Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bD + k)\, x_2 = m D^2 x_1 + 2bD x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + bD + k)\, x_2 = bD x_1 + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2 + bD + k)(mD^2 x_1 + 2bD x_1 + 2k x_1 - f) =$$
$$= (bD + k)(bD x_1 + k x_1)$$

$$(mD^2 + bD + k)(mD^2 + 2bD + 2k)\, x_1 - (mD^2 + bD + k) f =$$
$$= (bD + k)^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3bm D^3 + (3km + 2b^2) D^2 + 4bk D + 2k^2)\, x_1$$
$$- (b^2 D^2 + 2bk D + k^2)\, x_1 = (mD^2 + bD + k) f$$

1

$$\boxed{\begin{aligned} & m^2 D^4 x_1 + 3bm D^3 x_1 + (3km + b^2) D^2 x_1 + 2bk D x_1 + k^2 x_1 = \\ & = m D^2 f + b D f + k f \end{aligned}}$$

2

$$\boxed{G(s) = \frac{m s^2 + b s + k}{m^2 s^4 + 3bm s^3 + (3km + b^2) s^2 + 2bk s + k^2}}$$

3.

Verifica mediante applicazione del criterio di Routh:

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & m^2 & 3km+b^2 & k^2 \\
3 & 3\cancel{b}m & 2\cancel{b}k & 0 \\
2 & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & 0 \\
1 & \gamma_{3,1} & 0 & \\
0 & \gamma_{2,2} & &
\end{array}
$$

$$\gamma_{2,1} = 3m \cdot (3km + b^2) - 2km^2 = 9km^2 + 3b^2m - 2km^2$$
$$= 7km^2 + 3b^2m > 0 \quad \forall\, b, k, m > 0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{2,2} = 3m \cdot k^2 = 3k^2m$$

$$\gamma_{3,1} = \gamma_{2,1} \cdot 2k - \gamma_{2,2} \cdot 3m = 2k(7km^2 + 3b^2m) - 3k^2m \cdot 3m =$$
$$= 14k^2m^2 + 6b^2km - 9k^2m^2 = 5k^2m^2 + 6b^2km > 0 \quad \forall\, b, k, m > 0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{22} > 0 \quad \forall\, b, k, m > 0 \quad \text{ok!}$$

Tutte permanenze di segno nella prima colonna:
Σ è asintoticamente stabile.

3.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2s^2+1}{s^2+3s+2} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) =$$

$$= \frac{2s^2+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{s+1}{s^2} = \frac{2s^2+1}{s^2(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left. \frac{2s^2+1}{s+2} \right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left. \frac{2s^2+1}{s^2} \right|_{s=-2} = \frac{9}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 2, \quad K_{12} = 2 - K_2 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot e^{-2t}$$

4.

$$a_2\, y(k) + a_1\, y(k-1) + a_0\, y(k-2) =$$

$$= b_2\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_0\, u(k-2)$$

$$a_2\, Y(z) + a_1 \left\{ z^{-1} Y(z) + y_{-1} \right\} + a_0 \left\{ z^{-2} Y(z) + y_{-2} + y_{-1} z^{-1} \right\} =$$

$$= b_2\, U(z) + b_1 \left\{ z^{-1} U(z) + u_{-1} \right\} + b_0 \left\{ z^{-2} U(z) + u_{-2} + u_{-1} z^{-1} \right\}$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 \left(z Y + y_{-1} z^2 \right) + a_0 \left(Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z \right) =$$

$$= b_2 z^2 U + b_1 \left(z U + u_{-1} z^2 \right) + b_0 \left(U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z \right)$$

$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$

$$= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{C(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$C(z) \triangleq c_2 z^2 + c_1 z$$

$$c_2 \triangleq b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$

$$c_1 \triangleq b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

5.

$\boxed{1.}$ $$L(j\omega) = 10\,\frac{1+10j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$\arg L(j\omega) = \operatorname{arctg} 10\omega - \operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{3}$$

per ω piccolo $\arg L(j\omega) \simeq 10\omega - \omega - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = \frac{49}{6}\omega$,

quindi per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) > 0$.

