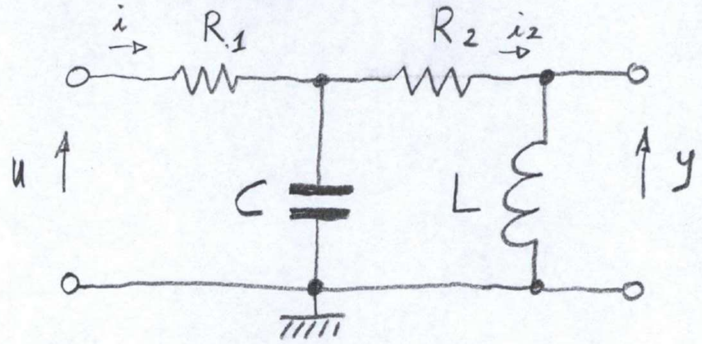
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.



$$Z(s) = R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + Ls)}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \qquad I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \; ; \qquad Y = Ls \cdot I_2$$

$$Y(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} \cdot U(s) \triangleq G(s)U(s)$$

f.d.t. $$G(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}$$

eq. diff. $$LR_1C\,D^2y(t) + (L + R_1R_2C)\,Dy(t) + (R_1 + R_2)\,y(t) =$$
$$= L\,Du(t)$$

guadagno statico $G(0) = 0$.

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = \left.-\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

4.

Vedi dispense dell’insegnamento

5.

a)

$$L(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2\left(1+\frac{1}{4}s\right)}$$

$$L(j\omega)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2\left(1+\frac{1}{4}j\omega\right)}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-4\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{4}$$

ascissa dell'asintoto verticale: $\sigma_a=\frac{1}{4}\left(-1-1-1-1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{17}{16}\cong-1,06$

Calcolo dell'intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega)=-\pi \Leftrightarrow 4\arctan\omega+\arctan\frac{\omega}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$1-\frac{\omega}{4}\tan\left(4\arctan\omega\right)=0$$

sviluppando questa equazione e definendo $x:=\omega^2$ si ottiene

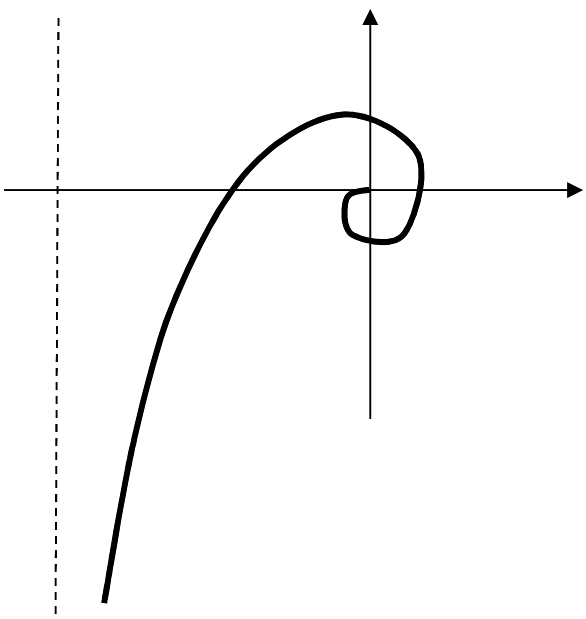
$$2x^2-7x+1=0$$

$$x_{1,2}=0,1492 \quad 3,3508 \qquad \Rightarrow \quad \omega_1=0,3863 \quad \omega_2=1,8305$$

