Francesca Stefani

(LA + SIMPATICA
DEL CORSO)

(E MOLTO
UMILE :) ★)

GENNAIO 2015 - PARTE 2ª

$\max\ x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 0$

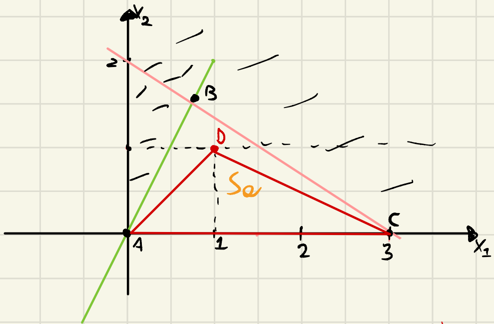
$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = 2x_1 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3}x_1 + x_1 = \frac{3}{4} \end{matrix}$$

Si visualizzi graficamente la chiusura convessa



$A = (0,0)$

$B =$

$C(3,0)$

$\{x_1 \leq x_2,\ x_1 \geq 0,\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}\}$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

uso retta passante per due punti per trovare disequazioni del rilassamento lineare

Si eseguono le prime due iterazioni dell'algoritmo di Taglio di Gomory, visualizzando graficamente i due tagli aggiunti

1) scrivere rilassamento lineare risolvendo problema in forma standard

$\max\ x_2$

$-2x_1 + x_2 + y_1 = 0$

$2x_1 + 3x_2 + y_2 = 6$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$\longrightarrow$

$\max\ x_2$

$y_1 = 0 + 2x_1 - x_2$

$y_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$B_0\{x_2 y_2\}$

$\xrightarrow[\text{esce } y_1]{\text{entra } x_2}$

$\max\ 2x_1 - y_1$

$x_2 = 0 + 2x_1 - y_1$

$y_2 = 6 - 8x_1 + 3y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$\xrightarrow[\text{esce } y_2]{\text{entra } x_1}$

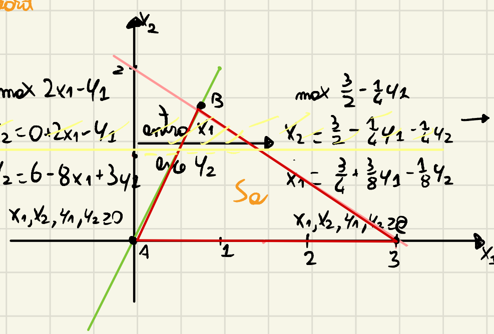
$\max\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y_1$

$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2$

$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$\longrightarrow$ sol ottima ma non per PLI



2) Applico taglio di Gomory

$\rightarrow$ Applico taglio su $x_2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)y_1 + \left(\frac{1}{4}\right)y_2$

$\max\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y_1$

$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2$

$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2$

$y_3 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)y_1 + \left(\frac{1}{4}\right)y_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$\xrightarrow[\text{per visualizzare graficamente}]{\text{sostituisco } y_1 \text{ e } y_2}$ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \rightarrow 1 - x_2 \geq 0$

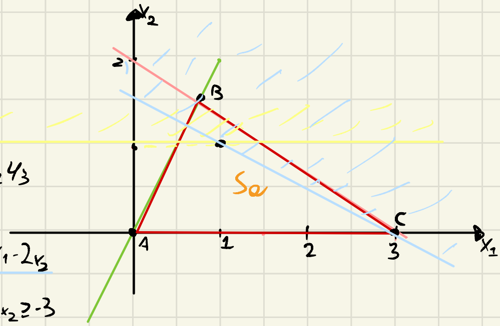
$\hookrightarrow x_2 \leq 1$

Applico simplesso duale

$$\max \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2$$
$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2$$
$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2$$
$$y_3 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)y_1 + \left(\frac{1}{4}\right)y_2$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$\xrightarrow[\text{entra } y_1]{\text{esce } y_3}$

$$\max 1 - y_3$$
$$x_2 = 1 - y_3$$
$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3$$
$$y_1 = 2 - y_2 + 4y_3$$



Applico 2° Taglio di Gomory

Taglio x_1 → $-\left(\frac{3}{2} - \lfloor\frac{3}{2}\rfloor\right) + \left(\frac{1}{2}\right)y_2 + \left(-\frac{3}{2} - \lfloor -2 \rfloor\right)y_3 \longrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3$

$$\frac{1}{2}(1 - x_2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(6 - 2x_1 - 3x_2) = \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x_2 - \cancel{\frac{1}{2}} + 3 - x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 3 - x_1 - 2x_2$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$\max 1 - y_3$$
$$x_2 = 1 - y_3$$
$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3$$
$$y_1 = 2 - y_2 + 4y_3$$
$$y_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3$$

$\xrightarrow[\text{entra } y_3]{\text{esce } y_4}$

$$\max 0 + y_2 - 2y_4$$
$$x_2 = 0 + y_2 - 2y_4$$
$$x_1 = 3 + y_2 + 3y_4$$
$$y_1 = 6 - 5y_2 + 8y_4$$
$$y_3 = 1 - y_2 + 2y_4$$

entra y_2, esce y_3

$$\max 1 - y_3$$
$$x_2 = 1 - y_3$$
$$x_1 = 4 - y_3 + 5y_4$$
$$y_1 = 1 + 5y_3 + 6y_4$$
$$y_2 = 1 - y_3 + 2y_4$$

⟶ val ottimo 1

sol ottima = $\{x_2 = 1, x_1 = 4, y_1 = 1, y_2 = 1\}$

Esercizio 2

- È un problema di programmazione convessa?

$\min \; xy$

$y \geq 1$

$x - y \geq -2$

$-x - y \geq -2$

è un PC $\Leftrightarrow$ $f(x,y)$ è convessa, c_1, c_2 sono concave

$f(x,y)$ è convessa $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ → DET<0 → non è semidefinita positiva ⇒ NON È CONVESSA

- Ci sono punti che non soddisfano almeno una delle constraint qualification citate a lezione

2 constraint → VINCOLI LINEARI → OK
→ gradienti dei vincoli sono linearmente indipendenti

$\nabla c_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla c_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ → lin. indipendente sempre

$\nabla c_3(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ NON ESISTONO PUNTI CHE NON SODDISFANO LE CONDIZIONI

Si impostino le condizioni KKT

$$\mathcal{L}(x,y,u_1,u_2,u_3) = xy - u_1(y-1) - u_2(x-y+2) - u_3(-x-y+2) =$$
$$xy - u_1 y - u_1 - u_2 x + u_2 y - 2u_2 + u_3 x + u_3 y - u_3 2$$

Applico condizioni KKT

1) Stazionarietà $\mathcal{L}(x,y,u_1,u_2,u_3)$ rispetto ad xy

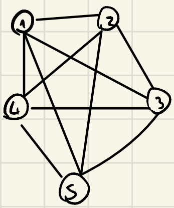
$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} \to y - u_2 + u_3 = 0$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dy} \to x - u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

ESAME APRILE 17 ~ PARTE 2

Esercizio 1 ~ TSP SIMMETRICO

	1	2	3	4	5
1	-	9	10	8	7
2		-	9	8	11
3			-	2	12
4				-	4
5					-



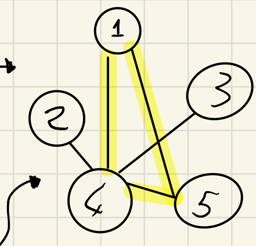
nodo a = 1

1) Calcolare albero di supporto a peso minimo

aggiungo (4,3)
aggiungo (4,5)
aggiungo (2,4)

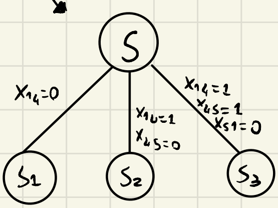
2) Aggiungo 2 archi su nodo a

aggiungo (1,5)
aggiungo (1,4)



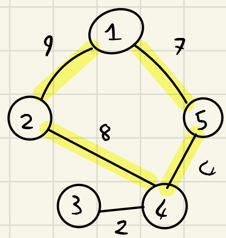
LB = 29
UB = +∞ perché circuito non HAMILTONIANO

sottocircuito 1-4-5-1



S_1

aggiungo arco (4,3)
aggiungo arco (4,5)
aggiungo arco (2,4)
aggiungo arco (1,5)
aggiungo arco (1,2)

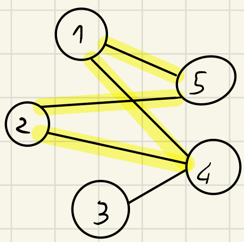


1-2-4-5-1

LB=30
UB=+∞ non è HAMILTONIANO

S_2

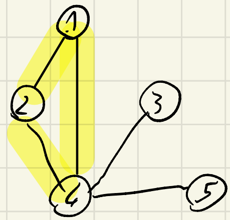
aggiungo arco (4,3)
aggiungo arco (4,2)
aggiungo arco (2,5)
aggiungo arco (1,4)
aggiungo arco (1,5)



LB = 36
UB = ∞

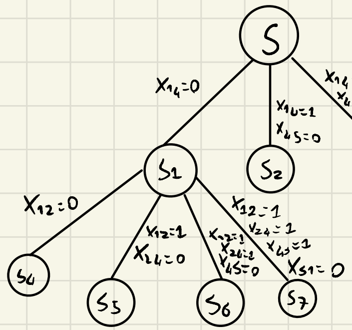
S_3

aggiungo $(4,3)$
aggiungo $(4,5)$
aggiungo $(2,4)$
aggiungo $(1,4)$
aggiungo $(1,2)$



$LB = 31$
$UB = +\infty$

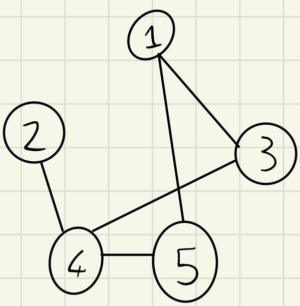
Applico Branching



S_4

$x_{14}=0,\ x_{12}=0$

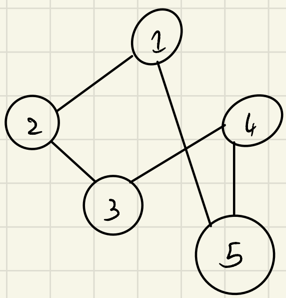
aggiungo $(4,3)$
aggiungo $(4,5)$
aggiungo $(2,4)$
aggiungo $(1,5)$
aggiungo $(1,3)$



$LB = 2+4+8+10+7 = 31$

S_5

aggiungo $(4,3)$ 3
aggiungo $(4,5)$ 4
aggiungo $(2,3)$ 9
aggiungo $(1,5)$ 7
aggiungo $(1,2)$ 9

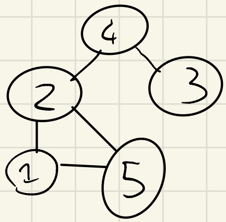


$LB = 32$

circuito non hamiltoniano

S6

aggiungo (2,4) 8
aggiungo (3,4) 2
aggiungo (2,5) 11
aggiungo (1,5) 7
aggiungo (1,2) 9

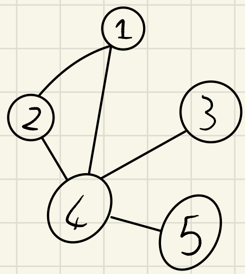


LB=37

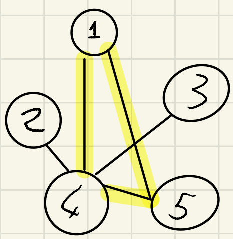
S7

aggiungo (2,4) 8
aggiungo (4,5) 4
aggiungo (3,4) 2
aggiungo (1,4) 8
aggiungo (1,2) 9

