Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

1) $Du = -2e^{-t}$ $D^2u = 2e^{-t}$ $Dy = -2e^{-2t}$ $D^2y = 4e^{-2t}$

$4e^{-2t} + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) =$

$= 2e^{-t} + 2(-2e^{-t}) + 2e^{-t}$ OK! vera $\forall t < 0$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t=0-$.

$$y(t) = e^{-2t} \Rightarrow y(0-) = 1$$

$$Dy = -2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-) = -2$$

$$u(t) = 2e^{-t} \Rightarrow u(0-) = 2$$

$$Du(t) = -2e^{-t} \Rightarrow Du(0-) = -2$$

$$s^2Y(s) - sy(0-) - Dy(0-) + 4\big(sY(s) - y(0-)\big) + 4Y(s) =$$
$$= s^2U(s) - su(0-) - Du(0-) + 2\big(sU(s) - u(0-)\big) + U(s)$$

$$s^2Y(s) - s + 2 + 4\big(sY(s) - 1\big) + 4Y(s) =$$
$$= s^2U(s) - 2s + 2 + 2\big(sU(s) - 2\big) + U(s)$$

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) - s - \cancel{2} =$$
$$= (s^2 + 2s + 1)U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2+4s+4)Y(s) = (s^2+2s+1)U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+4s+4}U(s) - \frac{s}{s^2+4s+4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2} \cdot \frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{s}\right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \Longrightarrow K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3\,t\,e^{-2t} + \frac{13}{2}\,e^{-2t}}$$

4.

Vedi appunti dell’insegnamento.

5.

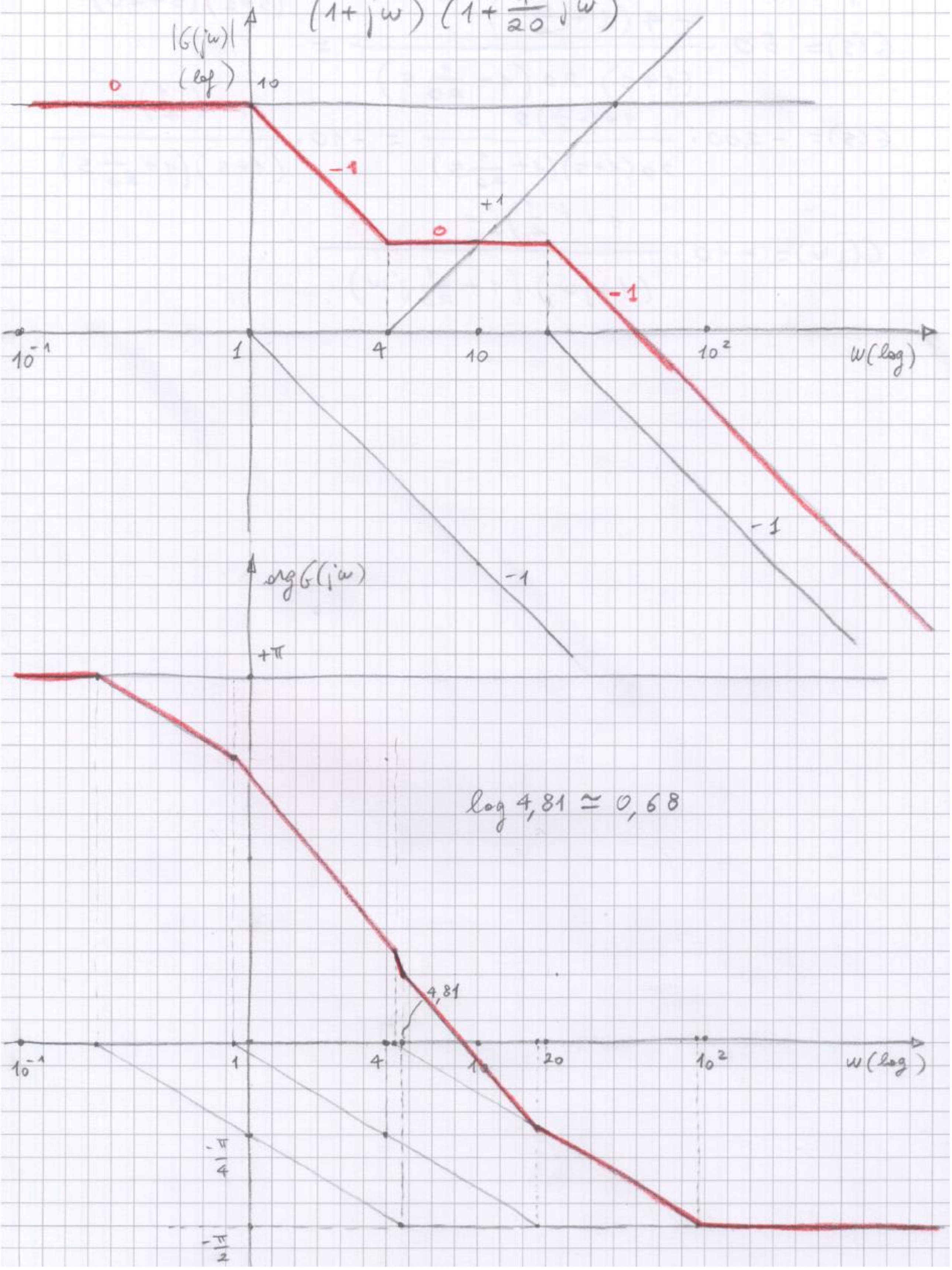
Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s) = 50\,\dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$

