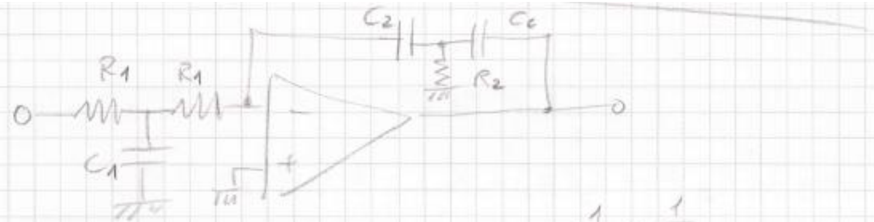
Tracce delle soluzioni

1.

Vedi dispense del corso

2.

1)



$$G(s) = -\frac{Z_{t,f}}{Z_{t,i}} = -\frac{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\frac{1}{C_2 s}\cdot\frac{1}{C_2 s}}{R_2}}{R_1 + R_1 + \frac{R_1^2}{\frac{1}{C_1 s}}}$$

$$= -\frac{\frac{2}{C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_2^2 s^2}}{2R_1 + R_1^2 C_1 s} = -\frac{\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_2 C_2^2 s^2}}{R_1(2 + R_1 C_1 s)}$$

$$= -\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)}$$

2) zeri: $z_1 = -\frac{1}{2R_2 C_2}$ poli: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -\frac{2}{R_1 C_1}$

modi $= \left\{1, t, \exp\left\{-\frac{2}{R_1 C_1}\right\}\right\}$

3) $$G(s) = -\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)} = \frac{-2R_2 C_2 s - 1}{R_1^2 R_2 C_1 C_2^2 s^3 + 2R_1 R_2 C_2^2 s^2}$$

eq. differenziale

$$R_1^2 R_2 C_1 C_2^2 D^3 y(t) + 2R_1 R_2 C_2^2 D^2 y(t) = -2R_2 C_2 D u(t) - u(t)$$

3.

* $y(t),\ t \in [0, \frac{1}{2})$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2} + 2 \cdot \frac{1}{s} = 2 \cdot \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} + 1\right) = 2\frac{1}{s} \cdot \frac{1+s}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{2\cancel{(1+s)}}{s^2} = \frac{2}{s^2}$$

$$y(t) = 2t,\quad 0 \leq t < \frac{1}{2}$$

* $y(t),\quad t \in [\frac{1}{2}, +\infty)$

$G(s)$ è asintoticamente stabile, quindi

$$y(t) = G(0) \cdot 1 + y_{tran.}(t) = 1 + y_{tran.}(t)$$

$$y_{trans.}(t) = c \cdot e^{-t},\quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{evoluzione libera})$$

$$y(t) \in C^{\rho-1}(\mathbb{R});\quad \rho = 1 \Rightarrow y(t) \in C^0(\mathbb{R})$$

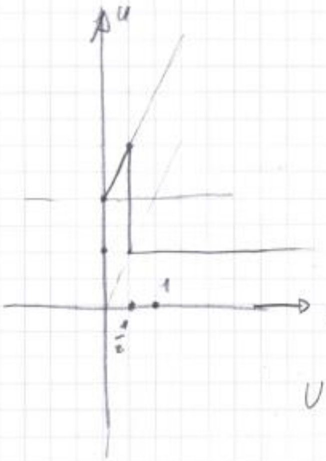
$$y\left(\tfrac{1}{2}-\right) = y\left(\tfrac{1}{2}+\right)$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad \text{da cui } c = 0$$

Quindi $y(t) = 1,\quad t \geq \frac{1}{2}$.

