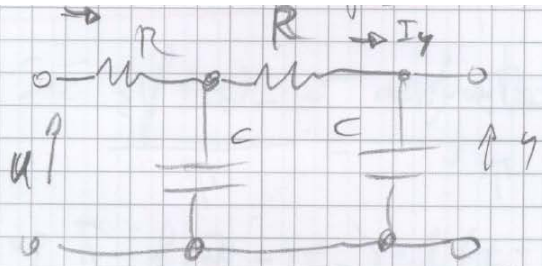
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.



$$Z_{t} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot\frac{U}{R+\frac{\frac{1}{sC}\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}\,U}{R^2+\frac{2R}{sC}+\frac{R}{sC}+\frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1+3R(sC)+R^2(sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2s^2+3RCs+1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: assenti

poli $T := RC$ $\quad T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} =$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5}\cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

$$\text{modi} = \left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T}\cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $(T := RC)$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

Errata corrige: segnalo una svista nel calcolo dei poli. I due poli reali individuati vanno divisi per 2. Conseguentemente i due modi vanno corretti nei loro esponenti.

3.

$$Y(s)=\frac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}.$$

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^3}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2}+\frac{E}{s+1}$$

$$A=\left.\frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{4}$$

$$B=\left.\frac{s-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=-2$$

$$E=\left.\frac{s-2}{s(s+2)^3}\right|_{s=-1}=3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A+D+E=0\Rightarrow D=-\frac{11}{4}$$

$$C=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)}\right]\right|_{s=-2}=-\frac{5}{2}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t)=A+B\frac{1}{2}t^2e^{-2t}+Cte^{-2t}+De^{-2t}+Ee^{-t}\quad \text{per}\ \ t\geq 0$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}-t^2e^{-2t}-\frac{5}{2}te^{-2t}-\frac{11}{4}e^{-2t}+3e^{-t}\quad \text{per}\ \ t\geq 0$$

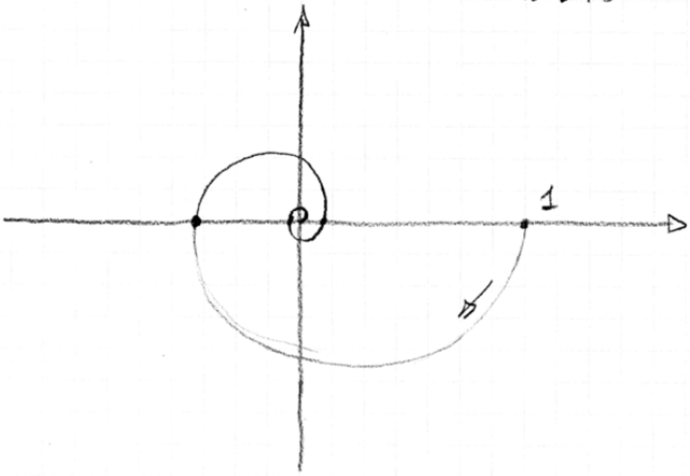
Il segnale in ingresso è discontinuo e $\rho=3\geq 1$, quindi $y(t)\in\overline{C^{\rho-1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 2.

4.

a) $L(s) = \dfrac{1}{(1+s)^8}$ $\qquad L(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)^8}$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2)^4}$$

$\arg L(j\omega) = -8 \,\mathrm{arctg}\, \omega \qquad \lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -4\pi$



$\arg L(j\omega_1) = -\pi \qquad -8\,\mathrm{arctg}\,\omega_1 = -\pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega_1 = \dfrac{\pi}{8}$

$\omega_1 = 0{,}4142 \qquad |L(j\omega_1)| = 0{,}5308\,, \; L(j\omega_1) = -0{,}5308$

$\arg L(j\omega_2) = -2\pi \qquad -8\,\mathrm{arctg}\,\omega_2 = -2\pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$\omega_2 = 1 \qquad |L(j\omega_2)| = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625\,, \; L(j\omega_2) = 0{,}0625$

$\arg L(j\omega_3) = -3\pi \qquad -8\,\mathrm{arctg}\,\omega_3 = -3\pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega_3 = \dfrac{3}{8}\pi$

$\omega_3 = 2{,}4142 \qquad |L(j\omega_3)| = 0{,}0004599$

$L(j\omega_3) = -0{,}0004593$

b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1 e quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile ($L(s)$ non ha poli a parte reale positiva).

5.
Vedi appunti dell'insegnamento

6.
Si nota che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}[-5 - 5 - (1 + 1)] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

