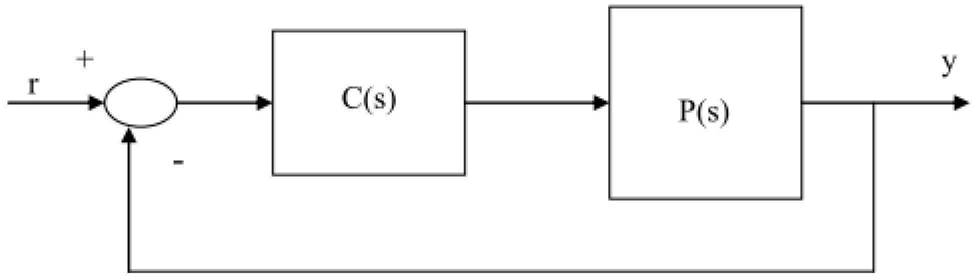
7. [punti 5] Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Si progetti un controllore $C(s)$ proprio di ordine 2 affinché:

a) l'errore a regime in risposta ad un gradino di comando del set-point sia nullo.
b) La costante di velocità del sistema retroazionato K_v sia pari a 10 : $K_v = 10$.
c) I poli dominanti del sistema retroazionato siano -1 e -2 .

7.
Scelta una funzione propria del secondo ordine per il controllore *C(s)* del tipo

$$C(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)}$$

in modo che sia rispettata la specifica sull'errore a regime in risposta al gradino, il guadagno di anello risulta:

$$F(s) := \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} .$$

Dalla specifica su K_v si ricava

$$K_v = \lim_{s \to 0} sF(s) = \frac{d}{a} = 10 .$$

Considerando l'equazione caratteristica:

$$1 + \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = 0$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$s^4 + (a-2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d .$$

Il polinomio caratteristico desiderato può essere scelto come

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e)=$$
$$s^4+(s+e)s^3+(9e+20)s^2+(20e+12)s+12e$$

Dal principio di identità dei polinomi e dalla specifica su K_v si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a-2=9+e \\ 1-2a+b=9e+20 \\ a+c=20e+12 \\ d=12e \\ \dfrac{d}{a}=10 \end{cases}$$

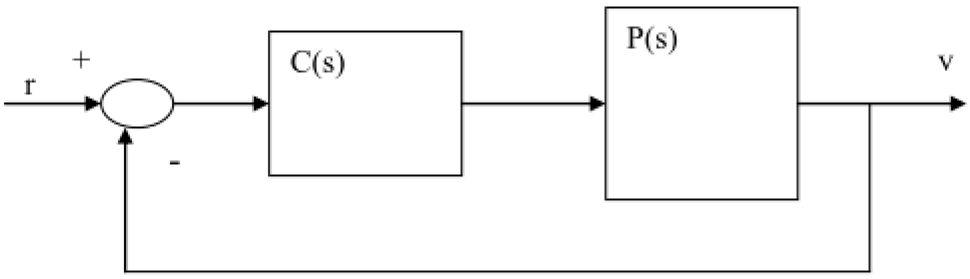
le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a=66 \\ b=646 \\ c=1046 \\ d=660 \\ e=55 \end{cases}$$

Si noti che il valore trovato per e fissa un ulteriore polo del sistema retroazionato in –55 e questo garantisce il rispetto della specifica sui poli dominanti.
Il controllore trovato è quindi:

$$C(s)=\frac{646s^2+1046s+660}{s(s+66)}$$

7. **[punti 5]** Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s)=\dfrac{100(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$. Si chiede di progettare un controllore di struttura (rete ritardatrice) $C(s)=K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$, $K\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1)$, $\tau\in\mathbb{R}^+$ affinché:

a) l'errore a regime e_R in risposta ad un gradino unitario del set-point abbia valore assoluto pari a 0,02: $|e_R|=0,02$.

b) Il margine di fase M_F sia pari a 50°: $M_F=50^\circ$.

b) Il margine di fase sia $M_F=45^\circ$.

7.

La specifica a) equivale a $\left|\frac{1}{1+K_p}\right| = \frac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p = 49$ oppure $K_p = -51$. Dato che $K_p = K\frac{5}{2}$ ed è opportuno scegliere $K > 0$ (al fine dell'ottenimento di una facile stabilizzabilità) si impone

$$K_p = 49 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{98}{5}$$

Definiamo

$$L(s) := KP(s) = 1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s) := C(s)P(s) = 1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega) = 1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$

$$\arg L(j\omega) = \text{arctg } \omega - 2 \text{ arctg } \frac{\omega}{2} - \text{ arctg } \frac{\omega}{10}$$

$$|L(j\omega)| = 1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$\omega_0 = 10$ rad/s

$\arg L(j\omega_0) = -2{,}0611$ rad $\quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0{,}2079$ rad

$|L(j\omega_0)| = 13{,}393$

verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|, \varphi_0\right) \in C$?

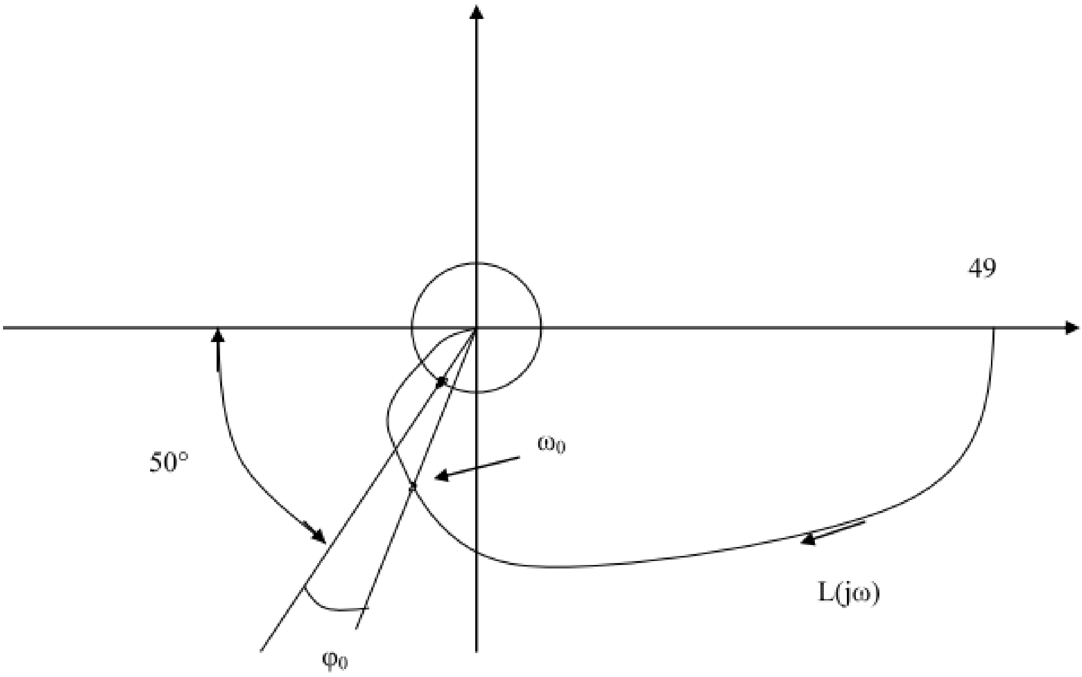
sì, perchè $\cos\varphi_0 > 1/|L(j\omega_0)|$: $0{,}9785 > 0{,}0747$.

Si definisce $M := |L(j\omega)|$ e $\varphi := \varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi} = \frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)} = 0{,}07280 \\ \tau = \dfrac{M-\cos\varphi}{\omega_0 \text{ sen } \varphi} = 6{,}016 \text{ s} \end{cases}$$


50°
ω0
L(jω)
φ0

Parte b con Mf 45

La specifica a) equivale a $\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p=49$. Dato che $K_p=K\frac{5}{2}$ si ottiene $K=\frac{98}{5}$

Definiamo

$$L(s):=KP(s)=1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s):=C(s)P(s)=1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega)=1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$

$$\arg L(j\omega)=\text{arctg }\omega-2\text{ arctg }\frac{\omega}{2}-\text{ arctg }\frac{\omega}{10}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$$\omega_0=10 \text{ rad/s}$$

$$\arg L(j\omega_0)=-2{,}0611 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0=0{,}2951 \text{ rad}$$

$$\left|L(j\omega_0)\right|=13{,}393$$

verifica validità di ω_0 : $\left(\left|L(j\omega_0)\right|,\varphi_0\right)\in C$?

