Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
a)

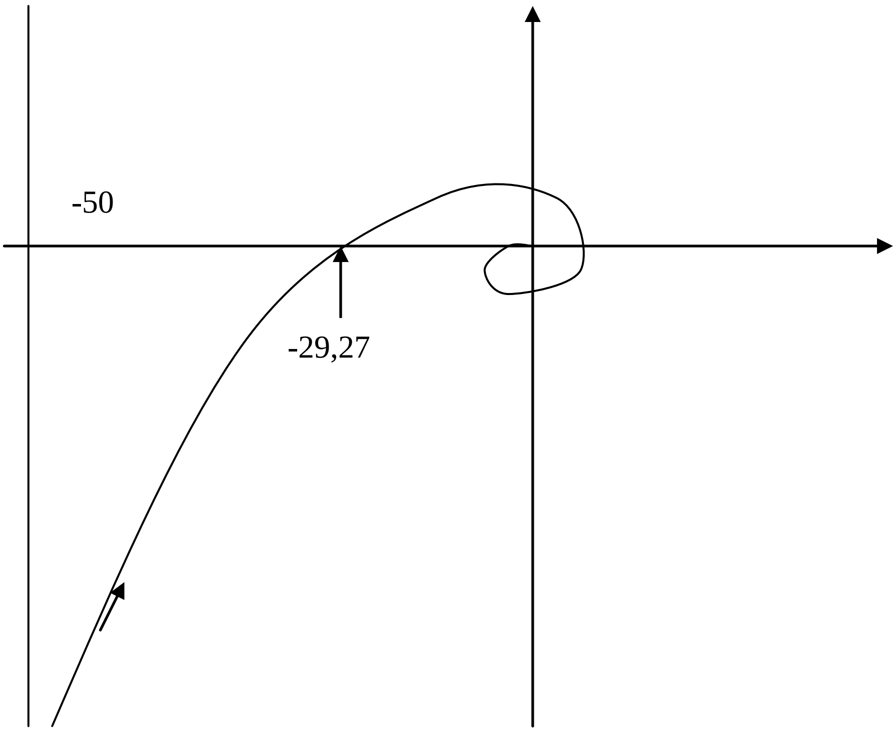
$$P(j\omega)=\frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-5\ \text{arctg}\ \omega$$

$$|P(j\omega)|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a=10[(-1-1)-(1+1+1)]=-50$.

$$\omega\to\infty \qquad \arg P(j\omega)\to-2\pi-\pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p)=-\pi$$

$$5\ \text{arctg}\ \omega_p=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega_p=\ \text{tg}\ \frac{\pi}{10}=0,3249\ \ \text{rad}$$

$$|P(j\omega_p)|=29,27 \quad\Rightarrow\quad P(j\omega_p)=-29,27$$

b) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$

$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$$

3.
Vedi appunti dell'insegnamento.

4.
1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K_1 \frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)} = 0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4 + 12s^3 + 32s^2 + K_1 s + K_1 = 0$$

