

Domande Teoria FCA

Giuseppe Ricciardi

UNIPR, aprile 2022

1 Introduzione

Domande più frequenti nel corso degli anni per lo scritto di Fondamenti di controlli automatici dal 2013 al 2019, il numero di asterischi indica quante volte è stata fatta la stessa domanda nel corso degli anni.

1. **Presentare e dimostrare formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga in oltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di fase M_f *****

Le reti correttrici sono una tipologia di controllori a struttura fissa, vengono progettati per "correggere" il comportamento dinamico di anello di retroazione, per esempio: rete integratrice, rete derivatrice, rete ritardatrice e rete antipatrice.

DEF. $f : D \rightarrow f(D)$ è BIETTIVA (e quindi invertibile) e la sua funzione inversa $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ è definita da:

$$\alpha = \frac{M \cos(\varphi - 1)}{M(M - \cos(\varphi))}, \quad \tau\omega = \frac{M - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \quad (1)$$

dove $D := (0, 1) \times (0, \infty)$ ed M è il modulo della risposta armonica $\frac{1+j\tau\omega}{1+j\alpha\tau\omega}$ e φ la fase.

DIM. Per la dimostrazione bisogna prima introdurre il **lemma**: Siano M, φ, α, x valori reali con $M > 1$ e $\sin \varphi \neq 0$, allora le seguenti relazioni algebriche sono equivalenti:

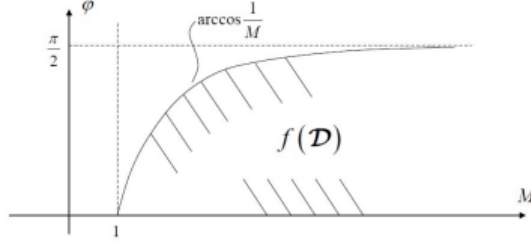
$$Me^{j\varphi} = \frac{1 + jx}{1 + j\alpha x} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases} \quad (3)$$

$f : D \rightarrow f(D)$ è SURIETTIVA per la definizione di *codominio*.

$f : D \rightarrow f(D)$ è INIETTIVA. Sia $(M, \varphi) \in f(D)$ quindi $M > 1$ e $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ed esistono $\alpha \in (0, 1), \tau\omega > 0$ tali che $Me^{j\varphi} = \frac{1+j\tau\omega}{1+j\alpha\tau\omega}$

Per il lemma precedente valgono $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$, $\tau \omega = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}$ e quindi questi valori sono gli unici per i quali $f(\alpha, \tau \omega) = (M, \varphi)$.



Metodo di sintesi della rete anticipatrice con margine di fase M_F :

- (a) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := M_f - \arg L(j\omega_0) - \pi$ valga $(\frac{1}{|L(j\omega_0)|}, \varphi_0) \in f(D)$, quindi $\cos(\varphi_0) > |L(j\omega_0)|$
- (b) Definiti $M = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

2. **Presentare e dimostrare formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga in oltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di ampiezza M_a ****

La prima parte della domanda è stata risposta nella domanda 1.

Metodo di sintesi della rete anticipatrice con margine di ampiezza M_a :

- (a) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$ valga $(\frac{1}{M_a |L(j\omega_0)|}, \varphi_0) \in f(D)$, quindi $\cos(\varphi_0) > M_a |L(j\omega_0)|$
- (b) Definiti $M = \frac{1}{M_a |L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

3. **Presentare e dimostrare formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga in oltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di fase M_f ***

La prima parte della domanda è stata risposta nella domanda 1.

Metodo di sintesi della rete ritardatrice con margine di fase M_f :

- (a) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_f$ valga $(|L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(D)$, quindi $\cos(\varphi_0) > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$
- (b) Definiti $M = |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

4. **Presentare e dimostrare formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga in oltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di ampiezza M_a**
 La prima parte della domanda è stata risposta nella domanda 1.

