Formulario segnali aleatori

giovedì 17 dicembre 2020 10:48

Per la descrizione di un segnale aleatorio $\sim [V(t_1)\dots V(t_n)]$

- DESCRIZIONE STATISTICA DI UN PROCESSO
- DESCRIZIONE STATISTICA IN POTENZA

Per la descrizione statistica:

- Calcolo la pdf della V.A. estratta dal processo

1) $X(t_1) \triangleq X_1 \rightarrow f_X(x_1;t_1)$ densità di 1° ordine

2) $\begin{matrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{matrix} \triangleq \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \xrightarrow[\text{CONGIUNTA}]{\text{PDF}} f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ densità di ordine superiori (+ DIFFICILI)

passaggio dal 2° al 1° ordine $\Rightarrow$ SATURAZIONE $f_X(x_1,t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_2$

DESCRIZIONE STATISTICA IN POTENZA

$\eta_X(t_1) \triangleq E[X(t_1)]$ ← VALORE MEDIO STATISTICO

$P_X(t_1) \triangleq E[X^2(t_1)]$ ← POTENZA STATISTICA

$\sigma_X^2(t_1) \triangleq E[(X(t_1)-\eta_X(t_1))^2]$ ← VARIANZA DEL PROCESSO

$R_X(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$ ← AUTOCORRELAZIONE

$C_X(t_1,t_2) \triangleq E[(X(t_1)-\eta_X(t_1))\cdot(X(t_2)-\eta_X(t_2))]$ ← AUTOCOVARIANZA

RELAZIONI PARTICOLARI

$\sigma_X^2(t_1) = P_X(t_1) - \eta_X^2(t_1)$

$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta(t_2)$

$R_X(t_1,t_1) = P_X(t_1)$ e anche $C_X(t_1,t_1) = \sigma_X^2(t_1)$

DA RICORDARE

PDF di $Y(g(X)) \Rightarrow f_Y(y) = \dfrac{f_X(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} + \dots + \dfrac{f_X(x_n(y))}{|g'(x_n(y))|}$ ← TEOREMA FONDAMENTALE

MENO IMPORTANTI

- segnale noto: PROCESSO ARMONICO $Y(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$ | $R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$ | $\eta_Y = 0$
- segnale noto 2: PROCESSO GAUSSIANO

$X(t), [X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)] = [X_1, X_2, \dots, X_n]$

$f_X(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\underline{\underline{C}})}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}(\underline{X}-\underline{\eta})^T \underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{X}-\underline{\eta})\}$

$\underline{\eta} = E[\underline{X}] = [\underbrace{E[X(t_1)]}_{\eta_1} \dots \underbrace{E[X(t_n)]}_{\eta_n}]$

$\underline{\underline{C}} = [C_{ij}];\ C_{ij} = Cov[X(t_i); X(t_j)] = E[(X_i-\eta_i)\cdot(X_j-\eta_j)]$

segnale noto 3: RUMORE TERMICO $\eta_v(t_1) = 0$

$\sigma_{vr}^2(t_1) = P_x(t_1) = \frac{2}{3K}(\pi K T)^2$

• STAZIONAREITÀ SSS

▶ Formale: Un PROCESSO $X(t)$ si dice STAZIONARIO IN SENSO STRETTO (SSS) se $X(t)$ e $X(t-t_0)$ hanno la stessa pdf di ordine n qualunque:

$f_X(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n) = f_X(x_1,\dots,x_n;t_1-t_0,\dots,t_n-t_0)$

N.B. NON POSSO DIRE $X(t) = X(t-t_0)$

• STAZIONAREITÀ SSL

Un processo $X(t)$ si dice SSL se $\eta_X(t_1)$ NON DIPENDE da t_1

E

$R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau)$ $(\tau \triangleq t_2 - t_1)$ DIPENDE SOLO DALLA DIFFERENZA DEGLI ISTANTI DI OSSERVAZIONE

▶ Pratico: Un PROCESSO $X(t)$ si dice STAZIONARIO IN SENSO STRETTO (SSS) se per ogni $x^{(i)}(t)$, anche $x^{(i)}(t-t_0)$ è una possibile realizzazione di $X(t)$ ed è ugualmente probabile

- Se un processo è SSS $\Rightarrow$ è SSL (NO VICEVERSA)
- Se un processo è SSL e gaussiano $\Rightarrow$ è SSS

- $R_X(0) > 0$
- $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$
- $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

- $E[X(t)\cdot X(t+\tau)] = E[X(t)]\cdot E[X(t+\tau)] = E[X(t)]^2 = \eta_X^2$
- $C_X(\tau) = R_X(\tau) - \eta_X^2$

FILTRAGGIO SEGNALI ALEATORI

$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\cdot h(t-\tau)\,d\tau = \lim_{\Delta T \to +\infty} \sum_K^{+\infty} X(\tau_K)h(t-\tau_K)\Delta T$

- Se $X(t)$ è gaussiano $\Rightarrow Y(t)$ è gaussiano | Se $X(t)$ è SSS $\Rightarrow Y(t)$ è SSS | Se $X(t)$ è SSL $\Rightarrow Y(t)$ è SSL
- Se PROCESSO SSL $\Rightarrow P_X(f) = \mathcal{F}(R_X(\tau))$ (teorema Wiener-Kintchine)

$\eta_Y(t) = E[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau = \eta_X H(0)$

$R_Y(t_1,t_2) = R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$ | $C_Y(\tau) = R_Y(\tau) - \eta_Y^2$ | $\sigma_Y^2 = C_Y(0)$ | $P_Y = R_Y(0)$ ← POTENZA MEDIA STATISTICA

Se PROCESSO SSL $\Rightarrow P_Y(f) = P_X(f)|H(f)|^2$ DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

- Se processo gaussiano e V.A incorrelate $\Rightarrow$ V.A indipendenti

2 V.A SSL sono incorrelate se $\Rightarrow R_Y(t_2-t_1) = \eta_Y(t_1)\eta_Y(t_2)$