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -\pi, \quad |L(j\omega)| \to 0$

$L(j0) = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$

Calcolo intersezioni: $1+\eta L(s) = 0$ abbia radici pur. im.

$$1 + \eta \cdot 10\,\frac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0, \quad K := 10\eta$$

$$1 + K\,\frac{1+10s}{(s^2+3s+2)(s+3)} = 0, \quad s^3+6s^2+(11+10K)s+6+K = 0$$

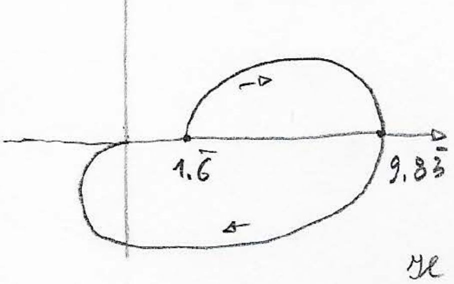
$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 11+10K & 0 \\ 2 & 6 & 6+K & 0 \\ 1 & 60+59K & 0 & \end{array}$$

Si impone $60+59K=0$, $K = -\frac{60}{59}$. Per questo valore l'eq. ausiliaria $6s^2+6+K=0$ ammette radici pur. im.

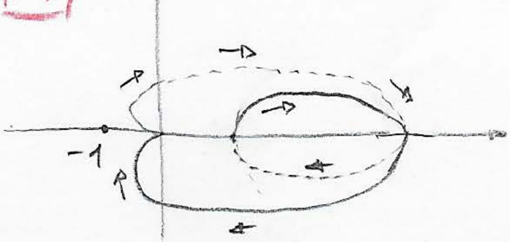
$$\eta = \frac{K}{10} = -\frac{6}{59}$$

Da $1+\eta L(j\omega) = 0$ segue $L(j\omega) = -\frac{1}{\eta} = \frac{59}{6} = 9.8\bar{3}$

d. polare



$\boxed{2.}$ d. polare completo



Il diagramma polare completo non tocca né circonda -1 e $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

6.
1) L'eq. caratteristica è

$$1+K\frac{1}{s(s+4)^3}=0 \qquad K>0.$$

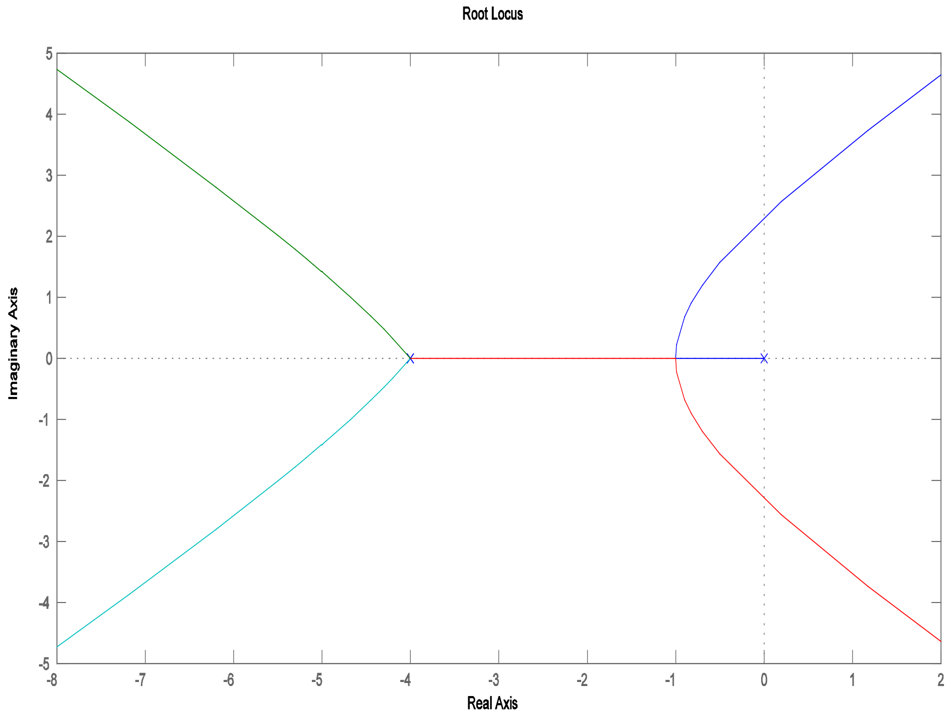
Il luogo è composto da quattro rami convergenti a quattro asintototi rettilinei con angoli rispetto all'asse reale di $+\frac{\pi}{4},+\frac{3}{4}\pi,-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{4}$. Il centro degli asintoti è dato da

$$\sigma_a=\frac{0-4-4-4}{4}=-3$$

Il segmento dell'asse reale fra -3 e 0 appartiene al luogo ed in un suo punto interno si rivela una radice doppia determinabile risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s}+\frac{3}{s+4}=0 \qquad \text{radice doppia in } s=-1$$

