RICERCA OPERATIVA - 2° PARTE

CAPITOLO 7 - PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA, CHIUSURE CONVESSE E SOTTOCLASSI SPECIALI

PROBLEMA PLI in forma standard:

$$\begin{aligned} &\max\ cx \\ &Ax = b \\ &x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

insieme numeri interi

La regione ammissibile $Z_a = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b, x \geq 0\}$

L'insieme delle sue soluzioni ottime con $Z_{ott} = \{x^* \in Z_a : cx^* \geq cx\ \forall x \in Z_a\}$

Il rilassamento lineare del problema di PLI, il problema di PL ottenuto dal problema di PLI omettendo la richiesta che le variabili siano intere

La FUNZIONE OBIETTIVO cx di un problema PLI è la stessa del suo rilassamento lineare, da ciò consegue:

- $S_a = \emptyset \rightarrow Z_a = \emptyset$
- Se obiettivo del problema PLI è illimitato, lo è anche quello del suo rilassamento lineare
- Se $S_{ott} \neq \emptyset$ e $Z_{ott} \neq 0 \rightarrow \underbrace{w^*}_{\text{valore ottimo PLI}} \leq \overbrace{z^*}^{\text{valore ottimo rilassamento}}$
- Se $S_{ott} \neq \emptyset$ e contiene un punto a coordinate intere $\rightarrow x^* \in Z_{ott}$ e $w^* = x^*$

OSSERVAZIONE: i PROBLEMI PL sono più semplici da risolvere dei problemi PLI

DEFINIZIONE: Dato un insieme T, la chiusura convessa di T, indicata con "conv(T)", è il più piccolo insieme convesso contente T

La chiusura convessa $conv(Z_a)$ è un POLIEDRO se $Z_a \neq \emptyset$. Ovvero $\exists$ una matrice A' ed un vettore b' tali che:

$$conv(Z_a) = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b', x \geq 0\}$$

$$\max_{x \in Z_a} cx \quad (*)$$

$$\max_{x \in conv(Z_a)} cx \quad (*)$$

- Il problema * ammette una soluzione <=> * ammette una soluzione
- Ogni soluzione ottima di * è soluzione ottima di *
- Esiste almeno una soluzione ottima (di base) del problema * che è anche soluzione ottima del problema *

Delle sottoclassi importanti dei problemi PLI sono date dai problemi per cui $conv(Z_a) = conv(S_a \cap \mathbb{Z}^n) = S_a$

DEFINIZIONE: Una matrice A si dice TOTALMENTE UNIMODULARE (TU) se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante pari a $0, +1, -1$

PROPRIETÀ:
- A^T è TU
- $[A|I]$, con I matrice identità è TU
- Una matrice ottenuta duplicando righe e colonne di A è ancora TU.
- Una matrice ottenuta moltiplicando righe e colonne di A è ancora TU.
- Una matrice ottenuta scambiando righe (o colonne) di A è ancora TU.
- Una matrice ottenuta da A mediante un'operazione di cardine è ancora TU.

OSS. Sia A una matrice i cui elementi sono tutti uguali a $0, +1, e -1$ e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi $\neq 0 \rightarrow$ A è TU <=> l'insieme delle righe di A può essere suddiviso in due sottoinsiemi Q_1 e Q_2 tali che se una colonna contiene due elementi diversi da 0 si ha che:
- se i due elementi hanno lo stesso segno allora una delle due righe in cui si trovano è in Q_1 e l'altra in Q_2
- Se hanno segni opposti, le righe corrispondenti sono entrambe contenute in Q_1 o in Q_2.

COROLLARIO: Sia A una matrice i cui elementi sono tutti uguali a $0, +1, -1$ e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi $\neq 0$ => se nelle colonne con due elementi $\neq 0$, la somma degli elementi è pari a 0 => A è TU

OSS. Tutte le matrici nodo-arco di un grafo orientato e le matrici ottenute da queste rimuovendone alcune righe sono TU.

OSS: La matrice di incidenza per un grafo bipartito non orientato $G=(V_1 \cup V_2, A)$, dove V_1 e V_2 sono le due classi di bipartizione, è TU

TEOREMA $S_a(b_1,b_2,b_3)=\{x\in\mathbb{R}^n : A_1x\leq b_1, A_2x\geq b_2, A_3x=b_3\ x\geq 0\}$, $Z_a(b_1,b_2,b_3)=S_a(b_1,b_2,b_3)\cap\mathbb{Z}^n$
con b_1,b_2,b_3 vettori di interi A_1,A_2,A_3 sono TU $\Leftrightarrow$ per tutti i vettori interi b_1,b_2,b_3 per cui $S_a(b_1,b_2,b_3)\neq\emptyset$ si ha che: $conv(Z_a(b_1,b_2,b_3))=S_a(b_1,b_2,b_3)$

da cui → la soluzione di un problema di PL con matrici dei vincoli TU e vettori dei termini noti interi può essere ottenuta semplicemente eliminando i vincoli di interezza.

CAPITOLO 8 - ALGORITMI DI TAGLIO

Come per gli algoritmi PL è sempre possibile ricondurre un problema di PLI in forma standard
Per farlo si agisce come i problemi PL ma prima bisogna avere i termini noti come numeri interi.

ESEMPIO

$$\begin{array}{l} \max x_2 \\ x_1\leq\frac{1}{2} \\ x_2\leq\frac{1}{2} \\ x_1,x_2\geq 0,\ x_1,x_2\in\mathbb{Z}\end{array} \xrightarrow{\text{moltiplico}\ \times 2} \begin{array}{l} \max x_2 \\ 2x_1\leq 1 \\ 2x_2\leq 1 \end{array} \xrightarrow[\text{PLI STANDARD}]{\text{TRASFORMO IN}} \begin{array}{l} \max x_1 \\ 2x_1+y_1=1 \\ 2x_2+y_2=1 \\ x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0\ \ x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}\end{array}$$

DEFINIZIONE: Una disequazione $wx\leq v$ si definisce taglio valido per il problema di PLI se non è soddisfatta da x^* ma è soddisfatta da punti della REGIONE AMMISSIBILE del problema di PLI, ovvero

$$wx^*>v,\ wx\leq v\ \ \forall x\in Z_a$$

Gli ALGORITMI DI TAGLIO cominciano risolvendo il RILASSAMENTO LINEARE di PLI, se questo ha soluzione a coordinate tutte intere, essa è soluzione anche del problema di PLI, altrimenti si genera un taglio valido e lo si aggiunge ai vincoli del rilassamento lineare.

N.B.: l'aggiunta di tagli non modifica Z_a del problema PLI ma restringe il suo RILASSAMENTO LINEARE

Si suppone che il problema PLI ed il suo rilassamento non abbiano OBIETTIVO ILLIMITATO

SCHEMA FORMALE DI UN ALGORITMO DI TAGLIO

$\max\ cx$
$a_i x = b_i \quad i = 1 \dots m$ ↝ problema PLI
$x_j \geq 0,\ x_j \in I \quad j = 1, \dots, n$

1) RISOLVERE IL RILASSAMENTO LINEARE DEL PROBLEMA PLI

$\max\ cx$
$a_i x = b_i \quad i = 1, \dots, m$ ↝ rilassamento lineare
$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Se $S_a = \emptyset \Rightarrow Z_a = \emptyset$, altrimenti (escludendo che l'obiettivo sia illimitato) esiste una soluzione ottima indicata con x^{*1}; si pongo $K = 1$

PASSO 1: Se x^{*k} ha coordinate tutte intere, allora si restituisca $x^{*k} \in Z_{ott}$, altrimenti PASSO 2

PASSO 2: Si generi un TAGLIO VALIDO $w_k x \leq v_k$ che non sia soddisfatto da x^{*k} ma da tutti i punti di Z_a
$w_k x^{*k} > v_k \quad w_k x \leq v_k \quad \forall x \in Z_a$

PASSO 3: Si aggiunga il nuovo TAGLIO VALIDO ai vincoli originari del problema e ai tagli validi generati in precedenza e si risolva il problema di PL

* $\max\ cx$
$a_i x = b_i \quad i = 1$
$w_r x \leq v_r \quad r = 1, \dots, K$
$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Se tale problema ha regione ammissibile vuota $\Rightarrow Z_a = \emptyset$, altrimenti $x^{*(k+1)}$ è SOLUZIONE OTTIMA

PASSO 4: Si ponga $K = k+1$ e si ritorni al PASSO 1

provenienti dal taglio ammissibile

Per rendere * in FORMA STANDARD basta aggiungere una variabile $y_r \geq 0$ in tutti i vincoli $w_r x \leq v_r$

Per generare dei tagli validi useremo i TAGLI DI GOMORY. Supponiamo di avere una BASE OTTIMA $B^* = \{x_1, \dots, x_m\}$ per il rilassamento lineare del problema PLI.

$$\max \quad \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_{m+j}}$$
$$x_{i1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{1j} x_{i_{m+j}}$$
$$x_{ik} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} x_{i_{m+j}}$$
$$x_{im} = \beta_m + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{mj} x_{i_{m+j}}$$

supponendo che uno dei termini noti β_r, $r=1,\dots,m$ NON sia INTERO e sia β_k un tale valore non intero, l'equazione relativa a x_{ik} è:

$$x_{ik} = \beta_k + \alpha_{k1} x_{i_{m+1}} + \alpha_{k2} x_{i_{m+2}} + \dots + \alpha_{k,n-m} x_{in}$$

Il relativo TAGLIO DI GOMORY è dato da: $-f_k + f_{k1} x_{i_{m+1}} + f_{k2} x_{i_{m+2}} + \dots + f_{k,n-m} x_{in} \geq 0$
con f_{kj} $(j=1,\dots,n-m)$ è la mantissa di $-\alpha_{kj}$, cioè

$$f_{kj} = -\alpha_{kj} - \lfloor -\alpha_{kj} \rfloor^{*} \geq 0$$

* parte intera di α, il più grande intero $\leq \alpha$

f_k è la mantissa di β_k, cioè: $f_k = \beta_k - \lfloor \beta_k \rfloor > 0$ con $f_k > 0$ per la non interezza di β_k

Per mantenere il FORMATO STANDARD basta aggiungere una nuova variabile y_1 e riscrivere il taglio attraverso la seguente coppia di vincoli: $y_1 = -f_k + f_{k1} x_{i_{m+1}} + f_{k2} x_{i_{m+2}} + \dots + f_{k,n-m} x_{in}$
$y_1 \geq 0$

OSS: il TAGLIO DI GOMORY è un taglio valido

DIMOSTRAZIONE: bisogna dimostrare che:

1) sol. ottima del rilassamento lineare non soddisfa vincolo trovato
Per la sol. ottima tutte le variabili fuori base $x_{i_{m+1}} = \dots = x_{in} = 0$, quindi:
$y_1 = \underbrace{-f_{1k}}_{>0} + \underbrace{f_{k1} x_{1_{m+1}}}_{=0} \dots + \underbrace{f_{k,n-m} x_{in}}_{=0} < 0 \rightarrow$ SOL OTTIMA non soddisfa il nostro taglio

2) Il taglio è soddisfatto da ogni punto di Z_a: LUNGA → da fare alla fine

La soluzione di base $B^* \cup \{y_1\}$ è NON AMMISSIBILE PER PRIMALE ma AMMISSIBILE PER DUALE

La prima variabile ad uscire sarà y_1 ⤳ ponendo $x_1, \ldots, x_n, y_1 \in \mathbb{Z}$ ottengo una riformulazione del problema PLI iniziale

Stesso ragionamento vale per successivi K-esimi tagli.

ESEMPIO

$$\max\ x_1+x_2$$
$$2x_1+x_3=3$$
$$2x_2+x_4=3$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{Z}$$

Una base ottima per il rilassamento lineare di questo problema di PLI è la base $B^*=\{x_1,x_2\}$

↳
$$\max\ 3-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4$$
$$x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3$$
$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_4 \longrightarrow x_1^*=x_2^*=\frac{3}{2};\ x_3^*=x_4^*=0 \longrightarrow \text{NON RISOLVE PROBLEMA PLI!}$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

- Creo un taglio di Gomory considerando $x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3 \xrightarrow{\text{ricordo}} -\left(\frac{3}{2}-1\right)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)x_3 = \overbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3}^{y_1} \geq 0$
- Aggiungo il taglio trovato come vincolo del rilassamento lineare riformulato rispetto alla base ottima B^*

$$\max\ 3-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4$$
$$x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3$$
$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_4 \longrightarrow B^*\cup\{y_1\}$$
$$y_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3$$

non ammissibile per primale
ma ammissibile per duale

- Applico simplesso duale: esce y_1, entra x_3

$$\max\ \frac{5}{2}-y_1-\frac{1}{2}x_4$$
$$x_1=1-y_1$$
$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_4 \longrightarrow B \text{ ottima per PL ma } x_2 \text{ non intero} \rightarrow \text{NON OTTIMA PER PLI}$$
$$x_3=1+2y_1$$

- Scelgo x_2 per taglio di Gomory $\longrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4 \geq 0 \longrightarrow$ pongo $y_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4$, $y_2 \geq 0$

- Aggiungo nuovo taglio alla riformulazione del rilassamento lineare *

$$\max \tfrac{5}{2} - y_1 - \tfrac{1}{2}x_4$$
$$x_1 = 1 - y_1$$
$$x_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_4$$
$$x_3 = 1 + 2y_1$$
$$y_2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0$$

AMMISSIBILE PER DUALE → ESCE y_2, entra x_4

$$\max 2 - y_1 - y_2$$
$$x_1 = 1 - y_1$$
$$x_2 = 1 - y_2$$
$$x_3 = 1 + 2y_1$$
$$x_4 = 1 + 2y_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0$$

OTTIMALITÀ DUALE OK! → $x_1, x_2, x_3, x_4 = 1$

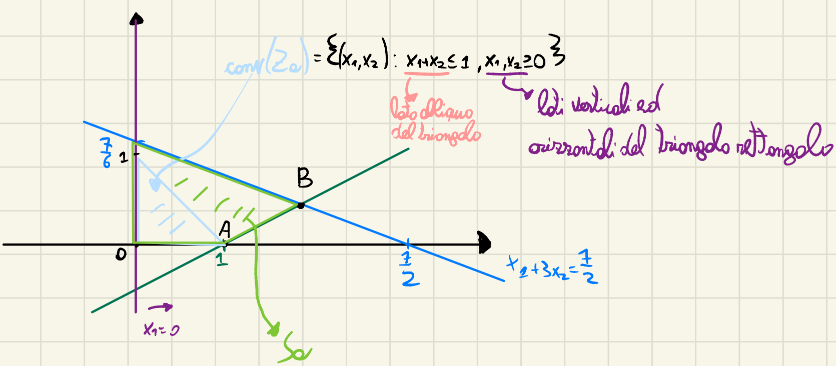
V. ottimo $= 2$

OSS. Se ad ogni iterazione il taglio di Gomory viene ricavato a partire dalla prima equazione con un termine noto β_k non intero, allora l'algoritmo termina con un numero finito di equazioni.

