Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

1) $L(s) = \dfrac{10(s-1)}{s^2(s+10)} = \dfrac{-10(1-s)}{s^2 \cdot 10 \cdot (1+0{,}1s)} = -\dfrac{1-s}{s^2(1+0{,}1s)}$

$$L(j\omega) = -\frac{1-j\omega}{(j\omega)^2(1+0{,}1j\omega)} = \frac{1-j\omega}{\omega^2 \cdot (1+0{,}1j\omega)}$$

$$\arg L(j\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega) - \operatorname{arctg}(0{,}1\omega)$$

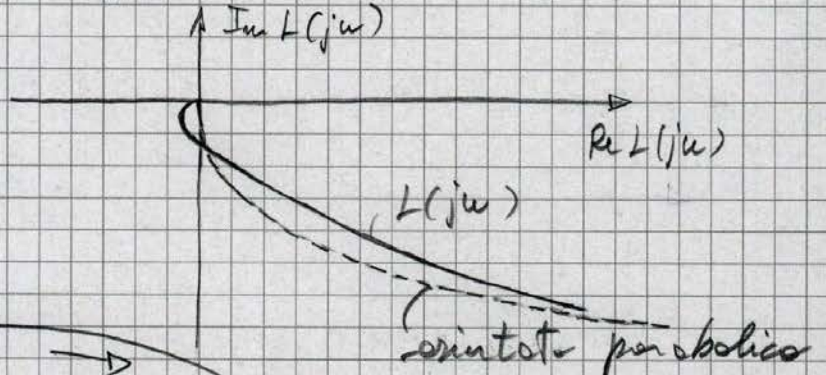
$\omega \to +\infty \qquad |L(j\omega)| \to 0, \quad \arg L(j\omega) \to -\pi$

$\omega \to 0^+ \qquad L(j\omega) \to K\dfrac{1+j\omega\tau_\Sigma}{(j\omega)^2} = -\dfrac{K}{\omega^2} - j\dfrac{K\tau_\Sigma}{\omega}$

