RICERCA OPERATIVA

GIUSEPPE
RICCIARDI

FORMULE E TEORIA UTILE

METODO RISOLUZIONE GRAFICA

1) Disegnare vincoli e la f obiettivo ponendola pari a 0

2) Individuare DIREZIONE CRESCITA f obiettivo: traccia la retta $f=1$, la dir. cresc. va da $f=0 \to f=1$

3) Individuare regione ammissibile S_A
   - $\to \exists\, S_a \neq \emptyset$
     - $\to$ POLITOPO
     - $\to$ POLIEDRO ILLIMITATO
   - $\to S_a = \emptyset$

4) " " soluzioni ottime S_{OTT}
   - $\to S_a = \emptyset \to S_{OTT} = \emptyset$
   - $\to S_a$ è POLITOPO
     - $\to S_{OTT}$ ha 1 ELEMENTO
     - $\to S_{OTT}$ insieme infinito (LIMITATO) di punti
   - $\to S_a$ è un POLIEDRO ILLIMITATO $\to$
     - $S_{OTT} = \emptyset$
     - S_{OTT} ha 1 elemento
     - S_{OTT} infiniti elementi

PROBLEMA PL
- $\to$ forma generica (F.G.)
- $\to$ forma canonica (F.C.) — max nella f OB., vincoli tutti $\leq$, variabili ≥ 0
- $\to$ forma standard (F.S.)

REGOLE CONVERSIONE

F.G.	$\to$ F.C.
$\min cx$	$\to -\max -cx$
$a_{ix}^T \geq b_i$	$\to -a_{ix} \leq -b_i$
$a_{ix} = b_i$	$\to a_{ix} \leq b_i,\ -a_{ix} \leq -b_i$ (2 VINCOLI)
$x_5 \leq 0$	$\to x_5' = -x_5 \geq 0$ (DA SOSTITUIRE NEL VINCOLO E NELL'OBIETTIVO)
x_5 LIBERA IN SEGNO	$\to x_5 = x_5' - x_5''$, $x_5', x_5'' \geq 0$

F.C.	$\to$ F.S.
$\max cx$	$\max cx$
$a_{ix} \leq b_i$	$a_{ix} + y_i = b_i$
$x \geq 0$	$x, y_i \geq 0$

AMMISSIBILITÀ DI UNA BASE
- PRIMALE $\to$ termini noti dei vincoli tutti ≥ 0
- DUALE $\to$ tutti i coefficienti di costo ridotto dell'obiettivo sono ≤ 0

} DEGENERI SE $=0$

ALGORITMO SIMPLESSO PRIMALE (II FASE)

SI PARTE CON BASE AMMISSIBILE

1) VERIFICA CONDIZIONI DI STOP*
2) SCELGO VARIABILE ENTRANTE → variabile con c.c.r. + alto nell'obiettivo
3) " " USCENTE → variabile in base che si annulla prima facendo aumentare la variabile che entra nei vincoli.
4) OPERAZIONE DI CARDINE → sostituisco i vincoli portando a sinistra la variabile entrante, e sostituisco nell'obiettivo.

*OTTIMALITÀ: tutti i coefficienti di costo ridotto delle variabili fuori base sono NON POSITIVI

ILLIMITATEZZA: rispettata se i c.c.r. delle variabili fuori base sono presenti nell'obiettivo e nei vincoli sono POSITIVI

METODO PRIMA FASE

TROVO BASE AMMISSIBILE aggiungendo o sottraendo una variabile non negativa s_i in ogni vincolo del problema e la somma è la somma cambiata di segno di tali variabili. N.B. → S_a NON PUÒ ESSERE ILLIMITATO

2 casi: VAL. OTTIMO $< 0 \rightarrow S_a \neq \emptyset$

VAL. OTTIMO $= 0$ →
- → tutte le s_i sono fuori base → si eliminano le variabili s_i e si scambiano gli obiettivi
- → alcune s_i sono in base → applico OPERAZIONI DI CARDINE X farle uscire

Esempio

II FASE

$\max\ 2x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3$

$x_1+x_2+x_3=+3$

$x_1-x_2+x_3=+1$

$x_1+x_3=+2$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

I FASE

$\max\ -s_1-s_2-s_3$

$x_1+x_2+x_3+s_1=3$

$x_1-x_2+x_3+s_2=1$

$x_1+x_3+s_3=2$

$\longrightarrow B_0=\{s_1,s_2,s_3\}$ etc. etc.

SEMPLIFICAZIONE: se una variabile x_{ij} compare in un solo vincolo con coefficiente dello stesso segno del termine noto di quel vincolo → in quel vincolo non si introduce la variabile s_i

PRIMALE →	DUALE
n VARIABILI	n VINCOLI
m VINCOLI	m VARIABILI
$S_{ott} \neq \emptyset$	$D_{ott} \neq \emptyset$
$S_a = \emptyset$	$D_a = \emptyset$ oppure obiettivo illimitato
$D_a = \emptyset$	$S_a = \emptyset$ oppure obiettivo illimitato
$S_{ott} = \emptyset$ xké ob. illimitato	$D_a = \emptyset$
$D_{ott} = \emptyset$ xké ob. illimitato	$S_a = \emptyset$

ESEMPIO

PRIMALE

$\max -x_1 - x_2 + 0x_4 + 0x_3$

$-2x_1 + x_2 + x_3 = -1$

$x_1 - x_2 + x_4 = -2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

DUALE

$\min -u_1 - 2u_2$

$-2u_1 + u_2 \geq -1$ $\quad x_1$

$u_1 - u_2 \geq -1$ $\quad x_2$

$u_1 \geq 0$ $\quad x_3$

$u_2 \geq 0$ $\quad x_4$

* OTTIMALITÀ: se la base è ammissibile x duale e primale → SOL. OTTIMA

ILLIMITATEZZA: nell'obiettivo c.c.r > 0 mentre nei vincoli diverge $-\infty$

SIMPLESSO DUALE

1) VERIFICA CONDIZIONI DI STOP *
2) FAR USCIRE UNA VARIABILE → variabile con termine noto + piccolo
3) FAR ENTRARE UNA VARIABILE → variabile con c.c.r. positivo nel vincolo scelto prima. Se tutti c.c.r sono positivi
4) OPERAZIONE DI CARDINE — si applica CRITERIO DEI RAPPORTI: $-\left(\frac{\text{termine noto OBIETTIVO } x_i}{\text{c.c.r del vincolo}}\right)$, si sceglie il rapporto minore

ANALISI DI SENSITIVITÀ

(Con esempio si capisce meglio!)

$$\begin{cases} \max 4 - x_1 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_1 - x_3 \\ x_4 = 1 - x_1 + x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

RISULTATO SIMPLESSO

$B = \{x_2, x_4\}$

$N = \{x_1, x_3\}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

MATRICE I

$$A_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_B^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

○ MODIFICA TERMINE NOTO (1° vincolo b_1)

