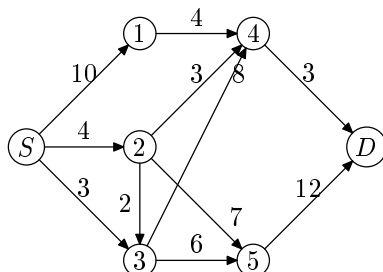


COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

Esercizio 1 (6 punti). Sia dato il problema di flusso massimo sulla rete in figura (le capacità degli archi sono riportate sopra di essi).



Si consideri il seguente flusso ammissibile per tale rete:

$$x_{S1} = x_{14} = x_{23} = x_{25} = 2 \quad x_{24} = 0 \quad x_{34} = 1 \quad x_{S3} = x_{4D} = 3 \quad x_{S2} = x_{35} = 4 \quad x_{5D} = 6.$$

Stabilire se tale flusso è ottimo oppure no. Nel primo caso individuare un taglio a costo minimo, nel secondo nel secondo caso determinare un flusso migliore rispetto a quello dato.

Esercizio 2 (6 punti). Sia dato il problema dello zaino con uno zaino di capacità pari a 36 e con 8 oggetti con i seguenti valori e pesi:

	1	2	3	4	5	6	7	8
v_i	29	11	19	3	9	11	3	5
p_i	20	16	25	4	18	22	2	4

Si calcoli un upper bound per il sottinsieme delle soluzioni ammissibili del problema dello zaino che sicuramente non contengono gli oggetti 2 e 5 e che sicuramente contengono gli oggetti 7 e 8. Si ricavi da tale calcolo anche una soluzione ammissibile del problema dello zaino e, se necessario, si effettui anche il branching del sottinsieme della regione ammissibile considerato.

Esercizio 3 (5 punti). Sia dato il problema di trasporto con i costi unitari di trasporto, le disponibilità (colonna a) dei singoli depositi e le richieste (riga b) dei singoli negozi riportati nella seguente tabella:

	N1	N2	N3	N4	a
D1	1	11	9	7	25
D2	3	2	3	8	50
D3	14	12	4	5	75
b	30	30	60	30	

Si individui una base ammissibile iniziale con la regola dell'angolo nord-ovest e si verifichi se è soddisfatta la condizione di ottimalità per la base trovata. Nel caso la condizione non sia soddisfatta si individui una nuova base non peggiore della precedente tramite le regole viste, altrimenti si discuta se la soluzione ottima trovata è unica oppure no.

Esercizio 4 (5 punti). Sia dato il problema della zaino con capacità dello zaino pari a 8 e con pesi e valori dei 4 oggetti riportati di seguito:

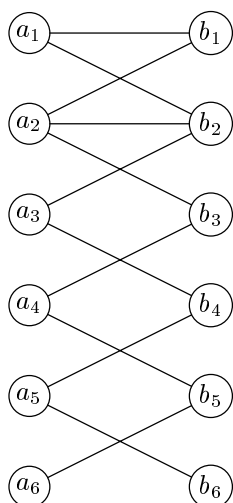
	1	2	3	4
v_i	1	4	7	2
p_i	2	3	5	1

Si completi l'esecuzione dell'algoritmo di programmazione dinamica per questo problema restituendo il valore ottimo e una soluzione ottima del problema, tenuto conto che per gli oggetti 3 e 4 si hanno le seguenti tabelle:

s_3	f_3^*	d_3^*	s_4	f_4^*	d_4^*
0	0	N	0	0	N
1	2	N	1	2	S
2	2	N	2	2	S
3	2	N	3	2	S
4	2	N	4	2	S
5	7	S	5	2	S
6	9	S	6	2	S
7	9	S	7	2	S
8	9	S	8	2	S

Esercizio 5 (5 punti). Sia dato il grafo bipartito in figura. Si determini un matching di cardinalità massima su tale grafo utilizzando come matching iniziale:

(a_1, b_1) (a_2, b_3) (a_3, b_4) (a_4, b_5) (a_5, b_6)



Esercizio 6 (4 punti). Sia dato un problema di ottimizzazione il cui modello matematico è il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dato un vettore $\lambda \geq 0$ con tante componenti quanti sono i vincoli $Ax \leq b$ (e quindi, equivalentemente, le componenti del vettore b), utilizzando la definizione di rilassamento si dimostri che il seguente problema (con un solo vincolo) è un rilassamento di quello dato:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & (\lambda A)x \leq \lambda b \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Si generi il rilassamento visto sopra per il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

