Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.

Impedenza del parallelo capacità e resistenza Z_p:

$$Z_p = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+RCs}$$

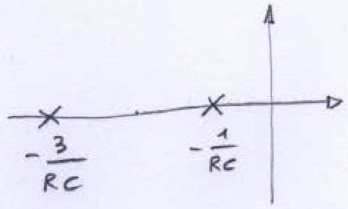
Impedenza di trasferimento del tripolo Z_t:

$$Z_t = R + R + \frac{R \cdot R}{Z_p} = 2R + \frac{R^2}{\frac{R}{1+RCs}} = 2R + R(1+RCs)$$

$$G(s) = -\frac{Z_p}{Z_t} = -\frac{\frac{R}{1+RCs}}{2R + R(1+RCs)}$$

① $$G(s) = -\frac{1}{(1+RCs)(3+RCs)}$$

② Poli: $-\frac{1}{RC}$, $-\frac{3}{RC}$



modi di $\Sigma = \left\{ e^{-\frac{t}{RC}} , e^{-\frac{3t}{RC}} \right\}$

③ $$(1+RCs)(3+RCs) = 3 + RCs + 3RCs + (RC)^2 s^2 =$$
$$= (RC)^2 s^2 + 4RCs + 3$$

$$G(s) = \frac{-1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 3}$$

eq. diff. $\quad (RC)^2 D^2 y + 4RC\, Dy + 3y = -u$

3.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4(s+1)^{\cancel{3}\,0}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1)\left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + 2t^2 e^{-t} + 6te^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C}^{0,\infty}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C}^{0,\infty} \iff y(t) \in \overline{C}^{4,\infty}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

4.
Vedi dispense dell'insegnamento.

5.

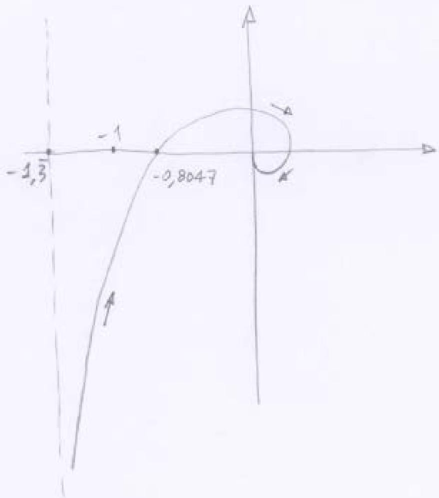
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$

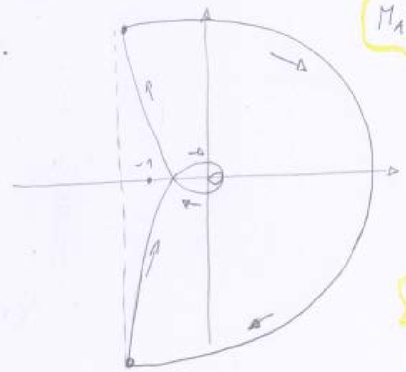
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5\cdot\frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

$\arg L(j\omega_c) = -163°,74$

$M_F = 16°,26$

$L(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1. Quindi per il C. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

6.
L'equazione caratteristica

$$1 + 10\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)} = 0 \qquad K \in [0, +\infty)$$