ALGEBRICAMENTE: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 + \Delta b_1 \geq 0 \\ 1 - \Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow -2 \leq \Delta b_1 \leq 1 \rightsquigarrow$ val ottimo $= 2\Delta b_1$

termine noto 1° vincolo

GRAFICAMENTE: nel PRIMALE significa ruotare la retta del vincolo parallelamente, nel DUALE cambia il coefficiente nell'obiettivo (u_1)

○ MODIFICA COEFFICIENTE COSTO DI UNA VARIABILE FUORI BASE OTTIMA

Variazione introdotta nell'obiettivo

Δc_1 (per x_1) $\rightsquigarrow 4 - x_1 - 2x_3 + \Delta c_1 x_1 \rightsquigarrow (-1 + \Delta c_1)x_1 - 2x_3 + 4 \rightsquigarrow -1 + \Delta c_1 \leq 0 \rightsquigarrow \Delta c_1 \leq 1$

Variazione Val. ottimo $= 0$

ΔC_2 per X_2 $\rightsquigarrow$ $4 - x_1 - 2x_3 + \Delta C_2 x_2 = 4 + 2\Delta C_2 + (1 - \Delta C_2)x_1 + (-2 - \Delta C_2)x_3$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} 1 - \Delta C_2 \leq 0 \\ -2 - \Delta C_2 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \Delta C_2 \geq -1$

$x_2 = 2 - x_1 - x_3$ (dal vincolo)

O VARIAZIONE DI UN VINCOLO DI UNA VARIABILE DELLA BASE OTTIMA

Es. 1° vincolo

$4 - x_1 - 2x_3 - M_1 \Delta a_{11} x_1$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \Delta a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1 - 2\Delta a_{11} \rightsquigarrow \Delta a_{11} \geq -\frac{1}{2}$

Variazione Val. ottimo $= 0$

DOMANDE TEORIA ESAMI VECCHI + COMUNI

- Possibili forme S_{ott}

1) $S_a = \emptyset \rightarrow S_{ott} = \emptyset$

2) S_a è un POLITOPO
   - $\rightarrow$ S_{ott} è composto da un elemento
   - $\rightarrow$ S_{ott} è composto da un insieme infinito e limitato di punti

3) S_a è un POLIEDRO ILLIMITATO
   - $\rightarrow$ S_{ott} è composto da un elemento
   - $\rightarrow$ S_{ott} è $\emptyset$, in quanto l'obiettivo è illimitato
   - $\rightarrow$ S_{ott} è infinito limitato
   - $\rightarrow$ S_{ott} è infinito illimitato

- INSIEME CONVESSO + DIMOSTRAZIONE CHE S_a è CONVESSO

DEF: $\forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0,1]: \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$ → "Dati due punti qualsiasi di C, anche il segmento che li congiunge è interamente contenuto in C"

DIMOSTRAZIONE: $x_1, x_2 \in S_a$

$a_1 x_1 \leq b_i ; a_2 x_2 \leq b_i$ con $i \in [0, \dots m]$ ed $x_1, x_2 \geq 0$

$\forall \lambda \in [0,1]$ e $i \in \{1, \dots, m\}$

uso la DEF di insieme convesso

$a_i [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] = \lambda a_i x_1 + (1-\lambda) a_i x_2 \leq \underbrace{\lambda b_i + (1-\lambda) b_i}_{= b_i}$

e inoltre $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \geq 0$

da cui $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S_a$ C.V.D.

- COEFFICIENTE COSTO RIDOTTO E SUO UTILIZZO NEL SIMPLESSO

I coefficienti a costo ridotto sono i coefficienti delle variabili fuori base nell'obiettivo, indicano la variazione dell'obiettivo in corrispondenza dell'incremento di un'unità di una variabile fuori base.
Nel metodo del simplesso sono utilizzati per la verifica di ottimalità nel primale e di ammissibilità nel duale; nel primale servono anche per decidere quale variabile far entrare in base.

- CONDIZIONE ILLIMITATEZZA + DIMOSTRAZIONE

DEF: $\exists\, \gamma_h > 0: \quad \alpha_{rh} \geq 0,\ r=1,\dots,m$

DIM: Se prendo la riformulazione rispetto alla base B di un problema PL e si pongono a zero tutte le variabili fuori base tranne γ_h, ciò che rimane:

$$\max\ \gamma_0 + \gamma_h x_{i_{m+h}}$$
$$x_{i_1} = \beta_1 \qquad h\, x_{i_{m+h}}$$
$$\vdots$$
$$x_{i_m} = \beta_m + \alpha_{mh} x_{i_{m+h}}$$

Se $x_{i_{m+h}}$ cresce → variabili in base restano in base (restano ≥ 0), ma obiettivo diverge $+\infty$ → $S_o = \emptyset$ xké obiettivo illimitato

- DIMOSTRARE CHE SE PRIMALE HA OBIETTIVO ILLIMITATO → DUALE HA REGIONE AMMISSIBILE VUOTA

DIM. per assurdo $D_a \neq \emptyset$ e $u_o \in D_a \Rightarrow \forall x \in S_a \quad cx \leq u_o b$, quindi l'obiettivo del primale è limitato dal valore $u_o b$, che contraddice l'illimitatezza dell'obiettivo. Per l'inverso si sfrutta la SIMMETRIA TRA PRIMALE E DUALE

- 1° TEOREMA DUALITÀ (mai chiesto)

$S_{ott} \neq \emptyset \Leftrightarrow D_{ott} \neq \emptyset$ e i valori ottimi dei due problemi coincidono

• 2° TEOREMA DUALITÀ + DIMOSTRAZIONE

DEF: $x^* \in S_{ott}$ e $u^* \in D_{ott} \Leftrightarrow x^*$ ed u^* appartengono ad S_a e D_a, e rispettano le CONDIZIONI DI COMPLEMENTARITÀ

• $(u^* A - c)x^* = 0$

DIM: Dimostriamo che se le due soluzioni soddisfano cond. comp $\Rightarrow$ sono ottime

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se vale } \bullet \Rightarrow u^* A x^* = c x^* \, ; \\ x \in S_a \text{ implica } A x^* = b \end{array}\right\} u^* b = u^* A x^* = c x^*$$

→ le due soluzioni sono ottime x entrambi i problemi

Dimostriamo che se le due soluzioni sono ottime $\Rightarrow$ soddisfano cond. comp.

x 1° teorema della dualità sappiamo che $u^* b = c x^* \xrightarrow{\text{sommo e sottraggo } u^* A x^*} u^* b - u^* A x^* + u^* A x^* - c x^* = 0$

riscrivibile come $u^* (b - \underbrace{A x^*}_{b \text{ perché } x^* \in S_a}) + (u^* A - c) x^* = 0 \rightarrow (u^* A - c) x^* = 0$ C.V.D.

• DEFINIZIONE DI RAGGIO E RAGGIO ESTREMO

Si definisce un raggio di S_a un vettore $r \neq 0$ tale che $\forall x_0 \in S_a \; \forall \lambda \geq 0 \quad x_0 + \lambda r \in S_a$

Un raggio è estremo se non esistono altri due raggi r_1 ed r_2 di S_a con direzioni distinte $r_1 \neq \mu r_2 \; \forall \mu \in \mathbb{R}$: $r = \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2$

N.B. POLITOPI non hanno raggi ed S_a ha SEMPRE un numero FINITO di raggi estremi.

