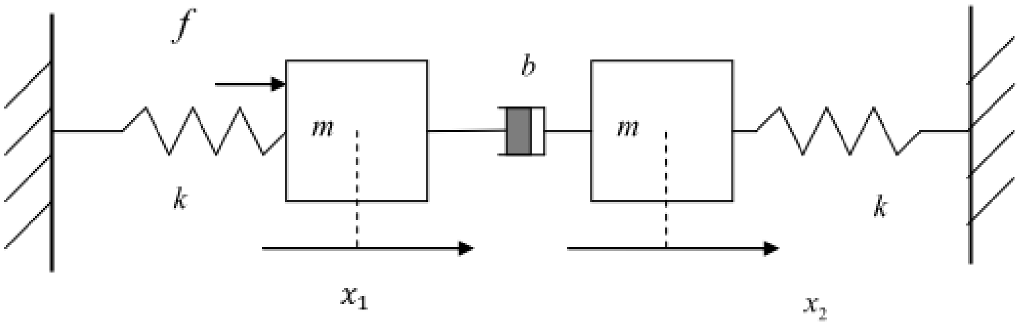
2. [punti 5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare l'equazione differenziale che caratterizza il sistema vibrante (denominato Σ) orientato dall'ingresso f all'uscita x_2.
c) Scrivere il polinomio caratteristico e la funzione di trasferimento di Σ.
d) Dimostrare con i metodi e teoremi della tabella di Routh che Σ è **semplicemente stabile** per qualsivoglia valore dei parametri m, k, b (tutti positivi).
e) Giustificare con un ragionamento fisico il motivo per cui Σ, nonostante la presenza di un elemento dissipativo (lo smorzatore viscoso), **non è asintoticamente stabile**.

Guarda infondo

b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema orientato dall'ingresso f all'uscita x_1.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & m^2 & mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2 X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

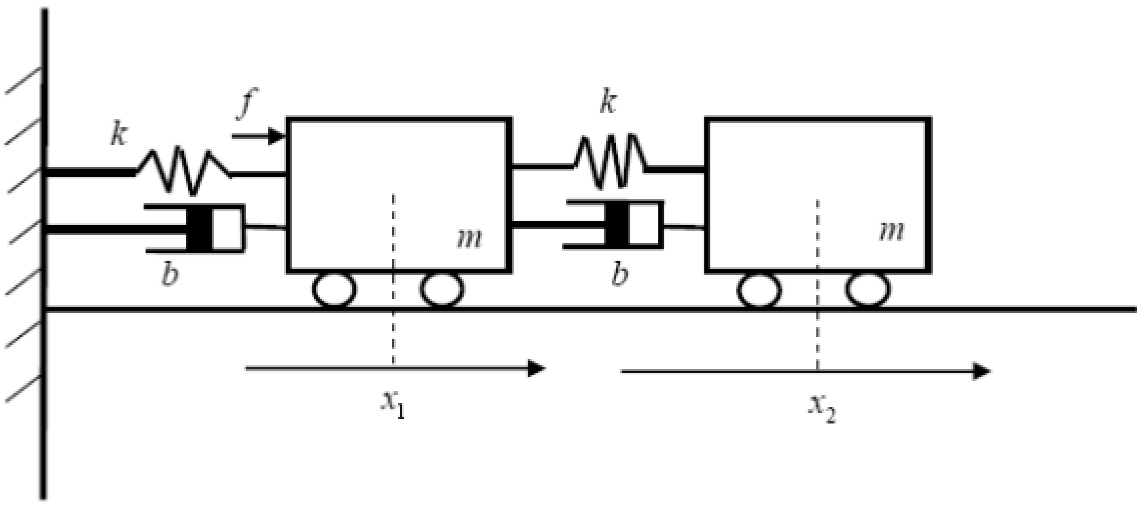
$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2 s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

2. [punti 4] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.