Metodo di sintesi della rete ritardatrice con margine di ampiezza M_a :

- (a) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi$
 valga $(M_a |L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(D)$, quindi $\cos(\varphi_0) > \frac{1}{M_a |L(j\omega_0)|}$
- (b) Definiti $M = M_a |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e
 $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$
5. **Presentare ed illustrare le formule di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione che determina la sequenza a tempo discreto $\mathbf{X(k)}$ sapendo che $X(k) = Z[x(k)]$ *******
 Sia $x(z)$ la trasformata zeta di una sequenza $x(k)$, allora:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz \quad (4)$$

dove γ è una curva chiusa semplice, percorsa in senso antiorario, che circonda le regione di convergenza di $Z[x(k)]$

DIM:

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i) z^{-i} \right) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \oint_{\gamma} z^{-i+k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} x(k) \cdot 2\pi j = x(k)$$

6. **Dato un generico segnale a tempo discreto $x(k)$, $K \in \mathbb{Z}$ determinare la trasformata dei segnali ritardati e anticipati di n passi ($n \in \mathbb{N}$) del tipo: $Z[k(k-n)]$ ****

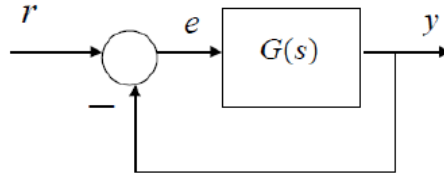
Segnale ritardato

Trasformata Zeta di un segnale ritardato	$\begin{cases} \mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n) z^{-k} \\ \mathcal{Z}[x(k-n)] l(k-n) = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] \end{cases}$
--	--

Segnale anticipato

Trasformata Zeta di un segnale anticipato	$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i) z^{n-i}$
---	---

7. Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello $L(s)$ si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento



Assunzioni: sistemi in retroazione unitaria, sistema retroazionato asintoticamente stabile.

$$r(t) \in \left\{ r_0 \mathbf{1}(t), r_0 t \mathbf{1}(t), r_0 \frac{t^2}{2} \mathbf{1}(t) \right\}$$

$$e(t) := r(t) - y(t) \quad E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

$$e_r := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad h := \text{tipo (di sistema) di } G(s)$$

Gradino:

$$r(t) = r_0 \mathbf{1}(t), \quad R(s) = \frac{r_0}{s}$$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s}$$

$$e_r = \frac{r_0}{1+K_p} \quad \text{dove } K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (\text{costante di posizione})$$

Rampa:

$$r(t) = r_0 t \mathbf{1}(t), \quad R(s) = \frac{r_0}{s^2}$$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s + sG(s)}$$

$$e_r = \frac{r_0}{K_v}$$

$$\text{dove } K_v := \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (\text{costante di velocità})$$

Parabola:

$$r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} \mathbf{1}(t), \quad R(s) = \frac{r_0}{s^3}$$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s^2 + s^2 G(s)}$$

$$e_r = \frac{r_0}{K_a} \quad \text{dove } K_a := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (\text{c. di accelerazione})$$

8. Fornire una definizione generale di margine di ampiezza M_a e margine di fase M_f per un sistema retro-azionato asintoticamente stabile, giustificare tali definizioni enunciando e dimostrando le pertinenti proprietà geometriche. Definire una procedura per il calcolo di M_f ed M_a nel caso di intersezioni multiple del diagramma polare con l'asse reale negativo e con la circonferenza unitaria

$$M_A := \sup \left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\} \quad (59)$$

$$M_F := \sup \left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\} \quad (60)$$

I margini di stabilità sono "norme" che misurano la distanza del punto critico $-1 + j0$ dal diagramma polare di $L(j\omega)$.