31



DUALE LAGRANGIANO

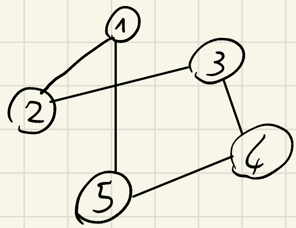


1, 5 grado 2 ⇝ moltiplicatore LAGRANGE 0
4 grado 4 ⇝ moltiplicatore LAGRANGE -2
2, 3 grado 1 ⇝ moltiplicatore LAGRANGE +1

		0	-1	-1	+2	0
		1	2	3	4	5
0	1	-	8	9	10	7
-1	2		-	7	9	10
-1	3			-	3	11
+2	4				-	6
0	5					-

⇝ $(3,4)^{3}$; $(4,5)^{6}$; $(2,3)^{7}$; $(1,2)^{8}$; $(1,5)^{7}$

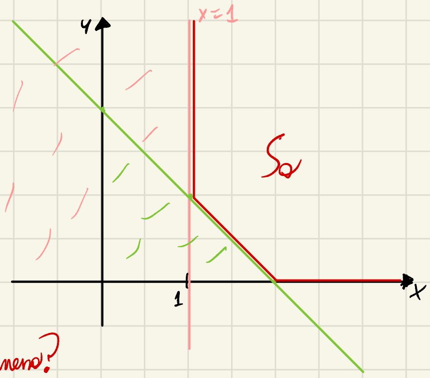
LB = 31
UP = 31 perciò hamiltoniano



Esercizio 2

$$\min \log(x)+y$$

- $x-1 \geq 0$
- $y+x \geq 2$
- $y \geq 0$



- **È un problema di programmazione convessa?**

P.C. $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)$ è convessa
c_1, c_2 sono concave

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla c_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla c_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 c_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 c_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ minori ≤ 0 ⇝ non è semidefinita positiva
↳ NON È CONVESSO

- **Ci sono punti che non soddisfano nessuna delle constraint qualification viste a lezione**

1) VINCOLI LINEARI → SI

2) GRADIENTI LINEARMENTE INDIPENDENTI ⟶ sono linearmente indipendenti $\forall x, y$

Non esistono punti che violano almeno una delle constraint qualification

- **Si impostino le condizioni KKT**

EQ. LAGRANGIANA $\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2,\mu_3) \rightarrow \log(x)+y-\mu_1(x-1)-\mu_2(y+x-2)-\mu_3(y)$

APPLICO CONDIZIONI KKT

- Derivata $L(x,y,u_1,u_2,u_3)$ rispetto ad x: $\frac{1}{x} - U_1 - U_2 = 0$
- Derivata $L(x,y,u_1,u_2,u_3)$ rispetto ad y: $1 - U_2 - U_3 = 0$
- $C_1 \geq 0$ $\quad x - 1 \geq 0$
- $C_2 \geq 0$ $\quad y + x - 2 \geq 0$
- $C_3 \geq 0$ $\quad y \geq 0$
- $U_1 C_1 = 0$ $\quad U_1(x-1) = 0$
- $U_2 C_2 = 0$ $\quad U_2(y+x-2) = 0$
- $U_3 C_3 = 0$ $\quad U_3(y) = 0$

TROVARE TUTTI I PUNTI CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI KKT

- caso 1: $u_1, u_2, u_3 = 0$

in 2 $\rightsquigarrow$ $1 = 0 \rightarrow$ impossibile

- caso 2: $U_2 = U_3 = 0$ $\quad U_1 > 0$

in 2 $1 = 0 \rightsquigarrow$ impossibile

- caso 3: $U_1 > 0, U_2 > 0, U_3 > 0$

$y = 0,$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ $\rightarrow$ impossibile

- caso 4: $U_1 = 0$ $\quad U_2 > 0$ $\quad U_3 = 0$

$x = 1$ $\quad U_2 = 1$ $\quad U_1 = 0$

$y + x - 2 = 0 \rightarrow y = 1$ $\quad \rightarrow (1,1)$ KKT

Esame giugno 2015 - PARTE II

Esercizio 1 - BRANCH AND BOUND

$\max\ 6x_1 + 5x_2$

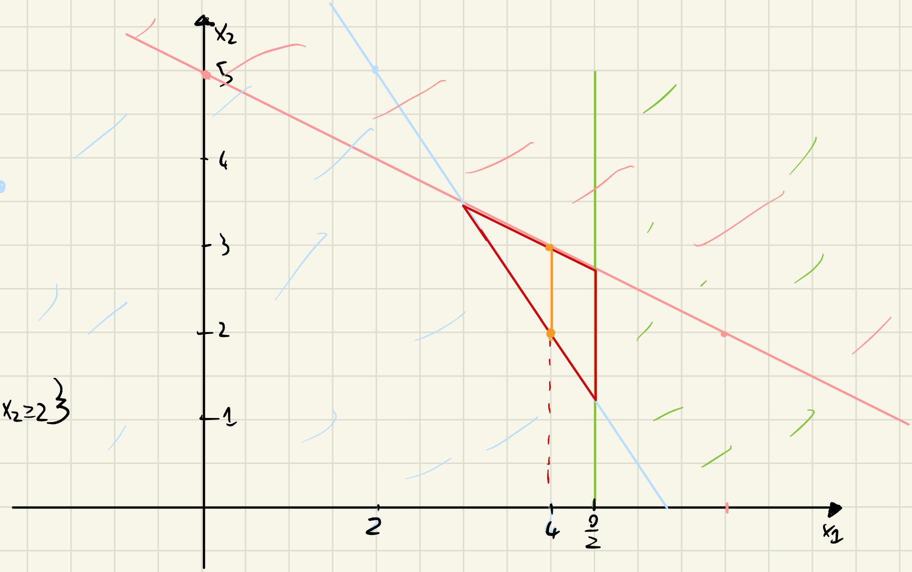
$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$2x_1 \leq 9$

$3x_1 + 2x_2 \geq 16$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$



z_0 con $\{x_1 = 4, x_2 \leq 3, x_2 \geq 2\}$

- Forma standard

$\max\ 6x_1 + 5x_2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 + x_4 = 9$

$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 16$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$\xrightarrow{1^\circ \text{fase}}$

$\max\ -a_1$

$x_3 = 10 - x_1 - 2x_2$

$x_4 = 9 - 2x_1$

$a_1 = 16 - 3x_1 - 2x_2 + x_5$

$\longrightarrow$

$-16 + 3x_1 + 2x_2 - x_5$

$x_3 = 10 - x_1 - 2x_2$

$x_4 = 9 - 2x_1$

$a_1 = 16 - 3x_1 - 2x_2 + x_5$

$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_1}$

$-\frac{5}{2} + 2x_2 - \frac{3}{2}x_4 - x_5$

$x_3 = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}x_4 - 2x_2$

$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_4$

$a_1 = \frac{5}{2} - 2x_2 + x_5 + \frac{3}{2}x_4$

$\xrightarrow[\text{esce } a_1]{\text{entra } x_2}$

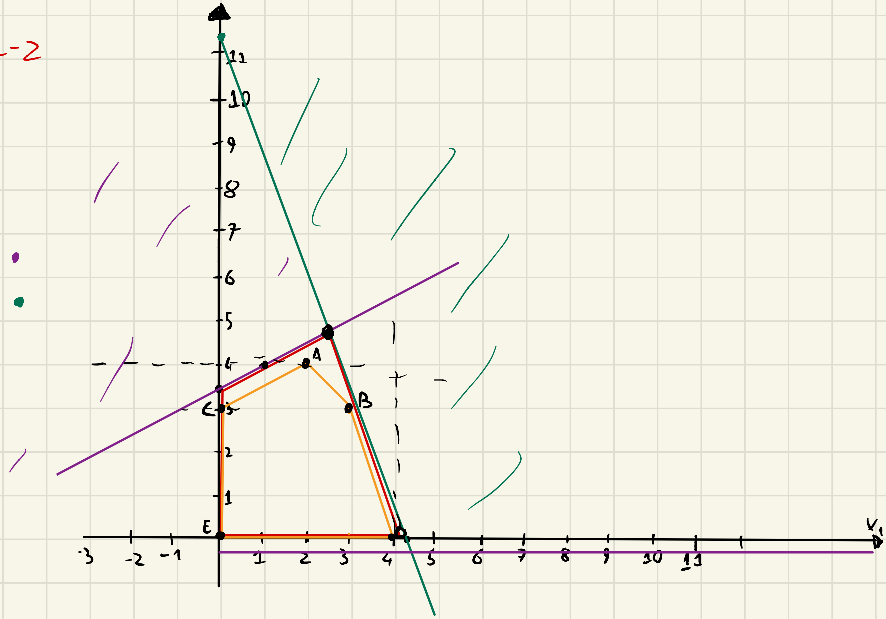
$x_3 = \frac{17}{4} -$

$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_4$

$x_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{2}a_1$

Esame GEN 2022-2

Esercizio 1



$\max x_2$

$-x_1+3x_2 \le 11$

$16x_1+6x_2 \le 67$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_2 \le 4$

$x_1 \le 4$

$\overline{CA} \to \frac{x-0}{2} = \frac{y-3}{4-3}$

$\overline{CA} \to \frac{x}{2} = y-3 \to \frac{1}{2}x - y + 3 = 0$

$\hookrightarrow x_1 - 2x_2 \ge -6$

$A(2,4)$

$B(3,3)$

$C(0,3)$

$D(4,0)$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$\overline{AB} = \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-4}{3-4} \to x-2 = y-4 \to x-y = -2$

$x-y \ge -2$

$\overline{BD} = \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{0-3} \to x-3 = -\frac{1}{3}y+1$

$x+\frac{1}{3}y = 4 \to x+\frac{1}{3}y \le 4$

$\longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\{x_1 \le 4;\ x_2 \le 4;\ x_1+\frac{1}{3}x_2 \le 4;\ x_1-x_2 \ge -2;\ x_1-2x_2 \ge -6\}$

Trovo A)

$-x_1+3x_2=11$

$16x_1+6x_2=67$

$x_1=+3x_2-11 \rightarrow x_1=\frac{27}{2}-11=\frac{5}{2}$

$48x_2-176+6x_2=67 \rightarrow 54x_2=243 \rightarrow x_2=\frac{243}{54}=\frac{81}{18}=\frac{9}{2}$

$A\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$ sol ottimo $\rightarrow$ val ottimo $=\frac{9}{2}$

Branching

P_1

$\max x_2$

$-x_1+3x_2\leq 11$

$16x_1+6x_2\leq 67$

$x_1\leq 2$

$x_1,x_2\geq 0$ $\quad \left(x_1=3, x_2=\frac{13}{3}\right)$

P_2

$\max x_2$

$-x_1+3x_2\leq 11$

$16x_1+6x_2\leq 67$

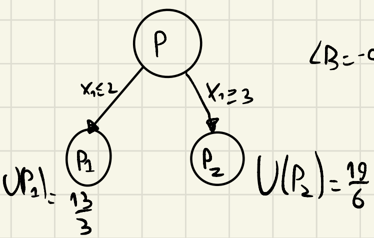
$x_1\geq 3$

$x_1,x_2\geq 0$

$16\cdot 3+6x_2=67$

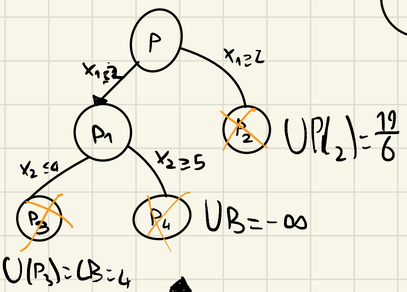
$48+6x_2=67$

$6x_2=67-48 \rightarrow 6x_2=19 \rightarrow \frac{19}{6} \approx 3{,}16 \rightarrow$ Sol ottimo $P_2=\left(3,\frac{19}{6}\right)$



