Tracce delle soluzioni

1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_i}, \quad Z_i = \frac{\frac{R_1}{s\,C_1}}{\frac{1}{s\,C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + R_1\,C_1\,s}, \quad Z_f = \frac{R_2}{1 + R_2\,C_2\,s}$$

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1 + R_1\,C_1\,s}{1 + R_2\,C_2\,s} = -\frac{R_1\,R_2\,C_1\,s + R_2}{R_1\,R_2\,C_2\,s + R_1}$$

Guadagno statico: $G(0) = -\frac{R_2}{R_1}$
Eq. Differenziale:

$$R_1\,R_2\,C_2\,Dy(t) + R_1 y(t) = -R_1\,R_2\,C_1\,Du(t) - R_2 u(t)$$

zeri: $-\frac{1}{R_1\,C_1}$, poli: $-\frac{1}{R_2\,C_2}$, modi: $\{e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\}$

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m D^2 + b D + 2k) x_1 = k x_2 + f \\ k x_1 = (m D^2 + k) x_2 \end{cases}$$

$$(m D^2 + b D + 2k)(m D^2 + k) x_2 = k^2 x_2 + k f$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_2 + b m D^3 x_2 + 3 k m D^2 x_2 + k b D x_2 + k^2 x_2 = k f}$$

$$\text{f.d.t.} \quad G(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + b m s^3 + 3 k m s^2 + k b s + k^2}$$

4	m^2		$3km$	k^2
		P		
3	bm		kb	0
		P		
2	$\underbrace{2\cancel{k}\cancel{b}m^{\cancel{2}}}_{2m}$		$\underbrace{k^{\cancel{2}}\cancel{b}\cancel{m}}_{k}$	0
		P		
1	mkb		0	
		P		
0	k			

La tabella di Routh manifesta solo permanenze di segno, quindi Σ è asintoticamente stabile.

3.

Vedi le dispense del corso.

4.

(4)

$$a(s) = s^7 + s^6 + s^5 + s^4 - s^3 - s^2 - s - 1$$

7	1	1	-1	-1	
6	1	1	-1	-1	P
5	$\cancel{6}$ 3	$\cancel{4}$ 2	$\cancel{-2}$ -1	0	P
4	1	-2	-3	0	P
3	$\cancel{8}$ 1	$\cancel{8}$ 1	0	0	P
2	$\cancel{-3}$ -1	$\cancel{-3}$ -1	0	0	V
1	-2	0			P
0	-1				P

eq. ausiliaria $s^6 + s^4 - s^2 - 1 = 0$

derivata: $6s^5 + 4s^3 - 2s$

eq. ausiliaria $-s^2 - 1 = 0$

derivata $-2s$

La prima parte della tabella manifesta una permanenza di segno (una radice a parte reale negativa). La seconda parte della tabella evidenzia 5 permanenze ed 1 variazione: c'è la presenza di una radice a parte reale positiva, una radice a parte reale negativa (per la proprietà di simmetria) e di 4 radici puramente immaginarie.

Complessivamente:

$$n_- = 1 + 1 = 2$$
$$n_0 = 4$$
$$n_+ = 1$$

Il sistema è instabile.

5.

$$\text{modi} = \{ e^{-7t},\ te^{-7t},\ t^2e^{-7t},\ e^{-6t},\ te^{-6t},\ e^{-4t}\cdot \text{sen}(3t+\varphi_1),\ e^{-2t}\cdot \text{sen}(2t+\varphi_2) \}$$

$$\begin{aligned} y_{lib.}(t) = {} & c_1 e^{-7t} + c_2 te^{-7t} + c_3 t^2e^{-7t} \\ & + c_4 e^{-6t} + c_5 te^{-6t} \\ & + c_6 e^{-4t}\cdot \text{sen}(3t+\varphi_1) \\ & + c_7 e^{-2t}\cdot \text{sen}(2t+\varphi_2) \end{aligned}$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$$

A causa di una quasi-cancellazione polo-zero i poli dominanti sono $-4 \pm j3$;

$$\delta\omega_n = 4 \quad , \quad \omega_n = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \quad , \quad \delta = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$T_a \cong \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ sec}$$

$$T_s \simeq \frac{1{,}8}{\omega_n} = \frac{1{,}8}{5} = 0{,}36 \text{ sec}$$

$$S = 100 \exp\left\{ -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \right\} = 1{,}5\ \%$$

6.

Fra i vari possibili metodi risolutivi si sceglie il seguente:

$$\left(1(t), g_s(t)\right) \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \left(\int_0^t 1(\tau)d\tau, \int_0^t g_s(\tau)d\tau\right) \in \mathcal{B}$$

$$\left(t \cdot 1(t), \int_0^t g_s(\tau)d\tau\right) \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^t \tau \cdot 1(\tau)d\tau, \int_0^t \int_0^\xi g_s(\tau)d\tau\, d\xi\right) \in \mathcal{B}$$

$$\left(\frac{t^2}{2} \cdot 1(t), \int_0^t \int_0^\xi g_s(\tau)d\tau\, d\xi\right) \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow \left(t^2 \cdot 1(t), 2\int_0^t \int_0^\xi g_s(\tau)d\tau\, d\xi\right) \in \mathcal{B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= 2\int_0^t \int_0^\xi g_s(\tau)d\tau\, d\xi = \\ &= \frac{7}{2} - 3t + t^2 - 4e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}}$$

7.

1

L'eq. caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K \frac{1}{s(s+1)^4} = 0$$

triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \quad (s+1)^4$$

$$s(s+1)^4 + K = 0$$

$$s(s^4+4s^3+6s^2+4s+1)+K=0$$

$$s^5+4s^4+6s^3+4s^2+s+K=0$$

5	1	6	1	0
4	4	4	K	0
3	20	$4-K$	0	0
2	$\cancel{64+4K}$ $16+K$	$\cancel{20K}$ $5K$	0	
1	$(16+K)(4-K) - 100K$	0	0	
0	$5K$			

$$\begin{cases} 16+K>0 \\ -K^2-112K+64>0 \\ 5K>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K>0 \\ -K^2-112K+64>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K>0 \\ -56-40\sqrt{2} < K < -56+40\sqrt{2} \end{cases}$$

$$K \in (0, \underbrace{-56+40\sqrt{2}}_{0,5685})$$