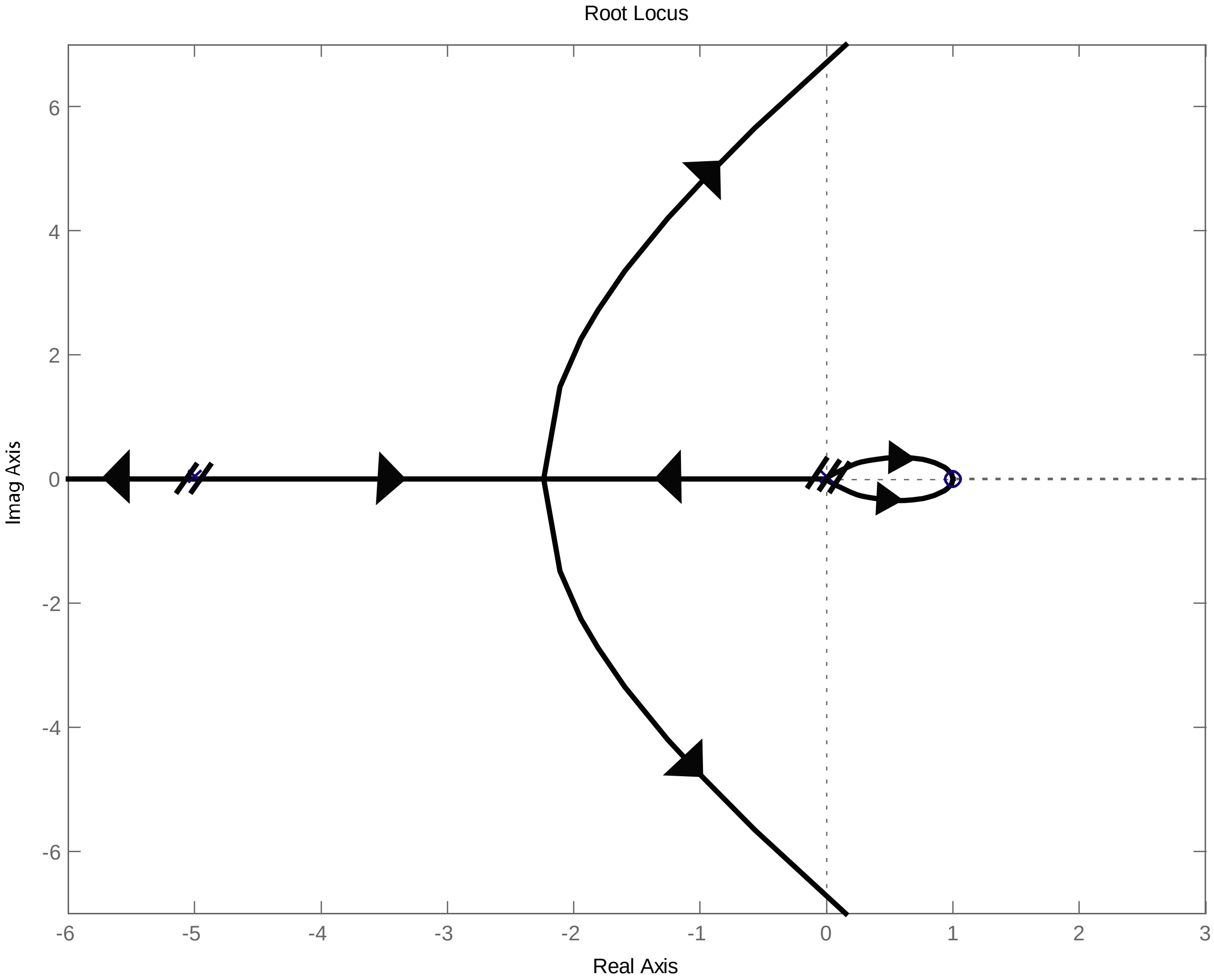
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



7.
Scelta una funzione propria del secondo ordine per il controllore *C(s)* del tipo

$$C(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)}$$

in modo che sia rispettata la specifica sull'errore a regime in risposta al gradino, il guadagno di anello risulta:

$$F(s) := \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Dalla specifica su K_v si ricava

$$K_v = \lim_{s \to 0} sF(s) = \frac{d}{a} = 10.$$

Considerando l'equazione caratteristica:

$$1 + \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = 0$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$s^4 + (a-2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d.$$

Il polinomio caratteristico desiderato può essere scelto come

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e) =$$
$$s^4 + (s+e)s^3 + (9e+20)s^2 + (20e+12)s + 12e$$

Dal principio di identità dei polinomi e dalla specifica su K_v si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a-2 = 9+e \\ 1-2a+b = 9e+20 \\ a+c = 20e+12 \\ d = 12e \\ \dfrac{d}{a} = 10 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = 66 \\ b = 646 \\ c = 1046 \\ d = 660 \\ e = 55 \end{cases}$$

Si noti che il valore trovato per e fissa un ulteriore polo del sistema retroazionato in –55 e questo garantisce il rispetto della specifica sui poli dominanti.
Il controllore trovato è quindi:

$$C(s) = \frac{646s^2 + 1046s + 660}{s(s+66)}$$

8.

$$\mathcal{Z}\left[k \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 + z + \frac{1}{4}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)^2}$$

$$Y_1(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = \frac{3^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$$

$$c_{12} + c_{22} = 0$$

$$C_{12} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right]_{|z=1} =$$

$$= \frac{2(z+2)(z+\frac{1}{2})^2 - (z+2)^2 2(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^4}\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (3)^2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\frac{3^2}{2^2} - 3^2\cdot 3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{3^3}{2} - 3^3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2^4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{2^{\cancel{4}\,3}}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$C_{22} = -C_{12} = \frac{8}{3}$$

$$Y(z) = 4\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$Y(k) = 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4k - \frac{8}{3} - 2k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$