$LB=-\infty$

Branching



P_3

$\max x_2$

$-x_1 + 3x_2 \le 11$

$16x_1 + 6x_2 \le 67$

$x_1 \le 2$

$x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

P_4

$\max x_2$

$-x_1 + 3x_2 \le 11$

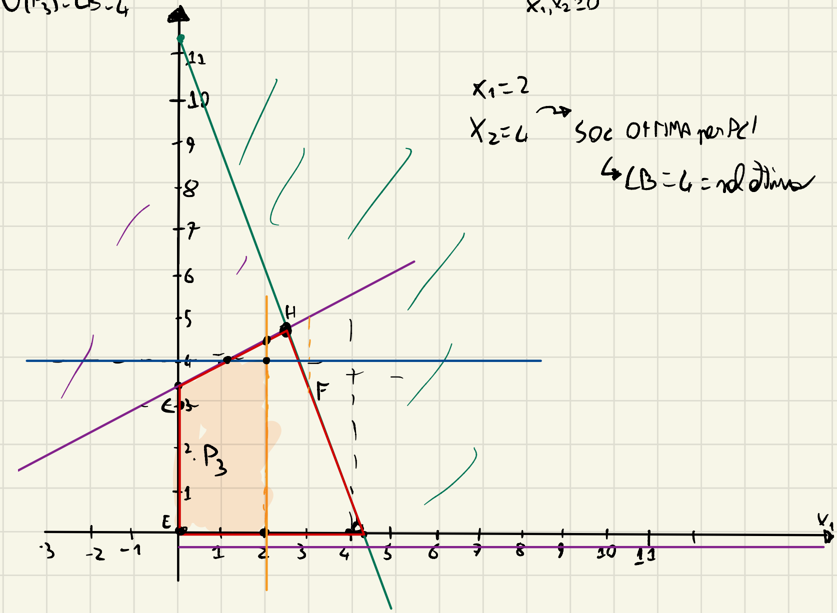
$16x_1 + 6x_2 \le 67$

$x_1 \le 2$

$x_2 \ge 5$

$x_1, x_2 \ge 0$

$Z_a = \emptyset$ → non ammissibile



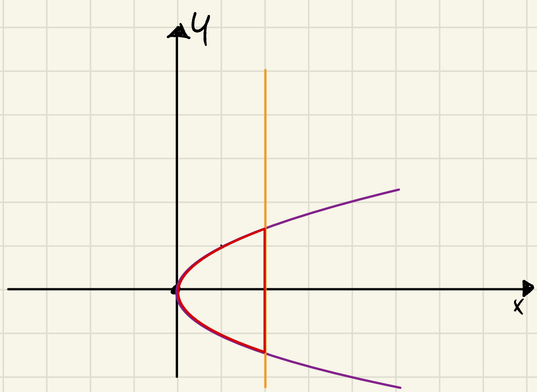
$x_1 = 2$
$x_2 = 4$ → sol ottima per P_3!
↳ $LB = 4$ = val ottimo

Esercizio 2

$\min\ x - 2y^2$

$-x + 1 \ge 0$

$x - y^2 \ge 0$



1) Programmazione convessa

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4y \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{non è semidef. positiva} \rightarrow \text{non è convessa}$$

$\nabla C_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla^2 C_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ concava

$\nabla C_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2y \end{pmatrix}$ $\quad \nabla^2 C_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to$ concava $\longrightarrow$ P.C.

- Ci sono punti che non soddisfano CONSTRAINT QUALIFICATION

1) 1° vincolo lineare, 2° vincolo no

2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \to 2y = 0 \to y = 0 \longrightarrow \begin{cases} -x+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ è impossibile $\nexists$ punti che non soddisfano constraint qualification

- KKT

$$L(x,y,u_1,u_2) = x - 2y^2 - u_1(-x+1) - u_2(x-y^2)$$

1) $1 + u_1 - u_2 = 0$
2) $-4y + 2u_2 y \longrightarrow y \cdot (2u_2 - 4) = 0$
3) $u_1(-x+1) = 0$
4) $u_2(x-y^2) = 0$
5) $-x+1 \geq 0$
6) $x - y^2 \geq 0$

caso 1 $\quad u_1, u_2 = 0$

1) $1 = 0 \to$ ↯

caso 2 $\quad u_1 > 0, u_2 > 0$

3) $-x+1=0 \to x=1$

4) $x - y^2 = 0 \to y = \pm 1$

$+$: $2u_2 - 4 = 0 \to u_2 = 2, u_1 = 1$

$-$: $-2u_2 + 4 = 0$, $u_2 = 2, u_1 = 1$

$(1,1), (1,-1)$ ok

caso 3) $u_1 > 0, u_2 = 0$

3) $x = 1$ 1) $u_1 = -1$ ↯

caso 4) $u_2 > 0, u_1 = 0$

$u_2 = 1 \xrightarrow{2)} -2y = 0 \to y = 0$

$x - y^2 = 0 \to x = 0$

$x=0, y=0, u_1=0, u_2=1$ OK

- $\exists$ minimo globale

X TEOREMA DI WEISTRASS ($f(x,y)$ è continua ed S_a chiuso e limitato), il minimo globale esiste $\to$

$f(0,0) = 0 \quad F(1,1) = F(1,-1) = -1 \rightsquigarrow (0,0), (1,1)$ sono punti di minimo globali

Esame gennaio 2017 ~ parte 2

$\max\ x_2$

$6x_1 - x_2 \geq 11$

$x_1 \geq 2$

$2x_1 + 2x_2 \leq 13$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

↳ RILASSAMENTO LINEARE →

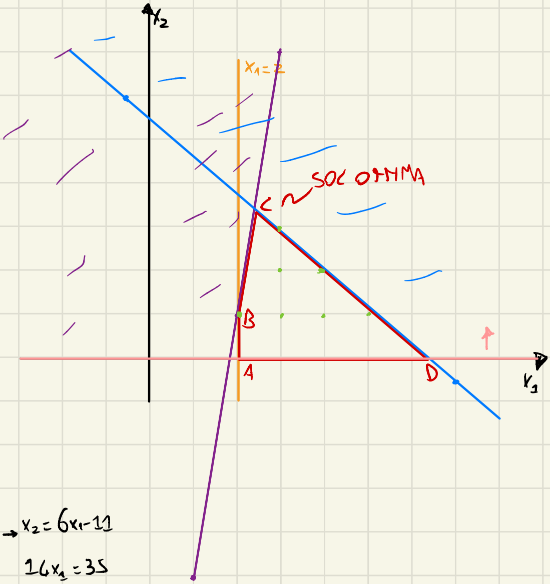
$\max\ x_2$

$6x_1 - x_2 \geq 11$

$x_1 \geq 2$

$2x_1 + 2x_2 \leq 13$

$x_1, x_2 \geq 0$



C sol ottima → $\begin{cases} 6x_1 - x_2 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 = 13 \end{cases}$ → $x_2 = 6x_1 - 11$

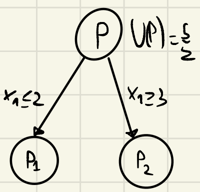
$14x_1 = 35$

↳ $x_2 = 15 - 11 = 4$

$x_1 = \frac{5}{2}$ 2,5 ↝ VAL OTTIMO = 4

Eseguo Branching

$LB = -\infty$



P_1 ↝ $6x_1 - x_2 \geq 11$

$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 2 \\ x_1 \leq 2 \end{array}\right\}$ → $x_1 = 2$ → PUNTO B (grafico P) ↝ $x_2 = 1$ → $U(P_1) = 1$, $LB = 1$

$2x_1 + 2x_2 \leq 13$

$x_1, x_2 \geq 0$

P_2 ↝ $6x_1 - x_2 \geq 11$

$x_1 \geq 3$

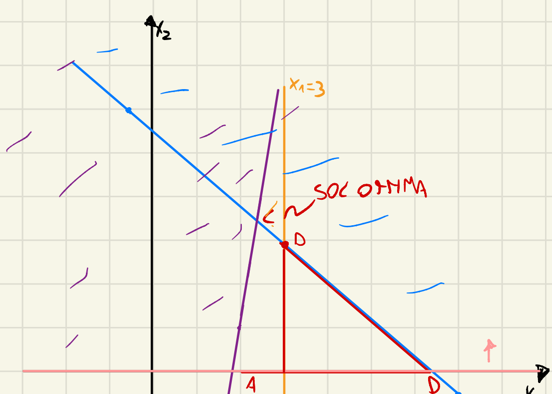
$2x_1 + 2x_2 \leq 13$

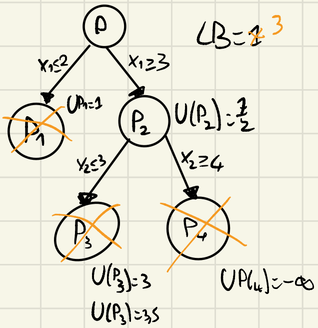
$x_1, x_2 \geq 0$

D sol ottima

$x_1 = 3$

↳ $x_2 = \frac{7}{2} \simeq 3,5$





$LB = \cancel{1}\ 3$

P_3

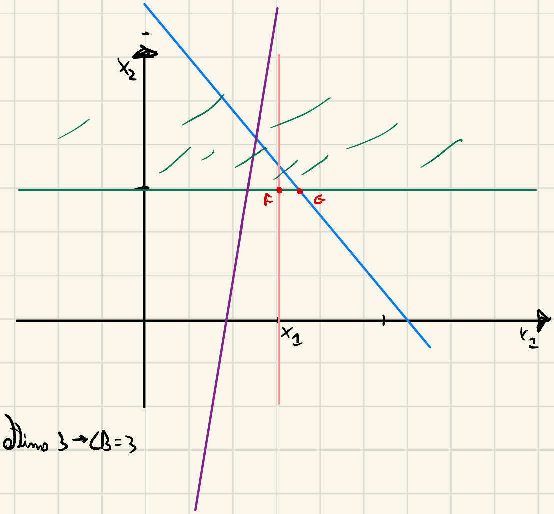
$6x_1 - x_2 \geq 11$

$x_1 \geq 3$

$x_2 \leq 3$

$2x_1 + 2x_2 \leq 13$

$x_1, x_2 \geq 0$



$(3,3) \rightsquigarrow$ SOL OTTIMA $\rightsquigarrow$ val ottimo $3 \rightarrow LB = 3$

$G \rightarrow x_2 = 3, x_1 = 3,5$

P_4

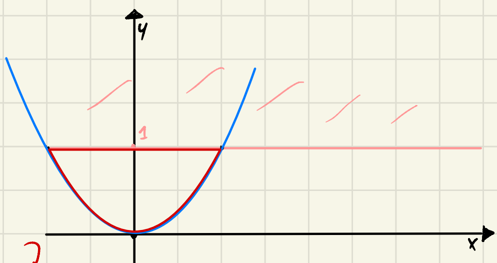
$S_a = \emptyset \rightsquigarrow U(P_4) = -\infty$

Esercizio 2

$\min -x^3 + y$

$-x^2 + y \geq 0$

$-y + 1 \geq 0 \rightarrow y \leq 1$



• È un problema di programmazione convessa?

P.C $\Leftrightarrow f(x,y)$ è CONVESSA

c_1, c_2 sono concave

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{DET} = 0\ \forall x$$

minore $\geq 0 \Leftrightarrow -6x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightsquigarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow$ IMPOSSIBILE $\rightarrow F(x)$ non è CONVESSA

- Ci sono punti che non soddisfano nessuna delle constraint qualification?