LEZIONE 24 - Esercizi su algoritmi di taglio

$$\max x_2$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - x_2 \leq \tfrac{1}{2}$$
$$x_1 + 3x_2 \leq \tfrac{7}{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

1) disegnare regione ammissibile del rilassamento lineare



2) Riporto problema PLI in forma standard

$$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$$
$$2x_1 + 6x_2 + y_2 = 7$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \quad \text{con } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

3 Applico simplesso

$B_0 \{y_1, y_2\} \rightsquigarrow \max x_1$

$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2$ ← ammissibile per il primale → $\underbrace{x_1 = 0, x_2 = 0}_{\text{Vertice } 0}$

$y_2 = 7 - 2x_1 - 6x_2$ non degenere

Entra x_1, esce y_1 → $B_1 = \{x_1, y_2\}$

$\max\ 1 + 2x_2 - y_1$

$x_1 = 1 + 2x_2 - y_1$

$y_2 = 5 - 10x_2 - 2y_1$

$x_1 = 1, y_2 = 5, x_2 = 0, y_1 = 0$

$(1,0) \rightsquigarrow$ vertice A

Entra x_2, esce y_2 → $B_2 = \{x_1, x_2\}$

$\max\ 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$

$x_1 = 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$ → sol ottima per rilassamento ma non per problema PLI ($x_2 = \frac{1}{2}$ non va bene)

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$ punto $B\ (2, \frac{1}{2})$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

4) Genero un taglio di gomory

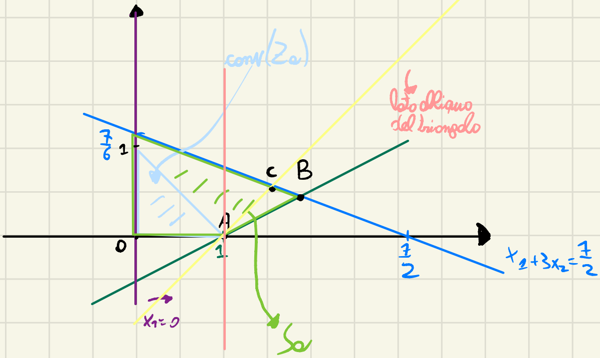
Prendo equazione di x_2 perché è l'unica con termine noto non intero

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$

$\underbrace{-\frac{1}{2} - 0}_{\text{mantissa}} \quad -\frac{1}{5} - (-1) = \frac{4}{5} \quad \frac{1}{10} - 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{10}y_2 \geq 0$

Per visualizzare il taglio graficamente sostituisco le variabili con i vincoli del rilassamento originale

$-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}(1-x_1+2x_2)+\frac{1}{10}(7-2x_1-6x_2)\geq 0 \rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{4}{5}(1-x_1+2x_2)+\frac{1}{10}(7-2x_1-6x_2)\geq 0 \rightarrow 1-x_1+x_2\geq 0$



- Aggiungo variabile pari all'eq trovata come vincolo

$$\max 2-\frac{3}{5}y_1-\frac{3}{5}y_2$$
$$x_1=2-\frac{3}{5}y_1-\frac{1}{5}y_2$$
$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}y_1-\frac{1}{10}y_2$$
$$y_3=-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}y_1+\frac{1}{10}y_2$$
$$x_1,x_2,y_1,y_2,y_3\geq 0$$

$\xrightarrow[\text{x duale}]{\text{ammissibile}}$ $B_1'\{x_1,x_2,y_1\}$

$$\max=\frac{13}{8}-\frac{3}{4}y_3-\frac{1}{8}y_2$$

$y_2=0 \quad y_1=\frac{5}{8},\ x_1=\frac{13}{8},\ x_2=\frac{5}{8} \rightarrow$ PUNTO C

$$x_1=\frac{13}{8}-\frac{3}{4}y_3-\frac{1}{8}y_2$$
$$x_2=\frac{5}{8}+\frac{1}{4}y_3-\frac{1}{8}y_2$$
$$y_1=\frac{5}{8}+\frac{5}{4}\qquad -\frac{1}{8}y_2$$

$\rightarrow$ non ottima per la PLI

- Faccio nuovo taglio

Scelgo $x_1=\frac{13}{8}-\frac{3}{4}y_3-\frac{1}{8}y_2 \rightarrow -\frac{5}{8}+\frac{3}{4}y_3+\frac{1}{8}y_2 = 1-x_1\geq 0$

sostituisco valori di y_3, y_2

Procedo come prima fino ad ottenere una soluzione ottima.

Esempio 2

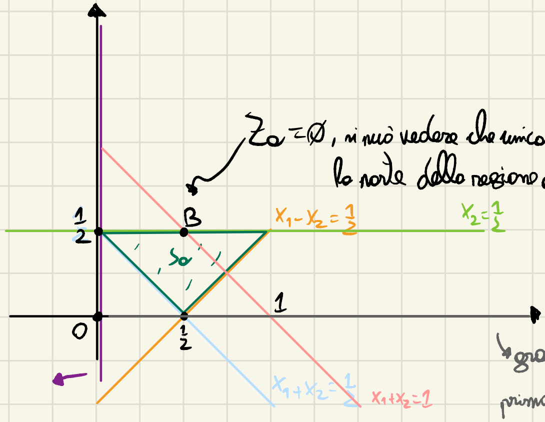
$\max -x_1$

$x_1+x_2 \geq \frac{1}{2}$

$x_1-x_2 \leq \frac{1}{2}$

$x_2 \leq \frac{1}{2}$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$



$Z_a = \emptyset$, si può vedere che unico coordinata intero di $x_2 = 0$ che non fa parte della regione ammissibile, stessa cosa per x_1

graficamente esclude primo e secondo quadrante, quindi $S_a = \emptyset$

$\max -x_1$

$2x_1+2x_2-y_1=1$

$2x_1-2x_2+y_2=1$

$2x_2+y_3=1$

posso applicare simplesso duale consigliato per risparmiare tempo!

o fare metodo 2 fasi

restituisce come risultato $B_0' = \{x_1, y_2, y_3\}$

$\max -\frac{1}{2} + x_2 - \frac{1}{2}y_1$

$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 + \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = 0 + 4x_2 - y_1$

$y_3 = 1 - 2x$

$\xrightarrow[\text{esce } x_1]{\text{entra } x_2}$ $B_1' = \{x_2, y_2, y_3\}$

$\max -x_1$

$x_2 = \frac{1}{2} - x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = 2 - 4x_1 + y_1$

$y_3 = 0 + 2x_1 - y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

unico punto di sol ottimo x il rilassamento

OTTIMALITÀ OK $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

sol. non OK per PLI

• Genero un taglio di Gomory

$-\frac{1}{2} + (-(-1)-1) + \left(-\frac{1}{2}-(-1)\right)y_1 = -\frac{1}{2}y_1 \longrightarrow -1x_1 + x_2 \geq 0$

lo ricavo da SOPRA

$\max -x_1$

$x_2 = \frac{1}{2} - x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = 2 - 4x_1 + y_1$

$y_3 = 0 + 2x_1 - y_1$

$y_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1$

$\xrightarrow{\text{SIMPLESSO DUALE}}$

$\max -x_1$

$x_2 = 1 - x_1 + y_4$

$y_2 = 3 - 4x_1 + 2y_4$

$y_3 = -1 + 2x_1 - 2y_4$

$y_1 = 1 + 2y_4$

$\longrightarrow$

$\max -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_3 - y_4$

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_3$

$y_2 = 1 - 2y_3 - 2y_4$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_3 - y_4$

$y_1 = 1 + 2y_4$

• Genero nuovo taglio prendendo eq x_2

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y_3\ge 0 \rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2x_2)\ge 0 \rightarrow -x_2\ge 0$

max $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y_3-y_4$

$x_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y_3$

$y_2=1-2y_3-2y_4$

$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y_3+y_4$

$y_1=1+2y_4$

$y_5=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y_3$

$\xrightarrow[\text{esce } y_5 \text{ entra } y_3]{\text{SIMPLESSO DUALE}}$

max $-1-y_5-y_4$

$x_2=0-y_5$

$y_2=-1-4y_5-2y_4$

$x_1=1+y_5+y_4$

$y_1=1+2y_4$

$y_3=1+2y_5$

(perché termine noto negativo e coeff. positivi)
DUALE ILLIMITATO $\rightarrow S_a=\emptyset$

$\rightarrow S_a=\emptyset \rightarrow Z_0=\emptyset$

SCHEDA ESERCIZI - Capitolo 4

ES. 4.1 ~ risolvere i seguenti programmi lineari interi per mezzo dell'algoritmo di Gomory

(a)

max $2x_1-x_2-x_3$

$2x_1+x_2\le 5$

$4x_2+x_3\le 5$

$x_1-x_3\ge 2$

$x_1,\dots,x_3\ge 0 \quad \in \mathbb{Z}$

① passaggio in forma standard

max $2x_1-x_2-x_3$

$2x_1+x_2+x_4=5$

$4x_2+x_3+x_5=5$

$x_1-x_3-x_6=2$

$x_1,\dots,x_6\ge 0, \in \mathbb{Z}$

$\longrightarrow$

max $2x_1-x_2-x_3$

$x_4=5-2x_1-x_2$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_6=-2+x_1-x_3$

non ammissibile x primale e duale
$\rightarrow$ 1° fase

$B_0\{x_4,x_5,a_1\}$

max $-2+x_1-x_3-x_6$

$x_4=5-2x_1-x_2$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$a_1=2-x_1+x_3+x_6$

$\xrightarrow[\text{esce } a_1]{\text{entra } x_1}$

max $0-a_1$

$x_4=1-2x_3-2x_6-x_2+2a_1$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=2+x_3+x_6-a_1$

$\rightarrow B_1$ ammissibile x primale

$B_1\{x_4,x_5,x_1\}$

max $2x_1-x_2-x_3$

$x_4=1-x_2-2x_3-2x_6$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=2+x_3+x_6$

$\longrightarrow$

max $4+x_3+2x_6-x_2$

$x_4=1-x_2-2x_3-2x_6$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=2+x_3+x_6$

$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_6}$

$B_2\{x_6,x_5,x_1\}$

max $5-2x_2-x_3-x_4$

$x_6=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2-x_3-\frac{1}{2}x_4$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4$

B_2 ottimo ma non intero, applico taglio partendo da x_6

$$\left(-\frac{1}{2}-(-0)\right)+\left(-\left(-\frac{1}{2}+0\right)\right)x_2+\left(-(-1)+(-1)\right)+\frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4 \geq 0$$

$$\max\ 5-2x_2-x_3-x_4$$
$$x_6=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2-x_3-\frac{1}{2}x_4$$
$$x_5=5-4x_2-x_3$$
$$x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4$$
$$y_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4$$
$$x_1,\dots,x_6,y_1\geq 0$$

simplesso duale $\longrightarrow$

esce y_1, entra min $\overset{x_2\ x_4}{\{4\ 2\}}$ $\longrightarrow$

$$\max\ z=4-x_2-x_3-2y_1$$
$$x_6=0-x_3-y_1$$
$$x_5=5-4x_2-x_3$$
$$x_1=2-y_1$$
$$x_4=1-x_2+2y_1$$
$$x_1,\dots,x_6,y_1\geq 0$$

$\longrightarrow$ $x_1=2, x_4=1, x_5=5$

$x_2=x_6=x_3=0$ SOL OTTIMA INTERA

6

$$\max\ -2x_1+3x_2-x_3$$
$$x_1+3x_2+x_4=8$$
$$x_2+2x_3+x_5=9$$
$$x_1-x_2+x_6=7$$
$$x_1,\dots,x_6\geq 0,\ \text{intere}$$

$\longrightarrow$

$B_0\ \{x_4,x_5,x_6\}$

$$\max\ -2x_1+3x_2-x_6$$
$$x_4=8-x_1-3x_2$$
$$x_5=9-x_2-2x_3$$
$$x_6=7-x_1+x_2$$
$$x_1,\dots,x_6\geq 0,\ \text{intere}$$

entra x_2 $\longrightarrow$ esce x_6

$B_1\ \{x_2,x_5,x_6\}$

$$\max\ 8-3x_1-x_4-x_6$$
$$x_2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$$
$$x_5=\frac{19}{3}+\frac{1}{3}x_1-2x_3+\frac{1}{3}x_4$$
$$x_6=\frac{29}{3}-\frac{4}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$$
" "

B_1 ottimo per S_0 ma non per Z_0

Applico taglio su equazione x_2

$$y_1=\left(-\frac{8}{3}+2\right)+\left(\frac{1}{3}+0\right)x_1+\left(\frac{1}{3}+0\right)x_4=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4$$

