Tracce delle soluzioni

1.
Vedi le dispense del corso.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{array}\begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + 2 k x_1 \\ (m D^2 + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 x_1 + 2 k x_1) = k f + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2 k m D^2 x_1 + k m D^2 x_1 + 2 k^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3 k m D^2 x_1 + k^2 x_1 = k f} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2} \qquad \text{f.d.t.}$$

$$m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$P_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \qquad P_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}}$$

modi di Σ:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \operatorname{sen}\left(0{,}618 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

3.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{s^2 (s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4\,(s+1)^{\cancel{3}\,0}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1)\left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!}\, t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

$$\boxed{y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3}\, t^3 e^{-t} + 2\, t^2 e^{-t} + 6\, t\, e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

4.
Vedi appunti delle lezioni.

5.
1)

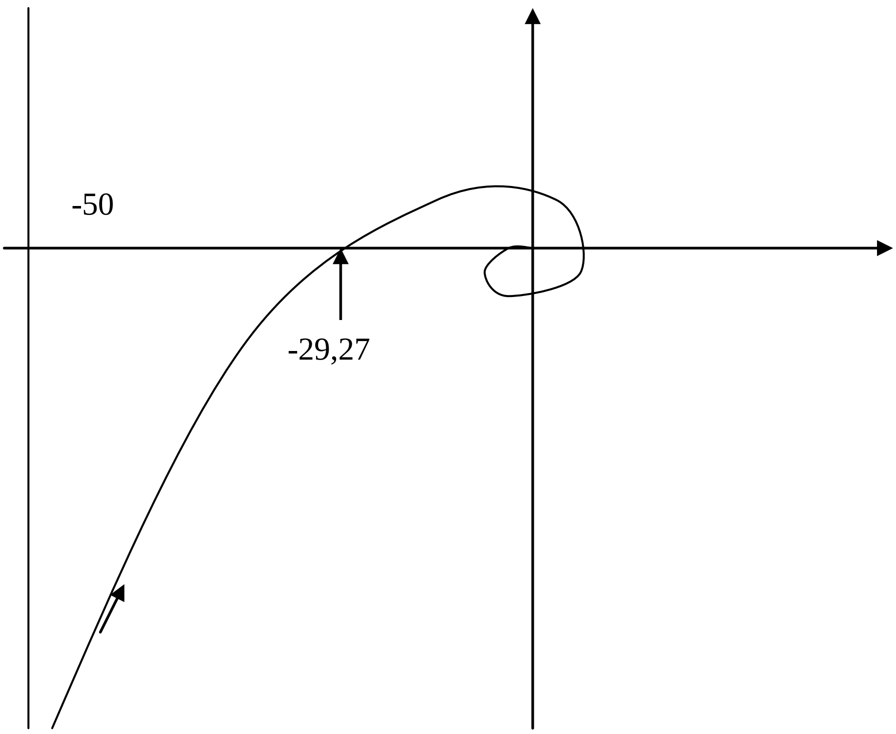
$$P(j\omega) = \frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5 \text{ arctg } \omega$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

$$|P(j\omega_p)| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

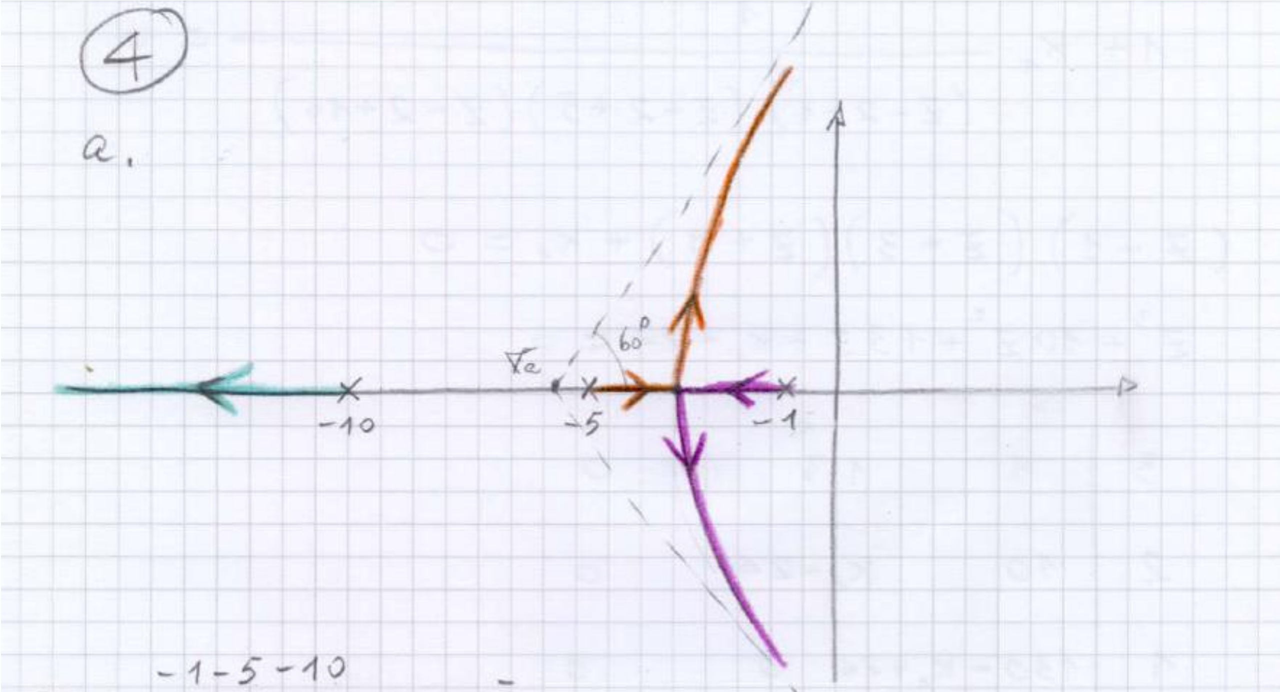
2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$

