Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
1) L'equazione del sistema è

$$M\ddot{x} = -K_1 x - d\dot{x} - K_2 x + f$$

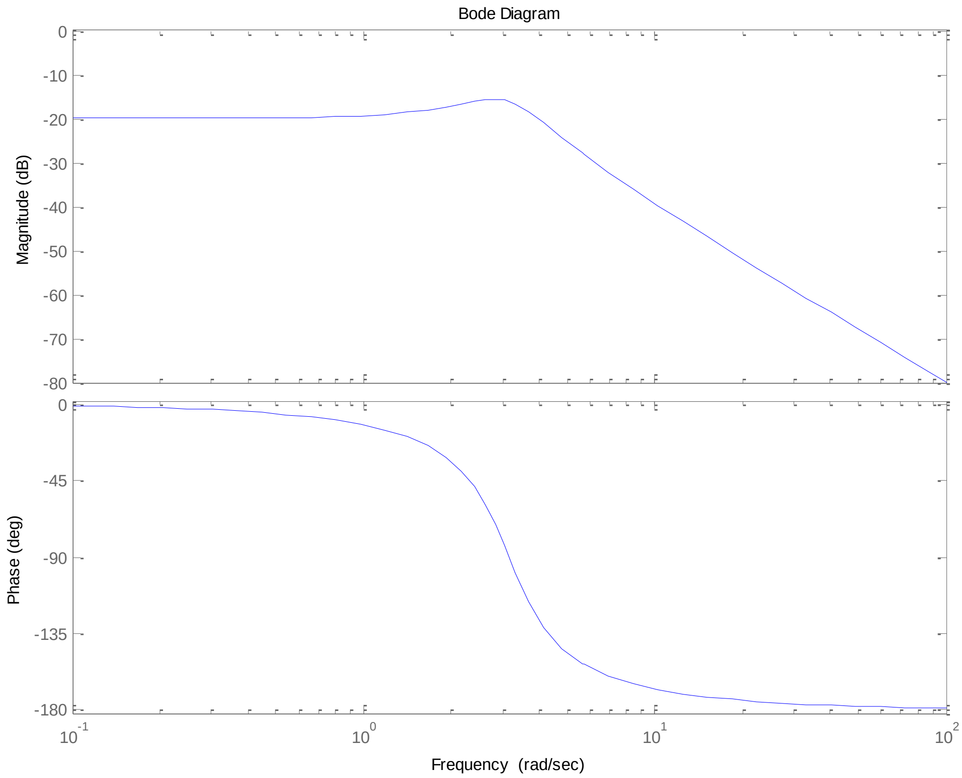
2)da cui la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + ds + K_1 + K_2}$$

3)sostituendo i valori indicati otteniamo

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

il diagramma di bode di questo sistema del secondo ordine è



$P(s)$ si può scrivere nella forma

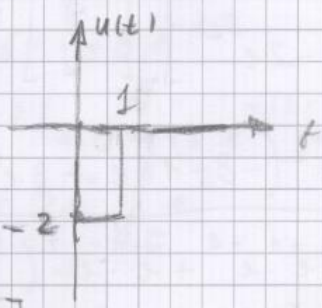
$$P(s) = \frac{1}{10(\frac{s^2}{\omega_n{}^2} + \delta\frac{2s}{\omega_n} + 1)}$$

con $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, la pulsazione di risonanza risulta

$$\omega_R = w_n\sqrt{1-2\delta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{8}\text{rad/s} \cong 2{,}828 \text{ rad/s}$$

3.