$B_1\ \{x_2,x_5,x_6,y_1\}$

$$\max\ 8-3x_1-x_4-x_6$$
$$x_2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$$
$$x_5=\frac{19}{3}+\frac{1}{3}x_1-2x_3+\frac{1}{3}x_4$$
$$x_6=\frac{29}{3}-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$$
$$y_1=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4$$
$$x_1,\dots,x_6,y_1\geq 0$$

esce y_1 $\longrightarrow$ entra x_4

$B_2\ \{x_2,x_5,x_6,x_4\}$ $\longrightarrow$ SOLUZIONE OTTIMA INTERA

$$\max\ 6-2x_1-3y_1-x_3$$
$$x_2=2-y_1$$
$$x_5=7-2x_3+y_1$$
$$x_6=9-x_1-y_1$$
$$x_4=2-x_1+3y_1$$
$$x_1,\dots,x_6,y_1\geq 0$$

c

$B_0\{x_4,x_5\}$ $\qquad$ $B_1\{x_4,x_2\}$

$$\max\ 2x_1+3x_2-x_3$$
$$2x_1+x_2-x_3+x_4=5$$
$$2x_2+x_3+x_5=3$$
$$x_1,\dots,x_5\ge 0 \in \mathbb{Z}$$

$\longrightarrow$

$$\max\ 2x_1+3x_2-x_3$$
$$x_4=5-2x_1-x_2+x_3$$
$$x_5=3-2x_2-x_3$$

$\xrightarrow[\text{esce } x_5]{\text{entra } x_2}$

$$\max\ \frac{9}{2}+2x_1-\frac{5}{2}x_3-\frac{3}{2}x_5$$
$$x_4=\frac{7}{2}-2x_1+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5$$
$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5$$

$B_2\{x_1,x_2\}$ ⇝ nel ottimo x rilassamento lineare ma non per PLI

$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_1}$

$$\max\ 8-x_3-x_5-x_4$$
$$x_1=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{4}x_5$$
$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5$$

- Taglio partendo da x_1

$$\left(-\frac{7}{4}+1\right)+\left(-\frac{3}{4}-(-1)\right)x_4+\left(\frac{1}{2}-(0)\right)x_4+\left(-\frac{1}{4}-(-1\ 0)\right)x_3$$

$$y_1=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{3}{4}x_5$$

- Aggiungo y_1 al vincolo

$B_2\{x_1,x_2,y_1\}$

$$\max\ 8-x_3-x_5-x_4$$
$$x_1=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{4}x_5$$
$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5$$
$$y_1=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{3}{4}x_5$$

$\xrightarrow[\text{entra } x_5]{\text{esce } y_1}$

$B_3\{x_1,x_2,x_5\}$

$$\max\ 7-\frac{2}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4+\frac{4}{3}y_1$$
$$x_1=2+\frac{2}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}y_1$$
$$x_2=1-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}y_1$$
$$x_5=1-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4-\frac{4}{3}y_1$$

OTTIMALITÀ OK

$\to x_1=2 \quad x_2=1 \quad x_5=1$

$x_3=x_4=0$ $\to$ OTTIMO PER PLI

d

$$\max\ -x_1+2x_2-3x_3$$
$$x_2-x_3-2x_4=3$$
$$2x_1+x_3+3x_4+x_5=7$$
$$x_1,\dots,x_5\ge 0$$

$\longrightarrow$

$$\max\ 6-x_3+4x_4-x_1$$
$$x_2=3+x_3+2x_4$$
$$x_5=7-2x_1-3x_4-x_3$$

ent

$$\max\ \frac{46}{3}-\frac{5}{3}x_1-\frac{7}{3}x_3-\frac{4}{3}x_5$$
$$x_2=\frac{23}{3}-\frac{4}{3}x_1+\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_5$$
$$x_4=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_5$$

taglio x_2

$$\left(-\frac{23}{3}+7\right)+\left(\frac{4}{3}-1\right)x_1+\left(-\frac{1}{3}-(-1)\right)x_3+\left(\frac{2}{3}-(0)\right)x_5=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}x_5$$

$\max \frac{66}{3} - \frac{5}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_5$

$x_2 = \frac{23}{3} - \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$

$x_4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$

$y_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5$

esce y_1 $\longrightarrow$ entra x_5

$\max 14 - \frac{3}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{3}{2}y_1$

$x_2 = 7 - x_1 + x_3 + y_1$

$x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{2}y_1$

$x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - x_3 + \frac{3}{2}y_1$

$x_2 = 7$ $\quad x_1 = x_3 = y_1 = 0$

$x_4 = 2$ $\quad$ VAL OTTIMO $= 14$

$x_5 = 1$

CAPITOLO 9 - APPROCCIO BRANCH AND BOUND

In questa sezione verranno analizzate una per una le componenti principali di un algoritmo branch and bound per un problema di massimizzazione generico

$$\max_{x \in S} f(x) \quad (\text{nei problemi PLI } S \text{ è chiamato } Z_a \text{ e } f(x)\ cx)$$

Data la regione ammissibile S, supponiamo di avere un sott'insieme $T \subseteq S$; una limitazione superiore o upper bound per T è un valore $U(T)$ con la seguente proprietà: $\quad U(T) \geq f(x) \quad \forall x \in T$

Un modo ampiamente utilizzato per il calcolo di un upper bound $U(T)$, o un lower bound $L(T)$ per problemi di minimo, è quello di determinare la soluzione di un suo rilassamento

$$\alpha(f', T') = \max_{x \in T'} f'(x) \quad \text{val. ottimo di } f' \text{ su } T'$$

dove $T \subseteq T'$ e $f'(x) \geq f(x)\ \forall x \in T$ (per problemi di minimo vale il contrario)

OSS: $\alpha(f', T') \geq \alpha(f, T)$

I rilassamenti più utilizzati sono quello LINEARE (visto prima) e quello LAGRANGIANO; supponiamo che il problema sia formulato così:

$$\begin{aligned} \max\ & cx \\ & Ax \leq b \\ & Cx \leq d \\ & x \geq 0 \quad x \in Z^n \end{aligned}$$

$f(x) = cx$, $T = \{x \in Z^n : Ax \leq b, Cx \leq d, x \geq 0\}$

Supponendo che i vincoli $Ax \leq b$ siano facili, eliminando i vincoli $Cx \leq d$ resta un problema PLI facile da risolvere. Per eliminare questi vincoli, si spostano nell'obiettivo.

Dato un vettore $\lambda \geq 0$, detto vettore dei moltiplicatori di Lagrange, delle stesse dimensioni di d, il RILASSAMENTO LAGRANGIANO è il seguente:

$$u(\lambda) = \max \quad Cx + \lambda(d - Cx)$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0 \qquad x \in \mathbb{Z}^n$$

con $f'(x) = cx + \lambda(d - Cx)$ e $T' = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$

Inoltre $\forall x \in T: Cx \leq d \Rightarrow \forall \lambda \geq 0: \lambda(d - Cx) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq f(x)$

Ad ogni $\lambda \geq 0$ corrisponde un diverso upper bound $u(\lambda)$, per ottenere il miglior upper bound possibile (il + piccolo) bisogna risolvere il problema:

$$\min_{\lambda \geq 0} u(\lambda)$$ detto duale lagrangiano.

Vogliamo ora calcolare un limite inferiore o lower bound per il valore ottimo del nostro problema

$$LB \leq f(x^*) = \max_{x \in S} f(x)$$

Se prendiamo qualsiasi elemento $\bar{x} \in S$ e valutiamo $f(\bar{x})$, esso è già un LB, dal momento che $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$

Durante l'esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound la funzione f viene valutata per molti elementi $y_1, \dots, y_h \in S$ e per ognuno di essi si ha:

$$f(y_i) \leq f(x^*) \quad i = 1, \dots, h$$

Come LB viene preso il massimo dei valori f per tali elementi: $LB = \max\{f(y_i) : i = 1, \dots, h\} \leq f(x^*)$

Per decidere gli elementi in S di cui valutare la funzione f durante l'esecuzione dell'algoritmo si possono individuare degli elementi durante il calcolo degli UPPER BOUND

L'operazione di BRANCHING consiste nel rimpiazzare un insieme $T \subseteq S$ con una sua partizione $T_1, \dots, T_m$
la partizione può essere rappresentata tramite una struttura ad albero, l'insieme T è il nodo da cui partono i rami verso i nodi della partizione.

Il punto chiave di un algoritmo branch and bound è la cancellazione dei sottoinsiemi, supponiamo che in un sottoinsieme T_2 si ha

$U(T_2) \leq LB$ (upper bound del sottoinsieme $T_2 \leq$ Lower Bound)

↳ significa che non esistono elementi di $T_2 > LB$ → POSSO ELIMINARE T_2 ~ enumerazione implicita

PASSI PER ALGORITMO BRANCH-AND-BOUND

sottoinsiemi da tenere in considerazione — insieme dei sottoinsiemi cancellati

PASSO 1: Si pongono $C = \{S\}$ e $Q = \emptyset$. Si pone $k=1$; si calcoli $U(S)$ e si calcoli un valore LB, se non si hanno a disposizione soluzioni di S, si pone $LB = -\infty$

PASSO 2: Si selezioni un sottoinsieme $T \in C$ con il valore di UPPER BOUND più elevato

PASSO 3: Si sostituisca l'insieme T in C con la sua partizione in m_k sottoinsiemi $T_1, \dots, T_{m_k}$, ovvero

$$C = C \cup \{T_1, \dots, T_{m_k}\} / \{T\}$$

PASSO 4: Si calcoli un UPPER BOUND $U(T_i)$, $i = 1, \dots, m_k$ per ogni sottoinsieme della partizione

PASSO 5: Si aggiorni il valore del LOWER BOUND LB se i calcoli al PASSO 4 hanno individuato punti in S in cui si è valutata la funzione obiettivo.

PASSO 6: Si escludono da C tutti i sottoinsiemi per cui $U(Q) \leq LB$, ovvero

$$C = C \setminus \{Q : U(Q) \leq LB\}$$

e si trasferiscono tali sottoinsiemi in Q, cioè: $Q = Q \cup \{Q : U(Q) \leq LB\}$

PASSO 7: Se $C = \emptyset$: stop, il valore LB coincide con il valore ottimo $f(x^*)$, altrimenti si pone $k = k+1$ e si ritorni al PASSO 2

Per i PROBLEMI DI MINIMO si dovranno invertire i ruoli di UPPER BOUND e LOWER BOUND. Ad un sottoinsieme $Q \subseteq S$ è associato un valore di lower bound $L(Q)$, al posto di LB avremo un valore UB con la proprietà $UB \geq f(x^*) = \min_{x \in S} f(x)$
Il sottoinsieme Q viene cancellato se $L(Q) \geq UB$, al PASSO 2 dell'algoritmo si seleziona un nodo con lower bound + piccolo, ovvero un nodo T tale che: $L(T) = \max_{Q \in C} L(Q)$

ESEMPIO APPROCCIO BRANCH AND BOUND PER LA PLI

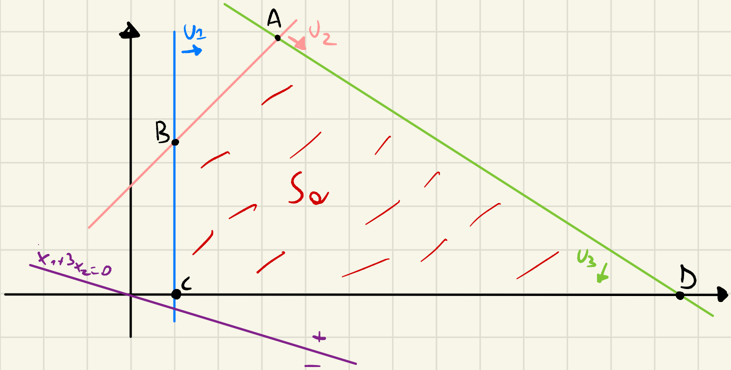
Si consideri il seguente problema PLI che verrà indicato con P_0

$$
\begin{aligned}
P_0: \quad & \max \; x_1 + 3x_2 \\
(u_1) \quad & x_1 \geq \tfrac{1}{2} \\
(u_2) \quad & x_1 + \tfrac{7}{3}x_2 \leq \tfrac{13}{2} \\
(u_3) \quad & -5x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in I
\end{aligned}
$$

Si consideri il RILASSAMENTO LINEARE P_0'

$$
\begin{aligned}
P_0': \quad & \max \; x_1 + 3x_2 \\
(u_1) \quad & x_1 \geq \tfrac{1}{2} \\
(u_2) \quad & x_1 + \tfrac{7}{3}x_2 \leq \tfrac{13}{2} \\
(u_3) \quad & -5x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Il problema ha 2 variabili → RISOLUZIONE GRAFICA (se ne avessi di più si usa l'ALGORITMO DEL SIMPLESSO)



$A\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right)$ $B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$

sol. ottimo $= A$ → val ottimo $= \frac{50}{4}$

non va bene per PLI perché le coordinate non sono intere

- Suddividiamo il problema in P_1, P_2 aggiungendo in ciascuno un vincolo di forma semplice (sui valori di una singola var.) che esclude il vertice A:

  - In P_1 si aggiunge il vincolo che una delle variabili a valore frazionario sia NON SUPERIORE alla parte intera di tale variabile.

  - In P_2 si aggiunge il vincolo che la stessa variabile sia NON INFERIORE alla parte intera dello stesso valore incrementato di uno

Nell'esempio in A sono frazionarie entrambe le variabili $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right)$, in questo caso si prende quella con indice minimo, ovvero x_1.

