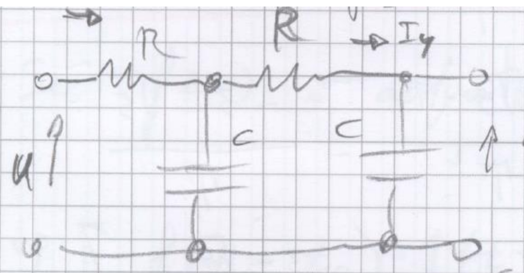
Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense dell'insegnamento.

2.



$$Z_t = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot\frac{U}{R+\frac{\frac{1}{sC}\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}U}{R^2+\frac{2R}{sC}+\frac{R}{sC}+\frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$\simeq \frac{U}{1+3R(sC)+R^2(sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2s^2+3RCs+1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: assenti

poli $T := RC$ $\quad T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} = \frac{-3T \pm \sqrt{5}\cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

modi: $\left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T} t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $(T := RC)$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

Errato corrige: segnalo una svista nel calcolo dei poli. I due poli reali individuati vanno divisi per 2. Conseguentemente i due modi vanno corretti nei loro esponenti.

3.

1° metodo:

$$g_s(t) = \int_0^t g(v)dv$$

$$g_s(t) = \int_0^t \left(15e^{-2v} - 10ve^{-2v} - 15e^{-4v}\right)dv =$$

$$= 15\int_0^t e^{-2v}dv - 10\int_0^t ve^{-2v}dv - 15\int_0^t e^{-4v}dv =$$

$$= 15\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right)\right] - 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\right] - 15\left[-\frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{4} - 5e^{-2t} + 5te^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

2° metodo:

$$G(s)=\mathcal{L}[g(t)]=20\cdot\frac{s+1}{(s+2)^2(s+4)}$$

$$\mathcal{L}[g_s(t)]=\frac{G(s)}{s}=20\cdot\frac{s+1}{s(s+2)^2(s+4)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_{21}}{(s+2)^2}+\frac{k_{22}}{s+2}+\frac{k_3}{s+4}=$$

$$=\frac{5/4}{s}+\frac{5}{(s+2)^2}+\frac{(-5)}{s+2}+\frac{15/4}{s+4}$$

$$\Rightarrow g_s(t)=\frac{5}{4}+5te^{-2t}-5e^{-2t}+\frac{15}{4}e^{-4t}$$

4.
Vedi appunti dell’insegnamento.

5.

Sia $L(s):=K\cdot P(s)=\dfrac{10s^2}{\left(s^3-8\right)(s-1)}$

$$L(j\omega)=\frac{10(j\omega)^2}{\left[(j\omega)^3-8\right](j\omega-1)}=\frac{10\omega^2}{\left(j\omega^3+8\right)(j\omega-1)}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=\frac{10\omega^2}{\left(\omega^6+64\right)^{1/2}\cdot\left(\omega^2+1\right)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega)=\pi-arctg\,\frac{\omega^3}{8}+arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega\to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto dell’asse reale e precisamente da:

$$\lim_{\omega\to 0^+}\left|L(j\omega)\right|=0$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega)=\pi$$

Comportamento per $\omega\to\infty$:
Il diagramma termina nell’origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right|=0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega)=\pi$$

Calcolo dell’intersezione del diagramma polare con l’asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p)=-\pi$$

