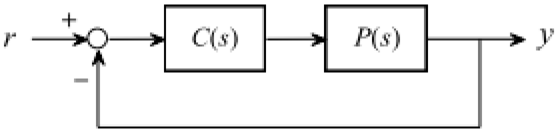
6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$.



a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$, determinando in particolare gli asintoti, le radici doppie e gli angoli di partenza del luogo.

b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

c. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ determinare l'errore a regime e_r in risposta alla rampa $r(t) = 5 \cdot t \cdot 1(t)$.

d. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ tracciare il diagramma polare associato al guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$ determinando l'asintoto verticale del diagramma. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_A del sistema retroazionato.

7

a. $1 + K \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $K>0$, poli: $0, -2 \pm j$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60°, +180°, -60°$ e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

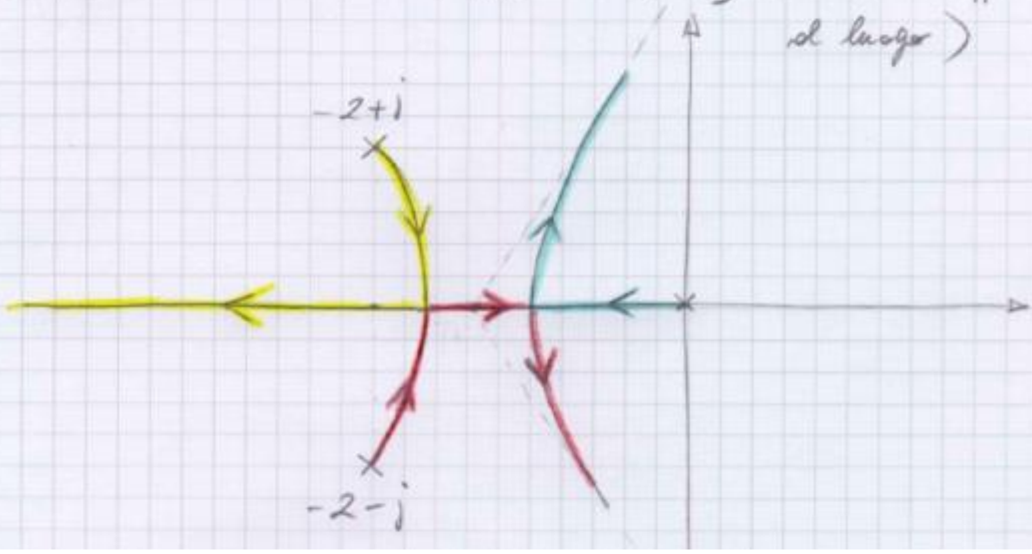
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180°$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è φ:

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \text{arctg}\, 2\right) = -\text{arctg}\, 2 = -63°{,}43$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63°{,}43$

Calcolo delle radici doppie: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2 + 8s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$\left. 1 + K^* \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} \right|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 2$$

c. $e_r = \frac{5}{K_r}$, $K_r = \lim_{s \to 0} s \frac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \frac{2}{5}$

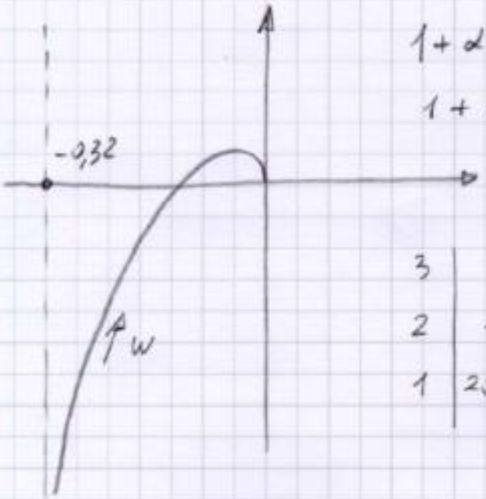
$$e_r = \frac{25}{2} = 12,5$$

d. $L(s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s\left(1 + \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5}\right)}$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(j\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{5} + j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0{,}32$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1 + \alpha L(s) = 0$ abbia radici puram. immaginarie

$$1 + \alpha \cdot \frac{2}{s[(s+2)^2+1]} = 0 \quad , \quad \beta \triangleq 2\alpha$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + \beta = 0$$

3	1	5	0	$20-\beta=0 \quad \beta=20$
2	4	β	0	$\Rightarrow \alpha = 10$
1	$20-\beta$	0		Intersezione in $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow M_A = 10$$

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica

$$1 + K_1 \frac{s-1}{(s+1)^3 (s+2)^2} = 0$$

per $K_1 \in [0, +\infty)$. In particolare si determinino gli asintoti e si dimostri che non esistono radici doppie sul luogo.

La configurazione dei poli e zeri è la seguente:

- uno zero per $s = 1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 2

Essendo $n - m = 4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1) = -2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi$; $\theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$
- le radici doppie, se esistono, sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione

  $$\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$$

  cioè

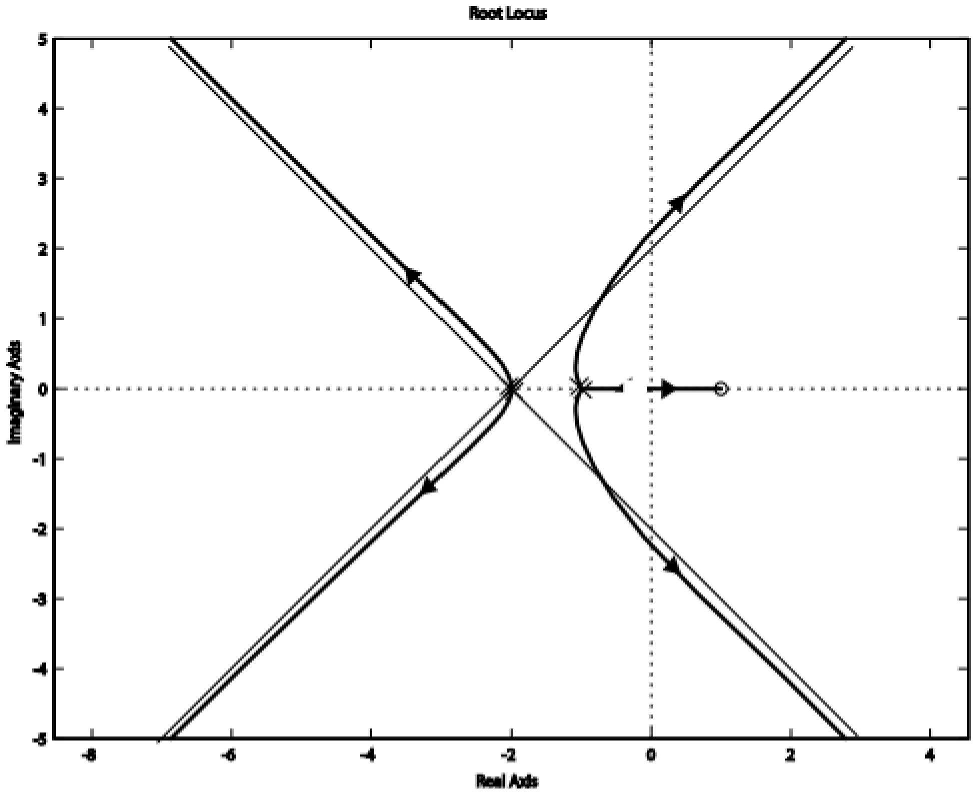
  $$4s^2 - 10 = 0$$

  e risultano essere

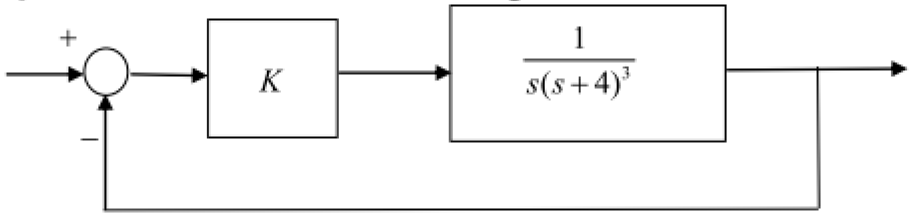
  $s_1 = -\sqrt{5/2} \cong -1,58$; $s_2 = \sqrt{5/2} \cong 1,58$.

  Queste soluzioni non appartengono al luogo delle radici e quindi non esistono radici doppie sul luogo.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



6. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $K \in \mathbb{R}_+$.

1) Determinare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K \in (0, +\infty)$ determinando in particolare asintoti e radici doppie.
2) Determinare l'insieme dei valori $K \in \mathbb{R}_+$ per i quali sussiste la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
3) Relativamente al luogo delle radici di cui al punto 1) determinare l'intersezione del luogo con l'asse immaginario.

