametro nella catena di retroazione**

H(s) è in realtà H(s; β) con $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, $\beta_0 \equiv \{\text{valore nominale del parametro}\}$

$$\Delta\beta \rightarrow \Delta H := H(s; \beta) - H(s; \beta_0) \rightarrow \frac{\Delta H}{H(s; \beta_0)} \equiv \left\{ \text{Variazione relativa di H} \right\}$$

$$\Delta\beta \rightarrow \Delta T := T(s; \beta) - T(s; \beta_0) \rightarrow \frac{\Delta T}{T(s; \beta_0)} \equiv \left\{ \text{Variazione relativa di T} \right\}$$

Possiamo quindi definire:

$$S_H^T \equiv \left\{ \text{Sensibilità di T a variazioni di H} \right\} := \frac{\frac{\Delta T}{T(s; \beta_0)}}{\frac{\Delta H}{H(s; \beta_0)}} \quad (52)$$

Considerando $\Delta\beta$ variazione infinitesimale il rapporto di delta diventa una derivata per cui si ha:

$$S_H^T = \left. \frac{dT}{dH} \right|_{\beta=\beta_0} \cdot \frac{H(s; \beta_0)}{T(s; \beta_0)} \quad \text{ma} \quad T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \Rightarrow \quad S_H^T = - \frac{G(s)H(s; \beta_0)}{1 + G(s)H(s; \beta_0)}$$

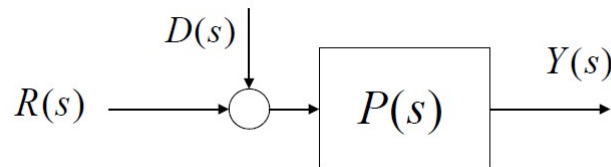
Quindi se il guadagno di anello è elevato la variazione relativa di T è circa uguale (in modulo) alla variazione relativa di H. In termini frequenziali:

$$\text{se } |G(j\omega)H(j\omega; \beta_0)| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\Delta T(j\omega)}{T(j\omega; \beta_0)} \right| \cong \left| \frac{\Delta H(j\omega)}{H(j\omega; \beta_0)} \right|$$

Conclusione: variazioni della f.d.t. nella catena di retroazione si riverberano senza attenuazione in variazioni della f.d.t. del sistema retroazionato.

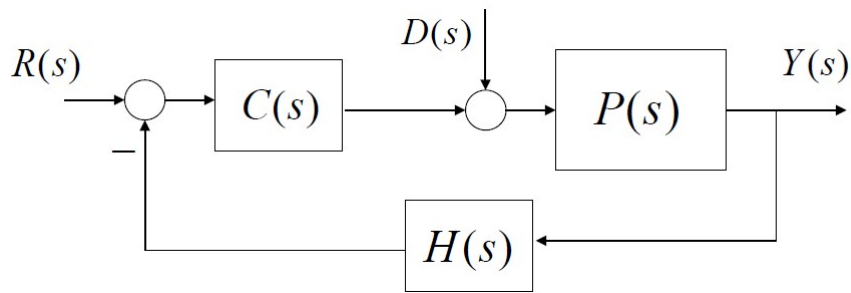
Attenuazione dei disturbi

Disturbo agente su "impianto" ad anello aperto:



$$\left. \begin{aligned} \left\{ \text{Uscita determinata dal segnale utile} \right\} &\equiv P(s)R(s) \\ \left\{ \text{Uscita determinata dal disturbo} \right\} &\equiv P(s)D(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}} \right\} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Ipotizziamo che il disturbo sia indipendente dal segnale "manipolabile" R(s) e mostriamo come sia possibile migliorare il rapporto segnale/disturbo introducendo la retroazione:



Per un confronto omogeneo si richiede $\frac{CP}{1+CPH} \cong P \Rightarrow C \cong 1 + CPH$. Questo è possibile quando $CPH \gg 1$ e

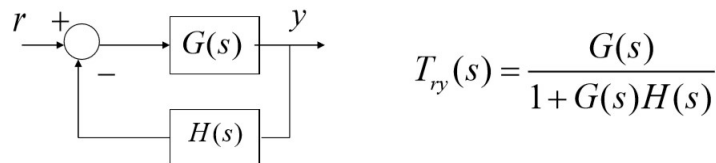
$H \cong 1/P$ ovvero $\begin{cases} \text{guadagno di anello elevato} \\ \text{f.d.t. della catena di retroazione} \cong \text{sistema inverso di } P \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Uscita determinata dal segnale utile} \\ \text{Uscita determinata dal disturbo} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \cong P(s)R(s) \\ = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}D(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}} \right\} \cong (1 + C(s)P(s)H(s)) \frac{R(s)}{D(s)}$$

Il rapporto segnale/disturbo viene modificato nel rapporto di 1 a $|1 + C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)|$ e quindi fortemente aumentato se nella banda di frequenze del disturbo vale $|C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$.

Conclusione: se il guadagno di anello è elevato il rapporto segnale/disturbo si eleva all'incirca del medesimo fattore passando dallo schema in catena aperta a quello in catena chiusa. Quindi, a parità di segnale utile, il disturbo viene grandemente attenuato nel sistema di retroazione.

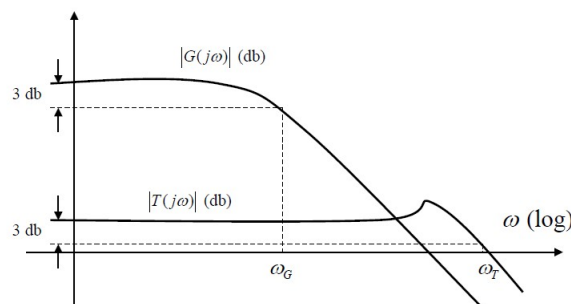
Allargamento della banda passante



Ipotizziamo che $H(s) = h > 0$ $T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + hG(j\omega)}$

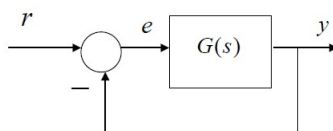
Se $h|G(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow T(j\omega) \cong 1/h$

Un guadagno di anello elevato implica un allargamento della banda passante.



Analisi a regime dei sistemi in retroazione

Studio dell'errore di regolazione i regime in risposta a segnali tipici.



Assunzioni: sistema in retroazione unitaria, sistema retroazionato asintoticamente stabile.

$$r(t) \in \left\{ r_0 \cdot 1(t), r_0 \cdot t1(t), r_0 \cdot \frac{t^2}{2}1(t) \right\} \quad e(t) := r(t) - y(t) \quad E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) \quad e_r := \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t)$$

Come al solito h corrisponde al tipo del sistema di $G(s)$ ovvero alla molteplicità dell'eventuale polo nell'origine. Gli elementi di $r(t)$ sono nell'ordine: gradino alto r_0 , rampa di pendenza r_0 e parabola.

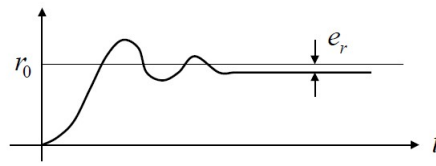
- **Gradino**

$$r(t) = r_0 1(t) \quad R(s) = \frac{r_0}{s}$$

Per il teorema del valore finale (vedi lezione 4) possiamo dire che

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s} \Rightarrow e_r = \frac{r_0}{1+K_p} \text{ dove } K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \text{ (costante di posizione)}$$

K_p è il guadagno statico del guadagno di anello

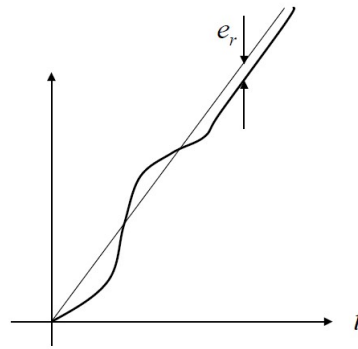


- **Rampa**

$$r(t) = r_0 t 1(t) \quad R(s) = \frac{r_0}{s^2}$$

Per il teorema del valore finale possiamo dire che

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s + sG(s)} \\ \Rightarrow e_r = \frac{r_0}{K_v} \text{ dove } K_v := \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \text{ (costante di velocità)}$$

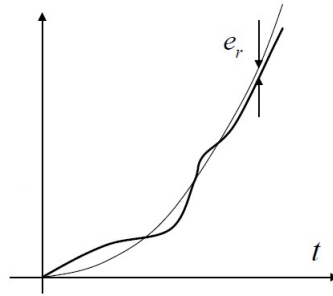


- **Parabola**

$$r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} 1(t) \quad R(s) = \frac{r_0}{s^3}$$

Per il teorema del valore finale possiamo dire che

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s^2 + s^2 G(s)} \\ \Rightarrow e_r = \frac{r_0}{K_a} \text{ dove } K_a := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \text{ (costante di accelerazione)}$$



Quadro riassuntivo:

Tipo di sistema	K_p	K_v	K_a	Tipo — Ingresso	gradino	rampa	parabola
0	K	0	0	0	$e_r = \frac{r_0}{1+K}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	∞	K	0	1	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_0}{K}$	$e_r = \infty$
2	∞	∞	K	2	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_0}{K}$

Errore a regime con retroazione non unitaria

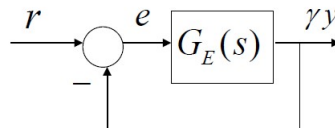
Essendo la retroazione non unitaria, come nel caso studiato appena prima, sul ramo di retroazione non sarà vuoto ma ci sarà $H(s)$. La variabile controllata y è in generale dimensionalmente diversa dal segnale di set-point r e quindi occorre definire la condizione ideale di controllo:

$$y(t) \equiv K_c r(t) \quad K_c := \text{costante di controllo o regolazione}$$

La difformità dalla condizione ideale può essere misurata da una variabile errore, per esempio così definita:

$$e(t) := r(t) - \gamma y(t); \quad \gamma := \frac{1}{K_c} \quad \text{quindi} \quad e(t) \equiv 0 \iff y(t) \equiv K_c r(t)$$

Lo schema in retroazione non unitaria può essere ricondotto allo schema sotto con retroazione unitaria. Quest'ultimo incorpora la definizione di errore assegnata.

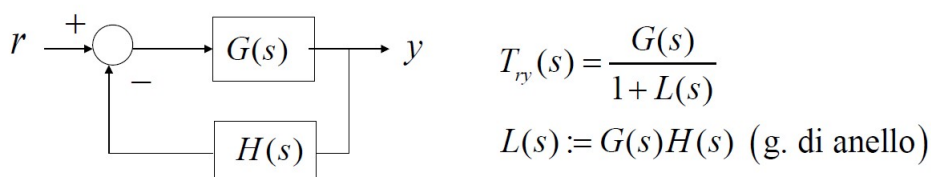


Affinchè i due schemi siano equivalenti occorre e basta che la f.d.t. fra r ed y del primo schema moltiplicata per γ sia uguale alla f.d.t. fra r e γy del secondo schema.

$$\frac{G}{1+GH} \cdot \gamma = \frac{G_E}{1+G_E} \Rightarrow G_E(s) = \frac{G(s)\gamma}{1+G(s)(H(s)-\gamma)} \quad (53)$$

12 Lezione 12

Sistemi retroazionati: il requisito di buona connessione

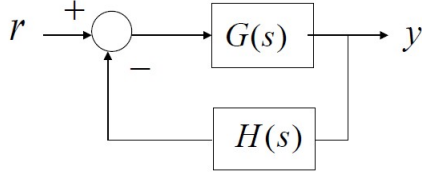


Il sistema retroazionato è **ben connesso** se $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0$.

La buona connessione è una condizione necessaria per la realizzabilità fisica dell'anello di retroazione, infatti se non fosse soddisfatta, per s che tende all'infinito si avrebbe una divisione con denominatore uguale a 0. È una condizione che assumiamo sia sempre soddisfatta.

Il criterio di Nysquist

È un criterio grafico per lo studio della stabilità asintotica dei sistemi retroazionati.



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) := G(s)H(s) \text{ (g. di anello)}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se l'equazione caratteristica $1 + L(s) = 0$ ha tutte le radici a parte reale negativa.

Il criterio di Nyquist richiede il tracciamento del diagramma polare (o di Nyquist) di $L(j\omega)$.

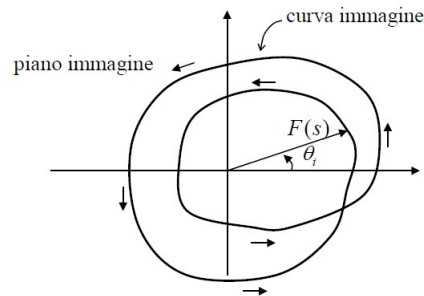
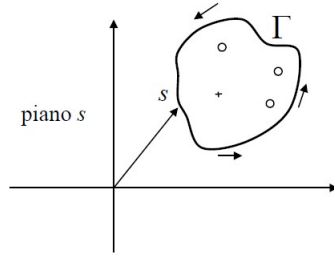
Teorema dell'indice logaritmico (*Principle of the Argument*)

Sia Γ una curva chiusa semplice del piano complesso e D la regione ad esso interna ($\Gamma = \partial D$). Sia $F(s)$ una funzione analitica su Γ e su D ad eccezione di un numero finito di poli appartenenti a D . Inoltre $F(s)$ non abbia zeri su Γ .

Vale quindi la relazione:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p \quad (54)$$

dove $\Delta \arg F(s)$ denota la variazione dell'argomento di $F(s)$ al variare di s lungo Γ per un giro completo in senso antiorario ed n_z e n_p sono rispettivamente il numero di zeri e dei poli di $F(s)$ su D computati con le loro molteplicità.



Nota: se la curva Γ fosse percorsa in senso orario la relazione sarebbe:

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p \quad (55)$$

Corollario (formulazione geometrica del teorema dell'indice logaritmico)

Assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di Γ antioraria** vale la relazione:

$$\left\{ \text{numero di giri, in senso antiorario, della curva immagine intorno all'origine} \right\} = n_z - n_p \quad (56)$$

oppure, assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di Γ oraria** vale la relazione:

$$\left\{ \text{numero di giri, in senso orario, della curva immagine intorno all'origine} \right\} = n_z - n_p \quad (57)$$

Applicazione del teorema dell'indice logaritmico alla stabilità dei sistemi retroazionati:

La curva chiusa di figura percorsa in senso orario è detta **Contorno di Nyquist**: è composta da una semicirconferenza all'infinito, semicirconferenze infinitesime aggiranti i poli immaginari di $L(s)$ e da segmenti dell'asse immaginario.

Si osservi che per $\rho \rightarrow 0_+$ e $R \rightarrow \infty \Rightarrow D \rightarrow \mathbb{C}_+$

Questo significa che quando il raggio dei semicerchi sull'asse immaginario tende a 0 e il raggio del semicerchio esterno tende all'infinito, la superficie interna alla curva tende ad coincidere con il semipiano dei numeri complessi a parte reale positiva. I piccoli semicerchi sull'asse immaginario sono fatti per evitare il passaggio in singolarità (poli o zeri).

Si applica il teorema dell'indice logaritmico nella sua formulazione geometrica con scelta del contorno di Nyquist quale curva chiusa semplice e della funzione $1 + L(s)$.

Condizioni di applicabilità:

- $1 + L(s)$ è analitica sul contorno di Nyquist ed è analitica su \mathbb{C}_+ (regione interna al contorno di Nyq.) ad eccezione di un numero finito di poli (condizione soddisfatta)
- $1 + L(s)$ non deve presentare zeri sul contorno di Nyquist. Questi se presenti possono esserci solo sull'asse immaginario. **Quindi il diagramma polare di $L(s)$ (ovvero $L(j\omega)$) non deve attraversare il punto $-1 + j0$** (condizione da soddisfare). Infatti:

$$s = j\omega \quad 1 + L(s) = 0 \Rightarrow 1 + L(j\omega) = 0 \Rightarrow L(j\omega) = -1$$

Definizioni:

- $n_z :=$ n. degli zeri di $1 + L(s)$ appartenenti a \mathbb{C}_+
- $n_p :=$ n. dei poli di $L(s)$ (o di $1 + L(s)$) appartenenti a \mathbb{C}_+
- $\psi := \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della curva immagine di } 1 + L(s) \\ \text{sul contorno di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\}$

Assunto che il diagramma polare di $L(s)$ non tocca il punto -1 vale

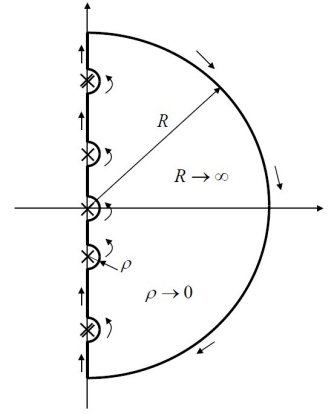
$$\psi = n_z - n_p \quad (58)$$

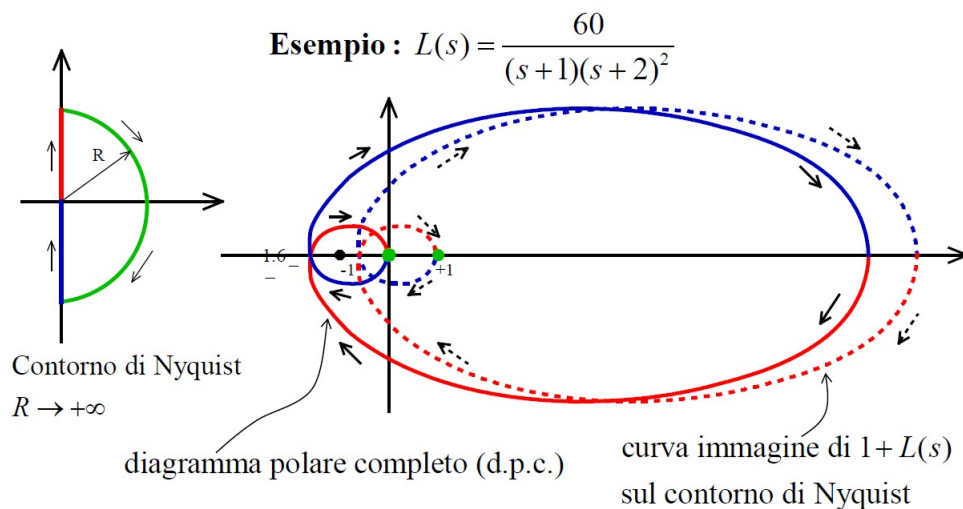
Il **diagramma polare completo** (di $L(s)$) è la curva chiusa immagine di $L(s)$ sul contorno di Nyquist. Quindi

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario del} \\ \text{diagramma polare completo (d.p.c.)} \\ \text{intorno al punto } -1 + j0 \end{array} \right\}$$

Infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul} \\ \text{contorno di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario del} \\ \text{diagramma polare completo} \\ \text{intorno al punto } -1 + j0 \end{array} \right\}$$





$$\psi = 2, n_p = 0$$

$$\psi = n_z - n_p \Rightarrow n_z = 2 \text{ Il sistema retroazionato è instabile!}$$

Criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico -1 ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva.

Corollario

Nell'ipotesi che il guadagno di anello non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi né circonda il punto critico -1 .

Nota: il corollario non è da associarsi ai sistemi stabili ad anello aperto.

Dimostrazione del criterio di Nyquist

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se

1. il diagramma polare completo di $L(s)$ non tocca -1 (equivalente a "il diagramma polare di $L(s)$ non tocca -1 ")
2. $-\psi = n_p$

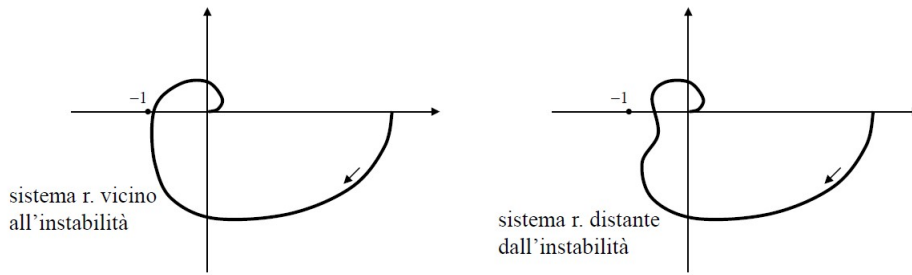
Sufficienza: Valgono le condizioni 1 e 2. La prima condizione significa che $1 + L(s)$ non presenta zeri (puramente immaginari). Dal teorema dell'indice logaritmico si ottiene $\psi = n_z - n_p$ e dalla seconda condizione segue $n_z = 0$. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Necessità: Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Tutti gli zeri di $1 + L(s)$ sono a parte reale negativa. Quindi non sono presenti zeri (puramente) immaginari di $1 + L(s)$ (equivalente alla condizione 1) e $n_z = 0$. Applicando il teorema dell'indice logaritmico si ottiene $\psi = n_z - n_p$ da cui si deduce $\psi = -n_p$ e quindi $-\psi = n_p$ (condizione 2).

