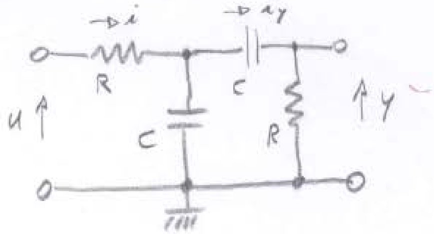
Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.



$$Y = R\, I_y$$

$$I_y = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + R} = I \cdot \frac{1}{2 + RCs}$$

$$I = \frac{U}{R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(\frac{1}{sC} + R\right)}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + R}} = \frac{U}{R + \frac{R + \frac{1}{sC}}{2 + RCs}}$$

$$Y = R\, \frac{U}{R + \frac{R + \frac{1}{sC}}{2 + RCs}} \cdot \frac{1}{2 + RCs} = \frac{U}{1 + \frac{1 + \frac{1}{sCR}}{2 + RCs}} \cdot \frac{1}{2 + RCs}$$

$$G(s) = \frac{1}{2 + RCs + 1 + \frac{1}{RCs}} = \boxed{\frac{RCs}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}} \quad \text{f.d.t.}$$

eq. diff. $\quad (RC)^2 D^2 y(t) + 3RC\, D y(t) + y(t) = RC\, D u(t)$

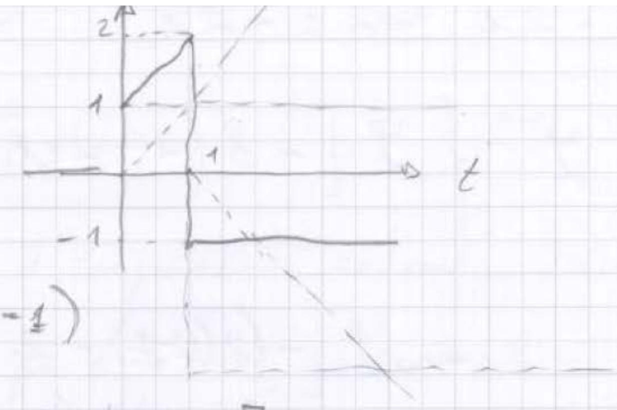
zeri: $\quad z_1 = 0 \qquad$ poli: $\quad p_{1,2} = \dfrac{-3RC \pm \sqrt{9(RC)^2 - 4(RC)^2}}{2(RC)^2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2RC}$

modi: $\left\{ \exp\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2RC}\right),\ \exp\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2RC}\right) \right\}$

guadagno statico: $\quad G(0) = 0.$

3.

(5) $$G(s) = \frac{2}{s+1}$$



$$u(t) = (1+t)\cdot 1(t) + \left(-3-(t-1)\right) 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\mathcal{L}\left[-3-t\right] =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\left\{-\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}\right\}$$

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2} - e^{-s}\left\{\frac{3s+1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{s+1}{s^2} - e^{-s}\frac{3s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s+1}\left\{\frac{s+1}{s^2} - \frac{3s+1}{s^2}e^{-s}\right\}$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{6s+2}{s^2(s+1)}e^{-s}$$

$$y(t) = 2t - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+2}{s^2(s+1)}e^{-s}\right\}$$

$$\frac{6s+2}{s^2(s+1)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+1}$$

$$K_{11} = 2 \quad K_2 = \left.\frac{6s+2}{s^2}\right|_{s=-1} = \frac{-6+2}{1} = -4$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \quad K_{12} = 4$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s+2}{s^2(s+1)}\right] = \left(2t + 4 - 4e^{-t}\right)1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+2}{s^2(s+1)}e^{-s}\right\} = \left(2t+4-4e^{-t}\right)\Big|_{t \leftarrow t-1} \cdot 1(t-1)$$

$$= \left(2(t-1) + 4 - 4e^{-(t-1)}\right) \cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1]$ $y(t) = 2t$

