Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.
L'equazione del sistema è

$$M\ddot{x} = -K_1 x - d\dot{x} - K_2 x + f$$

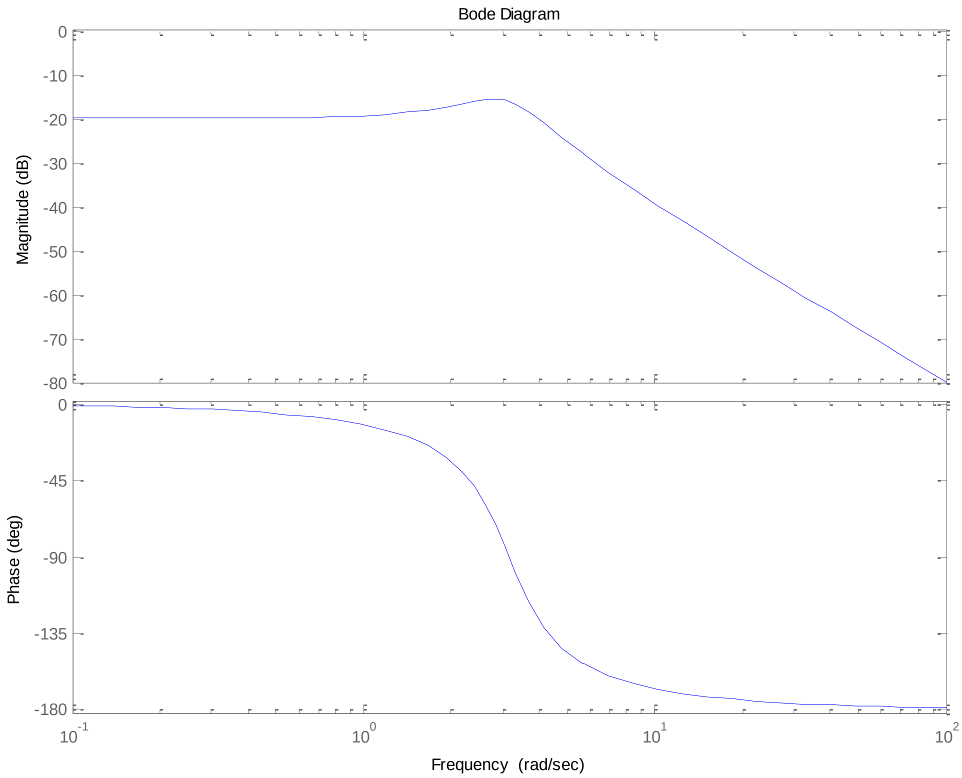
2)da cui la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + ds + K_1 + K_2}$$

3)sostituendo i valori indicati otteniamo

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

il diagramma di bode di questo sistema del secondo ordine è



$P(s)$ si può scrivere nella forma

$$P(s) = \frac{1}{10(\frac{s^2}{\omega_n{}^2} + \delta\frac{2s}{\omega_n} + 1)}$$

con $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, la pulsazione di risonanza risulta

$$\omega_R = w_n\sqrt{1-2\delta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{8}\text{rad/s} \cong 2{,}828 \text{ rad/s}$$

3.

1^o metodo :

Calcolo di $y(t)$ per $0 \le t < 1$:

$$u(t) = 1, \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2};$$

$$k_1 = \left.\frac{4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2\ ; \quad k_2 = \left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4\ ; \quad k_3 = \left.\frac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 2\ ;$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Calcolo di $y(t)$ per $t \ge 1$:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Considerato che $\rho = 2$ e $y \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{C^{1,\infty}}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases} ,$$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$ per $t \ge 1$; $\qquad Dy(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}$ per $0 \le t < 1$

$$\begin{cases} 2 - 4e^{-1} + 2e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ 4e^{-1} - 4e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 4e - 4\ ; \ c_2 = 2 - 2e^2\ ;$$

$$y(t) = 4(e-1) \cdot e^{-t} + 2(1-e^2) \cdot e^{-2t}$$

2° metodo :

$u(t)=1(t)-1(t-1),\quad U(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}$

$\Rightarrow\quad Y(s)=G(s)U(s)=\frac{4}{(s+1)(s+2)}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right]$

$Y(s)=\frac{4}{s(s+1)(s+2)}-\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right]$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{2}{s+2}\right]=2-4e^{-t}+2e^{-2t}\quad$ per $t\geq 0$

Digressione: dal teorema di traslazione nel tempo

$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\right]=e^{-t_0 s}F(s)\ ;\ \ F(s):=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$

$\Rightarrow f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}F(s)\right]$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right]=\left[2-4e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)\quad$ per $t\geq 0$

$y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}-\left[2-4e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$

da cui per $0\leq t<1$: $y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}$

e per $t\geq 1$: $y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}-\left[2-4e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right]=$

$$=(-4+4e)e^{-t}+(2-2e^{2})e^{-2t}$$

4.

