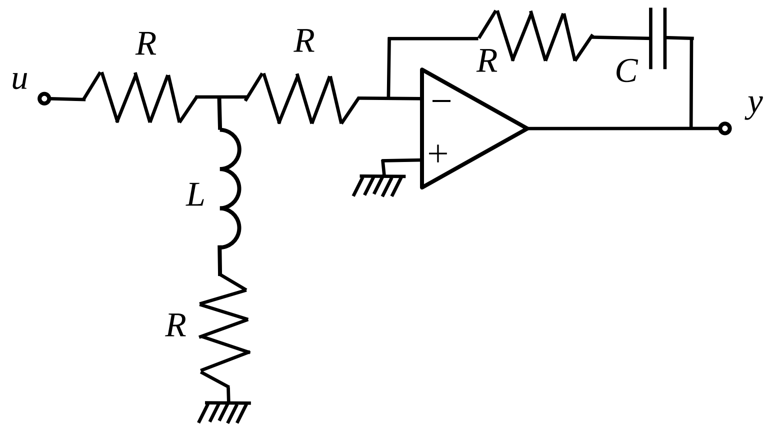
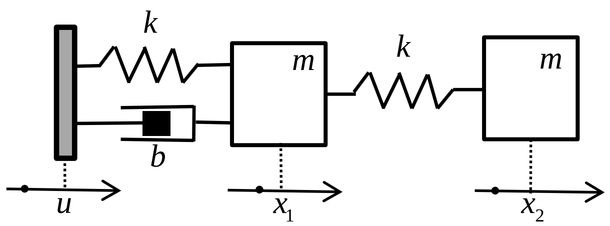
Parte A

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento.
2. gli zeri e i modi.
3. l'equazione differenziale.

2. [punti 6] Un azionamento elettrico lineare che può imporre una posizione desiderata u viene utilizzato per movimentare due masse su di una guida rettilinea (vedi figura). Negli accoppiamenti fra le masse e con l'azionamento elettrico si considerino molle ideali con costante elastica k ed un ammortizzatore con coefficiente viscoso b. Le posizioni delle due masse sono descritte dalle variabili x_1 e x_2. Si vuole studiare la dinamica del sistema meccanico orientato da u (ingresso) ad x_2 (uscita) ipotizzando che in condizioni di quiete si abbia $u = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Di questo sistema si determini: 1) l'equazione differenziale e 2) la funzione di trasferimento.



Parte B

3. [punti 6] Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0, \ \delta \in (0,1)$$

sia nota la risposta al gradino unitario

$$g_s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \varphi\right), \ \varphi := \arccos(\delta) \ .$$

Dedurre la formula che esprime la sovraelongazione S in funzione del coefficiente di smorzamento del sistema.

4. [punti 6] Dimostrare le seguenti proprietà della trasformata di Laplace:

1. $L[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$;
2. $L\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
3. $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Parte C

5. [punti 6] Sia dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)=\frac{1}{s+1}$. Per $t<0$ i segnali di ingresso e uscita siano rispettivamente $u(t)=\sin(t)$ e $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

1) Verificare che la coppia $\left(\sin(t),\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ appartenga al behavior del sistema.

2) Per $t\geq 0$ l'ingresso diventa identicamente nullo: $u(t)=0$. Determinare la corrispondente uscita $y(t)$ per $t\geq 0$.

3) Stabilire il grado massimo di continuità del segnale d'uscita $y(t)$ su $(-\infty,+\infty)$.

6. [punti 6] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\frac{s+1}{(s+2)[(s+1)^2+4]}$ determinare la risposta forzata $y(t)$, $t\geq 0$ al segnale di ingresso $u(t)=t\cdot 1(t)$.