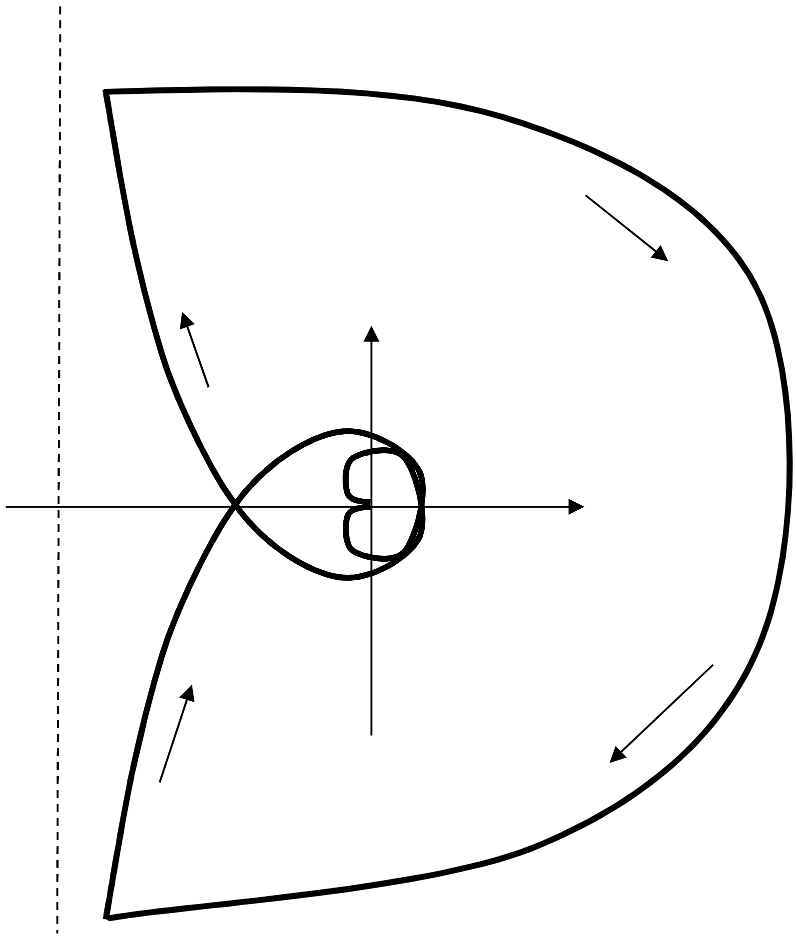
$$\arg L(j\omega_1)=-3,1416 \qquad \arg L(j\omega_2)=-6,2832$$

si scarta la seconda soluzione (che corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo) e si ottiene:

$$L(j\omega_1)=-0,6442$$



b) Si traccia il diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale negativa ed il d.p.c. non tocca né circonda il punto critico – 1. Ne consegue, per il criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c)

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_1)|} = \frac{1}{0,6442} = 1,55$$

6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=4$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-4$ con molteplicità 5

Essendo $n-m=3$ il luogo (sia diretto che inverso) presenta tre asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}((-4-4-4-4-4)-4) = -8$$

LUOGO DIRETTO ($K_1 \in [0,+\infty)$):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3}$; $\theta_{a,1} = \pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{2}\pi$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione

  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4} - \frac{5}{s+4} = 0$

  cioè

  $3s^2 - 24s + 16 = 0$

  e risultano essere

  $s_1 = \frac{12+\sqrt{96}}{3} \approx 7.27$; $s_2 = \frac{12-\sqrt{96}}{3} \approx 0.734$

  si nota subito che la prima soluzione non appartiene al luogo diretto delle radici, per cui si può concludere che l'unica radice doppia si ha nel punto di ascissa s_2.

  Gli angoli di partenza dal polo -4 con molteplicità 5 si deducono dalla congruenza:

$$5\varphi = \pi + (\pi + \pi)$$

Le soluzioni della congruenza sono: $\varphi_1 = 108°$, $\varphi_2 = 108° + 72° = 180°$, $\varphi_3 = 108° - 72° = 36°$ $\varphi_4 = -108°$, $\varphi_5 = -36°$.

Da quanto sopra riportato si deduce che il luogo delle radici (per $K_1 > 0$) ha l'andamento riportato in figura 1.

