Traccia delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - k X_1 - b s X_1 + k(X_2 - X_1) + b s (X_2 - X_1) \\ m s^2 X_2 = -k(X_2 - X_1) - b s (X_2 - X_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - k X_1 - b s X_1 + k X_2 - k X_1 + b s X_2 - b s X_1 \\ m s^2 X_2 = -k X_2 - b s X_2 + k X_1 + b s X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - 2k X_1 - 2b s X_1 + k X_2 + b s X_2 \\ m s^2 X_2 = -k X_2 - b s X_2 + (k + b s) X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m s^2 + 2bs + 2k) X_1 = F + (k + bs) X_2 \\ (m s^2 + bs + k) X_2 = (k + bs) X_1 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{F + (k + bs) X_2}{m s^2 + 2bs + 2k}$$

$$(m s^2 + bs + k) X_2 = (k + bs) \frac{F + (k + bs) X_2}{m s^2 + 2bs + 2k}$$

$$(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) X_2 =$$
$$= (k + bs) F + (k + bs)^2 X_2$$

$$\left[(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) - (k + bs)^2 \right] X_2 =$$
$$= (k + bs) F$$

$$\frac{X_2}{F} = \frac{bs + k}{(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) - (k + bs)^2}$$

$$m^2 s^4 + \underbrace{2bms^3} + 2km s^2 + \underbrace{bms^3} + 2b^2 s^2 + 2kbs +$$

$$+ km s^2 + \cancel{2bks} + 2k^2$$

$$- k^2 - b^2 s^2 - \cancel{2bks} =$$

$$= m^2 s^4 + 3bm s^3 + (3km + b^2) s^2 + 2kbs + k^2$$

$$T_{f x_2} = \frac{bs + k}{m^2 s^4 + 3bm s^3 + (3km + b^2) s^2 + 2kbs + k^2}$$

Eq. differenziale $\quad y \equiv x_2 \quad u \equiv f$

$$\boxed{\begin{aligned} m^2 D^4 y + 3bm D^3 y + (3km + b^2) D^2 y + 2kb Dy + k^2 y &= \\ = b Du + k u & \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & m^2 & 3km + b^2 & k^2 \\
3 & 3bm & 2kb & 0 \\
2 & \underbrace{-2kbm^2 + 9kbm^2 + 3b^3 m}_{3b^3 m + 7kbm^2} & 3bk^2 m & 0 \\
1 & \# & 0 & 0 \\
0 & 3bk^2 m & &
\end{array}$$

$$\# = 6b^4 km + 14k^2 b^2 m^2 - 9b^2 k^2 m^2 =$$

$$= 5k^2 b^2 m^2 + 6b^4 km$$

Tutti gli elementi della prima colonna sono monomi o polinomi evidentemente positivi $\forall\, m, k, b > 0$. Quindi per il Criterio di Routh Σ è asint. stabile $\forall\, m, k, b > 0$.

3.

$$Y(s)=\frac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}.$$

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^3}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2}+\frac{E}{s+1}$$

$$A=\left.\frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{4}$$

$$B=\left.\frac{s-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=-2$$

$$E=\left.\frac{s-2}{s(s+2)^3}\right|_{s=-1}=3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A+D+E=0\Rightarrow D=-\frac{11}{4}$$

$$C=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)}\right]\right|_{s=-2}=-\frac{5}{2}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t)=A+B\frac{1}{2}t^2e^{-2t}+Cte^{-2t}+De^{-2t}+Ee^{-t}\quad \text{per } t\geq 0$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}-t^2e^{-2t}-\frac{5}{2}te^{-2t}-\frac{11}{4}e^{-2t}+3e^{-t}\quad \text{per } t\geq 0$$

Il segnale in ingresso è discontinuo e $\rho=3\geq 1$, quindi $y(t)\in \overline{C^{\rho-1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 2.