- DIM. TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PL

DEF: Dato un problema in forma canonica, se $S_{OTT} \neq \emptyset \rightarrow S_{OTT}$ contiene almeno un vertice di S_A

DIM: $V_1 \dots V_K \rightsquigarrow$ vertici di S_a, se S_a è un POLIEDRO ILLIMITATO $\rightarrow r_1 \dots r_h$ sono i raggi estremi di S_A

PER ASSURDO, HP: $V_1, \dots, V_K \notin S_{ott} \Rightarrow CV_i \leq x^*$

poiché $x^* \in S_a \rightarrow \exists \lambda^*_1, \dots, \lambda^*_K \geq 0 : \sum_i \lambda^*_K = 1$ * ed $\exists U^*_1, \dots, U^*_h \geq 0$ tali che: $x^* = \sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i v_i + \sum_{J=1}^{h} U^*_J r_J$

Quindi avremo che $cx^* = c \left[\sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i v_i + \sum_{J=1}^{h} U^*_J r_J \right]$; per la linearità della funzione obiettivo

$$cx^* = \sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i (cv_i) + \sum_{J=1}^{h} U^*_J \underbrace{(r_J c)}_{\leq 0 \text{ dal LEMMA}}$$

Da cui

$$cx^* \leq \sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i \underbrace{(cv_i)}_{< Cx^*} < \sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i (cx^*)$$

Riscrivibile come

$$cx^* < \sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i \underbrace{(cx^*)}_{\text{non dipende dalla sommatoria}} \longrightarrow cx^* < (cx^*) \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i}_{=1} \rightarrow Cx^* < Cx^* \ \lightning

Esercizi con soluzioni - 2004

1.1 ~ porre in forma canonica i seguenti programmi lineari

a)

PL GENERICO

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1+4x_2-2x_3 \\ & x_1+2x_2-x_3 \ge 5 \\ & 2x_1+4x_3 = 12 \\ & x_1+x_2+x_3 \le 15 \\ & x_1, x_2 \ge 0,\ x_3 \text{ libera} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

PL CANONICO

$$\begin{aligned} -\max\ & -3x_1-4x_2+ \\ & -x_1-2x_2+x_4-x_5 \le -5 \\ & 2x_1+4x_4-4x_5 \le 12 \\ & -2x_1-4x_4+4x_5 \le -12 \\ & x_1+x_2+x_4-x_5 \le 15 \\ & x_3 = x_4-x_5 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1-x_2 \\ & x_1+x_2-x_3 = 8 \\ & 3x_1+x_3 \le 7 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ libera},\ x_3 \le 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1-U+V \\ & x_1+U-V+x_3' \le 8 \\ & -x_1-U+V-x_3' \le -8 \\ & 3x_1-x_3' \le 7 \\ & x_1,x_3',U,V \ge 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \min\ & 8x_1-x_2+x_3 \\ & x_1+x_3 \ge 4 \\ & x_2-x_3 \le 7 \\ & x_1-x_2 \le 2 \\ & x_1,x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} -\max\ & -8x_1+x_2+x_3' \\ & -x_1+x_3' \le -4 \\ & x_2+x_3' \le 7 \\ & x_1-x_2 \le 2 \\ & x_1,x_2,x_3' \ge 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1-x_2 \\ & x_1+x_2 \le 2 \\ & 2x_1+7x_2 = 8 \\ & x_1 \ge 0\ \ x_2 \le 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1+x_2' \\ & x_1-x_2' \le 2 \\ & 2x_1-7x_2' \le 8 \\ & -2x_1+7x_2' \le -8 \\ & x_1,x_2' \ge 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \min\ & 4x_1+5x_2-x_3+2x_4 \\ & x_1+x_2 \ge 4 \\ & x_2+x_3 \le 7 \\ & x_3-x_4 \le 2 \\ & x_1-x_4 = 12 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0,\ x_4 \text{ libera} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} -\max\ & -4x_1-5x_2+x_3+2v-2u \\ & -x_1-x_2 \le -4 \\ & x_2+x_3 \le 7 \\ & x_3+V-U \le 2 \\ & -x_1+U-V \le 12 \\ & x_1-U+V \le 12 \\ & x_1,x_2,x_3,U,V \ge 0 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+4x_3 \\ & x_1+x_2+x_3 \le 12 \\ & x_1-x_2 \ge 2 \\ & x_2+x_3 \le 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ libera},\ x_3 \le 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1-4x_3' \\ & x_1+U-V-x_3' \le 12 \\ & -x_1+U-V \le -2 \\ & U-V-x_3' \le 4 \\ & x_1,x_3',U,V \ge 0 \end{aligned}$$

PL GENERICO — PL STANDARD

a

PL GENERICO:

$$\min\ 3x_1+4x_2-2x_3$$
$$x_1+2x_2-x_3\geq 5$$
$$2x_1+4x_3=12$$
$$x_1+x_2+x_3\leq 15$$
$$x_1,x_2\geq 0,\ x_3 \text{ libero}$$

PL STANDARD:

$$-\max\ -3x_1-4x_2+2u-2v$$
$$x_1+2x_2-u+v-x_4=5$$
$$2x_1+4u-4v=12$$
$$x_1+x_2+u-v+x_5=15$$
$$x_1,x_2,u,v,x_4,x_5\geq 0$$

b

PL GENERICO:

$$\max\ 4x_1-x_2$$
$$x_1+x_2-x_3=8$$
$$3x_1+x_3\leq 7$$
$$x_1\geq 0,\ x_2 \text{ libero},\ x_3\leq 0$$

PL STANDARD:

$$\max\ 4x_1-u+v$$
$$x_1+u-v+y=8$$
$$3x_1-y+x_4=7$$
$$x_1,u,v,y,x_4\geq 0$$

c

PL GENERICO:

$$\min\ 8x_1-x_2+x_3$$
$$x_1+x_3\geq 4$$
$$x_2-x_3\leq 7$$
$$x_1-x_2\leq 2$$
$$x_1,x_2\geq 0,\ x_3\leq 0$$

PL STANDARD:

$$-\max\ -8x_1+x_2+y_3$$
$$x_1-y_3-x_4=4$$
$$x_2+y_3+x_4=7$$
$$x_1-x_2+x_5=2$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,y_3\geq 0$$

d

PL GENERICO:

$$\max\ 4x_1-x_2$$
$$x_1+x_2\leq 2$$
$$2x_1+7x_2=8$$
$$x_1\geq 0\quad x_2\leq 0$$

PL STANDARD:

$$\max\ 4x_1+y_2$$
$$x_1-y_2+x_3=2$$
$$2x_1-7y_2=8$$
$$x_1,y_2,x_3\geq 0$$

e

PL GENERICO:

$$\min\ 4x_1+5x_2-x_3+2x_4$$
$$x_1+x_2\geq 4$$
$$x_2+x_3\leq 7$$
$$x_3-x_4\leq 2$$
$$x_1-x_4=12$$
$$x_1,x_2,x_3\geq 0,\ x_4 \text{ libero}$$