Nota: il criterio di Nyquist è valido per una classe di funzioni $L(s)$ più ampia delle sole funzioni razionali: in particolare è valido per $L(s) = R(s)e^{-Ts}$ con $R(s)$ funzione razionale. Ricordiamo che l'esponenziale rappresenta un ritardo finito, in questo caso di valore T .

Un'altra considerazione utile da fare è che il criterio ci dà una informazione molto essenziale, nel senso che ci dice se il sistema è stabile o no. Vogliamo poter studiare meglio le casistiche, introducendo quindi dei parametri indicativi, ad esempio che ci dicano quanto dista l'instabilità.

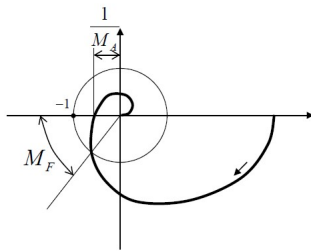
Margini di stabilità

La proprietà di stabilità (asintotica) di un sistema retroazionato è di per sé una proprietà on/off. Tuttavia è opportuno e necessario inserire nelle specifiche tecniche associate ad un sistema retroazionato una misura della distanza dall'instabilità.



La distanza dall'instabilità nei sistemi retroazionati è tradizionalmente affidata ai cosiddetti margini di stabilità frequenziali ovvero il **margin di ampiezza** (M_A) e il **margin di fase** (M_F).

Definiamo:



$$M_A := \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \text{ dove } \omega_p \ni \arg L(j\omega_c) = -\pi$$

$\omega_p \equiv$ pulsazione di fase pi greco

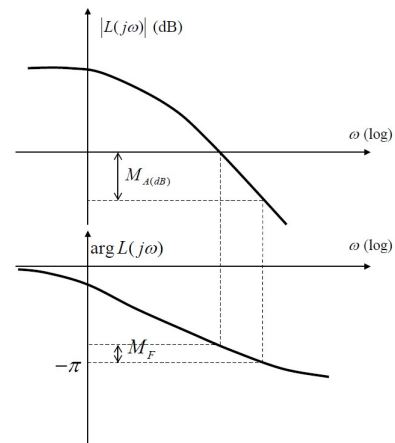
$$M_F := \pi - |\varphi_c| \text{ dove } \varphi_c = \arg L(j\omega_c) \text{ e } \omega_c \ni |L(j\omega_c)| = 1$$

$\varphi \in (-\pi, 0)$, $\omega_c \equiv$ pulsazione critica

$M_A \in (1, +\infty)$ a volte espresso in decibel: $M_{A(dB)} = 20 \log M_A$ $M_F > 0$ espresso usualmente in gradi sessagesimali

Margini di ampiezza
e di fase misurati sui
diagrammi di Bode

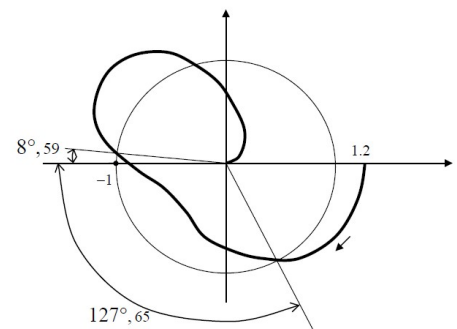
$$M_{A(dB)} = -20 \log |L(j\omega_p)|$$



Il segno meno nella formula di M_A è presente a causa della proprietà dei logaritmi per cui il log del reciproco di x è uguale a il log di x col segno meno. In questo caso x corrisponde a $L(j\omega_p)$. Notiamo inoltre che dal grafico in alto viene riportato sotto il valore per cui la funzione interseca l'asse delle ascisse; quel valore è la pulsazione critica ω_c .

Ci sono però dei problemi con le definizioni tradizionali dei margini di stabilità, infatti considerando il seguente caso:

In questo diagramma è presente una risonanza per cui notiamo un "rigonfiamento" nel secondo quadrante. Usando la definizione di M_F tradizionale ci verrebbe da dire che il suo valore sia $127,65$ tuttavia, come notiamo, c'è un valore molto inferiore per cui il grafico interseca la circonferenza unitaria. Ovviamente se $8,59$ è un margine molto più pericoloso, più vicino all'instabilità per cui 127 passa sicuramente in secondo piano.



Definizioni generalizzate dei margini di stabilità

Il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente:

$$M_A := \sup \left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\} \quad (59)$$

$$M_F := \sup \left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\} \quad (60)$$

I margini di stabilità sono "norme" che misurano la distanza del punto critico $-1 + j0$ dal diagramma polare di $L(j\omega)$.

Proprietà

Sia $M > 1$. Vale la disequazione $|1 + (j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right]$ e $\forall \omega \geq 0$ se e solo se il segmento dell'asse reale compreso tra $-M$ e $-1/M$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

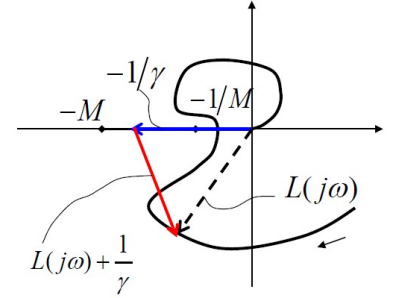
Dimostrazione:

$$\left\{ |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Divido dentro il modulo per γ che dovrà quindi essere diverso da 0

$$\left\{ \left| \frac{1}{\gamma} + L(j\omega) \right| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Si noti che $\frac{1}{M} \leq \gamma \leq M \Rightarrow -M \leq -\frac{1}{\gamma} \leq -\frac{1}{M}$. Quindi abbiamo i due punti sull'asse reale corrispondenti a M e al suo reciproco e vediamo che $-1/\gamma$, che è il vettore blu, deve essere compreso tra i due. Se la disuguaglianza è soddisfatta il vettore rosso non si annulla mai.



Proprietà:

Sia $\phi > 0$. Vale la disequazione $|1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi]$ e $\forall \omega \geq 0$ se e solo se l'arco di circonferenza di equazione $e^{j(\pi+\varphi)}$, $\varphi \in [-\phi, \phi]$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

Dimostrazione:

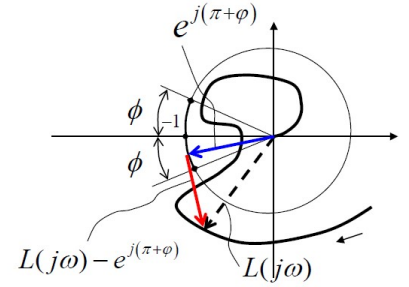
$$\left\{ |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Moltiplico per l'esponenziale a sinistra perchè ha modulo 1 e quindi non altera, ruota e basta

$$\left\{ |(1 + e^{-j\varphi} L(j\omega))e^{j\varphi}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

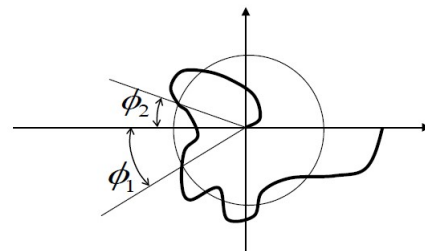
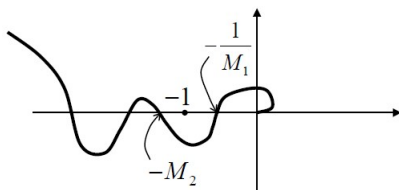
$$\left\{ |(L(j\omega) + e^{j\varphi})| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\left\{ |(L(j\omega) - e^{j(\pi+\varphi)})| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$



L'elemento in modulo dovrebbe essere il vettore rosso. Il margine di fase si trova incrementando l'arco (aumentando ϕ) finchè non si incontra il diagramma polare. Un ragionamento analogo vale per quanto riguarda il margine di ampiezza.

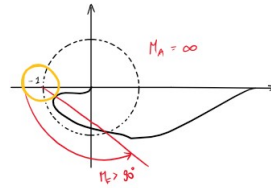
Procedura generale per il calcolo dei margini di stabilità



$$M_A = \min\{M_1, M_2\}$$

$$M_F = \min\{\phi_1, \phi_2\}$$

Questa definizione rimane comunque criticabile in quanto è possibile, per quanto improbabile, trovare un diagramma come quello presente nella sottostante immagine.



In questo caso infatti si vede come il margine di fase sia molto elevato e quello di ampiezza sia addirittura infinito. Tuttavia come si vede chiaramente, l'instabilità è molto vicina in quando il diagramma passa nelle vicinanze del punto -1 . In alcuni casi allora si considera una ulteriore definizione di margine, la seguente:

$$S_M \triangleq \min_{\omega \geq 0} |1 + L(j\omega)| \quad (61)$$

Questa formula rappresenta la distanza vera e propria del diagramma polare al punto -1 . Nella immagine viene fatta vedere la circonferenza avente come raggio la distanza minima che la linea raggiunge col punto. Quella circonferenza rappresenta proprio il margine seguendo la ultima definizione che abbiamo dato (e che non useremo).

13 Lezione 13

Il luogo delle radici

Nel progetto di un sistema in retroazione è utile conoscere come i poli retroazionati si modificano al variare dei più importanti parametri di progetto: fra questi c'è la **costante di trasferimento** K_1 del guadagno di anello $L(s)$. Scriviamo questo guadagno con la forma standard con poli e zeri (vedi Lezione 9 con notazioni):

$$L(s) = K_1 \cdot \frac{(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

Equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \text{definendo} \quad G_1(s) := \frac{z(s)}{p(s)} := \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Definizione:

Luogo delle radici (diretto) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0^+ a $+\infty$.

Luogo delle radici (inverso) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0^- a $-\infty$.

Se $K_1 > 0$ allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \iff \begin{cases} \arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi \\ |G_1(s)| = \frac{1}{K_1} \end{cases}$$

Se $K_1 < 0$ allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \iff \begin{cases} \arg G_1(s) = 0 \mod 2\pi \\ |G_1(s)| = -\frac{1}{K_1} \end{cases}$$

Nella prima casistica possiamo dire subito che G_1 deve essere per forza reale e negativo dal momento che K_1 è reale e positivo. Per cui sappiamo che troveremo le soluzioni sul semiasse negativo reale del piano complesso. Per questo motivo indichiamo nelle condizioni che l'argomento di G_1 dovrà essere uguale a π . Analogo ragionamento vale per la seconda casistica, dove le soluzioni dovranno essere positive.

Proprietà del luogo delle radici

- **Proprietà 1:** Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G_1(s)$. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito. I rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple.

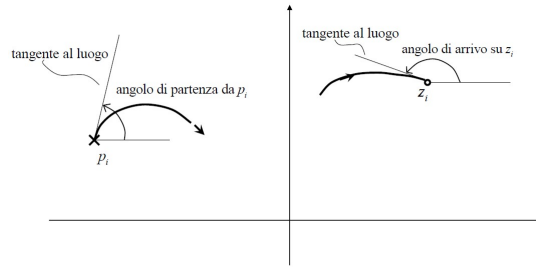
- **Proprietà 2:** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- **Proprietà 3:** Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale **dispari** di zeri e poli di $G_1(s)$. Nel luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale **pari** di zeri e poli di $G_1(s)$.
- **Proprietà 4:** Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) l'angolo di partenza da un polo p_i semplice è dato dalla relazione:

$$\{\text{ang. di partenza da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

l'angolo di arrivo sullo zero z_i semplice è dato da

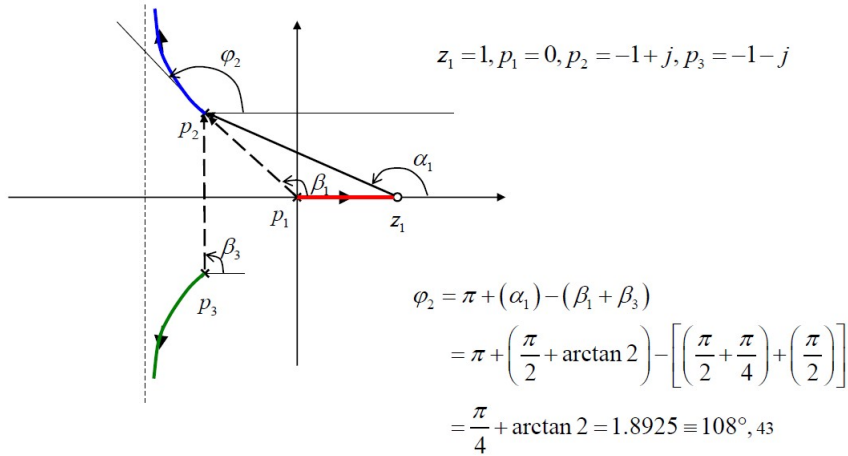
$$\{\text{ang. di partenza da } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

Se il luogo delle radici è inverso ($K_1 < 0$) nelle relazioni si sostituisce 0 a π .



Le due formule operano con angoli dei vettori che collegano i poli e gli zeri sul diagramma.

Esempio: $1 + K_1 \frac{s-1}{s[(s+1)^2+1]} = 0, K_1 > 0$



In questo esempio determiniamo l'angolo tangente al luogo nel polo 2. Come vediamo vengono tracciati i vettori che congiungono gli altri due poli e lo zero e si utilizzano gli angoli che questi formano con l'asse reale.

Nota sulle Proprietà 4 [luogo diretto]

Se il polo p_i è un multiplo con molteplicità $h > 1$ gli h angoli di partenza φ_i da p_i si determinano con la congruenza:

$$h\varphi_i = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \quad \text{mod } 2\pi$$

Se lo zero z_i è multiplo con molteplicità $h > 1$ gli h angoli di arrivo ψ_i su z_i si determinano con la congruenza:

$$h\psi_i = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \quad \text{mod } 2\pi$$

Corollario (tangenti al luogo su polo o zero con molteplicità)

Le tangenti al luogo su di un polo (zero) con molteplicità h suddividono lo spazio circostante in settori uguali di $2\pi/h$ radianti.

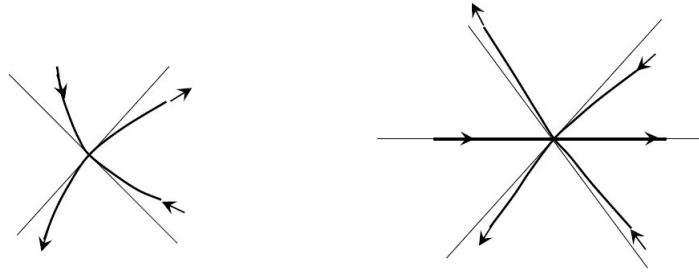
- **Proprietà 5:** Una radice del luogo di molteplicità h corrisponde a un punto comune ad h rami in cui oltre all'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ sono soddisfatte le relazioni $D^i G_1(s) = 0, i = 1, \dots, h - 1$.

Corollario

Una radice doppia del luogo soddisfa l'equazione:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = 0$$

- **Proprietà 6:** In corrispondenza di una radice di molteplicità h il luogo presenta h rami entranti ed h rami uscenti, alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio circostante in settori uguali di π/h radianti.



Dai poli di G_1 partono n , di questi m terminano sugli zeri di $G_1(s)$, i rimanenti $n - m$ divergono all'infinito adagiandosi ad asintoti rettilinei. Questo lo sapevamo dalla proprietà 1.

- **Proprietà 7:** Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{\left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right)}{(n - m)}$$

Se il luogo è diretto ($K_1 > 0$) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

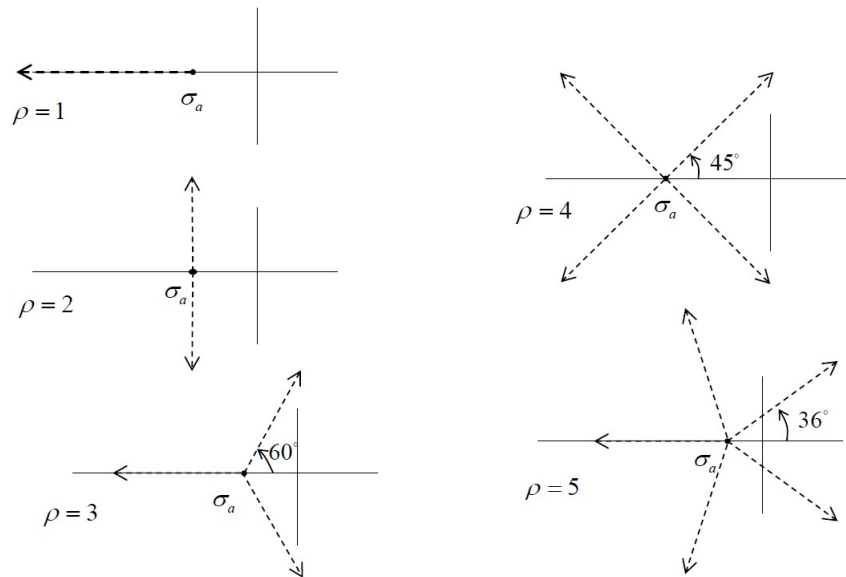
$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{(n - m)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Se il luogo è inverso ($K_1 < 0$) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

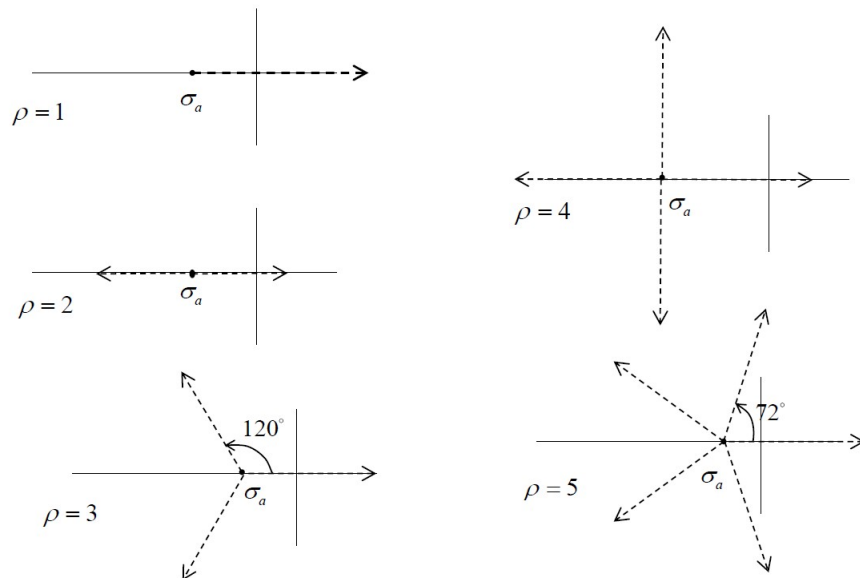
$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\nu\pi}{(n - m)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Esempi grafici:

- **Asintoti del luogo diretto ($K_1 > 0$)** $\rho := n - m$ (grado relativo di $G_1(s)$)

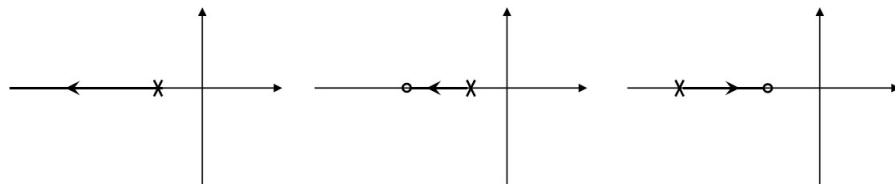


– Asintoti del luogo inverso ($K_1 < 0$) $\rho := n - m$ (grado relativo di $G_1(s)$)

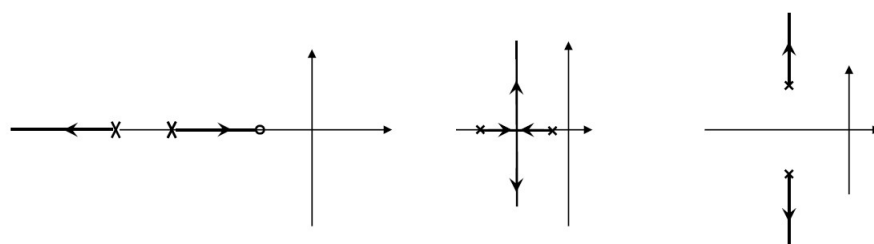


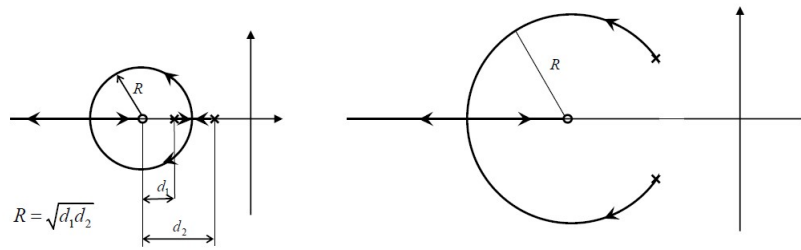
Esempi di luoghi delle radici

- Luoghi diretti del primo ordine



- Luoghi diretti del secondo ordine





Il contorno delle radici

È un luogo delle radici (dell'eq caratteristica) per variazioni di un parametro diverso dalla costante di trasferimento del guadagno di anello.

