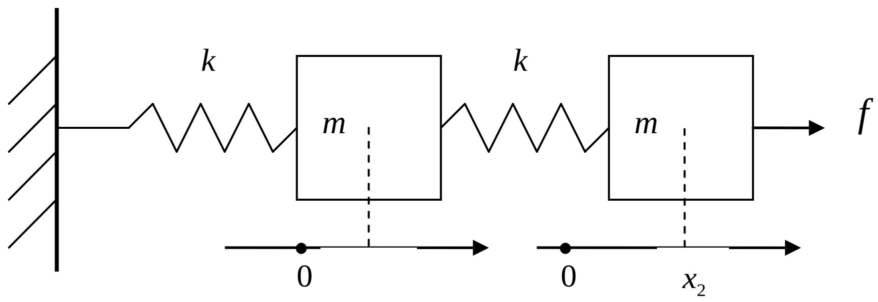
Parte A

1. [punti 4] Enunciare e dimostrare il teorema di analisi armonica per un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale.

2. [punti 5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m. Il corpo di destra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete con le molle a riposo $x_1 = x_2 = 0$). Si consideri il sistema dinamico Σ orientato da f ad x_1 (posizione del corpo di sinistra).

a) Determinare l'equazione differenziale che descrive il sistema Σ.
b) Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ di Σ.
c) Determinare i modi di Σ.

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4] Dimostrare la seguente relazione

$$\mathcal{Z}\left[H(s)P(s)\right] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

dove $H(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del filtro di Hold.

Parte B

5. [punti 5]

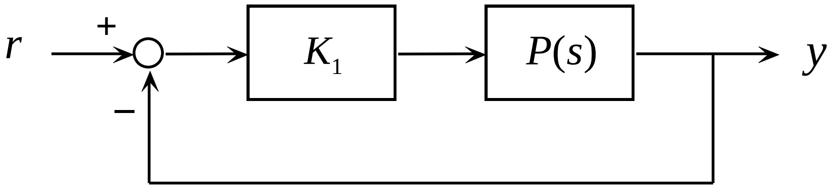
1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10(1-s)^2}{s(s+1)^3}$$

determinando in particolare asintoti e le intersezioni con l'asse reale negativo.

2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



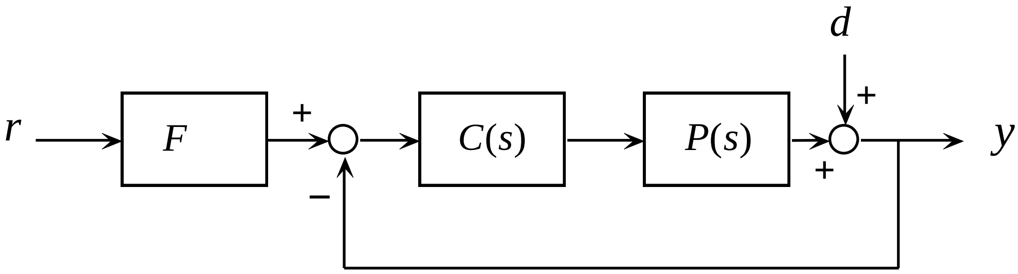
dove $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ determinando in particolare gli asintoti e le radici doppie.

b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 2\ \mathrm{s}^{-1}$.

c. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^* = \arg\max_{K_1 \in \mathbb{R}} G_s(K_1)$.

7. [punti 5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 3\sin(2t+4)$,
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,
3. costante di posizione $K_p = 4$,
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

8. [punti 4]

Determinare la soluzione x della seguente equazione alle differenze: $\begin{cases} x(k+2) = x(k) + 1 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 0 \end{cases}$