3. Angoli di partenza del luogo.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K \in \mathbb{R}} G_S(K)$.

6.
1) L'eq. caratteristica è

$$1 + K\frac{1}{s(s+4)^3} = 0 \qquad K > 0.$$

Il luogo è composto da quattro rami convergenti a quattro asintototi rettilinei con angoli rispetto all'asse reale di $+\frac{\pi}{4}, +\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}$. Il centro degli asintoti è dato da

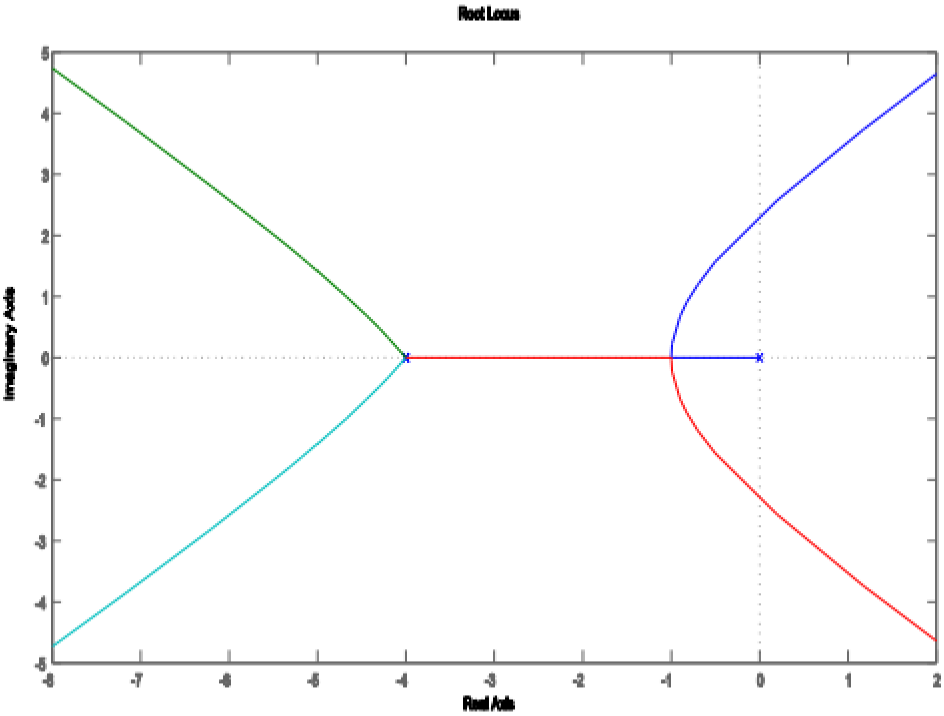
$$\sigma_a = \frac{0-4-4-4}{4} = -3$$

Il segmento dell'asse reale fra -3 e 0 appartiene al luogo ed in un suo punto interno si rivela una radice doppia determinabile risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s} + \frac{3}{s+4} = 0 \qquad \text{radice doppia in } s = -1$$

Il luogo è riportato in figura:

Angolo di partenza dal polo in 0: $+180°$
Angolo di partenza dal polo triplo in -4: $0°$, $+120°$, $-120°$



2) L'equazione caratteristica in forma polinomiale è

$$s(s+4)^3 + K = 0$$

$$s^4 + 12s^3 + 48s^2 + 64s + K = 0$$

La tabella di Routh associata è

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 48 & K \\ 3 & 12 & 64 & 0 \\ 2 & 128 & 3K & 0 \\ 1 & 2048-9K & 0 & \\ 0 & 3K & & \end{array}$$

Considerato che $K > 0$, l'applicazione del Criterio di Routh impone $2048 - 9K > 0$. Quindi l'insieme dei valori positivi di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile è

$$K \in (0, \frac{2048}{9}) \simeq (0,\ 227{,}56)$$

3) Dalla tabella di Routh si deduce l'equazione ausiliaria in corrispondenza del valore limite di K ($= 2048/9$):

$$128s^2 + 3 \cdot \frac{2048}{9} = 0$$

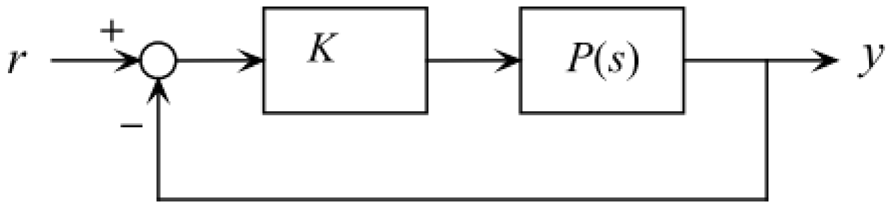
Le radici di questa equazione sono $s = \pm j\frac{4}{\sqrt{3}} \simeq \pm j2{,}309$. Quindi le intersezioni del luogo avvengono in $\pm j2{,}309$.

c) Grado di stabilità massimo nella radice doppia $s = -1$:

$$1 + K^* \left. \frac{1}{s\,(s+4)^3} \right|_{s=-1} = 0 \;\Rightarrow\; K^* = 27$$

Questo è un po nyquist un po radici

4[punti 7] Sia dato il sistema in retroazione di figura

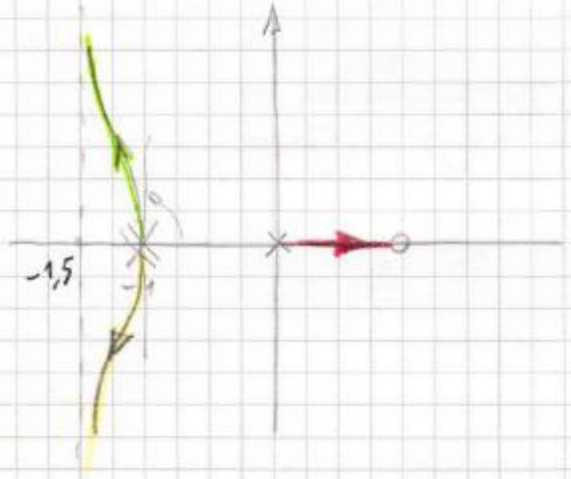


dove $P(s) = \dfrac{s-1}{s(s+1)^2}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare gli asintoti, gli angoli di partenza del luogo e le eventuali radici doppie.

b. Posto $K = -10$ tracciare il diagramma polare del guadagno di anello determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale. Studiare inoltre la stabilità del sistema retroazionato applicando il criterio di Nyquist.

a) $1 + K \dfrac{s-1}{s(s+1)^2} = 0$



$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-1-1-(1)}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$p_1 = 0$

$p_2 = -1$

$p_3 = -1$

angoli di partenza $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = +90^\circ$, $\varphi_3 = -90^\circ$

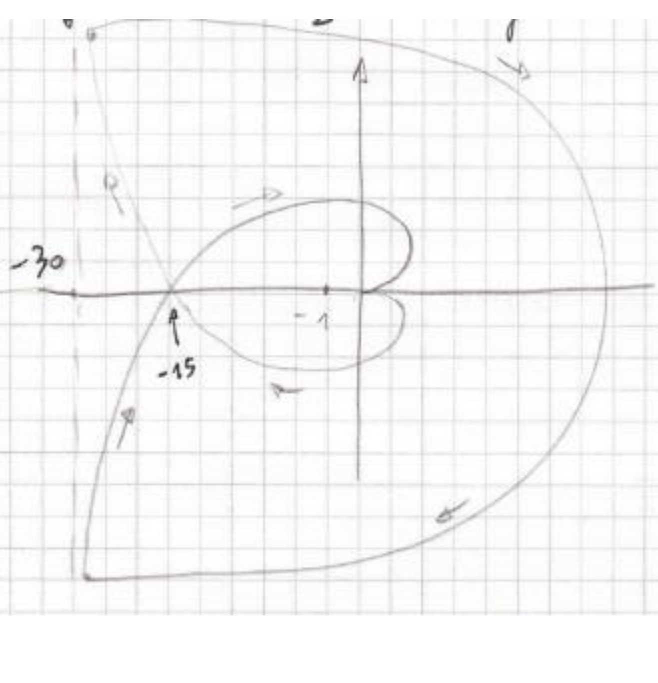
Non sono presenti radici doppie

$$L(s) = -10 \frac{s-1}{s(s+1)^2} = 10 \cdot \frac{1-s}{s(1+s)^2}$$

$$L(j\omega) = 10 \frac{1-j\omega}{(j\omega)(1+j\omega)^2}$$

$$\sigma_a = K\left(\sum_i \tau_i' - \sum_i \tau_i\right) = 10\left(-1-(1+1)\right) = 10(-3) = -30$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\,\omega = -\frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}\,\omega$$



$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}\,\omega_p = -\pi$$

$$3\,\mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{6}$$

$$\omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.5774 \ \frac{rad}{sec}$$

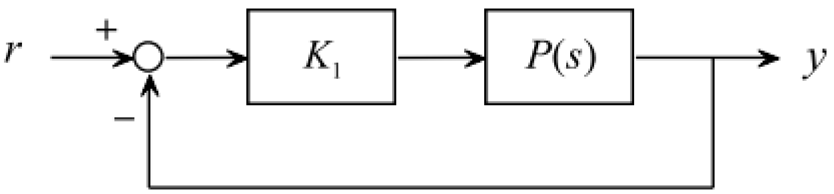
$$|L(j\omega_p)| = 10\,\frac{\sqrt{1+\omega_p^2}}{\omega_p\cdot(1+\omega_p^2)} = 10\cdot\frac{1}{\omega_p\sqrt{1+\omega_p^2}} =$$

$$= \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = 15$$

$$L(j\omega_p) = -15$$

Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1. Il criterio di Ny. richiede che -1 non venga né toccato né circondato dal d.p.c. (il numero dei poli a parte reale positiva di $L(s)$ è zero). Quindi il sistema retroazionato è instabile a causa di due poli retroazionati aventi parte reale positiva.

6. **[punti 5]** Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)}$.

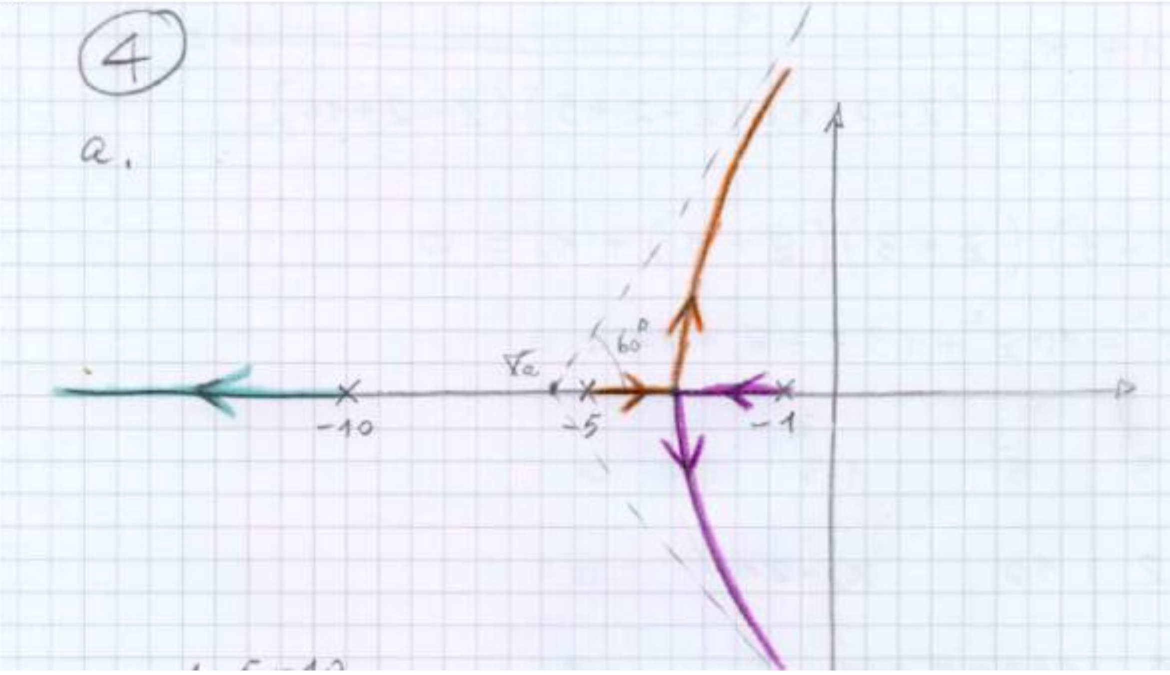
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ determinando in particolare gli asintoti e le radici doppie.

b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 2\ \mathrm{s}^{-1}$.

c. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^* = \arg\max_{K_1\in\mathbb{R}} G_s(K_1)$.

