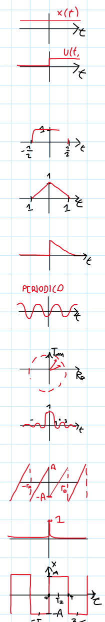
Formulario segnali determinati

giovedì 12 novembre 2020 09:18

SEGNALI NOTEVOLI



segnale	proprietà
costante $x(t)=K$	$D=\infty;\ A=\pm\infty;\ \langle x(t)\rangle=K;\ E_x=\infty;\ P_x=K^2$
gradino unitario $u(t)$ $\begin{cases}0 & \text{per } t<0\\ 1 & \text{per } t>0\end{cases}$	$D=\infty;\ A=\infty;\ \langle x(t)\rangle=\frac{1}{2};\ E_x=+\infty;\ P_x=\frac{1}{2}$
impulso rettangolare $\Pi(t)$ $\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$	$D=1;\ A=1;\ \langle x(t)\rangle=0;\ E_x=1;\ P_x=0$ (di energia)
impulso triangolare $\Lambda(t)$ $\begin{cases}1-\lvert t\rvert & \lvert t\rvert<1\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$	$D=2;\ A=1;\ \langle x(t)\rangle=0;\ E_x=\frac{2}{3};\ P_x=0$ (di energia)
esp. negativo causale $x(t)=Ae^{-Bt}u(t)$	$D=\infty;\ A=\frac{A}{B};\ \langle x(t)\rangle=0;\ E_x=\frac{A^2}{2B};\ P_x=0$ (di energia)
segnale sinusoidale $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$ (PERIODICO)	$D=\infty;\ A=0;\ \langle x(t)\rangle=0;\ E_x=\infty;\ P_x=0$
Fasore $x(t)=Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$	$D=\infty$ (sia Re che Im); $A=0$ (" "); $\langle x\rangle=0$ (" "); $E_x=\infty$ (segnale periodico); $P_x=A^2$
$\mathrm{Sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	$D=\infty;\ A=1;\ \langle x(t)\rangle=0;\ E_x=1;\ P_x=0$ (di energia)
dente di sega $x(t)=A\left(\frac{2t-T_0}{T_0}\right)$	
doppio esponenziale $x(t)=e^{-\lvert t\rvert}$	
duty cycle 50% $X_0(f)=\begin{cases}0 & K \text{ pari}\\ \frac{-2Aj}{\pi K} & K \text{ dispari}\end{cases}$	$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t-T/2-2nT}{T}\right)-A\Pi\left(\frac{t+\frac{T}{2}-2nT}{T}\right)$ oppure $-A+2A\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-2nT}{T}\right)$; $X(f)=\frac{-2Aj}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}K)\,\delta(f-\frac{K}{2T_0})}{K}$; $T_0=2T$; $P_x=A^2$

RIPASSO MATEMATICA

Eulero

$e^{jx}=\cos x+j\sin x$

$e^{-jx}=\cos x-j\sin x$

$\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

Trigonometria

$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Integrale per parti

$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

$\cos(x)=-\cos(x)$

Integrali notevoli

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad\int\frac{1}{x}dx=\ln(x)$

$\int\sin x\,dx=-\cos(x)$ $\quad\int\cos(x)\,dx=\sin(x)$

Proprietà dei segnali

Area: $A=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt$

Valore medio: $\langle x\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}x(t)\,dt$

Potenza istantanea: $P_x(t)=\lvert x(t)\rvert^2$

Energia totale: $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt$

Potenza media: $P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lvert x(t)\rvert^2dt$

Se segnale è di energia $\Rightarrow P_x=0$

energia di un segnale PERIODICO NON NULLA $=+\infty$

Segnale DI POTENZA se $E=\infty$

$P_x=\frac{A^2}{2}$ per segnali sinusoidali ($A=$ ampiezza)

$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

$Y(f)=X(f)\cdot H(f)$

Coefficiente di Fourier $X_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-j2k\pi f_0 t}dt$

Trasformata di Fourier $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

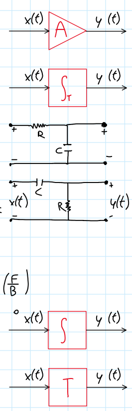
Antitrasformata di Fourier $x(t)=\int X(f)e^{j2\pi ft}df$