Alternativamente si può procedere come segue:

$$u(t) = \begin{cases} 2t+2 & t \in [0, \tfrac{1}{2}) \\ 1 & t \geq \tfrac{1}{2} \end{cases}$$



$$u(t) = 2t+2 - \{(2t+2)-1\}\, 1(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= 2t+2 - \{2t+1\}\, 1(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= 2t+2 - \{2(t-\tfrac{1}{2})+2\}\, 1(t-\tfrac{1}{2})$$

$$U(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} - e^{-\frac{1}{2}s}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$$

$$U(s) = 2\,\frac{1+s}{s^2} - e^{-\frac{1}{2}s} \cdot 2\,\frac{1+s}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot U(s) = \frac{2}{s^2} - e^{-\frac{1}{2}s} \cdot \frac{2}{s^2}$$

$$y(t) = 2t - 2\left(t-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 1\left(t-\tfrac{1}{2}\right)$$

Se $t \in [0, \tfrac{1}{2}) \Rightarrow y(t) = 2t$

Se $t \geq \tfrac{1}{2}$ $\quad y(t) = 2t - 2(t-\tfrac{1}{2}) = 2t-2t+1 = 1$

$y(t) = 1$.

4.
Vedi appunti delle lezioni.

5.
a)

$$L(j\omega) = 2\frac{1+5j\omega}{(1+j\omega)^2(1+0,5j\omega)^2}$$

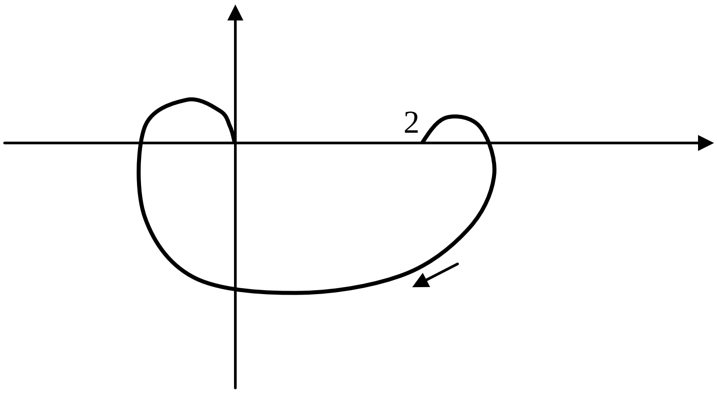
$$|L(j\omega)| = 2\frac{\sqrt{1+25\omega^2}}{(1+\omega^2)(1+\omega^2/4)}$$

$$\arg L(j\omega) = \arctan(5\omega) - 2\arctan(\omega) - 2\arctan(0,5\omega)$$

$$L(j0) = 2$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Per ω piccolo vale $\arg L(j\omega) \simeq 5\omega - 2\omega - 2\cdot 0{,}5\omega = 2\omega > 0$ e $|L(j\omega)| > |L(j0)|$. Ne consegue quindi il seguente tracciamento qualitativo del diagramma polare:



Si prevedono quindi la presenza di due intersezioni del diagramma con l'asse reale (escluse quelle in 0 e 2). Le pulsazioni corrispondenti a tali intersezioni possono essere determinate risolvendo l'equazione

$$\arg L(j\omega) = 0 \ \ (-\pi)$$

ovvero

$$\arctan(5\omega) + 0 \ \ (+\pi) = 2\arctan\omega + 2\arctan(0{,}5\omega)$$

Applicando la funzione $\tan(\cdot)$ ad entrambi i membri si ottiene:

$$5\omega = \frac{\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} + \dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}{1 - \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\,\dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}$$

Eliminando la soluzione $\omega = 0$ e ponendo $x := \omega^2$ si giunge all'equazione algebrica di secondo grado

$$5x^2 - 59x + 8 = 0$$

da cui le soluzioni $x_1 = 0{,}137188$ e $x_2 = 11{,}6628$. Considerando le soluzioni positive di ω otteniamo

$$\begin{cases} \omega_1 = 0{,}37038 \ \ \text{rad/sec} \\ \omega_2 = 3{,}41508 \ \ \text{rad/sec} \end{cases}$$

Le intersezioni cercate sono quindi

$$\begin{cases} L(j\omega_1) = 3{,}5788 \\ L(j\omega_2) = -0{,}6899 \end{cases}$$

b)