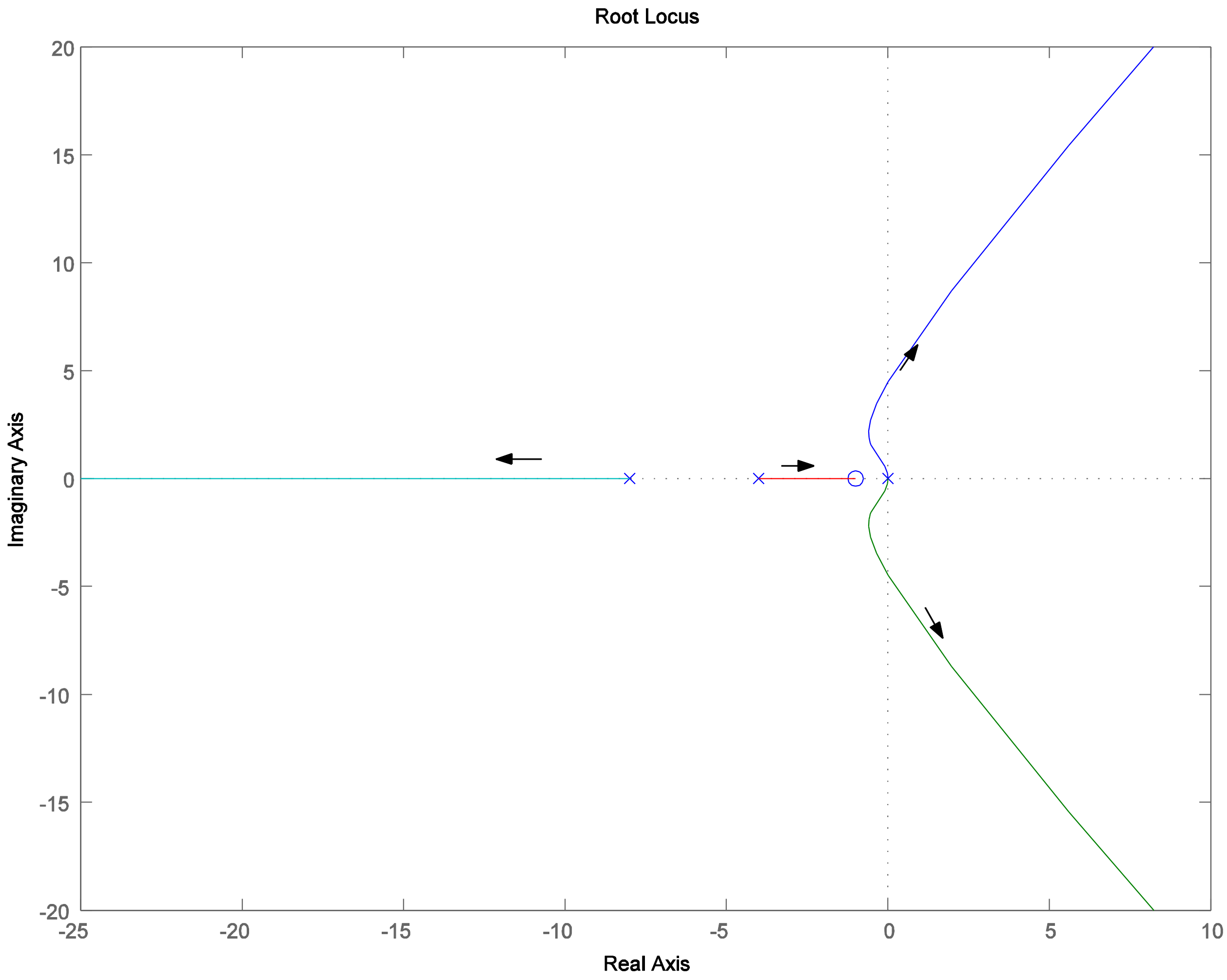
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384 - K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240 - K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1} = +60°,\ \vartheta_{a,2} = +180°,\ \vartheta_{a,3} = -60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a = \frac{-4 - 8 - (-1)}{3} = -\frac{11}{3} \cong -3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384 - 240)s^2 + 12 \cdot 240 = 0$$

$$s^2 + 20 = 0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s = \pm j\sqrt{20} \cong \pm j4,47$.

5.

$$L(s) \triangleq C(s)\,P(s) = k\,\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

$$L(0) = k\,\frac{8}{16} = \frac{k}{2}\;; \qquad k_p = L(0)$$

La specifica è $k_p = 5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{k = 10}$

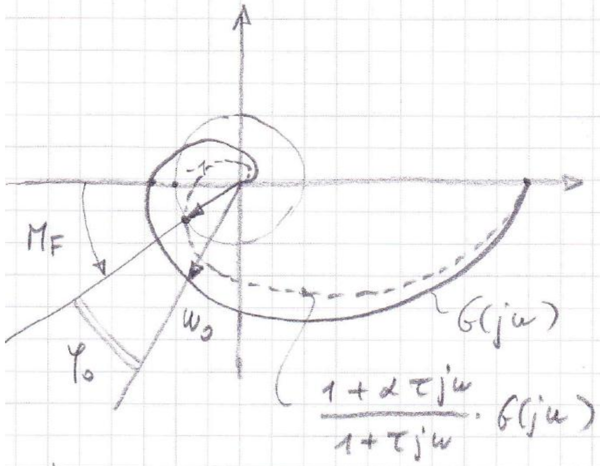
$$L(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{80}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)^4}\,, \qquad G(j\omega) = \frac{80}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{80}{(\omega^2+4)^2}\,, \qquad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$

$$\arg G(j\omega) = -\pi\,, \quad -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi\,, \quad \omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$$|G(j\omega_p)| = 1{,}25\,, \qquad G(j\omega_p) = -1{,}25$$



Scelgo $\omega_0 = 1$ rad/sec

$|G(j\omega_0)| = 3{,}2 \qquad \arg G(j\omega_0) = -1{,}8546$

$\varphi_0 = \pi + \arg G(j\omega_0) - \frac{35}{180}\cdot\pi = 0{,}6761$

$\cos\varphi_0 > \frac{1}{|G(j\omega_0)|} \qquad 0{,}78 > 0{,}3125$ ok!

$M \triangleq 3{,}2 \qquad \varphi = 0{,}6761$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = 3{,}867 \text{ sec}$$

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)} = 0{,}1932$$

Determinazione di F:

$$F\cdot\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F\cdot\frac{5}{1+5} = 1\,, \qquad F = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

6

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}} = \dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0}$$