B3. $G(s) = \dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$



determinare $y(t)$ per $t > 0$

$u(t) = -2 \cdot 1(t)$ per $t \in [0,1]$

$U(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s}$ $\qquad Y(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{8}{(s+1)(s+2)} =$

$$Y(s) = \frac{-16}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$K_1 = \dfrac{-16}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} = \dfrac{-16}{1 \cdot 2} = -8$ $\qquad K_2 = \dfrac{-16}{s(s+2)}\Big|_{s=-1} = \dfrac{-16}{(-1)\cdot 1} = +16$

$K_1 + K_2 + K_3 = 0 \qquad K_3 = 8 - 16 = -8$

$$y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \qquad t \in [0,1]$$

$$Dy(t) = -16e^{-t} + 16e^{-2t}$$

$$Dy(0+) = -16 + 16 = 0 \qquad y(0+) = 0 \qquad \text{ok!}$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 1 \qquad Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$y(t) \in \overline{C}^{\rho-1}, \text{ quindi essendo } \rho = 2$$

$$\Rightarrow y(t) \in \overline{C}^{1,\infty}$$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ -e^{-1} & -2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-2e^{-2}\left(-8 + 16e^{-1} - 8e^{-2}\right) - \left(-16e^{-1} + 16e^{-2}\right)e^{-2}}{-2e^{-1} \cdot e^{-2} + e^{-1} \cdot e^{-2}} =$$

$$= \frac{-2\left(-8 + 16e^{-1} - 8e^{-2}\right) + 16e^{-1} - 16e^{-2}}{\underbrace{-2e^{-3} + e^{-3}}_{\cancel{(-e^{-3})}\ (-e^{-1})}} =$$

$$= \frac{16 - 32e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} + 16e^{-1} - \cancel{16e^{-2}}}{-e^{-1}} = \frac{16 - 16e^{-1}}{-e^{-1}} =$$

$$= -16 \cdot e + 16 = 16 - 16 \cdot e$$

$$y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \qquad t \in [0,1]$$

$$Dy(t) = -16e^{-t} + 16e^{-2t}$$

$$Dy(0+) = -16+16 = 0 \qquad y(0+) = 0 \qquad ok!$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 1$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$y(t) \in C^{g-1}, \text{ quindi essendo } g=2$$

$$\Rightarrow y(t) \in C^{1,-}$$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ -e^{-1} & -2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+16e^{-1}-8e^{-2} \\ -16e^{-1}+16e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-2e^{-2}\left(-8+16e^{-1}-8e^{-2}\right) - \left(-16e^{-1}+16e^{-2}\right)e^{-2}}{-2e^{-1}\cdot e^{-2} + e^{-1}\cdot e^{-2}} =$$

$$= \frac{-2\left(-8+16e^{-1}-8e^{-2}\right) + 16e^{-1} - 16e^{-2}}{\underbrace{-2e^{-3}+e^{-3}}_{\cancel{\left(-e^{-3}\right)}\ \left(-e^{-1}\right)}} =$$

$$= \frac{16 - 32e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} + 16e^{-1} - \cancel{16e^{-2}}}{-e^{-1}} = \frac{16-16e^{-1}}{-e^{-1}} =$$

$$= -16\cdot e + 16 = 16 - 16\cdot e$$

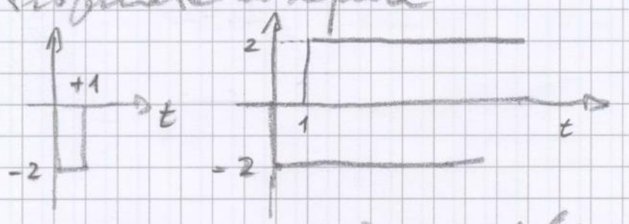
$$c_2 = \frac{\cancel{-16e^{-2}} + 16e^{-3} - 8e^{-1} \cancel{+16e^{-2}} - 8e^{-3}}{-e^{-3}} =$$

$$= \frac{-8e^{-1} + 8e^{-3}}{-e^{-3}} = 8e^{2} - 8$$

determinazione di $y(t)\big|_{t \geq 0}$ con le sole proprietà della trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}F(s)\right]$$



$$u(t) = -2\cdot 1(t) + 2\cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = -2\cdot\frac{1}{s} + 2\cdot e^{-s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{-16}{s(s+1)(s+2)} + \frac{16}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-16}{s(s+1)(s+2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right] =$$

$$= \left(-8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}\right)\cdot 1(t) + \left(+8 - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)}\right)1(t-1)$$