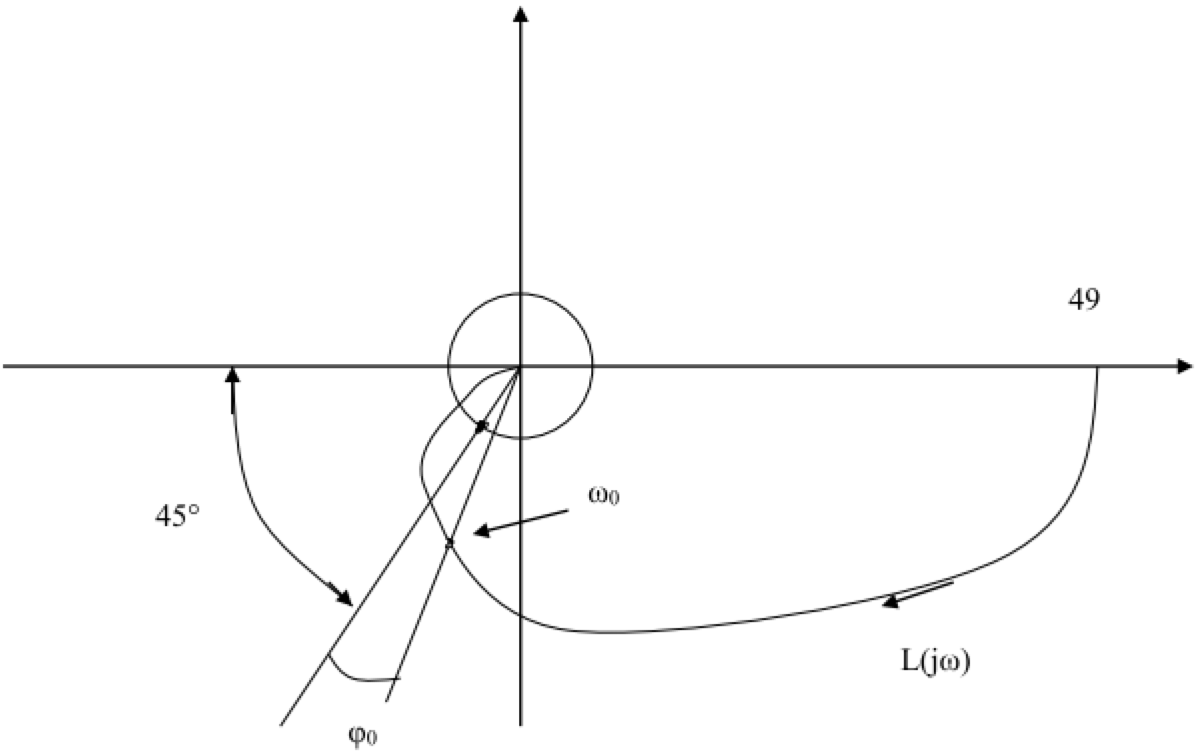
sì, perchè $\cos\varphi_0>1/\left|L(j\omega_0)\right|$: $0{,}9568>0{,}0747$.

Si definisce $M:=\left|L(j\omega)\right|$ e $\varphi:=\varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

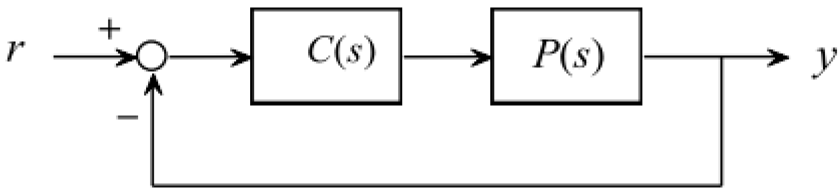
$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi}=\frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{M\cos\varphi-1}{M(M-\cos\varphi)}=0.0709\\[2ex] \tau=\dfrac{M-\cos\varphi}{\omega_0\text{ sen }\varphi}=4.276\text{ s}\end{cases}$$



7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(1+s)(1+0,4s)^2}$. Progettare un controllore con struttura di rete a ritardo e anticipo $C(s)=\dfrac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12} s}$ affinché il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente con margine di fase $M_F=45^\circ$ (si assuma $\dfrac{\tau_1}{\tau_2}=10$).

$$P(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+0{,}4j\omega)^2}$$

$$\omega_0 ? \Rightarrow \arg P(j\omega_0) = -\pi + \frac{45}{180}\cdot\pi = -2{,}3562$$

$$\arg P(j\omega_0) = -\operatorname{arctg}\omega_0 - 2\operatorname{arctg} 0{,}4\cdot\omega_0$$

$$\arg P(j\omega_0) = -\operatorname{arctg}\omega_0 - 2\operatorname{arctg} 0{,}4\cdot\omega_0$$

ω_0	$\arg P(j\omega_0)$
1	−1,5464
2	−2.4566
1.8	−2.3117
1.86	−2.3568

Imponiamo

$$\omega_n = \omega_0 = 1,86 \ \mathrm{rad/sec}$$

$$\begin{cases} \text{attenuazione in centro banda} = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \dfrac{1}{|P(j\omega_0)|} = \\ \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \omega_n \qquad \dfrac{1}{\tau_1 \tau_2} = \omega_n^2 \qquad \dfrac{1}{10 \tau_2^2} = \omega_n^2 \\ \dfrac{\tau_1}{\tau_2} = 10 \qquad \tau_1 = 10 \tau_2 \end{cases}$$

$$\tau_2^2 = \frac{1}{10 \cdot \omega_n^2} \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \omega_n} = 0,170 \ \mathrm{sec}$$

$$\tau_1 = 10 \tau_2 = 1,70 \ \mathrm{sec}$$

$$|P(j\omega_0)| = \frac{10}{\sqrt{1 + \omega_0^2} \cdot \left(1 + (0,4 \cdot \omega_0)^2\right)} =$$

$$= \frac{10}{\#} = 3,0481$$

$$\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}} = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

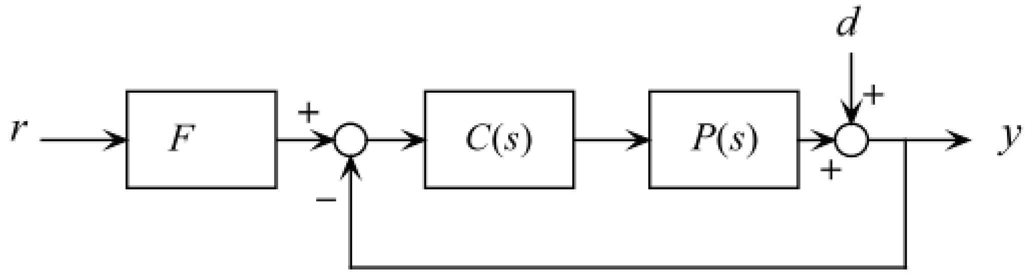
$$(\tau_1+\tau_2)\cdot|P(j\omega_0)| = (\tau_1+\tau_2)+\tau_{12}$$

$$\tau_{12} = (\tau_1+\tau_2)\left[\,|P(j\omega_0)|-1\,\right]$$

$$= (1{,}70+0{,}170)\left[2{,}0481\right]$$

$$= 1{,}87\cdot 2{,}0481 \cong 3{,}83 \text{ sec}$$

5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s)=\dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F\in\mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t)=3\sin(2t+4)$;
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2,\ -3$;
3. costante di posizione $K_p=4$;
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4}$$

$$L(s) \triangleq C(s)\,P(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4} \cdot \frac{4}{s+2} \quad ; \quad L(0) = \frac{b_0}{2}$$