3. Verificare che Σ è asintoticamente stabile per ogni valore di $m, b, k > 0$.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bD + k) x_2 = m D^2 x_1 + 2bD x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + bD + k) x_2 = bD x_1 + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2 + bD + k)(m D^2 x_1 + 2bD x_1 + 2k x_1 - f) =$$
$$= (bD + k)(bD x_1 + k x_1)$$

$$(mD^2 + bD + k)(mD^2 + 2bD + 2k) x_1 - (mD^2 + bD + k) f =$$
$$= (bD + k)^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3bm D^3 + (3km + 2b^2) D^2 + 4bk D + 2k^2) x_1$$
$$- (b^2 D^2 + 2bk D + k^2) x_1 = (mD^2 + bD + k) f$$

1

$$\boxed{\begin{aligned} & m^2 D^4 x_1 + 3bm D^3 x_1 + (3km + b^2) D^2 x_1 + 2bk D x_1 + k^2 x_1 = \\ & \quad = m D^2 f + bD f + k f \end{aligned}}$$

2

$$\boxed{G(s) = \frac{m s^2 + b s + k}{m^2 s^4 + 3bm s^3 + (3km + b^2) s^2 + 2bk s + k^2}}$$

3.

Verifica mediante applicazione del criterio di Routh:

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & m^2 & 3km+b^2 & k^2 \\
3 & 3\cancel{b}m & 2\cancel{b}k & 0 \\
2 & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & 0 \\
1 & \gamma_{3,1} & 0 & \\
0 & \gamma_{2,2} & &
\end{array}
$$

$$\gamma_{2,1} = 3m \cdot (3km + b^2) - 2km^2 = 9km^2 + 3b^2m - 2km^2$$
$$= 7km^2 + 3b^2m > 0 \quad \forall b, k, m > 0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{2,2} = 3m \cdot k^2 = 3k^2m$$

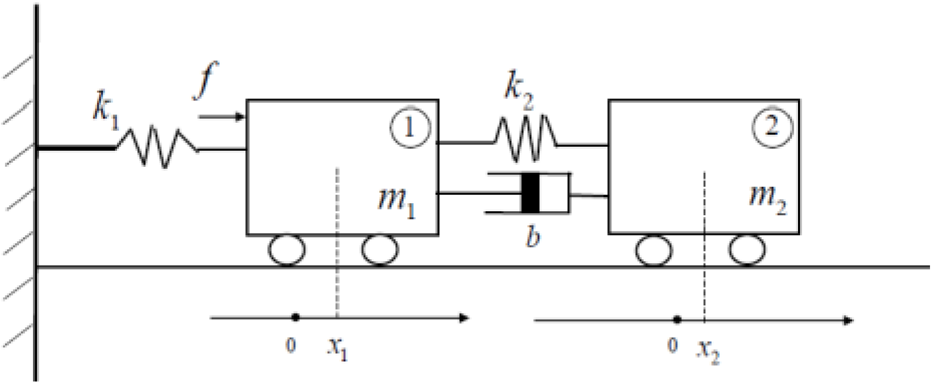
$$\gamma_{3,1} = \gamma_{2,1} \cdot 2k - \gamma_{2,2} \cdot 3m = 2k(7km^2 + 3b^2m) - 3k^2m \cdot 3m =$$
$$= 14k^2m^2 + 6b^2km - 9k^2m^2 = 5k^2m^2 + 6b^2km > 0 \quad \forall b, k, m > 0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{22} > 0 \quad \forall b, k, m > 0 \quad \text{ok!}$$

Tutte permanenze di segno nella prima colonna:

Σ è asintoticamente stabile.

2. [punti 7] Due carrelli di massa m_1 ed m_2 collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello 1) ad x_2 (posizione del carrello 2). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Posto $m = m_1 = m_2$, $k = k_1 = k_2$ e $b = 0$ determinare poli e modi di Σ.

2.

1.
$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + b(Dx_2 - Dx_1) \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - b(Dx_2 - Dx_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 - k_2 x_1 - b D x_1 + k_2 x_2 + b D x_2 \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2 x_2 - b D x_2 + k_2 x_1 + b D x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 + b D x_1 + (k_1 + k_2) x_1 = f + (k_2 + bD) x_2 \\ (k_2 + bD) x_1 = m_2 D^2 x_2 + b D x_2 + k_2 x_2 \end{cases}$$

$$[m_1 D^2 + bD + (k_1 + k_2)](m_2 D^2 + bD + k_2) x_2 =$$
$$= (k_2 + bD)^2 x_2 + (k_2 + bD) f$$

$$[m_1 m_2 D^4 + m_1 b D^3 + m_1 k_2 D^2 + m_2 b D^3 + \cancel{b^2 D^2} + b k_2 D + m_2 (k_1 + k_2) D^2 +$$
$$+ b(k_1 + k_2) D + k_2 (k_1 + \cancel{k_2})] x_2 = (\cancel{k_2^2} + 2 k_2 b D + \cancel{b^2 D^2}) x_2$$
$$+ (k_2 + bD) f$$

$$[m_1 m_2 D^4 + (m_1 + m_2) b D^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) D^2 + k_1 b D + k_1 k_2] x_2 = (k_2 + bD) f$$

2.
$$G(s) = \frac{bs + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) b s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) s^2 + k_1 b s + k_1 k_2}$$

3.

