SOLUZIONI – 2° turno
Parte A

1) $T(s)=\dfrac{s+1}{s^3\left[(s+2)^2+9\right]}$

2) $y(t)=-2\sin(2t)$

3) a) Σ è asintoticamente stabile: F
b) Σ è semplicemente stabile: V
c) Σ è instabile: F
d) Σ è a fase minima: F
e) Σ è stabile ingresso-limitato uscita limitata: F

4) $A=1$ e $B=3$.

5) $\sigma_a=-5$

6) $C_r(s)=\dfrac{1+0.1s}{1+0.5s}$; $\tau=0.5$; $\alpha=0.2$

7) $t_0=8$ sec.

8) $\{\text{poli di }\Sigma\}=\{-1,\ -4\}$

9) Modi = $\{\ e^{-t}, te^{-t}\ \}$

10)
a) Il sistema è internamente asintoticamente stabile: F
b) Il sistema è ben connesso: V

11) $\mathcal{Z}[x(k+6)]=z^6\mathcal{Z}[x(k)]-x(0)z^6-x(1)z^5-x(2)z^4-x(3)z^3-x(4)z^2-x(5)z$

12) $D^*f(t)=1(t-3)+3\delta(t-3)+2\delta(t)$

13) $C_d(z)=\frac{z+1}{z-1}$

14)
a) Determinarne il guadagno statico del sistema: $H(1)=5$
b) Determinarne la risposta all'impulso: $h(k)=(0.8)^k\cdot 1(k)$

15) $n_C=4$

16) $T_a=0.5$ sec.

17) $n_+(a)=0$
$n_-(a)=1$
$n_0(a)=2$

18) $\omega_m=1$ rad/s

1.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{array}\begin{cases} k x_2 = m\,D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (m D^2 + k)\, x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2x_1 + 2kx_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\,D^2 x_1 + km\,D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\,D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2} \qquad \text{f.d.t.}$$

$$m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

modi di Σ:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

2.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = \left.-\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è
{grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

N.B.
Correzione sul calcolo di k_3:
k_3 = 1/(s (s+1)^3)|_{s=-2} = 1/2

3.

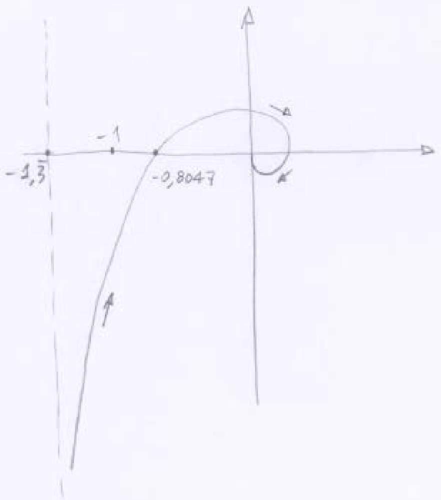
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4 \,\mathrm{arctg}\, \omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\overline{3}$

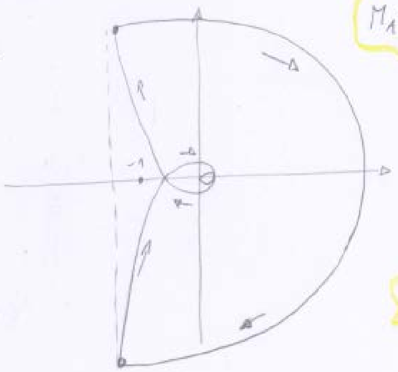
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \mathrm{arctg}\, \omega_p = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