P_1

$\max\ x_1+3x_2$

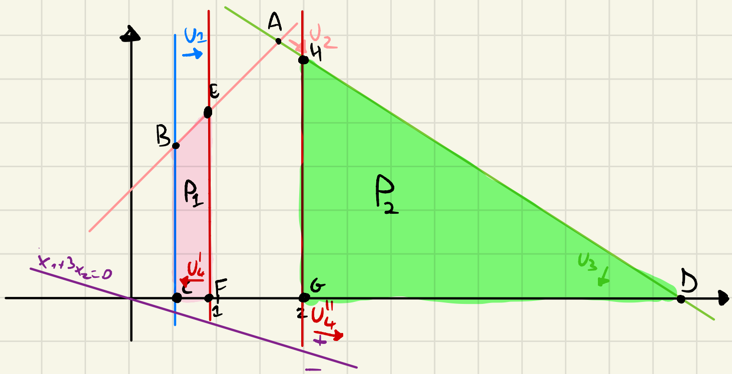
$(v_1)\quad x_1 \geq \frac{1}{2}$

$(v_2)\quad x_1+\frac{7}{3}x_2 \leq \frac{13}{2}$

$(v_3)\quad -5x_1+3x_2 \leq 5$

$(v_4')\quad x_1 \leq \lfloor \frac{5}{4} \rfloor = 1$

$x_1, x_2 \geq 0;\ x_1, x_2 \in I$



P_2

$\max\ x_1+3x_2$

$(v_1)\quad x_1 \geq \frac{1}{2}$

$(v_2)\quad x_1+\frac{7}{3}x_2 \leq \frac{13}{2}$

$(v_3)\quad -5x_1+3x_2 \leq 5$

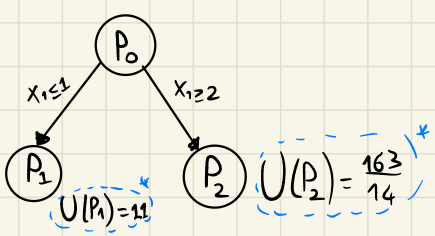
$(v_4'')\quad x_1 \geq \lfloor \frac{5}{4} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{5}{4} \rfloor = 1$

$x_1, x_2 \geq 0;\ x_1, x_2 \in I$

Sol ottima $P_1 = E\ \left(1, \frac{10}{3}\right)$, val ottimo $= 11$

Sol ottima $P_2 = H\ \left(2, \frac{45}{14}\right)$, val ottimo $= \frac{163}{14}$

- Ricaviamo la seguente rappresentazione ad albero



* valori ottimi ricavati dalle restrizioni

- In questo caso pongo $CB = -\infty$ in quanto i vertici F ed H non sono a coordinate intere

- Seleziono il nodo con l'upper bound più alto e lo suddivido → P_2 : aggiungo vincoli $x_2 \leq \lfloor \frac{45}{14} \rfloor$ e $x_2 \geq \lfloor \frac{45}{14} \rfloor + 1$

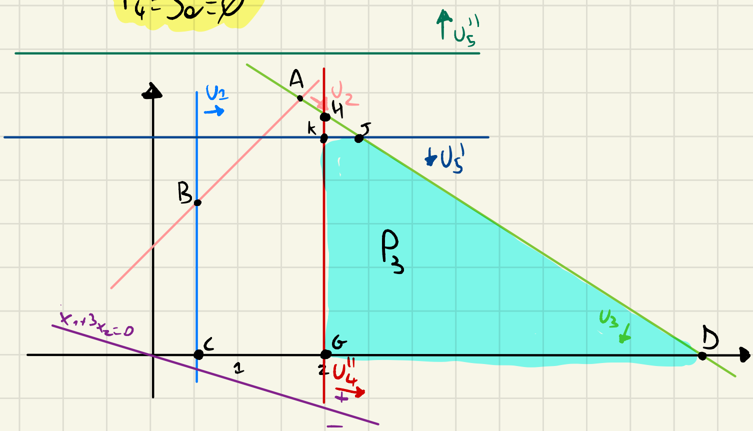
P_3:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3x_2 \\ (v_1) & x_1 \geq \frac{1}{2} \\ (v_2) & x_1 + \frac{7}{5}x_2 \leq \frac{13}{2} \\ (v_3) & -5x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ (v_4'') & x_1 \geq 2 \\ (v_5') & x_2 \leq \lfloor \frac{45}{14} \rfloor = 3 \end{array}$$

P_4:

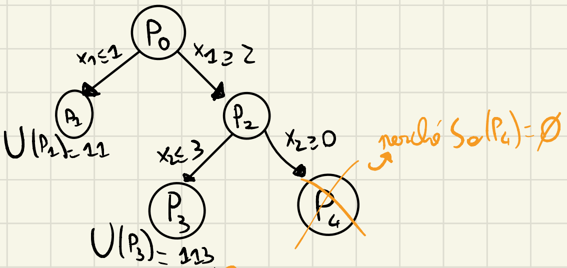
$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3x_2 \\ (v_1) & x_1 \geq \frac{1}{2} \\ (v_2) & x_1 + \frac{7}{5}x_2 \leq \frac{13}{2} \\ (v_3) & -5x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ (v_4'') & x_1 \geq 2 \\ (v_5'') & x_2 \geq \lfloor \frac{45}{14} \rfloor + 1 = 6 \end{array}$$

$P_4 = S_a = \emptyset$



val. ottimo $P_3 = J\left(\frac{23}{10}, 3\right)$ → val ottimo $\frac{113}{10}$

- Rivivo l'albero



$LB = -\infty$ perché J ha coordinate non intere

- Scelgo nodo P_3 per operazione di Branching $\left(\frac{113}{10} > 11\right)$

J ha coordinate $\left(\frac{23}{10} ; 3\right)$ → pongo vincoli $x \leq \lfloor \frac{23}{10} \rfloor$

$x \geq \lfloor \frac{23}{10} \rfloor + 1$

P_5:

$$\max \quad x_1 + 3x_2$$

(v_1) $x_1 \geq \frac{1}{2}$

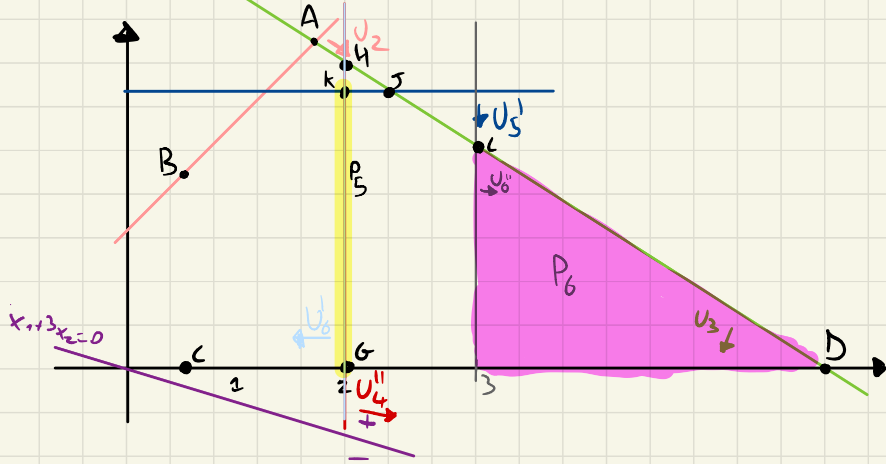
(v_2) $x_1 + \frac{7}{5}x_2 \leq \frac{13}{2}$

(v_3) $-5x_1 + 3x_2 \leq 5$

(v_4'') $x_1 \geq 2$

(v_5') $x_2 \leq 3$

(v_6') $x_1 \leq 2$



P_6:

$$\max \quad x_1 + 3x_2$$

(v_1) $x_1 \geq \frac{1}{2}$

(v_2) $x_1 + \frac{7}{5}x_2 \leq \frac{1}{2}$

(v_3) $-5x_1 + 3x_2 \leq 5$

(v_4'') $x_1 \geq 2$

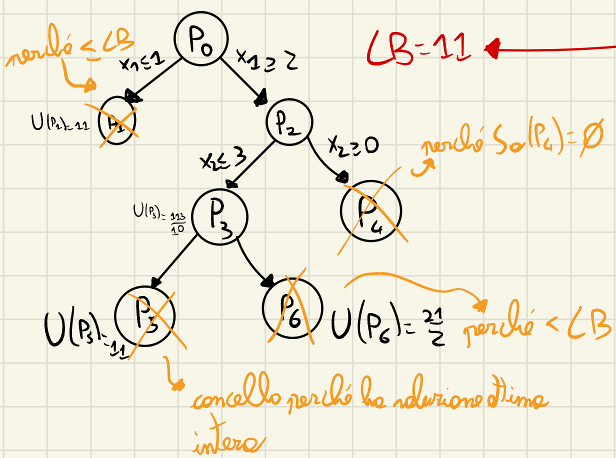
(v_5') $x_2 \leq 3$

(v_6'') $x_1 \geq 3$

P_5 ha val ottimo $K(2,3)$ → val. ottimo $= 11$ → AGGIORNO $LB = 11$

P_6 ha val ottimo $L(3, \frac{5}{2})$ → val. ottimo $= \frac{21}{2}$

- Aggiorno l'albero



$LB = 11$

- Ho finito di suddividere i nodi → STOP, val ottimo $= 11$, con sol. $x_1 = 2, x_2 = 3$

GENERALIZZAZIONE ALGORITMO BRANCH AND BOUND PER PLI

P_0: $\max \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \quad j=1,\dots,m$

$x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m$

$x_i \in \mathbb{Z} \quad i=1,\dots,m$

INIZIALIZZAZIONE: si inizializzi l'insieme F dei nodi foglia con il problema originario P_0, $F=\{P_0\}$.
Si risolva il RIL. LIN. di P_0 ed il valore ottimo trovato è $U(P_0)$
Se tutti i valori $x_i^*(P_0)$ sono interi → STOP, altrimenti si ponga $LB=-\infty$

PASSO 1: Si selezioni nell'insieme F un nodo $Q \in F$ con valore dell'upper bound massimo

PASSO 2: Si selezioni una variabile $x_i^*(Q)$ a valore frazionario, nel caso di più variabili si seleziona quella con indice più piccolo.

PASSO 3: Si rimuova il nodo Q da F e lo si suddivida in due nuovi nodi Q_1, Q_2 ottenuti aggiungendo ai vincoli di Q rispettivamente il vincolo $x_i \leq \lfloor x_i^*(Q) \rfloor$ ed $x_i \geq \lfloor x_i^*(Q) \rfloor + 1$.

PASSO 4: Per ciascuno dei due nuovi nodi Q_i, $i=1,2$ si risolva il rilassamento lineare Q_i'.
- Se Q_i' ha regione ammissibile vuota si cancella, altrimenti lo si aggiunge a F
- Se la sol. ottima $x^*(Q_i)$ è a coordinate intera si cancelli il nodo Q_i ed inoltre se $U(Q_i) > LB$
$LB = U(Q_i)$
- Se la sol ottima NON è a coordinate intere si aggiunga Q_i ad F.

PASSO 5: Si cancellino tutti i nodi in F con valore dell'upper bound NON SUPERIORI ($\leq$) al LOWER BOUND

PASSO 6: Se $F=\emptyset$ → STOP, se $LB=-\infty \Rightarrow P_0$ non ha SOL. AMMISSIBILI, se $LB \neq -\infty \Rightarrow LB$ è valore ottimo del problema e $(y_1,\dots,y_n)$ è una sol. ottima.
Altrimenti si ritorni al PASSO 1

LEZIONE 28 - esercitazione branch-and-bound per la PLI

$\max x_1 + 2x_2$

$\frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2}$

$x_1 + 3x_2 \leq \frac{7}{2}$

$x_1, x_2 \geq 0 \; ; \; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

Risoluzione con algoritmo branch and bound

1) Trovare upper-bound su nodo radice ~ calcolare sol. ottima del rilassamento lineare

Per il nodo radice l'algoritmo di risoluzione del rilassamento lineare è libero (posso usare quello che voglio)
Bisogna trasformare il problema in forma standard

$\max x_1 + 2x_2$

$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$

$2x_1 + 6x_2 + y_2 = 7$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

$B_0 = \{y_1, y_2\}$ → soluzione ammissibile non degenere per primale

$\max x_1 + 2x_2$

$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2$ ⇝ sol. ammissibile per PLI $x_1 = 0, x_2 = 0$, val. ottimo $= 0$ ⇝ $LB = 0$

$y_2 = 7 - 2x_1 - 6x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$B_1 = \{x_1, y_2\}$ $\qquad$ $B_2 = \{x_1, x_2\}$

$\max \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_2$

$y_1 = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_2$

$x_2 = \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}y_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

⟶

$\max 3 - \frac{1}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2$

$x_1 = 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$

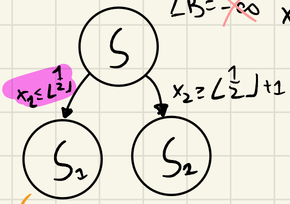
$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$

x_1, x_2, y_1, y_2

⇝ SOL OTTIMA ma $(x_1^* = 2 ; x_2^* = \frac{1}{2})$ ⇝ $\underbrace{\text{val. ottimo} = 3}_{= U(n)}$

non per PLI

$LB = \cancel{-\infty}$ $x_1^* = 0, x_2^* = 0$ $U(S) = 3$



S_1

$$\max\ x_1 + 2x_2$$
$$\frac{1}{2}x_1 - x_2 \le \frac{1}{2}$$
$$x_1 + 3x_2 \le \frac{7}{2}$$
$$x_2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2) Per risolvere il rilassamento di S_1 aggiungo il vincolo ottenuto in precedenza alla risoluzione ottima e proseguo con il SIMPLESSO DUALE

sostituisco con eq. vincolo della base ottima

$$x_2 \le 0 \longrightarrow \begin{matrix} x_2 + y_3 = 0 \\ y_3 \ge 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y_3 = -x_2 \\ y_3 \ge 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{10}y_2 \\ y_3 \ge 0 \end{matrix}$$

$B_0' = \{x_1, x_2, y_3\}$

$$\max\ 3 - \frac{1}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2$$
$$x_1 = 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$$
$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$$
$$y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{10}y_2$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0$$

esce y_3 → entra x_2

$B_1' = \{x_1, x_2, y_2\}$

$$\max\ 1 - y_1 - 4y_3$$
$$x_1 = 1 - y_1 - 2y_3$$
$$x_2 = 0 - y_3$$
$$y_2 = 5 + 2y_1 + 10y_3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3$$

→ SOL. OTTIMA $x_1^* = 1$ $x_2^* = 0$ $U(S_1) = LB = 1$

3) Applico stesso procedimento su S_2

$$x_2 \ge \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1 \rightarrow x_2 \ge 1 \rightarrow \begin{matrix} x_2 - y_3 = 1 \\ y_3 \ge 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y_3 = -1 + x_2 \\ y_3 \ge 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} y_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2 \\ y_3 \ge 0 \end{matrix}$$

