

RICERCA OPERATIVA - PARTE I

ESERCIZIO 1. (10 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + ax_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

dove a è un parametro.

- Si stabilisca per quali valori di a il duale di questo problema di PL ha regione ammissibile vuota;
- si restituiscano le soluzioni ottime (ottenute per via grafica) del problema di PL in funzione di a ;
- si fissi $a = -\frac{5}{2}$ e si trasformi il problema in forma standard;
- si scriva il duale del problema in forma standard e si ottengano tutte le sue soluzioni ottime tramite le condizioni di complementarità.

ESERCIZIO 2. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ & x_1 - \frac{1}{4}x_2 \leq \frac{3}{2} \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in Z \end{aligned}$$

- Lo si risolva per via grafica;
- si individui la chiusura convessa della regione ammissibile del problema di PLI e la si descriva tramite opportune disequazioni;
- dopo aver trasformato il problema in forma standard, lo si risolva con l'algoritmo di taglio di Gomory visualizzando graficamente i tagli aggiunti.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Dato un problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

si dimostri che se esiste un vettore \mathbf{y}^* tale che

$$\mathbf{y}^* \mathbf{A} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^* \mathbf{b} < 0,$$

allora il problema di PL ha regione ammissibile vuota.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando la risposta):

- se una soluzione di base è soluzione ottima di un problema di PL, allora la base corrispondente soddisfa certamente la condizione di ottimalità;
- esiste una corrispondenza biunivoca tra basi e soluzioni di base;
- ogni operazione di cardine eseguita secondo le regole dell'algoritmo del simplesso permette di passare da un vertice della regione ammissibile a un vertice distinto della stessa.