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \; . \quad \text{Da } K_p = 4 \Rightarrow b_0 = 8$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 8)}{(s^2+4)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+4)(s+2) + 4(b_2 s^2 + b_1 s + 8) = 0$$

polinomio caratteristico associato al controllore:

$$P_c(s) \triangleq s^3 + (4b_2+2)s^2 + (4b_1+4)s + 40$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) \triangleq (s+2)(s+3)(s+c) = s^3 + (c+5)s^2 + (5c+6)s + 6c$$

con $c \gg 3$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4b_2 + 2 = c+5 & \Rightarrow b_2 = \dfrac{29}{12} \\ 4b_1 + 4 = 5c+6 & \Rightarrow b_1 = \dfrac{53}{6} \\ 40 = 6c & \Rightarrow c = \dfrac{20}{3} \gg 3 \quad \text{ok!} \end{cases}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \qquad F \cdot \frac{4}{1+4} = 1 \qquad F = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,

2. Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$.
Polinomio caratteristico:

$$p_c(s) = (s^2+4)(s+2)+4\,b_2\,s^2+4\,b_1\,s+32 = 0 \;\Rightarrow\; p_c(s) = s^3+(4\,b_2+2)s^2+(4\,b_1+4)s+40 = 0$$

Polinomio desiderato:

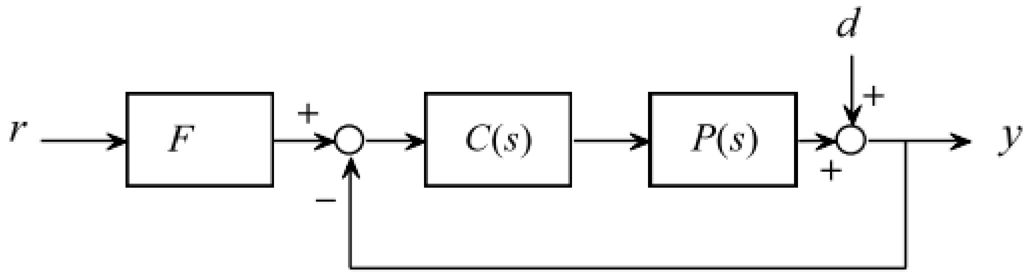
$$p_d(s) = [(s+2)^2+1]\,(s+\alpha) = s^3+(\alpha+4)\,s^2+(4\,\alpha+5)\,s+5\,\alpha$$

Si impone $p_c(s) = p_d(s)$ e si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha+4 = 4\,b_2+2 \\ 4\,\alpha+5 = 4\,b_1+4 \\ 5\,\alpha = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8.25 \\ b_2 = 2.5 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Verifico: $-\alpha = -8 << -2 \Rightarrow$ i poli $-2 \pm j$ sono dominanti

5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 4\sin(3t)$,
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,
3. costante di posizione $K_p = 4$,
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

(3) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s)P(s) = \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4 b_0}{9 \cdot 2} = 4 \Rightarrow \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4 b_2 s^2 + 4 b_1 s + 72 = 0$$

$$= s^3 + (2 + 4 b_2) s^2 + (9 + 4 b_1) s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4b_2)s^2 + (9 + 4b_1)s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s+2-j)(s+2+j)(s+c)$$

dove $c >> 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+c) =$$

$$= (s^2+4s+5)(s+c) =$$

$$= s^3+4s^2+5s +$$

$$+cs^2+4cs+5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3+(4+c)s^2+(5+4c)s+5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_G(s)$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 9+4b_1 = 5+4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4+72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2+17s+18}{s^2+9}}$$

$$C(s) = 5\,\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F :

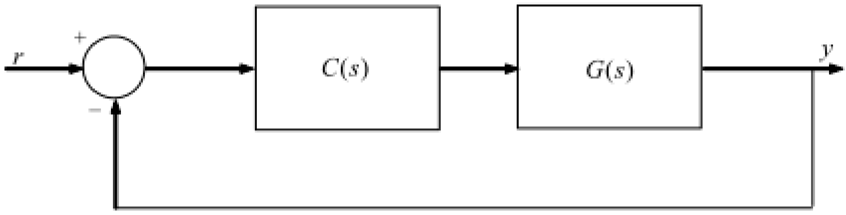
$$T_{zy}(s) = F\cdot\frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Imponiamo $T_{zy}(0) = 1$

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad K_p = L(0) = 4$$

$$F\,\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione unitaria



dove $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)^2}$.

1) Posto $C(s)=1$ verificare la stabilità asintotica del sistema retroazionato con il criterio di Nyquist determinando il corrispondente margine di ampiezza M_A;
2) Progettare un controllore di struttura

$$C(s)=K_c\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\ ,\ K_c>0,\quad \tau>0,\quad \alpha\in(0,1)$$

affinché il sistema retroazionato sia stabile con margine di ampiezza $M_A=5$ ed abbia la costante di velocità $K_v=10$.

1) Sia $F(s) := C(s)G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)^2}$

$$F(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{10}{\omega(\omega^2+4)}$$

$$\arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\frac{\omega}{2}$$

Studio del diagramma polare di $F(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma) = -2.5$

$$\lim_{\omega \to 0^+} \arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega \to \infty} |F(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \arg F(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

L'intersezione con l'asse reale negativo si può calcolare con il metodo della tabella di Routh, imponendo che l'equazione $F(s)+\eta$ abbia radici puramente immaginarie, con $\eta \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{10}{s(s+2)^2} + \eta = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + 4s + \frac{10}{\eta} = 0$$

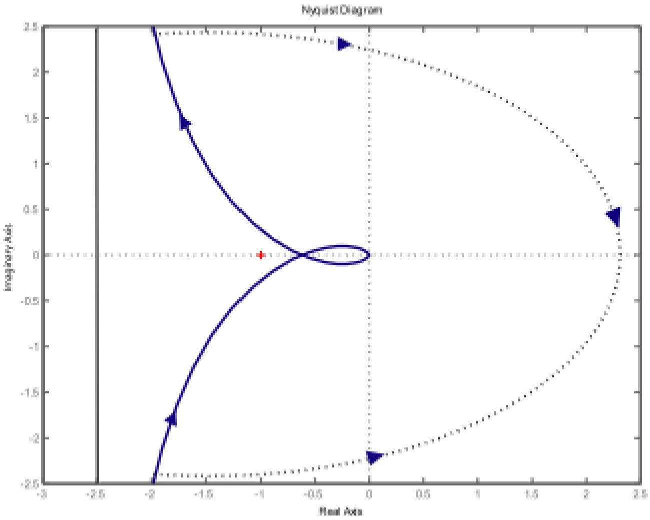
3	1	4
2	2	$\frac{5}{\eta}$
1	$8 - \frac{5}{\eta}$	0

$0 \mid$

Si deve cercare la soluzione (con $\eta > 0$) tale che sia nulla la riga 1:

$$8 - \frac{5}{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \frac{5}{8}$$

L'attraversamento dell'asse reale avverrà nel punto $-5/8$.



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è stabile con margine di ampiezza $M_A = \frac{8}{5} = 1.6$, infatti il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1.

2) Si può progettare la rete anticipatrice per cancellazione polo-zero fissando $\tau = 0.5\sec$.

$$C(s) = K_c \frac{1+0.5s}{1+\alpha 0.5s} = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s}$$

Posto

$$L(s) = C(s)F(s) = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s} \cdot \frac{10}{s(s+2)^2} = K_c \frac{10}{s(2+\alpha s)(s+2)}$$

Dalla specifica sulla costante di velocità si ricava:

$$k_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \frac{10k_c}{4}$$

$$k_v = 10 \quad \Rightarrow \quad k_c = 4$$

e quindi

$$L(s) = \frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)}$$

Qualitativamente il diagramma polare di $L(j\omega)$ è dello stesso tipo di quello tracciato per $F(j\omega)$. La stabilità è assicurata con $M_A = 5$ se l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo avviene in $-1/5$.