$\arg L(j\omega_c) = -163^\circ{,}74$

$M_F = 16^\circ{,}26$

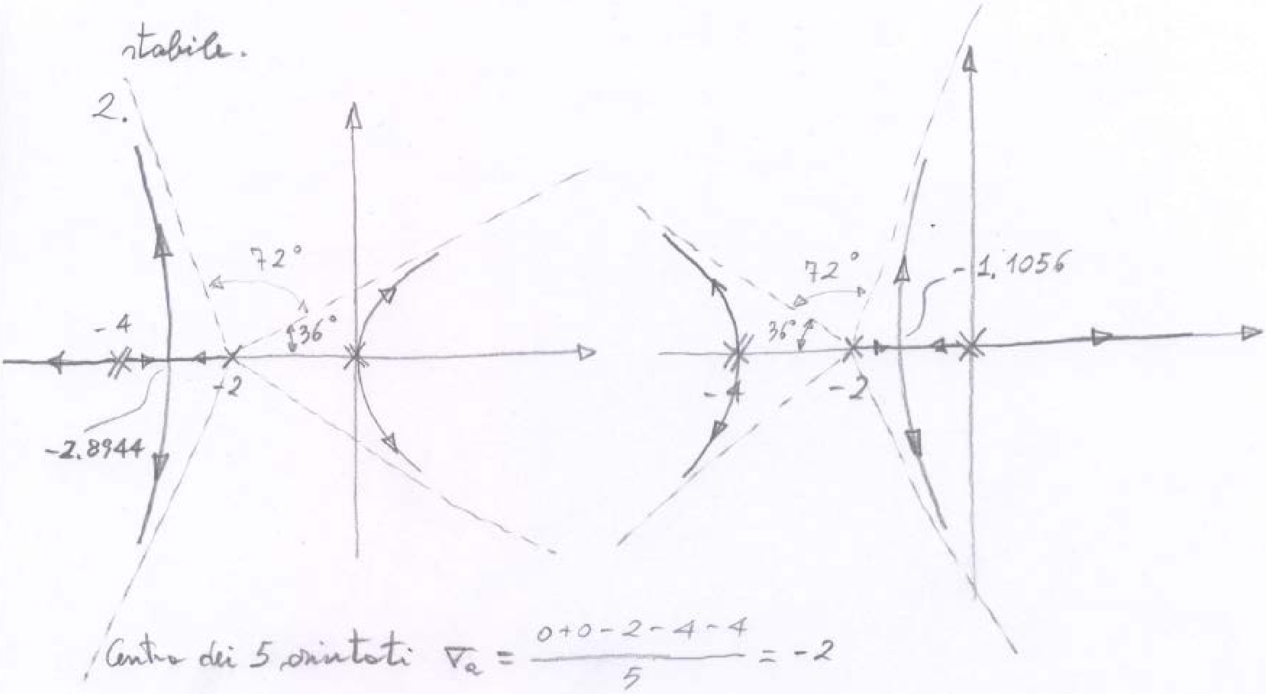
$L(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1. Quindi per il C. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

4.

1. $1 + K \dfrac{1}{s^2(s+2)(s+4)^2} = 0$

Il polinomio caratteristico è quindi $s^5 + 10s^4 + 32s^3 + 32s^2 + K$.
Dalla nota proprietà che un polinomio è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono (strettamente) positivi segue che $\forall K \in \mathbb{R}$ il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

2.



Centro dei 5 asintoti $\sigma_a = \dfrac{0+0-2-4-4}{5} = -2$

Calcolo delle radici doppie : $\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2}{s+4} = 0$

$5s^2 + 20s + 16 = 0$ da cui $s_{1,2} = -2.8944$ e -1.1056

5.

b. $C(s) = k \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

$$L(0) = \frac{k}{10} \qquad K_p = L(0) = 19$$

$k = 190$ imposizione $-\dfrac{1}{\tau} = -2$ (CANCELLAZIONE POLO-ZERO)

$$\tau = \frac{1}{2}$$

$$L(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s} \cdot \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{\cancel{s+2}}{(\alpha s+2)} \cdot \frac{1900}{\cancel{(s+2)}(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{1900}{(\alpha s+2)(s+5)(s+10)}$$

$L(s;\alpha) + \frac{1}{2} = 0$ ottengo radici pur. immaginarie

$$3800 + (\alpha s+2)(s^2+15s+50) = 0$$

$$\alpha s^3 + (15\alpha + 2)s^2 + (50\alpha + 30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \alpha & 50\alpha + 30 \\
2 & 15\alpha + 2 & 3900 \\
1 & f(\alpha) &
\end{array}$$

$$f(\alpha) = (15\alpha + 2)(50\alpha + 30) - 3900\alpha =$$

$$= 100\alpha + 60 + 750\alpha^2 + 450\alpha - 3900\alpha =$$

$$= 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{+1675 \pm \sqrt{1675^2 - 60 \cdot 750}}{750} = \frac{1675 \pm \sqrt{2 \cdot 760 \cdot 625}}{750}$$

$$= \frac{1675 \pm 1661{,}5123}{750} = \begin{cases} 4{,}4487 & \text{da SCARTARE} \\ 0{,}0180 & [0{,}0179828\ldots] \end{cases}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha = 0{,}0180$$

$$C(s) = 180 \frac{1 + \frac{1}{2}s}{1 + 0{,}0180 \cdot \frac{1}{2}s}$$

Calcolo di F :

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{19}{1+19} = 1 \qquad \boxed{F = \frac{20}{19} = 1{,}0526}$$

6.

$$\boxed{X(z) = \frac{2z^3+z+1}{(z-1)(z-2)^2}} = c_0 + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z-2)^2} + \frac{c_{22}}{z-2}$$

$$c_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z) = 2$$

$$c_1 = \left.\frac{2z^3+z+1}{(z-2)^2}\right|_{z=1} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{2z^3+z+1}{z-1}\right|_{z=2} = 19$$

$$c_{22} = D\left[\frac{2z^3+z+1}{z-1}\right]_{z=2} = \left.\frac{(6z^2+1)(z-1)-(2z^3+z+1)}{(z-1)^2}\right|_{z=2} =$$

$$= 25 - (16+2+1) = 25 - 19 = 6$$

$$\boxed{x(k) = 2\,\delta(k) + 4 \cdot 1(k-1) + 19\,(k-1)\,2^{k-2} \cdot 1(k-1) + 6 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1)}$$