4

a.



$$\sigma_a = \frac{-1-5-10}{3} = -5,\bar{3}$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$(s+5)(s+10) + (s+1)(s+10) + (s+1)(s+5) = 0$$

$$3s^2 + 32s + 65 = 0 \implies s_{1,2} = \begin{cases} -2,7299 \\ -7,9367 \text{ (da scartare)} \end{cases}$$

b. Cambio di variabile complessa $z = s + 2$

$$s = z - 2$$

$$1 + K_1 \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)} = 0 \quad \text{eq. carat.}$$

$$1 + K_1 \cdot \frac{1}{(z-2+1)(z-2+5)(z-2+10)} = 0$$

$$(z-1)(z+3)(z+8)+K_1=0$$

$$z^3+10z^2+13z+K_1-24=0$$

3	1	13	0
2	10	K_1-24	0
1	$130-K_1+24$	0	0
0	K_1-24		

$$\begin{cases} 154-K_1>0 & K_1<154 \\ K_1-24>0 & K_1>24 \end{cases}$$

Quindi $K_1 \in [24, 154]$

c.

$$1+K_1 G_1(s)=0$$

$$K_1^* \ni \quad 1+K_1^* G_1(-2{,}7299)=0$$

$$K_1^* = -\frac{1}{G_1(-2{,}7299)} =$$

$$= -(s+1)(s+5)(s+10)\Big|_{s=-2{,}7299} = 28{,}55$$

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+K\frac{1-s}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad , \quad K\in[0,+\infty)$$

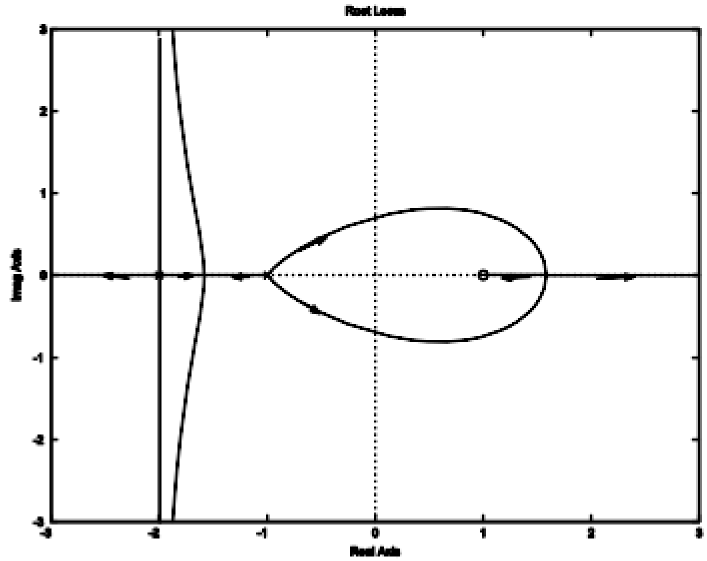
determinando in particolare asintoti e radici doppie.

L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 4 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-(+1)}{5-1}=-2$$



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

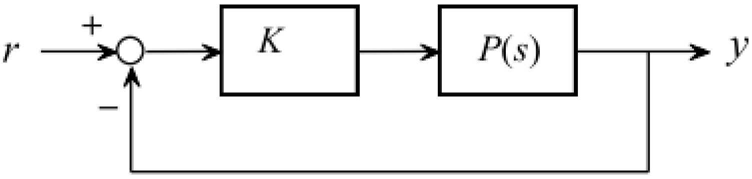
$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$4s^2-10=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5/2}=\pm1,5811$$

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K \in \mathbb{R}} G_S(K)$.

4. Eq. caratteristica $1 + K \dfrac{1}{s(s+2)^3} = 0$

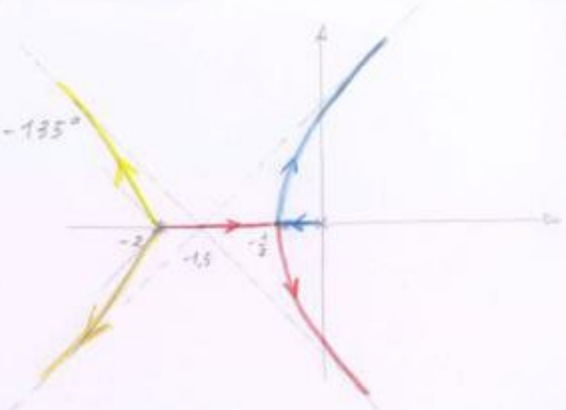
a) Asintoti del luogo: $\sigma_a = \dfrac{0-2-2-2}{4} = -1{,}5$

$\theta_{1,a} = +45°$, $\theta_{2,a} = +135°$, $\theta_{3,a} = -45°$, $\theta_{4,a} = -135°$

Radici doppie: $3\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s} = 0 \Rightarrow s = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

Angoli di partenza: da $p_1 = 0$ $\theta_1 = 180°$

da $p_2 = -2$ $\theta_{2,1} = 0°$, $\theta_{2,2} = +120°$, $\theta_{2,3} = -120°$



b) $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 8s + K = 0$

4	1	12	K
3	$\cancel{6}\ 3$	$\cancel{8}\ 4$	0
2	32	3K	0
1	128−9K	0	
0	3K		

$\begin{cases} 128 - 9K > 0 \\ 3K > 0 \end{cases}$

$K \in \left(0, \dfrac{128}{9}\right) = (0, 14{,}\bar{2})$

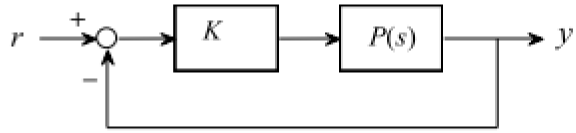
eq. ausiliaria per $K = \dfrac{128}{9}$: $32s^2 + 3\dfrac{128}{9} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\dfrac{4}{3}} \simeq \pm j\,1{,}1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j\,1{,}1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1 + K^* P(-\tfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 1 + K^* \dfrac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3} = 0 \Rightarrow K^* = \dfrac{27}{16} = 1{,}6875.$

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

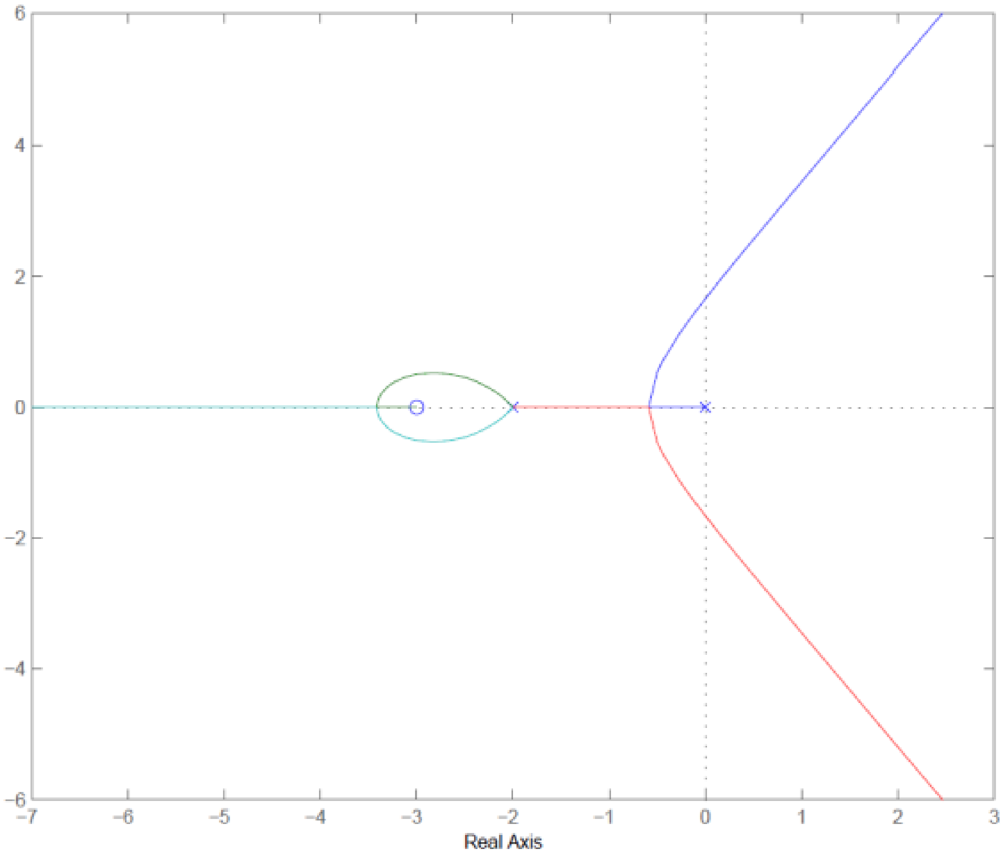
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s; K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s; K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

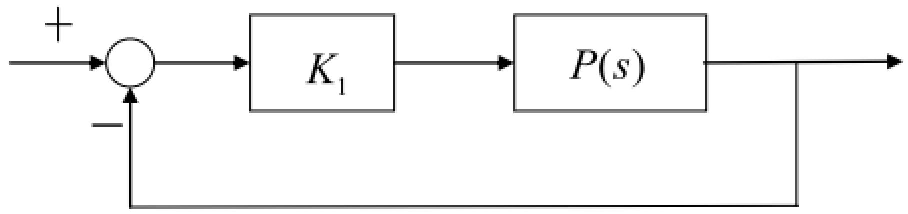
c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura:



dove K_1 è un parametro reale e $P(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}$.

