3. [punti 5] Dato un sistema di equazione $D^2y + 4Dy + 4y = D^2u + 2Du + u$ sia noto che per $t < 0$ ingresso ed uscita evolvono secondo le leggi: $u(t) = 2e^{-t}$, $y(t) = e^{-2t}$. All'istante $t = 0$ viene applicato il segnale $u(t) = 10,\ t \geq 0$:

1) verificare la correttezza dell'evoluzione del sistema per $t < 0$;
2) determinare l'uscita $y(t)$ del sistema per $t \geq 0$.

3.

1) $Du = -2e^{-t}$ $\quad D^2u = 2e^{-t}$ $\quad Dy = -2e^{-2t}$ $\quad D^2y = 4e^{-2t}$

$$4e^{-2t} + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) =$$

$$= 2e^{-t} + 2(-2e^{-t}) + 2e^{-t} \qquad \text{OK! vero } \forall t < 0$$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t = 0-$.

$y(t) = e^{-2t} \Rightarrow y(0-) = 1$

$Dy = -2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-) = -2$

$u(t) = 2e^{-t} \Rightarrow u(0-) = 2$

$Du(t) = -2e^{-t} \Rightarrow Du(0-) = -2$

$$s^2Y(s) - sy(0-) - Dy(0-) + 4\big(sY(s) - y(0-)\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - s\,u(0-) - Du(0-) + 2\big(sU(s) - u(0-)\big) + U(s)$$

$$s^2Y(s) - s + 2 + 4\big(sY(s) - 1\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - 2s + 2 + 2\big(sU(s) - 2\big) + U(s)$$

$$(s^2+4s+4)\,Y(s) - s - \cancel{2} =$$
$$= (s^2+2s+1)\,U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2+4s+4)\,Y(s) = (s^2+2s+1)\,U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+4s+4}\,U(s) - \frac{s}{s^2+4s+4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2}\cdot\frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{s}\right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \implies K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s} - 3\cdot\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3\,t\,e^{-2t} + \frac{13}{2}\,e^{-2t}}$$

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t)=\begin{cases}2t+2 & 0\le t<\dfrac{1}{2}\\[2mm] 1 & t\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

* $y(t),\ t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$

$$U(s)=2\cdot\frac{1}{s^2}+2\cdot\frac{1}{s}=2\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}+1\right)=2\frac{1}{s}\cdot\frac{1+s}{s}$$

$$Y(s)=G(s)\,U(s)=\frac{1}{\cancel{s+1}}\cdot\frac{2\cancel{(1+s)}}{s^2}=\frac{2}{s^2}$$

$$y(t)=2t,\quad 0\le t<\frac{1}{2}$$

* $y(t),\ t\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

$G(s)$ è asintoticamente stabile, quindi

$$y(t)=G(0)\cdot 1+y_{tran.}(t)=1+y_{tran.}(t)$$

$$y_{tran.}(t)=c\cdot e^{-t},\quad c\in\mathbb{R}\ \text{(evoluzione libera)}$$

$$y(t)\in C^{\rho-1}(\mathbb{R})\ ;\quad \rho=1\ \Rightarrow\ y(t)\in C^{0}(\mathbb{R})$$

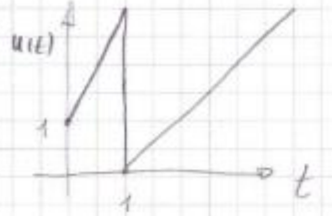
$$y\left(\tfrac{1}{2}-\right)=y\left(\tfrac{1}{2}+\right)$$

$$2\cdot\frac{1}{2}=1+c\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}\quad\text{da cui}\quad c=0$$

Quindi $y(t)=1,\quad t\geq\frac{1}{2}$.