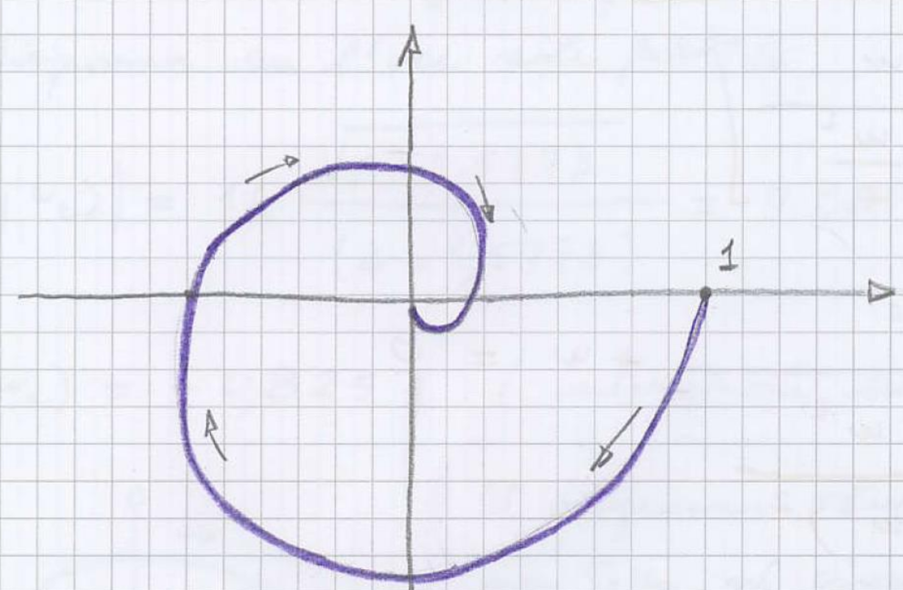
Vedi appunti del corso.

5.

a) $L(j\omega) = 16 \dfrac{1 - j\omega}{(j\omega + 2)^4}$; $L(j0) = 1$

$|L(j\omega)| = 16 \dfrac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$

$\arg L(j\omega) = -4 \, \mathrm{arctg} \dfrac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\, \omega$



$\lim_{\omega \to +\infty} L(j\omega) = -5 \dfrac{\pi}{2} = -2\pi - \dfrac{\pi}{2}$

Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(jw) = -\pi$$

$$+4\,\mathrm{arctg}\frac{w}{2} + \mathrm{arctg}\,w = +\pi$$

$$\mathrm{tg}\left(4\,\mathrm{arctg}\frac{w}{2}\right) + w = 0$$

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{w}{2}\right)}{1-\left[\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{w}{2}\right)\right]^2} + w = 0$$

$$\frac{2\left[\dfrac{w}{1-\frac{w^2}{4}}\right]}{1-\left[\dfrac{w}{1-\frac{w^2}{4}}\right]^2} + w = 0$$

$$\frac{2\,\dfrac{4w}{4-w^2}}{1-\dfrac{16w^2}{(4-w^2)^2}} + w = 0$$

$$\frac{\dfrac{8w}{\cancel{4-w^2}}}{\dfrac{(4-w^2)^2-16w^2}{(4-w^2)^{\cancel{2}}}} + w = 0$$

$$\frac{8w(4-w^2)}{(4-w^2)^2-16w^2}+w=0$$

Si scarta la soluzione $w=0$

$$8(4-w^2)+(4-w^2)^2-16w^2=0$$

$$x \triangleq w^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

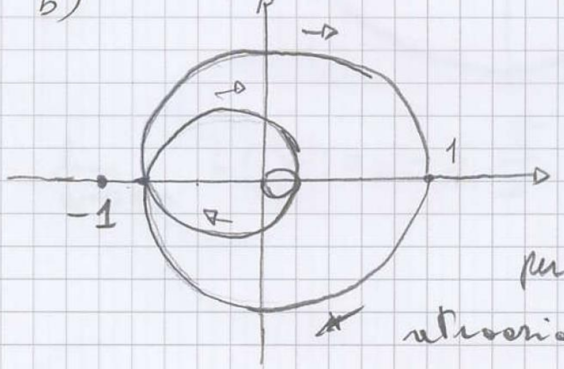
$$x_{1,2}=\begin{cases}30{,}4222\\1{,}5778\end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{aligned}w_1&=5{,}5156 \text{ rad/sec}\\ w_2&=1{,}2561 \text{ rad/sec}\end{aligned}$$

