Formulario probabilità di Giuseppe Ricciardi

martedì 1 dicembre 2020 20:03

## PROBABILITÁ ELEMENTARE

capitoli 1,2

- Frequenza relativa $F_n(\varepsilon) = \frac{n(\varepsilon)}{N}$   $n(\varepsilon)$ = numero di volte che si verifica un evento, $N$ = numero di prove

$P(\varepsilon^c) = 1 - P(\varepsilon)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Disposizione $D_{n,K} = \frac{n!}{(n-K)!}$   CON RIPETIZIONI $\Rightarrow n^K$

Permutazione $P = n!$

Combinazioni $C_{n,K} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!}$

Probabilità condizionata $P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)}$

Regola della catena (CHAIN RULE) $P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_n) = P(\varepsilon_1) \cdot P(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \cdot P(\varepsilon_3|\varepsilon_1\varepsilon_2) \ldots P(\varepsilon_n|\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1})$

Teorema probabilità totali $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) P(A_i) \Leftrightarrow$ l'insieme degli $A_i$ è una PARTIZIONE dello spazio campione

Formula di Bayes $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

## INDIPENDENZA E PROVE RIPETUTE

capitoli 3,4

Eventi indipendenti $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \cong P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ → condizione d'indipendenza

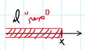
numero di successi su $n$, $S_n = \binom{n}{k} p^K (1-p)^{n-K}$ con $K$ successi   N.B per calcolare la probabilità che NON ci siano successi porre $K=0$

numero di prove fino al primo successo $P(T=i) = (1-p)^{i-1} p \cong$ distribuzione geometrica

## VARIABILI ALEATORIE

capitoli 5,6,7,8

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $CDF = F_X(x) \triangleq P\{X < x\} \; \forall x \in \mathbb{R}$




PROPRIETÀ CDF
$$\begin{cases} F_X(+\infty) = 1; \; F_X(-\infty) = 0 \\ P(x_1 \le X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ P\{X > \bar{x}\} = 1 - F_X(\bar{x}) \\ P\{X = x_0\} = F_X(x_0^+) - F_X(x_0^-) \end{cases}$$

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÁ $PDF = f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ (se spazio campione DISCRETO è rappresentato da un impulso di Dirac)

PROPRIETÀ PDF
$$\begin{cases} f_X(x) \ge 0 \\ \int f_X(u)\,du = 1 \\ P\{x_1 < X < x_2\} = \int_D f_X(x)\,dx \\ P\{x_0 < X \le x_0 + dx\} = f_X(x_0)\,dx \to \text{se } f_X(x) \text{ è continua} \end{cases}$$

PMF = punti in cui si concentra la massa di una probabilità DISCRETA

$f_{X_1 + X_2} = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x)$ SSE VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

## FUNZIONI DI V.A.: $Y = g(X)$ $S \to \mathbb{R}$

CDF di $Y(g(X)) \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \le y) = P\{g(X) < Y\}$ ← metodo grafico

PDF di $Y(g(X)) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} + \ldots + \frac{f_X(x_n(y))}{|g'(x_n(y))|}$ ← TEOREMA FONDAMENTALE (se $g_x$ ha TRATTI ORIZZONTALI $\Rightarrow f_Y(y)$ presenta $\delta$; se $\nexists$ sol. $y = g(x) \Rightarrow f_Y(y) = 0$)

VALOR MEDIO: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

$E[X] = \sum_{i=1}^{K} x_i p_i$ se $X$ V.A discreta

N.B Se $f_X(x)$ è PARI $\Rightarrow E[X] = 0$

VARIANZA $\sigma_X^2 \triangleq [(x - E[x])^2]$

deviazione standard $\sigma_X \triangleq \sqrt{VAR(X)}$

$P\{X \le x | M\} \triangleq F_X(x|M) = \frac{P\{X < x \cap M\}}{P(M)}$

PDF CONDIZIONATA $f_X(x|M) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x|M) = \frac{f(x) \cap P(M)}{P(M)}$

PROBABILITÀ TOTALE PER V.A.:
$$\left.\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} F_X(x|A_i) \cdot P(A_i) \\ E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} E[X|A_i] \cdot P(A_i) \\ E[g(X)] &= \sum_{i=1}^{\infty} E[g(X)|A_i] \cdot P(A_i) \end{aligned}\right\} A_i = \text{partizione di } S$$

FORMULA DI BAYES MISTA: $P(M|X=x) = \frac{f_X(x|M)}{f_X(x)}$.