Questa tecnica è applicabile quando l'equazione caratteristica $1 + L(s; p) = 0$ con p parametro variante è riconducibile all'eq. caratteristica standard $1 + K_1 G_1(s) = 0$ con $K_1 = K_1(p)$ funzione biunivoca di p .

Complementi

$$1 + K_1 \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 0 \quad 1 + K_1 G_1(s; z_1, \dots, z_m) = 0$$

$\{p_{C1}, p_{C2}, \dots, p_{Cn}\}$ siano le radici dell'eq. caratteristica

$$p_{C1} \equiv p_{Ci}(K_1; z_1, \dots, z_m)$$

Teorema del baricentro del luogo delle radici

Se il guadagno di anello ha grado relativo $\rho \geq 2$ vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^n p_{Ci} - \sum_{i=1}^m p_i \quad \forall K_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$$

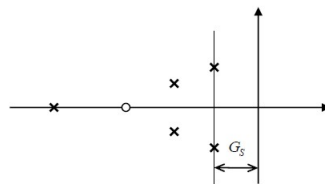
Grado di stabilità

Sia dato un sistema Σ asintoticamente stabile ($\Re\{p_i\} < 0, i = 1, \dots, n$; dove i p_i), sono i poli di Σ):

Si definisce **grado di stabilità** di Σ (nel piano complesso)

$$G_S := -\max\{\Re\{p_1\}, \Re\{p_2\}, \dots, \Re\{p_n\}\}$$

È la distanza minima dei poli di Σ dall'asse immaginario.

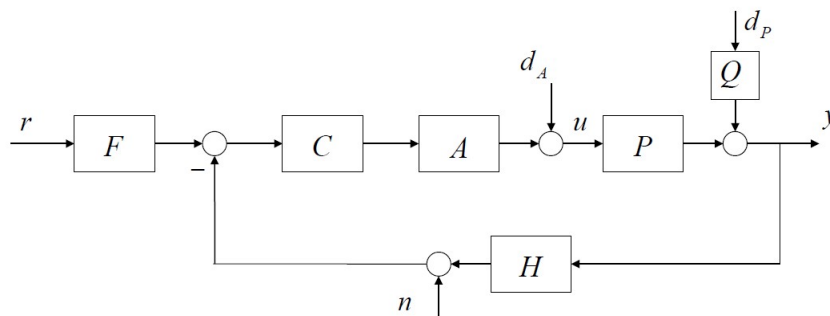


Nell'ipotesi che fra i poli di Σ esista una coppia dominante vale approssimativamente:

$$T_a \approx \frac{3}{G_S}$$

14 Lezione 14

Struttura di un sistema di controllo in retroazione a singolo anello

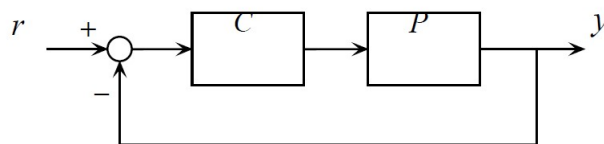


Con d_a e d_p disturbi rispettivamente dell'attuatore e dell'uscita.

I requisiti per il sistema di controllo riguardano:

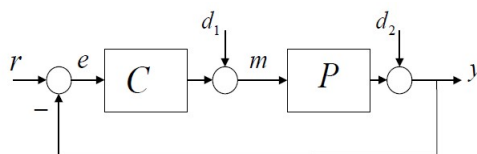
1. Buona connessione
2. Stabilità asintotica interna
3. Prestazioni statiche e/o asintotiche
4. Prestazioni dinamiche
5. Robustezza

I requisiti vengono imposti mediante le specifiche di progetto. Lo studio della compatibilità di queste è un aspetto imprescindibile del progetto.



Proprietà

Sia $P(s)$ strettamente propria e $C(s)$ propria. Allora il sistema retroazionato è ben connesso.



Il sistema retroazionato di figura è **asintoticamente ed internamente stabile** quando tutte le f.d.t. fra gli ingressi $\{r, d_1, d_2\}$ e le uscite $\{e, m, y\}$ sono asintoticamente stabili.

In questo caso ci sono 3 ingressi e 3 uscite per cui, considerando tutte le combinazioni, abbiamo 9 funzioni di trasferimento da considerare. Potrebbe accadere che operando con la f.d.t. totale, il sistema sia asintoticamente stabile però in una di quelle "intermedie" ci sia una cancellazione polo-zero che rende instabile il sistema internamente.

Proprietà

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente ed internamente se e solo se:

1. le radici dell'eq. $1 + L(s) = 0$ sono tutte a parte reale negativa
2. le eventuali cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$ avvengono in \mathbb{C}_- (semipiano dei complessi aventi parte reale negativa)

$$\begin{bmatrix} E \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+CP} & -\frac{1}{1+CP} & -\frac{1}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} & -\frac{1}{1+CP} \\ \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad C(s) = \frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)}, \quad P(s) = \frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}$$

Quelle nella matrice 3x3 sono tutte le funzioni di trasferimento del sistema retroazionato. I due vettori colonna rappresentano ingressi e uscite e sono in maiuscolo perchè siamo già nel dominio della trasformata di Laplace (altrimenti l'uscita non sarebbe stato il prodotto dell'ingresso con la funzione di trasferimento). Ovviamente consideriamo il sistema in quiete per $t < 0$ ovvero che l'ingresso, come l'uscita d'altronde, e tutte le sue derivate vale 0. Analizziamo ora le f.d.t., visto che la posizione nella matrice non altera le caratteristiche, basterà considerare le 4 che si ripetono

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+CP} &= \frac{1}{1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{x(s)a(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)} \\ \frac{CP}{1+CP} &= \frac{y(s)b(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)} \\ \frac{P}{1+CP} &= \frac{\frac{b(s)(s-\alpha)}{\dot{x}(s)(s-\beta)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{x(s)\dot{x}(s)}} = \frac{b(s)(s-\alpha)x(s)}{(s-\beta)(x(s)a(s) + y(s)b(s))} \\ \frac{C}{1+CP} &= \frac{\frac{y(s)(s-\beta)}{\dot{x}(s)(s-\alpha)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{\dot{x}(s)a(s)}} = \frac{y(s)(s-\beta)a(s)}{(s-\alpha)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}\end{aligned}$$

Quindi

$$1 + L(s) = 0 \iff x(s)a(s) + y(s)b(s) = 0 \quad (62)$$

Polinomio caratteristico associato al sistema retroazionato.

necessità:

$$\left\{ \frac{1}{1+CP}, \frac{CP}{1+CP}, \frac{P}{1+CP}, \frac{C}{1+CP}, \text{ asint. stabili} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1.1} + L(s) \text{ ha radici } s \text{ con } \Re(s) < 0 \\ \mathbf{2.} \text{ le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\}$$

sufficienza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1.1} + L(s) \text{ ha radici } s \text{ con } \Re(s) < 0 \\ \mathbf{2.} \text{ le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{1+CP}, \frac{CP}{1+CP}, \frac{P}{1+CP}, \frac{C}{1+CP}, \text{ asint. stabili} \right\}$$

$$T_{re}(s) = \frac{1}{1+L(s)} \text{ funzione di sensibilità (spesso indicata con S)}$$

$$T := 1 - S \text{ funzione di sensibilità complementare} \Rightarrow T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Si noti che $T_{ry}(s) = T(s)$

Spesso nei progetti con prevalenti specifiche in frequenza vengono imposti disgiuntamente vincoli su S e T ovvero su $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$. Quando questo accade un problema di compatibilità emerge in quanto deve valere

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad \forall \omega$$

La sintesi con controllori di struttura prefissata

Nella letteratura tecnica c'è una moltitudine di approcci e metodi per la sintesi di controllori. La natura introduttiva di questo corso suggerisce di seguire l'approccio con controllori di struttura prefissata o di ordine prefissato. I metodi di sintesi proposti sono di necessità vari (e spesso *ad hoc*) in quanto dipendono dalla struttura di controllore scelta e dalle specifiche assegnate.

Vantaggi: flessibilità (e semplicità)

Svantaggi: iterazioni delle procedure di sintesi.

Controllori di ordine prefissato

- Controllore di ordine 0:

$$C_0 := \{C \in R_p : C(s) = K, K \in \mathbb{R}\}; \quad R_p := \{\text{insieme delle f.razionali proprie}\}$$

- Controllore di ordine 1:

$$C_1 := \left\{ C \in R_p : C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}, a_0, b_0, b_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Controllore di ordine 2:

$$C_2 := \left\{ C \in R_p : C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Controllore di ordine n:

$$C_n := \left\{ C \in R_p : C(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Notare che tutti i parametri di controllori di qualsiasi ordine possono anche essere uguali a zero perchè la condizione è che appartengano a \mathbb{R} .

Controllori di struttura prefissata

I controllori di struttura prefissata sono definiti mediante particolari parametrizzazioni della funzione di trasferimento del controllore. Notiamo che, a differenza dai controllori di ordine n soprastanti qua la variabile s non viene moltiplicata per qualche parametro reale quindi è garantito l'ordine relativo del controllore. Cosa che, evidentemente, non accade nell'altro caso in quanto manipolando i coefficienti moltiplicativi si può, di conseguenza, ottenere un grado relativo del controllore variabile (entro certi limiti ovviamente dettati dalla struttura)

Esempi:

$$\begin{aligned} C_A &:= \left\{ C \in R_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Si osservi } C_A \neq C_1 \text{ e } C_A \subset C_1 \\ C_B &:= \left\{ C \in R_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha, \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Si osservi } C_B \neq C_A \text{ e } C_B \subset C_A \\ C_C &:= \left\{ C \in R_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha \in [10, 100], \beta \in (0, 10], \gamma > 0 \right\} \Rightarrow C_C \subset C_B \\ C_D &:= \left\{ C \in R_p : C(s) = \gamma \frac{1}{s + \alpha}, \alpha \in [10, 100], \gamma > 0 \right\} \Rightarrow C_D \neq C_C \text{ e } C_D \cap C_C = \emptyset \end{aligned}$$

Eccetera...

Fra i controllori a struttura fissa (o prefissata) si individuano due classi tradizionali:

1. le reti correttrici
2. i regolatori standard

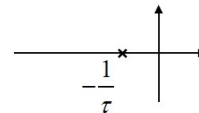
Le reti correttrici sono i più semplici controllori utilizzati nel progetto dei sistemi di controllo. Nell'approccio tradizionale questi vengono progettati per "correggere" il comportamento dinamico di anello di retroazione.

I regolatori standard caratterizzati dalla combinazione delle **azioni proporzionale, derivativa e integrale** vengono implementati su dispositivi (standard) adattabili a classi estese di applicazioni e per i quali è possibile il tuning diretto dei parametri di progetto anche in condizioni operative. Rivestono una grande importanza nell'automazione industriale con svariatissime applicazioni da quelle meccatroniche al controllo di processo.

Le principali reti correttrici

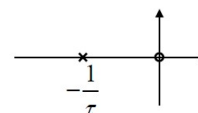
- Rete integratrice

$$C_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \tau > 0$$



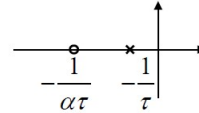
- Rete derivatrice

$$C_r(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}, \tau > 0$$



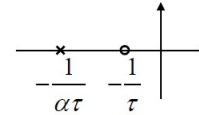
- Rete ritardatrice

$$C_r(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0, \alpha \in (0,1)$$



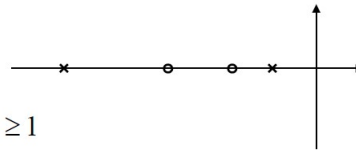
- Rete anticipatrice

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \tau > 0, \alpha \in (0,1)$$



- Rete a ritardo e anticipo

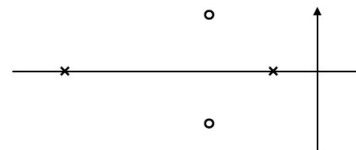
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \omega_n > 0, \delta > \delta' \geq 1$$



- Rete a T ponticellato

$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \omega_n > 0, \delta > 1, \delta > \delta' > 0$$

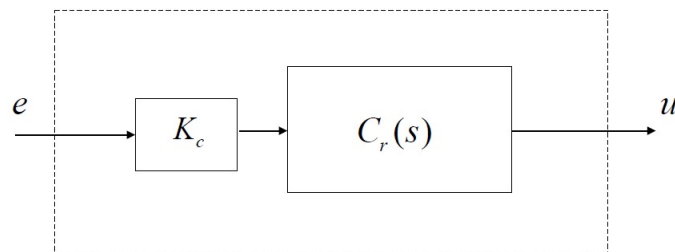
generalmente $\delta' \in (0,1)$



Da notare come la rete anticipatrice e derivatrice diventino siano tanto più simili quanto lo zero (dell'anticipatrice) è vicino all'origine.

Struttura del controllore con rete correttrice

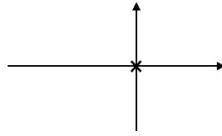
$$C(s) = K_c C_r(s), \quad K_c \in \mathbb{R}$$



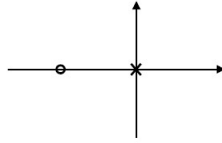
Con K_c guadagno statico.

I regolatori standard

- Regolatore **proporzionale** (P) $\Rightarrow R(s) = K_p$
- Regolatore **integrale** (I) $\Rightarrow R(s) = \frac{K_p}{T_i s}$ presenta un polo nell'origine



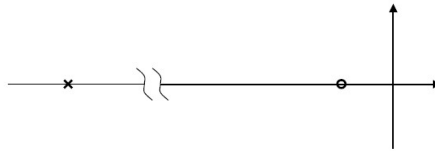
- Regolatore **proporzionale-integrale** (PI) $\Rightarrow R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$ presenta un polo nell'origine e uno zero sull'asse reale negativo



- Regolatore **proporzionale-derivativo** (PD) $\Rightarrow R(s) = K_p(T_d s)$ in realtà

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s}\right) \text{ text } \tau \ll T_d \Rightarrow R(s) = K_p \cdot \frac{1 + \tau s + T_d s}{1 + \tau s} \cong K_p \cdot \frac{1 + T_d s}{1 + \tau s}$$

è sostanzialmente una rete anticipatrice. Le due onnine nel disegno indicano che la distanza del polo rispetto all'origine potrebbe essere anche elevata

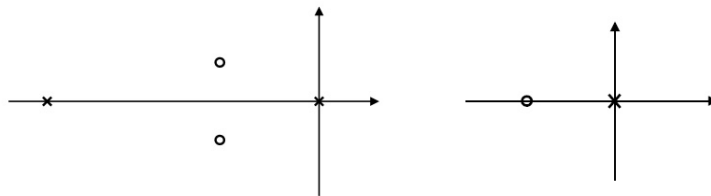


- Regolatore **proporzionale-integrale-derivativo** (PID) $\Rightarrow R(s) = K_p(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s})$ in realtà

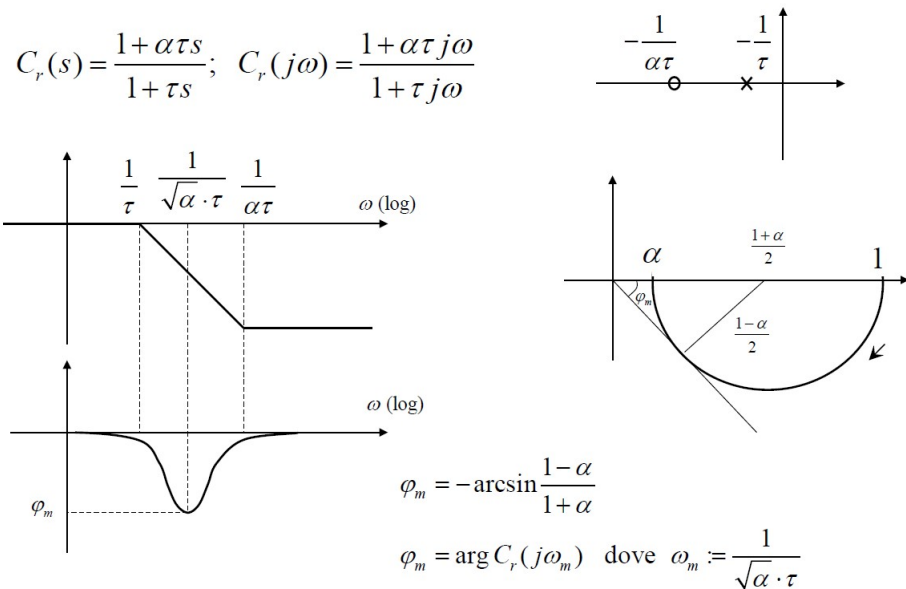
$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} + \frac{1}{T_i s}\right) \text{ dove } \tau \ll T_d$$

$$R(s) = K_p \cdot \frac{(\tau + T_d)T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s(1 + \tau s)} \cong K_p \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s(1 + \tau s)}$$

Possiamo assegnare arbitrariamente zeri e costante di trasferimento di R(s)



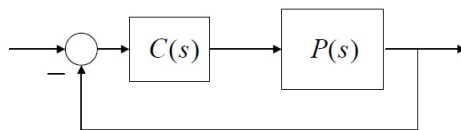
La rete ritardatrice



In alto si vede che passiamo dal dominio di Laplace alla frequenza sostituendo s con $j\omega$. Poi vengono graficati il polo e lo zero. Al di sotto troviamo i diagrammi di Bode di ampiezza e fase, notiamo che $1/(\sqrt{\alpha} \cdot \tau)$ si trova esattamente a metà tra $1/\tau$ e $1/(\alpha\tau)$ (ed è uguale alla radice quadrata del prodotto dei due, media geometrica). Mentre a destra vediamo che il diagramma polare parte dal punto 1 per arrivare con una semicirconferenza di raggio $(1 - \alpha)/2$ ad α per ω che tende all'infinito.

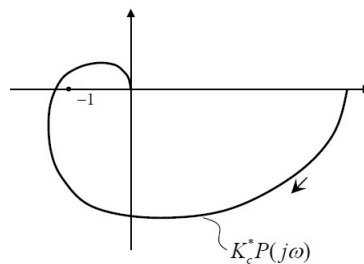
Azione compensatrice della rete ritardatrice

Sia $P(s)$ asintoticamente stabile e a fase minima.



1° fase: scegliamo un controllore proporzionale $C(s) = K_c > 0$

Progettiamo $K_c > 0$ al fine di assicurare una specifica di precisione. Sia $C(s) = K_c^*$ ed il guadagno di anello abbia il diagramma polare di figura: il sistema retroazionato risulta instabile.

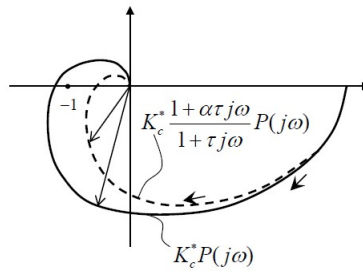


2° fase: scegliamo $C(s) = K_c^* C_r(s) = K_c^* \cdot \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$

Progettiamo α e τ per assicurare la stabilità asintotica con un buon margine di ampiezza e/o di fase.

