Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.

$$> \quad G := -\frac{\frac{1}{sC}+\frac{1}{sC}+\frac{\frac{1}{sC}\cdot\frac{1}{sC}}{R}}{R+R+\frac{RR}{\frac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{sC}+\frac{1}{s^2C^2R}}{2R+RsC\left(\frac{1}{sC}+R\right)}$$

$$-\frac{2sCR+1}{s^2C^2R^2\,(3+sCR)}$$

$$G(s)=\frac{-2RCs-1}{(RC)^3s^3+3(RC)^2s^2}$$

eq. differenziale

$$(RC)^3\,D^3y(t)+3(RC)^2\,D^2y(t)=-2(RC)\,Du(t)-u(t)$$

zeri: $\quad z_1=-\frac{1}{2RC}$

poli: $\quad p_1=0 \qquad p_2=0 \qquad p_3=-\frac{3}{RC}$

modi $=\left\{1,\ t,\ \exp\left\{-\frac{3}{RC}t\right\}\right\}$

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = \left.-\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

4.
Vedi dispense dell'insegnamento.

5.
1)

$$L(j\omega) = \frac{50(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{50(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L\left(j\omega\right)$:

Comportamento per $\omega \to 0^{+}$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to0+}\left|L\left(j\omega\right)\right| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to0^{+}}\arg L\left(j\omega\right) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L\left(j\omega\right)\right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L\left(j\omega\right) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_{p}\right) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg\left(2arctg\,\omega\right)\cdot 0.1\omega = 0$$

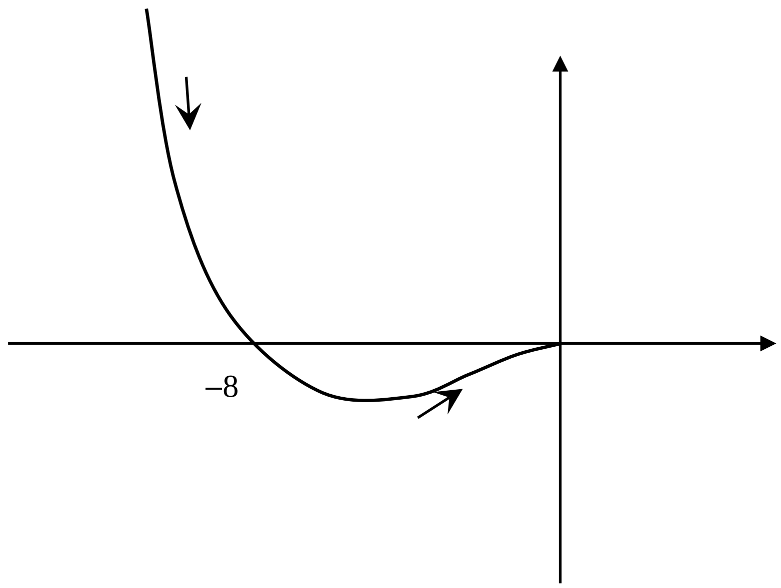
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^{2}}\cdot\frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_{p} = \sqrt{5/4} \simeq 1.118\,rad/\sec$$