Per fare in modo che ciò avvenga bisogna imporre che l'equazione $L(s) + \frac{1}{5} = 0$ abbia radici puramente immaginarie.

$$\frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)} + \frac{1}{5} = 0$$

$$\alpha s^2 + (2+2\alpha)s^2 + 4s + 200 = 0$$

3	α	4
2	$1+\alpha$	100
1	$4(1+\alpha)-100\alpha$	0
0		

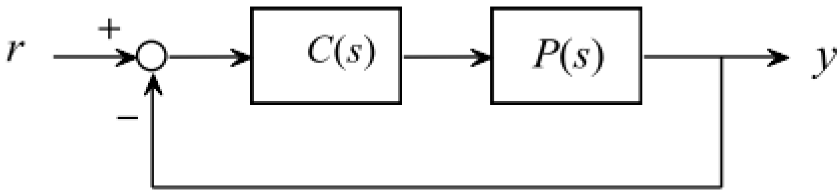
Bisogna imporre $4(1+\alpha)-100\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\dfrac{4}{96}\simeq 0.0417$ (soluzione ammissibile in quanto $\alpha\in(0,1)$).

In definitiva la rete correttrice cercata è

$$C(s)=4\frac{1+0.5s}{1+\frac{4}{96}\cdot 0.5s}$$

Il problema poteva essere risolto anche utilizzando le formule di inversione …….

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{s-1}{s^2+2s+2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché in risposta ad un gradino del segnale di comando si abbia: 1) l'errore a regime nullo; 2) tempo di assestamento $T_a\simeq 9$ secondi ; 3) sovraelongazione $S\simeq 0\%$.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$C(s)=\dfrac{b_1 s+b_0}{s}$, $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ parametri di progetto

$1+C(s)P(s)=0 \iff s^3+(b_1+2)s^2+(b_0-b_1+2)s-b_0=0$

$$\boxed{P_c(s) \triangleq s^3+(b_1+2)s^2+(b_0-b_1+2)s-b_0}$$

$T_a=\dfrac{3}{\sigma_s}$, da $T_a=9$ sec. $\Rightarrow \sigma_s=\dfrac{1}{3}$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$P_d(s)=\left(s+\frac{1}{3}\right)(s+\alpha)(s+\beta)$ con $\alpha,\beta>\frac{1}{3}$

$$\boxed{P_d(s)=s^3+\left(\tfrac{1}{3}+\alpha+\beta\right)s^2+\left(\alpha\beta+\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s+\tfrac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

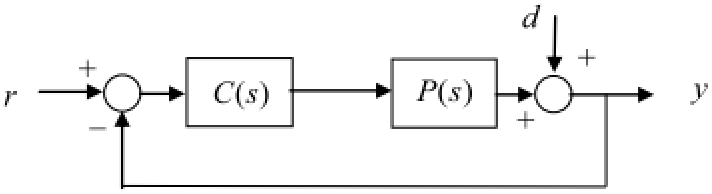
$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11-4\beta}{4\beta+4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$$

È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.

7. **[punti 5]** Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{9}{s+5}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 5 + 11 \cdot \cos(3t+2)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

Soluzione

$$C(s) = \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = CP = \frac{9 \cdot (\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)}{s(s^2+9)(s+5)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s L(s) = \frac{\cancel{9} \cdot \gamma_0}{\cancel{9} \cdot 5} = \frac{\gamma_0}{5} = 4$$

$\gamma_0 = 20$ ovvero $\dfrac{9\gamma_0}{9 \cdot 5} = 4$

$1 + L(s) = 0$

$s(s^2+9)\cdot(s+5) + 9(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)$

$((s+2)^2+1)(s+2)(s+c)$

$9\gamma_3 + 5 = 6 + c \qquad 9\gamma_3 + 5 = 24 \qquad 9\gamma_3 = 19 \qquad \gamma_3 = \frac{19}{9}$

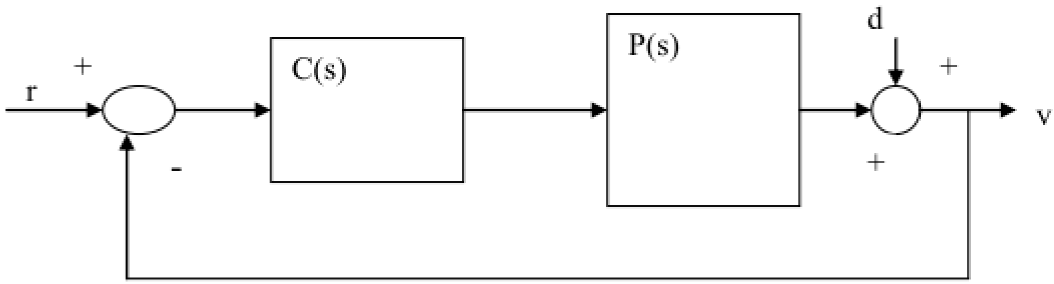
$9\gamma_2 + 9 = 13 + 6c \qquad 9\gamma_2 + 9 = 13 + 108 \qquad 9\gamma_2 = 112 \qquad \gamma_2 = \frac{112}{9}$

$9\gamma_1 + 45 = 10 + 13c \qquad 9\gamma_1 + 45 = 10 + 234 \qquad 9\gamma_1 = 199 \qquad \gamma_1 = \frac{199}{9}$

$180 = 10c \Rightarrow c = 18 \qquad c >> 2$ ok!

$$C(s) = \frac{2{,}11 s^3 + 12{,}4 s^2 + 13{,}2 s + 20}{s(s^2+9)}$$

7. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $P(s) = \dfrac{10}{s+5}$. Progettare un controllore C(s) proprio affinché:

a) Il sistema sull'uscita controllata y abbia reiezione infinita (asintoticamente) del disturbo armonico $d(t) = 3{,}5 \text{ sen}(2t)$.

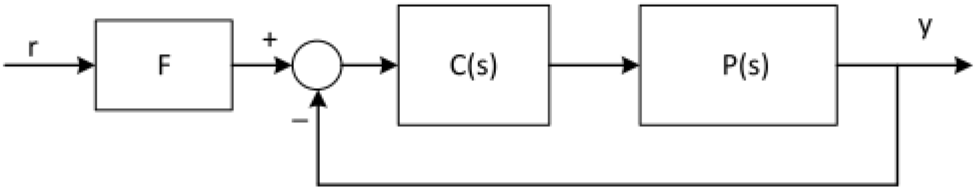
b) Il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile con poli dominanti $-10 \pm j2$.

$$T_{dy}(s)=\frac{1}{1+C(s)P(s)}$$
$$T_{dy}(j\omega)=\frac{1}{1+C(j\omega)P(j\omega)}$$
$$T_{dy}(j2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad C(j2)=+\infty$$
$$\Rightarrow \quad C(s):=\frac{y(s)}{(s^2+4)x(s)} \quad \text{controllore di ordine } l \text{ biproprio}$$
$$y(s):=y_0s^l+y_1s^{l-1}+\cdots+y_l$$
$$x(s):=s^{l-2}+x_1s^{l-3}+\cdots+x_{l-2}$$
$$P(s):=\frac{b(s)}{a(s)}$$
equazione caratteristica:
$$1+C(s)P(s)=0$$
$$x(s)(s^2+4)a(s)+y(s)b(s)=0$$

Quindi il polinomio caratteristico associato alla struttura scelta per il controllore è un polinomio monico di grado $l+1$:
$$(s^2+4)(s+5)x(s)+10y(s)$$
Sia d(s) il polinomio caratteristico desiderato (polinomio monico di grado $l+1$). Imponendo che d(s) coincida col pol. caratteristico sopra si ottengono $l+1$ equazioni (lineari) con $l+1+(l-2)=2l-1$ incognite . Richiedendo che $l+1=2l-1$ si ottiene $l=2$.

