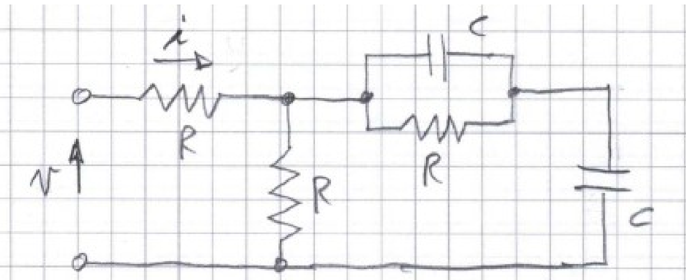
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.



$v \equiv$ tensione

$i \equiv$ corrente

$$V(s) = Z_{tot} \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{Z_{tot}} \cdot V(s)$$

$$Z_{tot} = R + \frac{R \cdot \left(\frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \right)}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}}$$

$$T := RC$$

Quindi $$Z_{tot}(s) = R \cdot \frac{R^2C^2s^2 + 5RCs + 2}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = R \cdot \frac{T^2s^2 + 5Ts + 2}{T^2s^2 + 3Ts + 1}$$

La funzione di trasferimento è $G(s) := \frac{1}{Z_{tot}(s)}$

$$G(s) = \frac{T^2s^2 + 3Ts + 1}{R\left(T^2s^2 + 5Ts + 2\right)}$$

zeri : $T^2s^2 + 3Ts + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2T}, \quad z_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

poli : $T^2s^2 + 5Ts + 2 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{5+\sqrt{17}}{2T}, \quad p_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2T}$

modi : $\left\{ \exp\left(-\frac{5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right), \exp\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right) \right\}$

Eq. differenziale :

$$RT^2D^2i(t) + 5RTDi(t) + 2R \cdot i(t) = \\ = T^2D^2v(t) + 3TDv(t) + v(t)$$

3.

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{s} - 2\, e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \cdot \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)} \right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\, Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+4}$$

$$k_1 = \left. \frac{16}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = 2$$

$$k_2 = \left. \frac{16}{s(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)\,2} = -4$$

$$k_3 = \left. \frac{16}{s(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4\, e^{-2t} + 2\, e^{-4t} \right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$
$$- \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

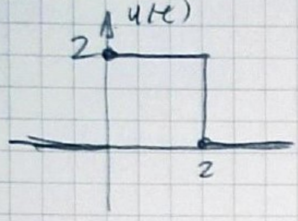
per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$
$$= \left(e^{4} - 1\right) 4e^{-2t} + \left(1 - e^{8}\right) 2e^{-4t}$$

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \qquad \text{grado relativo } \rho = 2$$



$$y(t)\ ?$$

$$Dy = 8e^{-2t} - 8e^{-4t}$$

per $t \in [0,2)$ $\quad y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$

per $t \geqslant 2$ $\quad y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$

$y(t)$ ha grado minimo di continuità pari a $\rho - 1 = 1$.

Quindi $y \in C^1$.

$$y(2^-) = y(2^+), \quad Dy(2^-) = Dy(2^+)$$

Se $t \geqslant 2$ $\quad Dy = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t}$

$$\begin{cases} c_1 e^{-4} + c_2 e^{-8} = 2 - 4e^{-4} + 2e^{-8} \\ -2c_1 e^{-4} - 4c_2 e^{-8} = 8e^{-4} - 8e^{-8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^4 c_1 + c_2 = 2e^8 - 4e^4 + 2 \\ -2e^4 c_1 - 4c_2 = 8e^4 - 8 \end{cases}$$

risolvendo il sistema (OK da Maple)

$$c_1 = 4e^4 - 4$$
$$c_2 = -2e^8 + 2$$

4.

Vedi dispense del corso.

5.

a)

$$L(j\omega) = 2\frac{1+5j\omega}{(1+j\omega)^2(1+0,5j\omega)^2}$$

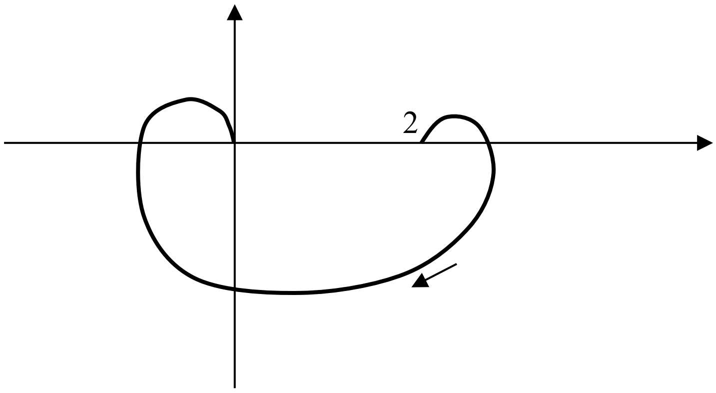
$$\left|L(j\omega)\right| = 2\frac{\sqrt{1+25\omega^2}}{(1+\omega^2)(1+\omega^2/4)}$$

$$\arg L(j\omega) = \arctan(5\omega) - 2\arctan(\omega) - 2\arctan(0,5\omega)$$

$$L(j0) = 2$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Per ω piccolo vale $\arg L(j\omega) \simeq \qquad -2\cdot 0,5\omega = 2\omega > 0$ e $\left|L(j\omega)\right| > \left|L(j0)\right|$. Ne consegue quindi il seguente tracciamento qualitativo del diagramma polare:



Si prevedono quindi la presenza di due intersezioni del diagramma con l'asse reale (escluse quelle in 0 e 2). Le pulsazioni corrispondenti a tali intersezioni possono essere determinate risolvendo l'equazione

$$\arg L(j\omega) = 0 \ \ (-\pi)$$

ovvero

$$\arctan(5\omega) + 0 \ (+\pi) = 2\arctan\omega + 2\arctan(0,5\omega)$$

Applicando la funzione $\tan(\cdot)$ ad entrambi i membri si ottiene:

$$5\omega = \frac{\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} + \dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}{1 - \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}$$

Eliminando la soluzione $\omega = 0$ e ponendo $x := \omega^2$ si giunge all'equazione algebrica di secondo grado

$$5x^2 - 59x + 8 = 0$$

da cui le soluzioni $x_1 = 0,137188$ e $x_2 = 11,6628$. Considerando le soluzioni positive di ω otteniamo

$$\begin{cases} \omega_1 = 0,37038 \ \ \text{rad/sec} \\ \omega_2 = 3,41508 \ \ \text{rad/sec} \end{cases}$$

Le intersezioni cercate sono quindi

$$\begin{cases} L(j\omega_1) = 3,5788 \\ L(j\omega_2) = -0,6899 \end{cases}$$

b)

Il guadagno di anello L(s) non ha poli a parte reale positiva ed il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1 . Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Si noti che il margine di ampiezza associato è facilmente determinabile come

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_2)|} \cong 1,45$$

6.

La configurazione dei poli e zeri è la seguente:

- uno zero in $s = 1$ con molteplicità 1
- un polo in $s = -1$ con molteplicità 3
- un polo in $s = -2$ con molteplicità 2

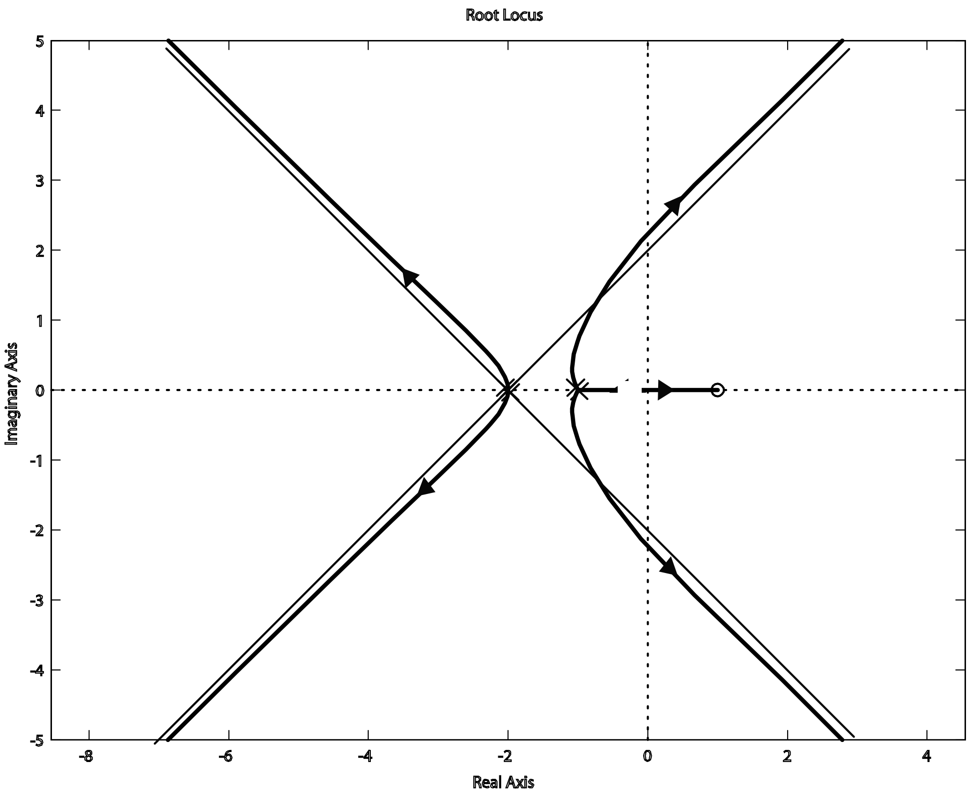
Essendo $n - m = 4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1) = -2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi$; $\theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$
- le radici doppie, se esistono, sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$
  cioè
  $4s^2 - 10 = 0$
  e risultano essere
  $s_1 = -\sqrt{5/2} \cong -1,58$; $s_2 = \sqrt{5/2} \cong 1,58$.
  Queste soluzioni non appartengono al luogo delle radici e quindi non esistono radici doppie sul luogo.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-8
-6
-4
-2
0
2
4

7.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s}, \quad b_0, b_1 \in \mathbb{R} \text{ parametri di progetto}$$

$$1 + C(s)P(s) = 0 \iff s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$$

$$\boxed{p_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$$T_a = \frac{3}{G_s}, \quad \text{da } T_a = 9 \text{ sec.} \Rightarrow G_s = \frac{1}{3}$$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$$p_d(s) = \left(s + \frac{1}{3}\right)(s+\alpha)(s+\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta > \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p_d(s) = s^3 + \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)s^2 + \left(\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $p_c(s) \equiv p_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$$

È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.

8.

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{z^2+4z+4}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = z \cdot \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} = z \cdot \left(\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{K_3}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

$$K_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=1} = 8$$

$$K_2 = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2$$

$$K_1+K_2+K_3 = 1 \Rightarrow K_3 = -9$$

$$Y(z) = 8\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 9\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 8 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 9\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad k \geq 0$$