Quindi per $t \in [0,1)$: $y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}$

Per $t \geq 1$ $y(t) = \cancel{-8} + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \cancel{+8} - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)} =$

$$= 16e^{-t} - 16e^{-t}\cdot e - 8e^{-2t} + 8e^{-2t}\cdot e^{2}$$

$$= (16-16e)e^{-t} + (-8+8e^{2})e^{-2t}$$

ok!

4.

Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

1) Sia $L(s) := \dfrac{100(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

$$L(j\omega) = \frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{100(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\,\omega)\cdot 0.1\omega = 0$$

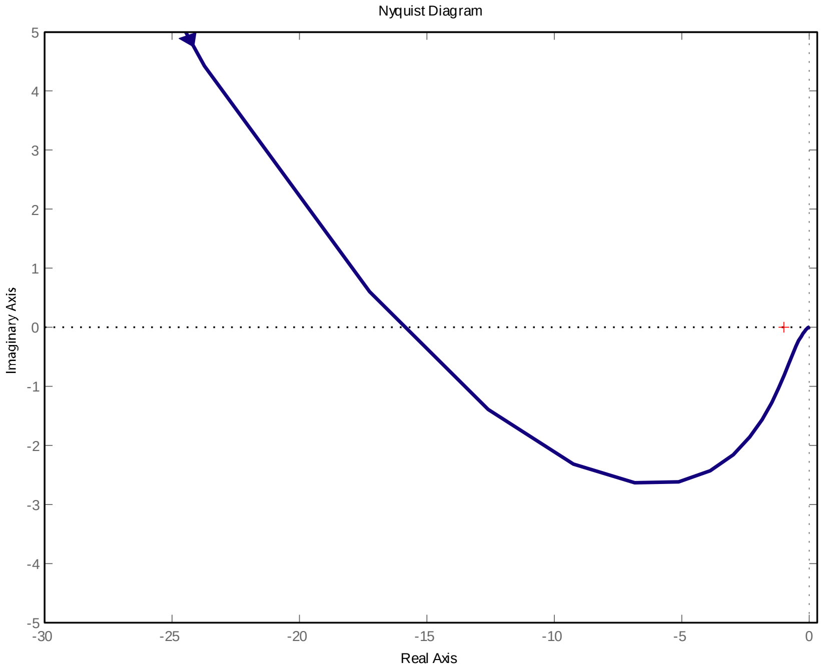
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} - \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118\,rad/\sec$$

