

RICERCA OPERATIVA - PARTE I

ESERCIZIO 1. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- lo si risolva graficamente, evidenziando i vertici della regione ammissibile;
- si trasformi il problema in forma standard e si stabilisca che tale problema ha regione ammissibile non vuota usando il metodo due fasi;
- si risolva il problema visualizzando i vertici visitati durante la risoluzione del problema di II fase;
- si scriva il duale del problema in forma standard e lo si risolva con le condizioni di complementarità;
- si stabilisca di quanto si può incrementare il termine noto del primo vincolo senza rendere illimitato l'obiettivo del problema duale.

ESERCIZIO 2. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_2 + x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Riconoscere graficamente la regione ammissibile Z_a del problema di PLI e quella S_a del suo rilassamento lineare;
- disegnare la chiusura convessa $\text{conv}(Z_a)$ di Z_a e darne una descrizione con opportune disequazioni;
- dopo aver trasformato il problema in forma standard, lo si risolva con l'algoritmo di taglio di Gomory;
- si individui il taglio di Gomory generato sul grafico originario (in funzione delle sole variabili x_1 e x_2) e si confronti la regione ottenuta con tale taglio con $\text{conv}(Z_a)$;
- di quanto deve diminuire il termine noto del primo vincolo perchè cambi il valore ottimo del problema di PLI?

ESERCIZIO 3. (5 punti) Dato un problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

si dia la definizione di raggio \mathbf{r} della regione ammissibile S_a di tale problema e si dimostri che $S_{ott} \neq \emptyset$ implica che $\mathbf{c}\mathbf{r} \leq 0$.

ESERCIZIO 4. (6 punti) Dato un problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Si diano le definizioni di base, soluzione di base e coefficienti di costo ridotto associati alla base per tale problema, illustrandole attraverso un esempio. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa motivando la risposta:

- se i coefficienti di costo ridotto per una base ammissibile sono tutti non positivi, allora la soluzione di base corrispondente è una soluzione ottima del problema di PL;
- se la soluzione di base associata a una base è una soluzione ottima del problema, allora i coefficienti di costo ridotto associati alla base sono non positivi;
- se i coefficienti di costo ridotto per una base sono tutti non positivi, allora la soluzione di base corrispondente è una soluzione ottima del problema di PL.