Tracce delle soluzioni

1.

$$D^{*}f(t) = Df(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta(t) + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta(t-3)$$

$$\begin{aligned} D^{2*}f(t) = {} & D^{2}f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta^{(1)}(t) \\ & + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta^{(1)}(t-3) + \\ & + \big(Df(0+) - Df(0-)\big)\,\delta(t) + \\ & + \big(Df(3+) - Df(3-)\big)\,\delta(t-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{3*}f(t) = {} & D^{3}f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta^{(2)}(t) + \\ & + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta^{(2)}(t-3) + \\ & + \big(Df(0+) - Df(0-)\big)\,\delta^{(1)}(t) + \\ & + \big(Df(3+) - Df(3-)\big)\,\delta^{(1)}(t-3) + \\ & + \big(D^{2}f(0+) - D^{2}f(0-)\big)\,\delta(t) + \\ & + \big(D^{2}f(3+) - D^{2}f(3-)\big)\,\delta(t-3) \end{aligned}$$

2.
Vedi dispense del corso.

3.
Vedi dispense del corso.

4.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - k X_1 - b s X_1 + k(X_2 - X_1) + b s (X_2 - X_1) \\ m s^2 X_2 = -k(X_2 - X_1) - b s (X_2 - X_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - k X_1 - b s X_1 + k X_2 - k X_1 + b s X_2 - b s X_1 \\ m s^2 X_2 = -k X_2 - b s X_2 + k X_1 + b s X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - 2k X_1 - 2 b s X_1 + k X_2 + b s X_2 \\ m s^2 X_2 = -k X_2 - b s X_2 + (k + b s) X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m s^2 + 2bs + 2k) X_1 = F + (k+bs) X_2 \\ (ms^2 + bs + k) X_2 = (k+bs) X_1 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{F + (k+bs) X_2}{m s^2 + 2bs + 2k}$$

$$(m s^2 + bs + k) X_2 = (k+bs) \frac{F + (k+bs) X_2}{m s^2 + 2bs + 2k}$$

$$(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) X_2 =$$
$$= (k+bs) F + (k+bs)^2 X_2$$

$$\left[(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) - (k+bs)^2 \right] X_2 =$$
$$= (k+bs) F$$

$$\frac{X_2}{F} = \frac{bs + k}{(ms^2 + bs + k)(ms^2 + 2bs + 2k) - (k+bs)^2}$$

$$m^2 s^4 + 2bms^3 + 2kms^2 + bms^3 + 2b^2s^2 + 2kbs +$$

$$+ kms^2 + \cancel{2bks} + 2k^2$$

$$- k^2 - b^2s^2 - \cancel{2bks} =$$

$$= m^2s^4 + 3bms^3 + (3km + b^2)s^2 + 2kbs + k^2$$

$$T_{fx_2} = \frac{bs+k}{m^2s^4 + 3bms^3 + (3km+b^2)s^2 + 2kbs + k^2}$$

Eq. differenziale $\quad y \equiv x_2 \quad u \equiv f$

$$\boxed{m^2 D^4 y + 3bm D^3 y + (3km + b^2) D^2 y + 2kb Dy + k^2 y = = bDu + ku}$$

4	m^2	$3km + b^2$	k^2	
3	$3bm$	$2kb$	0	
2	$\underbrace{-2kbm^2 + 9kbm^2 + 3b^3m}_{3b^3m + 7kbm^2}$	$3bk^2m$	0	
1	#	0	0	0
0	$3bk^2m$			

$$\# = 6b^4km + 14k^2b^2m^2 - 9b^2k^2m^2 =$$

$$= 5k^2b^2m^2 + 6b^4km$$

Tutti gli elementi della prima colonna sono monomi o polinomi evidentemente positivi $\forall\, m, k, b > 0$. Quindi per il Criterio di Routh Σ è asint. stabile $\forall\, m, k, b > 0$.

5.