e' riscrivibile come

$$(1+2\tau s)(1+s) + 10 + \tau(10s) = 0$$

$$(1+s) + \tau[2s(1+s)] + 10 + \tau(10s) = 0$$

$$s + 11 + \tau[2s(1+s) + 10s] = 0$$

$$1 + \tau\cdot 2\frac{s+s^2+5s}{s+11} = 0$$

$$1 + 2\tau\frac{s^2+6s}{s+11} = 0$$

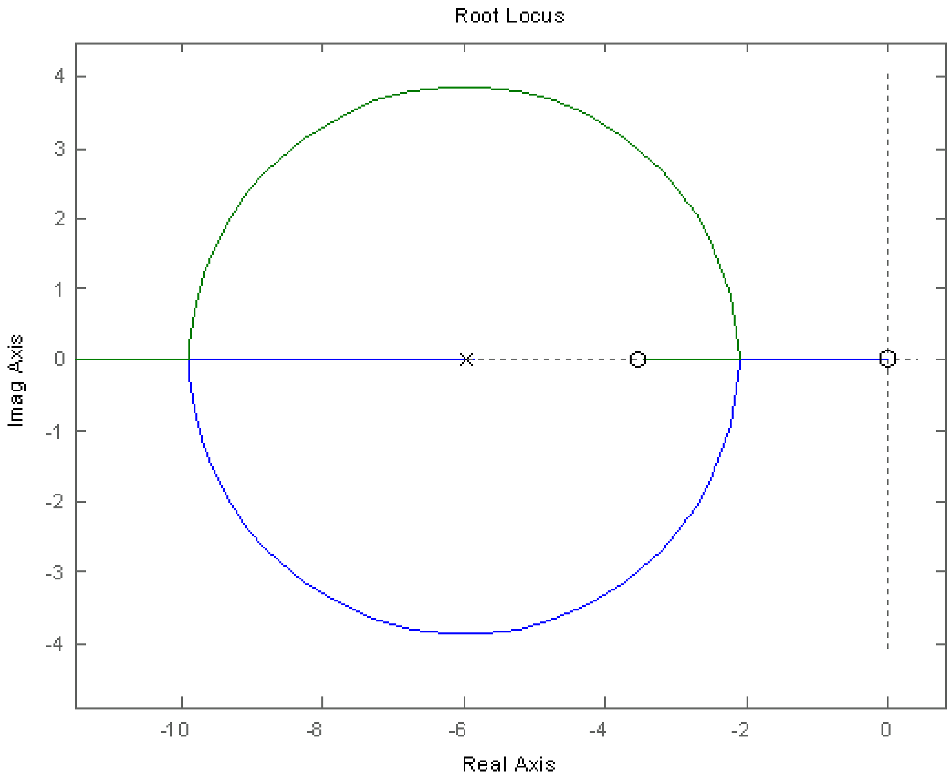
$$1 + 2\tau\frac{s^2+6s}{s+11} = 0$$

$$1+2\tau\frac{s(s+6)}{s+11}$$

e quindi, posto $K_1 := 2\tau$, come

$$1+K_1\frac{s(s+6)}{s+11}=0 \qquad K_1\in[0,+\infty)$$

Si tratta di un luogo diretto. E' noto che il luogo delle radici in oggetto e' formato anche da una



circonferenza di raggio $R=\sqrt{d_1 d_2}=\sqrt{5\cdot 11}$ e centro in *–11*.

Le radici doppie sono determinabili anche risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+6}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{7}{2}}=0$$

e valgono $s_1=-6+\sqrt{6^2-21}=-9.87$ e $s_2=-6+\sqrt{6^2-42}=-2.12$.

7.
Sia scelta una funzione propria del secondo ordine per il controllore *C(s)* del tipo

$$C(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)}$$

in modo che sia rispettata la specifica sull'errore a regime in risposta al gradino.
Il guadagno di anello risulta:

$$F(s) := \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

dalla specifica su K_v si ricava

$$K_v = \lim_{s \to 0} sF(s) = \frac{d}{a} = 10$$

Considerando l'equazione caratteristica:

$$1 + \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = 0$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$s^4 + (a-2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d$$

il polinomio caratteristico imposto e':

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e) =$$
$$s^4 + (s+e)s^3 + (9e+20)s^2 + (20e+12)s + 12e$$

Dal principio di identità dei polinomi e dalla specifica su K_a si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a - 2 = 9 + e \\ 1 - 2a + b = 9e + 20 \\ a + c = 20e + 12 \\ d = 12e \\ \dfrac{d}{a} = 10 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = 66 \\ b = 646 \\ c = 1046 \\ d = 660 \\ e = 55 \end{cases}$$

Si noti che il valore trovato per e fissa un ulteriore polo del sistema retroazionato in –55 e cio' garantisce il rispetto della specifica sui poli dominanti.
Il controllore trovato è quindi:

$$C(s) = \frac{646s^2 + 1046s + 660}{s(s+66)}$$

8.

$$Y = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)(z-1)}$$

$$= \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z+1} + \frac{K_3}{z-1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{1}{(z^2-1)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{\frac{1-4}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{1}{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2(-2)} = \frac{1}{\frac{9}{4}(-2)} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)}\right|_{z=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 2} = \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 2} = 2$$

$$K_{12} + K_2 + K_3 = 0 \Rightarrow K_{12} = -K_2 - K_3 = \frac{2}{9} - 2 = \frac{2-18}{9} = -\frac{16}{9}$$

$$y(k) = -\frac{4}{3}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1)$$
$$- \frac{2}{9}(-1)^{k-1} \cdot 1(k-1) + 2 \cdot 1(k-1) \quad , k \geq 0$$

anche esprimibile come

$$y(k) = 2 - 4\delta(k) - \frac{16}{3}k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{9}(-1)^k, \; k \geq 0$$