PL STANDARD:

$$-\max\ -4x_1-5x_2+x_3-2u+2v$$
$$x_1+x_2-x_5=4$$
$$x_2+x_3+x_6=7$$
$$x_3-u+v+x_7=2$$
$$x_1-u+v=12$$
$$x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,u,v\geq 0$$

f

PL GENERICO:

$$\max\ 2x_1+4x_3$$
$$x_1+x_2+x_3\leq 12$$
$$x_1-x_2\geq 2$$
$$x_2+x_3\leq 4$$
$$x_1\geq 0,\ x_2 \text{ libero},\ x_3\leq 0$$

PL STANDARD:

$$\max\ 2x_1-4y_3$$
$$x_1+u-v-y_3+x_4=12$$
$$x_1-u+v-x_5=2$$
$$u-v-y_3+x_6=4$$
$$x_1,x_4,x_5,x_6,y_3,u,v\geq 0$$

Esercizio 1.3 - utilizza il metodo del simplesso x risolvere i PL

a)

$$\max\ 3x_1+2x_2-5x_3 \qquad\qquad \max\ 3x_1+2x_2-5x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1-2x_2+2x_3 &\le 4 \\ 2x_1+x_2+x_3 &\le 1 \\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{F.C. \qquad F.S} \quad \begin{aligned} 4x_1-2x_2+2x_3+x_4 &= 4 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_5 &= 1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

$B_0\{x_4,x_5\}$ → base ammissibile non degenere, VAL. OTTIMO $=0$ $\quad x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=4, x_5=1$

$$\max\ 3x_1+2x_2-5x_3$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 4-4x_1+2x_2-2x_3 \\ x_5 &= 1-2x_1-x_2-x_3 \\ x_1,x_2,x_3,&x_4,x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

OTTIMALITÀ NON RI

Entro x_1, per var. uscente applico CRITERIO DEL RAPPORTO $x_4=\frac{4}{4}$, $x_5=\frac{1}{2}$ ⇝ esce x_5

$B_1=\{x_4,x_1\}$ ⇝ APPLICO OPERAZIONE DI CARDINE

$x_1=\frac{1}{2}\quad x_4=2\quad x_{3,5,2}=0$

Val. ottimo $=\frac{3}{2}$

$$\max\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}x_2-\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{2}x_5+2x_2-5x_3$$

$$x_4=4-(2+\cancel{2x_2}-\cancel{2x_3}-2x_5)+\cancel{2x_2}-\cancel{2x_3}$$

$$x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5$$

$$\longrightarrow$$

$$\max\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}x_2-\frac{13}{2}x_3-\frac{3}{2}x_5$$

$$x_4=2+2x_5+4x_2$$

$$x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5$$

$x_5,x_2>0$ → OTTIMALITÀ NON RISPETTATA

$x_3<0, x_5$ → ILLIMITATEZZA NON RISPETTATA

Entra x_2, esce x_1 (perché $x_2<0$ in quel vincolo)

$B_2=\{x_4,x_2\} \rightarrow$ $x_1,x_3,x_5=0$ $x_2=1$ $x_4=6$ ⇝ Val ottimo $=2$

$$\max \ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}(1-2x_1-x_3-x_5)-\frac{13}{2}x_3-\frac{3}{2}x_5$$
$$x_4=2+2x_5+4-8x_1-6x_3-6x_5$$
$$x_2=1-2x_1-x_3-x_5$$

$\longrightarrow$

$$\max \ 2-x_1-6x_3-2x_5$$
$$x_4=6-8x_1-6x_3+x_4+2x_5$$
$$x_2=1+2x_1+x_2+x_3+x_5$$

$\longrightarrow$ BASE OTTIMA, UNICA

6

$$\max \ x_1-2x_2+3x_3$$
$$x_1-2x_2+x_3\le 2$$
$$3x_1-x_2-2x_3\le 6$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

F.C. $\longrightarrow$ F.S.

$$\max \ x_1-2x_2+3x_3$$
$$x_1-2x_2+x_3+x_4=2$$
$$3x_1-x_2-2x_3+x_5=6$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

⇝ $B_0=\{x_4,x_5\}$ $x_1,x_2,x_3=0$ $x_4=2$ $x_5=6$, val. ottimo $=0$

$$\max \ x_1-2x_2+3x_3$$
$$x_4=2-x_1+2x_2-x_3$$
$$x_5=6-3x_1+x_2+2x_3$$

OTTIMALITÀ NON RISPETTATA

ILLIMITATEZZA NON RISPETTATA

Entra x_3, esce x_4 $\rightarrow$ $B_1=\{x_3,x_5\}$ x_1,x_2,x_4 $x_3=2$ $x_5=10$ ⇝ Val ottimo $=6$

$$\max \ x_1-2x_2+6-3x_1+6x_2-3x_4$$
$$x_3=2-x_1+2x_2-x_4$$
$$x_5=6-3x_1+x_2+4-2x_1+4x_2-2x_4$$

$\longrightarrow$

$$\max \ -2x_1+4x_2-3x_4+6$$
$$x_3=2-x_1+2x_2-x_4$$
$$x_5=10-5x_1+5x_2-2x_4$$

OTTIMALITÀ NON RISPETTATA

ILLIMITATEZZA RISPETTATA

C

$$\max\ 2x_1+x_2+3x_3$$
$$x_1+x_2+x_3\le 2$$
$$2x_1+3x_2+8x_3\le 12$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

F.C. $\longrightarrow$ F.S.

$$\max\ 2x_1+x_2+3x_3$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$2x_1+3x_2+8x_3+x_3=12$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0$$

$B_0=\{x_4,x_5\}$ $\rightarrow$ $x_1,x_2,x_3=0$ $x_4=2$, $x_5=12$, val ottimo $=0$

$$\max\ 2x_1+x_2+3x_3$$
$$x_4=2-x_1-x_2-x_3$$
$$x_5=12-2x_1-3x_2-8x_3$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0$$

ottimalità non soddisfatta
ILLIMITATEZZA NON SODDISFATTA

$\rightarrow$ entra x_3, $\min\{\overset{x_4}{2},\overset{x_3}{\frac{3}{4}}\}$ $\rightarrow$ esce x_5 $\rightarrow$ $B_1\{x_4,x_3\}$ x_1,x_2, $x_5=0$, $x_3=\frac{3}{2}$ $x_4=0$ $\rightarrow$ soluzione ammissibile e DEGENERE, VAL. OTTIMO $=\frac{13}{4}$

$$\max\ 2x_1+x_2+\frac{9}{2}-\frac{3}{4}x_1-\frac{9}{8}x_2-\frac{3}{8}x_5$$
$$x_4=12-2x_1-3x_2-12+2x_1+3x_2+x_5$$
$$x_3=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}x_1-\frac{3}{8}x_2-\frac{1}{8}x_5$$