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{s} - 2\, e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \cdot \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)} \right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\, Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$K_1 = \left. \frac{16}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left. \frac{16}{s(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)\,2} = -4$$

$$K_3 = \left. \frac{16}{s(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4\, e^{-2t} + 2\, e^{-4t} \right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$
$$- \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

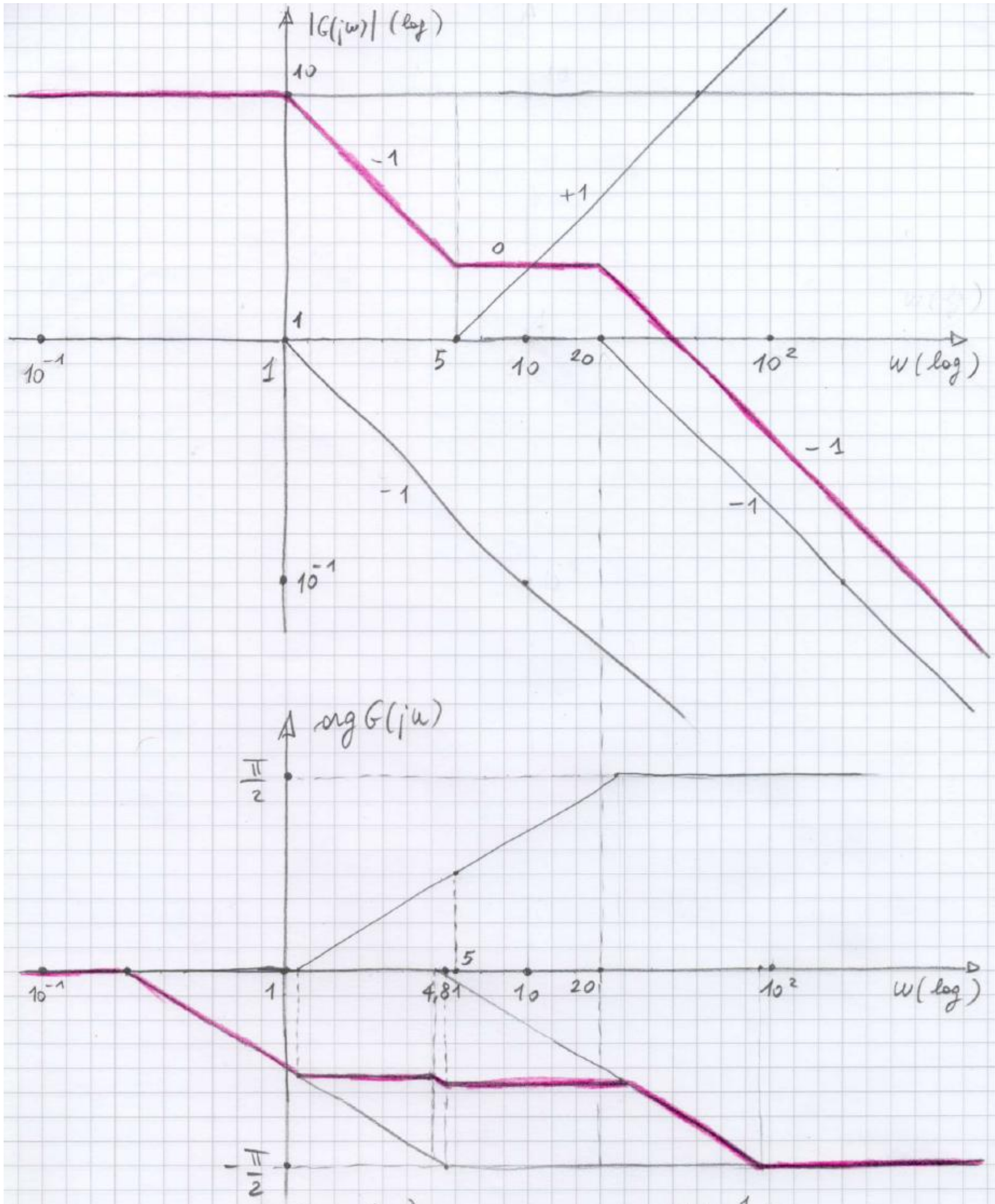
per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$
$$= \left(e^{4} - 1\right) 4e^{-2t} + \left(1 - e^{8}\right) 2e^{-4t}$$

6.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(jw) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}jw}{(1+jw)\left(1+\frac{1}{20}jw\right)}$$