## Definizioni varie

Uno spazio campione si dice UNIFORME se i suoi RISULTATI sono equiprobabili

Due eventi esclusivi sono fortemente dipendenti

Uno spazio campione con un numero di elementi infiniti non numerabili è detto continuo

Una variabile aleatoria è una funzione $X: S \to \mathbb{R}$   $S$ punto dello Spazio campione

Una VA si dice continua se $F_X(x)$ è continua $\forall \mathbb{R}$

discreta se $F_X(x)$ è costante a tratti (a gradini)

mista se $F_X(x)$ ha discontinuità ma NON È costante tratti

Teorema di Lebesgue: Una qualunque CDF può essere decomposta come $F_X(x) = C(x) + D(x)$ dove $C(x)$ è continua e $D(x)$ è una

Teorema aspettazione: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$

Due V.A sono indipendenti se $F_{XY} = F_X(x) F_Y(y)$

## V.A NOTEVOLI

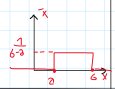
### continue

**UNIFORME** $X \sim U([a,b])$ $S_X = [a,b]$

pdf: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \Pi\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a}\right)$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$

$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{2}$

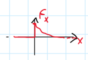



**ESPONENZIALE**

pdf: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

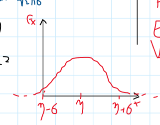



**GAUSSIANA**

pdf: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$

$E[X] = \eta$

$[X] = \sigma^2$



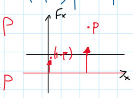

### discrete

**BERNOULLI** $X \sim B(p)$ $S_X = \{0,1\}$

pmf: $p_X(0) = (1-p)$; $p_X(1) = p$

$E[X] = p$

$Var[X] = p$

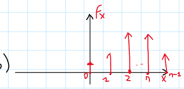



**BINOMIALE** $X \sim Bin(n,p)$ $S_X = \{0,1,\ldots,n\}$

pmf $= p_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$

$E[X] = n \cdot p$

$Var[X] = n \cdot p \cdot (1-p)$

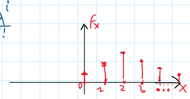



**POISSON** $X \sim P(\lambda)$ $S_X = \mathbb{N}$

pmf: $p_X(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

$E[X] = \lambda$

$Var[X] = \lambda$




## VETTORI DI VA

← capitoli 9,10,11,12

Vettore aleatorio $\underline{X}(X_1, \ldots X_n)$ $S \to \mathbb{R}^n$

CDF CONGIUNTA $F(x,y) \triangleq P\{X \le x, Y \le y\}$

CDF MARGINALE
$$\left.\begin{aligned} F_X(x) &= F_{\underline{X}}(x, \infty) \\ F_Y(y) &= F_{\underline{Y}}(\infty, y) \end{aligned}\right\} \text{vale anche per } n \text{ V.A.}$$

PDF CONGIUNTA $P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

PDF MARGINALI $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$

PDF CONDIZIONATA $f_X(x_1, x_2 \ldots x_k | x_{k+1} \ldots x_n) = \frac{f_{\underline{X}}(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f_{\underline{X}}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}$

VALOR MEDIO $E\{g(x,y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

CORRELAZIONE $R_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_X(x,y)\,dx\,dy$

COVARIANZA $C_{XY} = COV(x,y) = E\{(x - \eta_x) \cdot (y - \eta_y)\}$

funzione a gradini