Metodi di progetto della rete ritardatrice:

1. grafici (obsoleti)
2. per tentativi o metodi *ad hoc*
3. con le formule di inversione

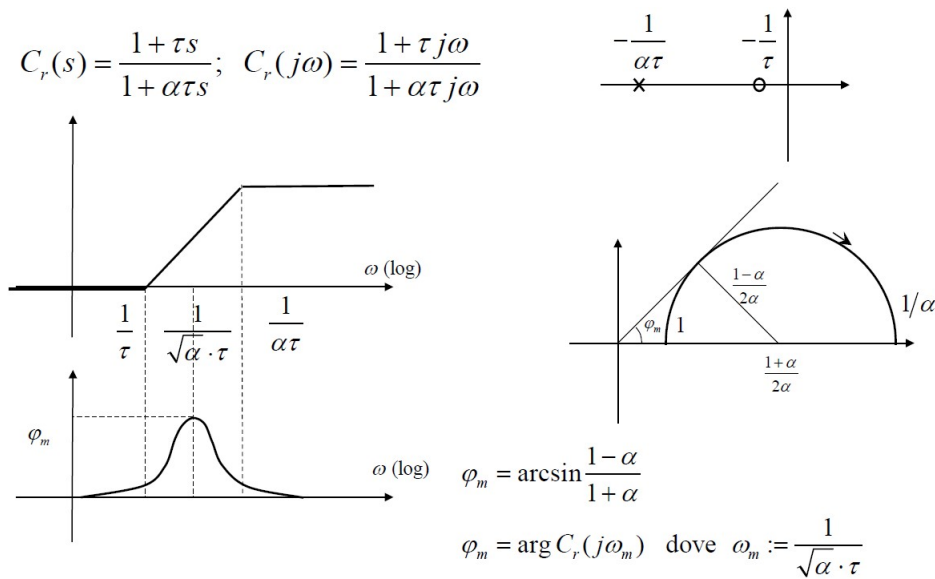


L'effetto risultante è quello di una traslazione di fase e una riduzione della ampiezza del vettore in figura. Questo perchè stiamo compensando del valore presenta tra la K e P.

Vantaggi: il guadagno di anello si mantiene elevato alle basse frequenze (buone prestazioni statiche).

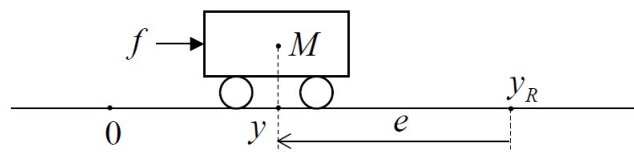
Svantaggi: riduzione della banda passante del guadagno di anello \Rightarrow riduzione della banda passante di $T_{ry}(j\omega)$ (scarse prestazioni dinamiche).

La rete anticipatrice



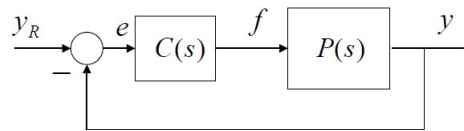
Azione compensatrice della rete anticipatrice

Esempio: spostamento di un carrello su rotaia



1° strategia: applicazione di una forza proporzionale all'errore di posizione $e = y_R - y : f = K_c e$

Esito: in assenza di attriti il carrello oscilla indefinitamente.



$$C(s) = K_c$$

Determinazione di P(s):

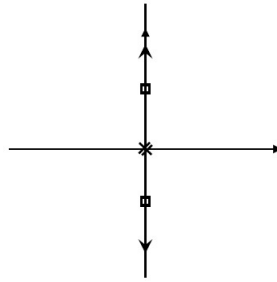
$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = f \Rightarrow P(s) = \frac{1}{Ms^2}$$

Equazione caratteristica:

$$1 + K_c \cdot \frac{1}{Ms^2} = 0$$

quindi

$$1 + K_1 \frac{1}{s^2} = 0 \text{ con } K_1 := \frac{K_c}{M}$$



Come modificare la strategia di controllo per stabilizzare il carrello sulla posizione desiderata y_R ?

2° strategia: si modifica la strategia precedente sommando un termine proporzionale alla derivata dell'errore:

$$f = K_c e + K'_c \frac{de}{dt}$$

Lo scopo è quello di anticipare il cambio di segno della forza f prima che l'errore e sia azzerato... ottenendo un effetto di smorzamento (quindi cominciamo ad applicare una forza contraria prima di raggiungere e in modo da fermarsi in tempo e non oscillare dopo)

Analisi della nuova strategia:

$$f = K_c \left(e + \tau \frac{de}{dt} \right) \quad \tau := \frac{K'_c}{K_c}$$

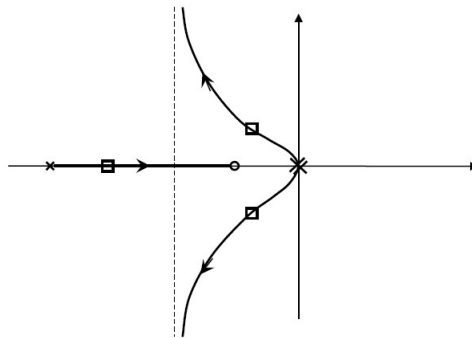
passando alle trasformate

$$F(s) = K_c(1 + \tau s)E(s)$$

meglio

$$\begin{aligned} F(s) &= K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s) \text{ con } \alpha \in (0, 1] \Rightarrow F(s) = K_c \frac{1 + \alpha \tau s + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s) \\ \Rightarrow F(s) &\cong K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s) \text{ se } \alpha \ll 1 \Rightarrow C(s) = K_c C_r(s) \Rightarrow C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \end{aligned}$$

$C_r(s)$ è la rete anticipatrice.



Vantaggi della rete anticipatrice:

1. mantenimento delle prestazioni statiche (come la rete ritardatrice)
2. stabilizzazione con allargamento della banda passante del guadagno di anello e quindi allargamento della banda passante di $T_{ry}(j\omega)$: aumento del grado di stabilità G_S , diminuzione del tempo di assestamento T_a , migliori capacità di inseguimento di segnale

Svantaggi della rete anticipatrice: possibile introduzione di rumore (il parametro α non può essere scelto troppo piccolo)

Metodi di progetto della rete ritardatrice:

1. grafici (obsoleti)

2. per tentativi o metodi *ad hoc*
3. con formule di inversione
4. con cancellazione polo-zero

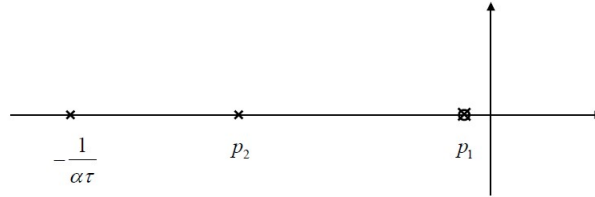
Sintesi della rete anticipatrice per cancellazione polo-zero

Si sceglie quale zero della rete il polo reale negativo di $P(s)$ più vicino all'asse immaginario determinando così nella funzione di trasferimento di catena diretta una cancellazione polo-zero (ammissibile)...

Esempio:

$$P(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}, p_1, p_2 < 0 \text{ con } p_2 < p_1$$

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \text{ si impone } -\frac{1}{\tau} = p_1 \Rightarrow \tau = -\frac{1}{p_1} \Rightarrow C_r(s)P(s) = \frac{\tau}{(1 + \alpha \tau s)(s - p_2)}$$



15 Lezione 15

Sintesi in frequenza con le formule di inversione

La sintesi in frequenza delle reti ritardatrice e anticipatrice con imposizione di margini di stabilità prestabiliti può essere svolta utilizzando le funzioni inverse delle stesse reti.

Interpretiamo la risposta armonica della rete anticipatrice

$$\frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$$

quale funzione $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \tau\omega) \rightarrow (M, \varphi)$ dove $\mathbf{D} := (0, 1) \times (0, +\infty)$ e

$$M = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\tau\omega)^2}}, \quad \varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(\alpha\tau\omega)$$

La definizione implica che

$$Me^{j\varphi} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$$

Si vuole provare che la funzione $f: \mathbf{D} \rightarrow f(\mathbf{D})$ è invertibile (o biettiva) e determinare f^{-1} e $f(\mathbf{D})$.

$$\mathbf{D} = (0, 1) \times (0, +\infty) \Rightarrow f(\mathbf{D}) \subseteq (1, +\infty) \times (0, \frac{\pi}{2}) \text{ ovvero } M > 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Lemma

Siano M, φ, α, x valori reali con $M > 1$ e $\sin\varphi \neq 0$. Allora le seguenti relazioni algebriche sono equivalenti:

1. $Me^{j\varphi} = \frac{1 + jx}{1 + j\alpha x}$
2. $\begin{cases} \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} \\ x = \frac{M - \cos\varphi}{\sin\varphi} \end{cases}$

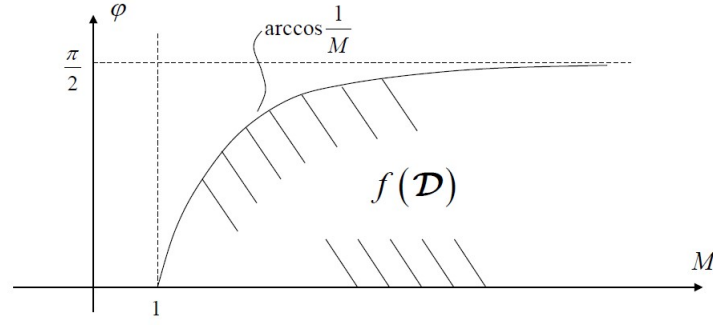
Proposizione (formule di inversione)

La funzione $f: \mathbf{D} \rightarrow f(\mathbf{D})$ è biettiva (o invertibile) e la sua funzione inversa $f^{-1}: f(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{D}$, $(M, \varphi) \rightarrow (\alpha, \tau\omega)$ è definita da

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}, \tau\omega = \frac{M - \cos\varphi}{\sin\varphi} \quad (63)$$

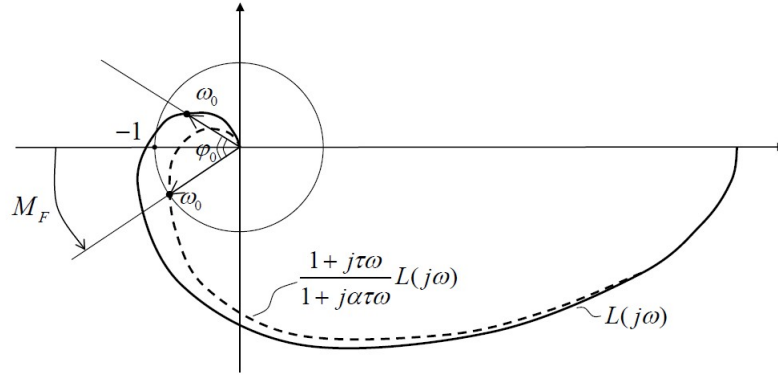
Proposizione

$$f(\mathbf{D}) = \left\{ (M, \varphi) \in (1, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \varphi < \arccos \frac{1}{M} \right\} \quad (64)$$



Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di fase M_F

$L(s)$ guadagno di anello non compensato, $\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}L(s)$ guadagno di anello compensato



Metodo di sintesi della rete anticipatrice:

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := M_F - \arg L(j\omega_0) - \pi$

$$\text{valga} \quad \left(\frac{1}{|L(j\omega_0)|}, \varphi_0 \right) \in f(\mathcal{D}) \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > |L(j\omega_0)|$$

2. Definiti $M := \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue} \quad \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1+j\tau\omega_0}{1+j\alpha\tau\omega_0} = M e^{j\varphi} \Rightarrow \frac{1+j\tau\omega_0}{1+j\alpha\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} e^{j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0))} = e^{j(M_F - \pi)}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a M_F .

Massimizzare il margine di fase nella sintesi della rete anticipatrice:

Fissata una pulsazione ω_0 , l'estremo superiore dell'insieme degli anticipi φ_0 ammissibili è dato da $\arccos |L(j\omega_0)|$ (questo valore di φ_0 corrisponde a $\alpha = 0$, ovvero ad una rete proporzionale-derivativa). Con questo valore il margine di fase corrispondente nel g.d.a. compensato è

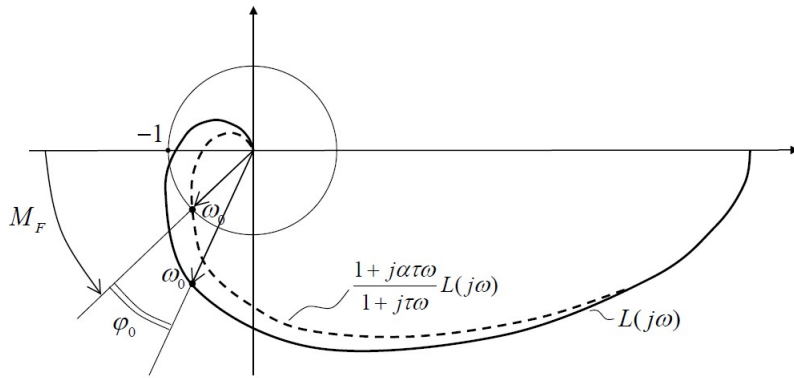
$$M_F(\omega_0) = \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos |L(j\omega_0)|$$

Conseguentemente l'estremo superiore dei margini di fase ottenibili con una rete anticipatrice è

$$\max_{\omega_0 > \omega_c} \{ \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos |L(j\omega_0)| \}$$

con ω_c pulsazione critica di $L(j\omega)$.

Sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di fase M_F



Metodo di sintesi della rete ritardatrice:

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F$

$$\text{valga } (|L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(\mathbf{D}) \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > |L(j\omega_0)|$$

2. Definiti $M := |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$

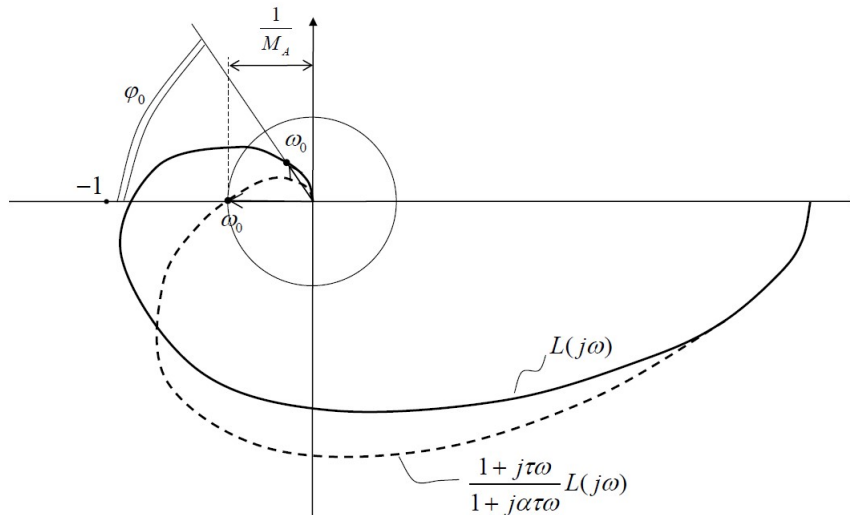
Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = M e^{j\varphi} \Rightarrow \frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} e^{-j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(\arg L(j\omega_0) - \varphi_0)} = e^{j(M_F - \pi)}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a M_F .

L'uso delle formule di inversione permette in generale di spostare nel piano complesso, per una data frequenza, un punto del diagramma di Nyquist in uno limitrofo del diagramma di Nyquist compensato. Lo scopo, al di là dell'imposizione di margini di stabilità, è quello di migliorare la risposta armonica del guadagno di anello in accordo a specifiche di progetto.

Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di ampiezza $M_A M_F$



Metodo di sintesi della rete anticipatrice:

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$

$$\text{valga } \left(\frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}, \varphi_0 \right) \in f(\mathbf{D}) \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > M_A |L(j\omega_0)|$$

2. Definiti $M := \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}$$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

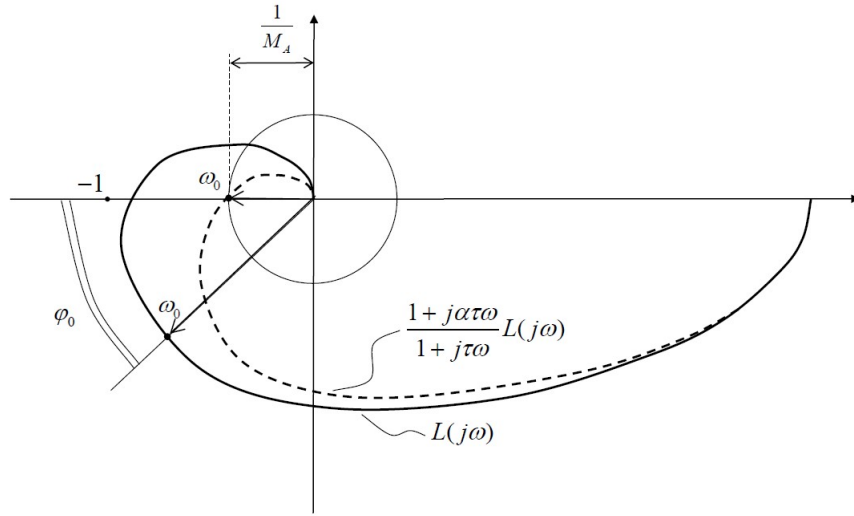
$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = M e^{j\varphi}$$

Quindi

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|} e^{j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j \arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{j(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0))} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione di fase π del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di ampiezza pari a M_A .

Sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di ampiezza M_A



Metodo di sintesi della rete ritardatrice:

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) - M_F$

$$\text{valga } (M_A |L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(\mathbf{D}) \quad \text{quindi} \quad \cos\varphi_0 > \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$$

2. Definiti $M := M_A |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}$$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = M e^{j\varphi} \Rightarrow \frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|} e^{-j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j \arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{j(\arg L(j\omega_0) - \varphi_0)} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione di fase π del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di ampiezza pari a M_A .

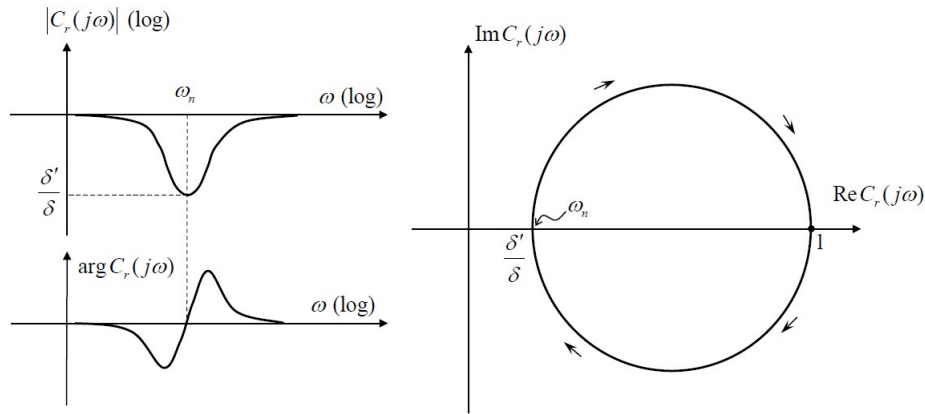
La rete a ritardo e anticipo e la rete a T

$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}; \quad C_r(j\omega) = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\delta' \frac{j\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}}$$

Rete a ritardo e anticipo: $\omega_n > 0, \delta > \delta' \geq 1$ Rete a T: $\omega_n > 0, \delta > 1, \delta > \delta' > 0$ per entrambi le reti:

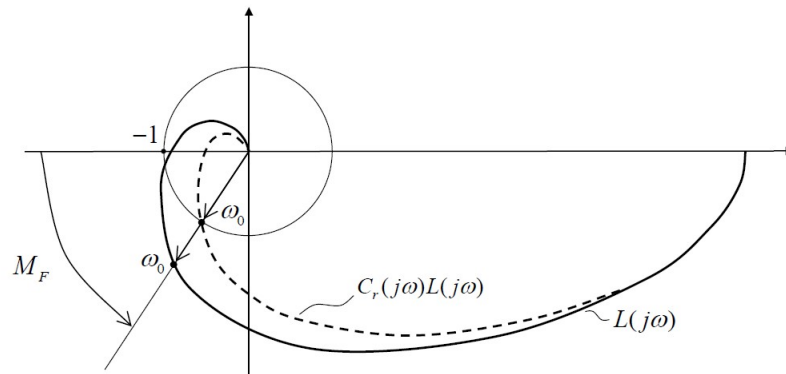
$$C_r(j\omega_n) = \frac{\delta'}{\delta} < 1 \quad (\text{attenuazione di centro banda})$$

Diagrammi di Bode e di Nyquist



Progetto delle reti con imposizione del margine di fase M_F

$L(s)$ g.d.a. non compensato, $C_r(s)L(s)$ g.d.a. compensato



Procedura di sintesi: (rete a ritardo e anticipo e rete a T)

1. Determinare ω_0 soluzione dell'equazione:

$$\arg L(j\omega_0) = -\pi + M_F$$

2. Imporre

$$\omega_n = \omega_0, \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$$

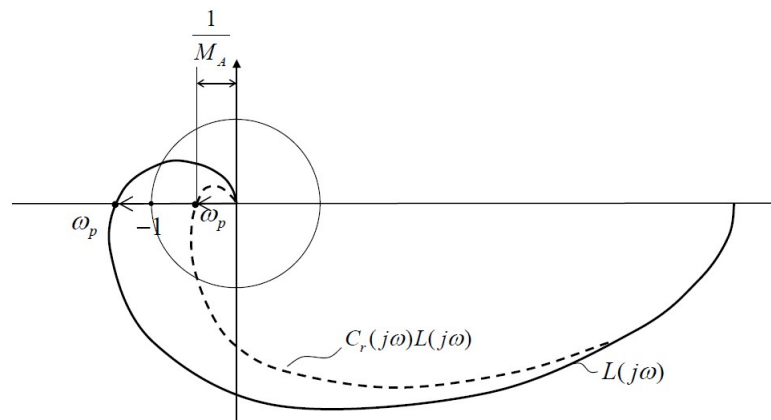
Infatti:

$$C_r(j\omega_0)L(j\omega_0) = \frac{\delta'}{\delta}(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} \cdot |L(j\omega_0)|e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(-\pi + M_F)}$$

$\omega_0 (= \omega_n)$ è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a M_F .