$m = m_1 = m_2 \,, \quad k = k_1 = k_2 \quad e \quad b = 0$

$$G(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3mk s^2 + k^2}$$

$$m^2 s^4 + 3mk s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3mk \pm \sqrt{9m^2k^2 - 4m^2k^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3mk \pm mk\sqrt{5}}{2m^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}}$$

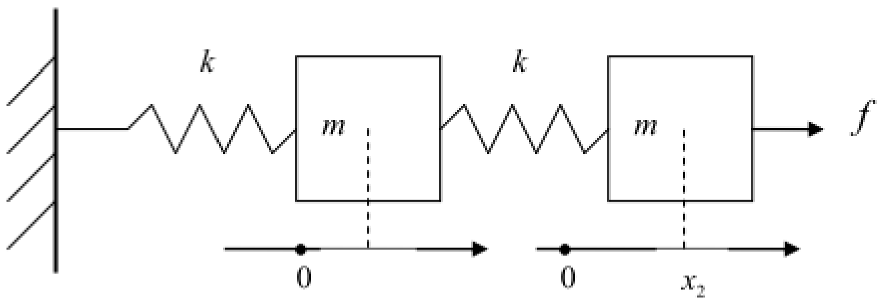
modi di Σ

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

anche esprimibili come

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \ \operatorname{sen}\left(0{,}618 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

2. [punti 5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m. Il corpo di destra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete con le molle a riposo $x_1 = x_2 = 0$). Si consideri il sistema dinamico Σ orientato da f ad x_1 (posizione del corpo di sinistra).

a) Determinare l'equazione differenziale che descrive il sistema Σ.
b) Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ di Σ.
c) Determinare i modi di Σ.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{array} \begin{cases} k x_2 = m\,D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (m D^2 + k)\, x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(m D^2 x_1 + 2k x_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\,D^2 x_1 + km\,D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\,D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2} \qquad f.d.t.$$

$$m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$P_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad P_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

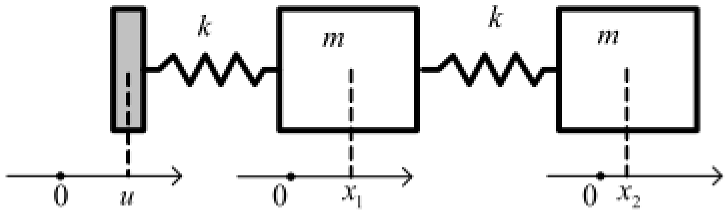
modi di Σ:

$$\text{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \text{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\text{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \text{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

2. [punti 6] Un azionamento elettrico lineare che può imporre una posizione desiderata u viene utilizzato per movimentare due masse su di una guida rettilinea (vedi figura). Gli accoppiamenti fra le masse e con l'azionamento elettrico sono costituiti da molle ideali con costante elastica k. Le posizioni delle due masse sono descritte dalle variabili x_1 e x_2. Si vuole studiare la dinamica del sistema meccanico orientato da u (ingresso) ad x_1 (uscita) ipotizzando che in condizioni di quiete si abbia $u=0$, $x_1=0$ e $x_2=0$. Di questo sistema si determini: 1) l'equazione differenziale, 2) la funzione di trasferimento, 3) gli zeri, 4) i poli, 5) i modi, 6) il guadagno statico.