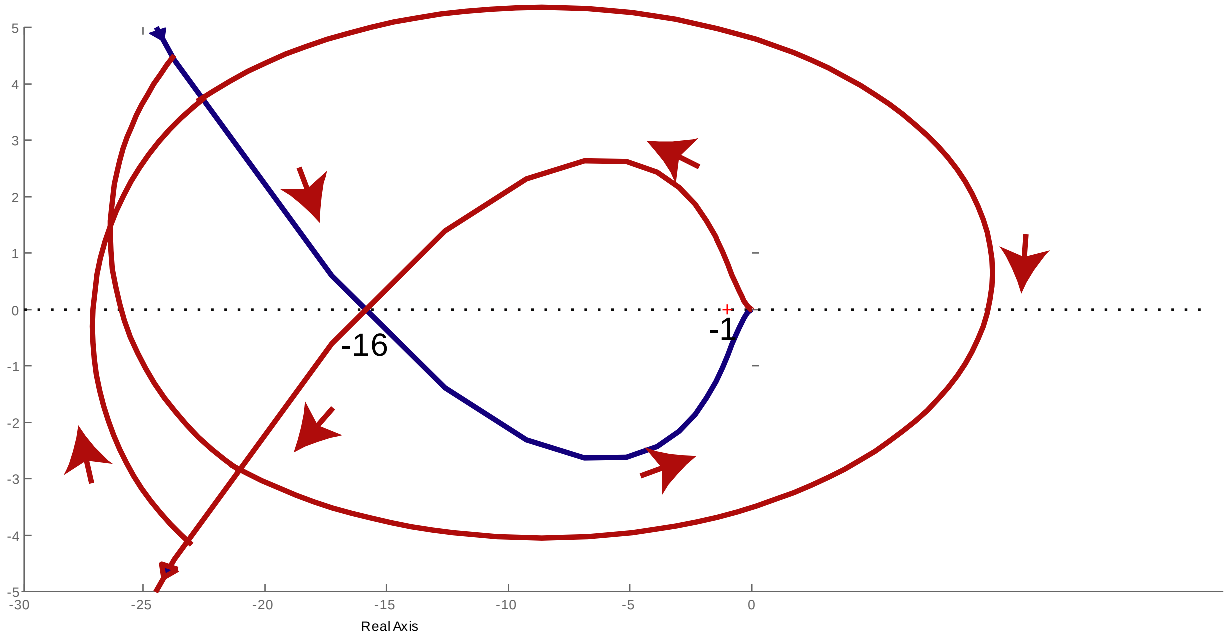
$$|L(j\omega_p)| = 16$$

$$L(j\omega_p) = -16$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

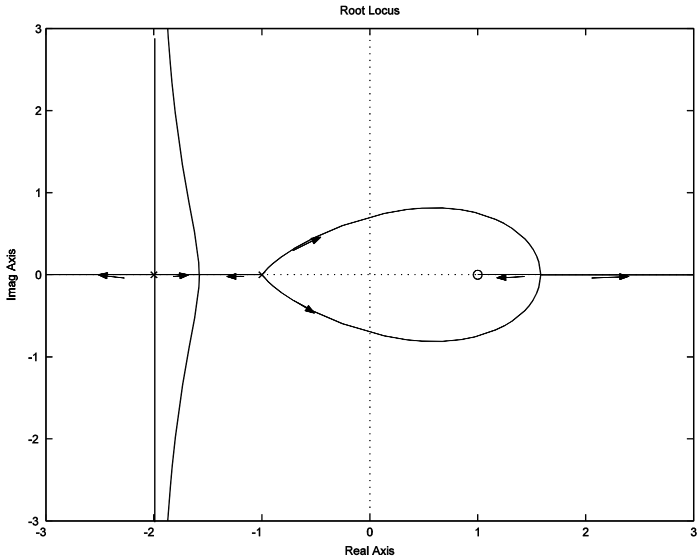
6.

L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 4 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-(+1)}{5-1}=-2$$



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$4s^2-10=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5/2}=\pm 1{,}5811$$

7.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s}, \quad b_0, b_1 \in \mathbb{R} \text{ parametri di progetto}$$

$$1 + C(s)P(s) = 0 \iff s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$$

$$\boxed{p_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$$T_a = \frac{3}{\sigma_s}, \text{ da } T_a = 9 \text{ sec.} \Rightarrow \sigma_s = \frac{1}{3}$$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$$p_d(s) = \left(s + \frac{1}{3}\right)(s+\alpha)(s+\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta > \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p_d(s) = s^3 + \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)s^2 + \left(\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $p_c(s) \equiv p_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$$

È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.

8.

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{z^2+4z+4}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = z \cdot \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} = z \cdot \left(\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{K_3}{z-\frac{1}{4}} \right)$$

$$K_1 = \left. \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \right|_{z=1} = 8$$

$$K_2 = \left. \frac{(z+2)^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2$$

$$K_1+K_2+K_3 = 1 \Rightarrow K_3 = -9$$

$$Y(z) = 8\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 9\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 8 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 9\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad k \geq 0$$