1. Determinare l'insieme dei valori di K_1 per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K_1 \in (0, +\infty)$. Determinare in particolare gli asintoti del luogo e le intersezioni del luogo con l'asse immaginario del piano complesso.

4.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K_1\frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}=0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4+12s^3+32s^2+K_1s+K_1=0$$

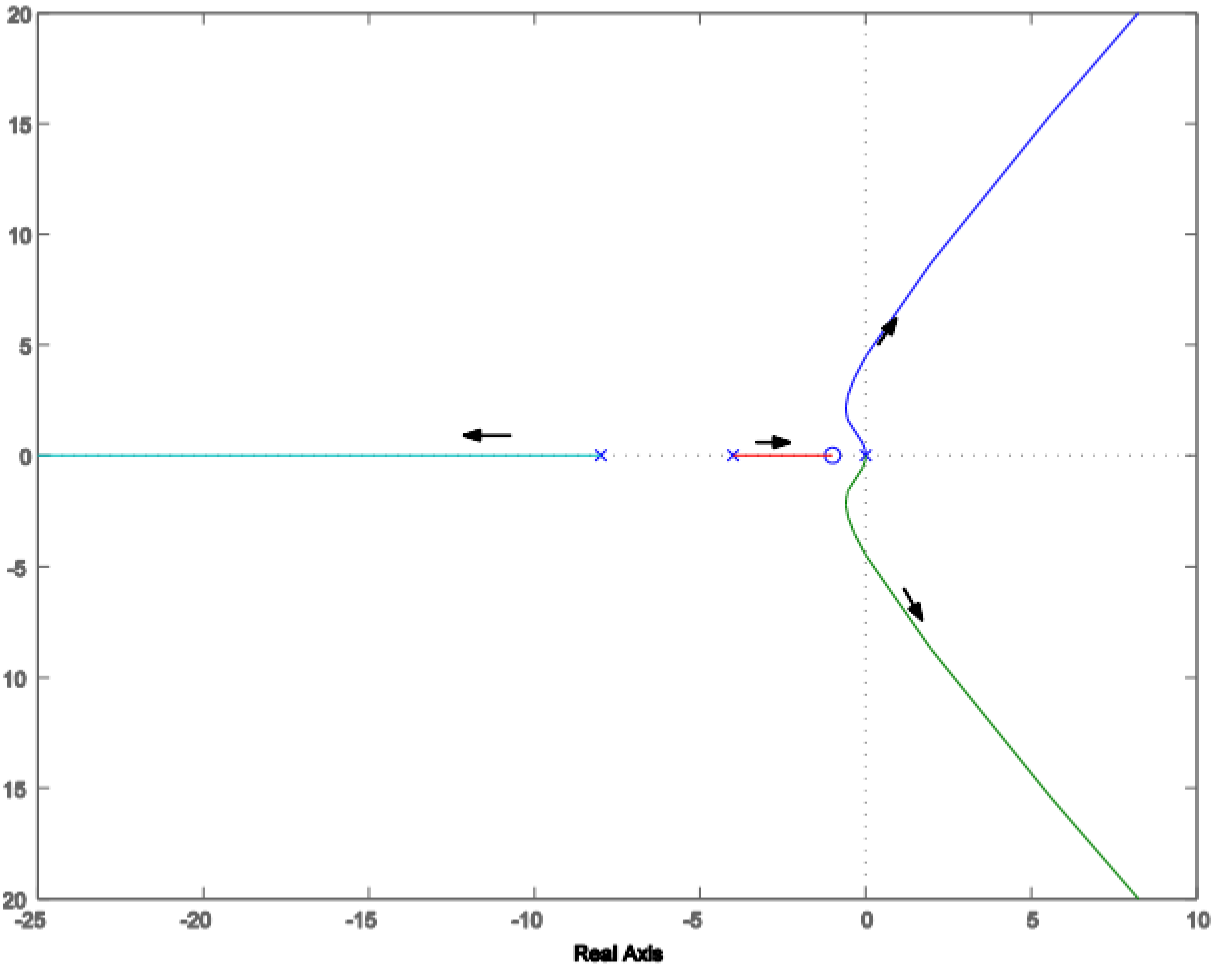
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384-K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240-K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1\in(0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1}=+60°,\ \vartheta_{a,2}=+180°,\ \vartheta_{a,3}=-60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a=\frac{-4-8-(-1)}{3}=-\frac{11}{3}\cong-3,67$$

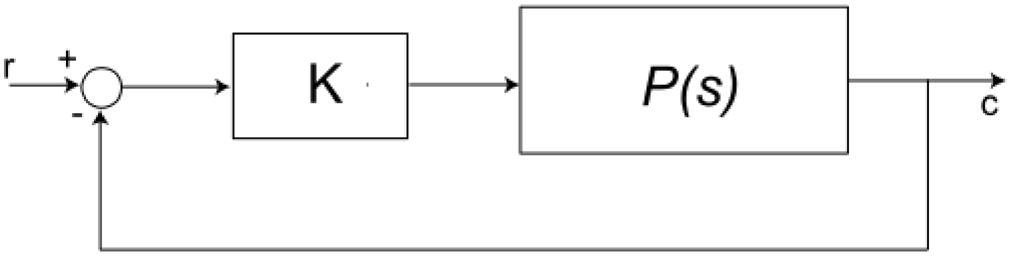


Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2 + 12\cdot 240 = 0$$
$$s^2 + 20 = 0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s = \pm j\sqrt{20} \cong \pm j4,47$.

4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{s(s^2+1)}{(s^2+4)(s+1)(s+2)}$

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K \in [0,+\infty)$. Si determini l'angolo di partenza dal polo $+2j$ e l'angolo di arrivo sullo zero $+j$. Infine si determinino le eventuali intersezioni con l'asse immaginario $j\mathbb{R}$.

4.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + k\frac{s(s^2+1)}{(s^2+4)(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^4 + (3+k)s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8 = 0$$

I valori di k per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che che garantiscono la positività della prima colonna della tabella di Routh associata all'equazione caratteristica.

4	1	6
	8	
3	3+k	12+k
	0	
2	α(k)	24+8k
	0	
1	β(k)	0
0	24+8k	

$\alpha(k) = 6(3+k) - 12 - k = 5k + 6$
$\beta(k) = (5k+6)(12+k) - (3+k)(24+8k) = -3k^2 + 18k$

Il sistema di disequazioni risultante ha come soluzione $0 < k < 6$.

2) Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:
- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = +j$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = +2j$ con molteplicità 1

Essendo $n - m = 1$ il luogo presenta un asintoto.

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):
- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- Angolo di partenza del luogo dal polo +2j:

$$\{\text{angolo di p. da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

$$\{\text{angolo di p. dal polo +2j}\} = \pi + \left[\arg(2j) + \arg(2j+j) + \arg(2j-j)\right] +$$
$$-\left[\arg(2j+2j) + \arg(2j+1) + \arg(2j+2)\right] =$$
$$\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + arctg(2) + arctg(1)\right) = -108.43°$$

- Angolo di arrivo del luogo sullo zero 2j:

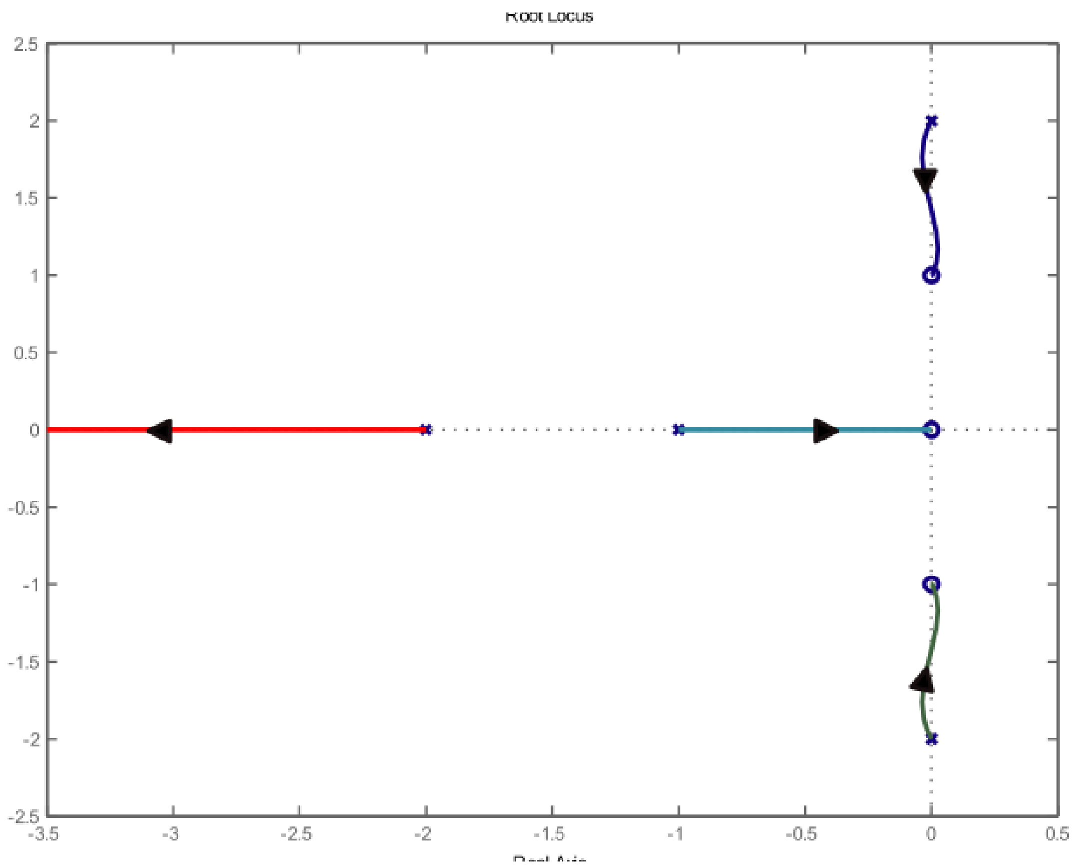
$$\{\text{angolo di a. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

$$\{\text{angolo di a. sullo zero +j}\} = \pi + \left[\arg(j+2j) + \arg(j-2j) + \arg(j+1) + \arg(j+2)\right] +$$
$$-\left[\arg(j+j) + \arg(j)\right] =$$
$$\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + arctg(1) + arctg(1/2)\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 71.56°$$

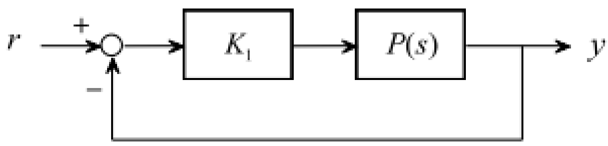
- Intersezioni del luogo con l'asse immaginario
  Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario si possono ottenere come soluzioni dell'equazione ausiliaria associata alla tabella di Routh in 1) per k=6:
  $(5 \cdot 6 + 6)s^2 + 24 + 8 \cdot 6 = 0$

  $36s^2 + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} = \pm\, j1.41$

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



6. **[punti 4,5]** Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ e $K_1 < 0$ determinando gli asintoti e le eventuali radici doppie.