$\longrightarrow$

$$\max\ \frac{13}{4}+\frac{5}{4}x_1-\frac{1}{8}x_2-\frac{3}{8}x_5$$
$$x_4=x_5$$
$$x_3=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}x_1-\frac{3}{8}x_2-\frac{1}{6}x_5$$

OTTIMALITÀ: NO OK
ILLIMITATEZZA: NO OK

Entra x_1, esce

$$\max\ \frac{13}{4}+\frac{5}{4}x_1+\frac{17}{8}x_2-\frac{3}{8}x_5$$
$$x_4=x_5$$
$$x_2=\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}_{1}}-\frac{\cancel{8}^{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{1}}x_1-\frac{1}{3}x_5-\frac{8}{3}x_3$$

$\longrightarrow$

$$\max\ \frac{47}{4}-\frac{1}{6}x_1-\frac{17}{3}x_3-\frac{13}{12}x_5$$
$$x_4=x_5$$
$$x_2=4-\frac{2}{3}x_1-\frac{8}{3}x_3-\frac{1}{3}x_5$$

OTTIMALITÀ OK, VAL. OTTIMO $=\frac{47}{4}$
(DEGENERE)

d

$$-\max \ -3x_1-x_2+2x_3+x_4$$
$$2x_1+x_2-x_3+3x_4\leq 8$$
$$-x_1+2x_2-2x_3+2x_4\leq 4$$
$$x_1+x_3\leq 10$$
$$x_1,\dots,x_4\geq 0$$

$$\text{F.C.} \longrightarrow \text{F.S}$$

$$-\max \ -3x_1-x_2+2x_3+x_4$$
$$2x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5=8$$
$$-x_1+2x_2-2x_3+2x_4+x_6=4$$
$$x_1+x_3+x_7=10$$
$$x_1,\dots,x_4\geq 0$$

$B_0=\{x_5,x_6,x_7\}\rightarrow V.O.=0,\quad x_5=8, x_6=4, x_7=10, x_1\dots x_4=0$

$$-\max -3x_1-x_2+2x_3+x_4$$
$$x_5=8-2x_1-x_2+x_3-3x_4$$
$$x_6=4+x_1-2x_2+2x_3-2x_4$$
$$x_7=10-x_1-x_3$$
$$x_1,\dots,x_4\geq 0$$

OTTIMALITÀ → NO OK

ILLIMITATEZZA → NO OK

→ entra x_3

esce x_7

$B_1=\{x_5,x_6,x_3\}\rightarrow V.O=20,\ x_5=18,\ x_6=24,\ x_3=10,\ x_1,x_2,x_4=0$

$$-\max \ 20-5x_1-x_2+x_4-x_7$$
$$x_5=18-3x_1-x_2-3x_4-x_7$$
$$x_6=24-x_1-2x_2-2x_4-2x_7$$
$$x_3=10-x_1-x_7$$

OTTIMALITÀ → NON OK

ILLIMITATEZZA → NON OK!

→ Entra x_4, esce x_5

$B_2 = \{x_4, x_6, x_3\}$

$$-\max\ 20 - 5x_1 - x_2 + 6 - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_5$$
$$x_4 = 6 - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_5$$
$$x_6 = 24 - x_1 - 2x_2 - 12 - 2x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_5$$
$$x_3 = 10 - x_1 - x_7$$

$$-\max\ 26 - 6x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_7$$
$$x_4 = 6 - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_5$$
$$x_6 = 12 - 3x_1 - \frac{8}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_5$$
$$x_3 = 10 - x_1 - x_7$$

OTTIMALITÀ OK!

↳ val ottimo unico $= 26$

$x_4 = 6, x_6 = 12, x_3 = 10, x_{1,2,5} = 0$

e

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$\longrightarrow B_0 = \{x_4, x_5, x_6\}$

$B_0 = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_4 = 3 - 2x_1 - x_2$$
$$x_5 = 6 - x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$x_6 = 8 - 2x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

OTTIMALITÀ NON OK
ILLIMITATEZZA NON OK

Entra x_2, esce x_4 $\rightarrow$ $B_1 = \{x_2, x_5, x_6\}$, $V.O = 9$, $x_2 = 3, x_5 = 3, x_6 = 5$

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_2 = 3 - 2x_1 - x_4$$
$$x_5 = 6 - x_1 - 3 + 2x_1 + x_4 - 3x_3$$
$$x_6 = 8 - 2x_1 - 3 + 2x_1 + x_4 - 3x_3$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

$\rightarrow$

$$\max\ x_1 + 9 - 6x_1 - 3x_4 - x_3$$
$$x_2 = 3 - 2x_1 - x_4$$
$$x_5 = 3 + x_1 - 3x_3 - x_4$$
$$x_6 = 5 + x_4 - 3x_3$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

$\rightarrow$

$$\max\ 9 - 5x_1 - 3x_4 - x_3$$
$$x_2 = 3 - 2x_1 - x_4$$
$$x_5 = 3 + x_1 - 3x_3 - x_4$$
$$x_6 = 5 + x_4 - 3x_3$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

OTTIMALITÀ OK

f)

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_2 - x_3 \leq 2$$
$$x_1 + x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\rightarrow$

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$$
$$2x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$x_1 + x_3 + x_6 = 1$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

$\rightarrow$

$B_0 \{x_4, x_5, x_6)$

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$
$$x_4 = 1 - x_2 + x_1$$
$$x_5 = 2 - 2x_2 + x_3$$
$$x_6 = 1 - x_1 - x_3$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

OTTIMALITÀ NON OK
ILLIMITATEZZA NON OK
$\rightarrow$ entra x_3 esce x_6

$B_1 = \{x_4, x_5, x_3\}$

$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\max\ 5 - x_1 - 5x_6 + x_2$

$x_4 = 1 - x_2 + x_1$

$x_5 = 3 - 2x_2 - x_1 - x_6$

$x_3 = 1 - x_1 - x_6$

OTTIMALITÀ NO

ILLIMITATEZZA NO

entra x_2, esce x_4

$B_2 = \{x_2, x_5, x_3\}$

$\max\ 5 - x_1 - 5x_6 + 1 + x_1 - x_4 = 6 - x_1 - x_4 - 5x_6 \rightarrow x_{2,3,5} = 1$

$x_{1,4,6} = 0$, V. ottimo degenere $= 6$

$x_2 = 1 + x_1 - x_4$

OTTIMALITÀ OK

$x_5 = 1 - 3x_1 - x_6 - 2x_2$

$x_3 = 1 - x_1 - x_6$

Esercizio 1.4 ~ risolvere i PL usando algoritmo del simplesso (I e II FASE)

$x_4 = -15 \quad x_5 = -6$

$\min\ 6x_1 + x_2 + 3x_3$

$10x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 15$

$x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\longrightarrow$

$-\max\ -6x_1 - x_2 - 3x_3$

$10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 15$

$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$B\{x_4, x_5\}$ non è ammissibile, risolvo problema 1ª FASE *