Rimane fra i parametri di progetto un grado di libertà che può essere utilizzato per soddisfare o concorrere a soddisfare un'altra specifica di progetto.

Progetto delle reti con imposizione del margine di ampiezza M_A $L(s)$ g.d.a. non compensato, $C_r(s)L(s)$ g.d.a. compensato



Procedura di sintesi: (rete a ritardo e anticipo e rete a T)

1. Determinare ω_p :

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

2. Imporre

$$\omega_n = \omega_p, \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$$

Infatti:

$$C_r(j\omega_p)L(j\omega_p) = \frac{\delta'}{\delta}(j\omega_p) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_p)|} \cdot |L(j\omega_p)| e^{j \arg L(j\omega_p)} = \frac{1}{M_A} e^{j(-\pi)} = -\frac{1}{M_A}$$

ω_p è pulsazione di fase π anche nel g.d.a. compensato.

Rimane fra i parametri di progetto ancora un grado di libertà...

Parametrizzazione alternativa per la rete a ritardo e anticipo

$$C_r(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}, \quad \tau_1, \tau_2, \tau_{12} \in \mathbb{R}_+$$

É la scrittura tradizionale corrispondente alla rete elettrica...

Relazioni con la parametrizzazione precedente:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \delta' = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \geq 1 \quad \delta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta'$$

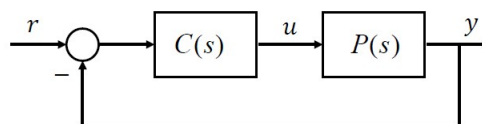
L'attenuazione di centro banda è esprimibile come:

$$C_r(j\omega_n) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}$$

Usualmente nel progetto della rete a ritardo e anticipo si impone il rapporto τ_1/τ_2 (per esempio = 10).

La sintesi con l'equazione diofantea

- É un metodo che permette l'allocazione arbitraria dei poli retroazionati
- Utilizza una particolare soluzione dell'equazione di Diòfanto o equazione diofantea
- L'equazione diofantea è riconducibile alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari
- Questo metodo può essere variamente utilizzato ed adattato anche per il conseguimento di prestazioni asintotiche



Sia assegnata $P(s)$ f.d.t. razionale strettamente propria:

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)} := \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro.

Problema: progettare un controllore proprio $C(s)$ affinché i poli retroazionati del sistema di controllo siano assegnabili arbitrariamente.

Sia $C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$ un controllore di ordine l .

Assegnare arbitrariamente i poli retroazionati significa scegliere un insieme simmetrico $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+l}\} \subset \mathbb{C}$ per il quale le radici dell'equazione caratteristica $1 + C(s)P(s) = 0$ coincidano con Λ .

$$1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(s)x(s) + b(s)y(s) = 0$$

In particolare:

- $a(s)x(s) + b(s)y(s) \equiv$ polinomio caratteristico del sistema retroazionato
- $d(s) := \prod_{i=1}^{n+l} (s - \lambda_i) \equiv$ polinomio caratteristico desiderato per il sistema retroazionato

Quindi:

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s) \quad \text{Equazione diofantea} \quad (65)$$

Definizione: Dati i polinomi $a(s)$, $b(s)$ e $d(s)$, soluzione dell'equazione diofantea sono i polinomi $x(s)$ e $y(s)$ soddisfacenti

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s)$$

Teorema: L'equazione diofantea ammette soluzione se e solo se il massimo comune divisore di $a(s)$ e $b(s)$ è divisore di $d(s)$.

Proprietà (parametrizzazione delle soluzioni dell'equazione diofantea)

Sia $m(s)$ il m.c.d. di $a(s)$ e $b(s)$ per il quale valgono le fattorizzazioni $a(s)=m(s)a_1(s)$ e $b(s)=m(s)b_1(s)$. Se l'equazione diofantea ammette una soluzione $\{x_0(s), y_0(s)\}$ allora l'insieme di tutte le soluzioni è dato da

$$\begin{cases} x(s) = x_0(s) + b_1(s)p(s) \\ y(s) = y_0(s) - a_1(s)p(s) \end{cases} \text{ dove } p(s) \text{ è un polinomio arbitrario.}$$

Proprietà: Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro. Allora indicato con $\{x(s), y(s)\}$ una soluzione dell'equazione diofantea valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} \{a(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} &\iff \{a(s) \text{ e } y(s) \text{ coprimi}\} \\ \{b(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} &\iff \{b(s) \text{ e } x(s) \text{ coprimi}\} \end{aligned}$$

Conseguenze: se $d(s)$, polinomio caratteristico desiderato, è coprimo sia con $a(s)$ che con $b(s)$ (è la situazione usuale nell'ambito delle sintesi dei controllori) segue che una soluzione dell'equazione diofantea non determina cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$. Infatti:

$$C(s)P(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}$$

Considerata l'assunzione fatta ($a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro) per ogni scelta di $d(s)$ esistono soluzioni dell'equazione diofantea. Non tutte però sono accettabili in quanto è necessario garantire:

$\deg y(s) \leq \deg x(s)$ Ricerchiamo quindi una soluzione che incorpori implicitamente questa condizione:

$$\frac{y(s)}{x(s)} := \frac{y_l s^l + y_{l-1} s^{l-1} + \dots + y_1 s + y_0}{s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots + x_1 s + x_0}, \quad y_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, l; \quad x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, l-1$$

(è una scelta corrispondente a un controllore proprio di ordine l)

Sia inoltre:

$$d(s) = s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots + d_1 s + d_0, \quad d_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n+l-1$$

Interpretiamo l'equazione diofantea

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots)(s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots) + (b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots)(y_l s^l + y_{l-1} s^{l-1} + \dots) = s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots$$

con il principio di identità dei polinomi.

Otteniamo quindi $n+l$ equazioni lineari nelle $2l+1$ incognite reali (le x_i ed y_i).

È ragionevole imporre che

$$\text{n. di equazioni lineari} = \text{n. di incognite} \quad \text{ovvero} \quad n+l = 2l+1 \Rightarrow l = n-1$$

$$\begin{aligned} &(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)(s^{n-1} + x_{n-2} s^{n-2} + \dots + x_1 s + x_0) + \\ &(b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0)(y_{n-1} s^{n-1} + y_{n-2} s^{n-2} + \dots + y_1 s + y_0) = \\ &s^{2n-1} + d_{2n-1} s^{2n-1} + \dots + d_1 s + d_0 \end{aligned}$$

Riordinando diventa

$$\begin{aligned}
& s^{2n-1} + (x_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} + a_{n-1})s^{2n-2} + (a_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2}y_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} + a_{n-2})s^{2n-3} + \\
& + (a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3}y_{n-1} + b_{n-2}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-3} + a_{n-3})s^{2n-4} + \dots \\
& \dots \dots \dots \\
& + (a_0x_1 + a_1x_0 + b_0y_1 + b_1y_0)s + (a_0x_0 + b_0y_0) = \\
& s^{2n-1} + d_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + d_1s + d_0
\end{aligned}$$

Che in forma di sistema

$$\begin{cases}
x_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-1} \\
a_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2}y_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} = d_{2n-3} - a_{n-2} \\
a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3}y_{n-1} + b_{n-2}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-3} = d_{2n-4} - a_{n-3} \\
\dots \dots \dots \\
a_0x_1 + a_1x_0 + b_0y_1 + b_1y_0 = d_1 \\
a_0x_0 + b_0y_0 = d_0
\end{cases}$$

Trascriviamo in forma matriciale il sistema di $2n - 1$ equazioni lineari nelle $2n - 1$ incognite ($n - 1$ incognite x_0, x_1, \dots, x_{n-2} ; n incognite y_0, y_1, \dots, y_{n-1}).

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & & \ddots & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 & 0 & & \ddots & 0 & 0 \\
a_{n-1} & 1 & 0 & & \ddots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & \ddots & & 0 \\
a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & \ddots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & \ddots & & \ddots \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
a_2 & \ddots & & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & b_1 & \ddots & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\
a_1 & a_2 & & & a_{n-2} & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
a_0 & a_1 & a_2 & & & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & & b_{n-3} & b_{n-2} & \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ddots & & b_{n-3} \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\ddots & & \ddots & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & & \ddots & 0 & b_0 & b_1 & \ddots \\
0 & \ddots & & 0 & a_0 & a_1 & 0 & \ddots & & \ddots & 0 & b_0 & b_1 \\
0 & 0 & \ddots & & 0 & a_0 & 0 & 0 & \ddots & & \ddots & 0 & b_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_{n-2} \\
x_{n-3} \\
x_{n-4} \\
\vdots \\
\vdots \\
x_0 \\
y_{n-1} \\
y_{n-2} \\
y_{n-3} \\
\vdots \\
y_1 \\
y_0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_{2n-2} - a_{n-1} \\
d_{2n-3} - a_{n-2} \\
d_{2n-4} - a_{n-3} \\
\vdots \\
\vdots \\
d_n - a_1 \\
d_{n-1} - a_0 \\
d_{n-2} \\
d_{n-3} \\
\vdots \\
d_1 \\
d_0
\end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto una matrice di Toeplitz ovvero una matrice in cui ogni diagonale discendente da sinistra verso destra ha un valore costante. Il vettore colonna di destra, dopo l'uguale, è il vettore dei termini noti.

Il problema di assegnabilità arbitraria è risolvibile con un controllore proprio $C(s)$ di ordine $n - 1$ se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è non singolare. Tale matrice è non singolare?

Digressione: risultanti e coprimialità

Dati i polinomi

$$a(s) := a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$b(s) := b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad m \leq n, \quad b(s) \text{ non identicamente nullo}$$

costruiamo la matrice di Sylvester (non c'entra con il criterio di Sylvester) $\mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ di ordine $(m + n) \times (m + n)$ in

accordo alla seguente definizione:

$$\mathbf{S}(a, b) := \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & & & a_1 & a_0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 \\ 0 & & & 0 & b_m & b_{m-1} & & & b_0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & b_m & b_{m-1} & & & b_0 & & \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & \\ b_m & b_{m-1} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo dividere questa matrice nelle prime m righe, con i coefficienti a che formano una matrice di Toeplitz, e le ultime n righe con i coefficienti di b che formano una matrice di Hankel.

Definiamo il **risultante di $a(s)$ e $b(s)$** come

$$R(a, b) := \det S(a, b) \quad (66)$$

Proprietà

I polinomi $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro se e solo se il loro risultante è diverso da zero, ovvero $R(a, b) \neq 0$

Costruzione della matrice di Sylvester relativa ai polinomi $a(s)$ e $b(s)$ di $P(s)$ (f.d.t. del sistema controllato):

$$\begin{aligned} a(s) &:= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (a_n = 1) \\ b(s) &:= b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0, \quad (m = n - 1) \end{aligned}$$

Tale matrice, avendo assunto $a(s)$ e $b(s)$ coprimi, è quindi non singolare.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & & & a_1 & a_0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 \\ 0 & & & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & & & b_0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & & & b_0 & & \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & & 0 \end{bmatrix}$$

Facendo la trasposta:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} \\ a_{n-1} & 1 & & & & b_{n-1} & b_{n-2} \\ & a_{n-1} & \ddots & 0 & & \ddots & b_{n-2} \\ & & \ddots & 1 & 0 & \ddots & \\ a_1 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & \ddots & b_0 \\ a_0 & a_1 & & & b_{n-2} & & b_0 & 0 \\ 0 & a_0 & \ddots & & & 0 & \\ & & \ddots & a_1 & & \ddots & \\ 0 & & 0 & a_0 & b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E

$$\det S^T = \det S \neq 0$$

La matrice \mathbf{S}^T coincide a meno di una permutazione di colonne (vanno riordinate) con la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni nelle incognite $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-2}; y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$.

Abbiamo dunque dato dimostrazione costruttiva al seguente enunciato.

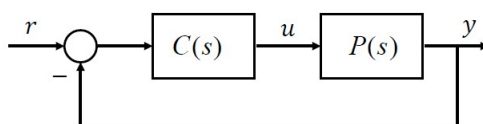
Teorema dell'assegnabilità dei poli

Assunto $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro, i poli del sistema in retroazione unitaria sono assegnabili arbitrariamente con un controllore proprio di ordine $n - 1$.

- Il metodo di sintesi con l'equazione diofantea può essere adattato per incorporare specifiche di regolazione asintotica (principio del modello interno).
- Questo metodo può essere interpretato come una delle tecniche del progetto con il polinomio caratteristico (principio di identità dei polinomi).
- Questo risultato pur nella sua importanza e generalità non è una panacea per la sintesi di controllori in quanto non tutte le specifiche sono riconducibili ad imposizioni sui poli retroazionati o a prestazioni asintotiche.
- L'assegnabilità dei poli retroazionati va utilizzata con cautela per evitare un uso eccessivo dell'azione di controllo ($\max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|$ limitato dalle caratteristiche dell'attuatore o dell'impianto).

16 Lezione 16

Sistemi di controllo per la regolazione



Problema di regolazione (asintotica)

Sia dato un impianto con funzione di trasferimento $P(s)$ (strettamente propria). Determinare un controllore $C(s)$ per il quale si abbia nel sistema retroazionato (in figura) la stabilità asintotica interna e un errore a regime nullo in risposta a un gradino del segnale di riferimento.

Assunzione: $P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$ con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi.

Proposizione

Il problema di regolazione (asintotica) ha soluzione se e solo se $P(0) \neq 0$ ovvero il guadagno statico dell'impianto è diverso da zero.

Dimostrazione

Necessità: $\{\text{il problema di regolazione ha soluzione}\} \Rightarrow P(0) \neq 0$

Per assurdo sia $P(0) = 0$.

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}, \quad T_{ry}(0) = \frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)P(0)}$$

$C(0)$ deve assumere un valore finito perchè $C(s)$ non può avere poli nell'origine (violerebbe la stabilità asintotica interna). Quindi $T_{ry}(0) = 0$. Si applichi:

$$r(t) = r_0 1(t), (r_0 \neq 0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = T_{ry}(0)r_0 = 0 \Rightarrow e_\infty = r_0 - 0 \neq 0.$$

Questo contraddice l'ipotesi che il problema di regolazione abbia soluzione.

Sufficienza: $P(0) \neq 0 \Rightarrow \{\text{il problema di regolazione ha soluzione}\}$

- Caso 1 – L'origine del piano complesso è polo dell'impianto: $a_0 = 0, b_0 \neq 0$.
Progettiamo un controllore $C(s)$ di ordine $n - 1$ affinché i poli del sistema retroazionato siano assegnati arbitrariamente e in particolare siano tutti a parte reale negativa nonchè diversi dalle radici di $a(s)$ e $b(s)$. Ne consegue che il sistema retroazionato è internamente asintoticamente stabile e di tipo maggiore o uguale a 1. L'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento è dunque nullo. Il problema di regolazione è risolto.

- Caso 2 – L'origine del piano complesso non è polo dell'impianto ($a_0 \neq 0$) e $P(0) \neq 0$ significa $b_0 \neq 0$. Il sistema retroazionato sia di tipo 1 con controllore di ordine l :

$$C(s) = \frac{z(s)}{x(s)} = \frac{z_l s^l + z_{l-1} s^{l-1} + \dots + z_1 s + z_0}{s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots + x_1 s}, \quad 1 + \frac{z(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0, \quad x(s)a(s) + z(s)b(s) = 0$$

Con

- $p_c(s) := x(s)a(s) + z(s)b(s)$ polinomio caratteristico associato al controllore
- $p_d(s) := s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots + d_0$ polinomio caratteristico desiderato

Imponiamo $p_c(s) \equiv p_d(s)$, da cui $n + l$ equazioni con $2l$ incognite. $n + l = 2l$ da cui $l = n$.

$$\begin{aligned} p_c(s) &= x(s)a(s) + z(s)b(s) = (s^n + x_{n-1} s^{n-1} + \dots + x_1 s)(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) + \\ &\quad + (z_n s^n + z_{n-1} s^{n-1} + \dots + z_1 s + z_0)(b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) = \\ &= s^{2n} + (x_{n-1} + b_{n-1} z_n + a_{n-1}) s^{2n-1} + (a_{n-1} x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2} z_n + b_{n-1} z_{n-1} + a_{n-2}) s^{2n-2} + \dots + \\ &\quad + (a_0 x_1 + b_0 z_1 + b_1 z_0) s + b_0 z_0 \end{aligned}$$

Che diventa il seguente sistema:

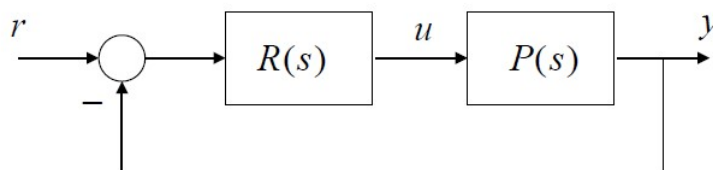
$$\begin{cases} x_{n-1} + b_{n-1} z_n = d_{2n-1} - a_{n-1} \\ a_{n-1} x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2} z_n + b_{n-1} z_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-2} \\ \dots a_0 x_1 + b_0 z_1 + b_1 z_0 = d_1 \\ b_0 z_0 = d_0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & 0 \\ & a_{n-2} & & & & & b_{n-3} & b_{n-2} & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ a_2 & & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & b_1 & & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & & a_{n-2} & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ a_0 & a_1 & & & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & a_0 & & & & & 0 & b_0 & & & b_{n-2} \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ \vdots \\ x_1 \\ z_n \\ z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_2 \\ z_1 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{2n-1} - a_{n-1} \\ d_{2n-2} - a_{n-2} \\ d_{2n-3} - a_{n-3} \\ \vdots \\ d_{n+1} - a_1 \\ d_n - a_0 \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice colorata in giallo è non singolare ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro). Quindi essendo $b_0 \neq 0$ anche la matrice complessiva è non singolare. Ne consegue che il problema di regolazione asintotica può essere risolto con assegnazione arbitraria dei poli del sistema retroazionato.