Proprietà

Sia $M > 1$. Vale la disequazione $|1 + (j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0$ se e solo se il segmento dell'asse reale compreso tra $-M$ e $-1/M$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

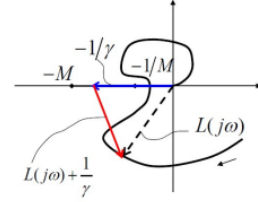
Dimostrazione:

$$\left\{ |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Divido dentro il modulo per γ che dovrà quindi essere diverso da 0

$$\left\{ \left| \frac{1}{\gamma} + L(j\omega) \right| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Si noti che $\frac{1}{M} \leq \gamma \leq M \Rightarrow -M \leq -\frac{1}{\gamma} \leq -\frac{1}{M}$ Quindi abbiamo i due punti sull'asse reale corrispondenti a M e al suo reciproco e vediamo che $-1/\gamma$, che è il vettore blu, deve essere compreso tra i due. Se la disuguaglianza è soddisfatta il vettore rosso non si annulla mai.



Proprietà:

Sia $\phi > 0$. Vale la disequazione $|1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0$ se e solo se l'arco di circonferenza di equazione $e^{j(\pi+\varphi)}$, $\varphi \in [-\phi, \phi]$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

Dimostrazione:

$$\left\{ |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

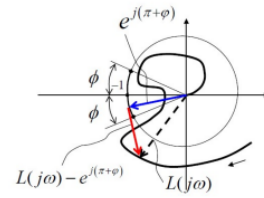
Moltiplico per l'esponenziale a sinistra perchè ha modulo 1 e quindi non altera, ruota e basta

$$\left\{ |(1 + e^{-j\varphi} L(j\omega))e^{j\varphi}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\left\{ |(L(j\omega) + e^{j\varphi})| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\left\{ |(L(j\omega) - e^{j(\pi+\varphi)})| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

L'elemento in modulo dovrebbe essere il vettore rosso. Il margine di fase si trova incrementando l'arco (aumentando ϕ) finchè non si incontra il diagramma polare. Un ragionamento analogo vale per quanto riguarda il margine di ampiezza.

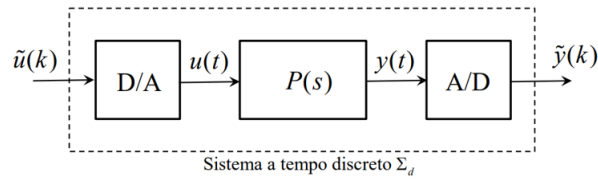


Le procedure per calcolare i due margini con l'intersezione dell'asse reale negativo e della circonferenza unitaria sono:

$$M_A = \min(M1, M2) \quad (5)$$

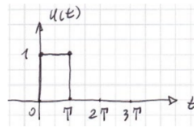
$$M_F = \min(\phi_1, \phi_2) \quad (6)$$

9. Presentare e dedurre le funzioni di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantentore D/A di ordine zero ed all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T ****



Il tempo di campionamento sia T ($\tilde{y}(k) = y(kT)$) e il convertitore D/A sia un mantentore (dispositivo di tenuta) di ordine zero. Si determini la funzione di trasferimento $P_d(z)$ di Σ_d .

Determiniamo $P_d(z)$ come trasformata zeta della risposta all'impulso applicato all'ingresso del mantentore di ordine zero: $\tilde{u}(k) = \delta(k)$.



$$\begin{aligned} u(t) &= 1(t) - 1(t-T) \\ \text{quindi } y(t) &= p_s(t) - p_s(t-T) \\ \text{con } p_s(t) &\text{ risposta di } P(s) \text{ al gradino unitario } 1(t) \\ \left(p_s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{y}(k) = p_s(kT) - p_s(kT - T) = p_s(kT) - p_s((k-1)T)$$

$$P_d(z) = \mathcal{Z}[\tilde{y}(k)]$$

$$= \mathcal{Z}[p_s(kT)] - \mathcal{Z}[p_s((k-1)T)] = \mathcal{Z}[p_s(kT)] - z^{-1} \mathcal{Z}[p_s(kT)]$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[p_s(kT)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$

10. Definire la stabilità asintotica interna per un sistema di controllo in retro-azione. Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente che garantisca questa particolare stabilità, fornire inoltre un esempio di sistema retro-azionato asintoticamente stabile come sistema orientato dal segnale di controllo all'uscita controllata ma non stabile internamente. ***

Def. (Stabilità asintotica interna)

Il sistema retroazionato di figura è **asintoticamente ed internamente stabile** quando tutte le f.d.t. fra gli ingressi $\{r, d_1, d_2\}$ e le uscite $\{e, m, y\}$ sono asintoticamente stabili.