Si scarta la soluzione w_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(jw_2)|=16\,\frac{\sqrt{1+1{,}5778}}{(4+1{,}5778)}=0{,}8257$$

$$L(jw_2)=-0{,}8257 \quad (\text{intersezione cercata})$$

b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico −1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è quindi stabile.

$$M_A=\frac{1}{0{,}8257}\simeq 1{,}21$$

6.
Si nota che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\left[-5 - 5 - (1+1)\right] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

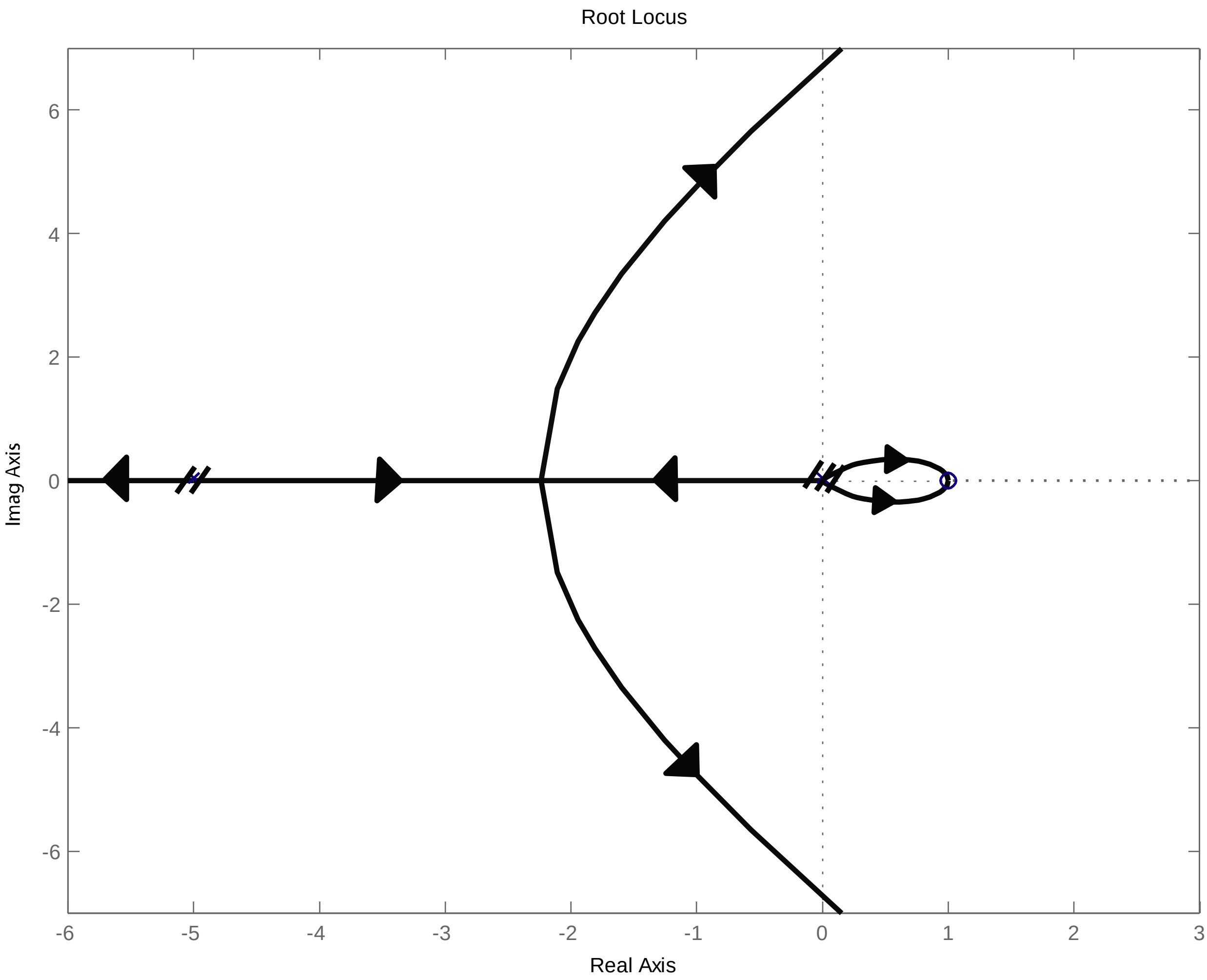
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



7.