$$\pi - arctg\frac{\omega_p^{\ 3}}{8} + arctg\omega_p = -\pi$$

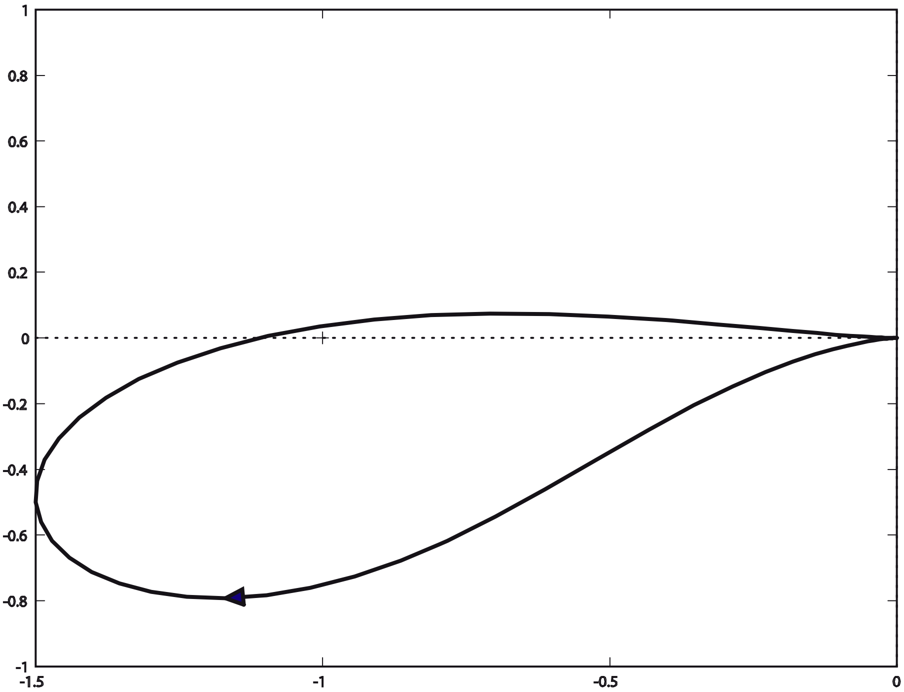
$$arctg\omega_p - arctg\frac{\omega_p^{\ 3}}{8} = -2\pi$$

$$\omega_p = 2\sqrt{2}rad/\sec$$

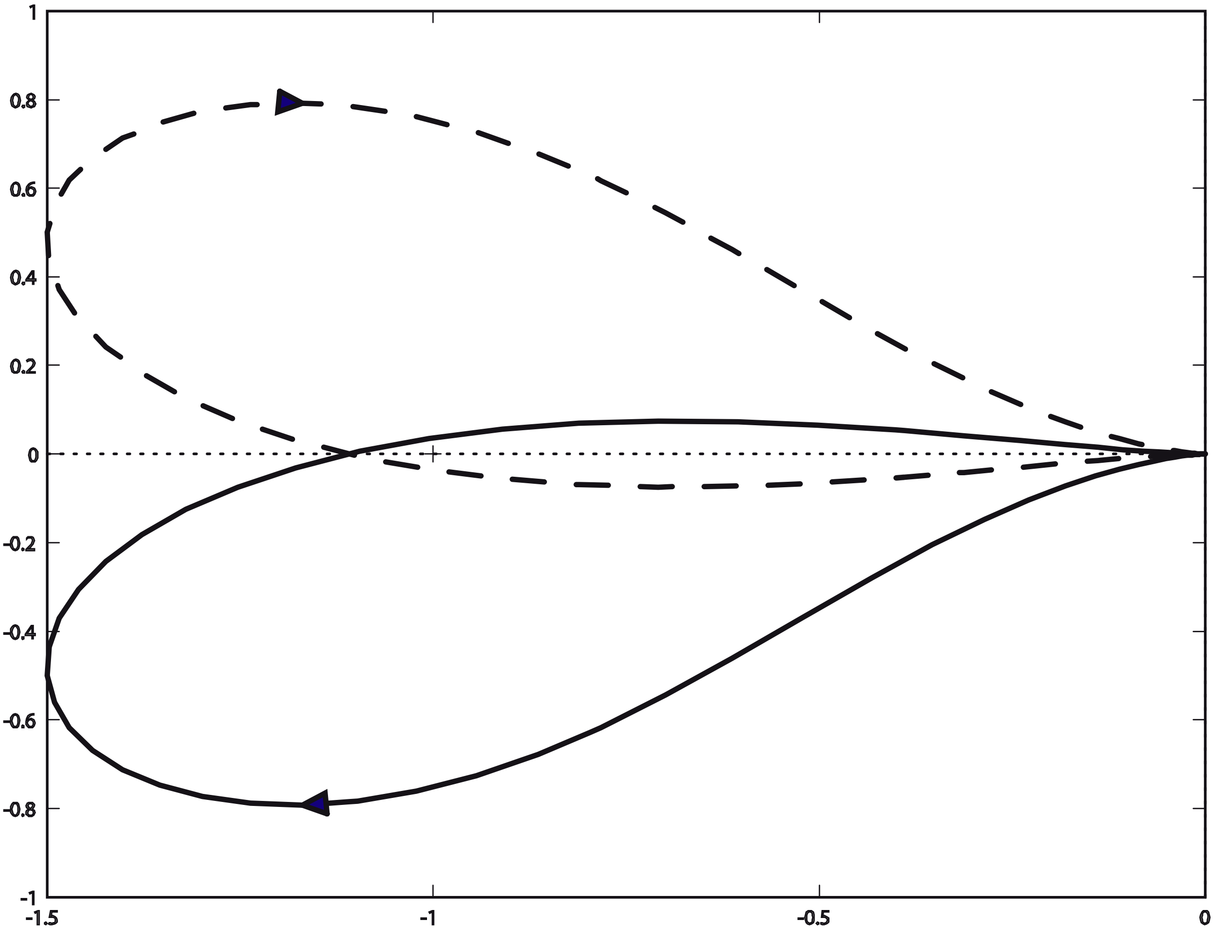
$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = \frac{10\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\left(\left(2\sqrt{2}\right)^6+64\right)^{1/2}\cdot\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2+1\right)^{1/2}} = 1.1111$$

