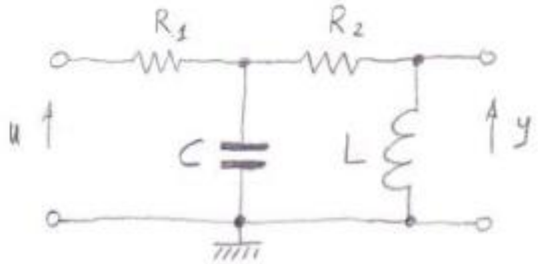
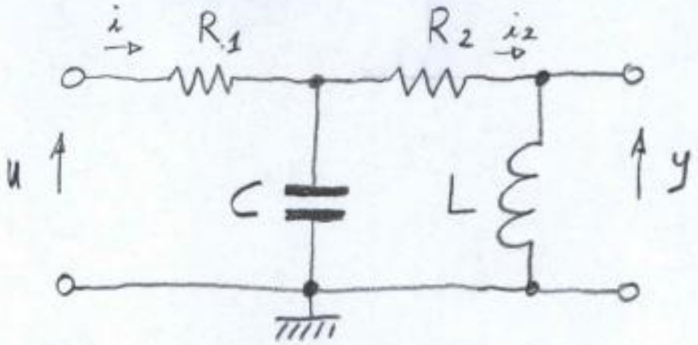
2. [punti 4] Il circuito elettrico di figura definisca un sistema dinamico orientato da u (tensione elettrica) ad y (tensione elettrica).



Determinare per questo sistema:

1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. il guadagno statico.

2.



$$Z(s) = R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + Ls)}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \qquad I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \; ; \quad Y = Ls \cdot I_2$$

$$Y(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} \cdot U(s) \triangleq G(s)U(s)$$

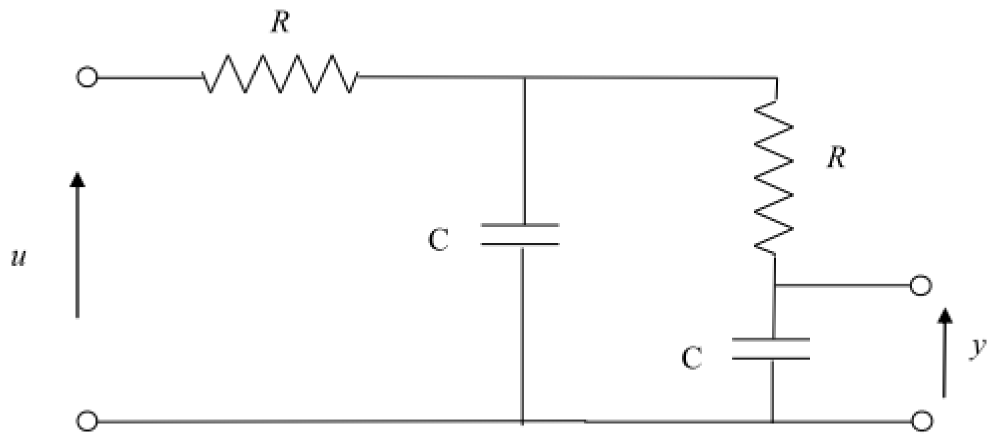
$$\text{f.d.t.} \quad G(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}$$

eq. diff. $L R_1 C D^2 y(t) + (L + R_1 R_2 C) D y(t) + (R_1 + R_2) y(t) =$

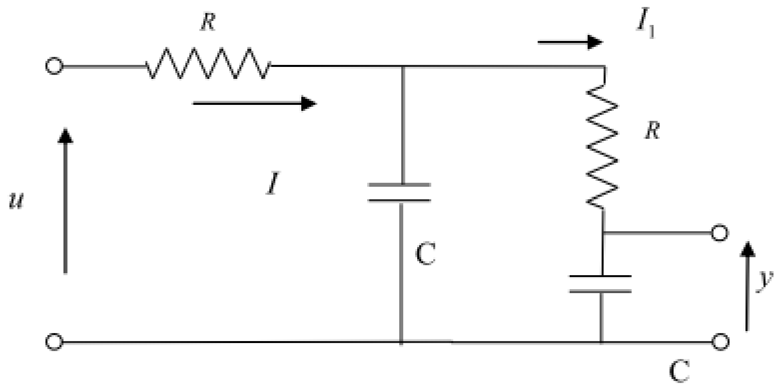
$= L D u(t)$

guadagno statico $G(0) = 0$.