Il guadagno di anello L(s) non ha poli a parte reale positiva ed il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Si noti che il margine di ampiezza associato è facilmente determinabile come

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_2)|} \cong 1{,}45$$

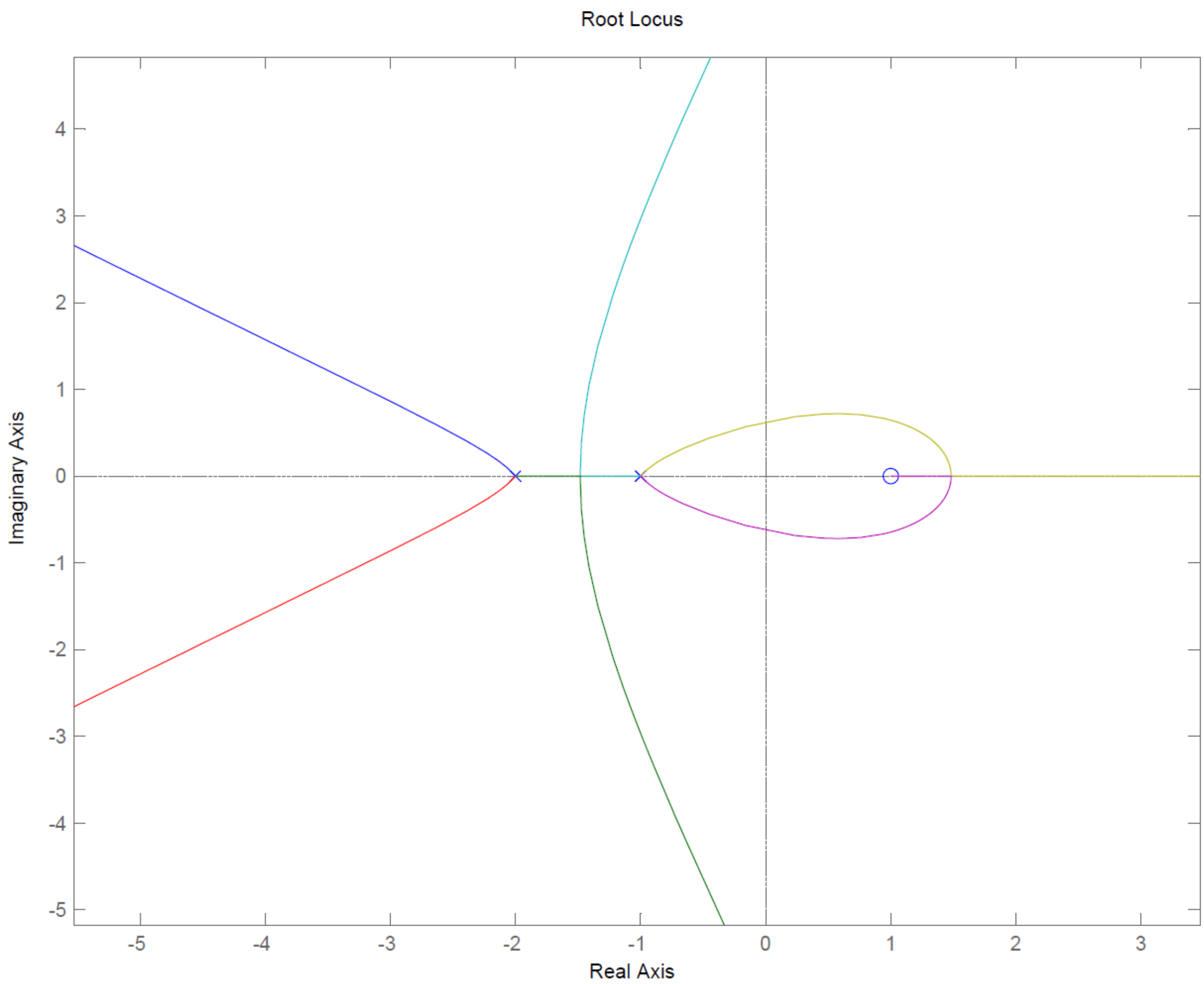
6.
L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^3}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 5 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-2-(+1)}{6-1}=-2$$

