Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - 2k x_1 - b D x_1 + k x_2 \\ m D^2 x_2 = -k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ m D^2 x_2 + k x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2+bD+2k)x_1 - (mD^2+k)f = k^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + m b D^3 + 2km D^2 + km D^2 + kbD + \cancel{2}k^2)x_1 - \cancel{k^2 x_1} =$$
$$= (mD^2+k) f$$

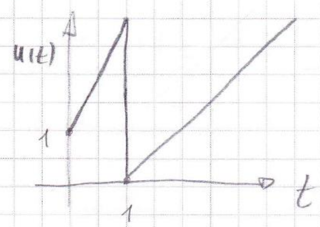
eq. diff. $m^2 D^4 x_1 + m b D^3 x_1 + 3km D^2 x_1 + kb D x_1 + k^2 x_1 = m D^2 f + k f$

f.d.t. $G(s) = \dfrac{m s^2 + k}{m^2 s^4 + m b s^3 + 3km s^2 + kbs + k^2}$

3. Il guadagno statico è G(0)=1/k.

Gli zeri sono $z_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$

3.



$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 + 2t & t \in [0, 1) \\ t - 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

1° metodo

$$u(t) = 1 + 2t - (1 + 2t) 1(t-1) + (t-1) \cdot 1(t-1)$$
$$= 1 + 2t - (t+2) 1(t-1) = 1 + 2t - [(t-1) + 3] 1(t-1)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad u(t) = 1+2t - [(t-1)+3]\cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + 3\cdot\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{s+2}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+2}{s^2} - e^{-s}\frac{1+3s}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1} =$$

$$= \frac{s+2}{s^2(s+1)} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{s+2}{s+1}\right|_{s=0} = 2 \qquad c_2 = \left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-1} = 1$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -c_2 = -1$$

$$\frac{1+3s}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{1+3s}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \left.\frac{1+3s}{s^2}\right|_{s=-1} = -2$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = 2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right](t-1)\cdot 1(t-1)$$

$$= 2t - 1 + e^{-t} - \left[(t-1) + 2 - 2e^{-(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 2t - 1 + e^{-t}$

Se $t \in [1, +\infty)$

$$y(t) = 2t - 1 + e^{-t} - \left[t - 1 + 2 - 2\cdot e^{-(t-1)}\right]$$

$$= t - 2 + e^{-t} + 2e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

2° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

Per $t \in [1, +\infty)$:

$$y(t) = y_{for.}(t) + y_{lib.}(t)$$

La risposta forzata è causata dall'ingresso $u(t) = t - 1$

La risposta libera è determinata dalla condizione iniziale $y(1-)$

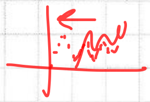
$$y(1-) = 2t - 1 + e^{-t}\Big|_{t=1} = 1 + e^{-1}$$

EQ DIFF

eq. diff. $\quad D\,y(t) + y(t) = u(t)$

Cambio di variabile : $\tau = t - 1$

come se iniziasse da zero



$$y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$$

DERIV GEN

eq. diff. $\quad D^{*}y(\tau) + y(\tau) = u(\tau)$

LAPLACE

$$s\,Y(s) - y(0-) + Y(s) = U(s)$$

$$(s+1)\,Y(s) - y(0-) = U(s)$$

ANTITRAS

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{y(0-)}{s+1} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{y(0-)}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

TRASLA

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -1$$

$$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1}) \cdot e^{-\tau}$$

$$y(t) = t - 1 - 1 + e^{-(t-1)} + (1 + e^{-1})\, e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t} \cdot e + (1 + e^{-1})\, e^{-t} \cdot e = t - 2 + e^{-t} \cdot e + (e+1)\, e^{-t}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(e + e + 1) = t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

3° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$

Per $t \in [1, +\infty)$

Si effettua il cambio di variabile $\tau = t - 1$

$u(\tau) = \tau \implies y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$

$Y_{for.}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1}$

$c_{11} = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_{12} + c_2 = 0 \implies c_{12} = -1$

$y_{for.}(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} \qquad y_{lib.}(\tau) = c_3 e^{-\tau}$

$y(\tau) \in C^0(\mathbb{R}) \implies y(\tau)\Big|_{\tau=0-} = y(\tau)\Big|_{\tau=0+}$

$y(\tau)\Big|_{\tau=0-} = y(t)\Big|_{t=1-} = 1 + e^{-1}$

$y(\tau)\Big|_{\tau=0+} = -1 + 1 + c_3 = c_3$

Quindi $\quad c_3 = 1 + e^{-1}$

$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1})e^{-\tau} = \tau - 1 + (2 + e^{-1})e^{-\tau}$

Ritornando alla variabile t:

$y(t) = t - 2 + (2 + e^{-1})e^{-(t-1)} = t - 2 + (1 + 2 \cdot e)e^{-t}$

4

Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

a) Funzione di Trasferimento:

$$P(s) = 100\,\frac{(1-s)^2}{s\,(s+2)^3} \;\Rightarrow\; P(j\omega) = 12.5\,\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega\,(1+0.5\,j\omega)^3}$$

Ascissa dell'asintoto: $\nabla_a = 12.5\,(-1-1-0.5-0.5-0.5) = -43.75$
Argomento della funzione di trasferimento:

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 3\,\arctan(0.5\,\omega) - 2\,\arctan\omega$$

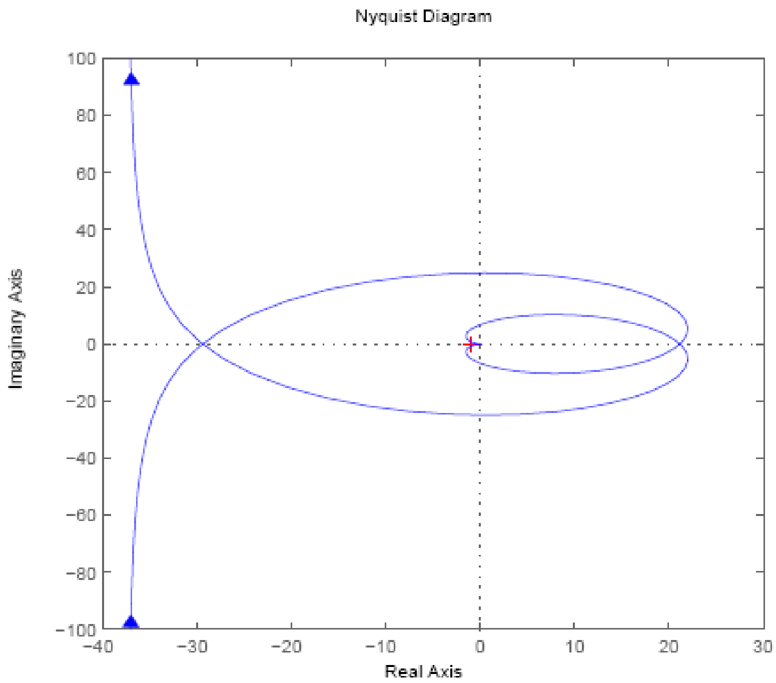
$$\text{per } \omega \to 0 \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -\frac{\pi}{2} \qquad \text{per } \omega \to +\inf \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -3\,\pi$$

Intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow 3\,\arctan\frac{\omega_p}{2} + 2\,\arctan\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

Attraverso una stima numerica si ottiene: $\omega_p \simeq 0,47$ [rad/s]
Intesezione:

$$|P(j\omega_p)| = 12.5\,\frac{(1+\omega_p^2)}{\omega_p\,\left(1+(\frac{\omega_p}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq 29.95$$



b) Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1 e il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva, quindi le radici di $1+P(s)$ sono:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{C}_+ &: \quad 2 \\ n \in \mathbb{C}_- &: \quad 2\ \ (4-2) \\ n \in j\,\mathbb{R} &: \quad 0 \end{aligned}$$