1. [punti 6] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione u (ingresso) alla tensione y (uscita).



Di questo sistema si determini: 1) la funzione di trasferimento, 2) i modi, 3) l'equazione differenziale.



$$U = ZI$$

$$Z = R + \frac{RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

$$Y = \frac{1}{Cs}\cdot I_1 = \frac{1}{Cs}\cdot I\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Cs}\cdot\frac{U}{Z}\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}$$

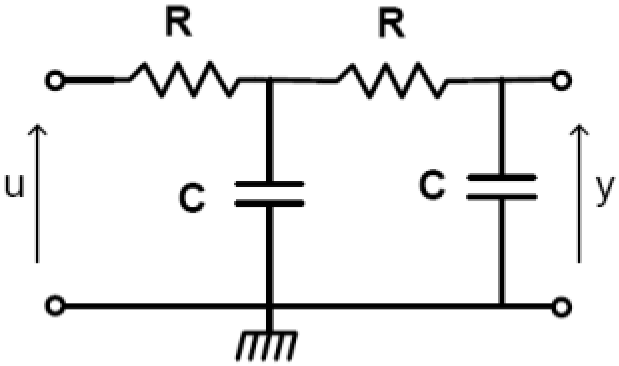
$$G(s) := \frac{Y}{U} = \frac{1}{T^2s^2+3Ts+1}$$

2) I poli del sistema sono $\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$ e quindi i corrispondenti modi sono $\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$, $\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$.

3) L'equazione differenziale associata a G(s) è

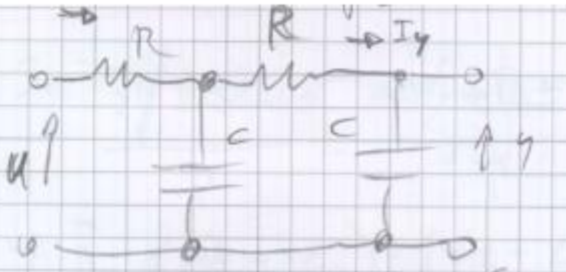
$$T^2D^2y + 3TDy + y = u$$

2. [punti 4.5] La rete elettrica di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

2.



$$Z_{t1} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC} \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}} \cdot \frac{U}{R + \frac{\frac{1}{sC}\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC} \cdot \frac{\frac{1}{sC}\, U}{R^2 + \frac{2R}{sC} + \frac{R}{sC} + \frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1 + 3R(sC) + R^2 (sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: assenti

poli $T := RC$ $\quad T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} =$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5} \cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

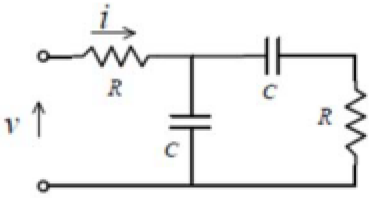
modi: $\left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T} \cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $(T := RC)$

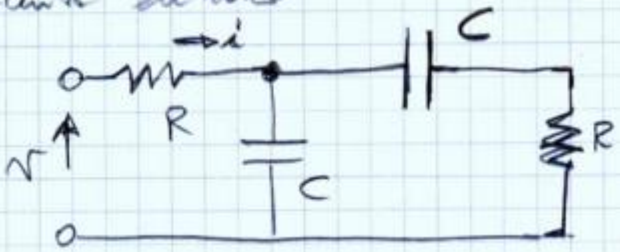
$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

1. [punti 6] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di questo sistema si determini (con $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i poli, 4) i modi, 5) il guadagno statico, 6) l'equazione differenziale.