Proprietà

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente ed internamente se e solo se:

1. le radici dell'eq. $1 + L(s) = 0$ sono tutte a parte reale negativa;
2. le eventuali cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$ avvengono in \mathbb{C}_- .

Dim.

$$\begin{bmatrix} E \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} & \frac{C}{1+CP} \\ \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad C(s) = \frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)}, \quad P(s) = \frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}$$

$$\frac{1}{1+CP} = \frac{1}{1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{x(s)a(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)}, \quad \frac{CP}{1+CP} = \frac{y(s)b(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)},$$

$$\frac{P}{1+CP} = \frac{\frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{x(s)a(s)}} = \frac{b(s)(s-\alpha)x(s)}{(s-\beta)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}, \quad (\text{cont.})$$

Dim. (cont.)

$$\frac{C}{1+CP} = \frac{\frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{x(s)a(s)}} = \frac{y(s)(s-\beta)a(s)}{(s-\alpha)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}$$

$$1 + L(s) = 0 \Leftrightarrow x(s)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

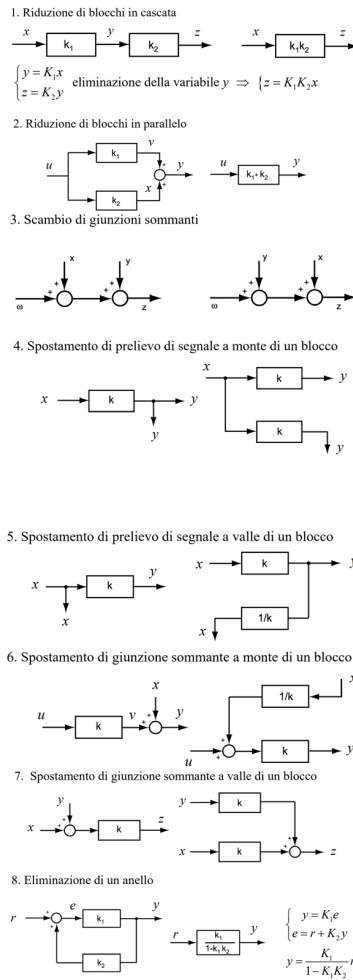
necessità:

$$\left\{ \frac{1}{1+CP}, \frac{CP}{1+CP}, \frac{P}{1+CP}, \frac{C}{1+CP} \text{ asint. stabili} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. 1 + L(s) = 0 \text{ ha radici } s \text{ con } \operatorname{Re}(s) < 0 \\ 2. \text{ le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\}$$

sufficienza:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. 1 + L(s) = 0 \text{ ha radici } s \text{ con } \operatorname{Re}(s) < 0 \\ 2. \text{ le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{1+CP}, \frac{CP}{1+CP}, \frac{P}{1+CP}, \frac{C}{1+CP} \text{ asint. stabili} \right\}$$

11. Riportare e commentare le regole di riduzione per gli schemi a blocchi. Spiegare il significato della riduzione alla forma minima ed esporre un esempio.