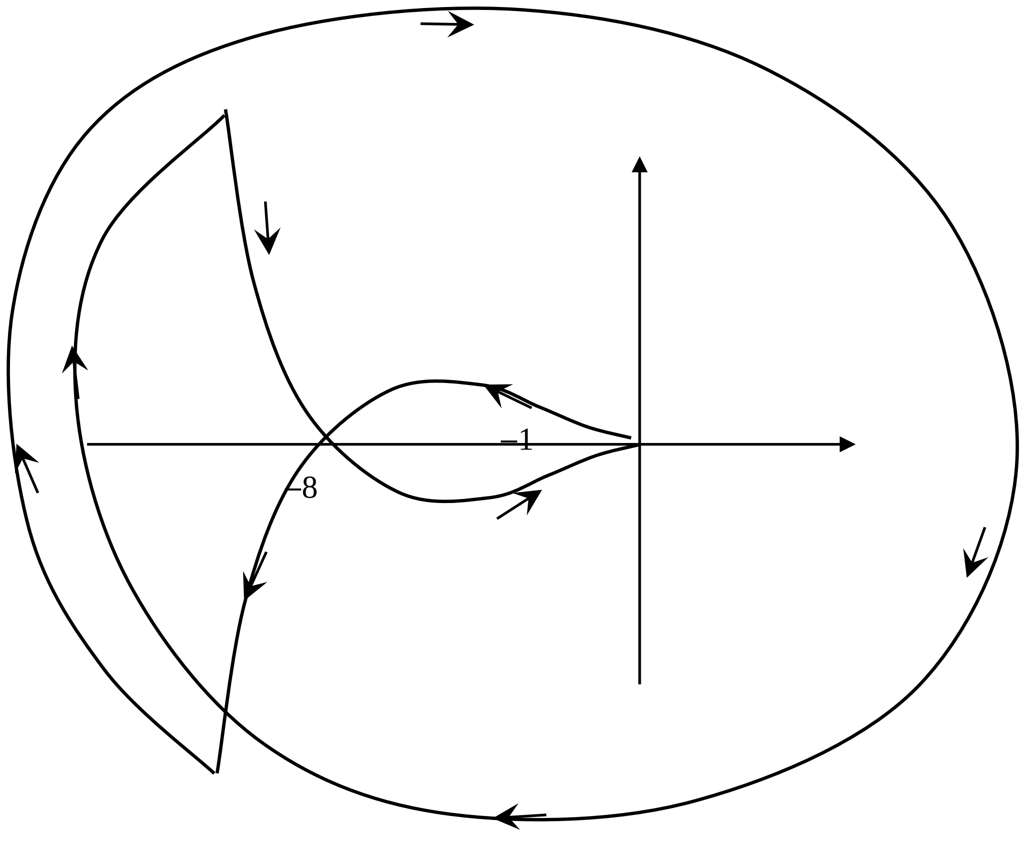
$$\left|L\left(j\omega_{p}\right)\right| = 8$$

$$L\left(j\omega_{p}\right) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=-1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s=-2$ con molteplicità 2

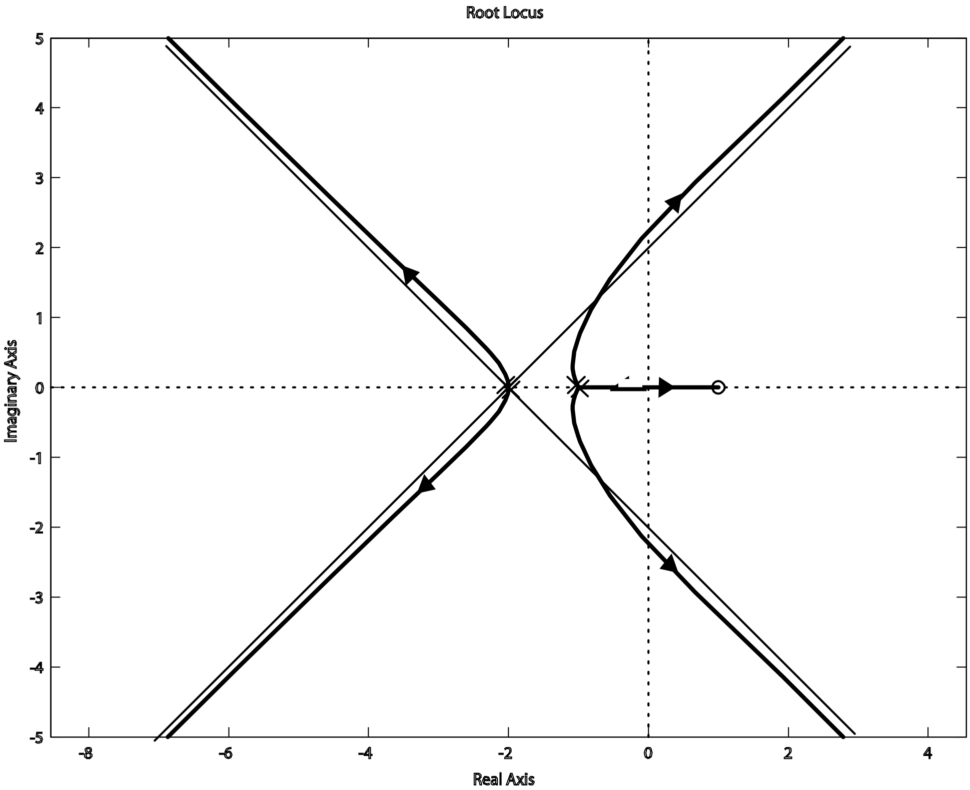
Essendo $n-m=4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1) = -2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi$; $\theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$
  cioè
  $4s^2 - 10 = 0$
  e risultano essere
  $s_1 = -\sqrt{5/2}$; $s_2 = \sqrt{5/2}$
  si nota subito che esse non appartengono al luogo delle radici.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