Scelta di d(s):
$$d(s):=[(s+10)^2+4](s+30)=s^3+50s^2+704s+3120$$
Polinomio caratteristico associato al controllore:
$$s^3+(5+10y_0)s^2+(4+10y_1)s+20+10y_2$$
Quindi
$$\begin{cases} 5+10y_0=50 & \Rightarrow y_0=4,5 \\ 4+10y_1=704 & \Rightarrow y_1=70 \\ 20+10y_2=3120 & \Rightarrow y_2=310 \end{cases}$$
In conclusione: $C(s)=\dfrac{4,5s^2+70s+310}{s^2+4}$

5. [punti 6] Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s)=\dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete ritardatrice $C(s)=K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ ed il blocco algebrico $F\in\mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p=5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);

b) $M_F=35°$ (margine di fase del sistema retroazionato);

c) $e_r=0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

$$L(s) \triangleq C(s)P(s) = K\,\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

$$L(0) = K\,\frac{8}{16} = \frac{K}{2}\;; \qquad K_p = L(0)$$

La specifica è $K_p = 5 \Rightarrow \dfrac{K}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{K = 10}$

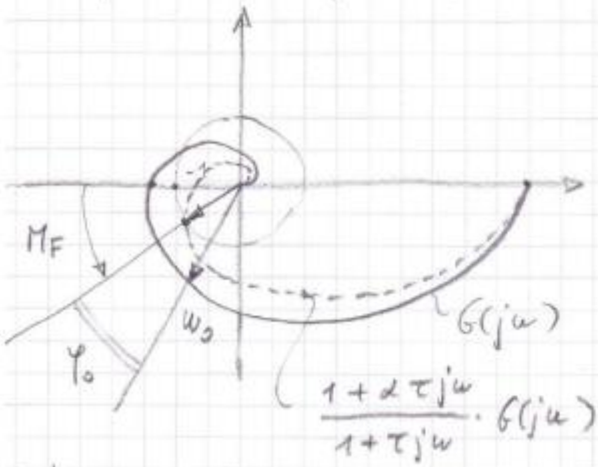
$$L(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{80}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)^4}\,, \quad G(j\omega) = \frac{80}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{80}{(\omega^2+4)^2}\,, \quad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$

$$\arg G(j\omega) = -\pi\,, \quad -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi\,, \quad \omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$|G(j\omega_p)| = 1{,}25, \quad G(j\omega_p) = -1{,}25$



Scelgo $\omega_0 = 1$ rad/sec

$|G(j\omega_0)| = 3{,}2 \quad \arg G(j\omega_0) = -1{,}8546$

$\varphi_0 = \pi + \arg G(j\omega_0) - \frac{35}{180} \cdot \pi = 0{,}6761$

$\cos\varphi_0 > \frac{1}{|G(j\omega_0)|} \qquad 0{,}78 > 0{,}3125$ ok!

$M \triangleq 3{,}2 \quad \varphi = 0{,}6761$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \operatorname{sen}\varphi} = 3{,}867 \text{ sec}$$

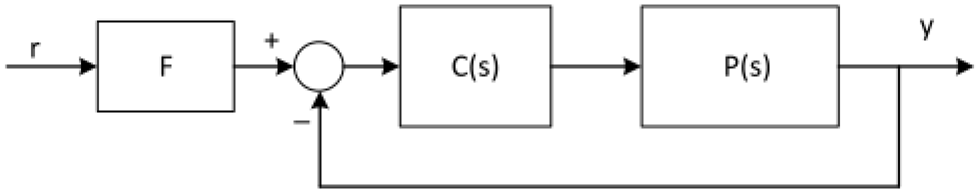
$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0{,}1932$$

Determinazione di F:

$$F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{5}{1+5} = 1, \qquad F = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

7. [punti 5] Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s) = \dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete anticipatrice $C(s) = K\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p = 3{,}5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);

b) $M_F = 30°$ (margine di fase del sistema retroazionato);

c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

$$L(s) = C(s)\,P(s) = k\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

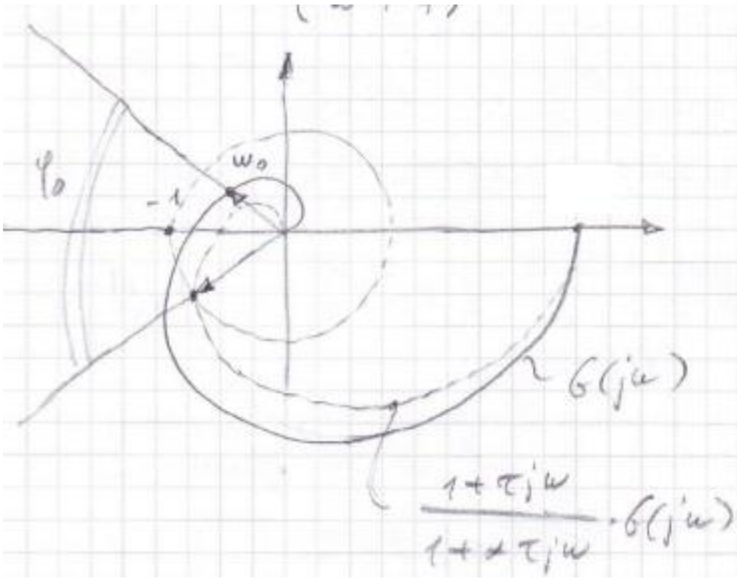
$$L(0) = k\cdot\frac{\cancel{8}^{\,1}}{\cancel{16}_{\,2}} = \frac{k}{2} \qquad K_p = L(0)$$

$$3{,}5 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 7$$

$$L(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{56}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{56}{(s+2)^4} \qquad G(j\omega) = \frac{56}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{56}{(\omega^2+4)^2} \qquad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$



$\arg G(j\omega) = -\pi$

$-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi$

$\omega_p = 2$ rad/sec

$|G(j\omega_p)| = 0,8750$

$G(j\omega_p) = -0.8750$

Scelgo $\omega_0 = 2,5$ rad/sec

$|G(j\omega_0)| = 0,5330 \qquad \varphi_0 = -\arg G(j\omega_0) - \pi + M_F =$

$= 4\,\mathrm{arctg}\frac{2.5}{2} - \pi + \frac{30}{180}\cdot\pi = 0,9662$ rad/sec

$\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \qquad 0,5684 > 0,5330$ ok!

$$M \triangleq \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = 1,8761 \qquad \varphi \triangleq \varphi_0$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \frac{1,8761 - 0,5684}{2,5\cdot 0,8227} = 0,636 \text{ sec}$$

ok

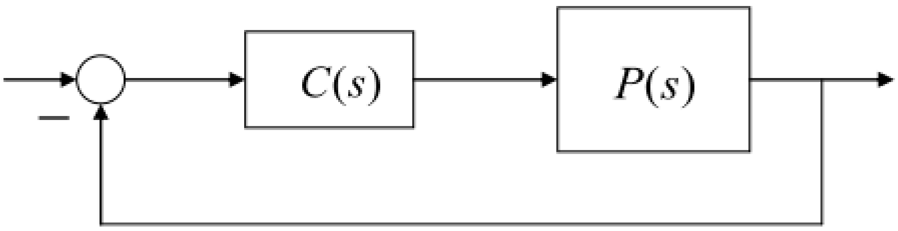
$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \frac{1,8761\cdot 0,5684 - 1}{1,8761\cdot(1,8761 - 0,5684)} = 0,0271$$

Determinazione di F:

$$F\cdot\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \qquad F\cdot\frac{3,5}{1+3,5} = 1$$

$$F = \frac{1+3,5}{3,5} = \frac{4,5}{3,5} = 1,2857$$

7. [punti 4] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S \geq 0,2\ \text{s}^{-1}$ ($G_S \equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

7. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2, ..., \operatorname{Re} p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.

Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

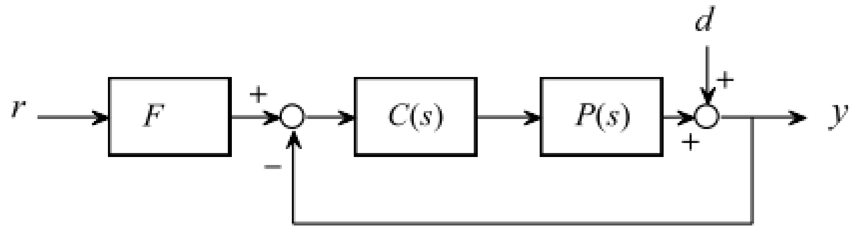
3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2 s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$
$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

7. [punti 5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s+4}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine 4 (quattro) ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo $d(t) = 7\sin(2t) + 9\sin(t+5)$;
2. sistema retroazionato con poli dislocati in $-1, -2, -3, -5, -6$;
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\,s^4 + 102\,s^3 + 287\,s^2 + 392\,s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

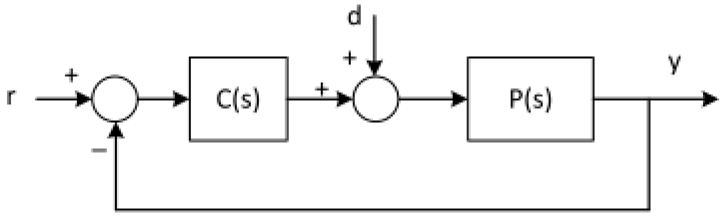
Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

7. [punti 5] Si consideri il sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \frac{10}{(s+2)^2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché si abbia

1) reiezione asintotica infinita di un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato;

2) sovraelongazione $S = 0$ e tempo di assestamento $T_a \simeq 3$ sec. in risposta ad un gradino del riferimento (S e T_a da valutarsi in assenza di disturbo all'ingresso dell'impianto).

Con il controllore così progettato si determinino:

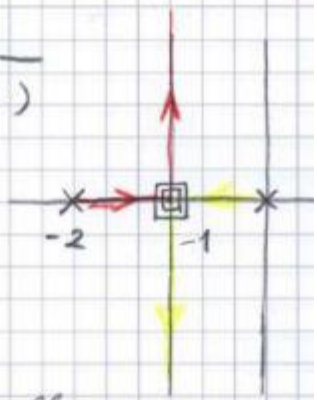
a) il margine di ampiezza M_A e quello di fase M_F del sistema retroazionato;

b) l'errore a regime e_∞ in risposta ad un gradino del riferimento.

$C(s) = K\frac{s+\alpha}{s}$; α determinato con cancellazione polo-zero

$\alpha = 2 \Rightarrow L(s) = C(s)P(s) = K\frac{10}{s(s+2)}$

eq. caratteristica : $1 + K\frac{10}{s(s+2)} = 0$



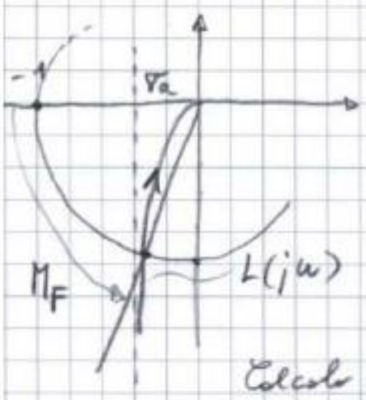
$T_a = \frac{3}{G_s}$, $T_a = 3 \Leftrightarrow G_s = 1$ rad/sec.

$G_s = 1$ quando il valore di K corrisponde alla radice doppia -1 :

$1 + K\frac{10}{(-1)\cdot(1)} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{10} = 0,1$

$$\boxed{C(s) = 0,1\cdot\frac{s+2}{s}}$$

a) $L(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+2)} = \dfrac{0,5}{j\omega(1+0,5\,j\omega)}$



$M_A = +\infty$

$\sigma_a = 0,5\,(-0,5) = -0,25$

Calcolo approssimato di M_F : $0,25 = 1 \cdot \cos M_F$

$M_F = \arccos 0,25 = 75^\circ,5$

Calcolo esatto di M_F : $|L(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \omega = 0,4859$ rad/sec è la pulsazione critica

$M_F = 180^\circ + \arg L(j0,4859) = 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{arctg}\dfrac{0,4859}{2}$

$= 90^\circ - 13^\circ,66 = 76^\circ,34$

b) $e_\infty = 0$ perché il sistema è di tipo 1.

Un approccio alternativo, più generale, per determinare il controllore è il seguente:

$C(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{s}$ (imposizione specifica 1)

$T_a = 3$ sec. $\Rightarrow \sigma_s = 1$ rad./sec. $\Big\}$ imposizione specifica 2

$S = 0$

Quindi il polinomio caratteristico desiderato può essere descritto come

$P_d(s) = (s+1)(s^2 + \alpha s + \beta)$

radici $s_{1,2}$ del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$: $\mathrm{Re}\, s_{1,2} < -1$

Sia $z = s+1$, $s = z-1$, $\mathrm{Re}\, s < -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z < 0$

$(z-1)^2 + \alpha(z-1) + \beta = 0$

$z^2 + (\alpha-2)z + \beta - \alpha + 1 = 0$

Quindi $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - \alpha + 1 > 0 \end{cases}$

$$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$$

$$1 + \frac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)^2} = 0$$

$$s(s+2)^2 + 10 b_1 s + 10 b_0 = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + 10 b_1)s + 10 b_0$$

Si impone $P_d(s) \equiv P_c(s)$

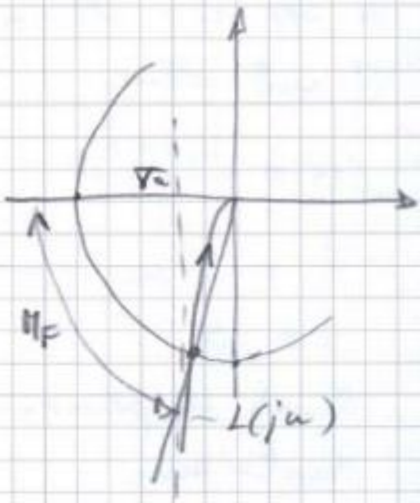
$$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 & \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{ok!} \quad \beta > 2 \\ \alpha + \beta = 4 + 10 b_1 & \beta = 1 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 & \beta = 10 b_0 \end{cases}$$

I poli non dominanti sono $-1.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-4\beta}$

Scegliamo β : $9 - 4\beta = 0$, $\beta = \frac{9}{4}$ ($\beta > 2$ ok!)

$b_0 = \frac{9}{40} = 0.225$ $\quad b_1 = \frac{5}{40} = 0.125$ $\quad \boxed{C(s) = \frac{0.125 \cdot s + 0.225}{s}}$

a) $L(s) = C(s) P(s) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 + \frac{5}{9}s}{s\left(1 + \frac{1}{2}s\right)^2}$



$$L(j\omega) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 + \frac{5}{9}j\omega}{j\omega\left(1 + \frac{1}{2}j\omega\right)^2}$$

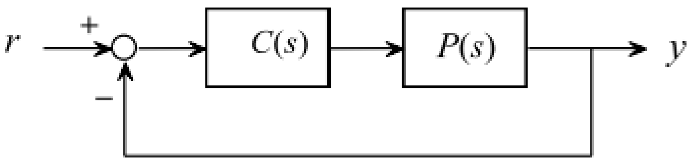
$$\sigma_a = \frac{9}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{9}\right)\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$$

calcolo app. di M_F : $0{,}25 = 1 \cdot \cos M_F$

$$M_F \simeq \arccos 0.25 = 75{,}5^\circ$$

$$M_F = +\infty$$

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \frac{1}{s^3}$.



1. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine due affinché i poli del sistema retroazionato siano posti in $-1, -2, -4, -5, -6$.

2. Con il controllore progettato al punto **1,** si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini una stima del tempo di assestamento T_a e l'errore di regolazione a regime e_r . $\left[e_r := \lim_{t \to +\infty} r(t) - y(t) \right]$

$$P(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$1 + CP = 0 \qquad 1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 (s^2 + a_1 s + a_0)} = 0$$

$$s^3 (s^2 + a_1 s + a_0) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

poli ut. desiderati : $-1, -2, -4, -5 -6$

$$P_d(s) = (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6)$$
$$= (s^2+3s+2)(s^2+9s+20)(s+6)$$
$$= (s^4+9s^3+20s^2+3s^3+27s^2+60s$$
$$+2s^2+18s+40)(s+6) =$$
$$= (s^4+12s^3+49s^2+78s+40)(s+6) =$$
$$= s^5+12s^4+49s^3+78s^2+40s +$$
$$+6s^4+72s^3+294s^2+468s+240 =$$
$$= s^5+18s^4+121s^3+372s^2+508s+240$$

da $P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18, \quad a_0 = 121 \\ b_2 = 372, \; b_1 = 508, \; b_0 = 240 \end{cases}$ ok!