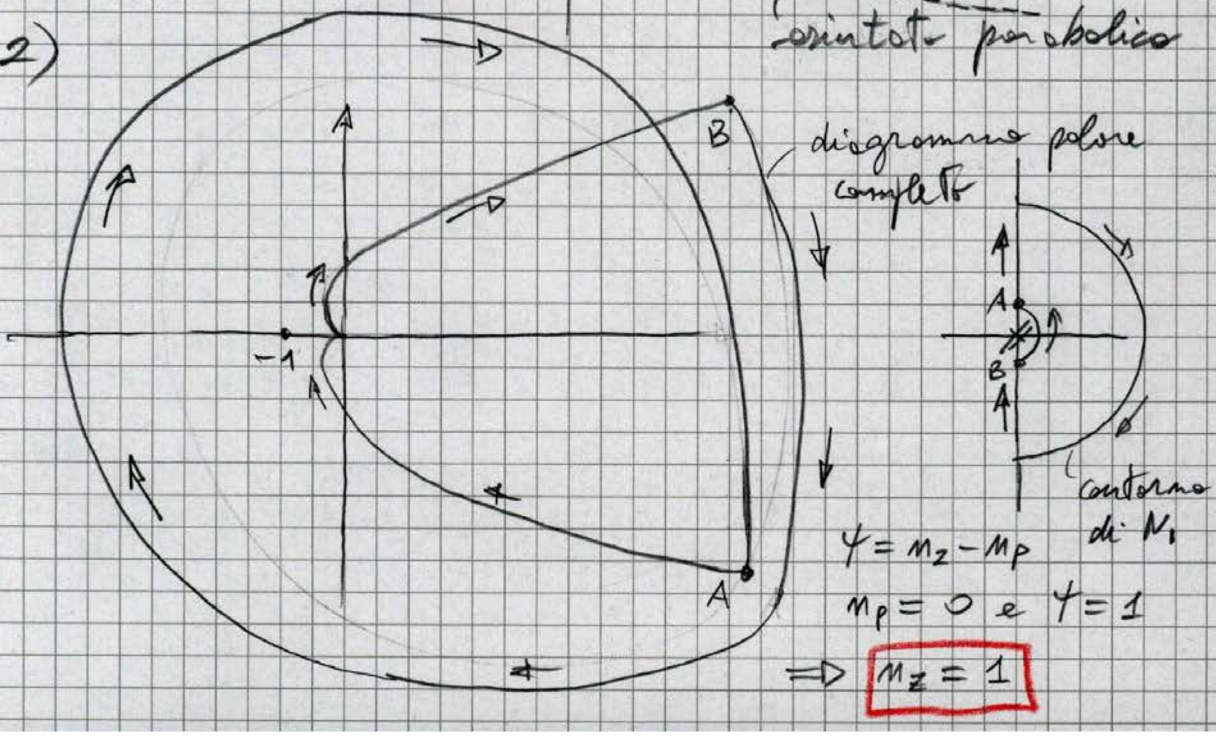
$K = -1$

$\tau_\Sigma = -1 - 0{,}1 = -1{,}1$

$L(j\omega) \to \dfrac{1}{\omega^2} - j\dfrac{1{,}1}{\omega}$



2)