3. [punti 5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t)=\begin{cases}1+2t & 0\le t<1\\ t-1 & t\ge 1\end{cases}$$



$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$u(t)=\begin{cases}1+2t & t\in[0,1)\\ t-1 & t\geqslant 1\end{cases}$$

1° metodo

$$u(t)=1+2t-(1+2t)1(t-1)+(t-1)\cdot 1(t-1)$$
$$=1+2t-(t+2)1(t-1)=1+2t-[(t-1)+3]1(t-1)$$

$$G(s)=\frac{1}{s+1}\qquad u(t)=1+2t-[(t-1)+3]\cdot 1(t-1)$$

$$U(s)=\frac{1}{s}+2\cdot\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+3\cdot\frac{1}{s}\right)$$
$$=\frac{s+2}{s^2}-e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}$$

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+2}{s^2}-e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}=$$
$$=\frac{s+2}{s^2(s+1)}-e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)}=\frac{c_{11}}{s^2}+\frac{c_{12}}{s}+\frac{c_2}{s+1}=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

$$c_{11}=\left.\frac{s+2}{s+1}\right|_{s=0}=2\qquad c_2=\left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-1}=1$$

$$c_{12}+c_2=0\qquad c_{12}=-c_2=-1$$

$$\frac{1+3s}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{1+3s}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \left.\frac{1+3s}{s^2}\right|_{s=-1} = -2$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = 2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right](t-1) \cdot 1(t-1)$$

$$= 2t - 1 + e^{-t} - \left[(t-1) + 2 - 2e^{-(t-1)}\right] \cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0, 1)$ $\quad y(t) = 2t - 1 + e^{-t}$

Se $t \in [1, +\infty)$

$$y(t) = 2t - 1 + e^{-t} - \left[t - 1 + 2 - 2 \cdot e^{-(t-1)}\right]$$

$$= t - 2 + e^{-t} + 2e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

3. [punti 5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3(s+1)}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{3} = -\frac{11}{8}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - t e^{-2t} - \frac{11}{8} e^{-2t} + 2e^{-t}$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

3. [punti 4,5] Sia dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)^2}$ in cui si introduce l'ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5\sin(t) & t \geq 0 \end{cases}$.
Determinare le condizioni iniziali sull'uscita al tempo 0^-, $y(0^-)$ e $Dy(0^-)$ affinché l'uscita sia identicamente nulla per $t \geq 0$: $y(t) = 0, t \geq 0$.

$G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4}$

Eq. differenziale $\quad D^{*2}y(t) + 4D^{*}y(t) + 4y(t) = D^{*2}u(t) + u(t)$

$y_- := y(0^-) \quad Dy_- := Dy(0^-)$

$s^2 Y - y_- s - Dy_- + 4(sY - y_-) + 4Y = s^2 U + U$

$(s^2 + 4s + 4)Y = (s^2+1)U + y_- s + Dy_- + 4y_-$

$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} U(s) + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$

$U(s) = \mathcal{L}[5\sin(t)] = 5 \cdot \frac{1}{s^2+1}$

$Y(s) = \frac{\cancel{s^2+1}}{s^2+4s+4} \cdot \frac{5}{\cancel{s^2+1}} + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$

Imponiamo $Y(s) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0, t \geq 0$

$5 + y_- s + Dy_- + 4y_- = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}}$

Altro metodo:

$$\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix}$$

$y(t)=0,\ t \geq 0 \Rightarrow y_+ = 0,\ Dy_+ = 0$

$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 5\sin(t) & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_- = 0,\ Du_- = 0 \\ u_+ = 0 \quad Du_+ = 5 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y_- \\ -Dy_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} -y_- = 0 \\ -4y_- - Dy_- = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}$

3. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(t)$ di un sistema dinamico avente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{32}{(s+2)^3(s+4)}$ al segnale di ingresso $u(t) = t \cdot 1(t)$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$U(s) = \dfrac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)\,U(s) = \dfrac{32}{s^2(s+2)^3(s+4)}$

$= \dfrac{K_{11}}{s^2} + \dfrac{K_{12}}{s} + \dfrac{K_{21}}{(s+2)^3} + \dfrac{K_{22}}{(s+2)^2} + \dfrac{K_{23}}{s+2} + \dfrac{K_3}{s+4}$