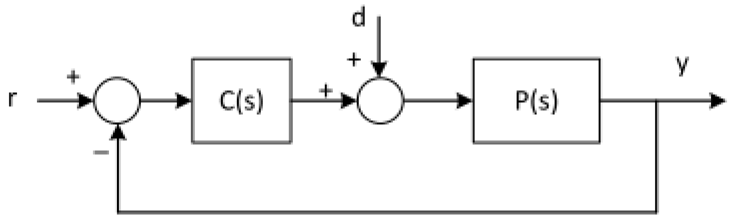
$$C(s) = \frac{372s^2+508s+240}{s^2+18s+121}$$ OK!

1. Si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini l'errore a regime [$e_r := \lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t))$] ed ~~il tem~~ una stima del tempo di assestamento

$e_r = 0$ perché è un sistema di tipo 3

$$T_a \simeq \frac{3}{G_0} = \frac{3}{1} \simeq 3 \text{ sec.}$$

7. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo che soddisfi le seguenti specifiche:

1. errore a regime nullo in risposta ad un gradino del segnale di riferimento $r(t) = r_0 1(t)$;
2. errore a regime nullo in risposta ad un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato $d(t) = d_0 1(t)$;
3. poli dominanti del sistema retroazionato dislocati in $-1 \pm j$.

.

Per soddisfare la specifica 1 basterebbe un controllore proporzionale (di ordine zero) in quanto nell'impianto è già presente un polo nell'origine. La specifica 2 richiede la presenza di un polo nell'origine per il controllore $C(s)$.

1° tentativo

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s} \quad , K, b \in \mathbb{R} \implies L(s) := CP = K\,\frac{s+b}{s^2(s+1)}$$

eq. caratteristica $\quad 1 + L(s) = 0 \quad , \quad 1 + K\,\dfrac{s+b}{s^2(s+1)} = 0$

$$s^2(s+1) + K(s+b) = 0 \qquad s^3 + s^2 + Ks + Kb = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^3 + s^2 + Ks + Kb$$

$$P_d(s) = \left[(s+1)^2 + 1\right](s+\alpha) = s^3 + (2+\alpha)s^2 + (2+2\alpha)s + 2\alpha$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 1 = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1$$ il sistema retroazionato risulta <u>instabile</u>!

Conclusione: un controllore di ordine 1 non può soddisfare le specifiche richieste.

<u>2° tentativo</u>

$$C(s) = K\frac{(s+1)(s+b)}{s(s+a)}$$ (per semplificare il progetto si è imposta una cancellazione polo-zero fra C e P)

eq. caratteristica $1 + K\frac{s+b}{s^2(s+a)} = 0$, $s^3 + a s^2 + Ks + Kb = 0$

$P_c(s) \overset{\Delta}{=} s^3 + a s^2 + Ks + Kb$, $P_d(s)$ come sopra e si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

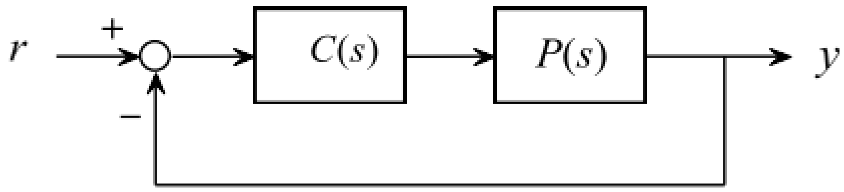
$$\begin{cases} a = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases}$$

Scegliamo $\alpha = 5$ affinché $-1 \pm j$ siano i poli dominanti.

$\Rightarrow a = 7$, $K = 12$, $b = \frac{5}{6} = 0{,}8\bar{3}$

$$\boxed{C(s) = 12 \cdot \frac{(s+1)(s+0{,}8\bar{3})}{s(s+7)}}$$

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{10}{(s+1)^3}$. Progettare un controllore con struttura di rete ritardatrice $C(s) = K \cdot \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ affinché si abbia: 1) costante di posizione $K_p = 20$; 2) stabilità con margine di fase $M_F = 40^\circ$.

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)P(s) = \lim_{s \to 0} K \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot \frac{10}{(s+1)^3} = 10K$$

$$K_p = 20 \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

Sia $L(s) \triangleq \dfrac{20}{(s+1)^3}$ (guadagno di anello non compensato)

e $L_c(s) = \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot L(s)$ (g. di anello compensato)

È richiesto $M_F = 40^\circ = 0.6981317$ rad

$L(j\omega) = \dfrac{20}{(j\omega+1)^3}$, $|L(j\omega)| = \dfrac{20}{(1+\omega^2)^{3/2}}$, $\arg L(j\omega) = -3 \operatorname{arctg} \omega$

Scegliamo per tentativi una pulsazione ω_0 affinché

$\varphi_0 \triangleq \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F > 0$ e $\cos \varphi_0 > \dfrac{1}{|L(j\omega_0)|}$.

Sia $\omega_0 = 1$ rad/sec

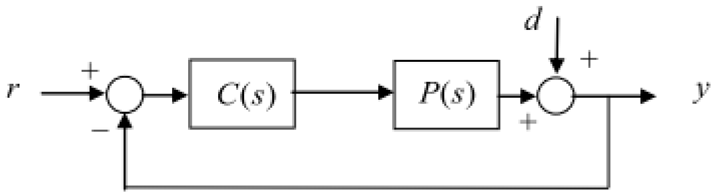
$\varphi_0 = 0.0873$ rad $(\sim 5^\circ)$, $|L(j\omega_0)| = 7.0711$

$\cos\varphi_0 = 0.9962 > \dfrac{1}{|L(j\omega_0)|} = 0.1414$ ok!

$\varphi := \varphi_0$, $M := |L(j\omega_0)|$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \boxed{69.67 \text{ sec}}, \quad \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \boxed{0.1407}$$

7. [punti 4.5] Sia dato il seguente sistema



con $P(s) = \dfrac{1}{1+s}$. Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche: 1) reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 4\sin 2t$; 2) sistema retroazionato asintoticamente stabile con poli dominanti in $-1 \pm j$; 3) costante di posizione $K_p = 4$.

Il controllore è del tipo

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s^2 + 4)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s^2 + 4)(s + 1)}$$

dalla specifica 3) si ha che $\dfrac{b_0}{4} = 4$, da cui $b_0 = 16$, dalla specifica 2) si ha la seguente equazione

$$(s^2 + 4)(s + 1) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = (s^2 + 2s + 2)(s + c)$$

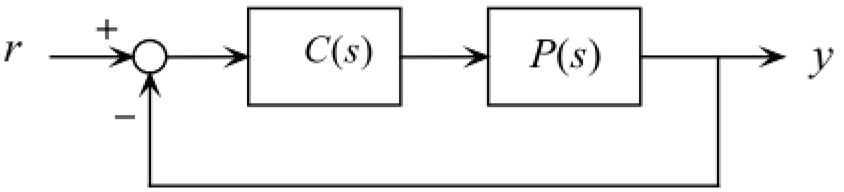
da cui otteniamo

$$b_2 = 11, b_1 = 18, b_0 = 16, c = 10$$

il controllore è quindi

$C(s) = \dfrac{11s^2 + 18s + 16}{s^2 + 4}$.

7. [punti 4.5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(s-1)^2}$. Progettare un controllore di struttura $C(s)=\dfrac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s(s+20)}$ affinché il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente con poli dominanti in $-1\pm j\dfrac{1}{2}$ e abbia costante di velocità $K_v=4$. Per tale controllore determinare inoltre tutti i poli del sistema retroazionato.

guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s L(s) = \frac{b_0}{20}\cdot 10 = \frac{b_0}{2}$$

Da $K_v = 4$ si ottiene $\boxed{b_0 = 8}$.