Nota: come scegliere i poli retroazionati? Spesso con metodi numerici di ottimizzazione considerando i possibili vincoli ed indici da minimizzare (o massimizzare)

I regolatori PID



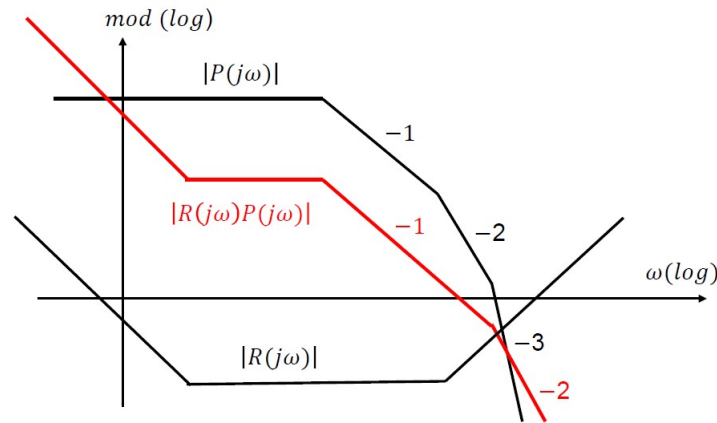
$$R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Nelle implementazioni $T_d s$ è sostituito con $\frac{T_d s}{1 + \tau s}$ ($\tau \ll T_d$)

- $K_p \equiv$ costante (o sensibilità) proporzionale
- $T_d \equiv$ costante di tempo dell'azione derivativa
- $T_i \equiv$ costante di tempo dell'azione integrale
- $\frac{1}{K_p} \equiv$ banda proporzionale

Casi particolari: regolatore P, regolatore I, regolatore PI, regolatore PD

Progetto frequenziale del regolatore PID



$P(s)$ asintoticamente stabile e a fase minima. Regolatore PID con zeri reali

$$R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{s} = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s}$$

$$T_d T_i = \frac{1}{\omega_n^2}, \quad T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_d T_i}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

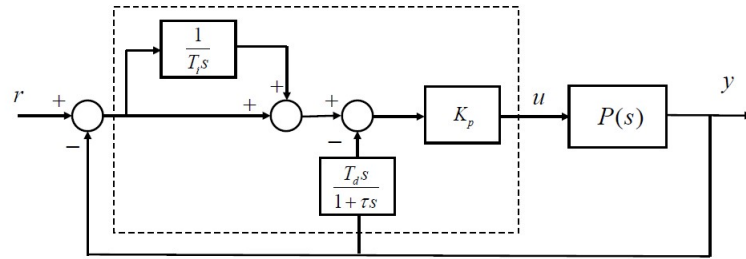
$$R(j\omega) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}}{j\omega} \quad R(j\omega_n) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{2\delta}{\omega_n} = K_p$$

Sintesi di $R(s)$ con imposizione del margine di fase M_f

1. Si determina ω_0 soluzione di $\arg P(j\omega_0) = -\pi + M_f$
2. Si impone $\omega_n = \omega_0$ e $R(j\omega_n) = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$ da cui $K_p = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$; scelto il rapporto $k := \frac{T_i}{T_d}$ segue $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}$ e $T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{\sqrt{k}}{\omega_0}$; da $T_d T_i = \frac{1}{\omega_n^2}$ segue $T_d = \frac{1}{T_i \omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{k} \omega_0}$

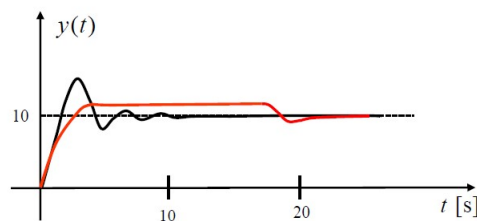
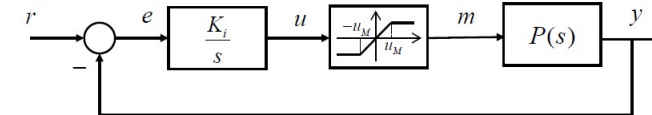
Implementazione dei regolatori PID

1. Limitazione dell'azione derivativa $\frac{T_d s}{1 + \tau s}$
 - $\tau = \frac{T_d}{N}$, usualmente $N = 5 \div 20$
 - Azione derivativa agente solo sull'uscita regolata secondo lo schema:



2. Desaturazione dell'azione integrale

- Il problema della "carica integrale" (integral wind-up) quando l'attuatore è saturante. Esempio del fenomeno con un regolatore I (integrale):

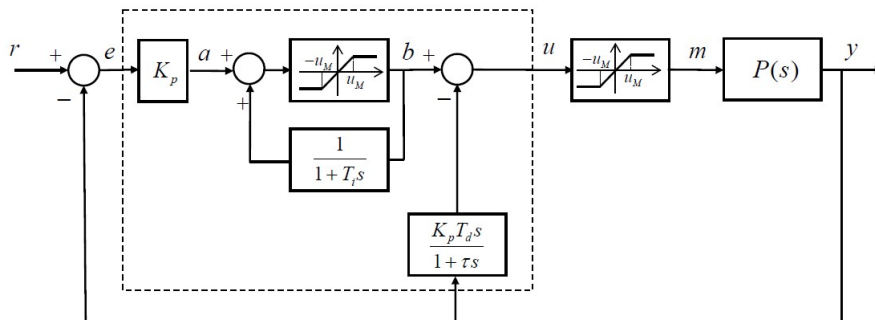


Dati:

$$m(t) = \begin{cases} -u_M, & u(t) < -u_M \\ u(t), & |u(t)| \leq u_M \\ u_M, & u(t) > u_M \end{cases}$$

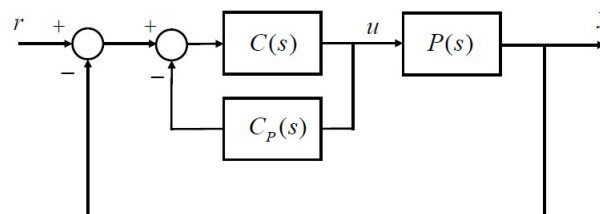
$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_i := \frac{K_p}{T_i} = 2, \\ u_M = 11, \quad r(t) = 10 \cdot 1(t)$$

- Regolatore PID con desaturazione (anti-wind-up)



Controllo dei sistemi con ritardo

Lo schema classico di controllo in retroazione per i sistemi affetti da ritardo di tempo ($P(s) = G(s)e^{-t_0 s}$) impone una forte limitazione nelle prestazioni. Lo **schema a predittore di Smith** (1958) supera questa limitazione.



$$C_p(s) := (1 - e^{-t_0 s})G(s) \Rightarrow C_p(s) := G(s) - G(s)e^{-t_0 s}, \quad Z(s) = G(s)U(s) \Rightarrow T_{ry} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}e^{-t_0 s}$$

Facciamo un paio di considerazioni: Se usassimo un sistema retroazionato semplice in cui sono presenti solo C (controllore) e P sulla linea diretta e nulla su quella di retroazione, questa sarebbe una architettura carente per i ritardi infatti la funzione di trasferimento sarebbe:

$$T_{ry}(s) = \frac{CGe^{-t_0 s}}{1 + CGe^{-t_0 s}}$$

Per cui, come equazione caratteristica si avrebbe:

$$1 + C(s)G(s)e^{-t_0s} = 0$$

La presenza dell'esponenziale non è una cosa negativa. Si potrebbero usare gli approssimanti di Padè ma, come abbiamo già constatato nelle scorse lezioni, sappiamo che per raggiungere certi livelli di accuratezza dovremmo complicare molto i calcoli. Dimostriamo ora come sono state ottenute le espressioni soprantanti

$$Z(s) = Ge^{-t_0s}U + C_pU = GUe^{-t_0s} + (1 - e^{-t_0s})GU = GUe^{-t_0s} - GUe^{-t_0s} + GU = GU$$

$$\begin{cases} Y = Ge^{-t_0s}U \\ U = C(R - Z) = C(R - GU) = CR - CGU \end{cases} \Rightarrow U + CGU = CR \Rightarrow U(1 + CG) = CR$$

Quindi, sostituendo nella prima equazione del sistema:

$$Y = G \frac{CR}{1 + CG} e^{-t_0s} = \frac{CG}{1 + CG} e^{-t_0s} R$$

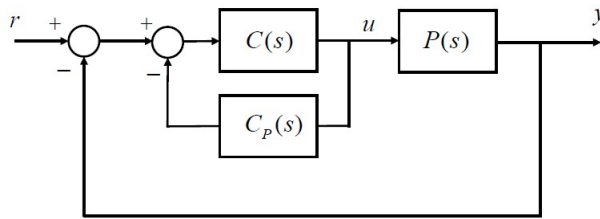
Per cui, per la definizione di funzione di trasferimento, il termine che moltiplica R corrisponde proprio alla f.d.t. del sistema retroazionato.

Lo schema utilizza per la retroazione il segnale z, una predizione del segnale controllato y [z(t) = y(t + t₀)], dimostrazione:

$$Z(s) = G(s)U(s) \Rightarrow Z(s)e^{-t_0s} = G(s)e^{-t_0s}U(s) = P(s)U(s) = Y(s)$$

$$Y(s) = e^{-t_0s}Z(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = z(t - t_0) \xrightarrow{v=t-t_0} z(v) = y(t + t_0)$$

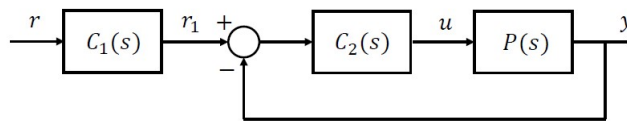
Lo schema a predittore di Smith può essere implementato con il seguente schema equivalente:



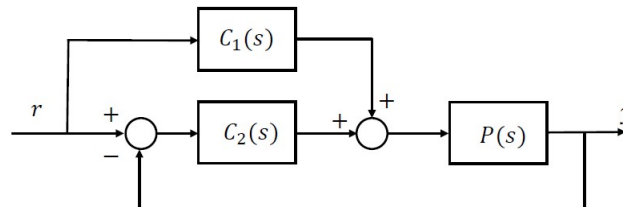
Lo schema a predittore di Smith prevede nel controllore una replica dell'impianto $G(s)e^{-t_0s}$. L'implementazione analogica del ritardo finito (e^{-t_0s}) è difficile (uso delle approssimanti di Padè) mentre l'implementazione digitale è facile (si usano dei buffer).

Controllo feedback/forward (schemi di controllo a due gradi di libertà) [cenno]

Prefiltraggio del segnale di riferimento



Compensazione del segnale di riferimento



$$T_{ry}(s) = \frac{C_1(s)P(s)}{1 + C_2(s)P(s)} + \frac{C_2(s)P(s)}{1 + C_2(s)P(s)}$$

Se $C_1(s) = P(s)^{-1} \Rightarrow T_{ry}(s) = 1$, vuol dire *segnale riferimento = segnale uscita!*

$P(s)^{-1}$ è il "sistema inverso" di P(s) e come tale non può essere realizzato (implementato) quando l'impianto controllato:

1. è strettamente proprio (condizione verificata della quasi totalità degli impianti controllati e inverso improprio)
2. ha zeri con parte reale positiva (sistemi a fase non minima, instabile)

Realizzazione del sistema inverso

L'impedimento 1 (sistema strettamente proprio) può essere superato mediante la costruzione di un **sistema inverso approssimato**.

Esempio:

$$P(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)}, \quad P(s)^{-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{s+1} \cong \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(1+\tau s)}$$

Con τ positivo e piccolo (sistema realizzabile che approssima il sistema inverso di $P(s)$).

L'impedimento 2 (sistema a fase non minima) è causato dal fatto che il **sistema inverso è instabile**.

Esempio:

$$P(s) = \frac{1-s}{(s+2)(s+4)} \quad P(s)^{-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{1-s}$$

è un sistema instabile! Il superamento dell'impedimento 2 è possibile ricorrendo al metodo dell'**inversione dinamica stabile**.

Controllo mediante inversione dinamica (inversion-based control)

L'inversione dinamica è un metodo di controllo feedforward (ad azione diretta):

1. Si definisce (progetta) il segnale d'uscita desiderato $y_d(t)$
2. Si determina il segnale d'ingresso inverso $u_d(t)$ che causa sull'uscita $y_d(t)$: $(u_d, y_d) \in \mathbf{B}$, $y_d(t)$ è usualmente un segnale causale e limitato. Si richiede che l'ingresso inverso sia un segnale limitato.

Procedura di inversione standard

$$P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad a(s) = q(s)b(s) + c(s), \quad \deg[q(s)] = n - m := \rho$$

$$Y_d(s) = P(s)U_d(s) \Rightarrow U_d(s) = P^{-1}(s)Y_d(s) = \frac{q(s)b(s) + c(s)}{b(s)}Y_d(s) = (q(s) + \frac{c(s)}{b(s)})Y_d(s)$$

$$U_d(s) = q(s)Y_d(s) + \frac{c(s)}{b(s)}Y_d(s) = (q_\rho s^\rho + q_{\rho-1} s^{\rho-1} + \dots + q_0)Y_d(s) + \frac{c(s)}{b(s)}Y_d(s)$$

$$u_d(t) = q_\rho D^\rho y_d(t) + q_{\rho-1} D^{\rho-1} y_d(t) + \dots + q_0 y_d(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c(s)}{b(s)} Y_d(s) \right]$$

Procedura di inversione standard

$$u_d(t) = q_\rho D^\rho y_d(t) + q_{\rho-1} D^{\rho-1} y_d(t) + \dots + q_0 y_d(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c(s)}{b(s)} Y_d(s) \right]$$

Quando y_d e le derivate $Dy_d, \dots, D^\rho y_d$ sono limitate e il sistema è

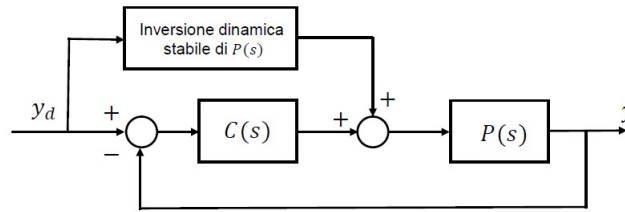
1. a fase minima il segnale u_d è limitato
2. a **fase non minima** il segnale u_d è **illimitato**

Quando il segnale dinamico è a **fase non minima** è ancora possibile determinare un segnale di ingresso inverso $u_d(t)$ limitato (soddisfacente $(u_d, y_d) \in \mathbf{B}$) con una procedura di inversione diversa chiamata di **"inversione dinamica stabile"** (1996). Il segnale inverso $u_d(t)$ determinato è non causale.

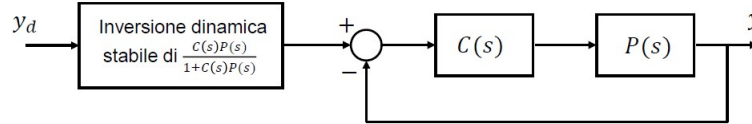
Note:

- Assunzione: non devono essere presenti zeri del sistema puramente immaginari
- Coincide con la procedura di inversione dinamica standard quando il sistema è a fase minima

Schemi feedforward/feedback con inversione dinamica stabile



Schema con inversione dell'impianto (plant inversion architecture)



Schema con inversione del sistema retroazionato (closed-loop inversion architecture)

Note:

- Il progetto del controllore in retroazione $C(s)$ è orientato a perseguire un'adeguata robustezza delle prestazioni
- Quando l'inversione dinamica stabile è esatta i due schemi sono equivalenti (2020)

Conclusioni

Elenchiamo alcune delle tecniche utili nella sintesi di un controllore in retroazione a struttura prefissata $C(s; \mathbf{p})$ dove $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_k]^T$ indica il vettore dei parametri di progetto (\mathbf{p} in $P \subseteq \mathbb{R}$ e usualmente $P = [p_1^-, p_1^+] \times \dots \times [p_k^-, p_k^+]$).

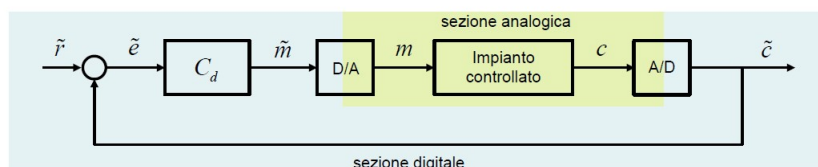
- Criterio di Routh o metodi con uso della tabella di Routh (imposizione di un prefissato grado di stabilità G_S , imposizione del margine di ampiezza M_A , ecc.)
- Diagrammi di Nyquist e formule di inversione (progetti in frequenza con imposizione di margini di stabilità, ecc.)
- Diagrammi di Bode (progetti in frequenza per sistemi a fase minima, progetti con specifiche frequenziali su $T_y(j\omega)$ o $T_{dy}(j\omega)$, ecc.)
- Metodi di cancellazione polo-zero (anche utili per ridurre il numero k dei parametri di progetto)
- Metodo del polinomio caratteristico con uso del principio di identità dei polinomi (equazione diofantea, imposizione dei poli dominanti, ecc.)
- Metodo del luogo delle radici (sintesi con grado di stabilità massimo, specifiche sui poli dominanti, ecc.).
Quale metodo qualitativo è utile nell'individuare la struttura appropriata per il controllore.

Nel progetto dei controllori e più in generale dei sistemi di controllo una buona pratica (best practice) è l'uso di **ottimizzazioni** (dei parametri di progetto) e di **simulazioni** al calcolatore per la verifica delle evoluzioni nelle varie situazioni operative.

17 Lezione 17

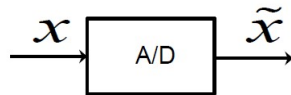
I **sistemi a controllo digitale** comprendono un elaboratore digitale nel sistema di controllo (sistemi di controllo con segnali campionati, sistemi di controllo a tempo discreto)

Un esempio di sistema di controllo digitale:



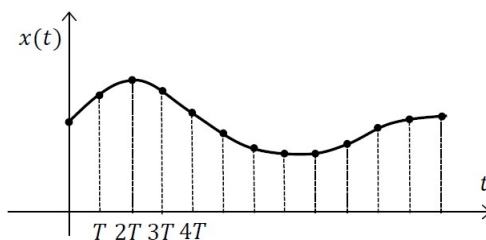
- m, c segnali a tempo continuo (analogici)
- $\tilde{m}, \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{e}$ segnali a tempo discreto (digitali)
- Convertitore D/A (digitale/analogico)
- Convertitore A/D (analogico/digitale)

Convertitore A/D



Campionamento del segnale con periodo T :

$$x(t) \rightarrow \tilde{x}(k) = x(kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$

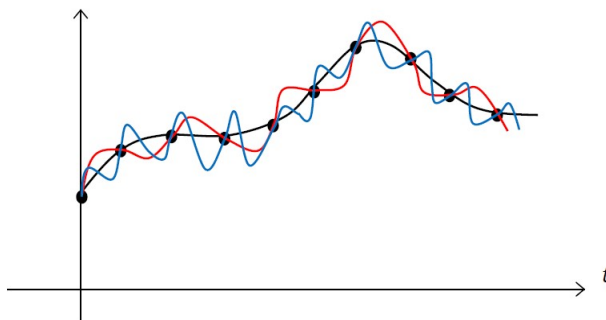


\tilde{x} è una sequenza o successione di valori.

Ogni campione viene rappresentato da un numero finito di bit (approssimazione del campione). Esempio: convertitori ad 8, 10, 12 bit corrispondono a 256, 1024, 4096 livelli di quantizzazione. **Assunzione: trascureremo la quantizzazione dei segnali**

Conversione digitale-analogica

La conversione inversa, cioè la ricostruzione di un segnale analogico a partire dai suoi campioni, in generale non ammette un'unica soluzione.



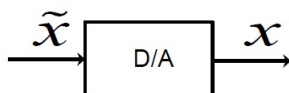
Il teorema del campionamento (Shannon 1948)

Un segnale $f(t)$ con spettro limitato da 0 a ω_s , cioè con trasformata di Fourier $F(j\omega)$ nulla per $\omega \geq \omega_s$, si può ricostruire dalla sequenza di campioni $\tilde{f}(k) = f(kT)$ se e solo se la pulsazione di campionamento $\omega = 2\pi/T$ è non inferiore a $2\omega_s$.

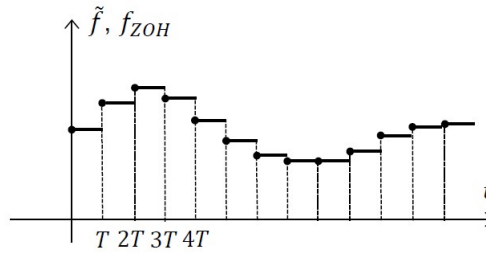
Fenomeno di **aliasing**: quando il teorema del campionamento emerge l'aliasing. Il sottocampionamento implica l'impossibilità di ricostruire il segnale a tempo continuo e nei sistemi di controllo a segnali campionati emergono disturbi (alias) che pregiudicano le prestazioni del sistema di controllo.

Per ovviare questo problema si utilizzano **filtri anti-aliasing** (di tipo passa-basso) di Butterworth o di Bessel per esempio.