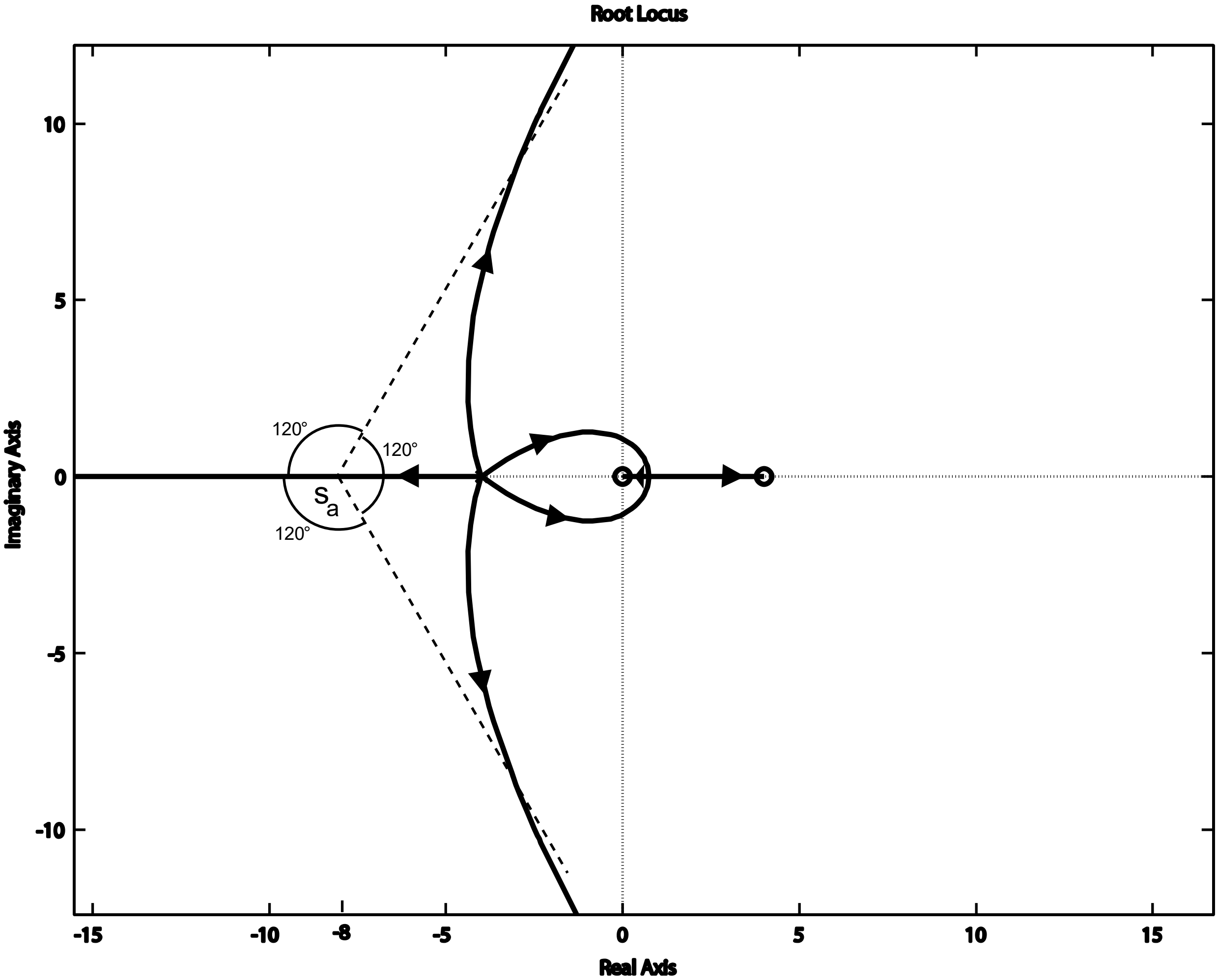


Figura 1. Luogo diretto

LUOGO INVERSO ($K_1 \in (-\infty, 0]$):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0} = 0$; $\theta_{a,1} = \frac{2}{3}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{4}{3}\pi$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione

  $$\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4} - \frac{5}{s+4} = 0$$

  cioè

  $$3s^2 - 24s + 16 = 0$$

  e risultano essere

  $$s_1 = \frac{12+\sqrt{96}}{3} \approx 7.27\,; \quad s_2 = \frac{12-\sqrt{96}}{3} \approx 0.734$$

  si nota subito che la seconda soluzione non appartiene al luogo diretto delle radici, per cui si può concludere che l'unica radice doppia si ha nel punto di ascissa s_1.

  Gli angoli di partenza dal polo -4 con molteplicità 5 si deducono dalla congruenza:

  $$5\varphi = (\pi + \pi)$$

Le soluzioni della congruenza sono: $\varphi_1 = 72°$, $\varphi_2 = -72°$, $\varphi_3 = 144°$, $\varphi_4 = 0°$, $\varphi_5 = -144°$.

Da quanto sopra riportato si deduce che il luogo delle radici (per $K_1 < 0$) ha l'andamento riportato in figura 2.

