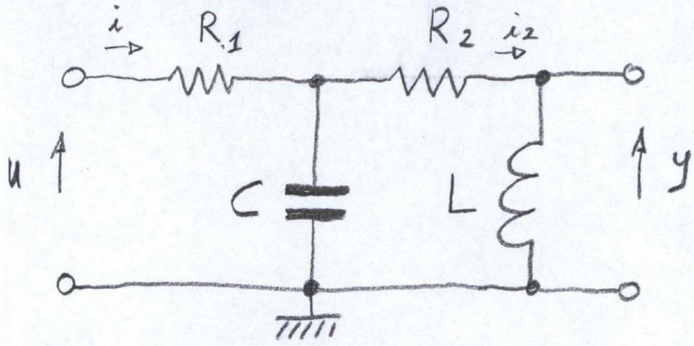
Tracce delle soluzioni

1
Vedi dispense del corso.

2.



$$Z(s) = R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + Ls)}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \qquad I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \; ; \qquad Y = Ls \cdot I_2$$

$$Y(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} \cdot U(s) \triangleq G(s)U(s)$$

f.d.t. $$G(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}$$

eq. diff. $$LR_1C\,D^2y(t) + (L + R_1R_2C)\,Dy(t) + (R_1 + R_2)\,y(t) = L\,Du(t)$$

guadagno statico $G(0) = 0$.

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

4.

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) =$$

$$= b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

$$a_2 Y(z) + a_1 \{ z^{-1} Y(z) + y_{-1} \} + a_0 \{ z^{-2} Y(z) + y_{-2} + y_{-1} z^{-1} \} =$$

$$= b_2 U(z) + b_1 \{ z^{-1} U(z) + u_{-1} \} + b_0 \{ z^{-2} U(z) + u_{-2} + u_{-1} z^{-1} \}$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 (z Y + y_{-1} z^2) + a_0 (Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z) =$$

$$= b_2 z^2 U + b_1 (z U + u_{-1} z^2) + b_0 (U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z)$$

$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$

$$= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{C(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$C(z) \triangleq c_2 z^2 + c_1 z$$

$$c_2 \triangleq b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$

$$c_1 \triangleq b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

5.

Il sistema ammette la seguente funzione di risposta armonica

$$L(j\omega) = 100 \frac{(1 - j\omega)^2}{(1 + j\omega)^2 (10 + j\omega)^2}$$

il cui modulo è dato da

$$|L(j\omega)| = 100 \frac{(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{100}{(100+\omega^2)}$$

e la cui fase è data da

$$\arg L(j\omega) = -2\arctan\omega - 2\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10} = -4\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10}.$$

Valutando i valori al limite si ottiene

$$\lim_{\omega\to 0} |L(j\omega)| = 1 \qquad \lim_{\omega\to 0} \arg L(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -4\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = -3\pi\,.$$

Al fine di ottenere un miglior tracciamento e di valutare la stabilità del sistema è necessario valutare l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-4\arctan\omega_p - 2\arctan\frac{\omega_p}{10} = -\pi$$

$$2\arctan\omega_p + \arctan\frac{\omega_p}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan(2\arctan\omega_p) + \frac{\omega_p}{10}}{1 - \tan(2\arctan\omega_p)\frac{\omega_p}{10}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - \tan(2\arctan\omega_p)\frac{\omega_p}{10} = 0$$

Poiché si ha che

$$\tan(2\arctan\omega_p) = \tan(\arctan\omega_p + \arctan\omega_p) = \frac{\omega_p + \omega_p}{1 - \omega_p\omega_p} = \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}$$

l'equazione da risolvere sarà

$$1 - \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}\frac{\omega_p}{10} = 1 - \frac{\omega_p^2}{5(1-\omega_p^2)} = 0$$

$$5 - 5\omega_p^2 - \omega_p^2 = 5 - 6\omega_p^2 = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}9129\,\text{rad/s}$$

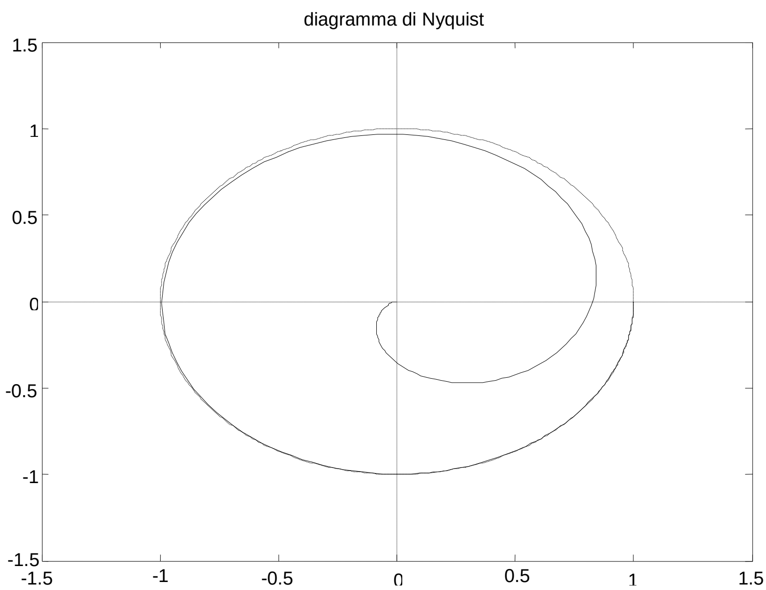
e l'intersezione sarà data da

$$|L(j\omega_p)| = \frac{100}{(100+\omega_p^2)} = \frac{100}{\left(100 + \frac{5}{6}\right)} = 0.9917$$