RESIDUI

$K_{11} = \left.\dfrac{32}{(s+2)^3(s+4)}\right|_{s=0} = \dfrac{32}{32} = 1$

$K_{21} = \left.\dfrac{32}{s^2(s+4)}\right|_{s=-2} = \dfrac{32}{4\cdot 2} = 4$

$K_3 = \left.\dfrac{32}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-4} = \dfrac{32}{4\cdot4\cdot(-8)} = -\dfrac{1}{4}$

$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \qquad \boxed{K_{12} + K_{23} = \dfrac{1}{4}}$

calcolo di K_{12}: $K_{12} = D\left[\dfrac{32}{(s+2)^3(s+4)}\right]_{s=0} = -\dfrac{7}{4}$

$= -(32)\left.\dfrac{3(s+2)^2(s+4)+(s+2)^3}{(s+2)^6(s+4)^2}\right|_{s=0} = -32\cdot\dfrac{3\cdot4\cdot4+4\cdot2}{2^6\cdot4^2} = -2\,\dfrac{3\cdot4+2}{2^3\cdot2\cdot4} =$

3. [punti 4,5] Un sistema dinamico ha funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$. L'ingresso applicato è $u(t)=0$ per ogni $t\geq 0$ e dell'uscita si conosce che $y(0+)=0$ e $Dy(0+)=1$. Determinare $y(t)$ per $t\geq 0$.

Soluzione

Metodo dei modi: $y(t)=c_1 e^{-t}+c_2 e^{-2t}$

$Dy(t)=-c_1 e^{-t}-2c_2 e^{-2t}$

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_1-2c_2=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_2=-c_1 \\ -c_1-2(-c_1)=1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_2=-1 \\ c_1=1 \end{matrix}$$

Quindi $\boxed{y(t)=e^{-t}-e^{-2t}}$

Metodo dell'eq. differenziale: $G(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

$D^2y(t)+3Dy(t)+2y(t)=Du(t)+3u(t)$

Applichiamo la Trasformata di Laplace

$s^2Y-y(0+)s-Dy(0+)+3(sY-y(0+))+2Y=0$

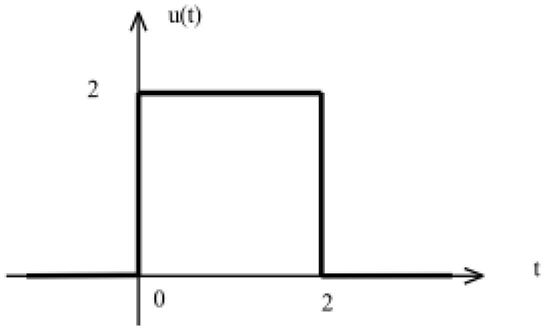
$(s^2+3s+2)Y-1=0 \qquad Y=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{k_1}{s+1}+\dfrac{k_2}{s+2}=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}$

$k_1=\left.\dfrac{1}{s+2}\right|_{s=-1}=1 \qquad k_1+k_2=0 \qquad k_2=-1$

$\boxed{y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=e^{-t}-e^{-2t}}$

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{8}{(s+2)(s+4)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ (per $t>0$) al segnale di ingresso definito in figura:



$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{s} - 2\, e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \cdot \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)} \right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\, Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$K_1 = \left.\frac{16}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left.\frac{16}{s(s+4)}\right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)2} = -4$$

$$K_3 = \left.\frac{16}{s(s+2)}\right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$
$$- \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

Per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

Per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$
$$= (e^4 - 1)4e^{-2t} + (1 - e^8)2e^{-4t}$$

3. [punti 4] Determinare, a partire da condizioni iniziali nulle, la risposta in uscita $y(t)$ per $t > 0$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{8}{s+2}$ al segnale armonico in ingresso $u(t) = 4\sin(2t) \cdot 1(t)$.