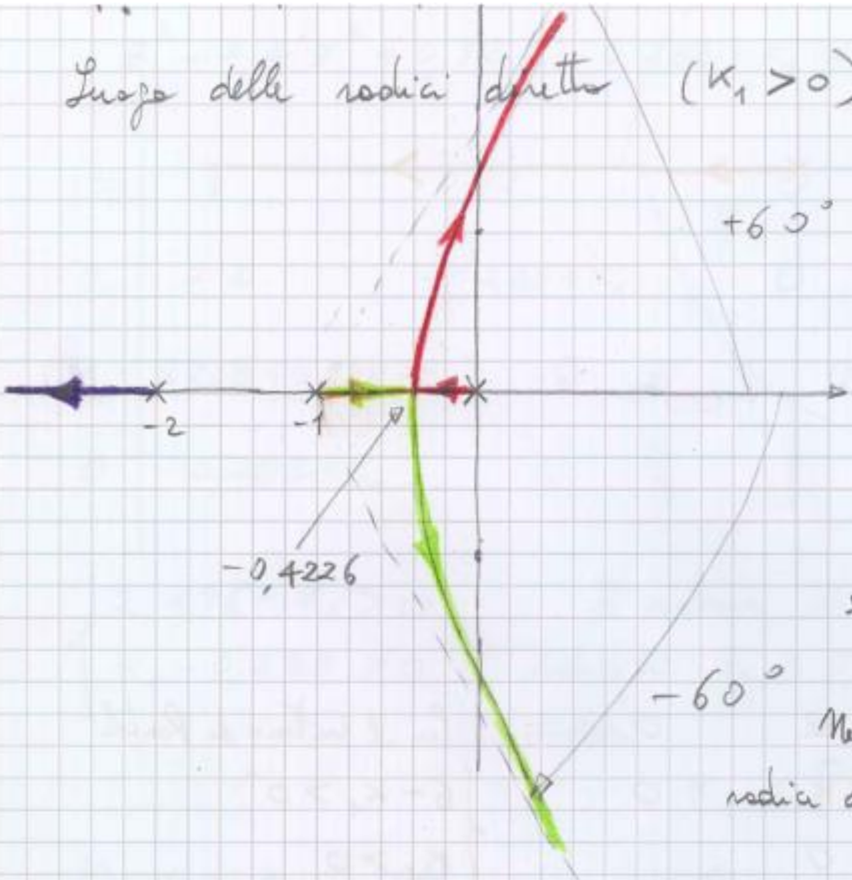
b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 0,2 \text{ s}^{-1}$.

d. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato:

$K_1^* = \arg\max_{K_1 \in \mathbb{R}} G_s(K_1)$.

Luogo delle radici diretto $(K_1 > 0)$



$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

Calcolo radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} -1,5774 \\ -0,4226 \end{cases}$$

Nel luogo diretto l'unica radice doppia è $-0,4226$

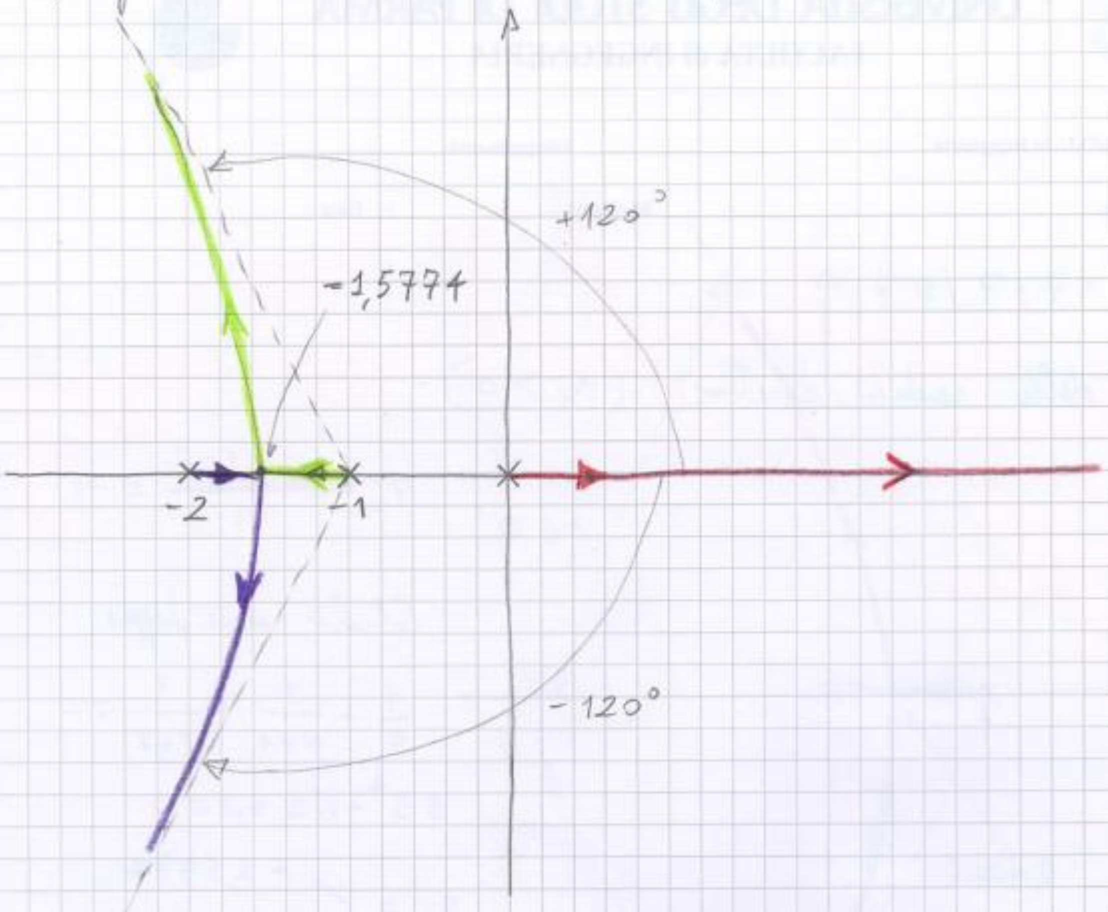
Eq. caratteristica $1 + K_1 P(s) = 0$

$$1 + K_1 \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+s)(s+2) + K_1 = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

Luogo delle radici inverso $(K_1 < 0)$



b)

3	1	2	0
2	3	K_1	0
1	$6-K_1$	0	
0	K_1		

Per il Criterio di Routh

$$\begin{cases} 6-K_1>0 \\ K_1>0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è asint. stabile per tutti e soli valori

$$K_1 \in (0, 6)$$

c) Cambio di variabile complessa $z = s + 0{,}2$

$\operatorname{Re} z < 0 \iff \operatorname{Re} s < -0{,}2$

$s = z - 0{,}2$

$$(z-0{,}2)^3 + 3(z-0{,}2)^2 + 2(z-0{,}2) + K_1 = 0$$

$$z^3 + 2{,}4\,z^2 + 0{,}92\,z - 0{,}288 + K_1 = 0$$

3	1	$0{,}92$	0
2	$2{,}4$	$-0{,}288+K_1$	0
1	$2{,}208+0{,}288-K_1$	0	0
0	$-0{,}288+K_1$		

$$\begin{cases} 2{,}496 - K_1 > 0 \\ K_1 - 0{,}288 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 0{,}2$ per tutti e soli valori

$$K_1 \in [0{,}288\,,\ 2{,}496]$$

d) Dal luogo delle radici diretto si evince che per il valore ottimo K_1^* l'eq. caratteristica ha fra le sue radici, la radice doppia $-0{,}4226$. Quindi

$$K_1^* = -s(s+1)(s+2)\Big|_{s=-0{,}4226} \cong 1{,}456$$

Attenzione: il valore corretto di K_1^* è 0,3849

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+K_1\frac{(s-1)^2}{s^3(s+5)^2}=0 \quad , \quad K_1\in[0,+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

6.

