

MODELLI E ALGORITMI PER IL SUPPORTO ALLE DECISIONI

ESERCIZIO 1. (11 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{S, 1, 2, 3, 4, 5, D\}$$

e

$$A = \{(S, 1), (S, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, D), (5, D)\}$$

con le capacità

$$c_{S1} = 9 \quad c_{S2} = 9 \quad c_{12} = 3 \quad c_{13} = 4 \quad c_{23} = 5 \quad c_{34} = 4 \quad c_{35} = 4 \quad c_{45} = 2 \quad c_{4D} = 10 \quad c_{5D} = 5.$$

Sia data la soluzione

$$x_{S1} = 3 \quad x_{S2} = 0 \quad x_{12} = 3 \quad x_{13} = 0 \quad x_{23} = 3 \quad x_{34} = 2 \quad x_{35} = 1 \quad x_{45} = 2 \quad x_{4D} = 0 \quad x_{5D} = 3.$$

Dopo aver mostrato che tale soluzione è un flusso ammissibile, si parta da essa per determinare il flusso massimo e il taglio minimo per questa rete. Può accadere che tra gli archi del taglio minimo ce ne sia uno non saturo nella soluzione ottima?

ESERCIZIO 2. (6 punti) Si spieghi qual è il significato del coefficiente di costo ridotto di un arco fuori base nell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso a costo minimo e si spieghi in quali parti dell'algoritmo si utilizzano i coefficienti di costo ridotto (limitarsi al caso con capacità illimitate).

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato il problema di ottimizzazione $\max_{x \in S} f(x)$. Si consideri un'iterazione di un algoritmo branch-and-bound per la sua risoluzione e siano $S_1, S_2 \subset S$ due sottoinsiemi della sua regione ammissibile con le relative limitazioni superiori $U(S_1)$ e $U(S_2)$, corrispondenti a nodi foglia dell'albero di branch-and-bound in quell'iterazione. Sia LB l'attuale lower bound di questo problema di massimo. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa **motivando la risposta**:

- se $U(S_1) > U(S_2)$ e il sottoinsieme S_1 non verrà mai selezionato dall'algoritmo in iterazioni successive per eseguire su di esso l'operazione di branching, allora non verrà mai selezionato neppure il sottoinsieme S_2 ;
- se $U(S_1) > LB$, allora S_1 verrà certamente selezionato in un'iterazione successiva per eseguire su di esso l'operazione di branching;
- se $LB < U(S_2) < U(S_1)$, allora in S_2 non ci possono essere soluzioni ottime del problema.

ESERCIZIO 4. (8 punti) Si indichi la risposta corretta per ciascuna delle seguenti domande **motivando brevemente la risposta**.

- (1) Si consideri l'algoritmo ungherese per un problema di assegnamento. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.
 - A:** L'algoritmo è costruttivo senza revisione delle decisioni passate;
 - B:** A ogni iterazione genera una nuova soluzione ammissibile con costo di almeno un'unità inferiore rispetto a quello dell'iterazione precedente;
 - C:** A ogni iterazione trova una limitazione inferiore del problema di almeno un'unità superiore rispetto a quella dell'iterazione precedente;
 - D:** Tutte le altre affermazioni sono false.
- (2) Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
 - A:** se un problema R è NP -completo e risolvibile in tempo polinomiale, allora $NP \subseteq P$;
 - B:** Se $R \in P$, allora $R \in NP$;
 - C:** $R \in P$ è trasformabile in tempo polinomiale in un problema Q , allora $Q \in P$;
 - D:** Se R è NP -completo, allora $R \in NP$.
- (3) Si consideri un problema di flusso massimo con il relativo problema di taglio a costo minimo. Dire quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:

- A:** Se aumento di un'unità la capacità di un arco che non fa parte di un taglio a costo minimo, il valore ottimo del problema di flusso massimo certamente cambia;
 - B:** Se aumento di un'unità la capacità di un arco che fa parte di un taglio a costo minimo, il valore ottimo del problema di flusso massimo certamente cambia;
 - C:** Se diminuisco di un'unità la capacità di un arco che non fa parte di un taglio a costo minimo, il valore ottimo del problema di flusso massimo certamente cambia;
 - D:** Se diminuisco di un'unità la capacità di un arco che fa parte di un taglio a costo minimo, il valore ottimo del problema di flusso massimo certamente cambia.
- (4) Si consideri un algoritmo di programmazione dinamica per un problema suddiviso in n blocchi. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa.
- A:** In un blocco k , l'insieme delle possibili decisioni può dipendere dallo stato s_k in cui ci si trova;
 - B:** La funzione $u(d_k, s_k)$ che misura il contributo del blocco k alla funzione obiettivo quando ci si trova nello stato s_k e si prende la decisione d_k , può non dipendere dallo stato s_k ;
 - C:** Quando ci si trova nello stato s_k e si prende la decisione d_k , la funzione di transizione $t(d_k, s_k)$ può restituire più stati del blocco $k + 1$;
 - D:** L'insieme delle decisioni ottime di un blocco k quando ci si trova in un suo stato s_k può essere costituito da più di un elemento.