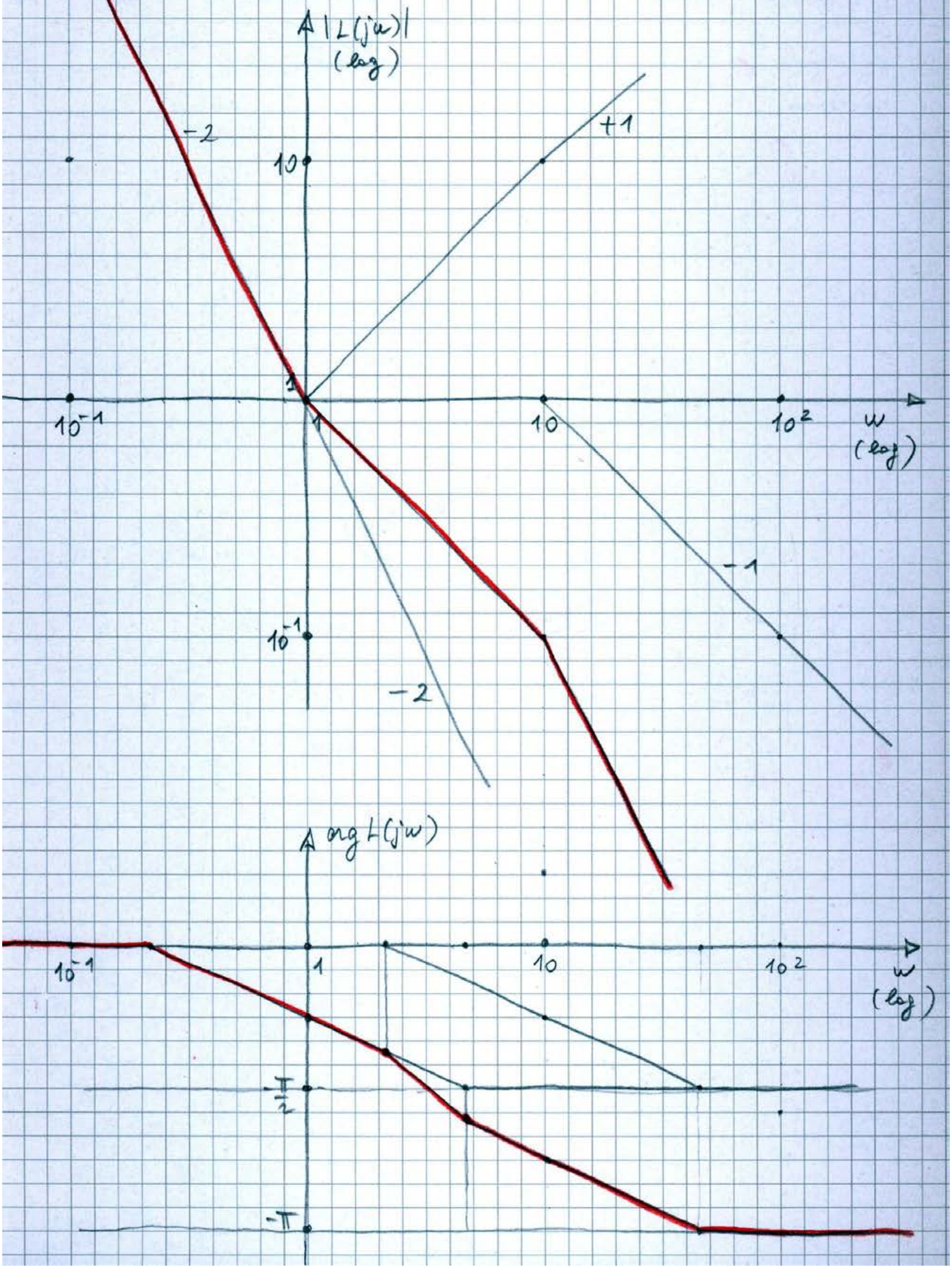


$\psi = n_z - n_p$

$n_p = 0$ e $\psi = 1$

$\Rightarrow \boxed{n_z = 1}$

3) $L(j\omega) = -\dfrac{1-j\omega}{(j\omega)^2(1+0{,}1j\omega)} = (-1)\dfrac{1-j\omega}{(j\omega)^2(1+0.1j\omega)}$



3.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + k\frac{s\left(s^2 + 1\right)}{\left(s^2 + 4\right)(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^4 + (3+k)s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8 = 0$$

I valori di k per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che che garantiscono la positività della prima colonna della tabella di Routh associata all'equazione caratteristica.

4	1 8	6
3	3+k 0	12+k
2	α(k) 0	24+8k
1	β(k)	0
0	24+8k	

$$\alpha\left(k\right) = 6\left(3+k\right) - 12 - k = 5k + 6$$
$$\beta\left(k\right) = \left(5k+6\right)\left(12+k\right) - \left(3+k\right)\left(24+8k\right) = -3k^2 + 18k$$

Il sistema di disequazioni risultante ha come soluzione $0 < k < 6$.

2) Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = +j$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = +2j$ con molteplicità 1

Essendo $n - m = 1$ il luogo presenta un asintoto.

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- Angolo di partenza del luogo dal polo +2j:

$\{\text{angolo di p. da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$

$\{\text{angolo di p. dal polo +2j}\} = \pi + \left[\arg(2j) + \arg(2j + j) + \arg(2j - j)\right] +$

$-\left[\arg(2j + 2j) + \arg(2j + 1) + \arg(2j + 2)\right] =$

$\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + arctg(2) + arctg(1)\right) = -108.43°$

- Angolo di arrivo del luogo sullo zero 2j:

  $\{\text{angolo di a. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$

  $\{\text{angolo di a. sullo zero +j}\} = \pi + \left[\arg(j + 2j) + \arg(j - 2j) + \arg(j + 1) + \arg(j + 2)\right] +$

  $-\left[\arg(j + j) + \arg(j)\right] =$

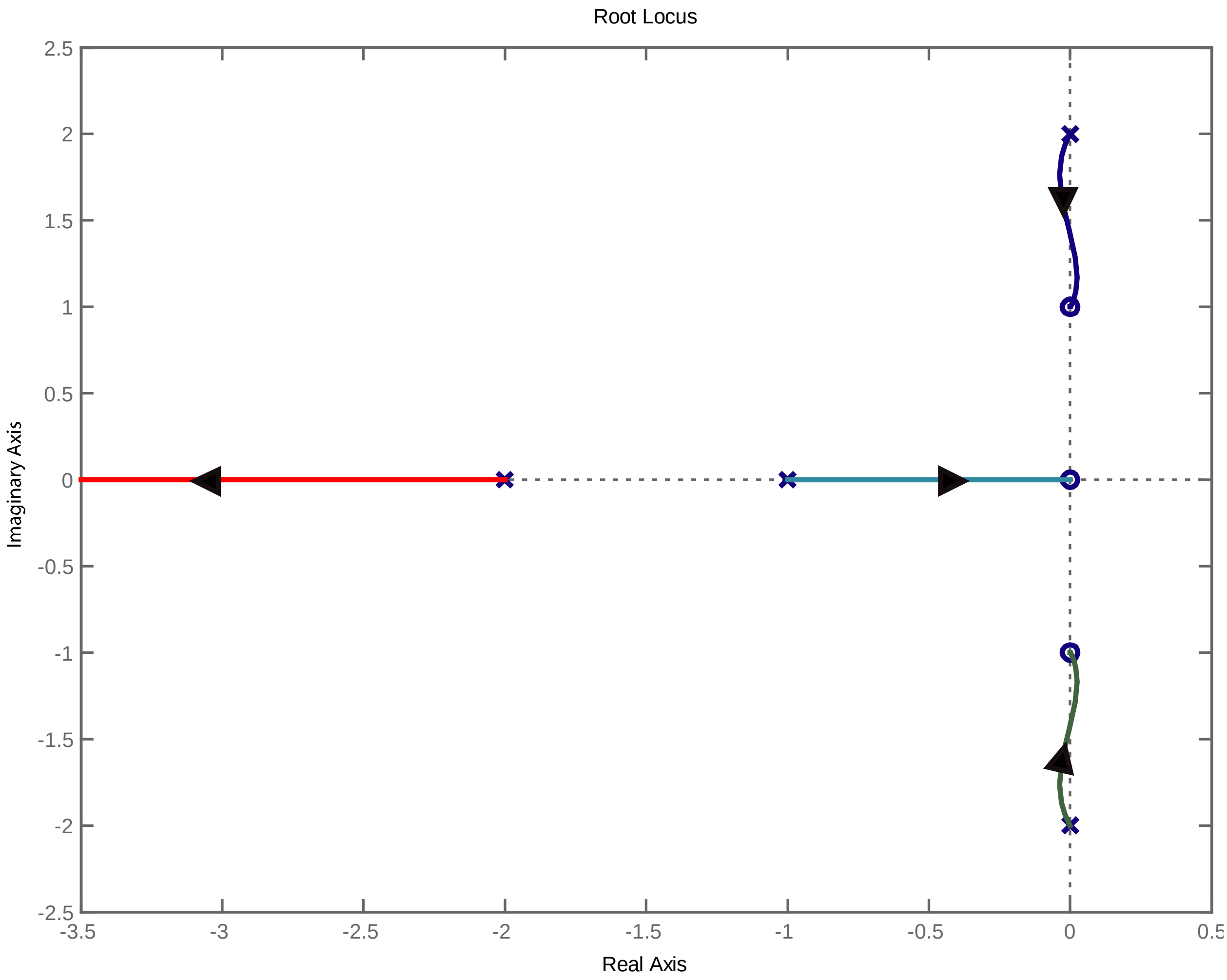
  $\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + arctg(1) + arctg(1/2)\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 71.56°$