Si noti che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0;+\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n-m=3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a=\frac{1}{3}[-5-5-(1+1)]=-4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0}=\frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1}=\pi \quad \theta_{a,2}=\frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

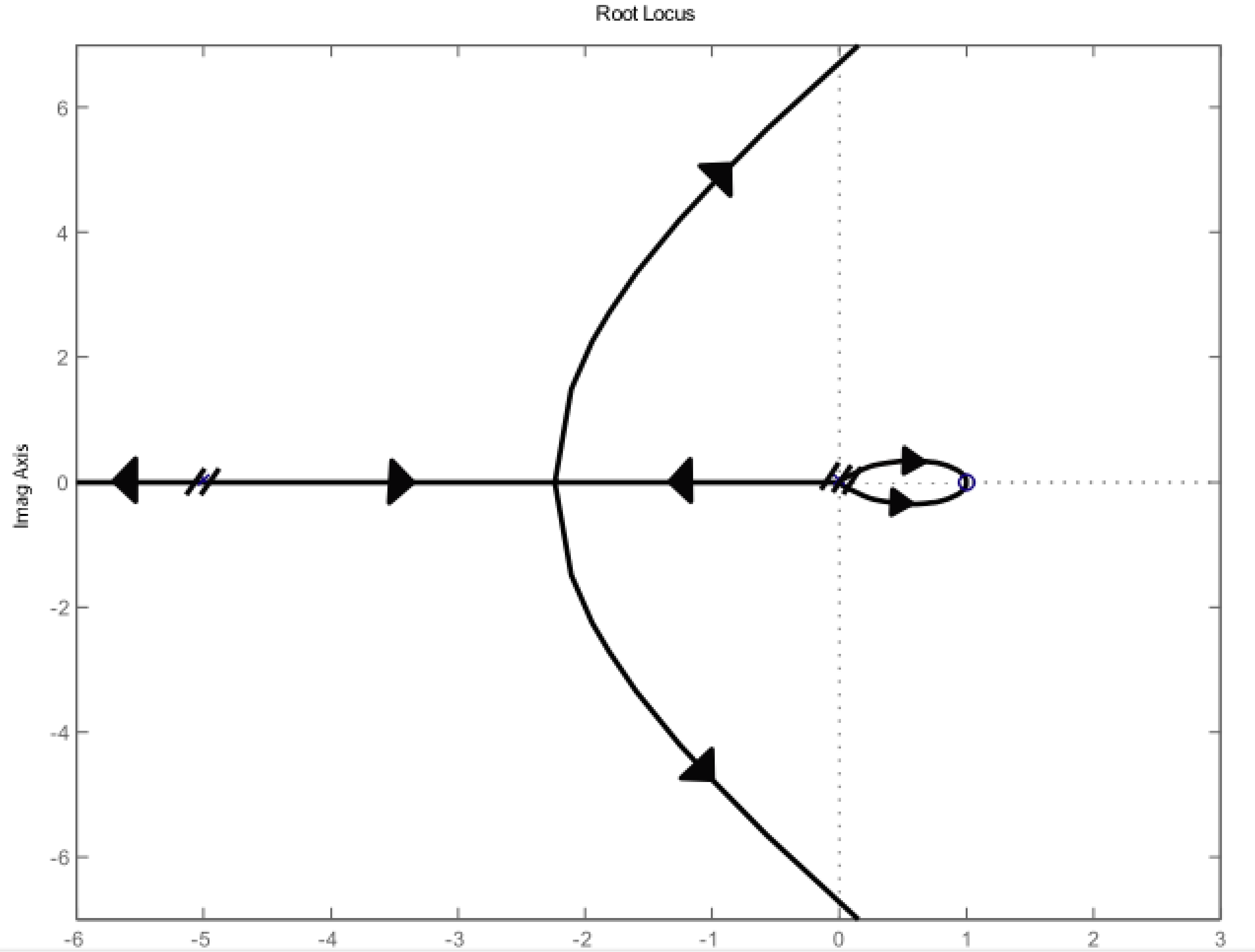
$$\frac{2}{s-1}-\frac{3}{s}-\frac{2}{s+5}=0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2-15=0 \Rightarrow s=\pm\sqrt{5}=\pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s=-2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



6. [punti 5] Tracciare il luogo delle radici dell'equazione

$$1+\frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+2a)}=0 \quad \text{per } a \geq 0.$$

Si determinino mediante una stima numerica le radici doppie presenti nel luogo. Esporre dettagliatamente il metodo numerico scelto considerando che un errore di $\pm 10\%$ nella stima è accettabile al fine del tracciamento qualitativo richiesto.

$$(s^2+3s+2)(s+2a)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+2s+2a(s^2+3s+2)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+3s+2a\left(s^2+3s+2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$1+2a\,\frac{s^2+3s+5/2}{s(s^2+3s+3)}=0$$

$$1+2a\,\frac{\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}\right)}{s\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=0$$

Calcolo delle radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2(s+1,5)}{(s+1,5)^2+0,75}-\frac{2(s+1,5)}{(s+1,5)^2+0,25}=0$$

$$f(s)\triangleq\frac{1}{s}+2(s+1,5)\left[\frac{1}{(s+1,5)^2+0,75}-\frac{1}{(s+1,5)^2+0,25}\right]$$

L'asse reale negativo appartiene al luogo $(a>0)$ e quindi, tentativamente, si cercano le radici nell'intervallo $[-5,-1]$

$f(-5)=-0,178$

$f(-4)=-0,195$

$f(-3)=-0,133$

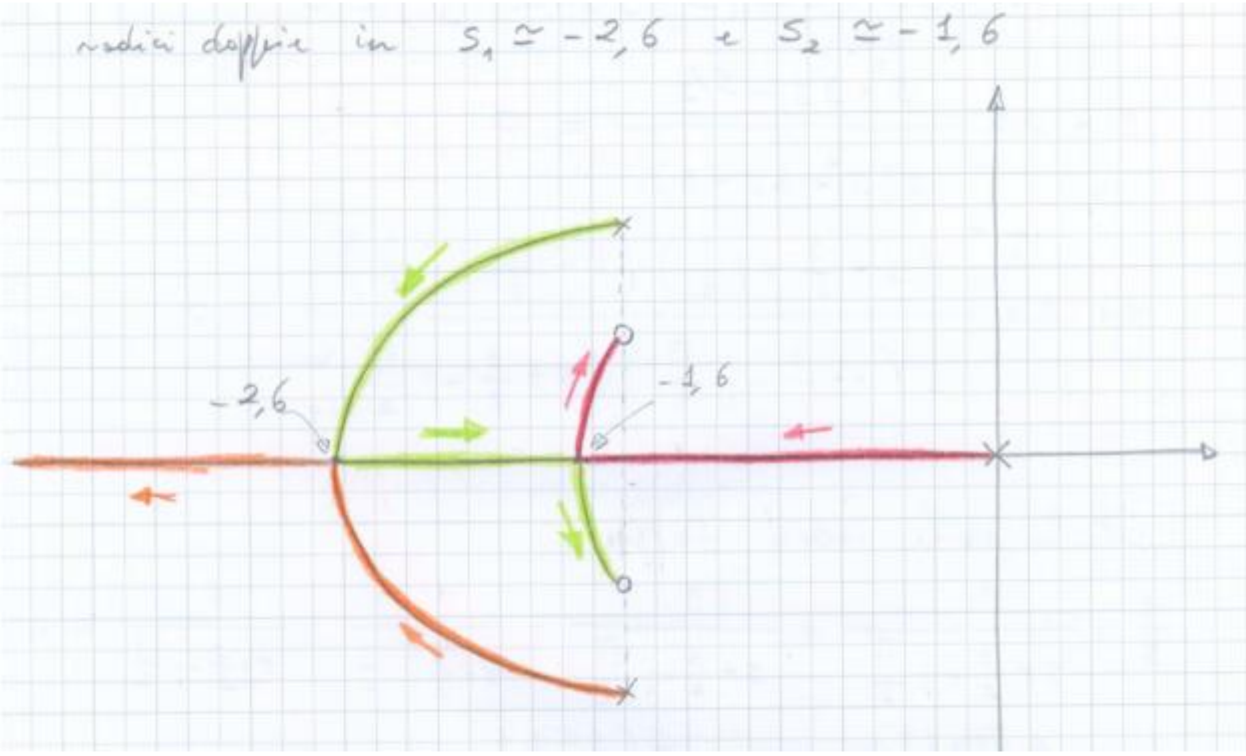
$f(-2)=0,5$

$f(-1)=-2$

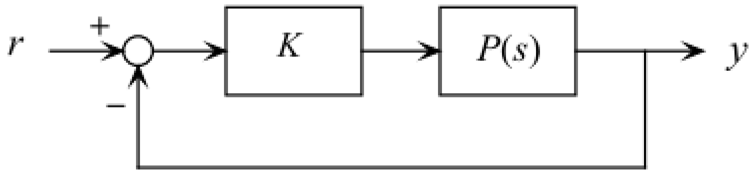
$f(-3),\ f(-2) \Rightarrow f(-2,5)=0,057;\ f(-2,6)=-0,0002$

$f(-2),\ f(-1) \Rightarrow f(-1,5)=-0,666$

$f(-1,6)=-0,118$



6. [punti 4.5] Sia assegnato il seguente sistema retroazionato dove $P(s) = \dfrac{s+4}{s^2(s+2)^2}$.



Tracciare il luogo delle radici relativo all'equazione caratteristica $1 + KP(s) = 0$ per $K > 0$. Determinare in particolare gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di partenza dai poli di $P(s)$.

6.

Gli angoli di partenza da 0 e – 2 sono +/- 90°

Gli asintoti sono tre, hanno centro in 0 + j0, con angoli +60°, +180°, -60° .