$$G(s) = 50\,\frac{-4\left(1+\frac{1}{-4}s\right)}{(1+s)\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{20}s\right)} =$$

$$G(s) = -200\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)s}{20(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = -10\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = -10\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

$$G(j\omega) = -10 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) j\omega}{(1 + j\omega)\left(1 + \frac{1}{20} j\omega\right)}$$



6.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K_1\frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}=0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4+12s^3+32s^2+K_1s+K_1=0$$

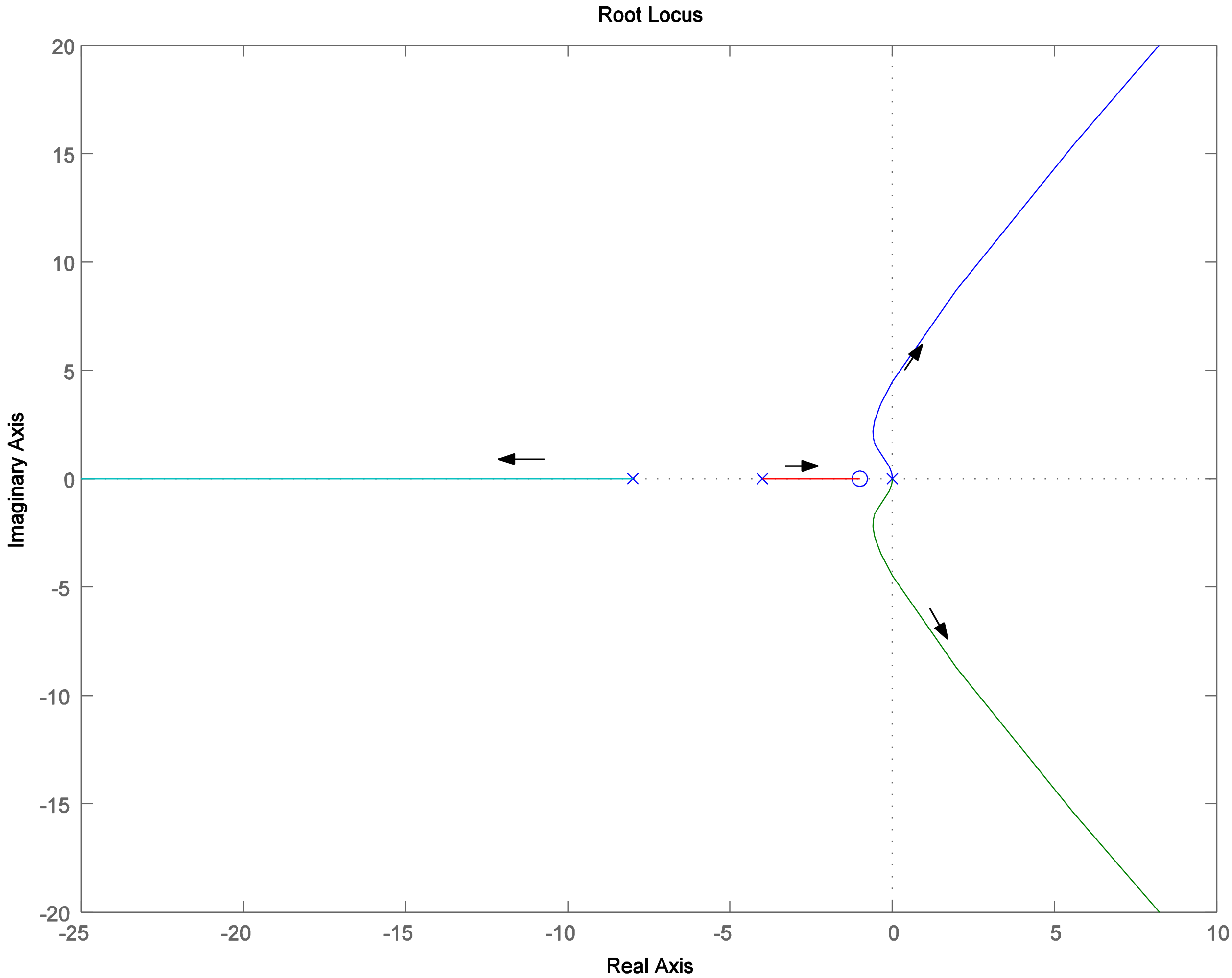
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\ 3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\ 2 & 384-K_1 & 12K_1 & 0 & \\ 1 & K_1(240-K_1) & 0 & & \\ 0 & 12K_1 & & & \end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1\in(0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1}=+60°,\ \vartheta_{a,2}=+180°,\ \vartheta_{a,3}=-60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a=\frac{-4-8-(-1)}{3}=-\frac{11}{3}\cong-3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1=240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2+12\cdot 240=0$$
$$s^2+20=0$$
Quindi le intersezioni avvengono in $s=\pm j\sqrt{20}\cong \pm j4,47$.

