Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \implies K_{23} = -\frac{11}{8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - t e^{-2t} - \frac{11}{8}e^{-2t} + 2e^{-t}$$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

4.
Vedi appunti delle lezioni.

5.

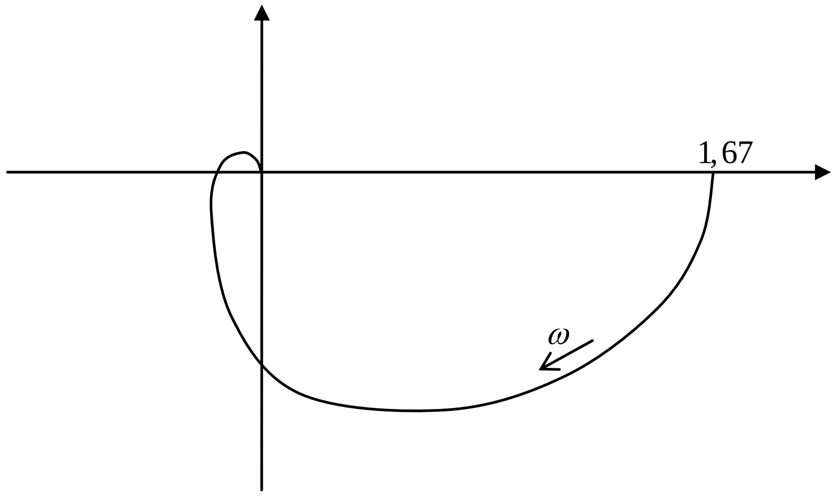
a.

$$L(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)};\quad L(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=\frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\,\sqrt{4+\omega^2}\,\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega)=-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0)=\frac{5}{3}\cong 1,67$ e $\lim_{\omega\to+\infty}\left|L(j\omega)\right|=0$, $\lim_{\omega\to+\infty}\arg L(j\omega)=-3\frac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p)=-\pi$:

$$\arctan\frac{\omega_p}{2}+\arctan\frac{\omega_p}{3}=\pi-\arctan\omega_p$$

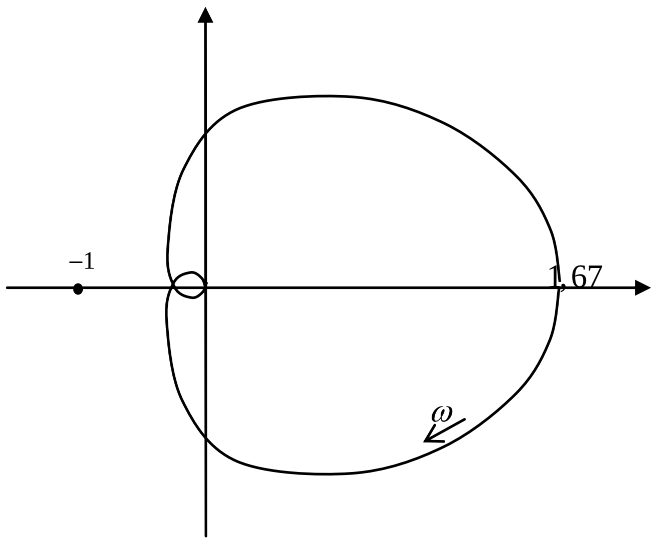
Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2-11=0$ da cui $\omega_p=\sqrt{11}\cong 3,32$ rad/s.

$$\left|L(j\omega_p)\right|=\frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}}=\frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p)=-\frac{1}{6}\right)$.

b.

Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;