1) aggiungo variabili η_1, η_2 (pari a # vincoli del P.L.) con segno concorde a termine noto dei vincoli

$$\begin{aligned} -(-\max)\ & -\eta_1-\eta_2 \\ & 10x_1-2x_2+5x_3-x_4+\eta_1=15 \\ & x_1-x_2+3x_3-x_5+\eta_2=6 \\ & x_1,x_2,x_3,\eta_1,\eta_2\geq 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_0\{\eta_1,\eta_2\}} \begin{aligned} \max\ & -21+11x_1-3x_2+8x_3-x_4-x_5 \\ & \eta_1=15-10x_1+2x_2-5x_3+x_4 \\ & \eta_2=6-x_1+x_2-3x_3+x_5 \\ & x_1,x_2,x_3,\eta_1,\eta_2\geq 0 \end{aligned}$$

Entra x_1, esce η_1

$$\begin{aligned} \max\ & -21+11\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{10}x_4-\frac{1}{10}\eta_1\right)-3x_2+8x_3-x_4-x_5 \\ & x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{10}x_4-\frac{1}{10}\eta_1 \\ & \eta_2=6-\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{10}x_4-\frac{1}{10}\eta_1+x_2-3x_3+x_5 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \max\ & -\frac{9}{2}-\frac{11}{10}\eta_1-\frac{4}{5}x_2+\frac{5}{2}x_3+\frac{1}{10}x_4 \\ & x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{10}x_4+\frac{1}{10}\eta_1 \\ & \eta_2=\frac{9}{2}+\frac{1}{10}\eta_1+\frac{4}{5}x_2-\frac{5}{2}x_3-\frac{1}{10}x_4+x_5 \end{aligned}$$

Entra x_3, esce $\min\left(\underset{x_1}{3},\underset{\eta_2}{\frac{9}{5}}\right)\rightsquigarrow \eta_2$

$$\begin{aligned} \max\ & -\frac{9}{2}-\frac{11}{10}\eta_1-\frac{4}{5}x_2+\frac{5}{2}x_3+\frac{1}{10}x_4 \\ & x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{10}x_4+\frac{1}{10}\eta_1 \\ & x_3=\underbrace{\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)}_{\frac{9}{5}}+\underbrace{\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}\right)}_{\frac{1}{25}}\eta_1+\underbrace{\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)}_{\frac{8}{25}}x_2-\underbrace{\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}\right)}_{\frac{1}{25}}x_4+\frac{2}{5}x_5-\frac{2}{5}\eta_2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} & Z=0-\eta_1-\eta_2 \\ & x_1=\frac{3}{5}-\frac{3}{25}\eta_1+\frac{1}{25}x_2+\frac{1}{2}\eta_2+\frac{3}{25}x_4-\frac{1}{5}x_5 \\ & x_3=\frac{9}{5}+\frac{1}{25}\eta_1-\frac{2}{5}\eta_2+\frac{8}{25}x_2-\frac{1}{25}x_4+\frac{2}{5}x_5 \end{aligned}$$

il P.L. ammette soluzioni ammissibili

Base ammissibile $B_0 = \{x_1, x_3\}$, non contiene s_1, s_2 ⤳ elimino le variabili

$z = -9 - \frac{11}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_4$ ⤳ sostituito s_1-s_2 con vincoli di sopra!

$x_1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{25}s_1 + \frac{1}{25}x_2 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{25}x_4 - \frac{1}{5}x_5$

$x_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{25}s_1 - \frac{2}{5}s_2 + \frac{8}{25}x_2 - \frac{1}{25}x_4 + \frac{2}{5}x_5$

⤳ OTTIMALITÀ OK!, valore obiettivo $= 9$

6

$$\begin{aligned} \min\ & 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 \geq 2 \\ & -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} -\max\ & -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ & -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

introduco s_1

non ho bisogno di introdurre s_2

$\{x_5, x_6\}$ BASE NON AMMISSIBILE ⤳ introdurre solo s_1

$$\begin{aligned} \max\ & -s_1 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 + s_1 = 2 \\ & -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

con $B_0 = \{s_1, x_6\}$

<0 ⤳ continuo*

$$\begin{aligned} \max\ & -2 + 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 \\ & s_1 = 2 - 4x_1 - 3x_2 - 2x_4 + x_5 \\ & x_6 = 1 + 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow[\text{esce } s_1]{\text{entra } x_1} \begin{aligned} \max\ & z = 0 - s_1 \\ & x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}s_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ & x_6 = \frac{7}{2} - \frac{5}{4}s_1 - \frac{3}{4}x_2 - x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \end{aligned}$$

STOP

$\{x_1, x_6\}$ è una base ammissibile

↳ continuo con algoritmo del simplesso.

* Nel caso fosse stata raggiunta l'ottimalità il PC non aveva basi ammissibili

Es. 1.6 scrivere la matrice A_B^{-1} dei PL 1.3

(a)

$\max\ 3x_1+2x_2-5x_3$

$4x_1-2x_2+2x_3+x_4=4$

$2x_1+x_2+x_3+x_5=1$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & -2 & +2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

FORMULAZIONE FINALE*

$\max\ 2-x_1-6x_3-2x_5$

$6=-x_4-8x_1-4x_3+x_4+2x_5$

$1=-x_2+2x_1+x_2+x_3+x_5$

$$A_B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

* La riformulazione finale è scritta mettendo il termine noto a sinistra

(b)

$\max\ x_1-2x_2+3x_3$

$x_1-2x_2+x_3+x_4=2$

$3x_1-x_2-2x_3+x_5$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

FORMULAZIONE FINALE

$\max\ 6-2x_1+4x_2-3x_4$

$2=x_1-2x_2+x_3+x_4$

$10=5x_1-5x_2+2x_4+x_5$

$$A_B^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c) (d) (e) (f) $\rightsquigarrow$ STESSO PROCEDIMENTO

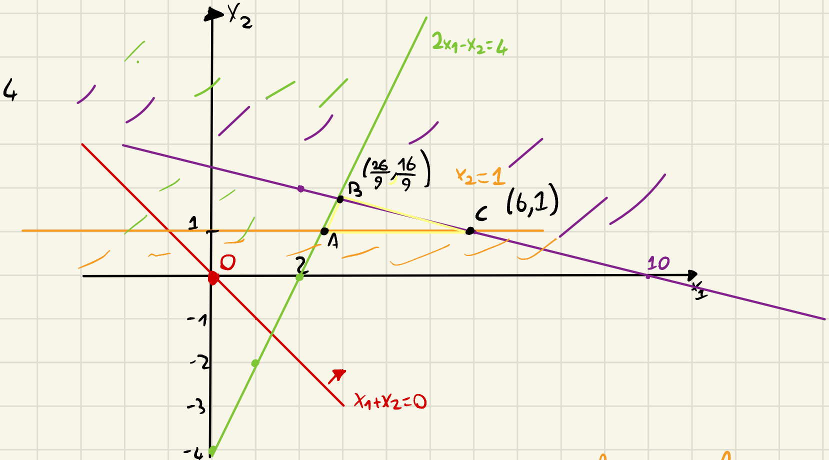
Es. 1.7 ~ risolvere i PL con metodo grafico + controllo mediante simplesso

