Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{10}{(s+1)^4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_1 = \frac{10}{(s+1)^4}\Big|_{s=0} = 10 \quad , \quad K_{21} = \frac{10}{s}\Big|_{s=-1} = -10$$

$$K_1 + K_{24} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{24} = -K_1 = -10$$

$$K_{22} = \frac{1}{(2-1)!} D^{2-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = 10\left[-s^{-2}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$K_{23} = \frac{1}{(3-1)!} D^{3-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{(s+1)^4} - \frac{10}{(s+1)^3} - \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{s+1}$$

$$y(t) = 10 - \frac{5}{3}t^3e^{-t} - 5t^2e^{-t} - 10te^{-t} - 10e^{-t} \quad , \quad t \geq 0$$

Il gradino è una funzione discontinua, quindi $y(t) \in C^{\rho-1}$.

$\rho = 4 \quad \Rightarrow \quad y(t) \in C^3$ (il grado massimo di continuità dell'uscita è pari a 3).

4.
Vedi appunti del corso.

5.
a)

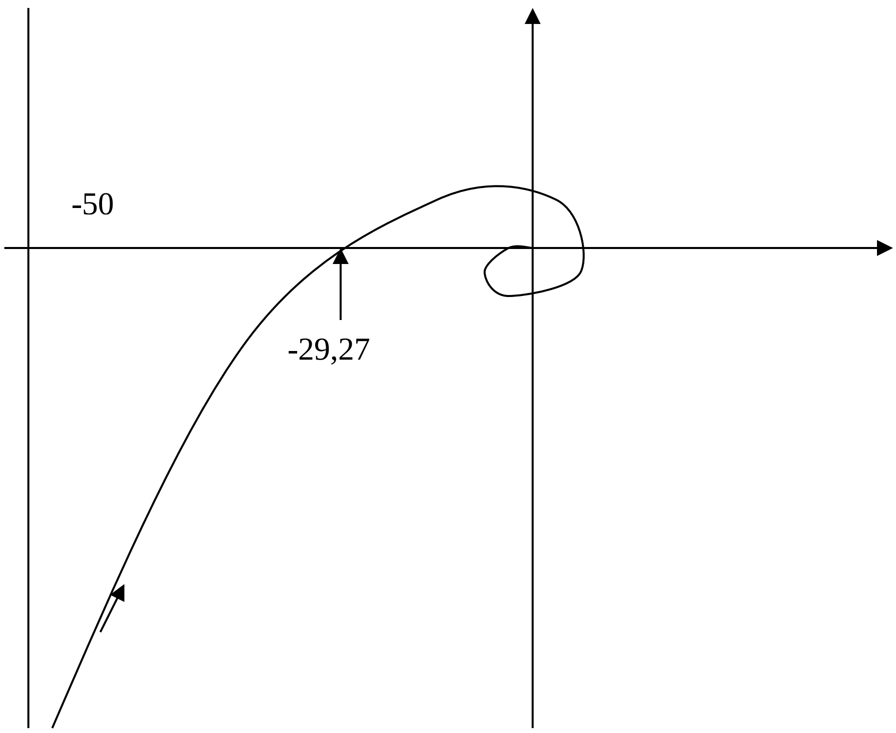
$$P(j\omega)=\frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-5\ \text{arctg}\ \omega$$

$$\left|P(j\omega)\right|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a=10[(-1-1)-(1+1+1)]=-50$.

$$\omega\to\infty \qquad \arg P(j\omega)\to -2\pi-\pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p)=-\pi$$

$$5\ \text{arctg}\ \omega_p=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega_p=\ \text{tg}\ \frac{\pi}{10}=0,3249\ \ \text{rad}$$

$$\left|P(j\omega_p)\right|=29,27 \quad\Rightarrow\quad P(j\omega_p)=-29,27$$

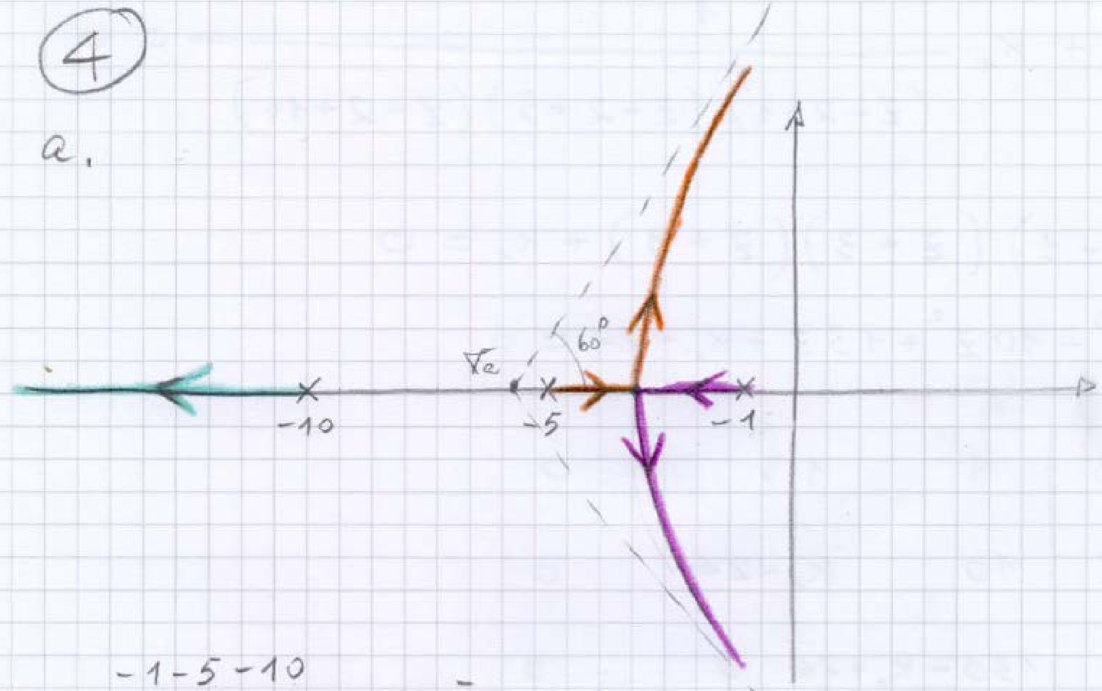
b) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