Il luogo è riportato in figura:



2) L'equazione caratteristica in forma polinomiale è

$$s(s+4)^3+K=0$$

$$s^4+12s^3+48s^2+64s+K=0$$

La tabella di Routh associata è

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 48 & K \\
3 & 12 & 64 & 0 \\
2 & 128 & 3K & 0 \\
1 & 2048-9K & 0 & \\
0 & 3K & &
\end{array}$$

Considerato che $K>0$, l'applicazione del Criterio di Routh impone $2048-9K>0$. Quindi l'insieme dei valori positivi di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile è

$$K\in(0,\frac{2048}{9})\simeq(0,\ 227{,}56)$$

3) Dalla tabella di Routh si deduce l'equazione ausiliaria in corrispondenza del valore limite di K ($= 2048/9$):

$$128s^2 + 3\cdot\frac{2048}{9} = 0$$

Le radici di questa equazione sono $s = \pm j\frac{4}{\sqrt{3}} \simeq \pm j2,309$. Quindi le intersezioni del luogo avvengono in $\pm j2,309$.

7.

b. $C(s) = k\,\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

$L(0) = \dfrac{k}{10}$ $\qquad K_p = L(0) = 19$

$k = 190$ $\qquad$ impongo $-\dfrac{1}{\tau} = -2$ (CANCELLAZIONE POLO-ZERO)

$$\tau = \frac{1}{2}$$

$$L(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s}\cdot\frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{\cancel{s+2}}{(\alpha s+2)}\cdot\frac{1900}{(\cancel{s+2})(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{1900}{(\alpha s+2)(s+5)(s+10)}$$

$L(s;\alpha) + \frac{1}{2} = 0$ abbia radici pur. immaginarie

$$3800 + (\alpha s+2)(s^2+15s+50) = 0$$

$$\alpha s^3 + (15\alpha + 2) s^2 + (50\alpha + 30) s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \alpha & 50\alpha + 30 \\
2 & 15\alpha + 2 & 3900 \\
1 & f(\alpha) &
\end{array}$$

$$f(\alpha) = (15\alpha + 2)(50\alpha + 30) - 3900\alpha =$$

$$= 100\alpha + 60 + 750\alpha^2 + 450\alpha - 3900\alpha =$$

$$= 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{+1675 \pm \sqrt{1675^2 - 60 \cdot 750}}{750} = \frac{1675 \pm \sqrt{2'760'625}}{750}$$

$$= \frac{1675 \pm 1661{,}5123}{750} = \begin{cases} 4{,}4487 & \text{da SCARTARE} \\ 0{,}0180 & [0{,}0179828\ldots] \end{cases}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha = 0{,}0180$$

$$C(s) = 180 \, \frac{1 + \frac{1}{2} s}{1 + 0{,}0180 \cdot \frac{1}{2} s}$$

Calcolo di F :

$$T_{zy}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$T_{zy}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{19}{1+19} = 1 \qquad \boxed{F = \frac{20}{19} = 1{,}0526}$$

8.

a) $H(z) = \dfrac{z^2 - z - 1}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$, quindi l'equazione alle differenze è

$$y(k) - \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{1}{2}y(k-2) = u(k) - u(k-1) - u(k-2)$$

b)

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2 - z - 1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z^2 - z - 1)}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y \cdot z^{-1} = \frac{z^2 - z - 1}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_{1,1}}{(z-1)^3} + \frac{c_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{c_{1,3}}{z-1} + \frac{c_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}}{(z-1)^3} + \frac{\frac{10}{9}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{2}{27}}{z-1} + \frac{\frac{2}{27}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y = -\frac{2}{3}\frac{z}{(z-1)^3} + \frac{10}{9}\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2}{27}\frac{z}{z-1} + \frac{2}{27}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(k) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{10}{9}k - \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k \geq 0$$

$$y(k) = -\frac{1}{3}k^2 + \frac{13}{9}k - \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k \geq 0$$