in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

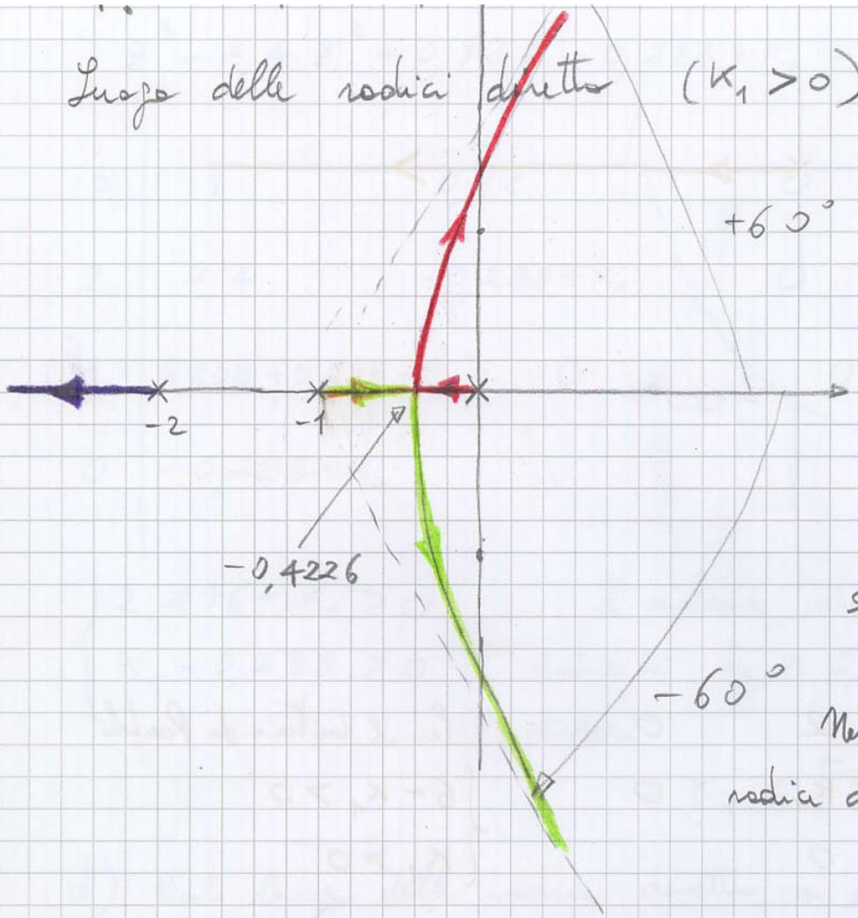
$\Rightarrow \omega_c = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

6.

Luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$)



$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

Calcolo radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} -1{,}5774 \\ -0{,}4226 \end{cases}$$

Nel luogo diretto l'unica radice doppia è $-0{,}4226$

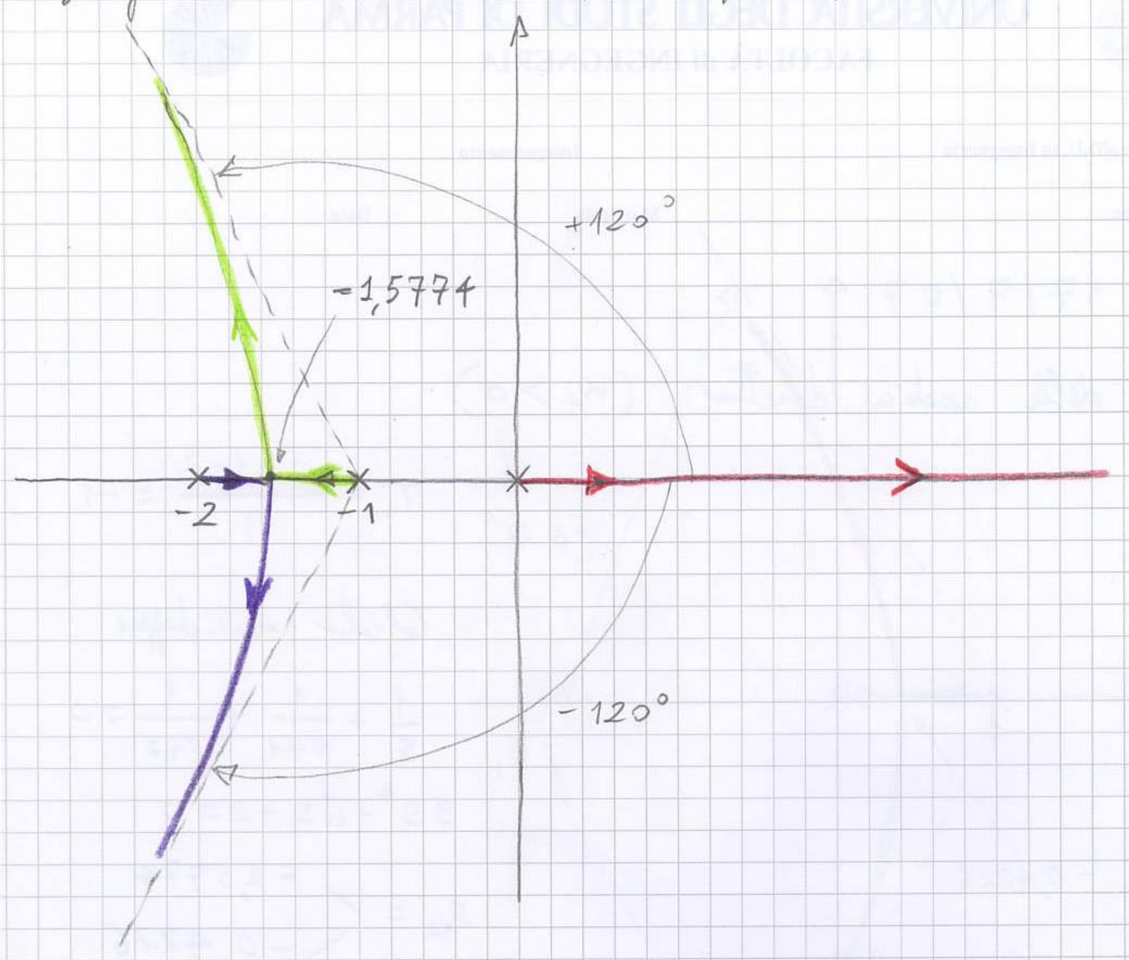
Eq. caratteristica $\quad 1 + K_1 P(s) = 0$