3.

$$Y(s) = G(s)L[4\sin(2t)] = \frac{8}{s+2}\cdot\frac{4\cdot 2}{s^2+4} = \frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+j2} + \frac{B^*}{s-j2}$$

$$A = (s+2)\left.\frac{64}{(s+2)(s^2+4)}\right|_{s=-2} = 8$$

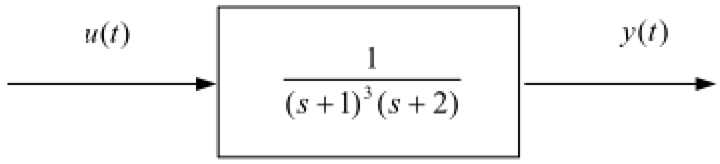
$$B = (s+j2)\left.\frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}\right|_{s=-j2} = -4+j4$$

Antitrasformando lo sviluppo in fratti semplici otteniamo:

$$y(t) = 8e^{-2t} + 2\left|-4+j4\right|\cos(-2t+\arg(-4+j4)) =$$
$$= 8e^{-2t} + 8\sqrt{2}\sin(2t-\pi/4)$$

Nota: Il termine armonico asintotico poteva essere dedotto direttamente utilizzando il Teorema di Analisi Armonica.

3. [punti 4] Sia dato il sistema di figura con funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$.



Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ del sistema in figura in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = \left. -\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

N.B.
Correzione sul calcolo di k_3:
k_3 = 1/(s (s+1)^3)|_{s=-2} = 1/2

3. [punti 5] Determinare la risposta $g_s(t)$ al gradino unitario di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)\left[(s+1)^2+1\right]}$. Determinare inoltre la risposta $g(t)$ all'impulso unitario di tale sistema.

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+1-j} + \frac{\overline{K}_3}{s+1+j}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+2)\left[(s+1)^2+1\right]}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{s\left[(s+1)^2+1\right]}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)[2]} = -\frac{1}{4}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+2)(s+1+j)}\right|_{s=-1+j} = \frac{1}{(-1+j)(-1+j+2)(-1+j+1+j)} =$$

$$= \frac{1}{(-1+j)(1+j)2j} = \frac{1}{[j^2-1]2j} = \frac{1}{(-2)2j} = \frac{1}{-4j}$$

$$= \frac{j}{-4j^2} = \frac{1}{4}j \qquad |K_3| = \frac{1}{4} \quad \arg K_3 = +\frac{\pi}{2}$$

$$g_s(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + 2|K_3|e^{-t}\cdot\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) =$$

OK!!

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\left[-\sin t\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

$$g_s(t) \in \overline{C^{\varrho-1}} \qquad \varrho = 3 \qquad g_s(t) \in \overline{C^2}$$

$$g(t) = D\,g_s(t) = \left(-\frac{1}{4}\right)(-2)e^{-2t} - \frac{1}{2}(-1)e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t$$ ok!

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4(s+1)^{\cancel{3}0}}{(s+1)^{\cancel{8}5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2s}{s^{\cancel{4}3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1) \left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

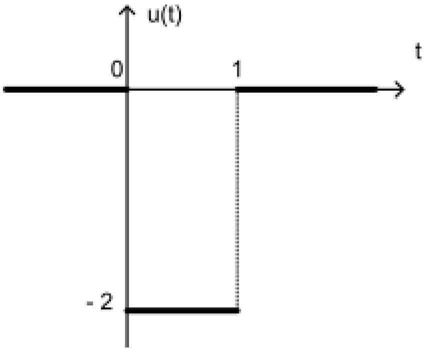
$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + 2t^2 e^{-t} + 6te^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

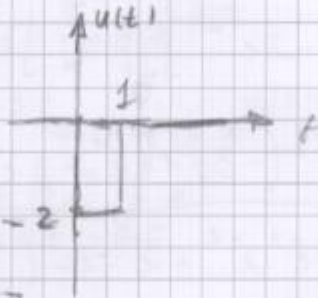
Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



B3. $G(s)=\dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$



determinare $y(t)$ per $t>0$

$u(t) = -2\cdot 1(t)$ per $t\in[0,1]$

$U(s) = -2\cdot\dfrac{1}{s}$ $\qquad Y(s) = -2\cdot\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{8}{(s+1)(s+2)} =$

$Y(s) = \dfrac{-16}{s(s+1)(s+2)} = \dfrac{K_1}{s}+\dfrac{K_2}{s+1}+\dfrac{K_3}{s+2}$

$K_1 = \dfrac{-16}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} = \dfrac{-16}{1\cdot 2} = -8$ $\qquad K_2 = \dfrac{-16}{s(s+2)}\Big|_{s=-1} = \dfrac{-16}{(-1)\cdot 1} = +16$

$K_1+K_2+K_3=0$ $\qquad K_3 = 8-16 = -8$

$y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}$ $\qquad t\in[0,1]$

$Dy(t) = -16e^{-t} + 16e^{-2t}$

$Dy(0+) = -16+16 = 0$ $\qquad y(0+) = 0$ $\qquad$ ok!