7.

L'ordine minimo per il controllore $C(s)$ è 2.

1. Disturbo sinusoidale $d(t) = A\ \sin(\omega\, t + 4) = 3\ \sin(2\, t + 4)$; per la reiezione asintotica al disturbo pongo un polo complesso coniugato alla pulsazione $\omega = 2$. Il controllore di ordine minimo sarà della forma:

$$C(s) = \frac{b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2 + 4)}$$

3. Costante di posizione $K_p = 4$:

$$L(s) = C(s)\, P(s)$$

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \Rightarrow K_p = \frac{b_0}{2} = 4 \Rightarrow b_0 = 8$$

2. Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$.
Polinomio caratteristico:

$$p_c(s) = (s^2+4)(s+2)+4\, b_2\, s^2+4\, b_1\, s+32 = 0 \Rightarrow p_c(s) = s^3+(4\, b_2+2)s^2+(4\, b_1+4)s+40 = 0$$

Polinomio desiderato:

$$p_d(s) = [(s+2)^2 + 1]\,(s+\alpha) = s^3 + (\alpha + 4)\, s^2 + (4\,\alpha + 5)\, s + 5\,\alpha$$

Si impone $p_c(s) = p_d(s)$ e si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha + 4 = 4\, b_2 + 2 \\ 4\,\alpha + 5 = 4\, b_1 + 4 \\ 5\,\alpha = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8.25 \\ b_2 = 2.5 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Verifico: $-\alpha = -8 << -2 \Rightarrow$ i poli $-2 \pm j$ sono dominanti

4. Errore a regime nullo: $\{$guadagno statico fra r ed $y\} = 1$
Calcolo F:

$$F\, \frac{L(0)}{1 + L(0)} = 1 \Rightarrow F\, \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow F = \frac{5}{4} = 1.25$$

8.

$$\boxed{X(z) = \frac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2}} = c_0 + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z-2)^2} + \frac{c_{22}}{z-2}$$

$$c_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z) = 2$$

$$c_1 = \left.\frac{2z^3 + z + 1}{(z-2)^2}\right|_{z=1} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{2z^3 + z + 1}{z-1}\right|_{z=2} = 19$$

$$c_{22} = D\left[\frac{2z^3 + z + 1}{z-1}\right]_{z=2} = \left.\frac{(6z^2+1)(z-1) - (2z^3+z+1)}{(z-1)^2}\right|_{z=2} =$$

$$= 25 - (16 + 2 + 1) = 25 - 19 = 6$$

$$\boxed{x(k) = 2\,\delta(k) + 4 \cdot 1(k-1) + 19\,(k-1)\,2^{k-2} \cdot 1(k-1) + 6 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1)}$$