Funzione di autocorrelazione: $\varphi_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(\tau)x(t+\tau)\,d\tau$

Area in relazione alla trasformata: $X(f=0)=X(0)$

Ampiezza $=\sqrt{\mathrm{Re}(X)^2+\mathrm{Im}(X)^2}$ $\quad\varphi=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)}\right)$ $\quad$ se $X(f)=\frac{N}{D}\Rightarrow\angle X(f)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(N)}{\mathrm{Re}(N)}\right)-\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(D)}{\mathrm{Re}(D)}\right)$

FILTRI NOTEVOLI



Amplificatore ideale $y(t)=Ax(t)$

Integratore a finestra mobile $y(t)=\int_{t-T}^{t}x(\tau)\,d\tau$

Filtro RC passa-basso $h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$ $\quad H(f)=\frac{1}{1+j2\pi RCf}$

Filtro RC passa-alto $h(t)=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$ $\quad H(f)=\frac{j2\pi RCf}{1+j2\pi RCf}$

Filtro passa banda ideale

$H(f)=\frac{1}{2B_0}\cdot\Pi\left(\frac{f}{B}\right)$

Integratore $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$

Elemento ritardo $y(t)=x(t-T)$

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI

causale $\Leftrightarrow y(t)=T[x(\tau);t]=T[x(\tau)u(t-\tau);t]\Rightarrow$ la risposta del sistema ad un dato istante di tempo NON PUÒ DIPENDERE da valori futuri del segnale di ingresso

idealmente realizzabile $\Leftrightarrow x(t)\in\mathbb{R}\Rightarrow y(t)=T[x(t)]\in\mathbb{R}$

fisicamente realizzabile $\Leftrightarrow$ sistema causale e idealmente realizzabile

stabilità B.I.B.O $\Leftrightarrow \lvert x(t)\rvert<M\Rightarrow\lvert y(t)\rvert<L$ = se il sistema è stimolato con ingressi limitati in ampiezza risponde con segnali in uscita anch'essi limitati in ampiezza

stazionarietà $\Leftrightarrow y(t)=T[x(t)]\Rightarrow T[x(t-t_0)]=y(t-t_0)\Rightarrow$ se per un dato segnale in ingresso produce la STESSA uscita a prescindere dall'istante di applicazione dell'ingresso

linearità $\Leftrightarrow y_1(t)=T[x_1(t)]$ e $y_2(t)=T[x_2(t)]\ \dots\ y_n=T[x_n(t);t]\Rightarrow y(t)=T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+a_nx_n(t)]=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)+\dots a_ny_n(t)$ = sistema è lineare se gode del principio

Se il SISTEMA LS $\Rightarrow$ è STABILE se $h(t)$ è assolutamente integrabile

è CAUSALE se $h(t)$ è causale

omogeneità $\Leftrightarrow T[\alpha x(t)]=\alpha T[x(t)]$

FILTRO oppure SISTEMA LS $\Leftrightarrow$ stazionario e lineare

Tabella trasformate note e proprietà

Dominio del tempo (t)	Dominio della frequenza
$\Pi(t)$	$\mathrm{sinc}(f)$
$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}(t)\cdot u(t)$	$\frac{1}{1+j2\pi Tf}$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
$\Lambda(t)$	$\mathrm{sinc}^2(f)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$A\cos(2\pi f_0t+\phi)=\frac{A}{2}e^{j(2\pi f_0t+\phi)}+\frac{A}{2}e^{-j(2\pi f_0t+\phi)}$	$\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$

proprietà	Dominio del tempo (t)	Dominio della frequenza (f)
Dualità (1)	$x(t)$	$X(f)$
Dualità (2)	$X(t)$	$x(-f)$
Linearità	$a_1x_1(t)+\dots+a_nx_n(t)$	$a_1X_1(f)+\dots+a_2X_2(f)$
Cambiamento di scala	$x\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot X(Tf)$
Inversione asse temporale	$x(-t)$	$X(-f)$
Traslazione temporale	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Traslazione in frequenza	$x(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}$ or $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f+f_0)$ or $X(f-f_0)$
Modulazione ampiezza	$x(t)\cos(2\pi f_0t+\phi)$	$\frac{1}{2}X(f-f_0)e^{j\phi}+\frac{1}{2}X(f+f_0)e^{-j\phi}$
Derivazione (dom. tempo)	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi fX(f)$
Derivazione (dom frequenza)	$-j2\pi t x(t)$	$\frac{dX(f)}{df}$
Integrazione ($A=0$)	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$