$B_0' = \{x_1, x_2, y_3\}$

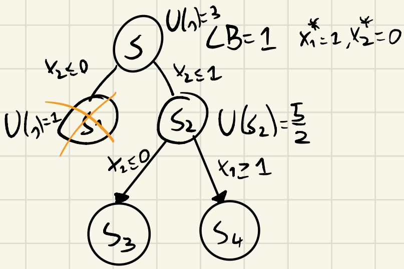
$$\max\ 3 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$$
$$x_1 = 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$$
$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$$
$$y_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

esce y_3 → entra y_1

$B_1' = \{x_1, x_2, y_1\}$

$$\max\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_2 - y_3$$
$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_2 - 3y_3$$
$$x_2 = 1 + y_3$$
$$y_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$

4) Disegno grafo e applico branching su S_2



5) Risolvo rilassamento S_3

$x_1 \le 0 \rightarrow x_1 + y_4 = 0,\ y_4 \ge 0 \rightarrow y_4 = -x_4,\ y_4 \ge 0 \rightarrow y_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_2 + 3y_3,\ y_4 \ge 0$

$B_0'' = \{x_1, x_2, y_1, y_4\}$

$\max \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_2 - y_3$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_2 - 3y_3$

$y_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_2 + 5y_3$

$y_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_2 + 3y_3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

esce y_4 → entra y_3

$B_1 = \{x_1, x_2, y_1, y_3\}$

$\max \frac{7}{3} - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_4$

$x_1 = 0 - y_4$

$x_2 = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{3}y_4$

$y_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}y_2 + \frac{5}{3}y_4$

$y_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{3}y_4$

→ Sol ottimo ma non x PLI, val. ottimo $= \frac{7}{3}$

$x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = \frac{10}{3}$

6) Risolvo rilassamento S_4

$x_1 \ge 1 \rightarrow x_1 - y_4 = 1,\ y_4 \ge 0 \rightarrow y_4 = -1 + x_1,\ y_4 \ge 0 \rightarrow y_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_2 - 3y_3,\ y_4 \ge 0$

$B_0'' = \{x_1, x_2, y_1, y_4\}$

$\max \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y_2 - y_3$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_2 - 3y_3$

$x_2 = 1 + y_3$

$y_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_2 -$

$\underline{y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_2 - 3y_3}$

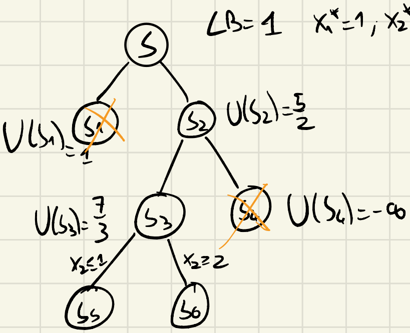
ILLIMITATEZZA DUALE → REGIONE AMMISSIBILE PER PRIMALE VUOTA

↓

pongo $U(S_4) = -\infty$

7) Riassunto Albero

$LB = 1 \quad x_1^* = 1 ;\ x_2^* = 0$



Risolvo rilassamento S_5

$x_2 \le 1 \rightarrow x_2 + y_5 = 1,\ y_5 \ge 0 \rightarrow y_5 = 1 - x_2,\ y_5 \ge 0 \rightarrow y_5 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} y_2 - \frac{1}{3} y_4,\ y_5 \ge 0$

$B_0'' = \{x_1, x_2, y_1, y_3, y_5\}$ $\qquad$ $B_1'' = \{x_1, x_2, y_1, y_3, y_5\}$

$$\begin{aligned} \max\ & \tfrac{7}{3} - \tfrac{1}{3} y_2 - \tfrac{1}{3} y_4 \\ x_1 &= 0 - y_4 \\ x_2 &= \tfrac{7}{6} - \tfrac{1}{6} y_2 + \tfrac{1}{3} y_4 \\ y_1 &= \tfrac{10}{3} - \tfrac{1}{3} y_2 + \tfrac{5}{3} y_4 \\ y_3 &= \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{6} y_2 + \tfrac{1}{3} y_4 \\ y_5 &= -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} y_2 - \tfrac{1}{3} y_4 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{aligned}$$

esce y_5, entra y_2 $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & 2 - 2y_5 - y_4 \\ x_1 &= 0 - y_4 \\ x_2 &= 1 - y_5 \\ y_1 &= 3 - 2y_5 + y_4 \\ y_3 &= 0 - y_5 \\ y_2 &= 1 + 6y_5 + 2y_4 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{aligned}$$

SOL. OTTIMA X PLI $\rightarrow U(S_5) = LB = 2$

$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 1$

Risolvo rilassamento S_6

$x_2 \ge 2 \rightarrow x_2 - y_5 = 2,\ y_5 \ge 0 \rightarrow y_5 = -2 + x_2,\ y_5 \ge 0 \rightarrow y_5 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6} y_2 + \frac{1}{3} y_4,\ y_5 \ge 0$

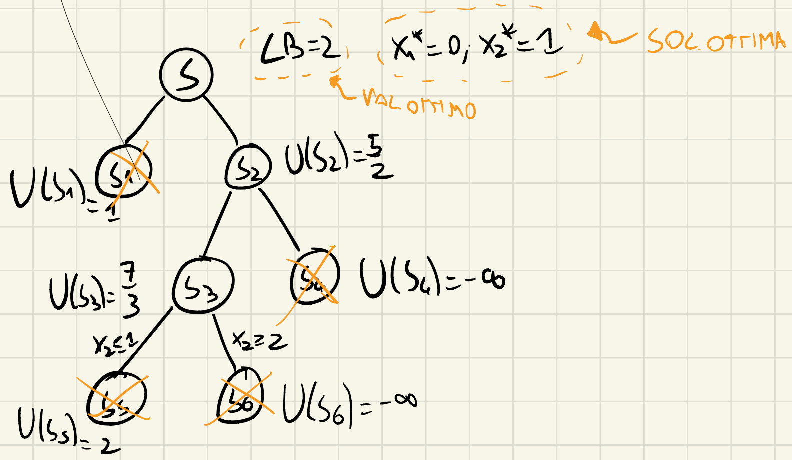
$B_0'' \{x_1, x_2, y_1, y_3, y_5\}$

$$\begin{aligned} \max\ & \tfrac{7}{3} - \tfrac{1}{3} y_2 - \tfrac{1}{3} y_4 \\ x_2 &= \tfrac{7}{6} - \tfrac{1}{6} y_2 + \tfrac{1}{3} y_4 \\ y_1 &= \tfrac{10}{3} - \tfrac{1}{3} y_2 + \tfrac{1}{3} y_4 \\ y_3 &= \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{6} y_2 + \tfrac{1}{3} y_4 \\ y_5 &= -\tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{6} y_2 + \tfrac{1}{3} y_4 \end{aligned}$$

esce y_5, entra x_4 $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & \tfrac{3}{2} - y_5 - \tfrac{1}{2} y_2 \\ x_1 &= -\tfrac{5}{2} - 3y_5 - \tfrac{1}{2} y_2 \\ x_2 &= 2 + y_5 \\ y_1 &= \tfrac{15}{2} + 5y_5 + \tfrac{1}{2} y_2 \\ y_3 &= 1 + y_5 \\ y_4 &= \tfrac{5}{2} + 3y_5 + \tfrac{1}{2} y_2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ CONDIZIONE ILLIMITATEZZA DUALE $\rightarrow U(S_6) = -\infty$



ESERCIZI 1.PDF – Esercizio 4.3: risolvere i PLI dell'esercizio 4.1 con il metodo branch and bound

ⓐ

$$\max\ 2x_1-x_2-x_3 \qquad\qquad \max\ 2x_1-x_2-x_3$$
$$2x_1+x_2\le 5 \qquad\qquad 2x_1+x_2+x_4=5$$
$$4x_2+x_3\le 5 \quad \xrightarrow[\text{FORMA STANDARD}]{\text{RILASSAMENTO}} \quad 4x_2+x_3+x_5=5$$
$$x_1-x_3\ge 2 \qquad\qquad x_1-x_3-x_6=2$$
$$x_1,\dots,x_3\ge 0,\ \text{intero} \qquad\qquad x_1,\dots,x_7\ge 0$$

$B_0\ \{x_5,x_6,x_7\}$ non ammissibile per primale e duale → risolvo problema 1° FASE

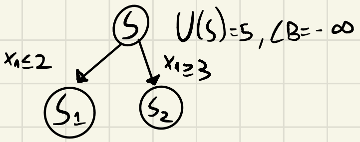
$$\max\ -s_1 \qquad \max\ -2+x_1-x_3-x_6 \qquad \max\ -2+2-s_1$$
$$x_4=5-2x_1-x_2 \qquad x_4=5-2x_1-x_2 \qquad x_4=1-2x_3-2x_6-x_2+2s_1$$
$$x_5=5-4x_2-x_3 \longrightarrow x_5=5-4x_2-x_3 \xrightarrow[\text{esce } s_1]{\text{entra } x_1} x_5=5-4x_2-x_3 \rightarrow B_0'=\{x_4,x_5,x_1\}$$
$$s_1=2-x_1+x_3+x_6 \qquad s_1=2-x_1+x_3+x_6 \qquad x_1=2+x_3+x_6-s_1$$

ammissibile

$$\max\ 2x_1-x_2-x_3 \qquad 4+x_3+2x_6-x_2 \qquad 5-x_3-2x_2-x_4$$
$$x_4=1-2x_3-2x_6-x_2 \qquad x_4=1-2x_3-2x_6-x_2 \qquad x_6=\tfrac{1}{2}-x_3-\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{1}{2}x_4$$
$$x_5=5-4x_2-x_3 \longrightarrow x_5=5-4x_2-x_3 \xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_6} x_5=5-4x_2-x_3$$
$$x_1=2+x_3+x_6 \qquad x_1=2+x_3+x_6 \qquad x_1=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{1}{2}x_4$$

SOL OTTIMA ma non per PLI.

Scrivo albero ed eseguo branch



$x_1+y_1=2 \to y_1=1-x_1 \to 2-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4 \to y_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4$

S_1: $\max\ 5-x_3-2x_2-x_4$

$x_6=\frac{1}{2}-x_3-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4$

$y_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4$

esce y_1 → entra x_4

$\max\ 4-x_2-x_3-2y_1$

$x_6=0-x_3-y_1$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=2-y_1$

$x_4=1-x_2+2y_1$

sol OTTIMA PER PL1 → val ottimo $4=LB$

$x_6=0 \quad x_5=5 \quad x_1=2 \quad x_4=1$

$x_2,x_3,y_1=0$

$x_1-y_1=3 \to y_1=x_1-3 \to y_1=\frac{5}{2}-3-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4 = y_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4$

S_2 $\max\ 5-x_3-2x_2-x_4$

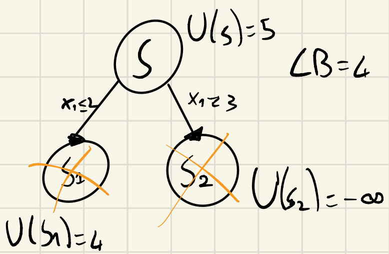
$x_6=\frac{1}{2}-x_3-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}$

$x_5=5-4x_2-x_3$

$x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4$

$y_1=\underline{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4}$

illimitatezza duale → $S_2=\emptyset$



$LB=4$ → SOL OTTIMA PROBLEMA, $x_6=0 \quad x_5=5 \quad x_1=2 \quad x_4=1$

$x_2,x_3,y_1=0$

(B)

max $-2x_1+3x_2-x_3$

$x_1+3x_2+x_4=8$

$x_2+2x_3+x_5=9$

$x_1-x_2+x_6=7$

$\longrightarrow$ max $-2x_1+3x_2-x_3$

$x_4=8-x_1-3x_2$

$x_5=9-x_2-2x_3$

$x_6=7-x_1+x_2$

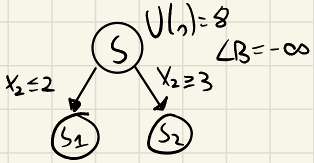
$\xrightarrow[\text{esce } x_4]{\text{entra } x_2}$ max $8-3x_1-x_3-x_4$

$x_2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

$x_5=\frac{19}{3}+\frac{1}{3}x_1-2x_3+\frac{1}{3}x_4$

$x_6=\frac{29}{3}-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

$\rightarrow$ SOL OTTIMA NON PER PLI



$x_2+y_1'=2 \rightarrow y_1'=2-x_2=2-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4$

S_1 max $8-3x_1-x_3-x_4$

$x_2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

$x_5=\frac{19}{3}+\frac{1}{3}x_1-2x_3+\frac{1}{3}x_4$

$x_6=\frac{29}{3}-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

$y_1'=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4$

$\xrightarrow[\text{entra } x_4]{\text{esce } y_1}$ max $6-2x_1-x_3-\frac{1}{3}y_1'$

$x_2=2+\frac{1}{9}y_1$

$x_5=7-2x_3+\frac{1}{9}y_1'$

$x_6=9-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{9}y_1'$

$x_4=2-x_1+\frac{1}{3}y_1'$

$\longrightarrow$ SOL OTTIMA PER PLI

val. ottimo $=6$, $x_2=2, x_5=5, x_6=9, x_4=2$

$x_2-y_1''=3 \rightarrow y_1''=x_2-3=-3+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

S_2 max $8-3x_1-x_3-x_4$

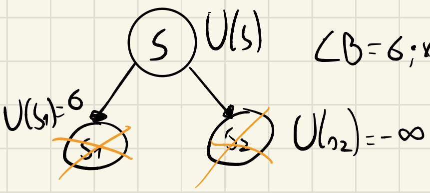
$x_2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

$x_5=\frac{19}{3}+\frac{1}{3}x_1-2x_3+\frac{1}{3}x_4$

$x_6=\frac{29}{3}-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$

$y_1''=\underline{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4}$

ILLIMITATEZZA DUALE $\rightarrow S_A=\varnothing \rightarrow U(S_2)=-\infty$



LB $=6$; $x_2=2, x_5=5, x_6=9, x_4=2 \longrightarrow$ SOL. OTTIMA

Capitolo 12 - un branch-and-bound per il TSP SIMMETRICO ~ "commesso viaggiatore"

Supponiamo di avere un grafo $G=(V,A)$ non orientato e con distanze d_{ij} sugli archi $(i,j)\in A$, per calcolare un LB per il problema TSP SIMMETRICO su tale grafo bisogna dare la definizione di 1-tree

DEF: Dato un grafo $G=(V,A)$ non orientato e un suo nodo $a\in V$, chiamiamo 1-tree un SOTTOGRAFO (Q,A_Q) con le seguenti proprietà:

- In A_Q ci sono due archi incidenti su a.
- Se escludo da Q il nodo a e i due archi incidenti su di esso, mi rimane un albero sull'insieme di nodi $V\setminus\{a\}$

Da cui segue $|A_Q|=|V|$. Un circuito hamiltoniano è un 1-tree (il contrario non è vero).
Se indichiamo con S' l'insieme degli 1-tree su un grafo G, tale insieme contiene la regione ammissibile S del problema TSP.

$$\min_{Q\in(V,A_Q)\in S'} \sum_{(i,j)\in A_Q} d_{ij}$$

↷ rilassamento per il problema TSP simmetrico

↳ risolverlo significa trovare un LB!

