Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

$$G(s) = \frac{k}{s\left[m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & m^2 & b^2 + 2mk & 0 \\ 2 & \cancel{2}m\cancel{b} & \cancel{2}bk & 0 \\ 1 & \underbrace{b^2 m + 2m^2 k - k m^2}_{b^2 m + m^2 k} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il criterio di Routh il polinomio $m^2 s^3 + 2mbs^2 + (b^2 + 2mk)s + 2bk$ è hurwitziano. Quindi Σ ha un polo semplice nell'origine ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il teorema sulla stabilità delle perturbazioni Σ è SEMPLICEMENTE STABILE.

3.

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{s} - 2\, e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \cdot \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)} \right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\, Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$K_1 = \left. \frac{16}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left. \frac{16}{s(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)\,2} = -4$$

$$K_3 = \left. \frac{16}{s(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4\, e^{-2t} + 2\, e^{-4t} \right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t) - \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

Per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

Per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$

$$= \left(e^{4} - 1\right) 4e^{-2t} + \left(1 - e^{8}\right) 2e^{-4t}$$

4. Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

6

$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

$$G(s) = \frac{10^{\cancel{3}}(1-s)}{(1+s)\,\cancel{10^2}\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2} =$$

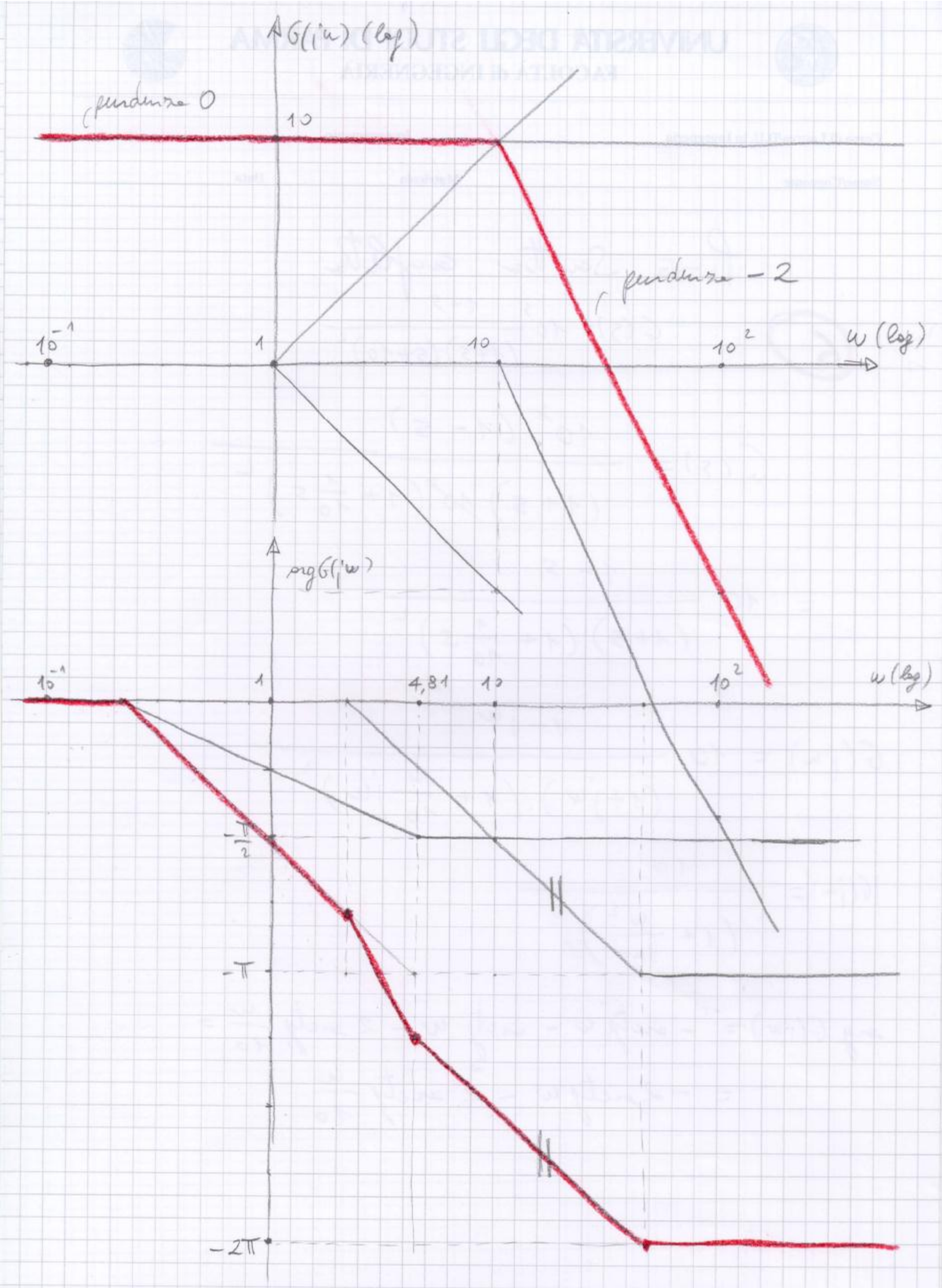
$$= 10\,\frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1-j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{10}j\omega\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)}$$

$$\arg G(j\omega) = -\operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10}$$