Eq. caratteristica associata al controllore:

$$1+\frac{b_2 s^2+b_1 s+8}{s(s+20)}\cdot\frac{10}{(s-1)^2}=0$$

$$s(s+20)(s-1)^2+10 b_2 s^2+10 b_1 s+80=0$$

$$P_c(s) := s^4+18s^3+(10b_2-39)s^2+(10b_1+20)s+80$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+1)^2+\frac{1}{4}\right](s^2+\alpha_1 s+\alpha_0)$$
$$= s^4+(\alpha_1+2)s^3+\left(\alpha_0+2\alpha_1+\frac{5}{4}\right)s^2+\left(2\alpha_0+\frac{5}{4}\alpha_1\right)s+\frac{5}{4}\alpha_0$$

Imponendo $P_c(s)\equiv P_d(s)$ si ottiene

$$\begin{cases} 18=\alpha_1+2 \\ 10b_2-39=\alpha_0+2\alpha_1+\frac{5}{4} \\ 10b_1+20=2\alpha_0+\frac{5}{4}\alpha_1 \\ 80=\frac{5}{4}\alpha_0 \end{cases}$$

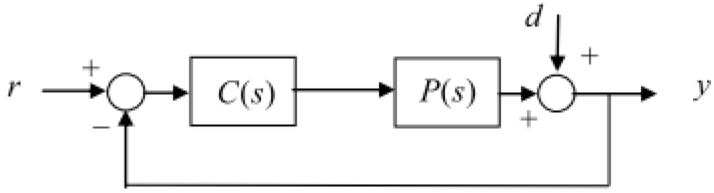
$\alpha_1=16$, $\alpha_0=64$

$\boxed{b_1=12.8}$ $\boxed{b_2=\frac{109}{8}=13.625}$

$$C(s)=\frac{13.625s^2+12.8s+8}{s(s+20)}$$

Le radici di $s^2+\alpha_1 s+\alpha_0$ sono $s_{1,2}=-8,-8$; quindi i poli $-1\pm j\frac{1}{2}$ sono effettivamente dominanti. I poli del sistema retroazionato sono evidentemente $-1\pm j\frac{1}{2}$, -8, -8.

5. [punti 6] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{9}{s+4}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 7 + 10 \cdot \cos(3t+1)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C(s)P(s) = 9 \cdot \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)(s+4)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s L(s) = \frac{9 \cdot y_0}{9 \cdot 4} = \frac{y_0}{4}$$

$$K_v = 4 \Rightarrow \frac{y_0}{4} = 4, \quad \boxed{y_0 = 16}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2 + 1\right](s+2)(s+c) \quad \text{con } c > 2 .$$

$$P_d(s) = s^4 + (6+c)s^3 + (6c+13)s^2 + (13c+10)s + 10c$$

Il polinomio caratteristico associato al controllore scelto è

$$P_c(s) = s(s^2+9)(s+4) + 9(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)$$

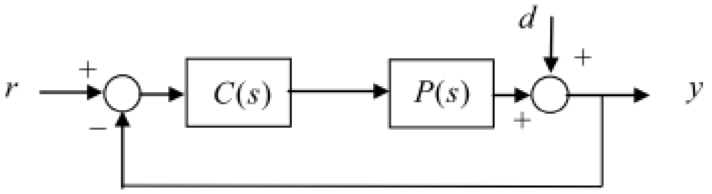
$$P_c(s) = s^4 + (4+9\gamma_3)s^3 + (9+9\gamma_2)s^2 + (36+9\gamma_1)s + 9\gamma_0$$

Si impone che $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4+9\gamma_3 = 6+c \\ 9+9\gamma_2 = 13+6c \\ 36+9\gamma_1 = 10+13c \\ 9\gamma_0 = 10c \end{cases} \Rightarrow c = \frac{144}{10} = 14.4 \quad \text{ok!} \quad c >> 2.$$

$$\boxed{\gamma_1 = 17.91, \quad \gamma_2 = 10.04, \quad \gamma_3 = 1.822}$$

7. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{5}{s+3}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo armonico $d(t) = 7\cos(3t+2)$;
2. costante di posizione $K_p = 5$;
3. sistema retroazionato asintoticamente (internamente) stabile con poli dominanti in $-3 \pm j$.

7.

Il controllore è del tipo

$$C(s) = \frac{y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{(s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s) = \frac{5\left(y_2 s^2 + y_1 s + y_0\right)}{(s^2+9)(s+3)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{5y_0}{27} = 5$ da cui $y_0 = 18$. Dalla specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$(s^2+9)(s+3) + 5\left(y_2 s^2 + y_1 s + 27\right) = ((s+3)^2+1)(s+c)$$

da cui otteniamo

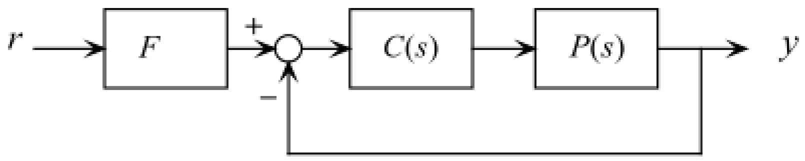
$$c = 16,2 \quad y_1 = 19,64 \quad y_2 = 3,84$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 16,2 corrisponde al polo $-16,2$ la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-3 \pm j$.

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{3,84s^2 + 19,64s + 27}{s^2+9}.$$

7. [punti 4,5] Sia dato lo schema di sistema di controllo in figura dove $P(s) = \frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)}$.



Determinare un controllore dinamico $C(s)$ con struttura di rete anticipatrice ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. costante di posizione $K_p = 19$,
2. margine di ampiezza $M_A = 2$,
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

b. $\quad C(s) = k \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

$$L(0) = \frac{k}{10} \qquad K_p = L(0) = 19$$

$k = 190$ imponiamo $-\dfrac{1}{\tau} = -2$ (CANCELLAZIONE POLO-ZERO)

$$\tau = \frac{1}{2}$$

$$L(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s} \cdot \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{\cancel{s+2}}{(\alpha s+2)} \cdot \frac{1900}{(\cancel{s+2})(s+5)(s+10)} =$$

$$\simeq \frac{1900}{(\alpha s+2)(s+5)(s+10)}$$

$L(s;\alpha) + \dfrac{1}{2} = 0$ abbia radici pur. immaginarie

$$3800 + (\alpha s+2)(s^2+15s+50) = 0$$

$$\alpha s^3 + (15\alpha + 2)s^2 + (50\alpha + 30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \alpha & 50\alpha + 30 \\
2 & 15\alpha + 2 & 3900 \\
1 & f(\alpha) &
\end{array}$$

$$f(\alpha) = (15\alpha + 2)(50\alpha + 30) - 3900\alpha =$$

$$= 100\alpha + 60 + 750\alpha^2 + 450\alpha - 3900\alpha =$$

$$= 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{+1675 \pm \sqrt{1675^2 - 60 \cdot 750}}{750} = \frac{1675 \pm \sqrt{2\,760\,625}}{750}$$

$$= \frac{1675 \pm 1661{,}5123}{750} = \begin{cases} 4{,}4487 & \text{da SCARTARE} \\ 0{,}0180 & [0{,}0179828\ldots] \end{cases}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha = 0{,}0180$$

$$C(s) = 180\,\frac{1 + \frac{1}{2}s}{1 + 0{,}0180 \cdot \frac{1}{2}s}$$

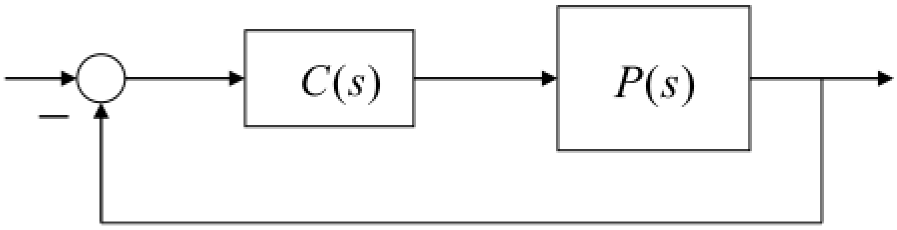
Calcolo di F :

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{19}{1+19} = 1 \qquad \boxed{F = \frac{20}{19} = 1{,}0526}$$

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S \geq 0,2 \ \ s^{-1}$ ($G_S \equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

7.
L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:
$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0, \ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Re}\, p_2, ..., \mathrm{Re}\, p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.
Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2 s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$
$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.