4

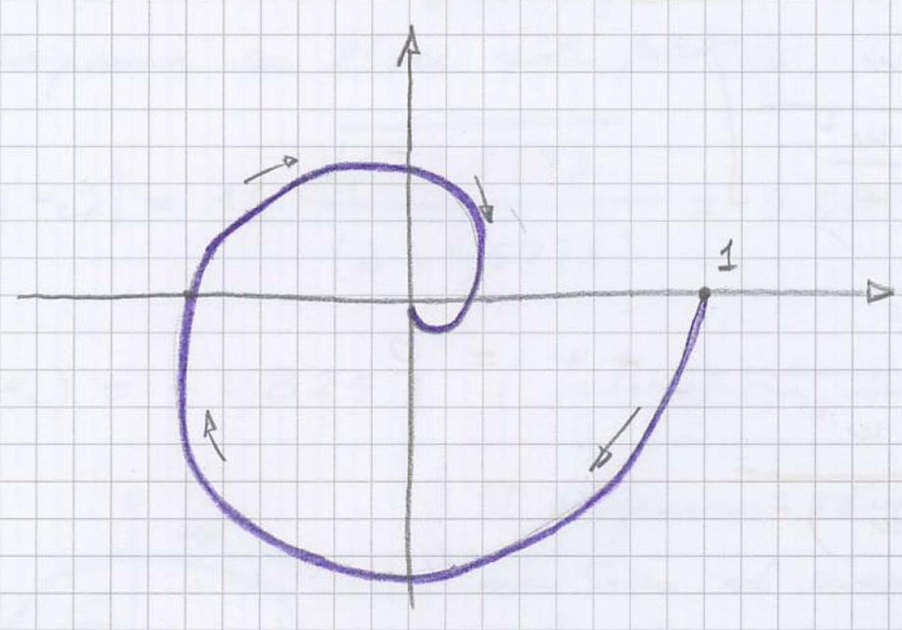
Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

a) $L(j\omega) = 16 \dfrac{1 - j\omega}{(j\omega + 2)^4}$; $L(j0) = 1$

$$|L(j\omega)| = 16 \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\arg L(j\omega) = -4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg} \omega$$



$$\lim_{\omega \to +\infty} L(j\omega) = -5 \frac{\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega) = -\pi$$

$$+4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} + \mathrm{arctg}\,\omega = +\pi$$

$$\mathrm{tg}\left(4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right) + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right)}{1-\left[\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]}{1-\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}}{1-\dfrac{16\omega^2}{(4-\omega^2)^2}} + \omega = 0$$

$$\frac{\dfrac{8\omega}{\cancel{4-\omega^2}}}{\dfrac{(4-\omega^2)^2-16\omega^2}{(4-\omega^2)^{\cancel{2}}}} + \omega = 0$$

$$\frac{8w(4-w^2)}{(4-w^2)^2-16w^2}+w=0$$

Si scarta la soluzione $w=0$

$$8(4-w^2)+(4-w^2)^2-16w^2=0$$

$$x \triangleq w^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

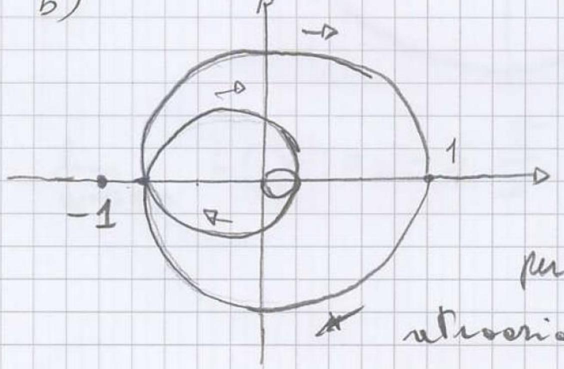
$$x_{1,2}=\begin{cases}30{,}4222\\1{,}5778\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} w_1=5{,}5156 \text{ rad/sec}\\ w_2=1{,}2561 \text{ rad/sec}\end{array}$$

Si scarta la soluzione w_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(jw_2)|=16\frac{\sqrt{1+1{,}5778}}{(4+1{,}5778)}=0{,}8257$$

$$L(jw_2)=-0{,}8257 \quad (\text{intersezione cercata})$$

b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è asin. stabile.

$$M_A=\frac{1}{0{,}8257}\simeq 1{,}21$$

6.