12. Sia $X(z)$ la trasformata zeta di un segnale a tempo discreto x . Presentare e dimostrare la relazione tra $\frac{dX}{dz}$ ed $X(z)$. Calcolare, riportando i passaggi algebrici necessari, la trasformata zeta della funzione armonica $\sin(\omega k)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Suggerimento: $\mathbb{Z}[a^*] = \frac{z}{z-a}$

Per quanto riguarda la seconda parte della domanda: ***inserire calcoli qui.***

Sia $x(k)$ un segnale discreto e $X(z)$ la corrispondente trasformata zeta. Nella regione in cui $X(z)$ è analitica vale

$$-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k \cdot x(k)]$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} X(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \frac{d}{dz} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot (-k) z^{-k-1} = \\ &= - \sum_{k=0}^{+\infty} k x(k) z^{-k} z^{-1} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k x(k) z^{-k} = -z^{-1} \mathcal{Z}[k x(k)] \end{aligned}$$

13. **Enunciare e dimostrare il teorema di analisi armonica per un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale.** **

Sia \sum un sistema asintoticamente stabile con f.d.t $G(s)$ razionale. La risposta forzata di P ad un segnale armonico all'ingresso è ancora, a regime ($t \rightarrow +\infty$), un segnale armonico con la stessa frequenza dell'ingresso. La funzione di risposta armonica associata soddisfa la relazione:

$$F(\omega) = G(j\omega) \quad (7)$$

$$\text{Dim.: } Y(s) = G(s) \mathcal{L}[U \sin(\omega t)] = G(s) \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{U\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

dallo sviluppo in fratti semplici ...

$$Y(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} + \frac{k}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}}{s + j\omega} \quad \text{con } \operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{quindi } y(t) = y_i(t) + y_\infty(t), \quad \text{con } \lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0$$

$$y_i(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_1}{s - p_1} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} \right] \quad y_\infty(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}}{s + j\omega} \right]$$

$$k = G(s) \frac{U\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{U}{2j}$$

$$y_\infty(t) = 2 |G(j\omega)| \frac{U}{2} \cos \left(\omega t + \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2} \right) = U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

$$\Rightarrow F(\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = G(j\omega) \quad \square$$

14. Siano $x(k)$ e $y(k)$ due segnali a tempo discreto per i quali $y(k) = 0$ e $x(k) = 0$ per $k < 0$, si dimostri che la trasformata zeta della loro convoluzione eguaglia il prodotto delle loro trasformate.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \\
 \mathcal{Z}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)x_2(n-l)\right\} &= \\
 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)x_2(n-l)\right]z^{-n} &= \\
 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-l)z^{-n} &= \\
 = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)z^{-l}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n}\right] &= \\
 = X_1(z)X_2(z) &
 \end{aligned}$$

Figure 1: fonte: Wikipedia

15. **Presentare il modello di Tustin per la discretizzazione dei controllori a tempo continuo. Includere una discussione sulla stabilità del controllore a tempo discreto con casi determinati.** **
 Il modello di Tustin è un metodo di sintesi indiretto per i controllori discreti: si parte da una sintesi del controllore a tempo continuo $C(s)$ e poi si fa una successiva discretizzazione per ottenere $C_d(z)$.

Partiamo ancora una volta dalla trasformata di Laplace della derivata

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$$

In questo caso, diversamente dai metodi appena visti, esprimiamo la derivata come

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv = x((k+1)T) - x(kT)$$

Ma la stessa area è approssimabile attraverso il metodo del trapezio

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv \cong T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2}$$

Unendo i due risultati precedenti

$$T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2} \cong x((k+1)T) - x(kT)$$

Applichiamo la trasformata zeta ad entrambi i membri

$$T \frac{z\mathcal{Z}[Dx(kT)] + \mathcal{Z}[Dx(kT)]}{2} \cong z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)] \Rightarrow T \frac{z+1}{2} \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong (z-1)\mathcal{Z}[x(kT)]$$

Ovvero

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

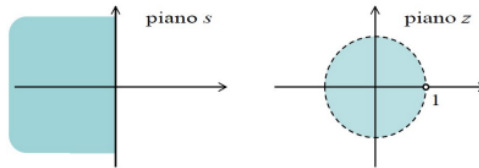
Per quanto riguarda la stabilità del controllore:

3. Metodo di Tustin

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{sia } z = \sigma + j\omega$$

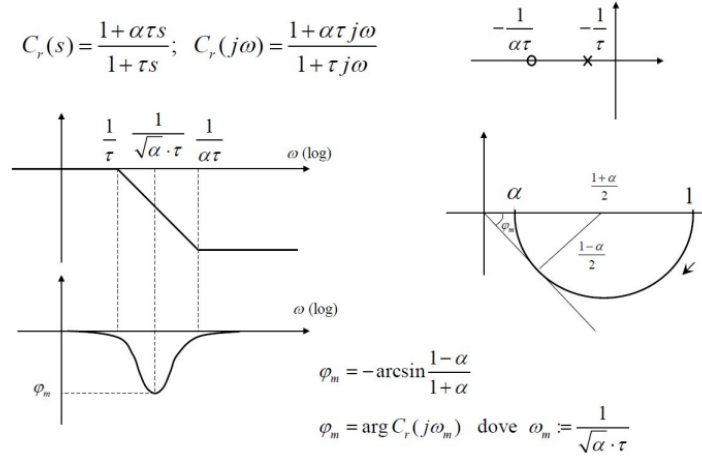
$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{[(\sigma-1) + j\omega][(\sigma+1) - j\omega]}{[(\sigma+1) + j\omega][(\sigma+1) - j\omega]} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j\omega(\sigma+1) - j\omega(\sigma-1)}{(\sigma+1)^2 + \omega^2}$$

$$\Re[s] < 0 \iff \sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 \iff \sigma^2 + \omega^2 < 1$$



La stabilità asintotica di $C(s)$ è equivalente alla stabilità asintotica di $C_d(z)$.

16. Tracciare i diagrammi di Bode ed il diagramma polare di una rete ritardatrice determinando in particolare il ritardo massimo di fase e la corrispondente pulsazione.



17. Sia $\sum d$ un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi tra loro. Presentare una condizione necessaria e sufficiente che assicuri la stabilità di $\sum d$ ****

Il sistema $\sum d$ si dice *asintoticamente stabile* se: è stabile ed inoltre $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{lib}(k) = 0$ per ogni perturbazione indotta. Un sistema è *asintoticamente stabile* se e solo se tutti i suoi poli appartengono all'interno del cerchio unitario.

Dimostrazione del punto 2 del teorema

\sum_d è asintoticamente stabile se e solo se $|p_i| < 1, i = 1, \dots, l$.

Sufficienza ($|p_i| < 1 \Rightarrow \sum_d$ è asintoticamente stabile)

$$a(z) = (z - p_1)^{r_1} \dots (z - p_l)^{r_l}, p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j$$

La risposta libera di \sum_d a seguito di perturbazioni è caratterizzata da

$$Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, c(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z$$

$$Y_{lib}(z) = z \cdot \frac{c_n z^{n-1} + \dots + c_1}{(z - p_1)^{r_1} \dots (z - p_l)^{r_l}} = d_{1,1} \frac{z}{(z - p_1)^{r_1}} + \dots + d_{1,r_1} \frac{z}{z - p_1} + \dots + d_{l,1} \frac{z}{(z - p_l)^{r_l}} + \dots + d_{l,r_l} \frac{z}{z - p_l}$$

Antitrasformando:

$$y_{lib}(k) = d_{1,1} \binom{k}{r_1 - 1} p_1^{k - (r_1 - 1)} + d_{1,2} \binom{k}{r_1 - 2} p_1^{k - (r_1 - 2)} + \dots + d_{1,r_1} p_1^k + \dots +$$

$$+d_{l,1} \binom{k}{r_l-1} p_l^{k-(r_l-1)} + d_{l,2} \binom{k}{r_l-2} p_l^{k-(r_l-2)} + \dots + d_{l,r_l} p_l^k$$