1) Circuito elettrico



$T := RC$

$$V = Z_{tot} \, I \qquad I = \frac{1}{Z_{tot}} V$$

$$\text{f.d.t.} \equiv G(s) = \frac{1}{Z_{tot}}$$

$$Z_{tot} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\left(\frac{1}{Cs} + R\right)}{\frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R} = R + \frac{\frac{1}{Cs} \cdot \frac{1+RCs}{Cs}}{\frac{2}{Cs} + R} =$$

$$= R + \frac{\frac{1+RCs}{(Cs)^2}}{\frac{2+RCs}{Cs}} = R + \frac{\frac{1+RCs}{Cs}}{2+RCs} =$$

$$= R + \frac{1+RCs}{Cs(2+RCs)} = \frac{RCs(2+RCs) + 1 + RCs}{Cs(2+RCs)} =$$

$$= \frac{2RCs + (RC)^2 s^2 + RCs + 1}{Cs(RCs+2)} = \frac{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}{Cs(RCs+2)}$$

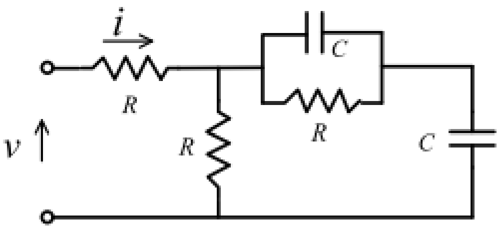
$$G(s) = \frac{Cs(RCs+2)}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1} = \frac{Cs(Ts+2)}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

zeri: $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $p_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T} t\right\}, \exp\left\{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T} t\right\} \right\}$, guadagno statico $G(0) = 0$

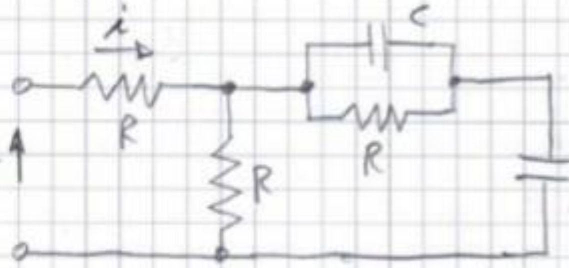
eq. diff. $T^2 D^2 i(t) + 3T D i(t) + i(t) = CT D^2 v(t) + 2C D v(t)$

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di tale sistema si determini (per semplicità si definisce $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i modi, 4) l'equazione differenziale.

2.



$v \equiv$ tensione

$i \equiv$ corrente

$$V(s) = Z_{tot} \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{Z_{tot}} \cdot V(s)$$

$$Z_{tot} = R + \frac{R \cdot \left(\frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \right)}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}}$$

$$T := RC$$

Quindi $$Z_{tot}(s) = R \cdot \frac{R^2C^2s^2 + 5RCs + 2}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = R \cdot \frac{T^2s^2 + 5Ts + 2}{T^2s^2 + 3Ts + 1}$$

La funzione di trasferimento è $G(s) := \frac{1}{Z_{tot}(s)}$

$$G(s) = \frac{T^2s^2 + 3Ts + 1}{R(T^2s^2 + 5Ts + 2)}$$

zeri: $T^2s^2 + 3Ts + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2T}, \; z_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

poli: $T^2s^2 + 5Ts + 2 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{5+\sqrt{17}}{2T}, \; p_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left(-\frac{5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right), \; \exp\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right) \right\}$

Eq. differenziale:

$$RT^2 D^2 i(t) + 5RTD\,i(t) + 2R \cdot i(t) =$$
$$= T^2 D^2 v(t) + 3TD\,v(t) + v(t)$$