2

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = -k(x_1-u) + k(x_2-x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2-x_1) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (mD^2+k) \\ k \end{matrix} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + 2k x_1 - k u \\ (mD^2+k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)\left[(mD^2+2k)x_1 - k u\right] = k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km D^2 x_1 + k^2 x_1 = km D^2 u + k^2 u} \quad \text{eq. diff.}$$

$$\text{f.d.t.} \quad G(s) = \frac{km s^2 + k^2}{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2} = \frac{k(ms^2+k)}{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2}$$

zeri: $ms^2 + k = 0$, $\quad z_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

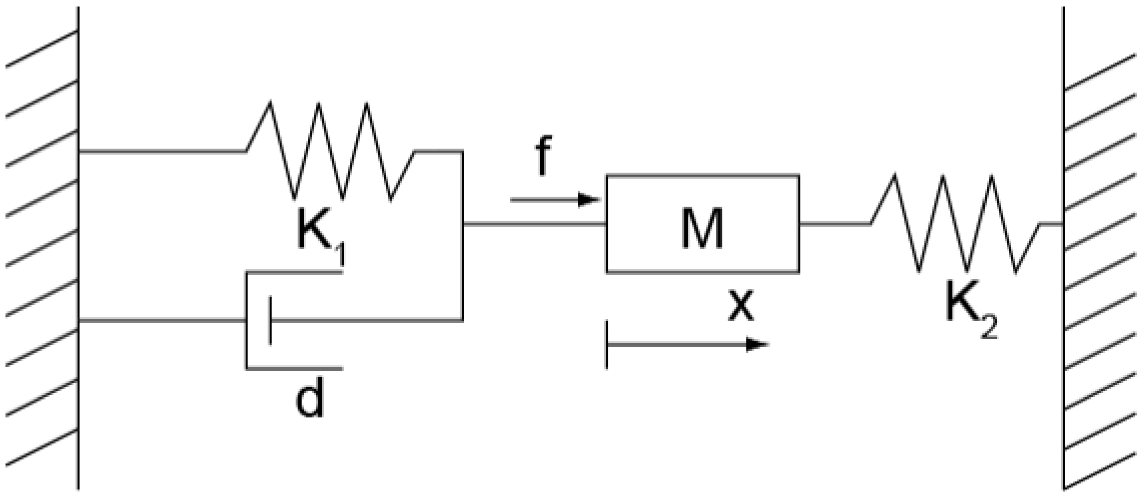
poli: $m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2 = 0$, $\quad s^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

modi: $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right)$, $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$

guadagno statico $G(0) = 1$.

2. [punti 5] Sia dato il seguente sistema meccanico



dove x rappresenta la posizione della massa rispetto ad un sistema di riferimento orizzontale, scelto in modo tale che per x=0 il sistema si trovi in equilibrio, K_1 e K_2 sono le costanti delle due molle, d la constante dello smorzatore e f è una forza esterna agente sulla massa.

1) Determinare l'equazione differenziale che determina il moto della massa.
2) Determinare la funzione di trasferimento $P(s)$ tra la forza f e la posizione della massa x
3) Posto $m = 1\text{kg}$, $K_1 = K_2 = 5\text{N/m}$, $d = 2\text{Ns/m}$, tracciare i diagrammi di Bode (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi) della risposta armonica di $P(s)$ e calcolare la pulsazione di risonanza del sistema.

2.

1) L'equazione del sistema è

$$M\ddot{x} = -K_1 x - d\dot{x} - K_2 x + f$$

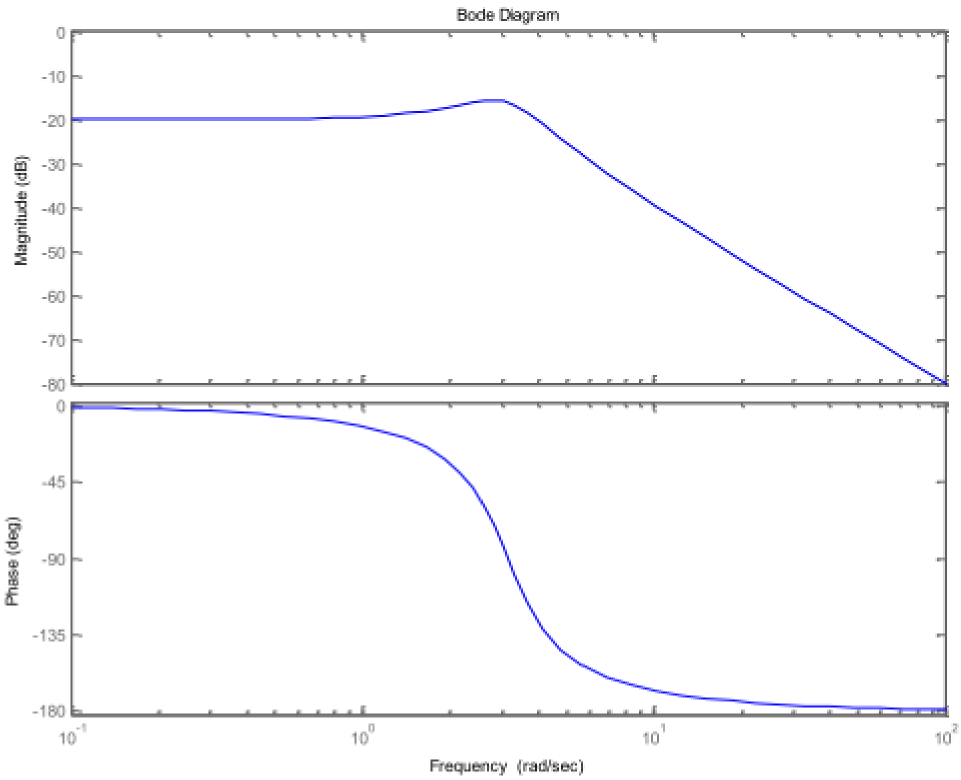
2)da cui la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + ds + K_1 + K_2}$$