1) La specifica a) equivale a $\left|\dfrac{1}{1+K_p}\right| = \dfrac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p = 49$ oppure $K_p = -51$. Dato che $K_p = K\,\dfrac{5}{2}$ ed è opportuno scegliere $K > 0$ (al fine dell'ottenimento di una facile stabilizzabilità) si impone

$$K_p = 49 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{98}{5}$$

Definiamo

$$L(s) := KP(s) = 1960\,\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s) := C(s)P(s) = 1960\,\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\,\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega) = 1960 \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)^2 (j\omega + 10)}$$

$$\arg L(j\omega) = \text{arctg } \omega - 2 \text{ arctg } \frac{\omega}{2} - \text{ arctg } \frac{\omega}{10}$$

$$|L(j\omega)| = 1960 \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$$\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$\arg L(j\omega_0) = -2,0611 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0,2079 \text{ rad}$$

$$|L(j\omega_0)| = 13,393$$

verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|, \varphi_0\right) \in C$?

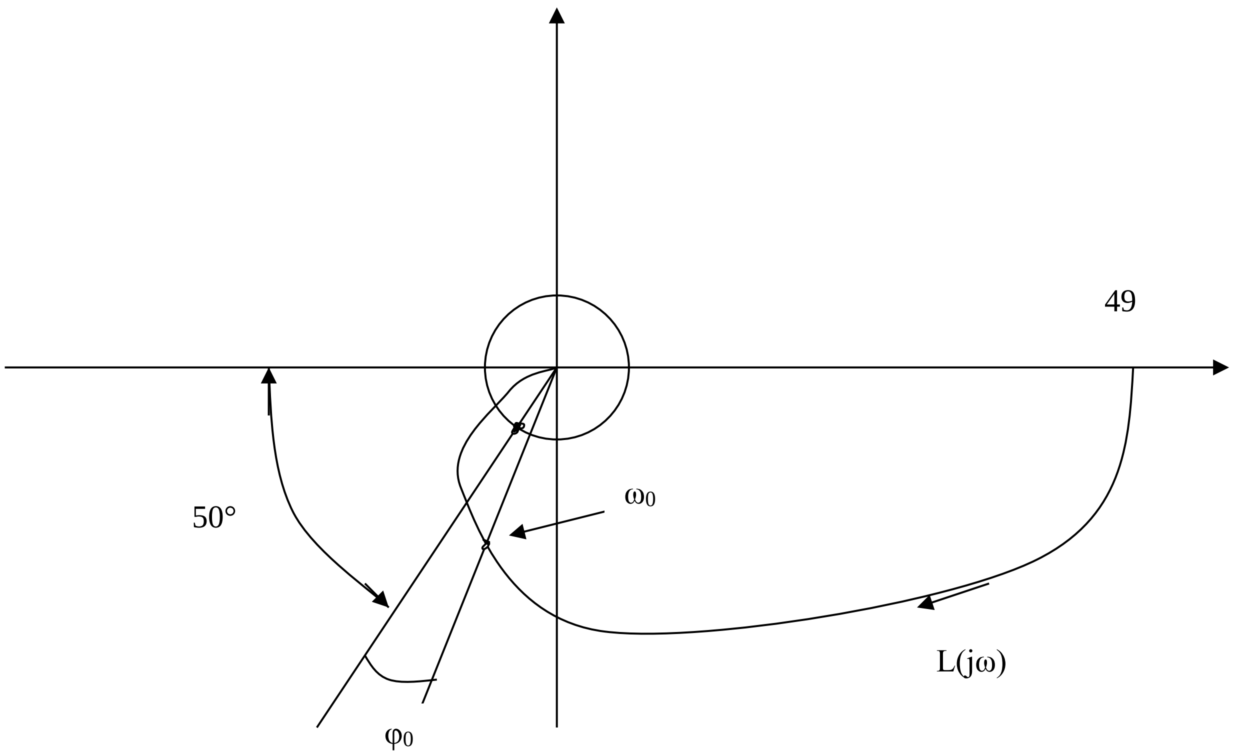
sì, perchè $\cos \varphi_0 > 1/|L(j\omega_0)|$: 0,9785 > 0,0747.

Si definisce $M := |L(j\omega)|$ e $\varphi := \varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

$$\frac{1}{M} e^{-j\varphi} = \frac{1 + \alpha\tau j\omega_0}{1 + \tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = 0,07280 \\[2ex] \tau = \dfrac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \text{ sen } \varphi} = 6,016 \text{ s} \end{cases}$$



8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \frac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}} = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0}$$