numero radici $\in \mathbb{C}_+ = 2$
numero radici $\in j\mathbb{R} = 0$
numero radici $\in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$

6.

4

a.



$$\sigma_a = \frac{-1-5-10}{3} = -5,\bar{3}$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$(s+5)(s+10) + (s+1)(s+10) + (s+1)(s+5) = 0$$

$$3s^2 + 32s + 65 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} -2,7299 \\ -7,9367 \text{ (da scartare)} \end{cases}$$

b. Cambio di variabile complessa $z = s + 2$

$s = z - 2$

$$1 + K_1 \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)} = 0 \quad \text{eq. carat.}$$

$$1 + K_1 \cdot \frac{1}{(z-2+1)(z-2+5)(z-2+10)} = 0$$

$$(z-1)(z+3)(z+8) + k_1 = 0$$

$$z^3 + 10z^2 + 13z + k_1 - 24 = 0$$

3	1	13	0
2	10	$k_1 - 24$	0
1	$130 - k_1 + 24$	0	0
0	$k_1 - 24$		

$$\begin{cases} 154 - k_1 > 0 & k_1 < 154 \\ k_1 - 24 > 0 & k_1 > 24 \end{cases}$$

Quindi $K_1 \in [24, 154]$

c.

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

$$K_1^* \ni \quad 1 + K_1^* G_1(-2{,}7299) = 0$$

$$K_1^* = -\frac{1}{G_1(-2{,}7299)} =$$

$$= -(s+1)(s+5)(s+10)\Big|_{s=-2{,}7299} = 28{,}55$$

7.

Soluzione

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C\,P = \frac{9\cdot(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)}{s(s^2+9)(s+5)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,L(s) = \frac{\cancel{9}\cdot y_0}{\cancel{9}\cdot 5} = \frac{y_0}{5} = 4$$

$$y_0 = 20 \qquad \text{ovvero} \quad \frac{9 y_0}{9\cdot 5} = 4$$

$$1 + L(s) = 0$$

$$s(s^2+9)\cdot(s+5) + 9(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)$$

$$((s+2)^2+1)(s+2)(s+c)$$

$$9y_3 + 5 = 6 + c \qquad 9y_3 + 5 = 24 \qquad 9y_3 = 19 \qquad y_3 = \frac{19}{9}$$

$$9y_2 + 9 = 13 + 6c \qquad 9y_2 + 9 = 13 + 108 \qquad 9y_2 = 112 \qquad y_2 = \frac{112}{9}$$

$$9y_1 + 45 = 10 + 13c \qquad 9y_1 + 45 = 10 + 234 \qquad 9y_1 = 199 \qquad y_1 = \frac{199}{9}$$

$$180 = 10c \Rightarrow c = 18 \qquad c \gg 2 \text{ ok!}$$

$$C(s) = \frac{2{,}11 s^3 + 12{,}4 s^2 + 13{,}2 s + 20}{s(s^2+9)}$$

8.

La differenza massima fra gli argomenti della funzione $y(\cdot)$ è 4.
Quindi l'ordine del sistema è $n=4$.
Si effettua la sostituzione $(k-4) \rightarrow k$:

$$y(k-4)-8y(k-4+2)+16y(k-4+4)=16u(k-4+4)+16u(k-4+1)$$

$$16y(k)-8y(k-2)+y(k-4)=16u(k)+16u(k-3)$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z)=\frac{16z^4+16z}{16z^4-8z^2+1} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

Per un sistema del 4° ordine il criterio di Jury afferma:
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1) $a(1)>0$: $16-8+1=9>0$ ok!
2) $(-1)^4 a(-1)>0$: $16-8+1=9>0$ ok!
3) $|a_0|<a_4$: $1<16$ ok!
4) $|b_0|>|b_3|$: $255>0$ ok!
5) $|c_0|>|c_2|$: $255^2>255\cdot 120$ ok!

Tabella di Jury

1	1	0	-8	0	16
2	16	0	-8	0	1
3	-255	0	120	0	
4	0	120	0	-255	
5	255^2	0	$-255\cdot 120$		