3)sostituendo i valori indicati otteniamo

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

il diagramma di bode di questo sistema del secondo ordine è



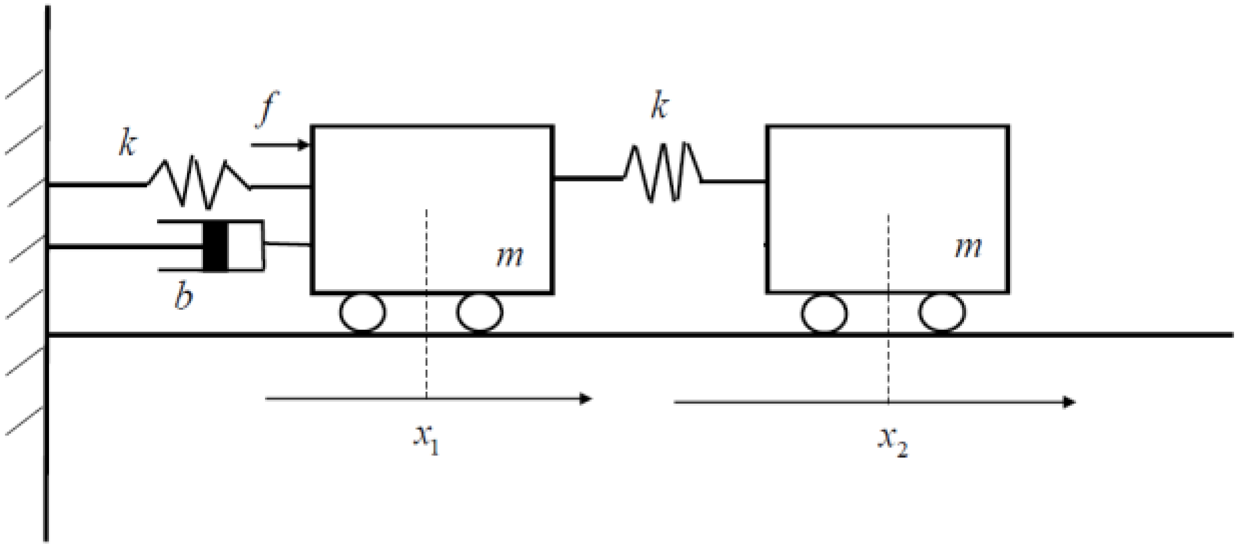
$P(s)$ si può scrivere nella forma

$$P(s) = \frac{1}{10(\frac{s^2}{{\omega_n}^2} + \delta \frac{2s}{\omega_n} + 1)}$$

con $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, la pulsazione di risonanza risulta

$$\omega_R = w_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{8}\text{rad/s} \cong 2{,}828 \text{ rad/s}$$

2. [punti 4] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Determinare il guadagno statico e gli zeri di Σ.