1) $c_1(x,y)$ non è lineare

2) $c_1(x,y), c_2(x,y)$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI

$\nabla c_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 1=0 \end{cases} \rightsquigarrow$ IMPOSSIBILE

$\nabla c_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\nexists$ punti che NON SODDISFANO LE CONSTRAINT QUALIFICATION

- Si impostino le condizioni KKT e si trovino tutti i punti che le soddisfano

$$L(x,y,u_1,u_2) = -x^3+y-u_1(-x^2+y)-u_2(-y+1)$$

1) $-3x^2+2u_1x=0$
2) $1-u_1+u_2=0$
3) $-x^2+y\geq 0$
4) $-y+1\geq 0$
5) $u_1(-x^2+y)=0$
6) $u_2(-y+1)=0$

$\longrightarrow$

$u_1, u_2=0$

2) $1=0 \rightarrow$ impossibile

$u_1>0, u_2>0$

$-x^2+y=0 \rightsquigarrow -x^2=-1$

$-y+1=0 \rightarrow y=1$

$x_{1,2}=+1,-1$

$x=1 \rightarrow -3+2u_1=0 \rightarrow u_1=+\frac{3}{2} \rightsquigarrow$

$x=-1 \rightarrow -3-2u_1=0 \rightarrow u_1=0 \rightsquigarrow -\frac{3}{2}$ ↯

$u_2=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ ok

$u_1>0 \; u_2=0$

2) $u_1=1$

1) $\rightarrow -3x^2+2x=0 \longrightarrow x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$

$(-x^2+y)=0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}}$ ok $\quad \boxed{\begin{matrix} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{9} \end{matrix}}$ ok

$u_1=0, u_2>0$

$-y+1=0 \rightarrow y=1 \rightarrow x^2=1 \rightsquigarrow x_{1,2}=+-1$

$1+u_2=0 \rightarrow u_2=-1$ ↯

PUNTI KKT

a) $u_1=1, u_2=0, x=0, y=0$
b) " " $x=\frac{2}{3}\; y=\frac{4}{9}$
c) $u_1=\frac{3}{2}\; u_2=\frac{1}{2}\; x=1, y=1$

a) VAL. OTTIMO $\rightarrow$ 0
b) VAL. OTTIMO $\rightarrow -\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=+\frac{8}{27}$
c) VAL. OTTIMO $\rightarrow -1+1=0$

Pti a e b sono minimi globali
(x TEOREMA DI WEIERSTRASS $\exists$ minimo globale
in quanto S è chiuso e limitato ed F è continua)

ESAME FEBBRAIO 2016

Esercizio 1)

$$\max\ x_1+x_2$$
$$5x_1-4x_2+x_3=5$$
$$x_1+2x_2+x_4=8$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{Z}$$

$\xrightarrow{\text{RILASSAMENTO LINEARE}}$

$$\max\ x_1+x_2$$
$$5x_1-4x_2+x_3=5$$
$$x_1+2x_2+x_4=8$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$\xrightarrow{B_0\{x_3,x_4\}}$

$$\max\ x_1+x_2$$
$$x_3=5-5x_1+4x_2$$
$$x_4=8-x_1-2x_2$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$\xrightarrow[\text{esce } x_3]{\text{entra } x_1}$

$$\max\ 1+\frac{9}{5}x_2-\frac{1}{5}x_3$$
$$x_1=1+\frac{4}{5}x_2-\frac{1}{5}x_3$$
$$x_4=7-\frac{14}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3$$
$$x_1,\dots,x_4\geq 0$$

$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_2}$

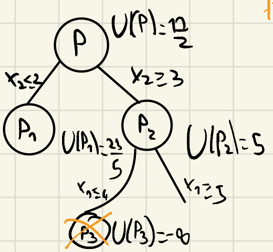
$$\max\ 1+\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{2}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{14}x_3-\frac{1}{5}x_3-\frac{9}{14}x_4$$
$$x_1=3+\frac{1}{5}x_3-\frac{2}{7}x_4$$
$$x_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{14}x_3-\frac{5}{14}x_4$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\max\ \frac{11}{2}-\frac{1}{14}x_3-\frac{9}{14}x_4$$
$$x_1=3+\frac{1}{5}x_3-\frac{2}{7}x_4$$
$$x_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{14}x_3-\frac{5}{14}x_4$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

sol ottima ma non per PLI

eseguo branch $CB=-\infty$



P_1: $x_2\leq 2 \to x_2+x_5=2 \to x_5=2-x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{14}x_3+\frac{5}{14}x_4$

$$\max\ \frac{11}{2}-\frac{1}{14}x_3-\frac{9}{14}x_4$$
$$x_1=3+\frac{1}{5}x_3-\frac{2}{7}x_4$$
$$x_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{14}x_3-\frac{5}{14}x_4$$
$$x_5=-\frac{1}{2}-\frac{1}{14}x_3+\frac{5}{14}x_4$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$\xrightarrow[\text{entra } x_4]{\text{esce } x_5}$

$$\max\ \frac{11}{2}-\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{14}-\frac{9}{10}\right)x_3-\frac{9}{5}x_5$$
$$x_1=\frac{13}{5}+\frac{1}{5}x_3-\frac{4}{5}x_5$$
$$x_2=2+0x_3-x_5$$
$$x_4=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}x_3+\frac{14}{5}x_5$$

$\longrightarrow$

$$\frac{23}{5}-\frac{1}{5}x_3-\frac{9}{5}x_5$$
$$x_1=\frac{13}{5}+\frac{1}{5}x_3-\frac{4}{5}x_5$$
$$x_2=2+0x_3-x_5$$
$$x_4=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}x_3+\frac{14}{5}x_5$$

P_2 $x_2\geq 3 \to x_2-x_5=3 \longrightarrow x_5=x_2-3 \longrightarrow x_5=-\frac{1}{2}+\frac{1}{14}x_3-\frac{5}{14}x_4$

$$\max\ \frac{11}{2}-\frac{1}{14}x_3-\frac{9}{14}x_4$$
$$x_1=3+\frac{1}{5}x_3-\frac{2}{7}x_4$$
$$x_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{14}x_3-\frac{5}{14}x_4$$
$$x_5=-\frac{1}{2}+\frac{1}{14}x_3-\frac{5}{14}x_4$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$\xrightarrow[\text{entra } x_3]{\text{esce } x_5}$

$$\max\ 5-x_4-x_5$$
$$x_1=\frac{22}{5}+\frac{5}{7}x_4+\frac{14}{5}x_5$$
$$x_2=3+x_5$$
$$x_3=7+5x_4+14x_5$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

P_3) $x_1\leq 4 \to x_1+x_6=4 \to x_6=4-\frac{22}{5}-\frac{5}{7}x_4-\frac{14}{5}x_5 \to -\frac{2}{5}-\frac{5}{7}x_4-\frac{14}{5}x_5$

$$\max\ 5-x_4-x_5$$
$$x_1=\frac{22}{5}+\frac{5}{7}x_4+\frac{14}{5}x_5$$
$$x_2=3+x_5$$
$$x_3=7+5x_4+14x_5$$
$$x_6=-\frac{2}{5}-\frac{5}{7}x_4-\frac{14}{5}x_5 \to \text{ILLIMITATEZZA } U(P_3)=-\infty$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0$$

P_4) $x_1 \geq 5 \rightsquigarrow x_1 - x_6 = 5 \rightarrow x_6 = x_1 - 5 = -\frac{3}{5} + \frac{5}{7}x_4 + \frac{14}{5}x_5$

$$\max 5 - x_4 - x_5$$

$$x_1 = \frac{22}{5} + \frac{5}{7}x_4 + \frac{14}{5}x_5$$

$$x_2 = 3 + x_5$$

$$x_3 = 7 + 5x_4 + 14x_5 \xrightarrow[\text{entra } x_5]{\text{esce } x_6}$$

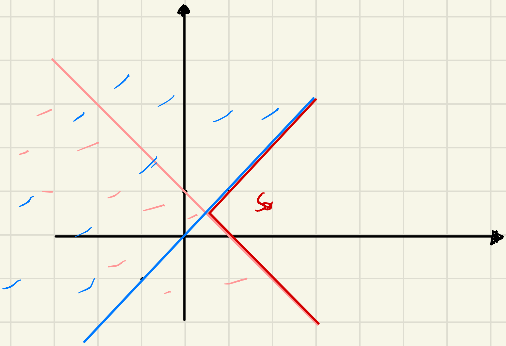
$$x_6 = \frac{3}{5} + \frac{5}{7}x_4 + \frac{14}{5}x_5 \qquad x_5 = \frac{3}{14} +$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Esercizio 2

$\min\ 3x^3+y^3-x-y \quad f(x,y)$

- $x+y\geq 1 \quad c_1(x,y)$
- $-y+x\geq 0 \quad c_2(x,y)$



• È un problema di P.C.?

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}9x^2-1\\ 3y^2-1\end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}18x & 0\\ 0 & 9y\end{pmatrix} \rightarrow f \text{ convessa } \forall x,y\geq 0,\ f \text{ convessa in } S$$

$\nabla^2 c_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \rightarrow$ CONCAVA $\rightarrow$ è un problema P.C

$\nabla^2(-c_2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \rightarrow$ CONCAVA

NON È UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE CONVESSA

• Ci sono punti che non soddisfano almeno una delle constraint qualification

1) VINCOLI SONO LINEARI

2) c_1, c_2 sono LINEARMENTE DIPENDENTI $\rightarrow \nabla c_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \nabla c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \rightarrow$ DET $=-1-1=-2 \rightarrow$ MAI

Non esistono punti che violano le constraint qualification

• Calcolo punti KKT

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2)=3x^3+y^3-x-y-\mu_1(x+y-1)-\mu_2(-y+x)$$

1) $9x^2-1-\mu_1-\mu_2=0$

2) $3y^2-1-\mu_1+\mu_2=0$

3) $x+y-1\geq 0$

4) $-y+x\geq 0$

5) $\mu_1(x+y-1)=0$

6) $\mu_2(-y+x)=0$

$\mu_1=\mu_2=0$

$9x^2-1=0 \rightsquigarrow x^2=\frac{1}{9}$ ⟨ $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$

y ⟨ $+\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\left(\frac{1}{3},+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \to -\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\leq 0$ ↯

$\left(+\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \to x+y-1\leq 0$ ↯

$\left(-\frac{1}{3},+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \to \leq 0$ ↯

$\left(-\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \to x+y-1\leq 0$ ↯

$\mu_2=0,\ \mu_1>0$

$\mu_1=9x^2-1=9\cdot(1-y)^2-1 \rightsquigarrow 9-18y+9y^2-1=9^2-18y+8$

$\mu_1=3y^2-1$

$x+y-1\geq 0$

$-y+x\geq 0$

$x=1-y$

$6y^2-18y+9=0$

$y_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-36}}{3}=\frac{9\pm\sqrt{45}}{3}=\frac{9\pm3\sqrt{5}}{3}=3\pm\sqrt{5}$

$\mu_1,\mu_2>0$

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ -y+x=0 \end{cases} \to \begin{matrix} 2y-1=0 \to y=\frac{1}{2} \\ x=y \quad\quad x=\frac{1}{2} \end{matrix} \to OK$$

Siccome è un problema PC $\Rightarrow$ è minimo assoluto

ESAME FEBBRAIO 2020

max $x_1 - x_2$

$2x_1 + x_2 \le \frac{11}{2}$

$x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le \frac{7}{3}$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