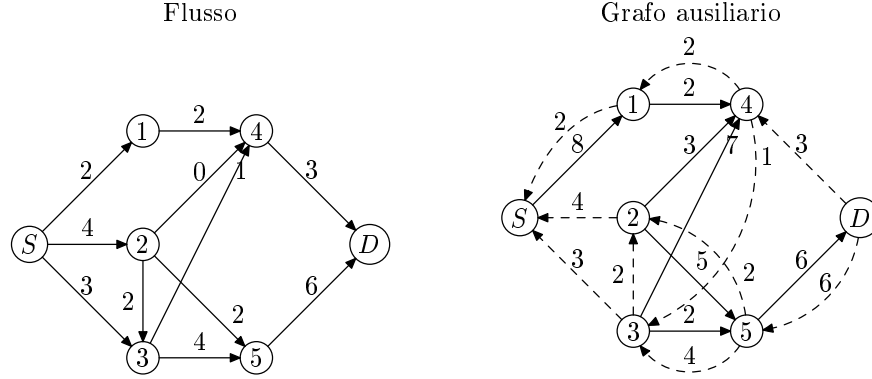
A quale dei problemi visti a lezione corrisponde il rilassamento?

Esercizio 7 (3 punti). Sia dato un problema di flusso massimo e il problema di taglio minimo associato. Sia $U^* \subset V$ un sottinsieme di nodi che definisce un taglio minimo della rete e sia $(i, j) \in A$ un arco della rete facente parte del taglio (cioè $i \in U^*$ e $j \notin U^*$) con capacità $c_{ij} > 0$. Si dica (MOTIVANDO LE RISPOSTE) se è vero che per ogni Δ ($0 \leq \Delta \leq c_{ij}$):

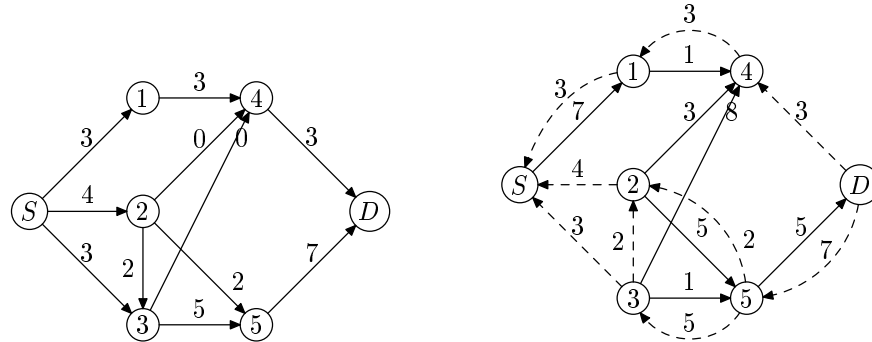
- a):** L'incremento di Δ della capacità dell'arco (i, j) implica un incremento di Δ del valore ottimo del problema di flusso massimo;
- b):** il decremento di Δ della capacità dell'arco (i, j) implica un decremento di Δ del valore ottimo del problema di flusso massimo.

SOLUZIONI

1. Applicando l'algoritmo visto a lezione, si ottiene



dove $(S, 1, 4, 3, 5, D)$ è un cammino aumentante, $\varepsilon = 1$, e quindi



dove non si trova più alcun cammino aumentante, e si può identificare il taglio $U = \{S, 1, 4\}$ di capacità $c(U) = c_{S2} + c_{S3} + c_{4D} = 10$ (pari al flusso massimo ottenuto).

