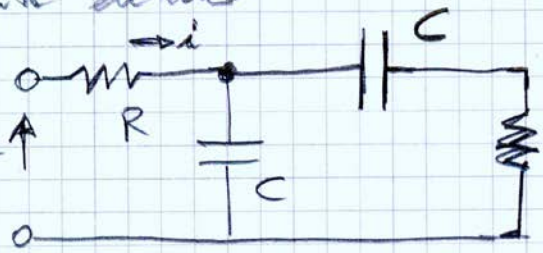
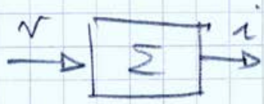
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

1) Circuito elettrico





$T := RC$

$$V = Z_{tot}\, I \qquad I = \frac{1}{Z_{tot}}\, V$$

$$\text{f.d.t.} \equiv G(s) = \frac{1}{Z_{tot}}$$

$$Z_{tot} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\left(\frac{1}{Cs}+R\right)}{\frac{1}{Cs}+\frac{1}{Cs}+R} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\cdot\frac{1+RCs}{Cs}}{\frac{2}{Cs}+R} =$$

$$= R + \frac{\frac{1+RCs}{(Cs)^2}}{\frac{2+RCs}{Cs}} = R + \frac{\frac{1+RCs}{Cs}}{2+RCs} =$$

$$= R + \frac{1+RCs}{Cs(2+RCs)} = \frac{RCs(2+RCs)+1+RCs}{Cs(2+RCs)} =$$

$$= \frac{2RCs+(RC)^2s^2+RCs+1}{Cs(RCs+2)} = \frac{(RC)^2s^2+3RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

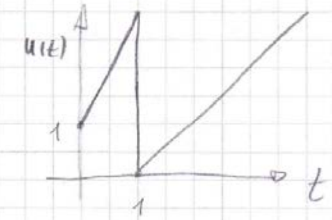
$$G(s) = \frac{Cs(RCs+2)}{(RC)^2s^2+3RCs+1} = \frac{Cs(Ts+2)}{T^2s^2+3Ts+1}$$

zeri: $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $p_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T}t\right\}, \exp\left\{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T}t\right\} \right\}$, guadagno statico $G(0)=0$

eq. diff. $T^2D^2i(t) + 3TDi(t) + i(t) = CTD^2v(t) + 2CDv(t)$

3.



$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1+2t & t \in [0, 1) \\ t-1 & t \geq 1 \end{cases}$$

1° metodo

$$u(t) = 1+2t - (1+2t)\,1(t-1) + (t-1)\cdot 1(t-1)$$

$$= 1+2t - (t+2)\,1(t-1) = 1+2t - \left[(t-1)+3\right]1(t-1)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad u(t) = 1+2t - [(t-1)+3]\cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + 3\cdot\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{s+2}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+2}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1} =$$

$$= \frac{s+2}{s^2(s+1)} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{s+2}{s+1}\right|_{s=0} = 2 \qquad c_2 = \left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-1} = 1$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -c_2 = -1$$

$$\frac{1+3s}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{1+3s}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \left.\frac{1+3s}{s^2}\right|_{s=-1} = -2$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = 2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right](t-1)\cdot 1(t-1)$$

$$= 2t - 1 + e^{-t} - \left[(t-1) + 2 - 2e^{-(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 2t - 1 + e^{-t}$

Se $t \in [1, +\infty)$

$$y(t) = 2t - 1 + e^{-t} - \left[t - 1 + 2 - 2\cdot e^{-(t-1)}\right]$$

$$= t - 2 + e^{-t} + 2e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

2° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

Per $t \in [1, +\infty)$:

$$y(t) = y_{for.}(t) + y_{lib.}(t)$$

La risposta forzata è causata dall'ingresso $u(t) = t - 1$

La risposta libera è determinata dalla condizione iniziale $y(1-)$

$$y(1-) = 2t - 1 + e^{-t}\Big|_{t=1} = 1 + e^{-1}$$

eq. diff. $\quad Dy(t) + y(t) = u(t)$

Cambio di variabile : $\quad \tau = t - 1$

$$y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$$

eq. diff. $\quad D^* y(\tau) + y(\tau) = u(\tau)$

$$sY(s) - y(0-) + Y(s) = U(s)$$

$$(s+1)Y(s) - y(0-) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{y(0-)}{s+1} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{y(0-)}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -1$$

$$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1}) \cdot e^{-\tau}$$

$$y(t) = t - 1 - 1 + e^{-(t-1)} + (1 + e^{-1})e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t} \cdot e + (1 + e^{-1})e^{-t} \cdot e = t - 2 + e^{-t} \cdot e + (e+1)e^{-t}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(e + e + 1) = t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

3° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

Per $t \in [1, +\infty)$

Si effettua il cambio di variabile $\tau = t - 1$

$u(\tau) = \tau \implies y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$

$$Y_{for.}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1}$$

$c_{11} = 1$, $\quad c_2 = 1$, $\quad c_{12} + c_2 = 0 \implies c_{12} = -1$

$y_{for.}(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} \qquad y_{lib.}(\tau) = c_3 e^{-\tau}$

$$y(\tau) \in C^0(\mathbb{R}) \implies y(\tau)\Big|_{\tau = 0-} = y(\tau)\Big|_{\tau = 0+}$$

$$y(\tau)\Big|_{\tau = 0-} = y(t)\Big|_{t = 1-} = 1 + e^{-1}$$

$$y(\tau)\Big|_{\tau = 0+} = -1 + 1 + c_3 = c_3$$

Quindi $\quad c_3 = 1 + e^{-1}$

$$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1})e^{-\tau} = \tau - 1 + (2 + e^{-1})e^{-\tau}$$

Ritornando alla variabile t:

$$y(t) = t - 2 + (2 + e^{-1})e^{-(t-1)} = t - 2 + (1 + 2 \cdot e)e^{-t}$$

4.

Vedi appunti del corso.

5.

6

$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

$$G(s) = \frac{\cancel{10^3}\,(1-s)}{(1+s)\,\cancel{10^2}\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2} =$$

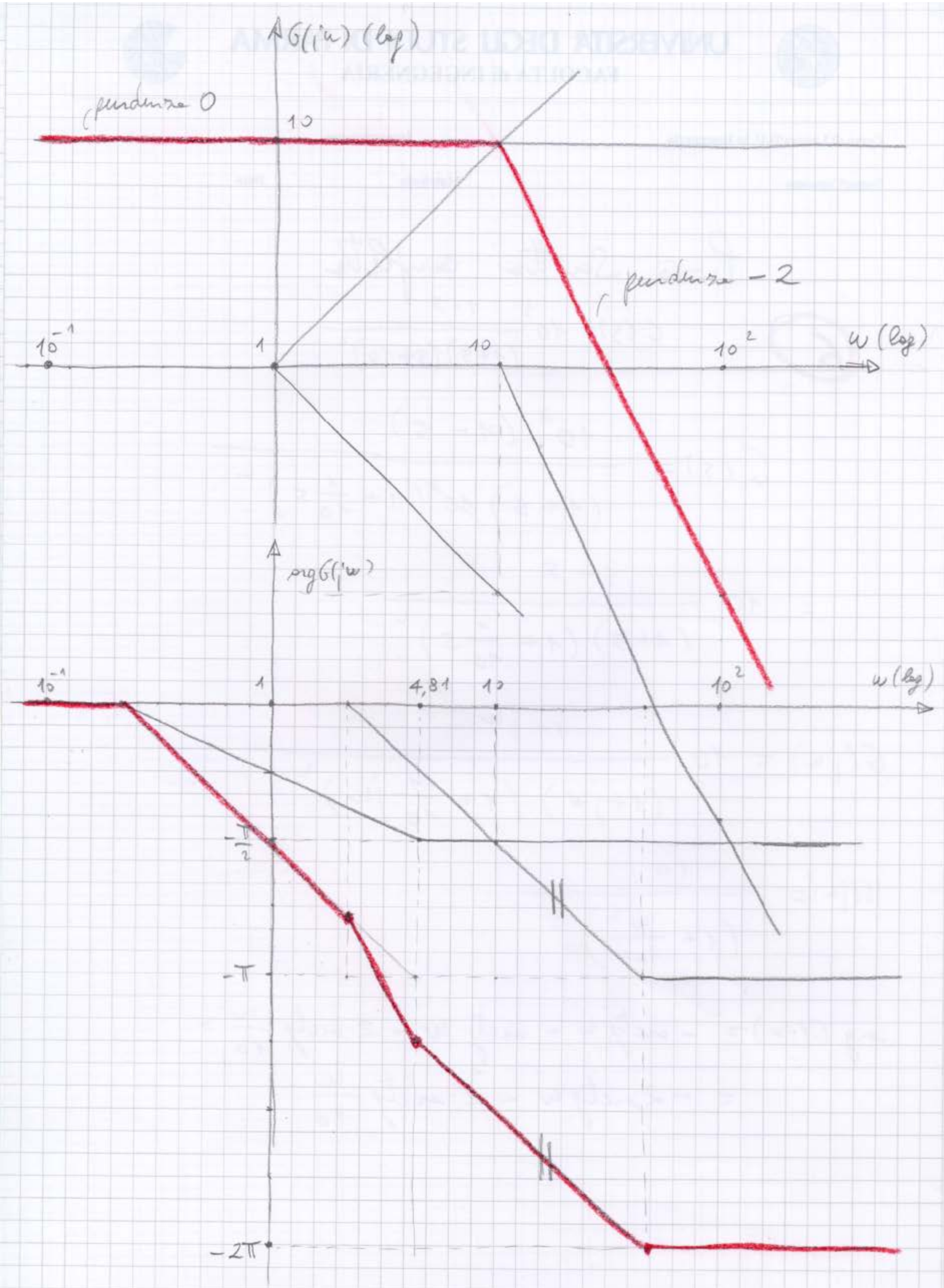
$$= 10\,\frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1-j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{10}j\omega\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)}$$

$$\arg G(j\omega) = -\operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10}$$


G(jω) (log)
pendenza 0
10
pendenza −2
10^{-1}
1
10
10^{2}
ω (log)
arg G(jω)
10^{-1}
1
4,81
10
10^{2}
ω (log)
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
-2π

6.

