Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{r|ccc} 4 & m^2 & 2mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}} \quad \boxed{t \geq 0}$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è
{grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

N.B.
Correzione sul calcolo di k_3:
k_3 = 1/(s (s+1)^3)|_{s=-2} = 1/2

4. Vedi dispense dell'insegnamento.

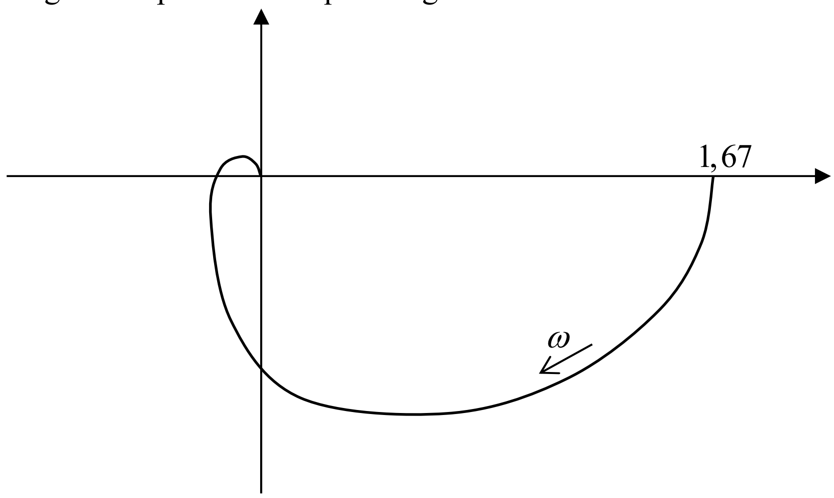
5
a.

$$L(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)};\quad L(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$|L(j\omega)|=\frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega)=-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0)=\frac{5}{3}\cong 1,67$ e $\lim_{\omega\to+\infty}|L(j\omega)|=0$, $\lim_{\omega\to+\infty}\arg L(j\omega)=-3\frac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p)=-\pi$:

$$\arctan\frac{\omega_p}{2}+\arctan\frac{\omega_p}{3}=\pi-\arctan\omega_p$$

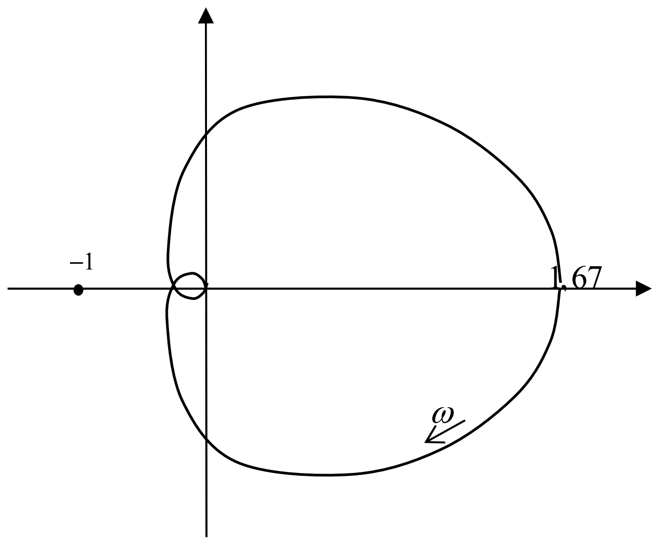
Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2-11=0$ da cui $\omega_p=\sqrt{11}\cong 3,32$ rad/s.

$$|L(j\omega_p)|=\frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}}=\frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p)=-\frac{1}{6}\right)$.

b.

Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;

in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

$\Rightarrow \omega_c \ = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

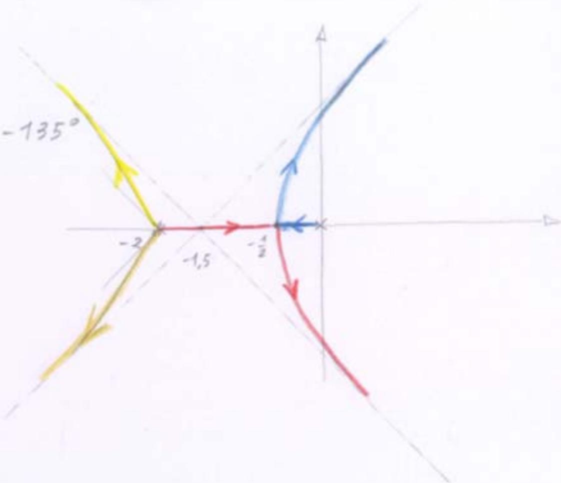
$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

6.

4\. Eq. caratteristica $1 + K \dfrac{1}{s(s+2)^3} = 0$

a) Asintoti del luogo: $\sigma_a = \dfrac{0-2-2-2}{4} = -1{,}5$

$\theta_{1,a} = +45°$, $\theta_{2,a} = +135°$, $\theta_{3,a} = -45°$, $\theta_{4,a} = -135°$



Radici doppie: $3\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

Angoli di partenza: da $P_1 = 0$ $\theta_1 = 180°$

da $P_2 = -2$ $\theta_{2,1} = 0°$, $\theta_{2,2} = +120°$, $\theta_{2,3} = -120°$

b) $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 8s + K = 0$

4	1	12	K
3	$\cancel{6}\ 3$	$\cancel{8}\ 4$	0
2	32	3K	0
1	128-9K	0	
0	3K		

$\begin{cases} 128 - 9K > 0 \\ 3K > 0 \end{cases}$

$K \in \left(0, \dfrac{128}{9}\right) \simeq (0, 14{,}\bar{2})$

eq. ausiliaria per $K = \dfrac{128}{9}$: $32s^2 + 3\dfrac{128}{9} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\dfrac{4}{3}} \simeq \pm j1{,}1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j1{,}1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1 + K^* P(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 1 + K^* \dfrac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3} = 0 \Rightarrow K^* = \dfrac{27}{16} = 1{,}6875.$

7.

$$C(s) = \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C(s)P(s) = 9 \cdot \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)(s+4)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{9 \cdot \gamma_0}{9 \cdot 4} = \frac{\gamma_0}{4}$$

$$K_v = 4 \Longrightarrow \frac{\gamma_0}{4} = 4, \quad \boxed{\gamma_0 = 16}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+2)(s+c) \quad \text{con } c > 2.$$

$$P_d(s) = s^4 + (6+c)s^3 + (6c+13)s^2 + (13c+10)s + 10c$$

Il polinomio caratteristico associato al controllore scelto è

$$P_c(s) = s(s^2+9)(s+4) + 9(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)$$

$$P_c(s) = s^4 + (4+9\gamma_3)s^3 + (9+9\gamma_2)s^2 + (36+9\gamma_1)s + 9\gamma_0$$

Si impone che $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4 + 9\gamma_3 = 6 + c \\ 9 + 9\gamma_2 = 13 + 6c \\ 36 + 9\gamma_1 = 10 + 13c \\ 9\gamma_0 = 10c \end{cases} \Longrightarrow c = \frac{144}{10} = 14.4 \quad \text{ok! } c \gg 2.$$

$$\boxed{\gamma_1 = 17.91, \quad \gamma_2 = 10.04, \quad \gamma_3 = 1.822}$$

8.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \rightarrow k$.
L'eq. diventa

$$16\,y(k) - 12\,y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\,u(k-2) + 16\,u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16z + 16}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16z^3 - 12z^2 + 1$.

$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
   $-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	0	-12	16
2	16	-12	0	1
3	-255	192	-12	

Dall'ultima riga della tabella otteniamo una questa condizione

4. $|-255| > |-12|$ ok!

Quindi per il criterio di Jury il sistema è asintoticamente stabile.

In alternativa, si possono calcolare le radici del polinomio caratteristico del sistema: $p_1 = 0.6545$, $p_2 = 0.0955$. Queste hanno modulo minore di 1, quindi per il noto teorema il sistema è asintoticamente stabile.