In cui

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} \quad (\text{polinomio in } k \text{ di grado } r)$$

Tutti gli addendi di $y_{lib}(k)$ convergono a 0 per $k \rightarrow \infty$ in quanto se $|p| < 1$ allora $\lim_{k \rightarrow \infty} k^n p^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Necessità (\sum_d è asintoticamente stabile $\Rightarrow |p_i| < 1$)

Si ragiona per assurdo. Esiste $j \in \{1, \dots, l\}$ tale che $|p_j| \geq 1$. Costruiamo una particolare perturbazione per la quale

$$Y_{lib}(z) = \frac{z}{z - p_j}$$

$$Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)} = \frac{c_n z^n + \dots + c_1 z}{\prod_{i=1}^l (z - p_i)^{r_i}} = \frac{(c_n z^{n-1} + \dots + c_1) \cdot z}{\left(\prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1} (z - p_j)}$$

$$\text{Sia } c_n z^{n-1} + \dots + c_1 = \left(\prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1}$$

Considerato che $a_0 \neq 0$ o $b_0 \neq 0$ esistono sempre condizioni iniziali (ovvero la perturbazione) per le quali si ottengono i coefficienti c_i desiderati:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & b_1 & b_0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_1 & a_0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

Quindi $y_{lib}(k) = p_j^k$ ed evidentemente questa risposta libera non converge a zero per $k \rightarrow \infty$. Questo contraddice l'ipotesi di $y_{lib}(k)$ convergente asintoticamente a zero per ogni perturbazione (\sum_d asintoticamente stabile).

18. Enunciare il criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare), avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

Criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico -1 ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di guadagno di anello con parte reale positiva.

Corollario

Nell'ipotesi che il guadagno di anello non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi nè circonda il punto critico -1 .

Nota: il corollario non è da associarsi ai sistemi stabili ad anello aperto.

Dimostrazione del criterio di Nyquist

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se

1. il diagramma polare completo di $L(s)$ non tocca -1 (equivalente a "il diagramma polare di $L(s)$ non tocca -1 ")
2. $-\psi = n_p$

Sufficienza: Valgono le condizioni 1 e 2. La prima condizione significa che $1 + L(s)$ non presenta zeri (puramente immaginari). Dal teorema dell'indice logaritmico si ottiene $\psi = n_z - n_p$ e dalla seconda condizione segue $n_z = 0$. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Necessità: Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Tutti gli zeri di $1 + L(s)$ sono a parte reale negativa. Quindi non sono presenti zeri (puramente) immaginari di $1 + L(s)$ (equivalente alla condizione 1) e $n_z = 0$. Applicando il teorema dell'indice logaritmico si ottiene $\psi = n_z - n_p$ da cui si deduce $\psi = -n_p$ e quindi $-\psi = n_p$ (condizione 2).

19. Enunciare il modello dell'equazione diafantea per la sintesi dei controllori nei sistemi di controllo in retroazione.

Dati i polinomi $a(s)$, $b(s)$ e $d(s)$, soluzione dell'equazione diofantea sono i polinomi $x(s)$ e $y(s)$ soddisfacenti:

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s) \quad (8)$$

L'equazione diofantea ammette soluzione se e solo se il massimo comune divisore di $a(s)$ e $b(s)$ è divisore di $d(s)$.

20. **Dimostrare le seguenti proprietà della trasformata di Laplace:**

$$L[Df(t)] = sF(s) - f(0_+)$$

$$L[\int_0^t f(x)dx] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Proprietà derivata

Dim.:

$$\int_{0-}^{+\infty} Df(t)e^{-st}dt = \int_{0+}^{+\infty} Df(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st} \right]_{0+}^{+\infty} - \int_{0+}^{+\infty} f(t)(-se^{-st})dt =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)e^{-st} + s \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - f(0+) + sF(s)$$

Se $\text{Re } s > \sigma_c$ (ascissa di convergenza di $f(t)$)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} = 0$$

□