$$L\left(j\omega_p\right) = -1.1111$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Mediante divisione polinomiale (col metodo di Ruffini per esempio) si constata che $s^3 - 8 = (s-2)(s^2+2s+4)$; quindi $s^3 - 8$ ha una radice (semplice) a parte reale positiva ($+2$) e due radici a parte reale negativa.

Il sistema ad anello aperto presenta dunque due poli a parte reale positiva (+1, +2) quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se il d.p.c. circonda due volte in senso antiorario il punto critico -1.

Considerato che in effetti il d.p.c. circonda due volte il punto critico <u>in senso orario</u> si conclude che il sistema retroazionato è **instabile** (a causa di quattro poli a parte reale positiva)

6.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K_1 \frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)} = 0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4 + 12s^3 + 32s^2 + K_1 s + K_1 = 0$$

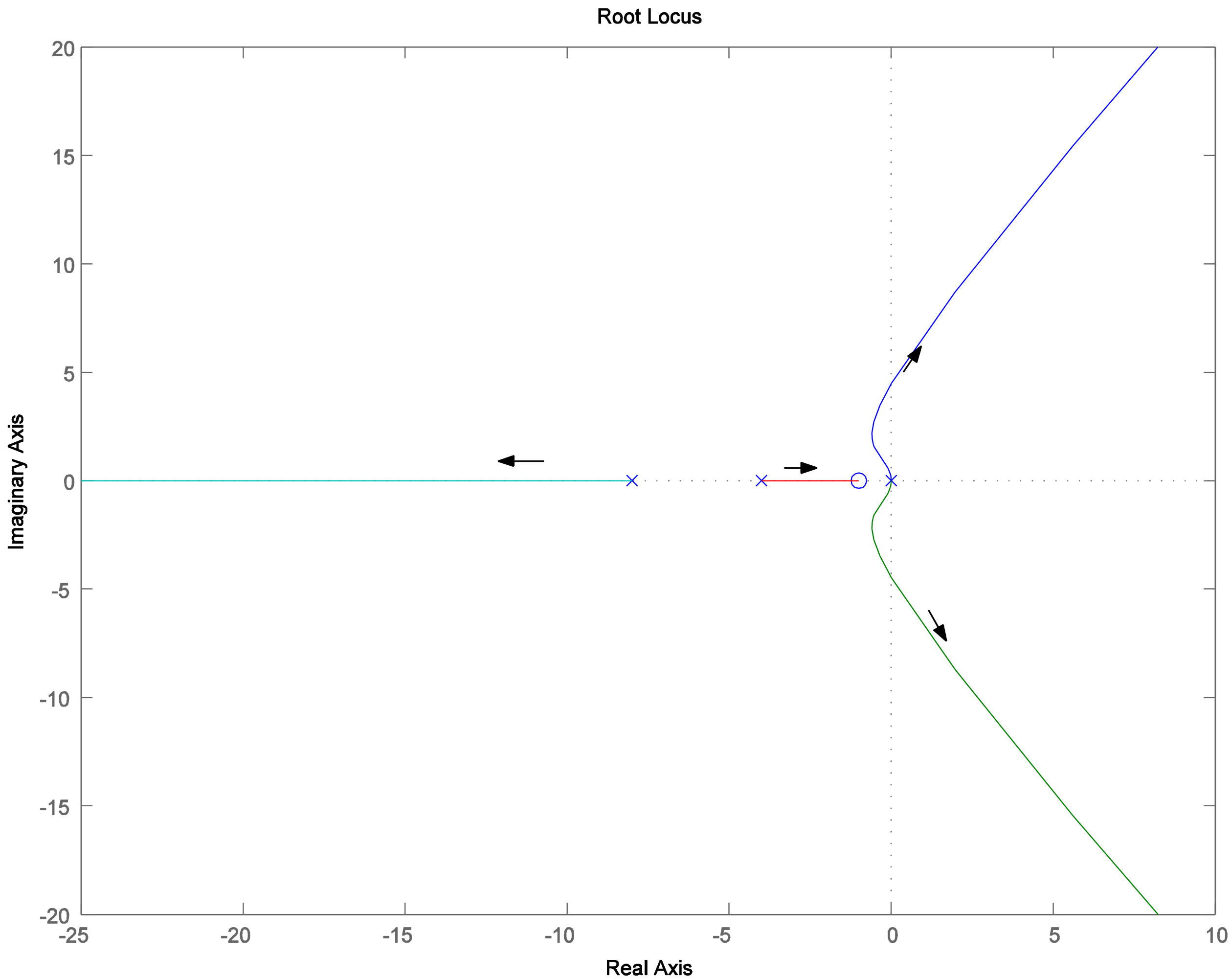
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384-K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240-K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1} = +60°,\ \vartheta_{a,2} = +180°,\ \vartheta_{a,3} = -60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a = \frac{-4-8-\left(-1\right)}{3} = -\frac{11}{3} \cong -3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2 + 12 \cdot 240 = 0$$

$$s^2 + 20 = 0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s = \pm j\sqrt{20} \cong \pm j4,47$.

7.
Il controllore è del tipo

$$C(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s^2+4)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s^2+4)(s+1)}$$

dalla specifica 3) si ha che $\frac{b_0}{4}=4$, da cui $b_0=16$, dalla specifica 2) si ha la seguente equazione

$$(s^2+4)(s+1)+b_2s^2+b_1s+b_0=(s^2+2s+2)(s+c)$$

da cui otteniamo

$$b_2=11, b_1=18, b_0=16, c=10$$

il controllore è quindi

$C(s)=\frac{11s^2+18s+16}{s^2+4}$.

8.

$$U(z)=\frac{Y(z)}{P(z)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(z-1)^2}{z} \quad\Rightarrow\quad u(k)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } k=0\\ -\frac{3}{4} & \text{se } k=1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & \text{se } k\geq 2\end{cases}$$