2. Riordinando gli oggetti secondo rapporti v_i/p_i non crescenti si ottiene la lista

i	1	3	4	6
v_i	29	19	3	11
p_i	20	25	4	22

dalla quale sono già stati esclusi gli oggetti 2, 5, 7, 8. Un upper bound è dato da

$$UB = 8 + 29 + \left\lfloor \frac{10}{25} 19 \right\rfloor = 44,$$

da cui si ottiene anche un lower bound $LB = 37$ dato dalla soluzione ammissibile $\{7, 8, 1\}$. Il sottoinsieme considerato dà origine per branch ai due sottoinsiemi

$$S_1(I_0 = \{2, 5, 3\}, I_1 = \{7, 8\}), \quad S_2(I_0 = \{2, 5\}, I_1 = \{3, 7, 8\}).$$

3. Il problema è bilanciato; applicando il metodo dell'angolo nord-ovest si ottiene

	1	2	3	4	a_i
1	25				25
2	5	30	15		50
3			45	30	75
b_j	30	30	60	30	
x_{ij}					

	1	2	3	4	
1	0	11	8	5	
2	0	0	0	4	
3	10	10	0	0	
b_j					
\bar{c}_{ij}					

e la positività di tutti i costi ridotti indica che questa soluzione è ottima ed unica.

4. Impostando le equazioni di stato, per risolvere il problema dato occorre ancora conoscere

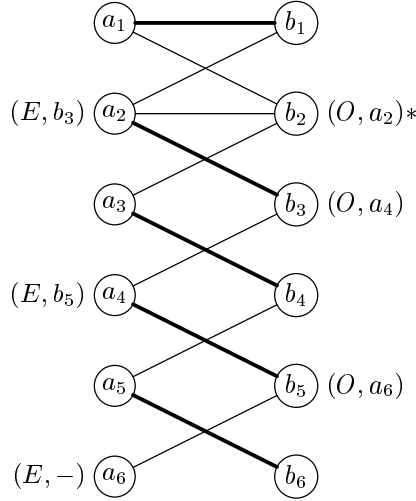
$$f_1^*(8) = \max \begin{cases} 1 + f_2^*(6), \\ f_2^*(8), \end{cases} \quad f_2^*(6) = \max \begin{cases} 4 + f_3^*(3), \\ f_3^*(6), \end{cases} \quad f_2^*(8) = \max \begin{cases} 4 + f_3^*(5), \\ f_3^*(8), \end{cases}$$

Risolvendo prima per gli f_2^* e poi per f_1^* si ottiene

$$\begin{aligned} f_2^*(8) &= \max \{11, 9\} = 11 & d_2^*(8) &= S, \\ f_2^*(6) &= \max \{6, 9\} = 9 & d_2^*(6) &= N, \\ f_1^*(8) &= \max \{10, 11\} & d_1^*(8) &= N. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione ottima è $\{2, 4\}$.

5. Dopo un ciclo di etichettatura si ottiene la situazione seguente.



Esiste un cammino alternante $(a_6, b_5, a_4, b_3, a_2)$ che permette di aumentare l'accoppiamento a

$$\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_4, b_3), (a_6, b_5), (a_5, b_6), (a_6, b_5)\},$$

che in un grafo bipartito da $6 + 6$ nodi è sicuramente massimo.

6. Siano $S_a = \{x: Ax \leq b, x_i \in \{0, 1\}\}$ ed $S'_a = \{x: (\lambda A)x \leq b, x_i \in \{0, 1\}\}$ le regioni di ammissibilità dei due problemi; $x \in S_a$ implica $Ax \leq b$, e quindi per $\lambda \geq 0$ $(\lambda A)x \leq b$ (stiamo sommando le disuguaglianze dopo averle moltiplicate per coefficienti non negativi). Quindi $S_a \subseteq S'_a$, e $\max \{cx: x \in S'_a\} \geq \max \{cx: x \in S_a\}$. In particolare, per il problema dato il rilassamento è

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 \leq B \\ & x_1, \dots, x_4 \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} p_1 &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3), & p_2 &= (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3), \\ p_3 &= (3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3), & p_4 &= (4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3), \\ B &= (8\lambda_1 + 6\lambda_2 + 5\lambda_3), \end{aligned}$$

che corrisponde ad un problema dello zaino.

7. La *seconda* affermazione è vera: detto $c'_{ij} = c_{ij} + \Delta$, la capacità del taglio minimo risulta

$$C'(\mathcal{S}_{U^*}) = \sum_{i \in U^*, j \notin U^*} c_{ij} = C(\mathcal{S}_{U^*}) - \Delta.$$

La prima affermazione è in generale falsa, in quanto il grafo potrebbe contenere altri tagli di capacità minima diversi da quello considerato e non contenenti l'arco (i, j) in esame.