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

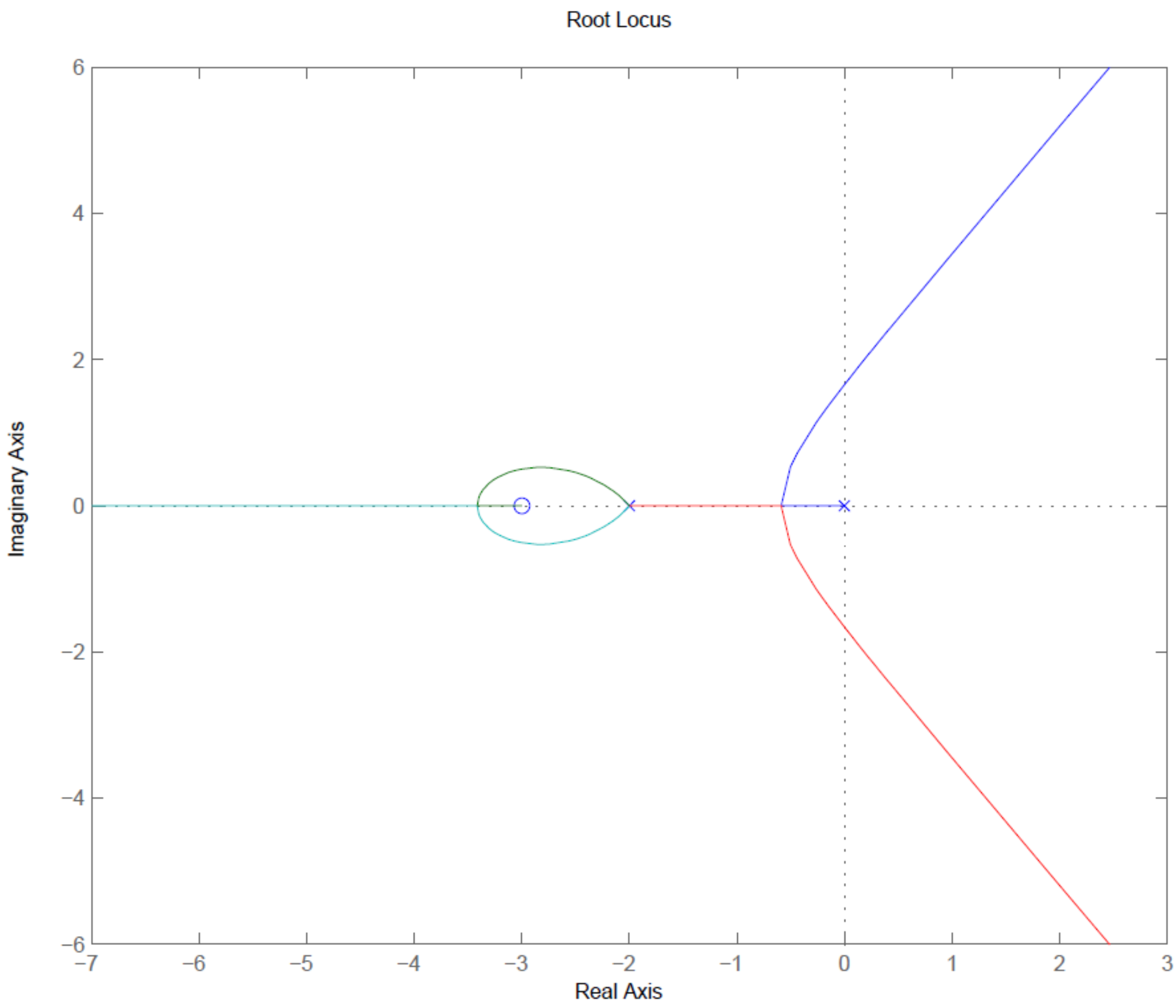
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
−2
−4
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

$$T_{dy}(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

$$T_{dy}(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$$

$$T_{dy}(j2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(j2) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad C(s) := \frac{y(s)}{(s^2+4)x(s)} \quad \text{controllore di ordine } l \text{ biproprio}$$

$$y(s) := y_0 s^l + y_1 s^{l-1} + \cdots + y_l$$

$$x(s) := s^{l-2} + x_1 s^{l-3} + \cdots + x_{l-2}$$

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)}$$

equazione caratteristica:

$$1 + C(s)P(s) = 0$$

$$x(s)(s^2+4)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

Quindi il polinomio caratteristico associato alla struttura scelta per il controllore è un polinomio monico di grado $l+1$:

$$(s^2+4)(s+5)x(s) + 10y(s)$$

Sia d(s) il polinomio caratteristico desiderato (polinomio monico di grado $l+1$). Imponendo che d(s) coincida col pol. caratteristico sopra si ottengono $l+1$ equazioni (lineari) con $l+1+(l-2) = 2l-1$ incognite . Richiedendo che $l+1 = 2l-1$ si ottiene $l = 2$.

Scelta di d(s):

$$d(s) := [(s+10)^2 + 4](s+30) = s^3 + 50s^2 + 704s + 3120$$

Polinomio caratteristico associato al controllore:

$$s^3 + (5+10y_0)s^2 + (4+10y_1)s + 20 + 10y_2$$

Quindi

$$\begin{cases} 5 + 10y_0 = 50 & \Rightarrow y_0 = 4,5 \\ 4 + 10y_1 = 704 & \Rightarrow y_1 = 70 \\ 20 + 10y_2 = 3120 & \Rightarrow y_2 = 310 \end{cases}$$

In conclusione: $C(s) = \dfrac{4,5s^2 + 70s + 310}{s^2+4}$

8.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \to k$.
L'eq. diventa

$$16\,y(k) - 12\,y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\,u(k-2) + 16\,u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16z + 16}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16z^3 - 12z^2 + 1$.

$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
   $-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	0	-12	16
2	16	-12	0	1
3	-255	192	-12	

Dall'ultima riga della tabella otteniamo una quarta condizione

4. $|-255| > |-12|$ ok!

Quindi per il criterio di Jury il sistema è asintoticamente stabile.