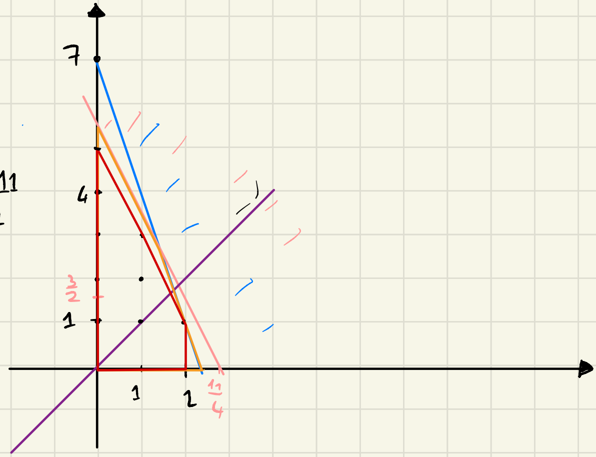
$\xrightarrow{\text{RILASSAMENTO CIN}}$

max $x_1 - x_2$

$4x_1 + 2x_2 \le 11$

$3x_1 + x_2 \le 7$

$x_1, x_2 \ge 0$



Z conv $\{ x_1 \le 2, 2x_1 + x_2 \le 5, x_1, x_2 \ge 0 \}$

$(0,5),(2,1) \rightsquigarrow \frac{x_1 - 0}{2 - 0} = \frac{x_2 - 5}{1 - 5} \to \frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 5}{-4}$

$\to \frac{x_1}{2} = -\frac{x_2}{4} + \frac{5}{4} \to 2x_1 + x_2 \le 5$

• Taglio di Gomory

max $x_1 - x_2$

$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 7$

$\longrightarrow$

max $x_1 - x_2$

$x_3 = 11 - 4x_1 - 2x_2$

$x_4 = 7 - 3x_1 - x_2$

$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_1}$

max $\frac{7}{3} + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)x_2 - \frac{1}{3}x_4$

$x_3 = \frac{5}{3} + \left(+\frac{4}{3} - 2\right)x_2 + \frac{4}{3}x_4$

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$

$\longrightarrow$

max $\frac{7}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$

$x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_4$

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$

Applico taglio di Gomory su x_3 $\quad -(\beta_k - \lfloor \beta_k \rfloor) + (-\alpha_1 - \lfloor -\alpha_1 \rfloor)x_1 + \dots$

$x_3 \to -\left(\frac{5}{3} - 1\right) + \left(+\frac{2}{3} - 0\right)x_2 + \left(-\frac{4}{3} + 2\right)x_4$

$\to -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4 \ge 0$

max $\frac{7}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$

$x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_4$

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$

$y_1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4$

$\xrightarrow[\text{entra } x_2]{\text{esce } y_1}$

max $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_4 - \frac{5}{2}y_1$

$x_3 = 1 + 2x_4 - y_1$

$x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_4 - y_1$

$x_2 = 1 - x_4 + \frac{3}{2}y_1$

$\xrightarrow[\text{esce } x_2]{\text{entra } x_4}$

max $2 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{2}y_1$

$x_3 = 3 - 2x_2 + \frac{1}{2}y_1$

$x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}y_1$

$x_4 = 1 - x_2 + \frac{3}{2}y_1$

$\rightsquigarrow$ SOL OTTIMA PER PLI

VAL. OTTIMO = 2

$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 1$

OK!

Esercizio 2

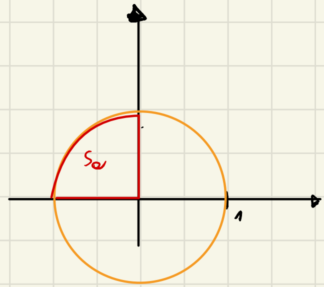
$\min xy$

$-x^2-y^2+1 \geq 0$

$-x \geq 0$

$y \geq 0$

• È un problema di programmazione convessa?



$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ DETERMINANTE $<0 \rightarrow$ non è convessa

$\nabla c_1 \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rightarrow \nabla^2 -c_1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\nabla c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \nabla^2 -c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\nabla c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \nabla^2 -c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

} minori tutti $\geq 0 \rightarrow c_1, c_2, c_3$ sono concave

È un problema P.C

• Ci sono punti che non soddisfano le constraint qualification riguardanti i gradienti dei vincoli attivi

$\begin{pmatrix} -2x & -1 & 0 \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ 3 vettori di dimensione 2, sono sempre linearmente dipendenti

ma se $x=0$, $y=0 \rightarrow +1=0 \rightarrow$ Assurdo

• Si impostino le condizioni KKT

$L(x,y,u_1,u_2,u_3) = xy - u_1(-x^2-y^2+1) - u_2(-x) - u_3(y)$

1) $y + 2u_1x + u_2 = 0$
2) $x + 2u_1y - u_3 = 0$
3) $-x^2-y^2+1 \geq 0$
4) $-x \geq 0$
5) $y \geq 0$
6) $u_1(-x^2-y^2+1) = 0$
7) $u_2(-x) = 0$
8) $u_3(y) = 0$

caso 1) $u_1=0, u_2=0, u_3=0$

$\boxed{y=0,\ x=0} \rightarrow$ OK

caso 2) $u_1>0, u_2>0, u_3>0$

$-x=0 \rightarrow x=0$

$y=0$

$-x^2-y^2+1=0 \rightarrow 1=0$ ↯

caso 3) $u_1>0, u_2=0, u_3=0$

$-x^2-y^2+1=0 \rightarrow x^2+y^2=1 \rightarrow x=\pm 1$
- $+$: ↯ perché $x \leq 0$
- -1: $y=0$, 2) $\rightarrow 1=0$ ↯

CASO 4 $\mu_1>0$ $U_2>0$ $U_3=0$

$x=0 \to -y^2+1=0 \to y^2=\pm1$

$+ \to \mu_1=0+2\mu_1+0=0 \to \mu_1=0$ ↯

$- \to$ ↯↯

CASO 5 $\mu_1>0$ $\mu_3>0$ $\mu_2=0$

$y=0 \to x=\pm1$

$+ \to$ ↯↯

$- \to -1-\mu_3=0$

$\mu_3=1$ OK

$0-2y_1=0 \to \mu_1=0$ ↯↯

CASO 6 $\mu_1>0$ $U_2>0$, $U_1=0$, $U_3=0$

$x=0 \to 2\mu_1 y=0 \to \mu_1=0$ ↯↯

$y=\pm1$ $+1$; $-$ ↯↯

CASO 7 $U_2>0$, $U_1=0$, $U_3>0$

$y=0$, $x=0$, $\mu_2=0$ ↯↯

CASO 8 $U_3>0$, $U_1=0$, $\mu_2=0$

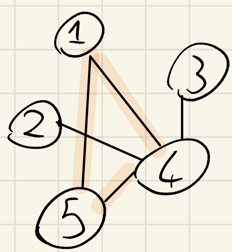
→ Per teorema di Weierstrass esiste un minimo globale ⇒ (0,0) con val. (0,0)

$y=0$, $x=0$, $-\mu_3=0$ ↯↯

ESAME APRILE 2017 - PARTE 2

nodo a=1 →

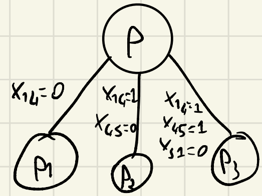
aggiungo (3,4) 2
aggiungo (4,5) 4
aggiungo (2,4) 8
STOP
aggiungo (1,5) 7
aggiungo (1,4) 8



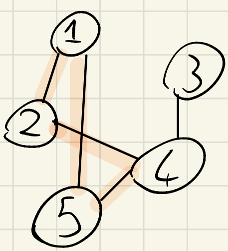
sottocircuito: 1-4-5-1

LB=29
UB=+∞ →

BRANCHING



P_1: aggiungo (3,4) 2
aggiungo (4,5) 4
aggiungo (2,4) 8
STOP
aggiungo (1,5) 7
aggiungo (1,2) 9

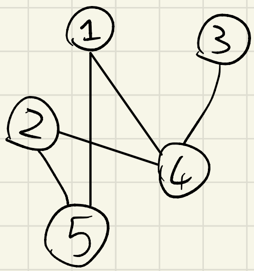


sottocircuito 1-2-4-5-1

LB=30
UB=+∞

P_2 $x_{1,4}=1$; $x_{4,5}=0$

aggiungo $(3,4)$ 2
aggiungo $(4,2)$ 8
aggiungo $(2,5)$ 11
- - - - - - - -
aggiungo $(1,4)$ 8
aggiungo $(1,5)$ 7

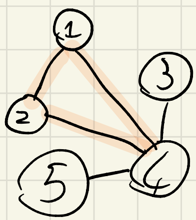


sottocircuito: 1-4-2-5-1

$LB=35$
$UB=+\infty$

P_3 $x_{1,4}, x_{4,5}=1$, $x_{5,1}=0$

aggiungo $(4,5)$ 4
aggiungo $(3,4)$ 2
aggiungo $(2,4)$ 8
STOP
aggiungo $(1,4)$ 8
aggiungo $(1,2)$ 9



sottocircuito 1-2-4

$LB=31$
$UB=+\infty$

GENNAIO 2020

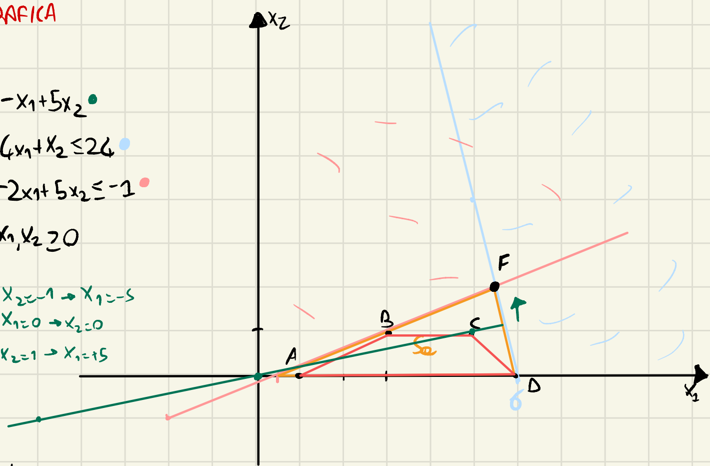
Esercizio 1 ~ BRANCH AND BOUND PER VIA GRAFICA

$$\max \; -x_1+5x_2$$
$$4x_1+x_2\le 24$$
$$-2x_1+5x_2\le -1$$
$$x_1,x_2\ge 0$$
$$x_1,x_2\in \mathbb{Z}$$

$\xrightarrow{\text{RILASSAMENTO LINEARE}}$

$$-x_1+5x_2$$
$$4x_1+x_2\le 24$$
$$-2x_1+5x_2\le -1$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

$x_2=-1 \rightarrow x_1=-5$
$x_1=0 \rightarrow x_2=0$
$x_2=1 \rightarrow x_1=+5$



$A(1,0)$, $B(3,1)$, $C=(5,1)$, $D=(6,0)$

Z conv $\{x_1-2x_2\le 1,\; x_1+x_2\le 6,\; x_1\ge 0,\; x_2\le 1\}$

$F=\left(\frac{11}{2},2\right)$ sol ottima $\rightarrow U(P)=-\frac{11}{2}+10=\frac{9}{2}$

$4x_1+x_2=24 \rightarrow 4x_1-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}x_1=24$

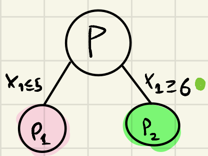
$-2x_1+5x_2=-1 \rightarrow x_2=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}x_1$