Se $t > 1$ $y(t) = \cancel{2t} - \cancel{2t} + 2 - 4 + 4e^{-(t-1)} =$

$$= -2 + 4e^{-(t-1)}$$

$$y(t) = 2t - \left[2(t-1) + 4 - 4e^{-(t-1)}\right] \cdot 1(t-1)$$

metodo alternativo

per $t \in [0, 1)$ $u(t) = 1 + t \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2} = \frac{2}{s^2}$$

$$y(t) = 2t \quad \text{se} \quad t \in [0, 1)$$

Consideriamo ora $t > 1$: l'ingresso è costante, $u(t) = -1$, e quindi l'uscita $y(t)$, per $t \to +\infty$, avrà il valore $\{\text{guadagno statico}\} \cdot (-1) = G(0) \cdot (-1) =$

$$y_\infty = 2 \cdot (-1) = -2$$

Quindi $y(t)$ per $t > 1$ sarà così strutturata

$$y(t) = y_\infty + \text{evoluzione libera}$$

$y(t) = -2 + c\,e^{-t}$, dove c è una costante da determinarsi

Utilizziamo la proprietà: Se $u(t)$ è funzione discontinua allora la corrispondente $y(t) \in C^{\rho-1}(\mathbb{R})$ dove ρ è il grado relativo di $G(s)$. Quindi, essendo $\rho = 1$, segue $y(t) \in C^0(\mathbb{R})$:

$$y(1-) = y(1+) \iff 2 = -2 + c\,e^{-1}$$

$$c\,e^{-1} = 4 \qquad c = 4 \cdot e$$

$$y(t) = -2 + 4 \cdot e \cdot e^{-t} = -2 + 4\,e^{-(t-1)} \quad \text{per } t > 1$$

4.
Vedi dispense del corso.

5.

a) $L(j\omega) = 10 \, \dfrac{j\omega + 1}{(j\omega)^3 (j\omega + 2)}$, $\arg L(j\omega) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{2}$

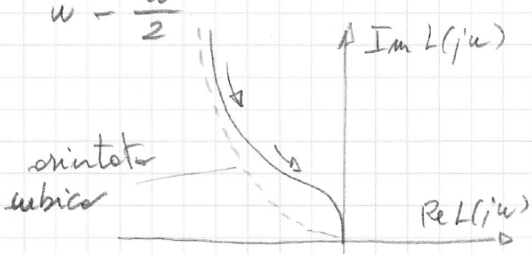
$\omega \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to 0$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \dfrac{\pi}{2} + \omega - \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\omega}{2} > \dfrac{\pi}{2}$;
quindi l'emergenza del d.p. avviene nel II quadrante.

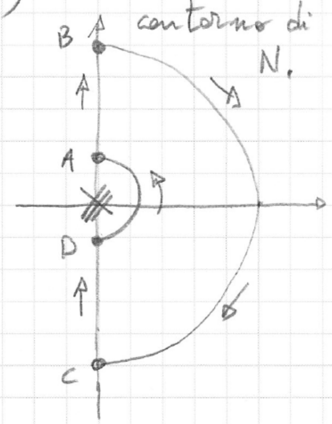
$\arg L(j\omega) = \pi \qquad \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ per $\omega > 0$

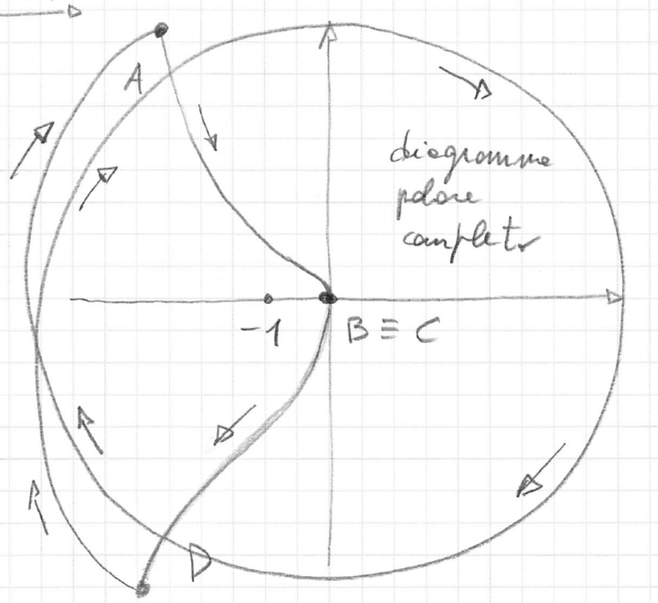
$\dfrac{1 + \omega \cdot \frac{\omega}{2}}{\omega - \frac{\omega}{2}} = 0 \qquad 1 + \dfrac{\omega^2}{2} = 0$ nessuna soluzione



Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo del diagramma polare

b)