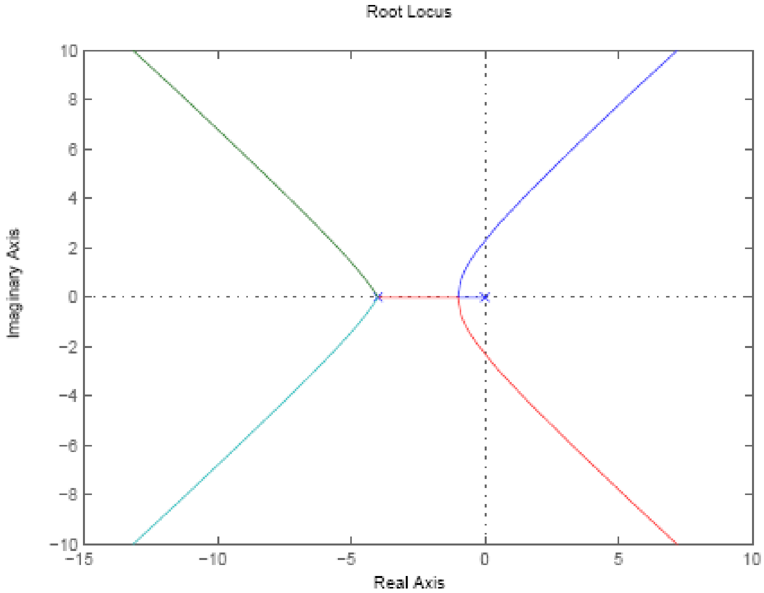
a) Intersezione degli asintoti:

$$\nabla_a = \frac{-4 \cdot 3 + 0}{4} = -3$$

Angoli deli asintoti: $+45°, \ -45°, \ +135°, -135°$
Angolo di partenza dal polo in 0: $+180°$
Angolo di partenza dal polo triplo in -4: $0°, \ +120°, \ -120°$
Radici doppie:

$$\frac{3}{s+4} + \frac{1}{s} = 0 \ \Rightarrow \ 4\,s + 4 = 0 \ \Rightarrow \ s = -1$$

Luogo delle radici:



b) Equazione caratteristica:

$$1 + K\,\frac{1}{s\,(s+4)^3} = 0 \ \Rightarrow \ s^4 + 12\,s^3 + 48\,s^2 + 64\,s + K = 0$$

Criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 48 & K & 0 \\
\mathbf{3} & 3 & 16 & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & 128 & 3\,K & 0 & \\
\mathbf{1} & 128 \cdot 16 - 9\,K & 0 & & \\
\mathbf{0} & 3\,K & 0 & &
\end{array}$$

Condizione per la stabilità asintotica:

$$\begin{cases} 2048 - 9\,K > 0 \\ 3\,K > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ K \in (0, 227.\bar{5})$$

Calcolo delle intersezoni:

$$128\, s^2 + 3 \cdot 227.\bar{5} = 0 \;\Rightarrow\; s = \pm j\,\sqrt{\frac{16}{3}} \simeq \pm j\, 2.309$$

c) Grado di stabilità massimo nella radice doppia $s = -1$:

$$1 + K^*\, \frac{1}{s\,(s+4)^3}\bigg|_{s=-1} = 0 \;\Rightarrow\; K^* = 27$$

7.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\, s^4 + 102\, s^3 + 287\, s^2 + 392\, s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

8.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z) = \frac{1}{z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$ ok!

2) $(-1)^3\, a(-1) > 0$

$$(-1)\left(-1 + \cancel{0.5} - \cancel{0.5} + 0.5\right) > 0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0| < a_n$

$$|0.5| < 1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	−0.75	*	−0.25	

$$|-0.75| > |-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.