7.

) La specifica a) equivale a $\left|\dfrac{1}{1+K_p}\right|=\dfrac{1}{50}$ $\Leftrightarrow$ $K_p=49$ oppure $K_p=-51$. Dato che $K_p=K\dfrac{5}{2}$ ed è opportuno scegliere $K>0$ (al fine dell'ottenimento di una facile stabilizzabilità) si impone

$$K_p=49 \quad \Rightarrow \quad K=\frac{98}{5}$$

Definiamo

$$L(s):=KP(s)=1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$
$$L'(s):=C(s)P(s)=1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega)=1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$
$$\arg L(j\omega)=\text{arctg }\omega-2\text{ arctg }\frac{\omega}{2}-\text{ arctg }\frac{\omega}{10}$$
$$|L(j\omega)|=1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$\omega_0=10$ rad/s

$\arg L(j\omega_0)=-2,0611$ rad $\Rightarrow$ $\varphi_0=0,2079$ rad

$|L(j\omega_0)|=13,393$

verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|,\varphi_0\right)\in C$?

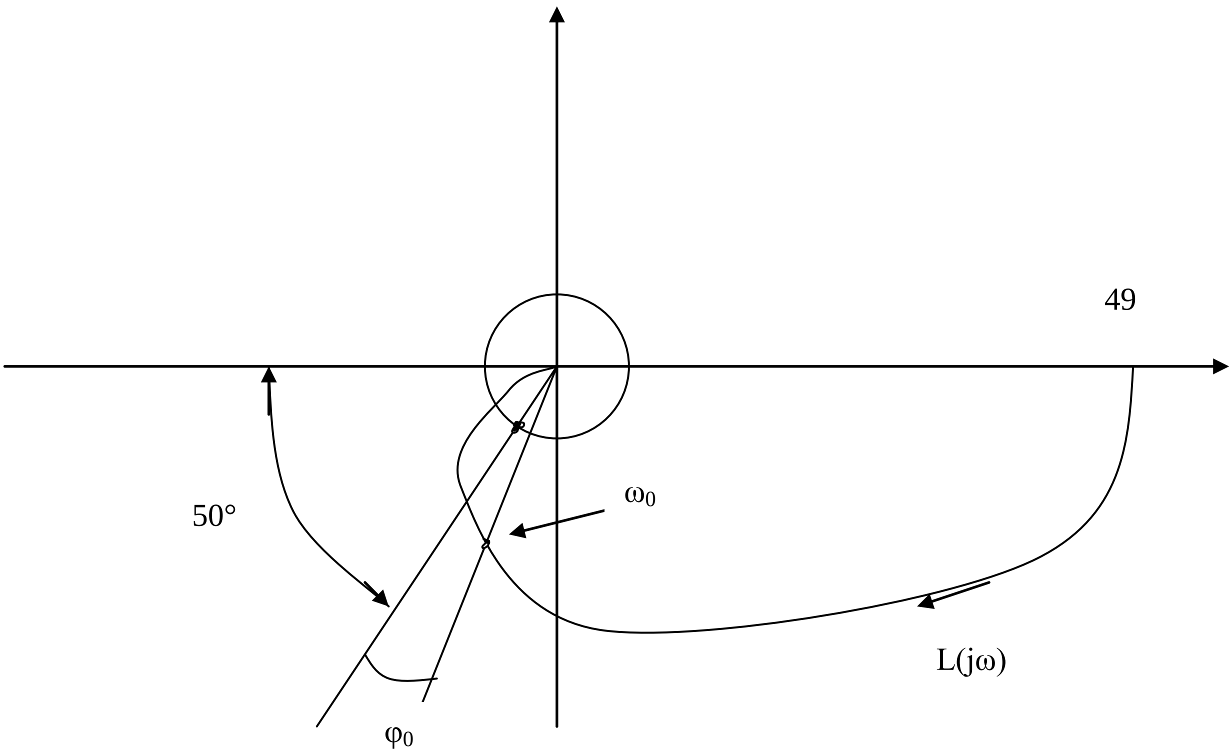
sì, perchè $\cos\varphi_0>1/|L(j\omega_0)|$: 0,9785 > 0,0747.

Si definisce $M:=|L(j\omega)|$ e $\varphi:=\varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi}=\frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{M\cos\varphi-1}{M(M-\cos\varphi)}=0,07280\\[2ex] \tau=\dfrac{M-\cos\varphi}{\omega_0\text{ sen }\varphi}=6,016\text{ s}\end{cases}$$



8.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \to k$.
L'eq. diventa

$$16\, y(k) - 12\, y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\, u(k-2) + 16\, u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16 z + 16}{16 z^3 - 12 z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16 z^3 - 12 z^2 + 1$.

$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
$-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!