7.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

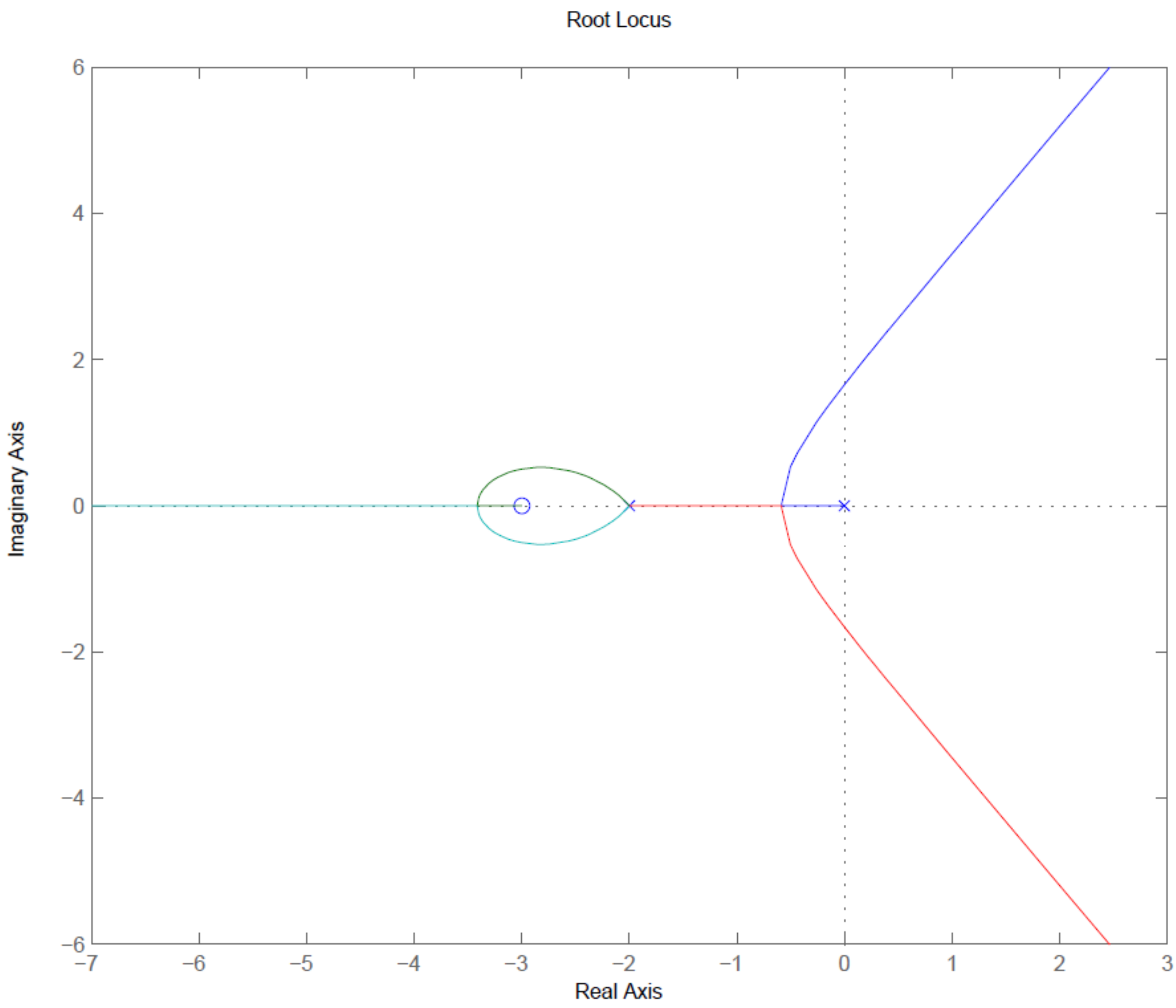
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
−2
−4
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

8.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\,s^4 + b_3\,s^3 + b_2\,s^2 + b_1\,s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\,s^4 + b_3\,s^3 + b_2\,s^2 + b_1\,s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\,s^4 + (5+b_3)\,s^3 + (20+b_2)\,s^2 + (4+b_1)\,s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\,s^4 + 107\,s^3 + 307\,s^2 + 396\,s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\,s^4 + 102\,s^3 + 287\,s^2 + 392\,s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$