Calcolo LB per il problema originario ~ procedura per risolvere il rilassamento

PASSO 1: si risolve il problema MST sul grafo ottenuto scartando da $G=(V,A)$ il nodo a prescelto e tutti gli archi incidenti su di esso. Poniamo come A_T l'insieme di archi della soluzione trovata

PASSO 2: si aggiungono ad A_T due archi (a,k) e (a,h) a distanza minima tra tutti quelli incidenti sul nodo a prescelto.

PASSO 3: si restituisca $Q=(V,A_Q)$ con $A_Q=A_T\cup\{(a,k);(a,h)\}$

Calcolo di LB per sottoproblemi (in forma particolare)

Dati $A_0, A_1 \subseteq A$ $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ definiamo

$$S(A_0, A_1) = \{ C = (V, A_c) \in S : x_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in A_0 ; x_{ij} = 1 \ \forall (i,j) \in A_1 \}$$

↳ contiene tutti i circuiti hamiltoniani che sicuramente non contengono gli archi in A_0 e sicuramente contengono gli archi in A_1.

Per il calcolo di un LB di un sottoproblema su $S(A_1, A_0)$ si procede come visto prima, imponendo però la presenza degli archi in A_1 ed escludendo quella degli archi in A_0, sia nella risoluzione dell'MST sia nella individuazione dei due archi incidenti nel nodo a.

Si può risolvere il problema MST con l'algoritmo greedy ma:

- Inizializzando l'insieme di archi A_T non con l'insieme vuoto ma con tutti gli archi in A_1 non incidenti nel nodo a
- Non considerando gli archi in A_0 durante l'esecuzione dell'algoritmo Greedy.

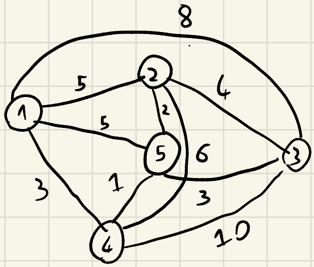
Inoltre se in A_1 non sono presenti archi incidenti nel nodo a, metteremo in A_Q i due archi a distanza minima tra tutti quelli incidenti nel nodo a e al di fuori di A_0.

Se in A_1 è già presente un arco incidente nel nodo a questo entrerà in A_Q insieme a quello a distanza minima tra tutti quelli incidenti nel nodo a e al di fuori di A_0 e A_1.

Se in A_1 sono già presenti due archi incidenti nel nodo a, solo questi entreranno in A_Q

Esempio (si capisce meglio da qui)

	1	2	3	4	5
1	-	5	8	3	5
2	5	-	4	6	2
3	8	4	-	10	3
4	3	6	10	-	1
5	5	2	3	1	-



$A_0 = \{(1,3); (4,5)\}$

$A_1 = \{(1,5); (2,4)\}$

nodo a = 1

1) Risolvere problema MST nell'insieme di nodi $V \setminus \{a\}$

Ovvero $V - \{1\}$ ed imponendo la presenza dell'arco $(2,4)$ che è in A_1 ed escludendo quello degli archi in A_0

RISOLUZIONE CON ALGORITMO GREEDY

	1	2	3	4	5
~~1~~	~~-~~	~~5~~	~~8~~	~~3~~	~~5~~
2	~~5~~	-	4	6	2
3	~~8~~	4	-	10	3
4	~~3~~	6	10	-	1
5	~~5~~	2	3	1	-

escludo nodo 1

ed inizializzo A_T con gli archi in A_1 non incidenti sul nodo 1 (in questo caso solo 2,4) escludo gli archi in A_0

$$A_T = \{(2,4), \underbrace{(2,5)}, \underbrace{(3,5)}\}$$

guardo archi incidenti su 5 (colonna) e scelgo valore minimo

faccio la stessa cosa su 3° colonna

In A_1 è presente l'arco $(1,5) \rightarrow$ devo aggiungere (1,5) ed l'arco a distanza minima tra tutti quelli incidenti nel nodo 1 e al di fuori di A_0 e $A_1 \rightarrow (1,4)$ all'insieme A_T per ottenere A_Q

$$A_Q = \{(2,4), (2,5), (3,5), (1,5), (1,4)\}$$

↳ non è un circuito HAMILTONIANO (3 archi su nodo 5), non può essere utilizzato per aggiornare il valore di UPPER BOUND.

Rilassamento Lagrangiano

Nel modello matematico di un problema 1-tree avremo:

1) Una variabile binaria x_{is} per ogni arco (i,s) (con valore 1 se l'arco viene inserito nel 1-tree e 0 altrimenti)
2) Un vincolo che impone che ci siano due archi incidenti su un nodo a.
3) Vincoli che impongano che gli archi incidenti sui soli nodi in $V \setminus \{a\}$ formino un albero.
    3.1) archi siano pari a $|V|-1$
    3.2) archi non formino cicli

Riassumendo il modello matematico si ottiene

$$\min \sum_{i,j \in V, i<j} d_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i \in V, i \neq a} x_{ia} = 2$$

$$\sum_{(i,j) \in E(U)} x_{ij} \leq |U| - 1$$

$$\sum_{i,j \in V \setminus \{a\}} x_{ij} = |V| - 2$$

$$x_{ij} \{0,1\}$$

ESEMPIO

Problema TSP simmetrico con la seguente tabella di distanze

	1	2	3	4
1	-	12	9	14
2	12	-	8	9
3	9	8	-	1
4	14	9	1	-

Fissando come nodo a il nodo 1, il modello matematico è il seguente

$$\min\ 12x_{12} + 9x_{13} + 14x_{14} + 8x_{23} + 9x_{24} + x_{34}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2$$

$x_{23} + x_{24} + x_{34} \leq 2$ ⇝ può essere omesso perché implicito nell'altro vincolo

$$x_{23} + x_{24} + x_{34} = 2$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34} \in \{0,1\}$$

Un modello valido per il TSP SIMMETRICO è identico a quello visto per un problema 1-tree ma con l'aggiunta che su tutti i nodi in V incidono esattamente due archi

Il modello per il TSP SIMMETRICO dell'esempio sarà:

$$\min\ 12x_{12}+9x_{13}+14x_{14}+8x_{23}+9x_{24}+x_{34}$$
$$x_{12}+x_{13}+x_{14}=2 \quad \text{nodo 1}$$
$$x_{12}+x_{23}+x_{24}=2 \quad \text{nodo 2}$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{34}=2 \quad \text{nodo 3}$$
$$x_{23}+x_{24}+x_{34}=2 \quad \text{nodo 4}$$
$$x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34}\in\{0,1\}$$

È possibile vedere il problema 1-tree come il RILASSAMENTO del problema TSP SIMMETRICO ottenuto omettendo i vincoli che richiedono che vi siano esattamente due archi incidenti su ogni nodo, tranne quello relativo al nodo a.

Omettere vincoli = caso particolare di rilassamento Lagrangiano in cui tutti i moltiplicatori sono fissati pari a 0

Cosa succede se i moltiplicatori sono $\neq 0$?

↳ introduciamo i moltiplicatori di Lagrange $\lambda=(\lambda_k)_{k\in V\setminus\{a\}}$ per i vincoli che richiedono che esattamente che due archi incidono nei nodi, con l'unica eccezione del nodo a selezionato.

Nell'esempio avremo:

$$u(\lambda_1,\dots,\lambda_4)=\min\ 12x_{12}+9x_{13}+14x_{14}+8x_{23}+9x_{24}+x_{34}+\lambda_2(2-x_{12}-x_{13}-x_{14})+$$
$$+\lambda_2(2-x_{12}-x_{23}-x_{24})+\lambda_3(2-x_{13}-x_{23}-x_{34})+\lambda_4(2-x_{14}-x_{24}-x_{34})$$
$$x_{12}+x_{13}+x_{14}=2$$
$$x_{23}+x_{24}+x_{34}=2$$
$$x_{12},\dots,x_{34}\in\{0,1\}$$

vale sempre!

Riscrivibile come

$$u(\lambda_1,\dots,\lambda_4)=\min\ (12-\lambda_1-\lambda_2)x_{12}+(9-\lambda_1-\lambda_3)x_{13}+(14-\lambda_1-\lambda_4)x_{14}+(8-\lambda_2-\lambda_3)x_{23}+$$
$$+(9-\lambda_2-\lambda_4)x_{24}+(1-\lambda_3-\lambda_4)x_{34}+2\sum_{i=1}^{4}\lambda_i$$
$$x_{12}\ x_{13}+x_{14}=2$$
$$x_{23}+x_{24}+x_{34}=2$$
$$x_{12},\dots,x_{34}\in\{0,1\}$$

Una volta visto il rilassamento Lagrangiano è possibile introdurre il **DUALE LAGRANGIANO**, che consiste nell'individuare i valori $\lambda^* = (\lambda_k^*)_{k\in V}$ con $\lambda_1^*=0$ per cui la funzione $u(\lambda)$ sia più grande possibile $\rightarrow \max\limits_{\lambda:\lambda_1=0} u(\lambda)$

Esempio

Riducendolo
$$u(\lambda_1,\dots,\lambda_4) = \min\ (12-\lambda_1-\lambda_2)x_{12}+(9-\lambda_1-\lambda_3)x_{13}+(14-\lambda_1-\lambda_4)x_{14}+(8-\lambda_2-\lambda_3)x_{23}+$$
$$+(9-\lambda_2-\lambda_4)x_{24}+(1-\lambda_3-\lambda_4)x_{34}+2\sum_{i=1}^{4}\lambda_i$$
$$x_{12}\ x_{13}+x_{14}=2$$
$$x_{23}+x_{24}+x_{34}=2$$
$$x_{12},\dots,x_{34}\in\{0,1\}$$

con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \rightarrow$ si ottiene 1-tree minimo $\underset{1\ 1}{(2,3)},\underset{2\ 1}{(3,4)},\underset{1\ 2}{(1,2)},\underset{2\ 3}{(1,3)}$ con LB pari a 30

con $\lambda_1=0\ \ \lambda_2=0\ \ \lambda_3=-1\ \ \lambda_4=1 \longrightarrow (3,4),(2,4),(1,2),(1,3)$ → circuito Hamiltoniano → Upper Bound

tabella delle distanze associata

	1	2	3	4
1	–	12	10	13
2	12	–	9	8
3	10	9	–	1
4	13	8	1	–

$LB=31$ → migliore rispetto al precedente → Upper Bound

La regola per aggiornare i moltiplicatori di Lagrange è la seguente:

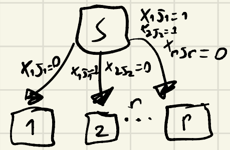
$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i + 2 - \text{grado di } i \text{ nello 1-tree minimo}$$

Nell'esempio i gradi dei nodi 1,2,3,4 sono 2,2,3 ed 1.

L'aggiornamento dell'upper bound avviene quando la SOL. OTTIMA di un rilassamento 1-tree da origine ad un circuito Hamiltoniano.

Il BRANCHING nel caso in cui il rilassamento 1-tree non fosse un circuito Hamiltoniano si cerca di impedire il formarsi nei nodi figli del sottocircuito generato dal rilassamento.

Indichiamo con $\{(i^1,j^1),(i^2,j^2)\dots,(i^r,j^r)\}$ gli archi del sottocircuito



Per il primo nodo figlio è ottenuto imponendo $A_0=\{(i^1,j^1)\}$ ed $A_1=\emptyset$

Per il secondo nodo figlio $A_0=\{i^2,j^2\}$ ed $A_1=\{i^1,j^1\}$

Per l'r-esimo nodo figlio $A_0=\{(i^r,j^r)\}$ ed $A_1=\{(i^1,j^1),(i^2,j^2)\dots(i^{r-1},j^{r-1})\}$

Esempio

$S(A_0,A_1)$ con $A_0=\{(1,3);(4,5)\}$ ed $A_1=\{(1,5);(2,4)\}$, da cui: $A_Q=\{(2,4);(2,5);(3,5);(1,5);(1,4)\}$

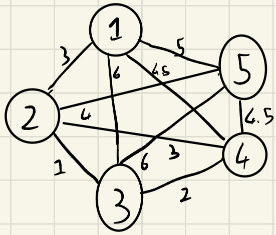
In questo è presente il circuito $1\to4\to2\to5\to1$, con $A_S=\{(1,4);(2,5)\}$

↳ BRANCHING → $S_1(A_0,A_1)$ con $A_0=\{(1,3);(4,5);(1,4)\}$
$A_1=\{(1,5);(2,4)\}$

→ $S_2(A_0,A_1)$ con $A_0=\{(1,3);(4,5);(2,5)\}$
$A_1=\{(1,5);(2,4);(1,4)\}$

LEZ 31 ~ esercitazione su branch and bound per il TSP simmetrico

	1	2	3	4	5
1	-	3	6	4.5	5
2		-	1	3	4
3			-	2	6
4				-	4.5
5					-



nodo $a=1$

Riduzione mediante rilassamento 1-tree

1) Calcolare LB su tutta regione ammissibile

1.1) creo albero di supporto a peso minimo mediante algoritmo GREEDY

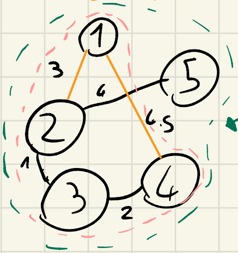
Aggiungo arco (2,3) perché ha costo minimo

Aggiungo arco (3,4) perché ha costo minimo (escludendo arco (2,3))

NON Aggiungo arco (2,4) perché formerebbe un ciclo

Aggiungo arco (2,5) → N. ARCHI = N. NODI − 1 → STOP!