$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$$

6.



$$\sigma_a = \frac{-1-5-10}{3} = -5,\bar{3}$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$(s+5)(s+10) + (s+1)(s+10) + (s+1)(s+5) = 0$$

$$3s^2 + 32s + 65 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} -2,7299 \\ -7,9367 \text{ (da scartare)} \end{cases}$$

b. Cambio di variabile complessa $z = s + 2$

$s = z - 2$

$$1 + K_1 \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)} = 0 \quad \text{eq. carat.}$$

$$1 + K_1 \cdot \frac{1}{(z-2+1)(z-2+5)(z-2+10)} = 0$$

$$(z-1)(z+3)(z+8) + k_1 = 0$$

$$z^3 + 10z^2 + 13z + k_1 - 24 = 0$$

3	1	13	0
2	10	$k_1 - 24$	0
1	$130 - k_1 + 24$	0	0
0	$k_1 - 24$		

$$\begin{cases} 154 - k_1 > 0 & k_1 < 154 \\ k_1 - 24 > 0 & k_1 > 24 \end{cases}$$

Quindi $K_1 \in [24, 154]$

c.

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0$$

$$K_1^* \ni \quad 1 + K_1^*\, G_1(-2{,}7299) = 0$$

$$K_1^* = -\frac{1}{G_1(-2{,}7299)} =$$

$$= -(s+1)(s+5)(s+10)\Big|_{s=-2{,}7299} = 28{,}55$$

7.

L'ordine minimo per il controllore $C(s)$ è 2.

1. Disturbo sinusoidale $d(t) = A\ \sin(\omega\, t + 4) = 3\ \sin(2\, t + 4)$; per la reiezione asintotica al disturbo pongo un polo complesso coniugato alla pulsazione $\omega = 2$. Il controllore di ordine minimo sarà della forma:

$$C(s) = \frac{b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2 + 4)}$$

3. Costante di posizione $K_p = 4$:

$$L(s) = C(s)\, P(s)$$

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \ \Rightarrow\ K_p = \frac{b_0}{2} = 4 \ \Rightarrow\ b_0 = 8$$

2. Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$.
Polinomio caratteristico:

$$p_c(s) = (s^2+4)(s+2)+4\, b_2\, s^2+4\, b_1\, s+32 = 0 \ \Rightarrow\ p_c(s) = s^3+(4\, b_2+2)s^2+(4\, b_1+4)s+40 = 0$$

Polinomio desiderato:

$$p_d(s) = [(s+2)^2 + 1]\,(s+\alpha) = s^3 + (\alpha+4)\, s^2 + (4\,\alpha+5)\, s + 5\,\alpha$$

Si impone $p_c(s) = p_d(s)$ e si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha + 4 = 4\, b_2 + 2 \\ 4\,\alpha + 5 = 4\, b_1 + 4 \\ 5\,\alpha = 40 \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} b_1 = 8.25 \\ b_2 = 2.5 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Verifico: $-\alpha = -8 << -2 \ \Rightarrow$ i poli $-2 \pm j$ sono dominanti

4. Errore a regime nullo: {guadagno statico fra r ed y} $= 1$
Calcolo F:

$$F\, \frac{L(0)}{1 + L(0)} = 1 \ \Rightarrow\ F\, \frac{4}{5} = 1 \ \Rightarrow\ F = \frac{5}{4} = 1.25$$

8.

Si ottiene

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2-1)} = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)}\ ,$$

da cui

$$x(k) = \frac{1}{4}((-1)^k - 1) + \frac{k}{2}\ .$$