(a)

max x_1+x_2

- $2x_1-x_2\geq 4$
- $x_1+4x_2\leq 10$
- $x_2\geq 1$

$x_1,x_2\geq 0$



$$\begin{cases}2x_1-x_2=4\\ x_2=1\end{cases}$$

$\rightarrow x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=1$ $\rightsquigarrow$ A

$$\begin{cases}2x_1-x_2=4\\ x_1+4x_2=10\end{cases} \rightarrow x_2=2x_1-4 \rightsquigarrow x_2=\frac{52-36}{9}=\frac{16}{9}$$

$x_1+8x_1-16=10 \rightsquigarrow x_1=\frac{26}{9}$

C sol. ottima, valore ottimo $=7$

Verifica con simplesso

max x_1+x_2

$2x_1-x_2-x_3=4$

$x_1+4x_2+x_4=10$

$x_2-x_5=1$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0$

I FASE $\rightarrow$

max $-s_1-s_2$

$2x_1-x_2-x_3+s_1=4$

$x_1+4x_2+x_4=10$

$x_2-x_5+s_2=1$

$B_0=\{s_1,x_4,s_2\}$

max $-5+2x_1-x_3-x_5$

$s_1=4-2x_1+x_2+x_3$

$x_4=10-x_1-4x_2$

$s_2=1-x_2+x_5$

$\xrightarrow[\text{esce } s_1]{\text{entra } x_1}$

max $-1+x_2-s_1-x_5$

$x_1=2+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}s_1$

$x_4=8-\frac{9}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}s_1$

$s_2=1-x_2+x_5$

$\xrightarrow[\text{esce } s_2^*]{\text{entra } x_2}$

x_4: $\frac{8}{\frac{9}{2}} \rightarrow \frac{16}{9} > 1$ s_2

max $0+x_5-x_5-s_1+s_2$

$x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}x_5-\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}s_1$

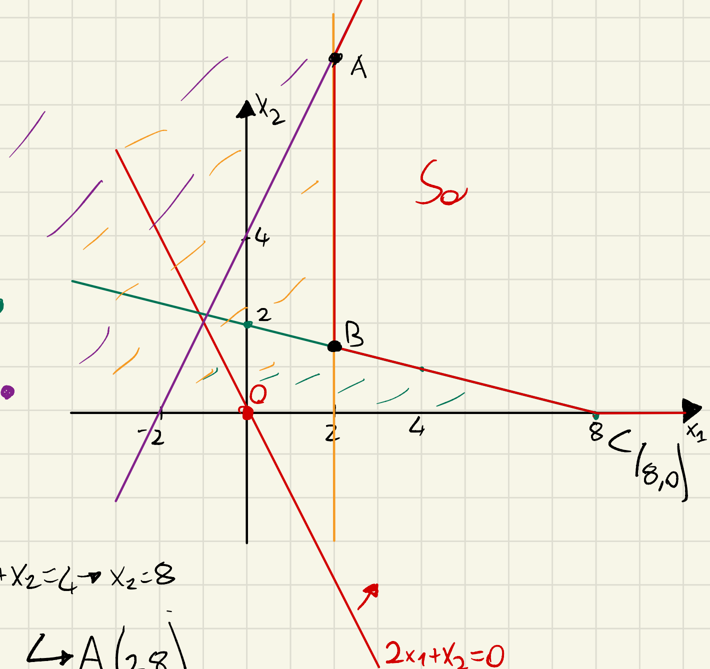
$x_4=\frac{7}{2}-\frac{9}{2}x_5+\frac{9}{2}s_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}s_1$

$x_2=1+x_5-s_2$

$\rightsquigarrow$ $B\{x_1,x_4,x_2\}$ ammissibile

$B_0 = \{x_1, x_4, x_2\}$

(b)



$\min\ 2x_1+x_2$

$x_1+4x_2 \geq 8$

$x_1 \geq 2$

$-2x_1+x_2 \leq 4$

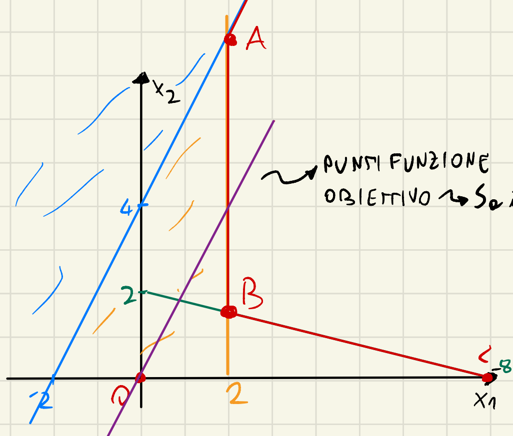
$x_1, x_2 \geq 0$

$-2x_1+x_2=4$
$x_1=2$ $\rightarrow -4+x_2=4 \rightarrow x_2=8$

↳ $A(2,8)$

$B \rightsquigarrow 2+4x_2=8 \rightarrow x_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \rightarrow B=\left(2,\frac{3}{2}\right)$, B è la sol. ott. in quanto è il punto + vicino all'obiettivo

(c)



PUNTI FUNZIONE OBIETTIVO → S_0 illimitato

$\max\ 2x_1-x_2$

$x_1+4x_2 \geq 8$

$x_1 \geq 2$

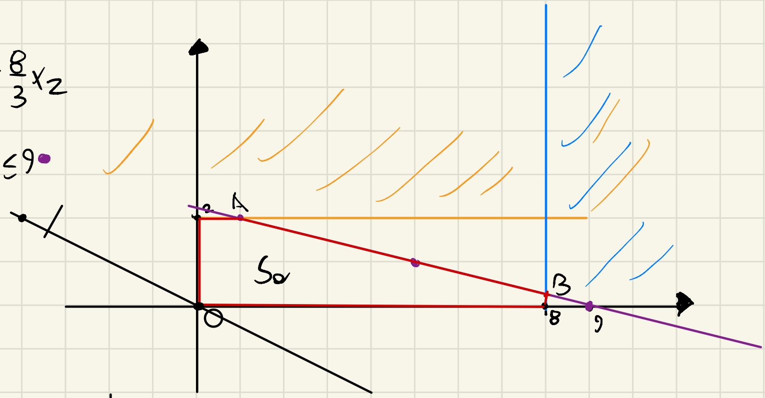
$-2x_1+x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

d

$$\max \ \frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2$$

$$x_1 + 4x_2 \le 9$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2 = 0$$

x_1	x_2
0	0
1	$-\frac{1}{4}$
-4	1

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3} = 0$$

$$\frac{2}{3}x_1 = -\frac{8}{3} \longrightarrow x_1 = -\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

Esercizio 2.1 e 2.2 - partendo dalla forma standard determinare i duali dei PL dell'es. 1.3 e 1.4