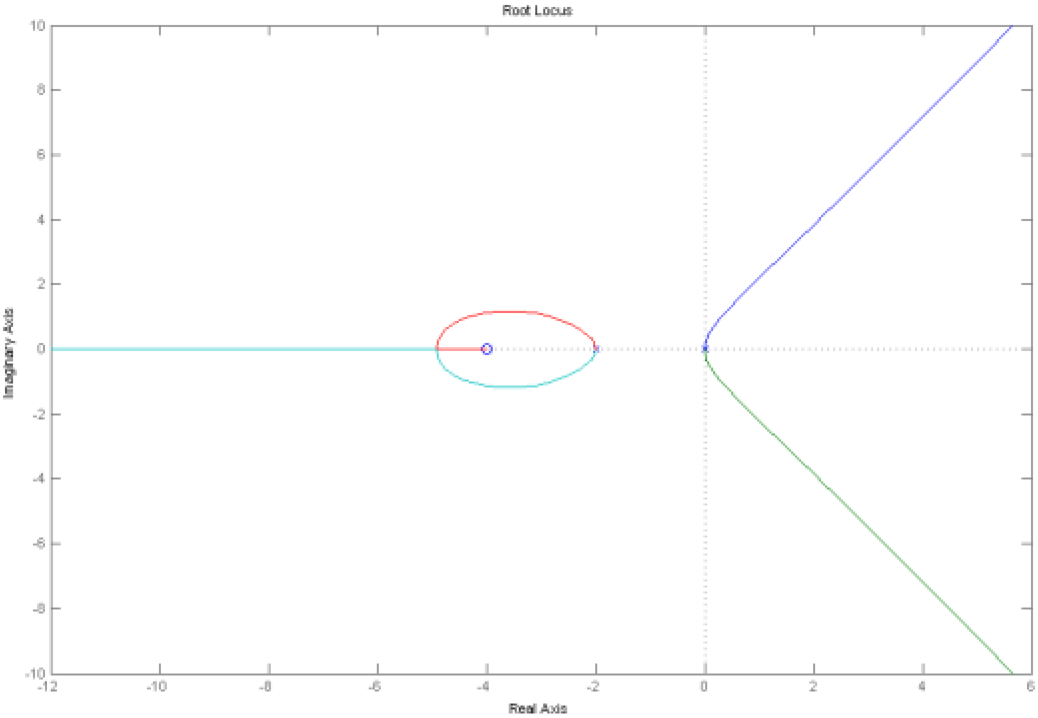
Calcolo delle radici doppie:

$$2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} = 0$$

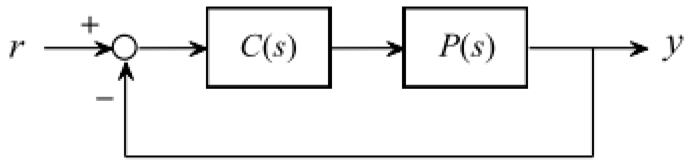
$$3s^2 + 18s + 16 = 0$$

$$s_{1,2} = -1,0851 \quad -4,9149$$

si scarta la prima radice in quanto non appartiene al luogo diretto



4. [punti 6] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+16\right]}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$..



a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$. In particolare 1) determinare gli asintoti del luogo, 2) determinare gli angoli di partenza del luogo, 3) dimostrare che non esistono radici doppie reali nel luogo.

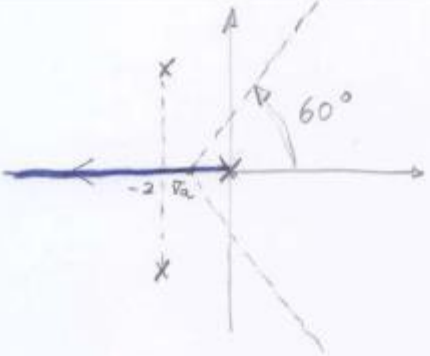
b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

a. Eq. caratteristica del sistema retroazionato

$$1 + K \frac{1}{s\left[(s+2)^2+16\right]} = 0 \quad , \quad K > 0$$

Poli ad anello aperto: $P_1 = 0$, $P_{2,3} = -2 \pm j4$

ASINTOTI: centro in $\sigma_a = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = -\dfrac{4}{3}$



L'asse reale negativo appartiene al luogo.

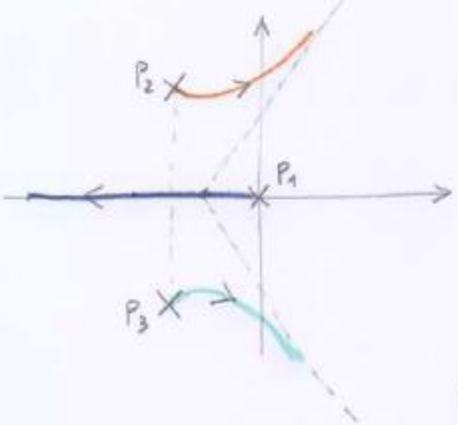
RADICI DOPPIE:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2-j4}+\frac{1}{s+2+j4}=0$$

$$3s^2+8s+20=0$$

$$s=\frac{-4\pm\sqrt{16-60}}{3}\notin\mathbb{R}$$

Quindi non esistono radici doppie reali nel luogo.



ANGOLI DI PARTENZA:

$$\theta_2=\pi-\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\,\frac{2}{4}\right]=$$

$$=-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}=-0{,}4636=-26{,}57°$$

$$\theta_3=+26{,}57° \qquad \theta_1=+180°$$

b.

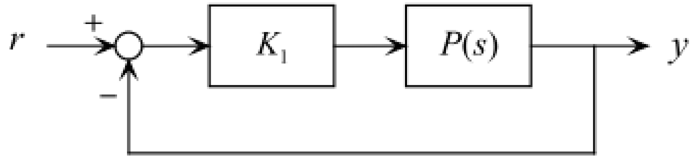
La configurazione dei poli retroazionati in corrispondenza del guadagno ottimo K^* è σ, $\sigma+j\omega$, $\sigma-j\omega$ $[\sigma,\omega\in\mathbb{R}]$.

Dal teorema del baricentro $3\sigma=-4 \Rightarrow \sigma=-\frac{4}{3}$

Quindi $K^* \ni 1+K^*\dfrac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)\left[\left(-\frac{4}{3}+2\right)^2+16\right]}=0$

$\Rightarrow K^*\cong 21{,}9$

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura

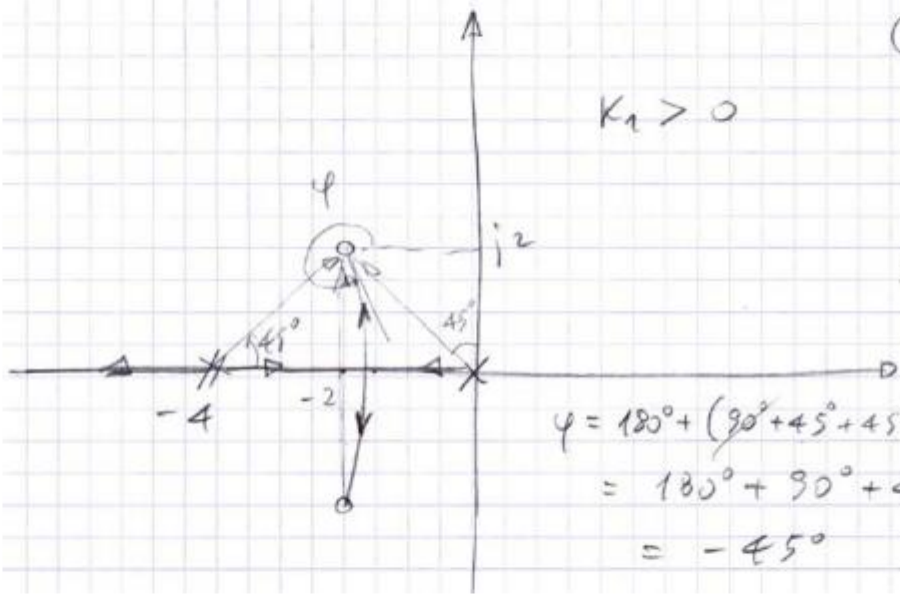


dove $P(s) = \dfrac{\left[(s+2)^2+4\right]}{s(s+4)^2}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ (luogo diretto) e $K_1 < 0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i luoghi gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di arrivo.

b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

N.B.: L'equazione che determina le radici doppie al punto **a** è equivalente ad un'equazione polinomiale di terzo grado che ammette una sola radice reale. Questa venga stimata con una procedura numerica ed una precisione di circa l'1%.



$(s+2)^2 = -4$

$s+2 = \pm j\sqrt{4} = \pm j2$

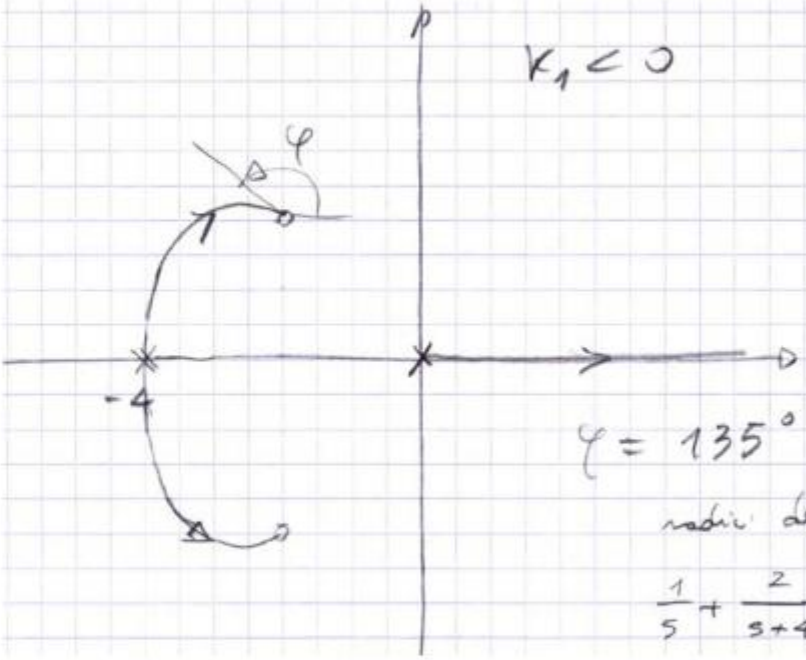
$s = -2 \pm j2$

Asintoto: $\theta_a = +\pi$

$\varphi = 180° + (90° + 45° + 45° + 45°) - \cancel{90°}$

$= 180° + 90° + 45° = 270° + 45°$

$= -45°$



$K_1 < 0$

Asintoti: $\vartheta_0 = 0°$

$\varphi = 135°$

radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2-j2} - \frac{1}{s+2+j2} = 0$$

radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2-j2} - \frac{1}{s+2+j2} = 0$$

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \left(\frac{s+2\cancel{+j2}+s+2\cancel{-j2}}{(s+2)^2+4} \right) = 0$$

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4} = 0$$

$$(s+4)\left(s^2+4s+8\right) + 2s\left(s^2+4s+8\right) - 2\left(s^2+2s\right)(s+4) = 0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right) - 2\left(s^3+2s^2+4s^2+8s\right) = 0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right) - 2\left(s^3+6s^2+8s\right) = 0$$

$$3s^3 + \cancel{12s^2} + 24s + 4s^2 + \cancel{16s} + 32$$

$$-2s^3 - \cancel{12s^2} - \cancel{16s} = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + 24s + 32 = 0$$

$$f(s) = s^3 + 4s^2 + 24s + 32$$

s	$f(s)$
-2	-8
$-2,2$	-12
$-1,8$	$-4,072$
$-1,6$	$-0,2560$
$-1,5$	$1,625$
$-1,58$	$0,12$
-1.59	-0.0673

radice doppia $\simeq -1,59$

b) Dal luogo delle radici si deduce che la stabilità asintotica del sistema ret. è data dalla condizione

$$K_1 > 0$$

Verifica con il criterio di Routh.

$$s(s^2 + 8s + 16) + K_1(s^2 + 4s + 8) = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 16s + K_1 s^2 + 4K_1 s + 8K_1 = 0$$

$$s^3 + (8 + K_1)s^2 + (16 + 4K_1)s + 8K_1 = 0$$

3	1	$16 + 4K_1$
2	$8 + K_1$	$8K_1$
1	$(8+K_1)(16+4K_1) - 8K_1$	
0	$8K_1$	

$8 + K_1 > 0 \quad K_1 > -8$

$8K_1 > 0 \quad K_1 > 0$

$128 + 32K_1 + 16K_1 + 4K_1^2 - 8K_1 > 0$

$4K_1^2 + 40K_1 + 128 > 0$

radici

$$K_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 512}}{4}$$

è sempre > 0

$\Delta = -112 < 0 \Rightarrow \forall K_1 \in \mathbb{R}$!