Gli asintoti formano i seguenti angoli con l'asse reale positivo: 0°, 72°,144°, -72°,-144°



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{3}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$5s^2-11=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{11/5}=\pm1,4832$$

7.

$$L(s) = C(s)\,P(s) = k\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

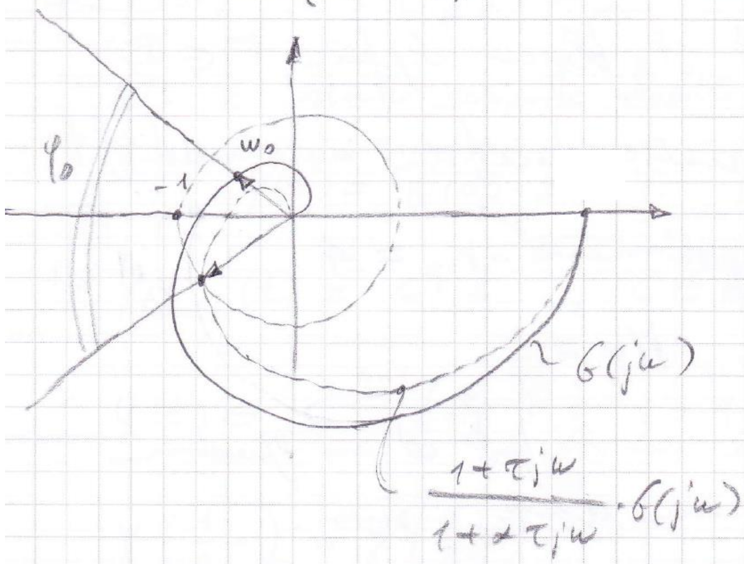
$$L(0) = k\cdot\frac{\cancel{8}^{\,1}}{\cancel{16}_{\,2}} = \frac{k}{2} \qquad K_p = L(0)$$

$$3{,}5 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 7$$

$$L(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{56}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{56}{(s+2)^4} \qquad G(j\omega) = \frac{56}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{56}{(\omega^2+4)^2} \qquad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$



$$\arg G(j\omega) = -\pi$$

$$-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi$$

$$\omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$$|G(j\omega_p)| = 0{,}8750$$

$$G(j\omega_p) = -0.8750$$

Scelgo $\omega_0 = 2{,}5$ rad/sec

$$|G(j\omega_0)| = 0{,}5330 \qquad \varphi_0 = -\arg G(j\omega_0) - \pi + M_F =$$
$$= 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{2.5}{2} - \pi + \frac{30}{180}\cdot\pi = 0{,}9662 \text{ rad/sec}$$

$$\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \qquad 0{,}5684 > 0{,}5330 \quad \text{ok!}$$

$$M \triangleq \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = 1,8761 \qquad \varphi \triangleq \varphi_0$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \frac{1,8761 - 0,5684}{2,5 \cdot 0,8227} = 0,636 \text{ sec}$$

OK

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \frac{1,8761 \cdot 0,5684 - 1}{1,8761 \cdot (1,8761 - 0,5684)} = 0,0271$$

Determinazione di F:

$$F \cdot \frac{L(0)}{1 + L(0)} = 1 \qquad F \cdot \frac{3,5}{1+3,5} = 1$$

$$F = \frac{1+3,5}{3,5} = \frac{4,5}{3,5} = 1,2857$$

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{z-1} \triangleq z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{(z+2)^2}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = 4 \qquad c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1 - c_1 = 1 - 4 = -3$$

$$Y(z) = 4\,\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} - 3\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \quad , k \geq 0$$

$$y(k) = 4 - \frac{3}{2}\,k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4 + 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k) = 4 + 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k , \; k \geq 0}$$