- Intersezioni del luogo con l'asse immaginario
  Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario si possono ottenere come soluzioni dell'equazione ausiliaria associata alla tabella di Routh in 1) per k=6:

  $(5 \cdot 6 + 6)s^2 + 24 + 8 \cdot 6 = 0$

  $36s^2 + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} = \pm\, j1.41$

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



4.
Vedi dispense dell’insegnamento.

5.

5) $P(j\omega) = \dfrac{20}{(j\omega+1)(j\omega+2)^2}$

1) ω_0 soluzione di $\arg P(j\omega_0) = -\pi + M_f = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$

$$-\operatorname{arctg}\omega_0 - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{2} = -\frac{3}{4}\pi$$

$$f(\omega_0) := \operatorname{arctg}\omega_0 + 2\operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{2} = \frac{3}{4}\pi = 2.3562$$

ω_0	$f(\omega_0)$
1	1.7127
2	2.6779
1.6	2.3617
1.58	2.3438
1.59	2.3527

$\omega_0 \simeq 1.59$ rad/s

2) $\boxed{K_p} = \dfrac{1}{|P(j\omega_0)|} = \dfrac{\sqrt{1+\omega_0^2}\cdot(4+\omega_0^2)}{20} = 0.613$

$K := T_i/T_d = 4$

$\boxed{T_i} = \dfrac{\sqrt{4}}{\omega_0} = \dfrac{2}{\omega_0} = 1.26$

$\boxed{T_d} = \dfrac{1}{\sqrt{4}\cdot\omega_0} = \dfrac{1}{2\cdot\omega_0} = 0.314$

6.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0{,}5\,z^2 + 0{,}5\,z + 0{,}06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0{,}5\,z^2 + 0{,}5\,z + 0{,}06$

Si applica il criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $1 - 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}06 = 1{,}06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $1 - 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}06 = 0{,}06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0{,}06 < 1$ ok!

Tabella di Jury

1	0,06	0,5	-0,5	0	1
2	1	0	-0,5	0,5	0,06
3	-0,9964	0,03	0,47	-0,5	
4	-0,5	0,47	0,03	-0,9964	
5	0,7428	*	0,2051		

4) $|b_0| > |b_3|$ $\quad |-0{,}9964| > |-0{,}5|$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$ $\quad |0{,}7428| > |0{,}2051|$ ok!

Tutte le disuguaglianze sono soddisfatte: il sistema è asintoticamente stabile.