(7)

a. $1 + K \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $K>0$, poli: $0, -2 \pm j$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60°$, $+180°$, $-60°$ e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

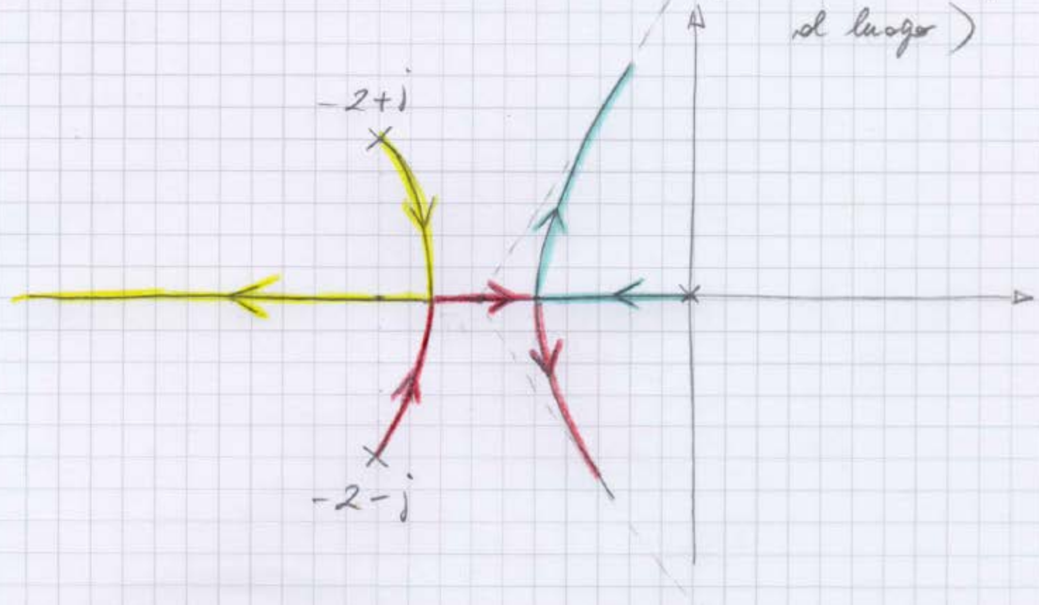
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180°$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è φ :

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, 2 \right) = -\mathrm{arctg}\, 2 = -63°{,}43$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63°{,}43$

Calcolo delle radici doppie: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2+8s+5=0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$1 + K^* \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}\Bigg|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad K^* = 2$$

c. $e_r = \dfrac{5}{K_r}$, $K_r = \lim\limits_{s \to 0} s \dfrac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \dfrac{2}{5}$

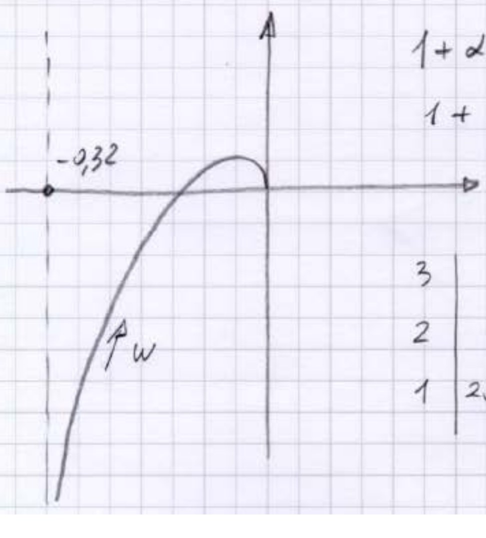
$$e_r = \frac{25}{2} = 12,5$$

d. $L(s) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{s\left(1 + \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5}\right)}$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(j\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{5} + j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0,32$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1 + \alpha L(s) = 0$ abbia radici puram. immaginarie

$$1 + \alpha \cdot \frac{2}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0 \quad , \quad \beta \triangleq 2\alpha$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + \beta = 0$$

3	1	5	0
2	4	β	0
1	$20-\beta$	0	

$20 - \beta = 0 \quad \beta = 20$

$\Rightarrow \alpha = 10$

Intersezione in $-\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad M_A = 10$$

7. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\text{Re}\, p_1, \text{Re}\, p_2, ..., \text{Re}\, p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.

Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di *k* per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$-1.368 + k > 0$

$30.888 - (k - 1.368) > 0$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{z}{z-1} \triangleq z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{(z+2)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right|_{z=1} = 4 \qquad c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1 - c_1 = 1 - 4 = -3$$

$$Y(z) = 4\,\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} - 3\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \quad , k \geq 0$$

$$y(k) = 4 - \frac{3}{2}\,k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4 + 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k) = 4 + 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k , \; k \geq 0}$$