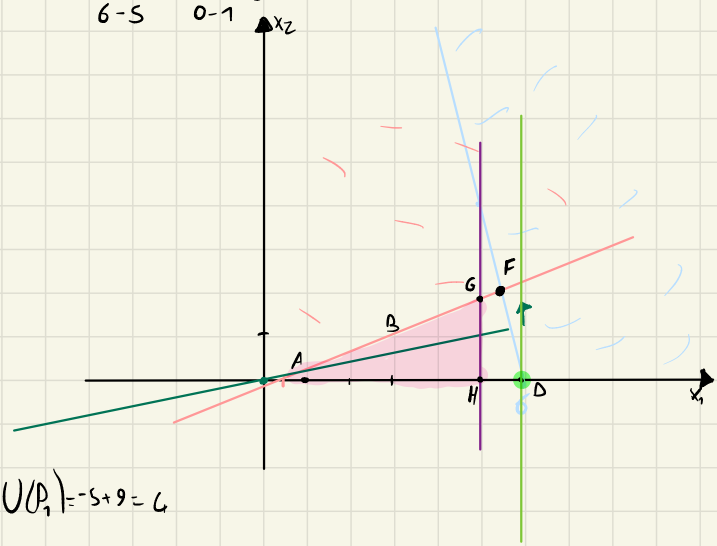
$\overline{AB}=\frac{x_1-1}{2}-\frac{x_2-0}{1-0}=0$ $\quad \overline{CD}=\frac{x_1-5}{6-5}-\frac{x_2-1}{0-1}=x_1-5+x_2-1=x_1+x_2\le 6$

$\frac{22}{5}x_1=\frac{121}{5} \rightarrow x_1=\frac{11}{2}$

$x_2=-\frac{1}{5}+\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{5}=+\frac{10}{5}=2$

BRANCHING



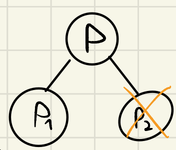


$G=(5,2)$ ~ sol ottima $U(P_1)=-5+9=4$

$x_1=5 \rightarrow x_1=5$

$-2x_1+5x_2=-1 \quad x_2=\frac{9}{5}$

$D=6,0$ ~ sol ottima $U(P_2)=-6$

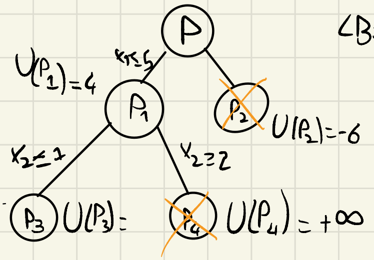


$LB=-6$

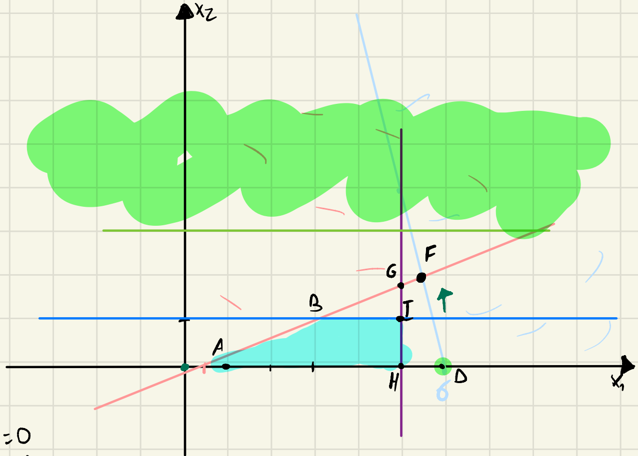
$U(P_2)=-6$

$U(P_1)=$

BRANCHING

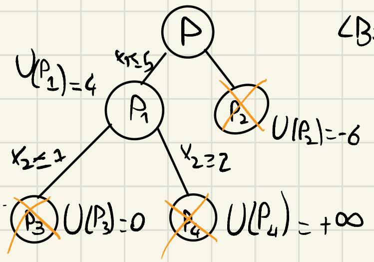


$LB=-6$



$x_2=1$

$x_1=5$ $\rightarrow$ SOL OTTIMA, VAL OTTIMO $=-5+5=0$ $\rightarrow$ $LB=0$



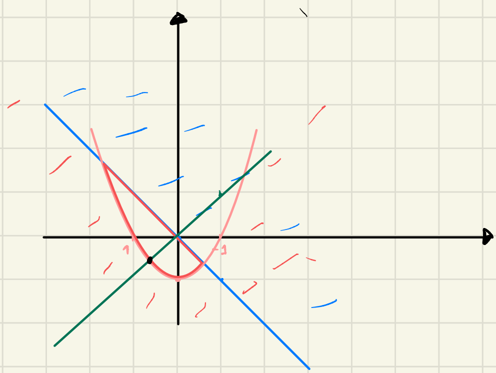
$LB=0$

ESERCIZIO 2

min $-x+y$

$y-x^2+1 \ge 0$

$-y+x \ge 0$



- È un problema P.C?

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \nabla^2 f$ è semidefinita positiva $\rightarrow$ P è convesso

$\nabla C_1 = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla^2 C_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_1$ è concava

$\nabla C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \nabla^2 C_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_2$ è concava

} è un problema di programmazione convessa

- constraint qualification

$\begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to 2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2} \quad x=\frac{1}{2} \to \begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1 \geq 0 \text{ Ok} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \to \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ viola constraint qualification, val $=0$

- CONDIZIONI KKT + TROVARE PUNTI

$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = -x+y-\mu_1(y-x^2+1)-\mu_2(-y+x)$

1) $-1+2\mu_1 x-\mu_2=0$
2) $1-\mu_1+\mu_2=0$
3) $\mu_1(y-x^2+1)=0$
4) $\mu_2(-y+x)=0$
5) $y-x^2+1\geq 0$
6) $-y+x\geq 0$

caso 1) $\mu_1=\mu_2=0$

$-1=0 \to$ ↯

caso 2: $\mu_1,\mu_2>0$

$-y+x=0 \to x=y$

$y-x^2+1=0 \to y-y^2+1=0 \to y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$ $\begin{cases} + & \frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0 \\ - & \frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0 \end{cases}$

$\frac{-1+2,3}{2}=\frac{1,3}{2}$ 0,56

$\frac{-1-2,3}{2}=-1,6$

$\mu_1=1+\mu_2$

$-1+2\cdot\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+\left(2\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}+1\right)\mu_2=0$

$\mu_2=1$
$\mu_1=2$ $\to$ Ok

caso 3) $\mu_1>0, \mu_2=0$

$y-x^2+1=0 \to y-\frac{1}{4}+1=0$
$y=-\frac{3}{4}$

$\mu_1=1$
$\to 1+2x=0 \to x=-\frac{1}{2}$

$+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\geq 0$ OK

caso 4) $\mu_2>0, \mu_1=0$

$1+\mu_2 \Rightarrow \mu_2=-1$ ↯

- $\exists$ minimo globale x teorema di Weierstrass, $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}=-0{,}25 \to$ minimo globale

$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0$

$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=0$

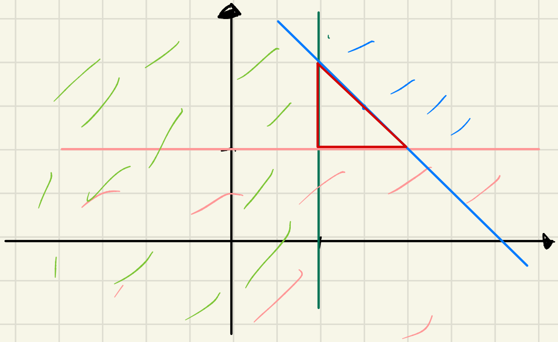
ESERCIZIO 2

$$\min \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}y^2$$
$$x-2 \geq 0$$
$$y-2 \geq 0$$
$$-x-y+6 \geq 0$$

1) E' un PC?

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}x^2 \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



non è semidefinita positiva → NON E' CONVESSA

• CONSTRAINT QUALIFICATION

I tre vincoli sono lineari.

$$\nabla G_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ sono sempre L.D. $x=2$, $y=2$ → $-4+6 \geq 0$ OK → tutti i punti non rispettano la constraint qualification

$$\nabla G_3(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 = 2 - 3$$

• CONDIZIONI KKT E PUNTI

$$L(x,y,u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}y^2 - u_1(x-2) - u_2(y-2) - u_3(-x-y+6)$$

1) $\frac{3}{8}x^2 - u_1 + u_3 = 0$
2) $\frac{1}{2}y - u_2 + u_3 = 0$
3) $u_1(x-2) = 0$
4) $u_2(y-2) = 0$
5) $u_3(-x-y+6) = 0$
6) $x-2 \geq 0$
7) $y-2 \geq 0$
8) $-x-y+6 \geq 0$

caso 1) $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

$x=0$
$y=0$ $\not 6$

caso 2) $u_1 > 0; u_2 > 0; u_3 > 0$

$x=2$, $y=2$ → OK

$\frac{3}{2} - u_1 + u_3 = 0$ → $u_3 = u_1 - \frac{3}{2}$
$1 - u_2 + u_3 = 0$ → $u_3 = u_2 - 1$
$\Big\}$ $u_1 - \frac{3}{2} = u_2 - 1$

$$u_1 = u_2 + \frac{1}{2}$$

caso 3) $u_1 > 0, u_2 = u_3 = 0$

$x=2$

2) $y=0$, 1) $u_1 = \frac{3}{2}$ OK

$\not 6 \, \not 7$ (7)

caso 4) $u_1 > 0$ $u_2 > 0$ $u_3 = 0$

$x=2$ $u_1 = \frac{3}{2}$

$y=2$ $u_2 = 1$ OK

caso 5) $u_1 > 0, u_3 > 0, u_2 = 0$

3) $x = 2$ $\quad u_3 = -2$ ↯

5) $y = 4$

caso 6) $u_2 > 0$ $u_1 = u_3 = 0$

$y = 2 \rightarrow u_2 = 1$

$x = 0 \rightarrow$ ↯

caso 7) $u_2 > 0, u_3 > 0, u_1 = 0$

$y = 2$ $\quad u_3 < 0$ ↯

$x = 4$

caso 8)

$u_3 > 0, u_1 = 0, u_2 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & \end{array}$$

$$\begin{cases} -x - y + 6 = 0 \\ \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 6 - x \nearrow \frac{6 - 12 - \sqrt{19}}{3}$$

$$\rightarrow \frac{3}{8}x^2 - 3 + \frac{1}{2}x = 0 \qquad 3x^2 - 24 + 4x = 0 \qquad \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{3} \begin{cases} - & \frac{-2 - 2\sqrt{19}}{3} = \cancel{\frac{-10}{3}} \\ + & \frac{-2 + 2\sqrt{19}}{3} \simeq 2 \end{cases}$$

perché ≤ 2

minimo globale $\exists$ x teorema di Weierstrass $f(2,2) = 1 - 1 = 0$ minimo globale

ESAME GENNAIO 2019

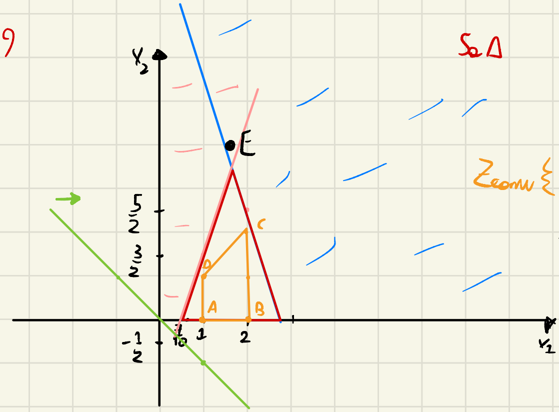
$\max\ x_1+x_2$

$6x_1+2x_2\le 17$

$10x_1-2x_2\ge 7$

$x_1,x_2\ge 0$

$x_1,x_2\in \mathbb{Z}$



SoΔ

$Z_{conv}\{\overline{CD},\overline{CB},\overline{AD},\overline{AB}\}$

$\overline{AD}=x_1=1,\ \overline{BC}\to x_1=2$

$\overline{DC}$

$D(1,1)$
$C(2,2)$ $\to \frac{x_1-1}{2-1}-\frac{x_2-1}{2-1}=0$

$x_1-1-x_2+1=0$

$x_1-x_2=0$

$Z_{conv}\{x_1-x_2\ge 0;\ x_1\ge 1;\ x_1\le 2,\ x_2\ge 0\}$

• Algoritmo Branch and Bound (VIA GRAFICA)