G(jω) (log)
pendenza 0
10
pendenza −2
10^{-1}
1
10
10^2
ω (log)
arg G(jω)
10^{-1}
1
4,81
10
10^2
ω (log)
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
-2π

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

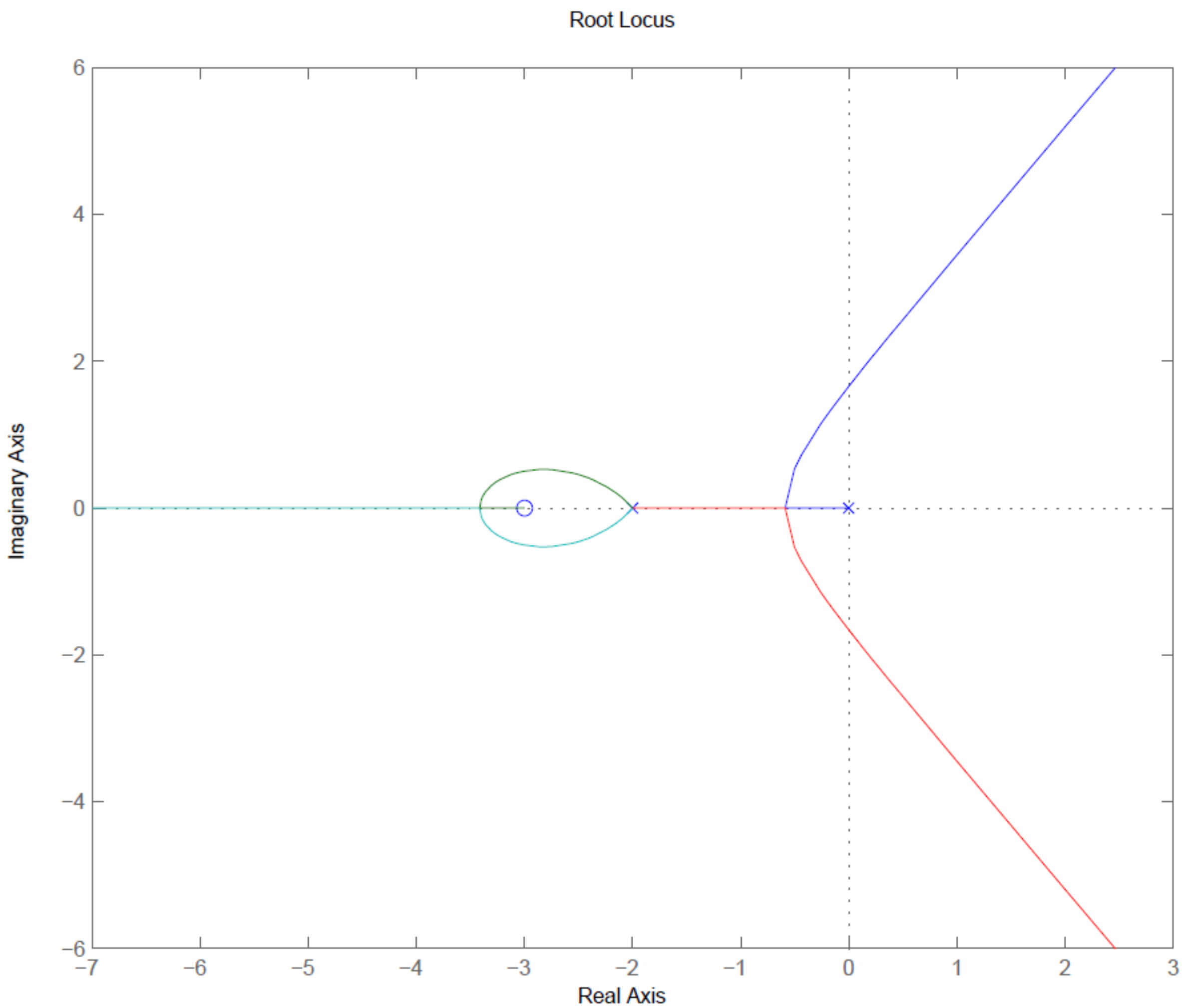
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

4	1	12	$3\,K$	0
3	6	$8+K$	0	0
2	64-K	18K	0	
1	$f(K)$	0		
0	$18\,K$	0		

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:
$48-k>0$

$k>0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k\in(0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s=-\max\{\operatorname{Re}p_1,\operatorname{Re}p_2,...,\operatorname{Re}p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s=z-0.2$.
Ponendo $s=z-0.2$ si ottiene:

$$z^3+5.4z^2+5.72z-1.368+k=0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di *k* per cui il sistema retroazionato ammette $G_s\geq 0.2s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$-1.368+k>0$

$30.888-(k-1.368)>0$

cioè $k\in[1.368,\ 32.256]$.

8.

$$u(k) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y(k) \qquad H(z) = \frac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \qquad u(k) = 1(k)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = H(z)U(z) = \frac{\left(z^2+z+1\right)z}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y(z)\cdot z^{-1} = \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{z^2+z+1}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=1} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$c_{12} + c_2 = 1 \qquad c_{12} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Y(z) = 2\,\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 2k\cdot 1(k) + \frac{2}{3}1(k) + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$$