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ per $t \geq 1$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$y(t) \in C^{g-1}$, quindi eccedenza $g = 2$

$\Rightarrow y(t) \in C^{1}$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ -e^{-1} & -2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+16e^{-1}-8e^{-2} \\ -16e^{-1}+16e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-2e^{-2}\left(-8+16e^{-1}-8e^{-2}\right) - \left(-16e^{-1}+16e^{-2}\right)e^{-2}}{-2e^{-1}\cdot e^{-2} + e^{-1}\cdot e^{-2}} =$$

$$= \frac{-2\left(-8+16e^{-1}-8e^{-2}\right) + 16e^{-1} - 16e^{-2}}{\underbrace{-2e^{-3}+e^{-3}}_{\cancel{(-e^{-3})}\ (-e^{-1})}} =$$

$$= \frac{16 - 32e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} + 16e^{-1} - \cancel{16e^{-2}}}{-e^{-1}} = \frac{16-16e^{-1}}{-e^{-1}} =$$

$$= -16\cdot e + 16 = 16 - 16\cdot e$$

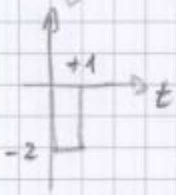
$$c_2 = \frac{\cancel{-16e^{-2}} + 16e^{-3} - 8e^{-1} \cancel{+16e^{-2}} - 8e^{-3}}{-e^{-3}} =$$

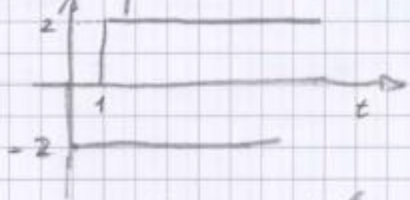
$$= \frac{-8e^{-1} + 8e^{-3}}{-e^{-3}} = 8e^{2} - 8$$

determinazione di $y(t)\big|_{t \geq 0}$ con le sole proprietà della trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\,\mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s} F(s)\right]$$





$$u(t) = -2 \cdot 1(t) + 2 \cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = -2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot e^{-s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{-16}{s(s+1)(s+2)} + \frac{16}{s(s+1)(s+2)}\,e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-16}{s(s+1)(s+2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+1)(s+2)}\,e^{-s}\right] =$$

$$= \left(-8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}\right) \cdot 1(t) + \left(+8 - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)}\right) 1(t-1)$$

Quindi per $t \in [0, 1)$: $y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}$

Per $t \geq 1$ $\quad y(t) = \cancel{-8} + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \cancel{+8} - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)} =$

$$= 16e^{-t} - 16e^{-t} \cdot e - 8e^{-2t} + 8e^{-2t} \cdot e^{2}$$

$$= (16 - 16e)\,e^{-t} + (-8 + 8e^{2})\,e^{-2t}$$

ok!

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$Y(s) = \frac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}.$$

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)^3} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+1}$$

$$A = \left.\frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \left.\frac{s-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = -2$$

$$E = \left.\frac{s-2}{s(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A + D + E = 0 \Rightarrow D = -\frac{11}{4}$$

$$C = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)}\right]\right|_{s=-2} = -\frac{5}{2}$$

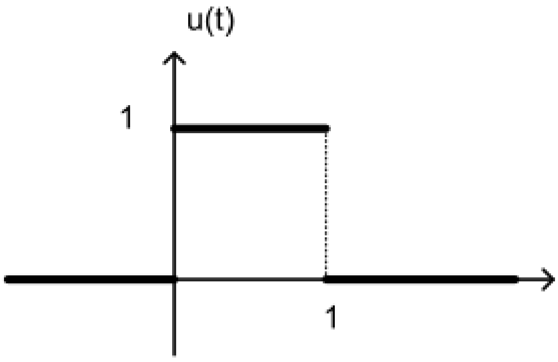
Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = A + B\frac{1}{2}t^2e^{-2t} + Cte^{-2t} + De^{-2t} + Ee^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} - t^2e^{-2t} - \frac{5}{2}te^{-2t} - \frac{11}{4}e^{-2t} + 3e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Il segnale in ingresso è discontinuo e $\rho = 3 \geq 1$, quindi $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 2.