Convertitore D/A



Il più comune è il dispositivo di tenuta di ordine zero (zero-order hold)



$$f_{ZOH}(t) = \tilde{f}(k) \quad \text{se } t \in [kT, (k+1)T], \quad k \in \mathbb{Z}$$

La trasformata zeta

Emerge la necessità di introdurre i segnali e i sistemi a tempo discreto; uno strumento fondamentale è la trasformata Zeta (Hurewicz 1947, Ragazzini, Zadeh 1952).

Sia $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) un segnale a tempo discreto (anche sequenza o successione). La trasformata zeta di $x(k)$ è

$$\mathcal{Z}[x] \equiv \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} \quad (67)$$

con z variabile complessa.

$$X(z) := \mathcal{Z}[x]$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots$$

Se esistono $\rho > 0$ e $M > 0$ per i quali vale $|x(k)| \leq M\rho^k, k \geq 0$ allora $X(z)$ è analitica su $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}$. Infatti:

$$|x(k)| \leq M\rho^k, \quad k \geq 0 \quad \text{e} \quad X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

Sostituendo la disequazione nella equazione che rappresenta la formula della trasformata zeta si ha

$$|X(z)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| \cdot |z|^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} M\rho^k \frac{1}{|z|^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} M \left(\frac{\rho}{|z|} \right)^k = M \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{|z|} \right)^k$$

Questa è una serie di potenze e converge solo se la base dell'esponenziale è strettamente minore di 1 e quindi se $|z| > \rho$ ed ecco che abbiamo trovato la condizione espressa in partenza.

Esempi:

$$x(k) = a^k, \quad \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

convergente per $|z| > |a|$; per continuazione analitica possiamo dire che è ben definita per $z \neq a$.

Se $a = 1$ otteniamo $\mathcal{Z}[1^k] = \mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z - 1}$

La delta di Dirac discreta o impulso (a tempo) discreto è

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$$

Linearità della trasformata zeta:

Dati due segnali $x(k)$, $y(k)$ e $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}[ax(k) + by(k)] = a\mathcal{Z}[x(k)] + b\mathcal{Z}[y(k)]$$

La regione di convergenza della trasformata zeta (ROC, region of convergence) Data la sequenza $x(k)$, la regione di convergenza, ROC di $X(z)$ ($= \mathcal{Z}[x(k)]$) è definita da

$$ROC := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} \right| < \infty \right\}$$

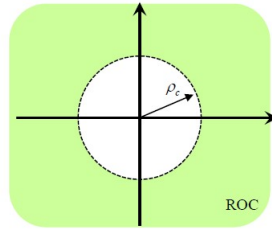
Proprietà

1. $X(z)$ è analitica su ROC
2. Se ROC non è l'insieme vuoto:

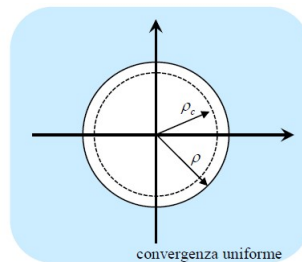
$$ROC = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_c\}$$

$\rho_c \equiv$ raggio di (assoluta) convergenza

$$\rho_c = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup |x(k)|^{1/k} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq k} \{|x(m)|^{1/m}\} \quad (\text{formula di Hadamard})$$



3. Se $\rho > \rho_c$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$ è convergente uniformemente su $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}$



18 Lezione 18

Trasformata zeta di un segnale ritardato di n passi

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k} = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + x(-n) + x(-n+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-n+1}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(k-n)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-n)z^{-k} = \quad i \triangleq k-n \quad = \sum_{i=-n}^{+\infty} x(i)z^{-(i+n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)z^{(-n-i)} + \sum_{i=-n}^{-1} x(i)z^{(-n-i)} = \\ &= z^{-n} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)z^{-i} + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k} = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k} \end{aligned}$$

Se le "condizioni iniziali" del segnale $x(k)$ sono nulle vale:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)]$$

z^{-1} è l'operatore ritardo di un passo. In generale vale:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)1(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)]$$

Trasformata zeta di un segnale anticipato di n passi

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i)z^{n-i} = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - x(0)z^n - x(1)z^{n-1} - \dots - x(n-1)z$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+n)z^{-k} = \quad i \triangleq k+n \quad = \sum_{i=n}^{+\infty} x(i)z^{(-i+n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)z^{(-i+n)} - \sum_{i=0}^{n-1} x(i)z^{(-i+n)} = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i)z^{(-i+n)}$$

z è l'operatore anticipo di un passo.

Teorema del valore iniziale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}[x(k)] \quad (68)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(k)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}[x(k)] &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1) \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{-1} + x(2) \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Essendo tutti esponenziali negativi, per z tendente all'infinito tendono ad annullarsi (più o meno velocemente) per cui rimane solo $x(0)$.

Teorema del valore finale

Dato il segnale $x(k)$ per il quale il limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k)$ esiste ed è finito, vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathcal{Z}[x(k)] \quad (69)$$

Teorema del valore finale (versione estesa)

Dato il segnale $x(k)$ sia $X(z) := \mathcal{Z}[x(k)]$.

1. Se $X(z)$ non ha poli nella regione $|z| \geq 1$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0$
2. Se $X(z)$ non ha poli nella regione $|z| \geq 1$ ad eccezione di un polo semplice in $z = 1$ allora $x(k)$ converge per $k \rightarrow +\infty$ e vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \text{Res}\{X(z), 1\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

3. Se $X(z)$ ha un polo multiplo in $z = 1$, allora $x(k)$ non converge per $k \rightarrow +\infty$
4. Se $X(z)$ ha un polo nella regione $|z| \geq 1, z \neq 1$, allora $x(k)$ non converge per $k \rightarrow +\infty$

Trasformata zeta di $a^k x(k)$

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) (a^{-1})^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Convoluzione (a tempo discreto)

La convoluzione dei segnali discreti $x(k)$ e $y(k)$ è definita come

$$(x * y)(k) \equiv x(k) * y(k) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i) \quad (70)$$

La convoluzione di $x(k)$ e $y(k)$ è il segnale ottenuto sommando infinite copie di $x(k)$ ciascuna delle quali è traslata in avanti di i passi e moltiplicata per $y(i)$. Per esempio se $y(k) = 0, k < 0, x(k) * y(k) = x(k)y(0) + x(k-1)y(1) + x(k-2)y(2) + \dots$

Commutatività della convoluzione

$$x(k) * y(k) = y(k) * x(k)$$

Dimostrazione:

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i) = \quad l \triangleq k-i \quad = \sum_{l=+\infty}^{-\infty} x(l)y(k-l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(k-l)x(l) = y(k) * x(k)$$

Trasformata zeta della convoluzione

Se $x(k)$ e $y(k)$ sono segnali discreti tali che $x(k) = 0, y(k) = 0$ per $k < 0$ (segnali causali) allora

$$\mathcal{Z}[x * y] = X(z)Y(z)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(k) * y(k)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} x(k-i)y(i) \cdot z^{-k} = \\
&\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-i)y(i) \cdot z^{-k} = \quad l \triangleq k-i \quad = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-i}^{+\infty} x(l)y(i) \cdot z^{(-i-l)} = \\
&\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} x(l)x(i) \cdot z^{-i} \cdot z^{-l} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} x(l)z^{-l} \cdot x(i)z^{-i} = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)z^{-i} \cdot \sum_{l=0}^{+\infty} x(l)z^{-l} = X(z)Y(z)
\end{aligned}$$

Derivata della trasformata zeta

Sia $x(k)$ un segnale discreto e $X(z)$ la corrispondente trasformata zeta. Nella regione in cui $X(z)$ è analitica vale

$$-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k \cdot x(k)]$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}X(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \frac{d}{dz} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot (-k)z^{-k-1} = \\
&= - \sum_{k=0}^{+\infty} kx(k)z^{-k}z^{-1} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} kx(k)z^{-k} = -z^{-1} \mathcal{Z}[kx(k)]
\end{aligned}$$

Trasformate zeta di segnali notevoli (gradino, rampa e parabola)

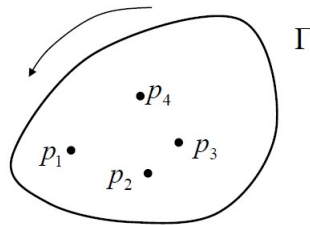
$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}, \quad \mathcal{Z}[k \cdot 1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathcal{Z}[k^2 \cdot 1(k)] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

19 Lezione 19

Teorema dei residui

Sia Γ una curva chiusa semplice e $f(z)$ una funzione analitica su Γ e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari p_1, p_2, \dots, p_n in essa contenuti. Allora

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, p_i\} \quad (71)$$



Lemma

Sia $l \in \mathbb{Z}$, allora

$$\oint_{\Gamma} z^l dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{se } l = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove Γ è una curva chiusa (semplice) che circonda l'origine di \mathbb{C} percorsa in senso antiorario. Il lemma può essere dimostrato facilmente utilizzando il teorema dei residui.

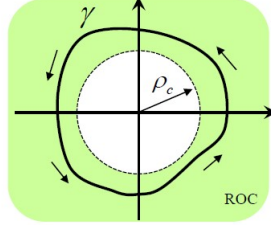
Teorema (antitrasformazione zeta)

Sia $X(z)$ la trasformata zeta di una sequenza $x(k)$, allora

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz \quad (72)$$

dove γ è una curva semplice, percorsa in senso antiorario, che circonda la regione di non convergenza di $Z[x(k)]$. La regione di non convergenza è

$$\mathbb{C} \setminus ROC = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho_c\} \subset \{\text{regione interna di } \gamma\}$$



Dimostrazione:

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i) z^{-i} \right) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \oint_{\gamma} z^{-i+k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} x(k) \cdot 2\pi j = x(k)$$

Antitrasformazione zeta con il metodo dei residui

Applicando il teorema dei residui nel calcolo dell'integrale segue

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot 2\pi j \sum_i \text{Res} \{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \} \quad (73)$$

I valori p_i sono le singolarità distinte di $X(z) \cdot z^{k-1}$. Quindi, facendo una banale semplificazione:

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \}$$

Proprietà (sommatoria dei residui di una funzione razionale strettamente propria)

Sia $F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$ una funzione razionale strettamente propria con $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ e p_1, p_2, \dots, p_h sono i suoi poli distinti. Segue allora

$$\sum_{i=1}^h \text{Res}\{F, p_i\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n - m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{se } n - m = 1 \end{cases}$$

Qualche antitrasformata importante

- $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^n} \right] = \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} \cdot 1(k-1) = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} \cdot 1(k-1)$
- $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-a)^n} \right] = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k+1-n} \cdot 1(k) = \binom{k}{n-1} a^{k+1-n} \cdot 1(k)$
- $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c}{z-p} + \frac{\bar{c}}{z-\bar{p}} \right] = 2|c||p|^k \cos[\arg(p)k + \arg(c)] \cdot 1(k)$
- $\mathcal{Z}^{-1} \left[(a+jb) \frac{z}{z-p} + (a-jb) \frac{z}{z-\bar{p}} \right] = 2|p|^k \{ a \cdot \cos[\arg(p) \cdot k] - b \cdot \sin[\arg(p) \cdot k] \} \cdot 1(k)$

Antitrasformazione zeta con il metodo dello sviluppo in fratti semplici

$$F(z) = \frac{b(z)}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2} \dots (z-p_h)^{r_h}} \quad p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j; \sum_{i=1}^h r_i = n, \quad \deg(b(z)) \leq n$$

L'ultima disequazione indica che la funzione razionale è propria, non strettamente propria. Ora usiamo la lettera c al posto di k come coefficiente per non confonderlo con la variabile dei segnali discreti.

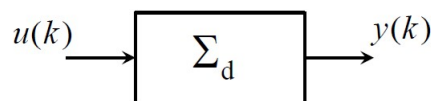
$$F(z) = c_0 + \frac{c_{1,1}}{(z-p_1)^{r_1}} + \dots + \frac{c_{1,r_1}}{z-p_1} + \dots + \frac{c_{h,1}}{(z-p_h)^{r_h}} + \dots + \frac{c_{h,r_h}}{z-p_h}$$

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) \quad \text{valore finito diverso da 0 perchè il grado num = grado den}$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} [(z-p_i)^{r_i} F(z)] \Big|_{z=p_i} \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, r_i$$

20 Lezione 20

Generalità sui sistemi a tempo discreto



Un sistema (a tempo) discreto è un "processo" per il quale assegnato un segnale di ingresso a tempo discreto $u(k)$ determina un corrispondente segnale di uscita a tempo discreto $y(k)$ ($u: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$).

Definizione di **behaviour** di Σ_d

$$B_d := \left\{ (u, y) : y(k) \text{ è l'uscita di } \sum_d \text{ corrispondente all'ingresso } u(k) \right\}$$

Definizione di **linearità** di Σ_d

Un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti:

$$\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in B_d \text{ e } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in B_d$$

In modo equivalente, Σ_d è lineare quando B_d è uno spazio vettoriale

Definizione di **stazionarietà** di Σ_d

Un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo) se per ogni $n \in \mathbb{Z}$:

$$(u(k), y(k)) \in B_d \Rightarrow (u(k-n), y(k-n)) \in B_d$$

Il modello matematico che definisce il behaviour e quindi il comportamento del sistema discreto può essere introdotto attraverso una cosiddetta equazione alle differenze.

Equazione alle differenze di un sistema discreto ($n, m \in \mathbb{Z}, m \leq n$)

$$f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n)) = g(u(k-n+m), u(k-n+m-1), \dots, u(k-n))$$

Se f e g sono funzioni lineari degli argomenti si ottiene:

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

È un'equazione alla differenze di un sistema discreto lineare (e stazionario). Affinchè l'equazione alle differenze sia ben posta si assume

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n \text{ (causalità)}$$

Dove \vee indica un *OR* esclusivo per cui non possono essere entrambi uguali a zero, o uno, o l'altro. Ora vediamo perchè l'ultima disuguaglianza è una condizione necessaria per la causalità. Se abbiamo l'ingresso u fino al campione $u(k)$, posso determinare $y(k)$ con la conoscenza dei campioni precedenti quindi $y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)$. Possiamo scrivere

$$a_n y(k) = -a_{n-1} y(k-1) - \dots - a_0 y(k-n) + b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

Notiamo che per determinare l'elemento al membro di sinistra dobbiamo conoscere i componenti di destra. Immaginiamo ora di avere $m = n + 1$, avremmo

$$u(k - n + m) = u(k - n + n - 1) = u(k + 1)$$

Il quale corrisponde ad un campione futuro e, evidentemente, viola la definizione di causalità. Notazione:

- n ordine di \sum_d
- $n - m$ grado relativo di \sum_d

Una proprietà interessante anche dal punto di vista mnemonico è la seguente: considerando gli elementi singoli che compongono l'equazione, possiamo notare che la somma dei pedici è costante

$$a_j y(k - i) \quad \text{e} \quad b_j u(k - i) \quad \text{si ha che} \quad j + i = n$$

Risposta di un sistema lineare a tempo discreto e la funzione di trasferimento

Definita l'equazione alle differenze, modello matematico di \sum_d

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$(a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n),$$

assegnato l'ingresso $u(k), k \geq 0$ e le **condizioni iniziali (estese)**

$$\begin{aligned} & y(-1), y(-2), \dots, y(-n) \\ & u(-1), u(-2), \dots, u(-n) \end{aligned}$$

determinare l'uscita $y(k), k \geq 0$. Sia $n_0 := \min\{i \in \{0, 1, \dots, n\} : a_i \neq 0\}$, $m_0 := \min\{i \in \{0, 1, \dots, m\} : b_i \neq 0\}$.

Le **condizioni iniziali esatte** sono:

$$\begin{aligned} & y(-1), y(-2), \dots, y(-n + n_0), \text{ presenti se } n_0 < n \\ & u(-1), u(-2), \dots, u(-n + m_0), \text{ presenti se } m_0 < n \end{aligned}$$

Utilizzando gli indici n_0 e m_0 l'equazione alle differenze può essere riscritta come

$$a_n y(k) + \dots + a_{n_0} y(k - n + n_0) = b_m u(k - n + m) + \dots + b_{m_0} u(k - n + m_0)$$

$$(a_n \neq 0, b_m \neq 0, m \leq n; a_{n_0} \neq 0, b_{m_0} \neq 0, n_0 = 0 \vee m_0 = 0)$$

L'equazione alle differenze può essere riscritta come:

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

Usiamo quindi una forma simmetrica, ma comunque definiamo $m := \max\{i \in \{0, 1, \dots, n\} : b_i \neq 0\}$.

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-n+i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-n+i) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^n a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] = \sum_{i=0}^n b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)] + b_n U(z)$$

Dato che $y(k-n+1) = y(k-(n-i))$, usiamo la trasformata: $\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n) z^{-k}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left\{ z^{-(n-i)} Y(z) + \sum_{k=0}^{n-i-1} y(k-n+i) z^{-k} \right\} + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left\{ z^{-(n-i)} U(z) + \sum_{k=0}^{n-i-1} u(k-n+i) z^{-k} \right\} + b_n U(z)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{i=0}^n b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k}$$

L'equazione ha quindi seguente struttura: $a(z)Y(z) = b(z)U(z) + c(z)$ con

$$\bullet \quad a(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

- $b(z) := \sum_{i=0}^n b_i z^i$
- $c(z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} \rightarrow c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z$

Quindi

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)}$$

In particolare:

$$Y(z) = Y_{for}(z) + Y_{lib}(z) \rightarrow Y_{for}(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z), \quad Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}$$

Ritornando nel dominio del tempo (discreto):

$$y(k) = y_{for}(k) + y_{lib}(k) \rightarrow y_{for}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{b(z)}{a(z)} U(z) \right], \quad y_{lib}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c(z)}{a(z)} \right]$$

Definizione di **funzione di trasferimento di** \sum_d

Si definisce funzione di trasferimento di un sistema discreto \sum_d la funzione $H(z)$ per la quale

$$\mathcal{Z}[y(k)] = H(z) \mathcal{Z}[u(k)]$$

per ogni $(u, y) \in B_d$ tale che $u(k) = 0, y(k) = 0, k < 0$ (segnale causale). Quindi la f.d.t. di \sum_d è

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} \quad (74)$$

$Y_{for}(z) = H(z)U(z)$, se $u(k) = \delta(k)$ segue che $U(z) = 1$.

La risposta all'impulso è $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$, si considera $h(k) = 0, k < 0$. Viceversa nota la risposta all'impulso

$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$. Dal teorema di convoluzione segue $y_{for} = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i)$

Proprietà della struttura della risposta libera

La risposta libera di \sum_d è caratterizzata da

$$Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z$$

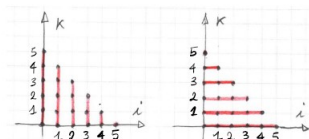
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione

$$Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z = \sum_{l=1}^n c_l z^l$$

$$c(z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k}$$

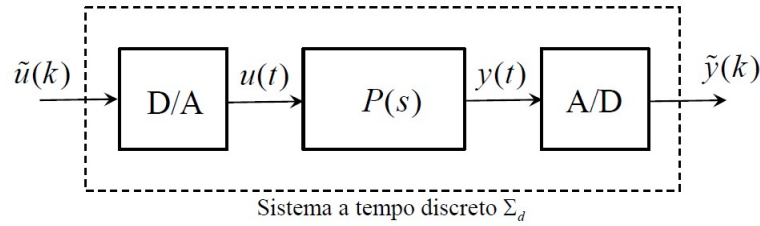
$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1}$$



$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{l=n}^1 \sum_{i=0}^{l-1} b_i u(-l+i) z^l = \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{l-1} b_i u(i-l) z^l = \sum_{l=1}^n \sum_{j=l}^1 b_{l-j} u(-j) z^l = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l \\
c(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) z^l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l - \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) z^l \right) \cdot z^l \\
c_l &= \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l - \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) z^l, \quad l = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Dove l'ultima espressione coincide con la scrittura matriciale che descrive la struttura della risposta libera.

Conversione continuo/discreto di un sistema con mantentore di ordine zero



Il tempo di campionamento sia T ($\tilde{y}(k) = y(kT)$) e il convertitore D/A sia un mantentore (dispositivo di tenuta) di ordine zero. Si determini la funzione di trasferimento $P_d(z)$ di Σ_d .