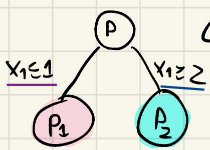
$E=$ sol ottimo $=\begin{cases}6x_1+2x_2=17\\10x_1-2x_2=7\end{cases}$

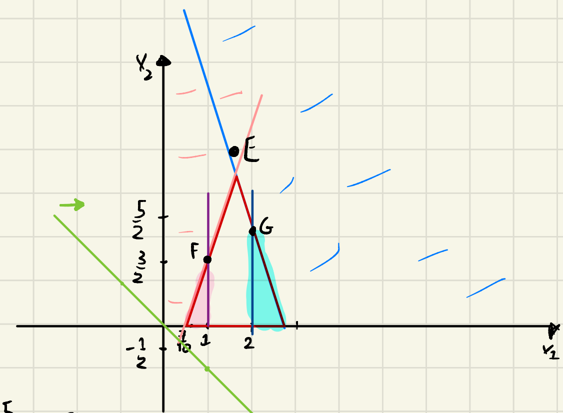
$x_2=5x_1-\frac{7}{2}\to\frac{15}{2}-\frac{7}{2}=\frac{8}{2}=4$

$16x_1=24\to x_1=\frac{24}{16}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

BRANCHING

$LB=-\infty$





P_1: x_1+x_2

$6x_1+2x_2\le 17$

$10x_1-2x_2\ge 7$ $\longrightarrow$ F: $x_1=1$

$x_1\le 1$

$x_1,x_2\ge 0$

$x_2=\frac{3}{2}\sim 1,5$ $\to U(P_1)=\frac{5}{2}\sim 2,5$

P_2 x_1+x_2

$6x_1+2x_2\le 17$ $\longrightarrow$ $x_1=2$ $\longrightarrow U(P_2)=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}=4,5$

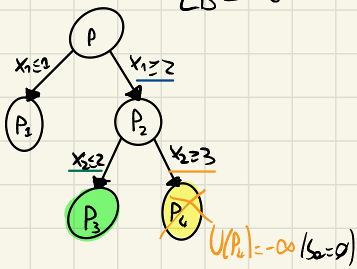
$10x_1-2x_2\ge 7$ $\quad x_2=\frac{5}{2}=2,5$

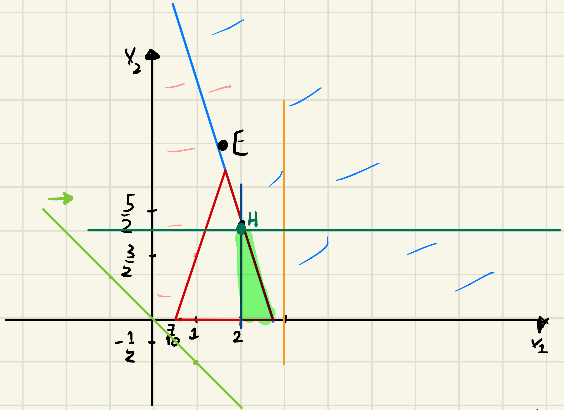
$x_1\ge 2$

$x_1,x_2\ge 0$

BRANCHING

$LB = -\infty$





P_3

x_1, x_2

$6x_1 + 2x_2 \le 17$

$10x_1 - 2x_2 \ge 7$

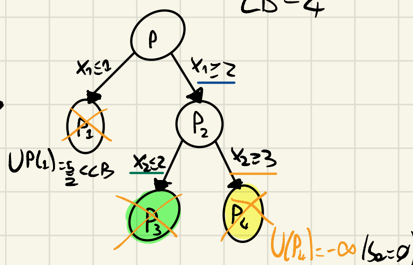
$x_1 \ge 2$

$x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\longrightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 2$ $\rightarrow U(P_3) = 4 = LB \rightarrow$

$LB = 4$



ESERCIZIO 2

• È un problema PC?

$\frac{2}{3}y^2 - x$ $\quad f(x,y)$

$-x \ge 0$ $\quad c_1(x,y)$

$-x^2 - y^2 + 1 \ge 0$ $\quad c_2(x,y)$

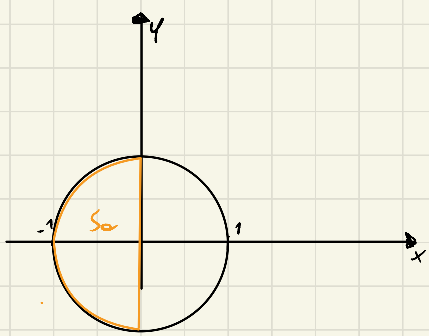
$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{3}y \end{pmatrix}$; $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ semidefinita positiva $\rightarrow$ È CONVESSA

$\nabla c_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\nabla^2 - c_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ semidefinita positiva $\rightarrow$ CONCAVA

$\nabla c_2(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$; $\nabla^2 - c_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ semidefinita positiva $\rightarrow$ CONCAVA

È UN PROBLEMA PC

• CONSTRAINT QUALIFICATION



$\begin{pmatrix} -1 & -2x \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \rightarrow DET = 2y = 0 \rightarrow y = 0$

$\quad \hookrightarrow x = 0$

$\quad y = 0$

$\quad \hookrightarrow +1 = 0$ ↯ $\rightarrow$ NON ESISTONO PUNTI CHE VIOLANO LA CONSTRAINT QUALIFICATION

CONDIZIONI KKT E PUNTI

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = \frac{2}{3}y^2 - x - \mu_1(-x) - \mu_2(-x^2-y^2+1 \geq 0)$$

1) $-1+\mu_1+2\mu_2 x = 0$
2) $\frac{4}{3}y + 2\mu_2 y = 0 \rightarrow 2y\cdot\left(\frac{2}{3}+\mu_2\right) = 0$
3) $\mu_1(-x) = 0$
4) $\mu_2(-x^2-y^2+1) = 0$
5) $-x \geq 0$
6) $-x^2-y^2+1 \geq 0$

$\longrightarrow$

caso 1 $\mu_1 = \mu_2 = 0$

1) $-1 = 0$ ↯

caso 2 $\mu_1, \mu_2 > 0$

$x = 0$

$-y^2+1 = 0 \rightarrow y^2 = 1$

$+$: $2\cdot\left(\frac{2}{3}+\mu_2\right) = 0 \rightarrow \mu_2 = -\frac{2}{3}$ ↯

$-$: $-\frac{2}{3}-\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_2 = -\frac{2}{3}$ ↯

$U_1 = 1$ OK

caso 3 $U_2 > 0, U_1 = 0$

$-x^2-y^2+1 = 0 \rightarrow$ $x = \pm 1$, $y = 0$ o $y = \pm 1$, $x = 0$

$x = +1$	$x = -1$	$y = +1$	$y = -1$
$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$y = 0$
↯	$-2U_2 = 1$	$U_1 = 1$	$U_1 = 1$
	$U_2 = -\frac{1}{2}$ ↯	↯	↯

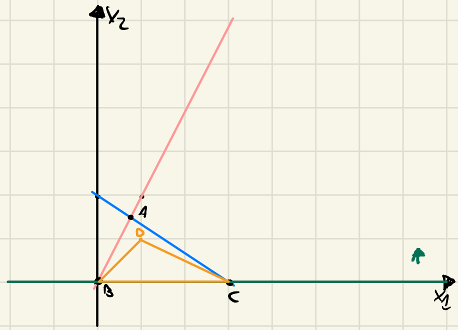
caso 4 $U_1 > 0, U_2 = 0$

$x = 0$

$y = 0$ $\quad U_1 = 1 \rightarrow$ ↯

MOLTO MALE
ATTENZIONE AI CALCOLI !!!!

ESAME GENNAIO 2015



- $\max x_2$
- $-2x_1 + x_2 \le 0$
- $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$\xrightarrow{\text{RILASSAMENTO LINEARE}}$

$\max x_2$

$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

$Z_{conv} = \{x_1 + 2x_2 \le 3,\ x_1 - x_2 \ge 0,\ x_1 \ge 0\}$

TAGLIO DI GOMORY

$\max x_2$

$x_3 = 2x_1 - x_2$

$x_4 = 6 - 2x_1 - 3x_2$

$\xrightarrow[\text{esce } x_3]{\text{entra } x_2}$

$\max 2x_1 - x_3$

$x_2 = 2x_1 - x_3$

$x_4 = 6 - 8x_1 - 3x_3$

$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_1}$

$\max \frac{3}{2} - \frac{7}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$

$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{7}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$

$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4$

SOL OTTIMA MA NON PER ALI

$\overline{BD} = \frac{x-0}{1-0} - \frac{y-0}{1-0} \rightarrow x - y = 0$

$\overline{BC} = \frac{x-1}{3-1} - \frac{y-1}{0-1} \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + y - 1 = 0$

$x + 2y - 3 = 0$

TAGLIO SU $x_2 \rightarrow -\left(\frac{3}{2} - 1\right) + \left(+\frac{7}{4} - 1\right)x_3 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$

$\max \frac{3}{2} - \frac{7}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$

$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{7}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$

$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4$

$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$

$\xrightarrow[\text{entra } x_4]{\text{esce } y_1}$

$\max 1 - x_3 - y_1$

$x_2 = 1 - x_3 - y_1$

$x_1 = \frac{1}{2} + 0x_3 - \frac{1}{2}y_1$

$x_4 = 2 - 3x_3 + 4y_1$

SOL OTTIMA MA NON PER ALI

taglio su $x_1 \rightarrow -\left(+\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right)y_1 \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1$

$\max 1 - x_3 - y_1$

$x_2 = 1 - x_3 - y_1$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_1$

$x_4 = 2 - 3x_3 + 4y_1$

$y_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1$

$\xrightarrow[\text{entra } y_1]{\text{esce } y_2}$

$\max 0 - x_3 - 2y_2$

$x_2 = 0 - x_3 - 2y_2$

$x_1 = 0 - y_2$

$x_4 = 6 - 3x_3 + 2y_2$

$y_1 = 1 + 2y_2$

$\rightarrow$ SOL OTTIMA

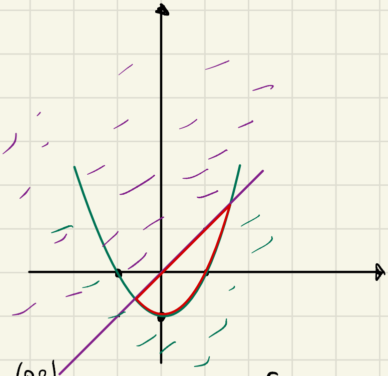
OK

ESERCIZIO 2

$\min -x+y$ $\quad F(x,y)$

$c_1(x,y)\; y-x^2+1 \geq 0$

$c_2(x,y)\; -y+x \geq 0$



$x^2-y=1$

- **È nella PC**

$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ semidefinita positiva $\to F$ è CONVESSA

$\nabla c_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \to \nabla^2 -c_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ semidefinita positiva $\to c_1$ è CONCAVA $\longrightarrow$ PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE CONVESSA

$\nabla c_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \nabla^2 -c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ semidefinita positiva $\to c_2$ è CONCAVA

- **Ci sono punti che non soddisfano la constraint qualification....?**

$\begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \text{DET} = 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \to y=\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1=0 \to \frac{1}{4}+1=0$ ↯ ↯ $\nexists$ punti che non soddisfano le condizioni

- **CONDIZIONI KKT + PUNTI**

$\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = -x+y-\mu_1(y-x^2+1)-\mu_2(-y+x)$

1) $-1+2\mu_1 x-\mu_2=0$
2) $1-\mu_1+\mu_2=0$
3) $\mu_1(y-x^2+1)=0$
4) $\mu_2(-y+x)=0$
5) $-y+x\geq 0$
6) $y-x^2+1\geq 0$

$\longrightarrow$

$\mu_1=\mu_2=0$

$-1=0$ ↯ ↯

$\mu_1>0, \mu_2>0$

$-y+x=0 \to x=y$

$y-x^2+1=0 \longrightarrow x-x^2+1=0$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\to \frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$, $\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0$

$\mu_2=\mu_1-1$

$-1+2\mu_1 x-\mu_1+1=0$

$\mu_1\cdot(2x-1)=0$

$u_1 > 0 \quad U_2 = 0$

$u_1 = 1$ 2)

1) $-1+2x=0 \to x=\frac{1}{2}$

$y-x^2+1=0 \to y-\frac{1}{4}+1=0 \to y=-\frac{3}{4}$

$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ OK!