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+5\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)}=0 \quad , \quad \tau \in [0,+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie

6.

L'equazione caratteristica

$$1+10\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)}=0 \qquad K \in [0,+\infty)$$

e' riscrivibile come

$$(1+2\tau s)(1+s)+10+\tau(10s)=0$$

$$(1+s)+\tau[2s(1+s)]+10+\tau(10s)=0$$

$$s+11+\tau[2s(1+s)+10s]=0$$

$$1+\tau\cdot 2\frac{s+s^2+5s}{s+11}=0$$

$$1+2\tau\frac{s^2+6s}{s+11}=0$$

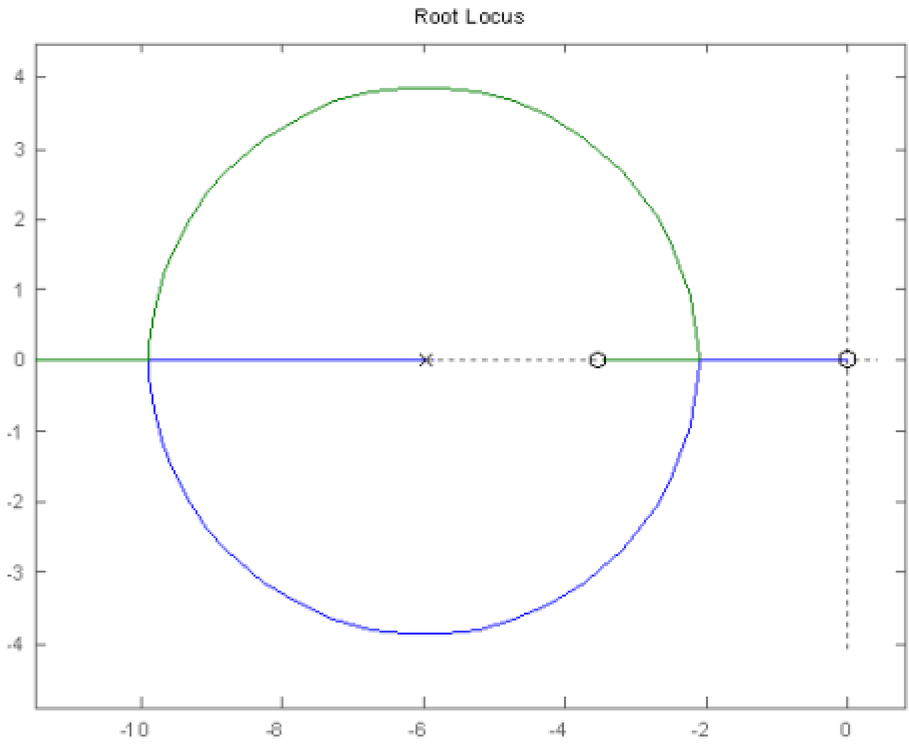
$$1+2\tau\frac{s^2+6s}{s+11}=0$$

$$1+2\tau\frac{s(s+6)}{s+11}$$

e quindi, posto K_1:=2τ, come

$$1+K_1\frac{s(s+6)}{s+11}=0 \qquad K_1 \in [0,+\infty)$$

Si tratta di un luogo diretto. E' noto che il luogo delle radici in oggetto e' formato anche da una



circonferenza di raggio $R=\sqrt{d_1 d_2}=\sqrt{5\cdot 11}$ e centro in -11.

Le radici doppie sono determinabili anche risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+6}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{7}{2}}=0$$

e valgono $s_1=-6+\sqrt{6^2-21}=-9.87$ e $s_2=-6+\sqrt{6^2-42}=-2.12$.

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici dell'equazione caratteristica

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)(s+7)}=0$$

per $K_1>0$ (luogo diretto) e per $K_1<0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i casi gli asintoti e le eventuali radici doppie.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-7$ con molteplicità 1

Essendo $n-m=1$ il luogo (sia diretto che inverso) presenta un asintoto.

LUOGO DIRETTO ($K_1\in[0,+\infty)$):

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1>0$) ha l'andamento riportato in figura 1.

LUOGO INVERSO ($K_1\in(-\infty,0]$):

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.
- Il luogo, oltre a due porzioni dell'asse reale, comprende una circonferenza con centro nello zero e raggio $R=\sqrt{d_1 d_2}=4$ (con $d_1=2$ e $d_2=8$).

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1<0$) ha l'andamento riportato in figura 2 e interseca l'asse reale nei punti di ascissa -3 e 5.

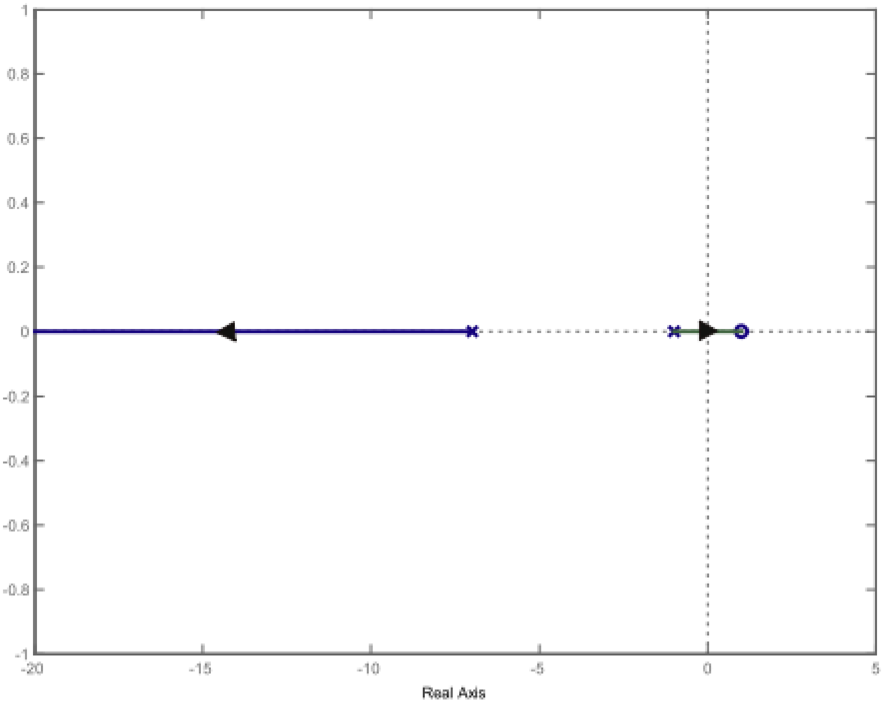


Figura 1. Luogo diretto

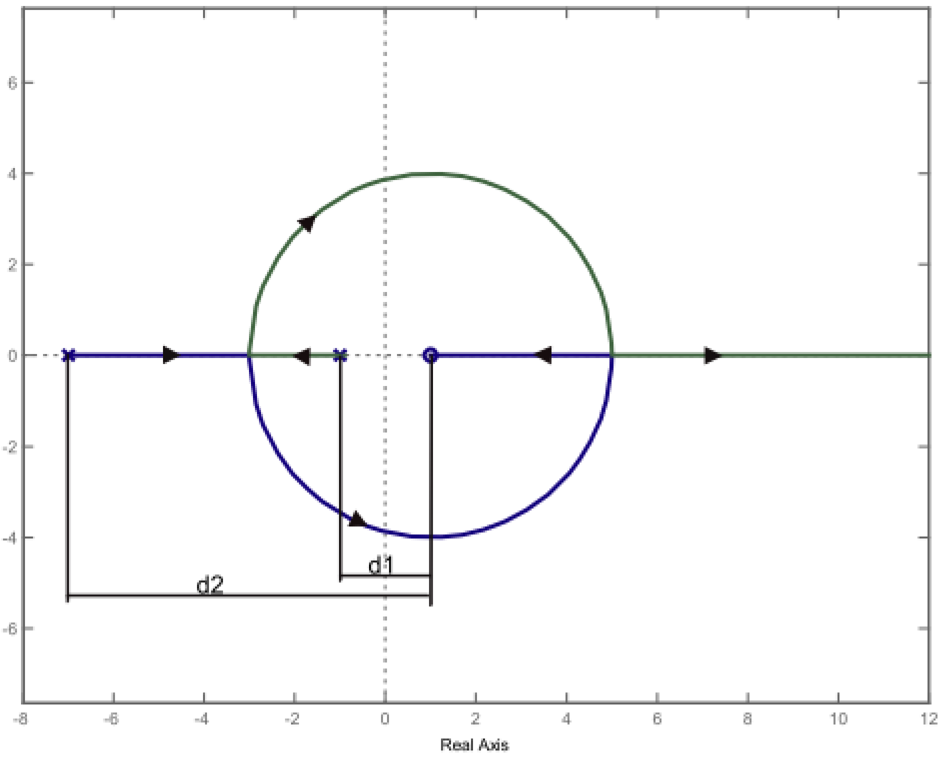


Figura 2. Luogo inverso