$$1 + K_1 \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+s)(s+2) + K_1 = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

Luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$)



b)

3	1	2	0	
2	3	K_1	0	
1	$6-K_1$	0		
0	K_1			

Per il Criterio di Routh

$$\begin{cases} 6 - K_1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è asint. stabile per tutti e soli valori

$$K_1 \in (0, 6)$$

c) Cambio di variabile complessa $z = s + 0{,}2$

$$\mathrm{Re}\, z < 0 \iff \mathrm{Re}\, s < -0{,}2$$

$$s = z - 0{,}2$$

$$(z-0{,}2)^3 + 3(z-0{,}2)^2 + 2(z-0{,}2) + K_1 = 0$$

$$z^3 + 2{,}4\, z^2 + 0{,}92\, z - 0{,}288 + K_1 = 0$$

3	1	$0{,}92$	0
2	$2{,}4$	$-0{,}288+K_1$	0
1	$2{,}208+0{,}288-K_1$	0	0
0	$-0{,}288+K_1$		

$$\begin{cases} 2{,}496 - K_1 > 0 \\ K_1 - 0{,}288 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 0{,}2$ per tutti e soli valori

$$K_1 \in [0{,}288\,,\, 2{,}496]$$

d) Dal luogo delle radici diretto si evince che per il valore ottimo K_1^* l'eq. caratteristica ha fra le sue radici, la radice doppia $-0{,}4226$. Quindi

$$K_1^* = -s(s+1)(s+2)\Big|_{s=-0{,}4226} \cong 1{,}456$$

Attenzione: il valore corretto di K_1^* è 0,3849

7.

$$P(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$1 + CP = 0 \qquad 1 + \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3(s^2 + a_1 s + a_0)} = 0$

$$s^3(s^2 + a_1 s + a_0) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

poli ut. desiderati : $-1, -2, -4, -5 -6$

$$P_d(s) = (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6)$$
$$= (s^2+3s+2)(s^2+9s+20)(s+6)$$
$$= (s^4 + 9s^3 + 20s^2 + 3s^3 + 27s^2 + 60s$$
$$+ 2s^2 + 18s + 40)(s+6) =$$
$$= (s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 78s + 40)(s+6) =$$
$$= s^5 + 12s^4 + 49s^3 + 78s^2 + 40s +$$
$$+ 6s^4 + 72s^3 + 294s^2 + 468s + 240 =$$
$$= s^5 + 18s^4 + 121s^3 + 372s^2 + 508s + 240$$

da $P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18, & a_0 = 121 \\ b_2 = 372, \; b_1 = 508, & b_0 = 240 \end{cases}$ ok!

$$C(s) = \frac{372 s^2 + 508 s + 240}{s^2 + 18 s + 121}$$ OK!

1. Si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini l'errore a regime e_r $\left[e_r := \lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t)) \right]$ ed ~~il~~ una stima del tempo di assestamento

$e_r = 0$ perché è un sistema di tipo 3

$$T_a \simeq \frac{3}{G_0} = \frac{3}{1} \simeq 3 \text{ sec.}$$

8.

Si applica la trasformata zeta alla risposta all'impulso $h(k)$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = \frac{8}{z-1} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} - 7 \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

$H(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema anche esprimibile come

$$H(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + \frac{5}{4} z - \frac{1}{4}} .$$

Da quest'ultima espressione si ricava l'eq. alle differenze:

$$\boxed{y(k) - 2y(k-1) + \frac{5}{4} y(k-2) - \frac{1}{4} y(k-3) = u(k-1) + u(k-3)}$$