2

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - 2k x_1 - b D x_1 + k x_2 \\ m D^2 x_2 = -k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ m D^2 x_2 + k x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2 + bD + 2k)x_1 - (mD^2+k)f = k^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + m b D^3 + 2km D^2 + km D^2 + kbD + \cancel{2}k^2)x_1 \cancel{- k^2 x_1} = (mD^2+k)f$$

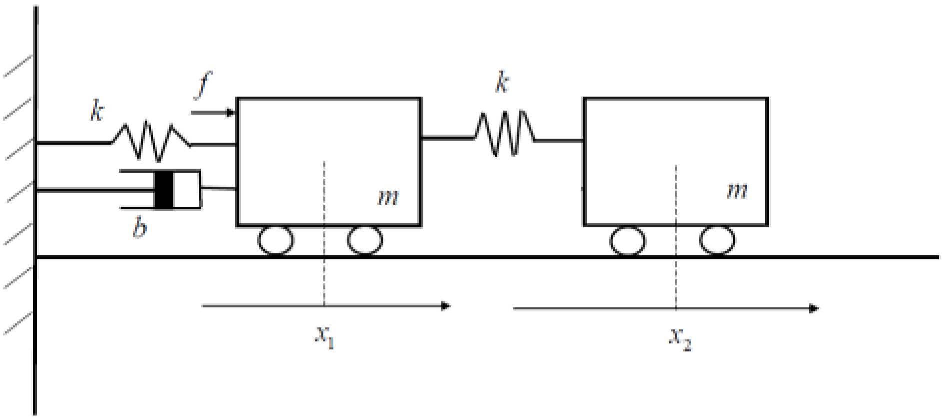
eq. diff. $m^2 D^4 x_1 + m b D^3 x_1 + 3km D^2 x_1 + k b D x_1 + k^2 x_1 = m D^2 f + k f$

f.d.t. $G(s) = \dfrac{m s^2 + k}{m^2 s^4 + m b s^3 + 3 k m s^2 + k b s + k^2}$

3. Il guadagno statico è G(0)=1/k.

Gli zeri sono $z_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$

2. [punti 5] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_2 (posizione del carrello di destra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

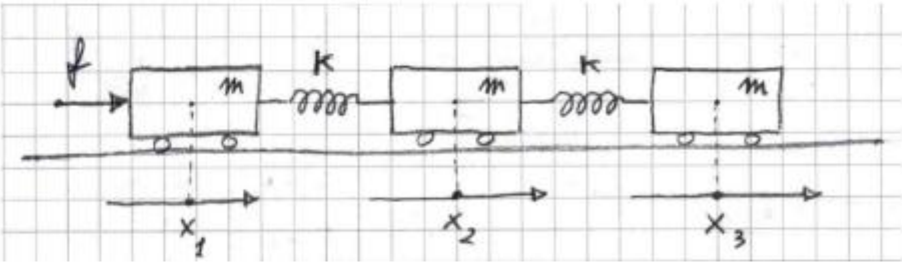
$$\begin{cases} (m D^2 + b D + 2k) x_1 = k x_2 + f \\ k x_1 = (m D^2 + k) x_2 \end{cases}$$

$$(m D^2 + b D + 2k)(m D^2 + k) x_2 = k^2 x_2 + k f$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_2 + b m D^3 x_2 + 3 k m D^2 x_2 + k b D x_2 + k^2 x_2 = k f}$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + b m s^3 + 3 k m s^2 + k b s + k^2}$$

2. [punti 6] Tre carrelli, ciascuno di massa m, e collegati fra di loro con molle di costante elastica pari a k come mostrato in figura costituiscano un sistema dinamico orientato da f ad x_1, rispettivamente forza applicata e posizione del carrello di sinistra. Nelle condizioni iniziali di quiete e con le molle a riposo si abbia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Trascurando gli attriti si determinino l'equazione differenziale e la funzione di trasferimento di tale sistema.



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad k x_2 = m D^2 x_1 + k x_1 - f \\ m D^2 x_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ m D^2 x_3 = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_3 = m D^2 x_2 + 2 k x_2 - k x_1 \\ m D^2 x_3 + k x_3 = k x_2 \end{cases} \qquad (m D^2 + k) x_3 = k x_2$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 x_2 + 2 k x_2 - k x_1) = k^2 x_2$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 + 2k) x_2 - k (m D^2 + k) x_1 = k^2 x_2$$

$$(m^2 D^4 + 2 k m D^2 + k m D^2 + 2 k^2 - k^2) x_2 = k (m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2) x_2 = k (m D^2 + k) x_1$$