1.2) aggiungo i due archi con peso minore incidenti su ① (nodo 1) → (1,2) ed (1,4)



← SOLUZIONE OTTIMA SU SA,

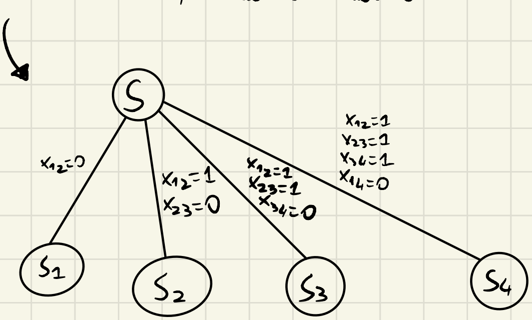
$LB = 1+3+2+4+4.5 = 14.5$

$UB = +\infty$ perché circuito non hamiltoniano

2) Eseguo operazione BRANCHING su nodo radice

\# arco per op. branch

Prendo unico sottocircuito della SOL. OTTIMA $1 \overset{1}{-} 2 \overset{2}{-} 3 \overset{3}{-} 4 \overset{4}{-} 1$ e genero tanti figli quanti sono gli archi del sottocircuito, escludendo i suoi nodi



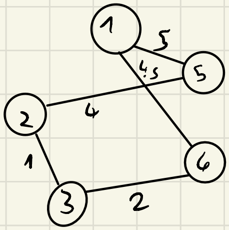
3) Calcolo LOWER BOUND dei nodi figli

Uso stessa procedura del punto 1), escludendo ed includendo gli archi trovati al punto 2)

S_1

A priori NON devo aggiungere archi ma escludo arco (1,2) → al suo posto entra (1,4)

$S_1 = \{(1,4),(1,5),(2,3),(2,5),(3,4)\}$



1-4-3-2-5-1 è un CIRCUITO HAMILTONIANO → U.B. = L.B. = 16.5

S_2

Escludo arco (2,3) ed includo (2,1)

→ costruisco albero di supporto a peso minimo

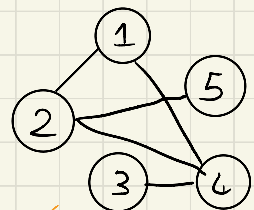
Parto inserendo (3,4) → perché 2,3 è escluso dal punto 2

Aggiungo (2,4)

Aggiungo (2,5)

incluso dal punto 2

Aggiungo 2 archi su nodo 1 : (2,1),(1,4)



non è un circuito Hamiltoniano

S_3

Inserisco a priori (2,3),(1,2) ed escludo (3,4)

creo albero supporto a peso minimo

Aggiungo (2,3)

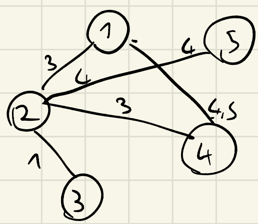
Aggiungo (2,4)

Aggiungo (2,5) → STOP

aggiungo archi incidenti su 1

Aggiungo (1,2) xké obbligato

Aggiungo (1,4)



LB = 19,5 , non hamiltoniano → non aggiorno U

S_4

archi albero supporto a peso minimo

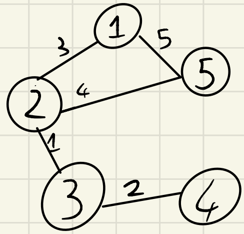
Inserisco $(2,3)$, $(2,4)$ perché obbligato

Inserisco $(2,5)$ → STOP

archi incidenti su I

inserisco $(1,2)$ perché obbligato

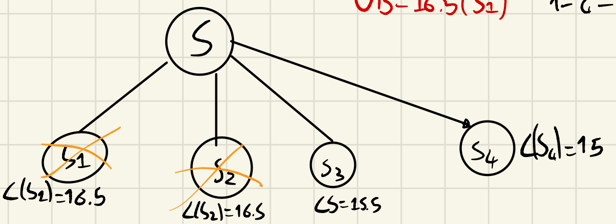
inserisco $(1,5)$



$LB = 15$, circuito non hamiltoniano

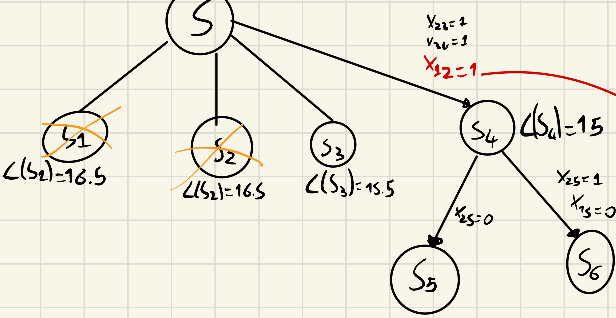
↳ riassumo la situazione

$UB = 16.5\ (S_1)$ 1-4-3-2-5-1



$15 \leq$ val ottimo ≤ 16.5

Elimino nodi con $LB \geq UB$, applico branching S_4 perché ha LB minore tra nodi rimasti

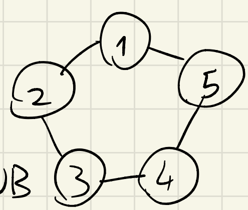


circuito S_4 $1\,\cancel{2}\,2-5-1$

N.B arco $(1,2)$ non può essere cancellato perché imposto durante punto 2)

S_5

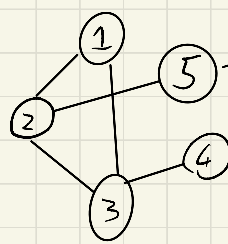
Inserisco archi imposti per S_4 ed S_5



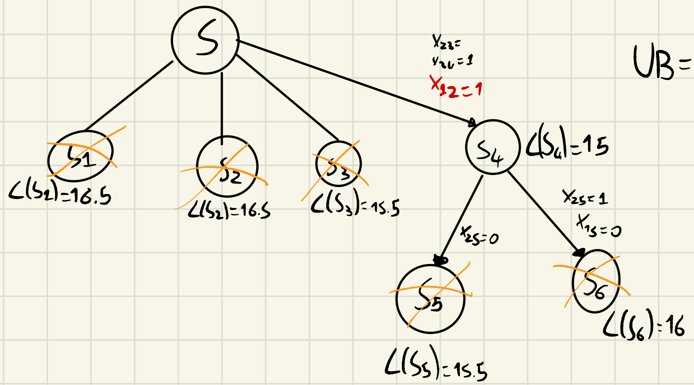
hamiltoniano circuito con val. ottimo $= 15.5 < 16$ → nuovo UB

S_6

Inserisco archi imposti per S_4 ed S_6



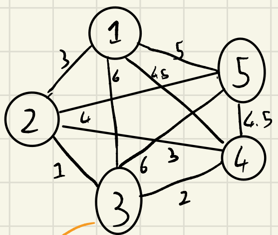
→ circuito non hamiltoniano con val ottimo $= 16$



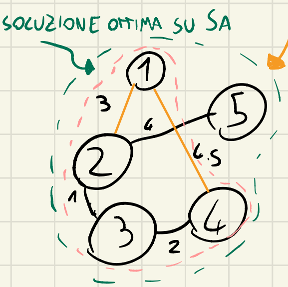
UB = 15.5, nel ottimo 1→2→3→4→5→1

Risoluzione mediante duale Lagrangiano

	1	2	3	4	5
1	-	3	6	4.5	5
2		-	1	3	4
3			-	2	6
4				-	4.5
5					-



nodo a=1



archi entranti

I nodi 4 e 3 hanno grado 2 → moltiplicatore di Lagrange pari a 0

Il nodo 2 ha grado 3 → moltiplicatore di Lagrange pari a −1

Il nodo 5 ha grado 1 → moltiplicatore di Lagrange pari a +1

Riscrivo nuova tabella delle distanze applicando i nuovi moltiplicatori di Lagrange

		0	+1*	+0	+0	-1*
		1	2	3	4	5
0	1	-	4	6	4.5	4
* +1	2		-	2	4	4
+0	3			-	2	5
+0	4				-	3.5
* -1	5					-

* formula: $v'_{ij} = v_{ij} - \lambda'_i - \lambda'_j$

quindi cambio di segno

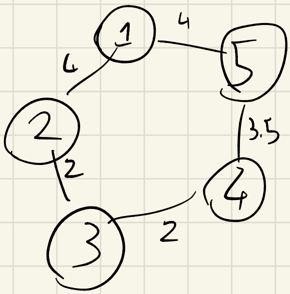
Calcolo rilassamento 1-tree della nuova tabella delle distanze

archi albero supporto a peso minimo

1) Aggiungo (2,3),
2) Aggiungo (3,4)
3) Aggiungo (4,5) → STOP

archi incidenti nel nodo 1

(1,2), (1,5)



→ val ottimo = 15.5, circuito hamiltoniano
↓
aggiorno upper bound

LEZIONE 32 – INTRODUZIONE ALLA PROGRAMMAZIONE NON LINEARE

$$\min f(x) \quad \text{— funzione obiettivo}$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$
$$c_i(x) = 0 \quad i \in K_1$$
$$c_i(x) \geq 0 \quad i \in K_2$$

← problema d'ottimizzazione non lineare

$$S = \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ c_i(x) = 0 & i \in K_1 \\ c_i(x) \geq 0 & i \in K_2 \end{cases}$$ è la REGIONE AMMISSIBILE del problema

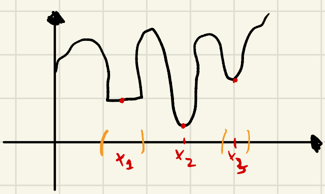
IPOTIZZO che: $f, c_i \in C^2$ → differenziabili del 2° ordine (derivate prime e seconde continue)
almeno una tra le tre funzioni $f, c_i, i \in K_1 \cup K_2$ è NON-LINEARE

MINIMO GLOBALE è un punto $x^* \in S$ tale che $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in S$

interno di x^*

MINIMO LOCALE FORTE è un punto x^* tale che per qualche $\delta > 0$: $f(x^*) < f(x)\ \forall x \in S \cap \{x : \|x - x^*\|_2 \leq \delta\}\ x \neq x^*$

MINIMO LOCALE DEBOLE è un punto x^* tale che per qualche $\delta > 0$: $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in S \cap \{x : \|x - x^*\|_2 \leq \delta\}\ x \neq x^*$



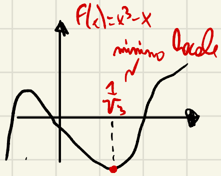
x_1 minimo locale debole
x_2 minimo globale
x_3 minimo locale forte

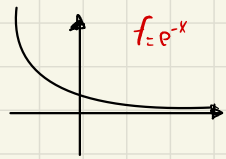
OSS: Ogni minimo globale è un minimo locale (prendo come intorno tutta la regione ammissibile) → non è vero il viceversa

Nella PC la distinzione non è stata fatta perché i minimi locali coincidono sempre con i minimi globali

CASI POSSIBILI

- Non esistono minimi locali e/o globali perché la funzione obiettivo diverge a $-\infty$ (illimitata inferiormente)
- Esistono minimi locali ma non minimi globali perché la funzione è illimitata inferiormente





- Non esistono minimi locali anche se funzione è limitata inferiormente (Es. e^{-x})
- Un minimo globale (e quindi anche locale) esiste se:
  - S è compatto (chiuso e limitato)
  - f continua → vero per ipotesi $f \in C^2$

  } TEO. DI WEIERSTRASS

DEF: data una matrice simmetrica A $n \times n$, diciamo che questa è **SEMIDEFINITA POSITIVA** se: $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

DEF: data una matrice simmetrica A $n \times n$, diciamo che questa è **DEFINITA POSITIVA** se: $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Una matrice A è semidefinita positiva <=> tutti i suoi autovalori sono NON NEGATIVI (≥ 0)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \qquad A-\lambda I=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I)=(3-\lambda)(2-\lambda)-1=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+5=0$$

$$\lambda=\frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

} 1° metodo possibile

Una matrice A è semidefinita positiva <=> tutti i suoi minori principali sono non negativi

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

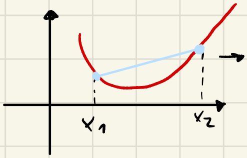
$\det(A_{11})=3>0$
$\det(A_{22})=2>0$
$\det|A|=3\cdot 2-1=5>0$

→ matrice definita positiva

} 2° metodo possibile

Una funzione f si dice CONVESSA se:

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in (0,1): f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le f_{x_1}(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$



→ il grafico della f in quell'intervallo deve essere al di sotto della retta $f_{x_1}(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

RECAP

Il GRADIENTE di f è un vettore che ha tante componenti quante le variabili di f, la prima componente è la derivata parziale della f rispetto alla prima variabile, la seconda componente è la derivata parziale della f rispetto alla seconda variabile etc. etc.

