

PROBABILITÀ ELEMENTARE

capitoli 1,2

• Frequenza relativa $F_n(E) = \frac{n(E)}{N}$ $n(E)$ = numero di volte che si verifica un evento
 N = numero di prove

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Distribuzione } D_n, K = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ CON RIPETIZIONI } \Rightarrow n^K$$

$$\text{Permutazione } P = n!$$

$$\text{Combinazioni } C_n, K = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\text{Probabilità condizionata } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{Regola delle catene (CHAIN RULE) } P(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = P(\epsilon_1) P(\epsilon_2|\epsilon_1) P(\epsilon_3|\epsilon_1, \epsilon_2) \dots P(\epsilon_n|\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1})$$

$$\text{Teorema probabilità totale } P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) P(A_i) \Leftrightarrow \text{Il insieme degli } A_i \text{ è una PARTIZIONE dello spazio campione}$$

$$\text{Formula di Bayes } P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

INDIPENDENZA E PROVE RIPETUTE

capitoli 3,4

$$\text{Eventi indipendenti } \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \cong P(A \cap B) = P(A) P(B) \rightarrow \text{condizioni d'indipendenza}$$

$$\text{numero di successi su } n, S_n = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ con } k \text{ successi. N.B. per calcolare la probabilità che NON ci sono successi per } k=0$$

$$\text{numero di prove fino al primo successo } P(T_1) = (1-p)^{k-1} p \cong \text{distribuzione geometrica}$$

VARIABILI ALGEBRICHE

capitoli 5,6,7,8

$$\text{Funzione di distribuzione } CDF = F_X(x) \cong P(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Proprietà CDF} \begin{cases} F_X(-\infty) = 0; F_X(+\infty) = 1 \\ P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \\ P(X > a) = 1 - F_X(a) \\ P(X < a) = F_X(a) \end{cases}$$

$$\text{Funzione densità di probabilità PDF} = f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \text{ (se spazio campione DISCRETO è rappresentato da un impulso di Dirac)}$$

$$\text{Proprietà PDF} \begin{cases} f_X(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \\ P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \end{cases}$$

$$\text{PMF} = \text{probabilità in cui si concentra la massa di una probabilità DISCRETA}$$

$$f_{X_1+X_2} = f_{X_1} * f_{X_2} \text{ SE VARIABILI ALGEBRICHE INDIPENDENTI}$$

$$\text{FUNZIONI DI V.A.: } Y = g(X) \quad S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{CDF di } Y(g(X)) \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \leftarrow \text{metodo grafico}$$

$$\text{PDF di } Y(g(X)) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \leftarrow \text{TEOREMA FONDAMENTALE}$$

$$\text{VALORE MEDIO: } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \text{ se } X \text{ V.A. discreta}$$

$$\text{N.B. } g_X(x) \text{ è pari } \Rightarrow E(X) = 0$$

$$\text{VARIANZA } \sigma_X^2 \cong [Cov(X, X)]$$

$$\text{deviazione standard } \sigma_X \cong \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

$$P(X \leq x | M) \cong F_X(x|M) = \frac{P(X \leq x \cap M)}{P(M)} = \frac{F_X \cap P(M)}{P(M)}$$

$$\text{PDF CONDIZIONATA } f_X(x|M) \cong \frac{d}{dx} F_X(x|M) = \frac{f_X(x) \cap P(M)}{P(M)}$$

$$\text{PROBABILITÀ TOTALE PER V.A.: } F_X(x) = \sum_{i=1}^n F_X(x|A_i) \cdot P(A_i) \left. \begin{matrix} E(X) = \sum_{i=1}^n E(X|A_i) \cdot P(A_i) \\ E(g(X)) = \sum_{i=1}^n E(g(X)|A_i) \cdot P(A_i) \end{matrix} \right\} A_i = \text{partizioni di } S$$

$$\text{FORMULA DI BAYES INVERSA: } P(M|X=x) = \frac{f_X(x|M)}{f_X(x)}$$

Definizioni varie

Uno spazio campione si dice **UNIFORME** se i suoi RISULTATI sono **equiprobabili**

Due eventi esclusivi sono **fortemente dipendenti**

Uno spazio campione con un numero di elementi **infinito** non numerabile è detto **continuo**

Una **variabile casuale** è uno funzione $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ Spunto dello Spazio campione

Una **VA** si dice **continua** se $F_X(x)$ è **continua** $\forall x \in \mathbb{R}$

discreta se $F_X(x)$ è **costante a tratti** (a gradini)

misurata se $F_X(x)$ ha **discontinuità** ma NON è costante a tratti

Teorema di Kolmogorov: Uno qualunque CDF può essere decomposto come $F_X(x) = (1 - D(x))h(x)$ dove $h(x)$ è **continua** e $D(x)$ è una **funzione di distribuzione discreta**

Teorema di aspettazione: $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$

Due VA sono **indipendenti** se $F_{X,Y} = F_X(x) F_Y(y)$

VA NOTEVOLI

continua	discreta
UNIFORME $X \sim U(a,b)$ $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$	BERNOULLI $X \sim B(p)$ $f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}$
pdf: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{(a,b)}(x)$	pmf: $p_X(x) = (1-p)^x p$
$E[X] = \frac{a+b}{2}$	$E[X] = p$
$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$	$Var[X] = p(1-p)$
ESPODIZIONALE $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	BINOMIALE $X \sim B(n,p)$ $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
pdf: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	pmf: $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
$E[X] = \frac{1}{\lambda}$	$E[X] = np$
$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$	$Var[X] = np(1-p)$
GAUSSIANA $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	POISSON $X \sim P(\lambda)$ $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$
pdf: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	pmf: $p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$
$E[X] = \mu$	$E[X] = \lambda$
$Var[X] = \sigma^2$	$Var[X] = \lambda$

VETTORI DI VA

capitoli 9,10,11,12

Vettore casuale $X = (X_1, \dots, X_n)$ $S \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\text{CDF CONGIUNTA } F_X(x) \cong P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$\text{CDF MARGINALE } F_X(x) = F_X(x, \dots, x) \left. \begin{matrix} F_Y(y) = F_Y(y, \dots, y) \end{matrix} \right\} \text{Vale anche per } n \text{ V.A.}$$

$$\text{PDF CONGIUNTA } p_X(x,y) \in D = \frac{d}{dx} F_X(x,y)$$

$$\text{PDF MARGINALI } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,y) dx$$

$$\text{PDF CONDIZIONATA } f_X(x_1, \dots, x_n | x_{n+1}, \dots, x_m) = \frac{F_X(x_1, \dots, x_m)}{F_X(x_{n+1}, \dots, x_m)}$$

$$\text{VALORE MEDIO } E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_X(x,y) dx dy$$

$$\text{CORRELAZIONE } R_{xy} = E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x,y) dx dy$$

$$\text{COVARIANZA } Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Unità a gradi