tà di sovrapposiz

$A\cos(2\pi f_0 t+\phi) = \frac{A}{2}e^{j(2\pi f_0 t+\phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}$	$\frac{A}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}\delta(f+f_0) - \frac{j}{2}\delta(f-f_0)$
$\text{signum}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_0(t-nT)$	$\sum_{-\infty}^{+\infty}X_0(kf_0)f_0\,\delta(f-kf_0)$
$e^{-\lvert t\rvert}$	$\frac{2}{1+(2\pi f)^2}$
$x^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$a\cdot e^{-\frac{\lvert t\rvert}{T}}$	$2a\cdot\frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T^2}\cdot(2\pi f)}$

Derivazione (dom frequenza)	$-j2\pi t\, x(t)$	$\frac{dX(f)}{df}$
Integrazione $(A=0)$	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$
Integrazione $(A\neq 0)$	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
Convoluzione	$x(t)*h(t)$	$X(f)H(f)$
Prodotto	$x(t)h(t)$	$X(f)*H(f)$
Coniugati	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Correlazione	$r_{xy}(t) = x^*(-t)*y(t)$	$E_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$

Teoremi

Teorema di Plancherel: se un segnale x(t) è di energia la trasformata di Fourier esiste per qualunque f ed è integrabile in modulo quadro.

Teorema di Lerch: se due segnali hanno la stessa trasformata di Fourier, allora non possono differire su un insieme dell'asse t di durata non nulla. NO

Teorema di Rayleigh: Ex = $\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(f)\rvert^2 df$

Teorema di Wiener e Kintchine per segnali determinati:
La densità spettrale di energia di un segnale determinato è pari alla trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione .

Teorema di Wiener e Kintchine per segnali di potenza:
La densità spettrale di energia di un segnale di potenziamento è pari alla trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione

Teorema di Parseval
La potenza media complessiva di un segnale periodico x(t) è la somma delle potenze medie che competono ai singoli fasori che compongono x(t) attraverso lo sviluppo in serie di Fourier. $P_x = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lvert X_n\rvert^2$

Teorema di campionamento
Se un segnale x(t) ha banda bilatera limitata B>0 che si estende da f=-B/2 a f=B/2 allora può essere espresso come: $\sum_{-\infty}^{+\infty}x(nT_c)\,\text{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right)$

A patto che valga la condizione di Nyquist: $\frac{1}{T_c} \geq B$ N.B se non rispettato $\Rightarrow$ ALIASING

DERIVATE SEGNALI

$\Pi(t) = \delta\left(t+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$u(t) = \delta(t)$

N.B. $\frac{1}{2}$ è il PERIODO DI $\Pi(t)$
se $\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Rightarrow d\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = \delta(t+2T) - \delta(t-2T)$

Proprietà convoluzione

$x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$ COMMUTATIVA

$(x(t)*g(t))*h(t) = x(t)*(g(t)*h(t))$ ASSOCIATIVA

$x(t)*(h(t)+g(t)) = x(t)*h(t) + x(t)*h(t)$ DISTRIBUTIVA

VARIE DEF. DI TEORIA

- Condizione sufficiente convergenza SDF= $\int_{T_0}\lvert x(t)\rvert dt < \infty$

- x REALE e PARI $\Rightarrow$ X reale e pari
- x REALE e DISPARI $\Leftrightarrow$ X immaginario e dispari

- Segnale in uscita da un campionatore $x_\delta(t) = \underbrace{c(t)}_{\text{impulso di treni di Dirac}}\cdot x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}x(n\underbrace{T_c}_{\text{intervallo campionamento}})\delta(t-nT_c)$ oppure S(t) segnale campionatore $\frac{1}{T_c} = f_c$

$X_\delta(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty}f_c X(f-kf_c)$

- Filtro ricostruzione $H_{ric}(f) = T_c\Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$
$h_{ric}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$

- Per eliminare aliasing usare filtro anti-aliasing $H_{pre}(f) = \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) \stackrel{\Delta}{=}$ filtro passa-basso ideale

FILTRAGGIO SEGNALE sinusoidale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi) \Rightarrow y(t) = A\lvert H(f_0)\rvert\cos(2\pi f_0 t + \Phi + \angle H(f_0))$