

RICERCA OPERATIVA - PARTE I

ESERCIZIO 1. (11 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_5 \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ & x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Si eseguano i seguenti punti:

- si scriva il duale del problema;
- si risolva il problema duale per via grafica;
- si risolva il problema primale con il metodo che si ritiene più opportuno visualizzando graficamente a ogni iterazione dove ci si trova per quanto riguarda il duale;
- si trovi la soluzione ottima del problema duale applicando le condizioni di complementarità;
- si esegua l'analisi di sensitività sui coefficienti di x_1 e x_2 nell'obiettivo spiegando cosa succede nel problema duale agli estremi degli intervalli individuati;
- esiste un coefficiente di x_5 nell'obiettivo tale da rendere illimitato il problema primale?

ESERCIZIO 2. (8 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 \\ & \alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si risolva spiegando come varia la soluzione al variare di α .

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si dimostri il teorema fondamentale della Programmazione Lineare.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Si dimostri che dato un problema primale

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

e il corrispondente problema duale, per ogni $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$ e ogni $\bar{\mathbf{u}} \in D_a$, si ha che $\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \geq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$ e inoltre che, nel caso in cui valga l'uguaglianza, allora $\bar{\mathbf{x}} \in S_{ott}$ e $\bar{\mathbf{u}} \in D_{ott}$.