Pertanto

$$L(j\omega_p) = -0{,}9917$$

In accordo con i risultati ottenuti, il diagramma complessivo sarà il seguente



b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che L(s) non presenta poli a parte reale negativa ne consegue, per il Criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si osservi che tale stabilità è, da un punto di vista realizzativo, alquanto precaria in virtù di un margine di ampiezza estremamente piccolo (M_A=1,0083).

6.

4. Eq. caratteristica $1+K\dfrac{1}{s(s+2)^3}=0$

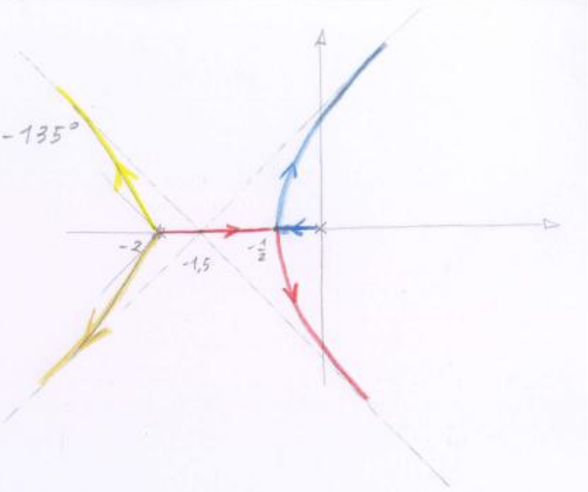
a) Asintoti del luogo: $\sigma_a=\dfrac{0-2-2-2}{4}=-1,5$

$\theta_{1,a}=+45°,\ \theta_{2,a}=+135°,\ \theta_{3,a}=-45°,\ \theta_{4,a}=-135°$

Radici doppie: $3\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s}=0 \Rightarrow s=-\dfrac{1}{2}=-0,5$

Angoli di partenza: da $P_1=0$ $\theta_1=180°$

da $P_2=-2$ $\theta_{2,1}=0°,\ \theta_{2,2}=+120°,\ \theta_{2,3}=-120°$



b) $s^4+6s^3+12s^2+8s+K=0$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 12 & K \\ 3 & \cancel{6}\,3 & \cancel{8}\,4 & 0 \\ 2 & 32 & 3K & 0 \\ 1 & 128-9K & 0 & \\ 0 & 3K & & \end{array}$$

$\begin{cases}128-9K>0\\ 3K>0\end{cases}$

$K\in\left(0,\dfrac{128}{9}\right)\simeq(0,14,\bar{2})$

eq. ausiliaria per $K=\dfrac{128}{9}$: $32s^2+3\dfrac{128}{9}=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{\dfrac{4}{3}}\simeq\pm j\,1,1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j\,1,1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1+K^*P(-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow 1+K^*\dfrac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3}=0 \Rightarrow K^*=\dfrac{27}{16}=1,6875.$

7.

Soluzione

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C\,P = \frac{9\cdot(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)}{s(s^2+9)(s+5)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,L(s) = \frac{\cancel{9}\cdot y_0}{\cancel{9}\cdot 5} = \frac{y_0}{5} = 4$$

$y_0 = 20$ ovvero $\frac{9 y_0}{9\cdot 5} = 4$

$1 + L(s) = 0$

$$s(s^2+9)\cdot(s+5) + 9(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)$$

$$((s+2)^2+1)(s+2)(s+c)$$

$9y_3 + 5 = 6 + c$ $\quad 9y_3 + 5 = 24 \quad 9y_3 = 19 \quad y_3 = \frac{19}{9}$

$9y_2 + 9 = 13 + 6c$ $\quad 9y_2 + 9 = 13 + 108 \quad 9y_2 = 112 \quad y_2 = \frac{112}{9}$

$9y_1 + 45 = 10 + 13c$ $\quad 9y_1 + 45 = 10 + 234 \quad 9y_1 = 199 \quad y_1 = \frac{199}{9}$

$180 = 10c \Rightarrow c = 18$ $\quad c \gg 2$ ok!

$$C(s) = \frac{2{,}11 s^3 + 12{,}4 s^2 + 13{,}2 s + 20}{s(s^2+9)}$$

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}} = \dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0}$$