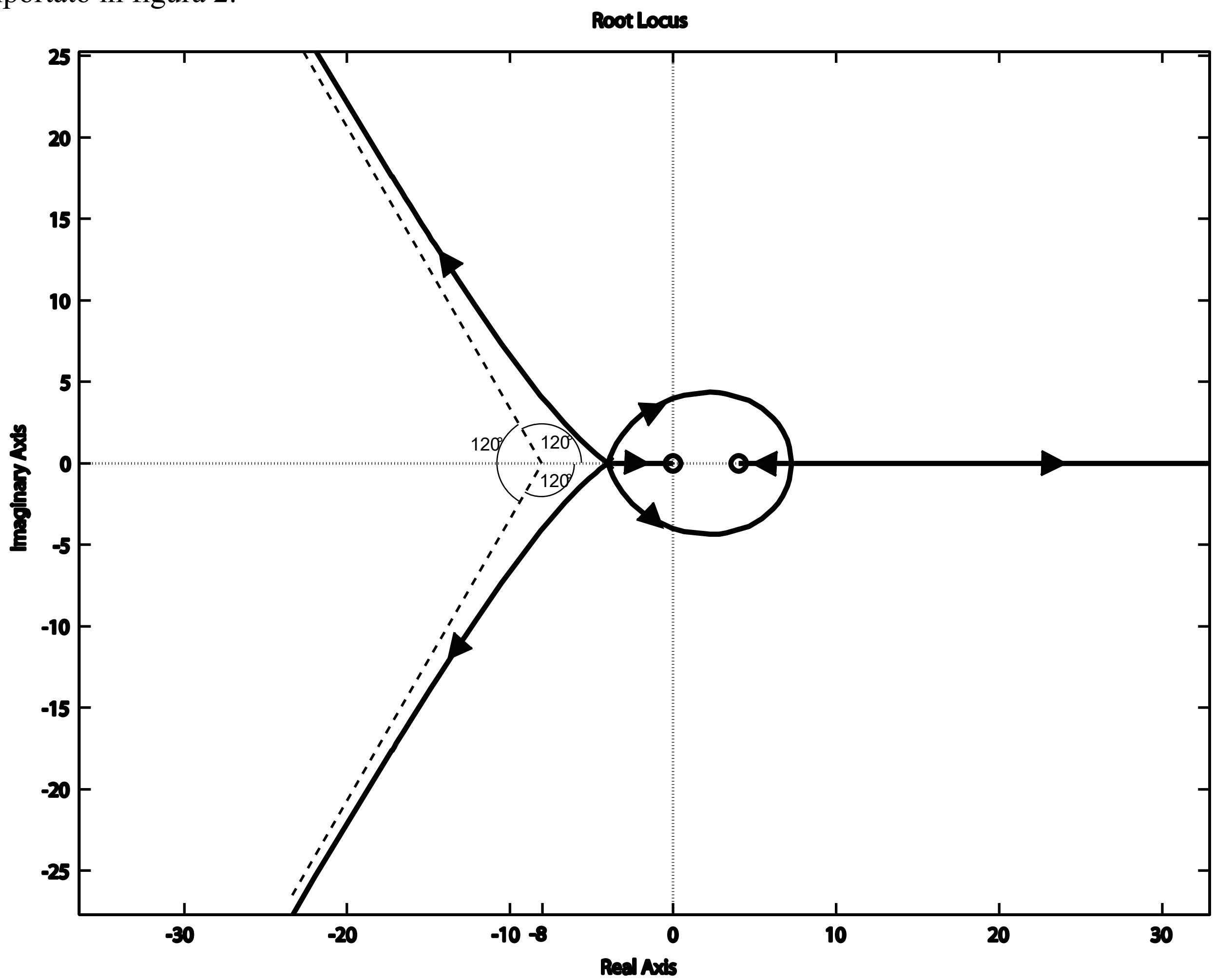


Figura 2. Luogo inverso

7.

$$T_{dy}(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

$$T_{dy}(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$$

$$T_{dy}(j2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(j2) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad C(s) := \frac{y(s)}{(s^2+4)x(s)} \quad \text{controllore di ordine } l \text{ biproprio}$$

$$y(s) := y_0 s^l + y_1 s^{l-1} + \cdots + y_l$$

$$x(s) := s^{l-2} + x_1 s^{l-3} + \cdots + x_{l-2}$$

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)}$$

equazione caratteristica:

$$1 + C(s)P(s) = 0$$

$$x(s)(s^2+4)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

Quindi il polinomio caratteristico associato alla struttura scelta per il controllore è un polinomio monico di grado $l+1$:

$$(s^2+4)(s+5)x(s)+10y(s)$$

Sia d(s) il polinomio caratteristico desiderato (polinomio monico di grado $l+1$). Imponendo che d(s) coincida col pol. caratteristico sopra si ottengono $l+1$ equazioni (lineari) con $l+1+(l-2)=2l-1$ incognite . Richiedendo che $l+1=2l-1$ si ottiene $l=2$.

Scelta di d(s):

$$d(s):=[(s+10)^2+4](s+30)=s^3+50s^2+704s+3120$$

Polinomio caratteristico associato al controllore:

$$s^3+(5+10y_0)s^2+(4+10y_1)s+20+10y_2$$

Quindi

$$\begin{cases} 5+10y_0=50 & \Rightarrow y_0=4,5 \\ 4+10y_1=704 & \Rightarrow y_1=70 \\ 20+10y_2=3120 & \Rightarrow y_2=310 \end{cases}$$

In conclusione: $C(s)=\dfrac{4,5s^2+70s+310}{s^2+4}$.

8.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z) = \frac{1}{z^3 + 0.5z^2 + 0.5z + 0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3 + 0.5z^2 + 0.5z + 0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$ ok!

2) $(-1)^3 a(-1) > 0$

$$(-1)(-1 + \cancel{0.5} - \cancel{0.5} + 0.5) > 0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0| < a_n$

$$|0.5| < 1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	−0.75	*	−0.25	

$$|-0.75| > |-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.