3. [punti 5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{4}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ al segnale di ingresso $u(t)=\begin{cases} 0 \ \text{ per } t<0 \\ 1 \ \text{ per } 0\le t<1 \\ 0 \ \text{ per } t\ge 1 \end{cases}$ (vedi figura).



1° metodo :

Calcolo di $y(t)$ per $0\le t<1$:

$u(t)=1,\ \ U(s)=\dfrac{1}{s} \ \ \Rightarrow \ \ Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{4}{s(s+1)(s+2)}$

$Y(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+1}+\dfrac{k_3}{s+2};$

$k_1=\left.\dfrac{4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0}=2\ ; \quad k_2=\left.\dfrac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-1}=-4\ ; \quad k_3=\left.\dfrac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=2\ ;$

$y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}$

Calcolo di $y(t)$ per $t\ge 1$:

$y(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

Considerato che $\rho=2$ e $y\in\overline{C^{\rho-1,\infty}}(\mathbb{R}) \ \Rightarrow \ y\in\overline{C^{1,\infty}}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow\begin{cases} y(1-)=y(1+) \\ Dy(1-)=Dy(1+) \end{cases},$

$Dy(t)=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}$ per $t\ge 1$; $\quad Dy(t)=4e^{-t}-4e^{-2t}$ per $0\le t<1$

$\begin{cases} 2-4e^{-1}+2e^{-2}=c_1e^{-1}+c_2e^{-2} \\ 4e^{-1}-4e^{-2}=-c_1e^{-1}-2c_2e^{-2} \end{cases} \ \Rightarrow \ c_1=4e-4\ ; \ c_2=2-2e^2\ ;$

$y(t)=4(e-1)\cdot e^{-t}+2(1-e^2)\cdot e^{-2t}$

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ per un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = 10 \cdot \dfrac{1-s}{(s+1)(s+2)(s+5)}$.

Determinare il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di tale evoluzione forzata $y(t)$.

3.

$$Y(s) = 10 \cdot \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{s+5}$$

Calcolando i residui con le formule usuali otteniamo $k_1 = 1$, $k_2 = -5$, $k_3 = 5$, $k_4 = -1$. Quindi

$$y(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$y(t) = 1 - 5e^{-t} + 5e^{-2t} - e^{-5t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

L'ingresso applicato al sistema $u(t) = 1(t)$ (gradino unitario) è una funzione discontinua e l'ordine relativo del sistema è $\rho = 2 \geq 1$. Quindi da una nota proprietà $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}} = \overline{C^{1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di $y(t)$ è 1.

3. [punti 5] Da una elaborazione di dati sperimentali su di un sistema dinamico è nota la risposta al gradino unitario $g_s(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$.

a) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema esprimendola nella forma standard con poli e zeri.

b) Determinare la risposta forzata $y(t),\ t \geq 0$ del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1+t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

5 a. $\mathcal{L}[g_s(t)] = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[g_s(t)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = 2 \cdot \frac{s + 1/2}{(s+1)(s+2)}$$

b. $u(t) = 1(t) + t \cdot 1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2s+1}{\cancel{(s+1)}(s+2)} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+2)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2s+1}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{2s+1}{s^2}\right|_{s=-2} = -\frac{3}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{12} = \frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}\right) \cdot 1(t)$$

3. [punti 4.5] Di un sistema dinamico è nota la risposta all'impulso $g(t) = 15e^{-2t} - 10te^{-2t} - 15e^{-4t}$. Determinare la risposta al gradino unitario $g_s(t)$ di tale sistema.