$U_2 > 0, U_1 = 0$

$x=4$

$U_2=-1$ ↯

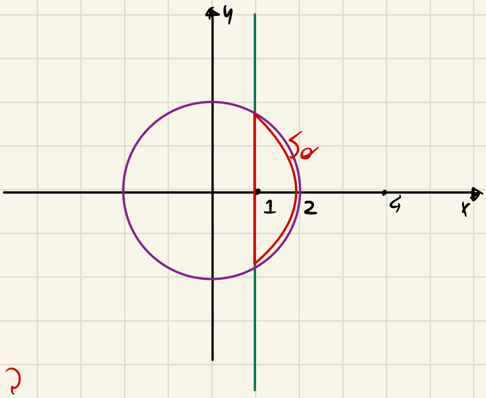
GENNAIO 2023

Esercizio 2

$\min \log(x)+y$

$-x^2-y^2+4 \geq 0$

$x \geq 1$



• È un problema PC?

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det \geq 0 \iff -\frac{1}{x^2} \geq 0 \to x^2 < 0$ IMPOSSIBILE ⇝ non è convesso

• Constraint qualification

$\nabla c_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$
$\nabla c_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\to \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ -2y & 0 \end{pmatrix}$ DET $2y \to 2y=0 \to y=0, x=1 \to 0-1+4=0$ ↯

∄ punti che non soddisfano la condizione

• Condizioni KKT

$L(x,y,u_1,u_2) = \log(x)+y - u_1(-x^2-y^2+4) - u_2(x-1)$

1) $\frac{1}{x}+2xu_1-u_2=0$

2) $1+2u_1y=0$

3) $u_1(-x^2-y^2+4)=0$

4) $u_2(x-1)=0$

5) $x-1 \geq 0$

6) $-x^2-y^2+4 \geq 0$

Trovare punti KKT

$u_1 = 0; u_2 = 0$ 2) $1 = 0$ ↯

$u_1 = 0; u_2 > 0$ 2) $1 = 0$ ↯

$u_1 > 0 \quad u_2 > 0$

$x = 1$

$-1 - y^2 - 4 = 0$

$y = \pm\sqrt{5}$

$1 + 2u_1 \pm\sqrt{5} = 0 \rightarrow 2u_1(\pm\sqrt{5}) = -1$

$y = +\sqrt{5} \rightarrow u_1 < 0$ ↯

$y = -\sqrt{5} \rightarrow u_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{10} > 0$ OK!

1) $u_2 = 1 + \hat{2}\frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{10}\sqrt{5}} > 0 \rightarrow$ OK

$u_1 > 0 \quad u_2 = 0$

$-x^2 - y^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$x = \pm 2 \quad y = 0$

$x = 0 \quad y = \pm 2 \rightsquigarrow$ ↯

$x = -2$ ↯

$x = 2$

$y = 0 \rightarrow$ 2) $0 = 1$ ↯

Minimo globale esiste per teorema di Weierstrass (S_a è chiuso e limitato ed f continua); $(1, -\sqrt{5})$ è il minimo globale con valore ottimo $\log(1) + \sqrt{5}$

DOMANDE TEORIA RISPOSTA APERTA

1) Si illustrino i passaggi principali degli algoritmi line search e trust region x i problemi di ottimizzazione non lineare non vincolata

LINE SEARCH

Si individui una DIREZIONE DI DISCESA d_k

Si individui, tramite una ricerca sulla semiretta, con origine x_k e direzione d_k, uno scalare $\alpha_k>0$ tale che:
$f(x_k+\alpha_k d_k)<f(x_k)$

Si pongo $x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$ e $k=k+1$

TRUST REGION

Metodi iterativi in cui l'iterato successivo x_{k+1} viene determinato risolvendo un opportuno sottoproblema basato sull'iterato corrente x_k.

Nel sottoproblema si minimizza un modello quadratico $M_k(x)$ che approssima f in una sfera centrata in x_k e con un certo raggio ρ_k: $\tilde{x}_k \in \arg\min_{x:\|x-x_k\|\le\rho_k} M_k(x)$

e si pone

$$x_{k+1}\begin{cases} x_k & \text{se } f(\tilde{x}_k)\ge f(x_k) \\ \tilde{x}_k & \text{altrimenti}\end{cases}$$

2) Si spieghi come si costruisce un taglio di Gomery e si dimostri che è un taglio valido

Supponiamo di avere una base ottima per un rilassamento lineare con soluzione non intera (β_k valore non intero)

Taglio di Gomery è dato da

$$-f_k+f_{k1}x_{im+1}+f_{k2}x_{im+2}+\dots+f_{k,n-m}x_n\ge 0$$

con f_{kj} pari alla mantissa di $-\alpha_{kj}$ mentre f_k è la mantissa di β_k

DIM. TAGLIO DI GOMERY E' UN TAGLIO VALIDO:

1) SOL. OTTIMA del rilassamento non soddisfa questo vincolo: $\underbrace{x_{im+1}=x_{in}}_{\text{variabili fuori base}}=0 \to y_1=-f_k<0$

2) Taglio è soddisfatto da ogni punto di Za: prendiamo un punto generico $(\bar{x}_{i1},\dots,\bar{x}_{im})$ in Za.

Sostituendo nell'equazione $\bar{x}_{ik}=\beta_k+\alpha_{k1}\bar{x}_{im+1}+\dots+\alpha_{k,n-m}\bar{x}_{in}$

$$\bar{y}_1=-f_k-f_{k1}\bar{x}_{im+1}+f_{k2}\bar{x}_{im+2}+\dots+f_{k,n-m}\bar{x}_{in}$$

si vuole dimostrare che $y_1 \geq 0$

$\bar{y}_1 = \lfloor \beta_k \rfloor - \bar{x}_{ik} - \lfloor -\alpha_{k,1} \rfloor \bar{x}_{im+1} - \dots - \lfloor -\alpha_{k,n-m} \rfloor \bar{x}_{in}$ ~ in ogni punto di Z_0 il valore $\bar{y}_1$ è un valore intero

$\bar{y}_1 + f_k = \underbrace{f_{k,1}\bar{x}_{im+1}}_{\geq 0} + \underbrace{f_{k,n-m}\bar{x}_{in}}_{\geq 0} \rightarrow \geq 0$, $0 < f_k < 1$ ed $\bar{y}_1$ assumono solo valori interi $\Rightarrow \bar{y}_1 \geq 0$ $\forall$ punto di Z_0 C.V.D

3) TUTTI I CASI CHE PERMETTONO DI CANCELLARE UN NODO DELL'ALBERO NELL'ALGORITMO BRANCH AND BOUND

Cancello un nodo T se:

$U(T) \leq LB$

$U(T) = +\infty$

4) Si consideri un problema di programmazione non lineare senza vincoli con funzione obiettivo convessa. Si mostri con un esempio che non necessariamente tale problema ammette un ottimo locale. Si dimostri inoltre che, nel caso esistano ottimi locali, questi sono anche ottimi globali. Intine, si dimostri che, nel caso di runzione obiettivo strettamente convessa, se esiste un ottimo globale, questo e unico.

Se $\nabla f(x^*) \neq 0 \rightarrow$ punto non è di minimo

DIM SE $\exists$ OTTIMO LOCALE $\Rightarrow$ OTTIMO È GLOBALE

PER ASSURDO x^* minimo locale non globale, ovvero $\exists \bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) < f(x^*)$

$\forall \lambda \in (0,1): f(\lambda x^* + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(\bar{x}) < f(x^*)$

che contraddice l'ottimalità locale di x^*

DIM. CASO STRETTAMENTE CONVESSO : $x^*, \bar{x}, x^* \neq \bar{x}$ due minimi globali distinti $\Rightarrow f(\bar{x}) = f(x^*)$

$\forall \lambda \in (0,1)$ $f(\lambda x^* + (1-\lambda)\bar{x}) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(\bar{x}) = f(x^*)$

che contraddice OTTIMALITÀ GLOBALE DI x^*

5) Rilassamento Lagrangiano e duale Lagrangiano

$\lambda \geq 0$ ⇝ vettore dei moltiplicatori di Lagrange

$$u(\lambda) = \max_{\substack{Ax \leq b \\ x \geq 0 \quad x \in \mathbb{Z}^n}} cx + \lambda(d - Cx)$$

con $f'(x) = cx + \lambda(d - Cx)$ e $T' = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$

Ad ogni $\lambda \geq 0$ corrisponde un U.B. $u(\lambda)$, per ottenere il miglior upper bound possibile bisogna risolvere il problema $\min_{\lambda \geq 0} u(\lambda)$

6) Definizioni di rilassamento di ottimizzazione e si dimostri che il valore ottimo del rilassamento fornisce un upper bound per il valore ottimo del problema di ottimizzazione

$\alpha(f, T) = \max_{x \in T} f(x)$ ⇝ valore ottimo della funzione f nell'insieme T.

Il RILASSAMENTO DI UN PROBLEMA è un problema: $\alpha(f', T') = \max_{x \in T'} f'(x)$ con $T \subseteq T'$ e $f'(x) \geq f(x)$

OSS: $\alpha(f', T') \geq \alpha(f, T)$ ~ VAL. OTTIMO RILASSAMENTO LINEARE è un UPPER BOUND per il valore ottimo del problema.

DIM: sia $x^* \in T$ una soluzione ottima del problema cioè $f(x^*) = \alpha(f, T)$ e $x' \in T'$ sol ottima del rilassato cioè $f(x') = \alpha(x', T')$
$x^* \in T$ implica $x^* \in T'$, inoltre $f'(x^*) \geq f(x^*)$.

L'ottimalità di x^* implica $f'(x') \geq f'(x^*)$ $\Rightarrow \alpha(f', T') = f'(x') \geq f'(x^*) \geq f(x^*) = \alpha(f, T)$ C.V.D.

7) Matrice unimodulare

Si dice Totalmente unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante 0, +1 e -1.
Se A di un problema PLI è TU e b sono termini interi ⇒ è possibile risolvere il problema di PLI risolvendo il suo rilassamento.

matrice dei vincoli

vettore termini noti

8) Condizioni ottimalità locale primo e secondo ordine

1° ordine $\nabla f(x^*) = 0$ ⇝ non è una condizione sufficiente (nel caso convesso lo è)

2° ordine $\nabla^2 f(x^*)$ è semidefinita positiva