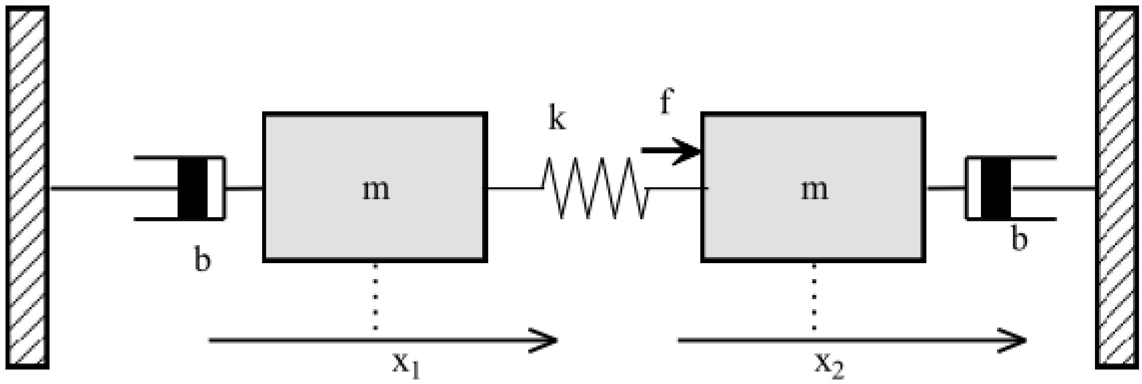
$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2)(m D^2 x_1 + k x_1 - f) = k^2 (m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2)(m D^2 + k) x_1 - k^2 (m D^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2) f$$

$$(m^2 D^4 + 3 k m D^2)(m D^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3 k m D^2 + k^2) f$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2}{(m^2 s^4 + 3 k m s^2)(m s^2 + k)} = \frac{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2}{m \cdot s^2 (m s^2 + 3k)(m s^2 + k)}$$

2. [punti 5] Due parti meccaniche di massa m siano collegate come in figura.



Si definisca un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata alla massa di destra) ad x_1 (posizione della massa di sinistra). Si trascurino gli attriti nel movimento delle parti meccaniche e nelle condizioni iniziali di quiete con la molla a riposo si abbia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

- **a.** Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
- **b.** Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
- **c.** Dimostrare che Σ è semplicemente stabile.

2.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

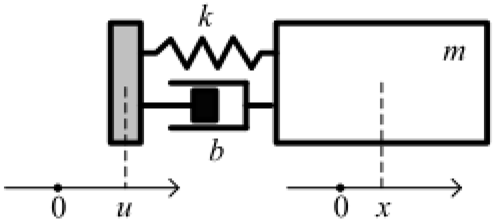
$$G(s) = \frac{K}{s\left[m^2 s^3 + 2mb\,s^2 + (b^2+2mK)s + 2bK\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & m^2 & b^2+2mK & 0 \\
2 & \cancel{2}m\cancel{b} & \cancel{2}bK & 0 \\
1 & \dfrac{\underbrace{b^2 m + 2m^2 K - K m^2}}{b^2 m + m^2 K} & 0 & 0 \\
0 & K & 0 &
\end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi
positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il
criterio di Routh il polinomio $m^2 s^3 + 2mb s^2 + (b^2+2mK)s + 2bK$
è hurwitziano. Quindi Σ ha un polo semplice nell'origine
ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il
teorema sulla stabilità delle perturbazioni Σ è SEMPLICEMENTE
STABILE.

2. [punti 5] Una parte meccanica di massa m che si muove su di una guida lineare orizzontale è attuata da un azionamento lineare programmabile che può imporre una posizione desiderata u (vedi figura sotto). Ipotizzando che il collegamento fra azionamento e massa sia descritto da una molla di costante elastica k e da un ammortizzatore di costante viscosa b **si determini l'equazione differenziale e la funzione di trasferimento** del sistema orientato da u (ingresso) ad x (uscita, posizione della massa m). Si ipotizza che in condizioni di quiete del dispositivo si abbia $u = 0$ e $x = 0$. **Si determini inoltre una condizione sui parametri** per la quale non si abbiano modi armonici del sistema.



2.

$$m D^2 x = -k(x-u) - b(Dx - Du)$$

$$m D^2 x = -kx + ku - bDx + bDu$$

$$\boxed{m D^2 x + b D x + k x = b D u + k u}$$

f.d.t. $$G(s) = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

$ms^2 + bs + k$ è il polinomio caratteristico del sistema.

$$\Delta = b^2 - 4mk$$

Non si hanno modi armonici quando $\Delta \geq 0$ ovvero quando

$$b \geq 2\sqrt{mk}$$