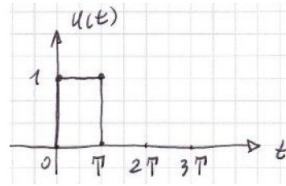
Definizione di trasformata zeta di un segnale a tempo continuo campionato

Sia $f(t)$ un segnale a tempo continuo e $F(s)$ la corrispondente trasformata di Laplace.

$$\mathcal{Z}[f(t), T] \triangleq \mathcal{Z}[f(kT)]$$

$$\mathcal{Z}[F(s), T] \triangleq \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{t=kT}]$$

Si noti che $\mathcal{Z}[f(t), T] \equiv \mathcal{Z}[F(s), T]$. Determiniamo $P_d(z)$ come trasformata zeta della risposta all'impulso applicato all'ingresso del mantentore di ordine zero: $\tilde{u}(k) = \delta(k)$



$u(t) = 1(t) - 1(t - T)$ quindi $y(t) = p_s(t) - p_s(t - T)$ con $p_s(t)$ risposta di $P(s)$ al gradino unitario $1(t)$.

Scriviamo quindi $\left(p_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \right)$ ovvero $p_s(t)$ come antitrasformata del prodotto del gradino unitario con P nel dominio di Laplace.

$$\tilde{y}(k) = p_s(kT) - p_s(kT - T) = p_s(kT) - p_s((k-1)T)$$

$$P_d(z) = \mathcal{Z}[\tilde{y}(k)] = \mathcal{Z}[p_s(kT)] - \mathcal{Z}[p_s((k-1)T)] = \mathcal{Z}[p_s(kT)] - z^{-1} \mathcal{Z}[p_s(kT)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[p_s(kT)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$

Quindi

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$

21 Lezione 21

Stati di equilibrio e stabilità

Sistema a tempo discreto \sum_d :

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Guadagno statico di $\sum_d : H(1)$; se $y_c = H(1)u_c$ segue $(u_c, y_c) \in B_d$. La presenza dei valori costanti u_c e $y_c = H(1)u_c$ caratterizza uno stato di equilibrio del sistema. Studiamo la stabilità dell'equilibrio $u_c = 0$ e $y_c = 0$. Sia $u(k) = 0, y(k) = 0$ per $k < -n$ e la perturbazione sia data congiuntamente da

1. $u(k) \neq 0$ per $k = -n, -n+1, \dots, -1$ (perturbazione dell'ingresso)
2. $y(k) \neq 0$ per $k = -n, -n+1, \dots, -1$ (perturbazione imposta sull'uscita)

Dall'istante $k = 0$ in poi cessa la perturbazione: $u(k) = 0$ e $y(k) = y_{lib}(k), k \geq 0$.

Definizione di stabilità alle perturbazioni di \sum_d

Il sistema \sum_d si dice:

1. **stabile** se per ogni perturbazione $y_{lib}(k)$ è limitata per $k \geq 0$
2. **asintoticamente stabile** se \sum_d è stabile ed inoltre $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{lib}(k) = 0$ per ogni perturbazione indotta
3. **semplicemente (o marginalmente stabile)** se \sum_d è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{lib}(k) = y_\infty \neq 0 \vee \{\text{non esiste } \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{lib}(k)\}$
4. **instabile** se \sum_d non è stabile

Teorema sulla stabilità alle perturbazioni

Sia \sum_d caratterizzato dalla f.d.t. $H(z)$ con $a(z)$ e $b(z)$ coprimi.

1. \sum_d è **stabile** se e solo se tutti i suoi poli appartengono al cerchio unitario e quelli sulla frontiera del cerchio unitario (cioè sulla circonferenza unitaria) hanno molteplicità uguale a 1
2. \sum_d è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti i suoi poli appartengono all'interno del cerchio unitario
3. \sum_d è **semplicemente (o marginalmente) stabile** se e solo se tutti i suoi poli appartengono al cerchio unitario e quelli sulla circonferenza unitaria (ne deve esistere almeno uno) hanno molteplicità uguale a 1
4. \sum_d è **instabile** se e solo se almeno un polo è esterno al cerchio unitario o almeno un polo è sulla circonferenza unitaria con molteplicità maggiore di 1.

Nota: se $a(z)$ e $b(z)$ non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i "poli" con le "radici di $a(z)$ ", [$a(z)$ è il polinomio caratteristico del sistema]

Dimostrazione del punto 2 del teorema

\sum_d è asintoticamente stabile se e solo se $|p_i| < 1, i = 1, \dots, l$.

Sufficienza ($|p_i| < 1 \Rightarrow \sum_d$ è asintoticamente stabile)

$$a(z) = (z - p_1)^{r_1} \dots (z - p_l)^{r_l}, p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j$$

La risposta libera di \sum_d a seguito di perturbazioni è caratterizzata da

$$Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, c(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z$$

$$Y_{lib}(z) = z \cdot \frac{c_n z^{n-1} + \dots + c_1}{(z - p_1)^{r_1} \dots (z - p_l)^{r_l}} = d_{1,1} \frac{z}{(z - p_1)^{r_1}} + \dots + d_{1,r_1} \frac{z}{z - p_1} + \dots \dots + d_{l,1} \frac{z}{(z - p_l)^{r_l}} + \dots + d_{l,r_l} \frac{z}{z - p_l}$$

Antitrasformando:

$$y_{lib}(k) = d_{1,1} \binom{k}{r_1 - 1} p_1^{k-(r_1-1)} + d_{1,2} \binom{k}{r_1 - 2} p_1^{k-(r_1-2)} + \dots + d_{1,r_1} p_1^k + \dots \dots +$$

$$+d_{l,1} \binom{k}{r_l-1} p_l^{k-(r_l-1)} + d_{l,2} \binom{k}{r_l-2} p_l^{k-(r_l-2)} + \dots + d_{l,r_l} p_l^k$$

In cui

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} \quad (\text{polinomio in } k \text{ di grado } r)$$

Tutti gli addendi di $y_{lib}(k)$ convergono a 0 per $k \rightarrow \infty$ in quanto se $|p| < 1$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^n p^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Necessità (\sum_d è asintoticamente stabile $\Rightarrow |p_i| < 1$)

Si ragiona per assurdo. Esiste $j \in \{1, \dots, l\}$ tale che $|p_j| \geq 1$. Costruiamo una particolare perturbazione per la quale

$$Y_{lib}(z) = \frac{z}{z - p_j}$$

$$Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)} = \frac{c_n z^n + \dots + c_1 z}{\prod_{i=1}^l (z - p_i)^{r_i}} = \frac{(c_n z^{n-1} + \dots + c_1) \cdot z}{\left(\prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1} (z - p_j)}$$

$$\text{Sia } c_n z^{n-1} + \dots + c_1 = \left(\prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1}$$

Considerato che $a_0 \neq 0$ o $b_0 \neq 0$ esistono sempre condizioni iniziali (ovvero la perturbazione) per le quali si ottengono i coefficienti c_i desiderati:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

Quindi $y_{lib}(k) = p_j^k$ ed evidentemente questa risposta libera non converge a zero per $k \rightarrow \infty$. Questo contraddice l'ipotesi di $y_{lib}(k)$ convergente asintoticamente a zero per ogni perturbazione (\sum_d asintoticamente stabile).

Definizione di stabilità BIBO di \sum_d

Il sistema di \sum_d si dice BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata. Formalmente

$$\forall (u, y) \in B_d \text{ con } u(k) = 0, y(k) = 0 \text{ per } k < 0 \text{ e } \|u(k)\|_\infty < +\infty \Rightarrow \|y(k)\|_\infty < +\infty$$

Teorema sulla stabilità BIBO

Il sistema \sum_d è BIBO stabile se e solo se $\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$ ($h(k)$ è la risposta all'impulso di \sum_d).

Teorema dell'equivalenza fra stabilità BIBO e stabilità asintotica

Il sistema \sum_d è BIBO stabile se e solo se \sum_d è asintoticamente stabile

Metodi per lo studio della stabilità asintotica

Per stabilire la stabilità asintotica di \sum_d :

1. Calcolo delle radici di $a(z)$
2. Trasformazione bilineare e criterio di Routh
3. Criterio di Jury

Proposizione (trasformazione bilineare)

La trasformazione bilineare $w = T(z)$ definita come

$$w = T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

per $z \neq -1$ soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w) > 0 &\iff |z| > 1 \\ \operatorname{Re}(w) = 0 &\iff |z| = 1 \\ \operatorname{Re}(w) < 0 &\iff |z| < 1 \end{aligned}$$

Dimostriamo l'ultima, le altre sono analoghe.

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{\alpha + j\beta - 1}{\alpha + j\beta + 1} = \frac{(\alpha - 1 + j\beta)(\alpha + 1 - j\beta)}{(\alpha + 1 + j\beta)(\alpha + 1 - j\beta)} = \frac{\alpha^2 - \alpha - j\alpha\beta + \alpha - 1 + j\beta - j\alpha\beta + j\beta + \beta^2}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2}$$

$$\Re[w] = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2} \Rightarrow \Re[w] < 0 : \alpha^2 + \beta^2 - 1 < 0 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 < 1$$

Che è verificata per tutti i punti interni alla circonferenza unitaria e quindi per tutti i numeri complessi aventi modulo minore di 1.

La trasformazione bilineare è biunivoca con dominio $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ e codominio $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$T : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad z \rightarrow w = T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

La trasformazione bilineare inversa è

$$T^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad w \rightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

Proposizione Il polinomio $a(z)$ ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se

1. $a(-1) \neq 0$
2. gli zeri di $a\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ sono tutti a parte reale negativa

Introduzione al criterio di Jury

Proposizione

Sia dato il polinomio $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ con $a_n > 0$. Affinchè $a(z)$ abbia tutte le radici con modulo minore di 1 è necessario che siano soddisfatte le disuguaglianze:

1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$

Nei casi $n = 1$ e $n = 2$ le disuguaglianze 1-3 sono anche sufficienti.

Caso $n = 1$

$$a(z) = a_1 z + a_0, \quad a_1 > 0$$

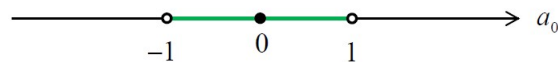
Condizioni:

$$a_1 z + a_0 = 0 \quad z = -\frac{a_0}{a_1} \quad |z| < 1 \quad \frac{|a_0|}{a_1} < 1 \quad |a_0| < a_1 \quad (3^a)$$

$$\text{Se } a_0 > 0 \quad a_0 < a_1 \quad -a_1 + a_0 < 0 \quad a(-1) < 0 \quad -a(-1) > 0 \quad (2^a)$$

$$\text{Se } a_0 < 0 \quad -a_0 < a_1 \quad a_1 + a_0 > 0 \quad a(1) > 0 \quad (1^a)$$

Assumiamo $a_1 = 1 : |a_0| < 1$



Caso $n = 2$

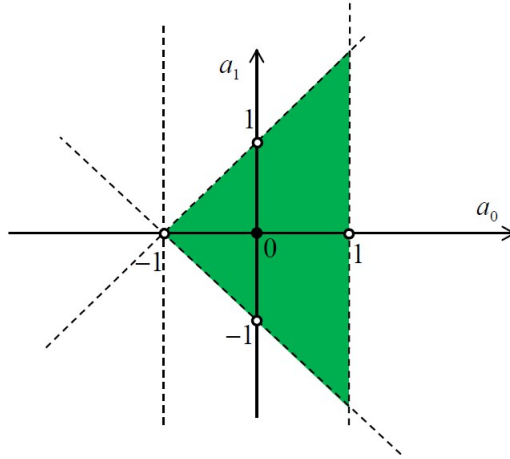
$$a(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_2 > 0$$

Condizioni:

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 > 0 \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0 \\ -a_0 < a_2 \end{cases}$$

Assumiamo $a_2 = 1$

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ |a_0| < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 > -a_0 - 1 \\ a_1 < a_0 + 1 \\ |a_0| < 1 \end{cases}$$



Costruzione della tabella di Jury associata al polinomio

$$a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n > 0$$

	z^0	z^1	z^2	z^{n-k}	z_{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-k}	a
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_k	a
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-1-k}	a
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_k	\dots
5	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}	
6	c_{n-2}	c_{n-3}	\dots	c_{n-4}	a	c_0
	\dots					\dots
	\dots					\dots
$2n-5$	s_0	s_1	s_2	s_3		
$2n-4$	s_3	s_2	s_1	s_0		
$2n-3$	r_0	r_1	r_2			

In cui gli elementi sono ottenuti con iterando questi calcoli (si calcola il determinante di ogni matrice 2×2):

- $b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$
- $c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$
- $r_0 = \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_3 & s_0 \end{vmatrix}, \quad r_1 = \begin{vmatrix} s_0 & s_2 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix}$

Teorema (criterio di Jury)

Il polinomio $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, a_n > 0$ ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se le seguenti $n+1$ disuguaglianze sono soddisfatte:

- 1) $a(1) > 0$
- 2) $(-1)^n a(-1) > 0$
- 3) $|a_0| < a_n$
- 4) $|b_0| > |b_{n-1}|$
- 5) $|c_0| > |c_{n-2}|$
- \dots
- $n+1$) $|r_0| > |r_2|$

Cenni sui metodi di sintesi dei controllori discreti

1. Metodi diretti: sintesi del controllore a tempo discreto $C_d(z)$ a partire dalla f.d.t. dell'impianto controllato $P_d(z)$

2. Metodi indiretti: sintesi del controllore a tempo continuo $C(s)$ e successiva sua discretizzazione per ottenere $C_d(z)$

Scelta del periodo di campionamento

Sia ω_b la banda passante desiderata per il sistema di controllo (dal segnale di comando all'uscita controllata). Per il teorema del campionamento è necessario rispettare la condizione

$$\omega_s > 2\omega_b$$

dove $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione di campionamento e T è il corrispondente periodo. Quindi $\omega_s/\omega_b > 2$, in pratica si orienta il progetto scegliendo

$$6 \leq \frac{\omega_s}{\omega_b} \leq 20$$

Metodi indiretti: da $C(s)$ a $C_d(z)$

1. Metodo di Eulero in avanti

Per spiegare questo metodo consideriamo un controllore del primo ordine a tempo continuo. Il controllore c (blocco) è posto tra l'ingresso e e l'uscita x .

$$C(s) = \frac{d_1 s + d_0}{s + c_0} \quad \rightarrow \quad Dx(t) + c_0 x(t) = d_1 De(t) + d_0 e(t)$$

Abbiamo scritto la formula del controllore e l'equazione differenziale (siamo a tempo continuo quindi) associata al sistema. Appliciamo ora una discretizzazione passando da $t \rightarrow kT$, per cui si ha:

$$Dx(kT) + c_0 x(kT) = d_1 De(kT) + d_0 e(kT)$$

Qua però sorge un problema, perchè non sappiamo cosa voglia dire la derivata discretizzata. Per ovviare questo problema definiamo la derivata discreta nel seguente modo:

$$Dx(kT) \cong \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

In questo modo si è passati a una equazione alle differenze. Ci viene facile calcolare la trasformata zeta di questo oggetto e, imponendo le condizioni iniziali nulle, troviamo la funzione di trasferimento del segnale discreto (vedi formula 74).

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{\mathcal{Z}[x((k+1)T)] - \mathcal{Z}[x(kT)]}{T} = \frac{z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)]}{T} \Rightarrow \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{z-1}{T} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

Il simbolo \cong è presente perchè quella che si applica è una approssimazione della derivata ovviamente. Considerando la trasformata di Laplace, quindi in tempo continuo, della derivata, è possibile confrontare i valori con quella in tempo discreto, ovvero:

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$$

Dal confronto si impone (condizioni iniziali nulle)

$$s = \frac{z-1}{T}$$

2. Metodo di Eulero all'indietro

Ragioniamo in modo analogo rispetto al metodo precedente. Partiamo esplicitando ancora la trasformata di Laplace della derivata

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$$

Stavolta la derivata viene espressa così:

$$Dx(kT) \cong \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

Calcoliamo la rispettiva trasformata zeta

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x((k-1)T)]}{T} = \frac{\mathcal{Z}[x(kT)] - z^{-1}\mathcal{Z}[x(kT)]}{T} \Rightarrow \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{1}{T}(1-z^{-1})\mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

3. Metodo di Tustin

Partiamo ancora una volta dalla trasformata di Laplace della derivata

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$$

In questo caso, diversamente dai metodi appena visti, esprimiamo la derivata come

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv = x((k+1)T) - x(kT)$$

Ma la stessa area è approssimabile attraverso il metodo del trapezio

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv \cong T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2}$$

Unendo i due risultati precedenti

$$T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2} \cong x((k+1)T) - x(kT)$$

Applichiamo la trasformata zeta ad entrambi i membri

$$T \frac{z\mathcal{Z}[Dx(kT)] - \mathcal{Z}[Dx(kT)]}{2} \cong z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)] \Rightarrow T \frac{z+1}{2} \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong (z-1)\mathcal{Z}[x(kT)]$$

Ovvero

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

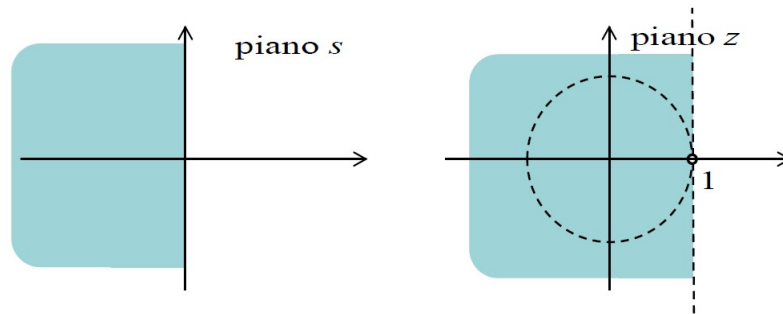
$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

Considerazioni sulla stabilità

1. Metodo di Eulero in avanti

$$s = \frac{z-1}{T}, \quad \text{sia } z = \sigma + j\omega$$

$$s = \frac{\sigma + j\omega - 1}{T} = \frac{\sigma - 1}{T} + j\frac{\omega}{T}, \quad \Re[s] < 0 \iff \frac{\sigma - 1}{T} < 0 \iff \sigma < 1$$



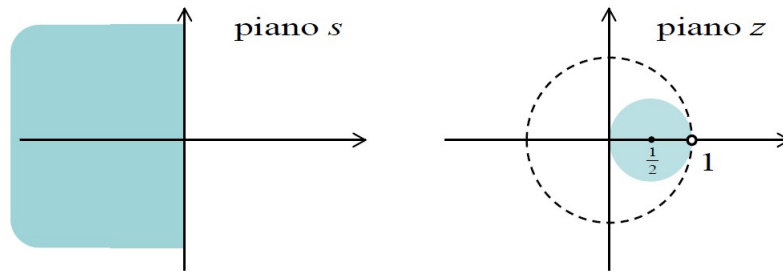
Se $C(s)$ è asintoticamente stabile $C_d(z)$ può essere instabile.

2. Metodo di Eulero all'indietro

$$s = \frac{z-1}{Tz}, \quad \text{sia } z = \sigma + j\omega$$

$$s = \frac{\sigma + j\omega - 1}{T(\sigma + j\omega)} = \frac{[(\sigma - 1) + j\omega](\sigma - j\omega)}{T(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)} = \frac{(\sigma - 1)\sigma + \omega^2 + j\omega\sigma - j\omega(\sigma - 1)}{T(\sigma^2 + \omega^2)}$$

$$\Re[s] < 0 \iff (\sigma - 1)\sigma + \omega^2 < 0 \iff \sigma^2 - \sigma + \frac{1}{4} + \omega^2 < \frac{1}{4} \iff \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



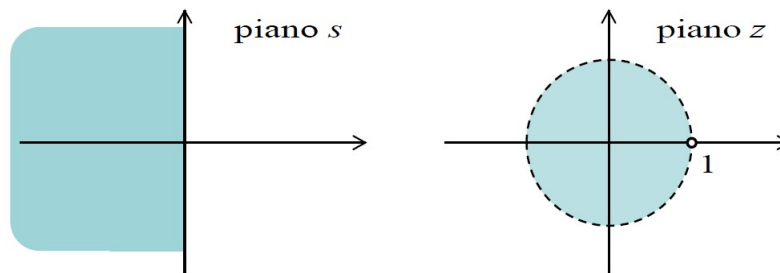
Se $C(s)$ è asintoticamente stabile allora $C_d(z)$ è asintoticamente stabile.

3. Metodo di Tustin

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{sia } z = \sigma + j\omega$$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{[(\sigma - 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]}{[(\sigma + 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j\omega(\sigma + 1) - j\omega(\sigma - 1)}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

$$\Re[s] < 0 \iff \sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 \iff \sigma^2 + \omega^2 < 1$$



La stabilità asintotica di $C(s)$ è equivalente alla stabilità asintotica di $C_d(z)$.