L' HESSIANO è la matrice che contiene le varie derivate seconde parziali di una funzione

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n: f(x_2) \ge f_{x_1} + \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1)$ ~ iperpiano tangente alla f in x_1

← f è convessa

~ tangente x_1

- $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n: \underbrace{\nabla^2}_{\text{HESSIANO}} f(x_1)$ è semidefinito positivo

Le tre definizioni sono equivalenti

Una funzione è strettamente convessa se le disequazioni delle prime due def. sono < e non ≤
una condizione sufficiente, ma non necessaria, perché si sia stretta convessità è che l'Hessiano sia definito positivo.

Una funzione è concava se $-f$ è convessa (stesso discorso per f strettamente concava)

I problemi di programmazione convessa (PC) hanno la seguente forma

$$\min f(x)$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$
$$c_i(x) \geq 0 \quad i \in K_2$$

con $f(x)$ CONVESSA e le $c_i, i \in K_2$ CONCAVE

OSS: S_a di un problema PC è un INSIEME CONVESSO

DIM: presi $x_1, x_2 \in S \rightarrow c_i(x_1) \geq 0 \; \forall i \in K_2, \; c_i(x_2) \geq 0 \; \forall i \in K_2$
per la CONCAVITÀ di c_i si ha: $\forall \lambda \in (0,1) \; c_i(\lambda x_2 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda c_i(x_1) + (1-\lambda) c_i(x_2) \geq 0$
e quindi $\forall \in (0,1) \; \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S$
da cui S è un INSIEME CONVESSO

I problemi PL sono una restrizione dei problemi PC, quest'ultimi sono importanti perché sono risolvibili in tempo polinomiale.

LEZIONE 33 - CONDIZIONI LINEARI E SUFFICIENTI DI OTTIMALITÀ LOCALE, SCHEMA METODI LINESEARCH*

Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che

GRADIENTE

funzione lineare

funzione quadratica

- $\nabla f(x) = \begin{cases} c & \text{se } f(x) = c^T x + c_0 \\ Hx & \text{se } f(x) = \frac{1}{2} x^T H x \text{ con } H \text{ simmetrica} \end{cases}$

ES. $f(x,y) = ax + by + c$

gradiente f lineare) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Hessiano f lineare $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ → sempre nullo x f lineari

$f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f$

gradiente f quadratica $\nabla f(x,y) = \begin{vmatrix} 2(ax+cy)+d \\ 2(by+cx)+e \end{vmatrix}$

Hessiano f quadratica $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2a & 2c \\ 2c & 2b \end{bmatrix}$

diventa matrice H

- la derivata di una f composta su più variabili es. $f(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_k(\lambda)) \longrightarrow \frac{df(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots x_k(\lambda))}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} \right]^T \nabla_{x_i} f$

* PARTE DEL PROGRAMMA FATTA IN MANIERA SUPERFICIALE FINO A CONDIZIONI KKT

← questi argomenti vengono chiesti specialmente nelle domande aperte di teoria (ormai in disuso!)

CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

CONDIZIONE NECESSARIA DEL PRIMO ORDINE $\longrightarrow$ se x^* è un minimo locale, allora $\nabla f(x^*)=0$ condizione di stazionarietà

CONDIZIONE NECESSARIA DEL SECONDO ORDINE $\longrightarrow$ se x^* è un minimo locale, allora: $\nabla f(x^*)=0$ $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita positiva

CONDIZIONE SUFFICIENTE (minimo locale forte) $\longrightarrow$ $\nabla f(x^*)=0$, $\nabla^2 f(x^*)$ è definita positiva

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE $\longrightarrow$ $\nabla f(x^*)=0$ nel CASO CONVESSO

OSS. NEL CASO CONVESSO OGNI MINIMO LOCALE È ANCHE GLOBALE

DIM.: X ASSURDO, HP: x^* minimo locale ma non globale $\longrightarrow \exists \bar{x}: f(\bar{x})<f(x^*) \Rightarrow \forall \lambda \in (0,1)$ $f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(\bar{x}) < f(x^*)$
che contraddice l'ottimalità locale di x^*

OSS NEL CASO STRETTAMENTE CONVESSO, se esiste un minimo globale, esso è anche l'unico.

DIM: X ASSURDO, HP: $x^*, \bar{x}$ con $x^* \neq \bar{x}$ due minimi globali. Si avrà $f(\bar{x})=f(x^*)$, inoltre $\forall \lambda \in (0,1)$ $f(\lambda x^* + (1-\lambda)\bar{x}) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(\bar{x})$
che contraddice l'ottimalità globale di $\bar{x}$

METODI LINESEARCH

SCHEMA GENERALE:

- Si individui una direzione di discesa d_k
- Si individui tramite una ricerca lungo una semiretta con origine x_k e direzione d_k uno scalare $\alpha_k > 0$ tale che: $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$
- Si ponga $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ e $k = k+1$

METODI TRUST REGION

Metodi iterativi in cui l'iterato successivo x_{k+1} viene determinato risolvendo un opportuno sottoproblema basato sull'iterato corrente x_k.
Nel sottoproblema si minimizza un modello quadratico $M_k(x)$ che approssima f in una sfera centrata in x_k e con un certo raggio ρ_k $\quad x_k \in \arg\min_{x: \|x-x_k\| \leq \rho_k} M_k(x)$; quindi si pone

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k & \text{se } f(\bar{x}_k) \geq f(x_k) \\ \bar{x}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

LEZIONE 36 ~ esercitazione programmazione lineare

1 ~ con senza vincoli : verificare se esistono punti di minimo locale / globale

$$f(x,y) = e^{x^2} - 3x^3y + 27xy$$

1) controllare condizione stazionarietà

1.1) calcolo gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2} - 9x^2y + 27y \\ -3x^3 + 27x \end{pmatrix}$$

derivata prima $f(x,y)$ rispetto ad x

derivata prima $f(x,y)$ rispetto ad y

min. loc. è un punto stazionario ma non è sempre vero il contrario

1.2) applico condizione stazionarietà ~ CONDIZIONE NECESSARIA

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 2xe^{x^2} - 9x^2y + 27y = 0 \\ -3x^3 + 27x = 0 \rightarrow -3x(x^2-9) = 0 \end{cases}$$

$x=0 \rightarrow 27y = 0 \rightarrow (0,0)$

$x=-3 \rightarrow -6e^9 - 81y + 27y = 0 \rightarrow \left(-3, -\frac{e^9}{9}\right)$

$x=3$ $\quad \frac{}{9})$

1.3) Calcolo hessiano

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 18xy & -9x^2+27 \\ -9x^2+27 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4) Sostituisco punti trovati in 1.2 nella matrice hessiana

(normalmente sono controllati anche i minori)

*prendendo come minore l'intera matrice

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 27 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det^* < 0 \rightarrow$ non è semidefinita positiva $\rightarrow$ NON E' UN MINIMO LOCALE

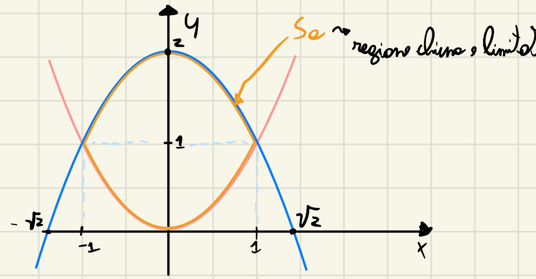
$\nabla^2 f\left(-3, -\frac{e^9}{9}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -54 \\ -54 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \det^* < 0 \rightsquigarrow$ non è semidefinita positiva $\rightarrow$ NON E' UN MINIMO LOCALE

$\nabla^2 f\left(3, \frac{e^9}{9}\right) = \begin{pmatrix} 32e^9 & -54 \\ -54 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det^* < 0 \rightsquigarrow$ non è semidefinita positiva $\rightarrow$ NON E' UN MINIMO LOCALE

→ CONCLUSIONE ↝ LA FUNZIONE F NON HA MINIMI LOCALI

2 ~ con vincolato (PRESENTE NEGLI ESAMI!)

$$\min f(x,y) \qquad f(x,y)$$
$$-x^2+y \geq 0 \qquad c_1(x,y)$$
$$2-y-x^2 \geq 0 \qquad c_2(x,y)$$



• È un problema di programmazione convessa?

Problema di programmazione convessa $\Leftrightarrow$ $f(x,y)$ è convessa
$c_1, c_2(x,y)$ sono concave

1.1) Verifico se $f(x,y)$ è convessa

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ 2y-2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ~> DET positivo per $x<0$, ovvero semipositivo per $x<0$. S_a comprende punti con $x>0$ → $f(x,y)$ non è convessa

1.2) Verifico se c_1, c_2 sono concave

$$\nabla c_1 = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

* metto "−" perché devo verificare che sia CONCAVA

$$\nabla^2 (-c_1)^{*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ~> minori principali non negativi → semidefinita positiva → è CONCAVA

$$\nabla c_2 = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 (-c_2)^{*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ~> minori principali non negativi → semidefinita positiva → è CONCAVA

• Ci sono punti della constraint qualification viste a lezione?

↳ 1) vincoli sono lineari → NO
2) gradienti dei vincoli ATTIVI sono linearmente indipendenti → da verificare

2.1) Creo matrice con gradienti

rango matrice pari al numero dei vettori ⇒ $\det \neq 0$

$$\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -2x & -2x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \det = 4x \rightsquigarrow \det = 0 \Leftrightarrow x = 0$$, sono lin. indipendenti per tutti gli $x \neq 0$

Per $x=0 \to \begin{cases} y=0 \\ 2-y=0 \end{cases} \to$ IMPOSSIBILE $\to \nexists$ punti in cui i vincoli sono ATTIVI contemporaneamente in cui $\det = 0$

- Impostare le condizioni KKT

1) Scrivere funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = \underbrace{-x^3+(y-1)^2}_{f(x,y)} - \underbrace{\mu_1(-x^2+y)}_{\mu_1(c_1(x,y))} - \underbrace{\mu_2(2-y-x^2)}_{\mu_2(c_2(x,y))}$$

applico condizioni KKT

- STAZIONARIETÀ $\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2)$ rispetto ad x ed y

$$\left.\begin{aligned} &\partial\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = -3x^2+2\mu_1 x+2\mu_2 x = 0 \\ &\partial\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = 2y-2-\mu_1+\mu_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ gradiente pari a 0

$-x^2+y \geq 0 \rightsquigarrow c_1 \geq 0$

$2-y-x^2 \geq 0 \rightsquigarrow c_2 \geq 0$

$\mu_1(-x^2+y) = 0 \rightsquigarrow$ condizione complementarità $\to \mu_1 c_1 = 0$, $\mu_2 c_2 = 0$

$\mu_2(2-y-x^2) = 0$

$\mu_1, \mu_2 = 0$

- TROVARE TUTTI I PUNTI KKT
  - Studio i 4 casi possibili per μ_1 e μ_2 $(\overset{1}{\mu_1=\mu_2=0}; \overset{2}{\mu_1>0,\mu_2>0}; \overset{3}{\mu_1=0,\mu_2>0}; \overset{4}{\mu_1>0,\mu_2=0})$

CASO 1

$$\left.\begin{aligned} &-3x^2=0 \to x=0 \\ &2y-2=0 \to y=1 \\ &-x^2+y \geq 0 \to 1 \geq 0 \text{ ok} \\ &2-y-x^2 \geq 0 \to 1 \geq 0 \text{ ok} \\ &0(-x+y)=0 \to 0=0 \text{ ok} \\ &0(2-y-x^2)=0 \to 0=0 \text{ OK} \end{aligned}\right\}$$ $x=0, y=1, \mu_1=0, \mu_2=0$ PUNTO KKT

CASO 2 $(\mu_1 > 0, \mu_2 = 0)$

Il vincolo $\mu_1 \overset{>0}{} (\overset{?}{-x^2+y}) = 0$ diventa $(-x^2+y) = 0$

$$\begin{cases} -3x^2 + 2\mu_1 x = 0 \\ 2y - 2 - \mu_2 = 0 \\ -x^2 + y \geq 0 \\ (-x^2+y) = 0 \\ 0(2-y-x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot (-3x + 2\mu_1) = 0 \\ 2x^2 - 2 - \mu_1 = 0 \\ -x^2 + y > 0 \\ 2 - y - x^2 \geq 0 \\ -x^2 + y = 0 \\ 0(2-y-x^2) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$

$-2 - \mu_1 = 0 \rightarrow \mu_1 = -2 \rightarrow$ STOP, non è un punto KKT, $\mu_1 \mu_2$ devono essere ≥ 0

$-3x + 2\mu_1 = 0 \rightarrow x = \frac{2\mu_1}{3}$

$\frac{8}{9}\mu_1^2 - 2 - \mu_1 = 0 \xrightarrow{\text{risolvo}} \mu_1 = \frac{9 - \sqrt{657}}{16} < 0$

$\mu_1 = \frac{9 + \sqrt{657}}{16} \rightarrow x = \frac{9 + \sqrt{657}}{24}$

$\hookrightarrow y = \left(\frac{9 + \sqrt{657}}{24}\right)^2$

$\hookrightarrow 2 - 2\left(\frac{9 + \sqrt{657}}{24}\right)^2 < 0$

$-x^2 + y \geq 0$

$2 - y - x^2 \geq 0$

$-x^2 + y = 0$

$0(2-y-x^2) = 0$

non soddisfatta quindi non è KKT

APPLICO STESSI RAGIONAMENTI SU CASI 2,3

PUNTI KKT

$x = 0, y = 1, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0 \rightarrow$ VAL OB. $f(0,1) = 0$

$x = y = 1;\ \mu_1 = \mu_2 = \frac{3}{2} \rightarrow$ VAL. OB. $f(1,1) = 1$

Esiste un minimo globale? Se sì quale?

L'ottimo globale esiste perché SA è un insieme chiuso e limitato ed f è continua (TEOREMA DI WEIERSTRASS)

Poiché tutti i punti soddisfano le CONSTRAINT QUALIFICATION $\rightarrow$ restringo la ricerca ai punti KKT (altrimenti cercavo anche nei punti che non soddisfano una constraint qualification)

Dei due punti KKT quello con valore obiettivo minimo è $x = y = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{3}{4}$

$\hookrightarrow$ minimo globale è il punto $(1,1)$ con val. obiettivo -1