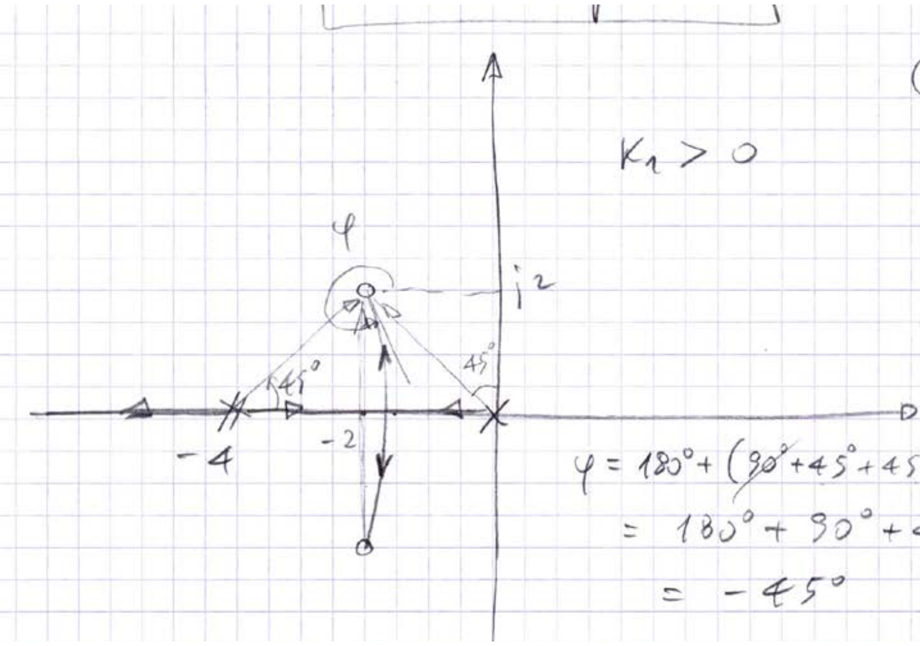




L(s) non ha poli a parte reale negativa. Per il criterio di N. la stabilità sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca −1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte −1. Quindi il sistema retroazionato è <u>instabile</u>.

6.

a.



$K_1 > 0$

$(s+2)^2 = -4$

$s+2 = \pm j\sqrt{4} = \pm j2$

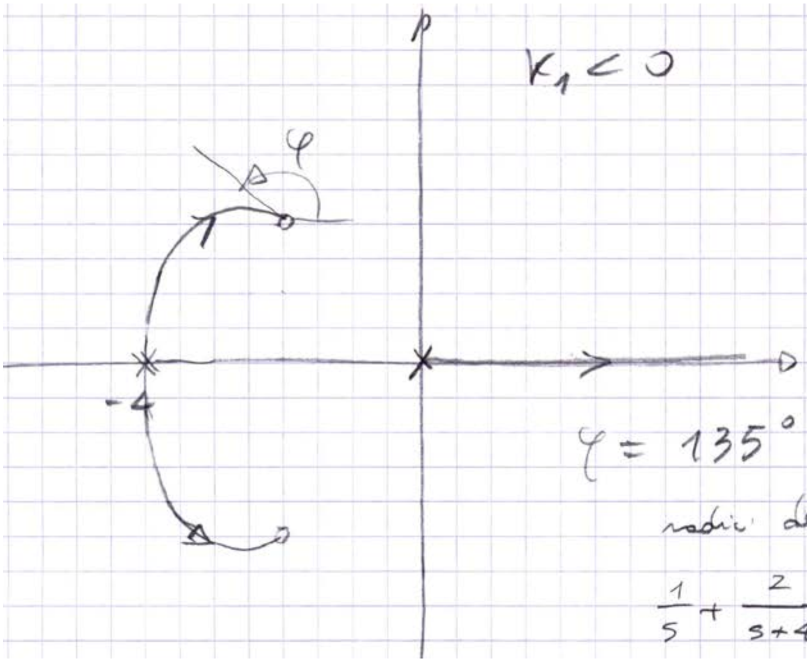
$s = -2 \pm j2$

Asintoto: $\vartheta_a = +\pi$

$\varphi = 180° + (\cancel{90°} + 45° + 45° + 45°) - \cancel{90°}$

$= 180° + 90° + 45° = 270° + 45°$

$= -45°$



$K_1 < 0$

Asintoto: $\vartheta_a = 0°$

$\varphi = 135°$

radici doppie:

$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2-j2} - \frac{1}{s+2+j2} = 0$

radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+2-j2}-\frac{1}{s+2+j2}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\left(\frac{s+2\cancel{+j2}+s+2\cancel{-j2}}{(s+2)^2+4}\right)=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}=0$$

$$(s+4)\left(s^2+4s+8\right)+2s\left(s^2+4s+8\right)-2\left(s^2+2s\right)(s+4)=0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right)-2\left(s^3+2s^2+4s^2+8s\right)=0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right)-2\left(s^3+6s^2+8s\right)=0$$

$$3s^3+\cancel{12s^2}+24s+4s^2+\cancel{16s}+32$$

$$-2s^3-\cancel{12s^2}-\cancel{16s}=0$$

$$s^3+4s^2+24s+32=0$$

$f(s) = s^3 + 4s^2 + 24s + 32$

s	$f(s)$
-2	-8
$-2,2$	-12
$-1,8$	$-4,072$
$-1,6$	$-0,2560$
$-1,5$	$1,625$
$-1,58$	$0,12$
$-1,59$	-0.0673

radice doppia $\simeq -1,59$

b) Dal luogo delle radici si deduce che la stabilità asintotica del sistema ret. è data dalla condizione

$$K_1 > 0$$

Verifica con il criterio di Routh.

$$s(s^2+8s+16) + K_1(s^2+4s+8) = 0$$
$$s^3 + 8s^2 + 16s + K_1 s^2 + 4K_1 s + 8K_1 = 0$$
$$s^3 + (8+K_1)s^2 + (16+4K_1)s + 8K_1 = 0$$

3	1	$16+4K_1$
2	$8+K_1$	$8K_1$
1	$(8+K_1)(16+4K_1)-8K_1$	
0	$8K_1$	

$8+K_1 > 0 \quad K_1 > -8$

$8K_1 > 0 \quad K_1 > 0$

$128 + 32K_1 + 16K_1 + 4K_1^2 - 8K_1 > 0$

$4K_1^2 + 40K_1 + 128 > 0$

radici $K_{1,2} = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400-512}}{4}$

$\Delta = -112 < 0 \Rightarrow$ è sempre > 0 $\forall K_1 \in \mathbb{R}$!

7.
Il controllore è del tipo

$$C(s)=\frac{y_2 s^2+y_1 s+y_0}{(s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s)=\frac{5\left(y_2 s^2+y_1 s+y_0\right)}{(s^2+9)(s+3)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{5y_0}{27}=5$ da cui $y_0=18$. Dalla specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$(s^2+9)(s+3)+5\left(y_2 s^2+y_1 s+27\right)=((s+3)^2+1)(s+c)$$

da cui otteniamo

$$c=16,2 \quad y_1=19,64 \quad y_2=3,84$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 16,2 corrisponde al polo $-16,2$ la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-3\pm j$.

Il controllore è quindi

$$C(s)=\frac{3,84s^2+19,64s+27}{s^2+9}.$$

8.

a) ordine n di Σ_d = $k+5-(k+1) = 4$

grado relativo ρ di Σ_d = $k+5-(k+3) = 2$

Sostituzione $k \leftarrow k-5$ (si ottiene l'eq. in forma standard)

$$y(k)-0.6\,y(k-1)-0.71\,y(k-2)+0.24\,y(k-3)+0.16\,y(k-4)=u(k-2)$$

$$H(z)=\frac{z^2}{z^4-0.6\,z^3-0.71\,z^2+0.24\,z+0.16} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

b) Si applica il criterio di Jury al pol. $a(z)$

1) $a(1) = 1-0.6-0.71+0.24+0.16 = 0.09 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) = a(-1) = 1+0.6-0.71-0.24+0.16 = 0.81 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_n$, $0.16 < 1$ ok!

1	0,16	0,24	−0,71	−0,6	1
2	1	−0,6	−0,71	0,24	0,16
3	−0.9744	0.6384	0.5964	−0.336	
4	−0,336	0.5964	0.6384	−0,9744	
5	0.83655936	*	−0.36662976		

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9744 > 0.336$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.83655936 > 0,3666297$ ok!

Tutte le radici di $a(z)$ hanno modulo minore di uno, quindi Σ_d è asintoticamente stabile.