3.
1° metodo:

$$g_s(t) = \int_0^t g(v)dv$$

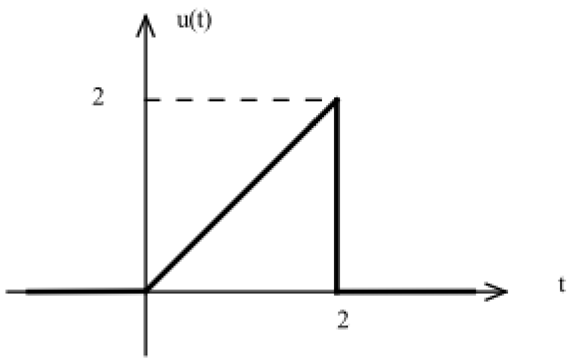
$$g_s(t) = \int_0^t \left(15e^{-2v} - 10ve^{-2v} - 15e^{-4v}\right)dv =$$

$$= 15\int_0^t e^{-2v}dv - 10\int_0^t ve^{-2v}dv - 15\int_0^t e^{-4v}dv =$$

$$= 15\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right)\right] - 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\right] - 15\left[-\frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{4} - 5e^{-2t} + 5te^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

3. [punti 4.5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10}{s+3}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ \ t \in (0, +\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



determiniamo la risposta forzata per $t \in (0,2)$

Se $u(t) = t \qquad U(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{10}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_{11} = \left.\frac{10}{s+3}\right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{10}{s^2}\right|_{s=-3} = \frac{10}{9}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 = -\frac{10}{9}$$

$$Y(s) = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{10}{9}\,\frac{1}{s} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \frac{10}{3}\,t - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\,e^{-3t}$$

ok!

per $t > 2$ il sistema è in evoluzione libera.

$$\Rightarrow \quad y(t) = c\,e^{-3t}$$

Studio delle relazioni fra le condizioni iniziali al tempo $t = 2$.

$$y(2-) = \frac{10}{3} \cdot 2 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10 - 10}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} = \frac{50}{9} +$$

$$y(2+) = ?$$

$$= \frac{50}{9} + \frac{10}{9} e^{-6}$$

$$\rho = 1 \qquad u(t) \in C^{-1} \Rightarrow y(t) \in C^{-1+1} = C^{0}$$

$$\Rightarrow \quad y(2+) = y(2-)$$

$$y(2+) = c\, e^{-6}$$

$$\frac{50}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} = c\, e^{-6}$$

$$c = \frac{50}{9} e^{6} + \frac{10}{9}$$

Quindi per $t > 2$

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{50}{9} e^{6} + \frac{10}{9} \right) e^{-3t}}$$

3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{2s^2+1}{s^2+3s+2}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ t \in [0,+\infty)$ al segnale di ingresso $u(t) = (1+t)\cdot 1(t)$.

3.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2s^2+1}{s^2+3s+2}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right) =$$

$$= \frac{2s^2+1}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{s+1}{s^2} = \frac{2s^2+1}{s^2(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2s^2+1}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{2s^2+1}{s^2}\right|_{s=-2} = \frac{9}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 2, \quad K_{12} = 2 - K_2 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cdot e^{-2t}$$

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^4}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{10}{(s+1)^4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_1 = \left.\frac{10}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 10 \quad , \quad K_{21} = \left.\frac{10}{s}\right|_{s=-1} = -10$$

$$K_1 + K_{24} = 0 \Rightarrow K_{24} = -K_1 = -10$$

$$K_{22} = \frac{1}{(2-1)!} D^{2-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = 10\left[-s^{-2}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$K_{23} = \frac{1}{(3-1)!} D^{3-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{(s+1)^4} - \frac{10}{(s+1)^3} - \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{s+1}$$

$$y(t) = 10 - \frac{5}{3}t^3e^{-t} - 5t^2e^{-t} - 10te^{-t} - 10e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Il gradino è una funzione discontinua, quindi $y(t) \in \overline{C^{\rho-1}}$.

$\rho = 4 \Rightarrow y(t) \in \overline{C^3}$ (il grado massimo di continuità dell'uscita è pari a 3).