PRIMALE → DUALE

$$\max\ 3x_1+2x_2-5x_3$$
$$4x_1-2x_2+2x_3+x_4=4$$
$$2x_1+x_2+x_3+x_5=1$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\min\ 4u_1+u_2$$
$$4u_1+2u_2\geq 3 \quad x_1$$
$$-2u_1+u_2\geq 2 \quad x_2$$
$$+2u_1+u_2\geq -5 \quad x_3$$
$$u_1\geq 0 \quad x_4$$
$$u_2\geq 0 \quad x_5$$
$$u_1,u_2\geq 0$$

$$\max\ x_1-2x_2+3x_3$$
$$x_1-2x_2+x_3+x_4=2$$
$$3x_1-x_2-2x_3+x_5=6$$
$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\min\ 2u_1+6u_2$$
$$u_1+3u_2\geq 1 \quad x_1$$
$$-2u_1-u_2\geq -2 \quad x_2$$
$$u_1-2u_2\geq 3 \quad x_3$$
$$u_1,u_2\geq 0$$

$$-\max\ -3x_1-x_2+2x_3+x_4$$
$$2x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5=8$$
$$-x_1+2x_2-2x_3+2x_4+x_6=4$$
$$x_1+x_3+x_7=10$$
$$x_1,\dots,x_4\geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\min\ 8u_1+4u_2+10u_3$$
$$2u_1-u_2+u_3\geq -3$$
$$u_1+2u_2\geq -1$$
$$-u_1-2u_2+u_3\geq 2$$
$$3u_1+2u_2\geq 1$$
$$u_1,u_2,u_3\geq 0$$

Esercizio 2.5 ~ risolvere i seguenti PL senza impostare il problema di I fase

(a)

PRIMALE

DUALE

$$\min\ 3x_1+x_2+3x_3 \qquad x_1+x_2\geq 4 \qquad 2x_1+x_2-x_3\geq 8 \qquad x_1,x_2,x_3\geq 0$$

$$\longrightarrow \max\ -3x_1-x_2-3x_3 \qquad x_1+x_2-x_4=4 \qquad 2x_1+x_2-x_3-x_5=8 \qquad x_1,\dots,x_5\geq 0$$

$$\longrightarrow \min\ 4u_1+8u_2 \qquad u_1+2u_2\geq -3 \qquad u_1+u_2\geq -1 \qquad u_2\leq 3 \qquad -u_1\geq 0 \qquad -u_2\geq 0 \qquad u_1,u_2\geq 0$$

$B(x_4,x_5)$ non è ammissibile per primale ma lo è per duale *

una base è ammissibile x il duale se tutti i coefficienti di costo ridotto dell'obiettivo sono ≤ 0

$$\max\ 0-3x_1-x_2-3x_3$$
$$x_4=-4+x_1+x_2$$
$$x_5=-8+2x_1+x_2-x_3$$
$$x_1,\dots,x_5\geq 0$$

- ESCE x_5 (termine noto + piccolo),
- ENTRA $\min\left\{\overset{x_1}{-\left(\frac{-3}{+2}\right)},\overset{x_2}{-\left(-\frac{1}{1}\right)}\right\} \rightsquigarrow \min\left\{\frac{3}{2},1\right\} \rightsquigarrow x_2$

$$\max\ -8-x_1-x_5-4x_3$$
$$x_4=\underbrace{4}_{>0}-x_1+x_5+x_3$$
$$x_2=\underbrace{8}_{>0}-2x_1+x_3+x_5$$

$(x_4,x_2) \rightsquigarrow$ base ammissibile x primale* $\rightarrow$ BASE OTTIMA

6

$\min\ 2x_1+3x_2+x_3$ $\qquad\longrightarrow\qquad$ $\max\ -2x_1-3x_2-x_3$

$x_1+x_2-x_3\geq 6$ $\qquad$ $x_1+x_2-x_3-x_4=6$

$2x_1+x_3\geq 4$ $\qquad$ $2x_1+x_3-x_5=4$

$x_1+x_2-2x_3\leq 2$ $\qquad$ $x_1+x_2-2x_3+x_6=2$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

$B_0\{x_4,x_5,x_6\}$ ammissibile x DUALE ma NON per il PRIMALE → uso SIMPLESSO DUALE

$\max\ -2x_1-3x_2-x_3$

$x_4=-6+x_1+x_2-x_3$

$x_5=-4+2x_1+x_3$

$x_6=2-x_1-x_2+2x_3$

- Esce x_4, entra x_1, applico OPERAZIONE DI CARDINE $B_1=\{x_1,x_5,x_6\}$

$\max\ -12-2x_4-x_2-3x_3$

$x_1=6-x_2+x_3+x_4$

$x_5=8-2x_2+3x_3+2x_4$

$x_6=-4+x_3-x_4$

- Esce x_6, entra x_3 → $B_2\{x_1,x_5,x_3\}$, ammissibile x primale → BASE OTTIMA

$\max\ -24-5x_4-x_2-3x_6$

$x_1=10-x_2+2x_4+x_6$

$x_5=20-2x_2+5x_4+3x_6$

$x_3=4+x_4+x_6$

Esercizio 3.1 ~ verificare se ammissibilità ed ottimalità sono conservati per i singoli c_i, b_i

a)

$\max -3x_1 - 4x_2 + 2x_3$

$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 5$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$Bott = \{x_2, x_5\}$ $\quad A^{-1}_{Bott} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

riformulazione associata

$\max \ -8 - x_1 - 2x_4$

$x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$x_5 = 7 - \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

perturbare il termine noto con $\Delta b_2 = -8$

$\max -3x_1 - 4x_2 + 2x_3$

$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 5 - 8$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0$

$\longrightarrow \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = A_B^{-1} \bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0 \longrightarrow$ NON AMMISSIBILE

perturbare con $\Delta c_3 = 1$ $\quad (x_3 \notin Bott)$

$\longrightarrow$ CAMBIO OBIETTIVO in $\max \ -8 - x_1 - 2x_4 + x_3 \longrightarrow$ perdo OTTIMALITÀ

perturbare con $\Delta c_5 = -\frac{1}{5}$ $\quad (x_5 \in Bott)$

$x_5 = 7 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)x_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)x_3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)x_4$

CAMBIO VINCOLO

$\Delta c_5 x_5 = 7\Delta c_5 - \frac{5}{2}\Delta c_5 x_1 + \frac{1}{2}\Delta c_5 x_3 + \frac{1}{2}\Delta c_5 x_4$

CAMBIO VAL. OBIETTIVO

⑥

$$\max\ 4x_1 - x_2 + 2x_4$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 7$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$B_{Ott} = \{x_1, x_3, x_4\}$ $A^{-1}_{B_{Ott}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\max\ 34 - 17x_2 - 6x_3$$
$$x_1 = 4 - 2x_2$$
$$x_3 = 6 - x_2 - x_5$$
$$x_4 = 9 - 4x_2 - 2x_5$$

1) $\Delta b_3 = -1$

$$\max\ 4x_1 - x_2 + 2x_4$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 7$$
$$2x_1 + 4x_2 = 7$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{x} = A^{-1}_{B_{Ott}} \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 6 \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

$$\max\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 7$$
$$x_2 + 5x_3\ x_5 = 8$$
$$x_2 + x_3 = 6$$

Esami - GENNAIO 2022 BIS (PARTE I)

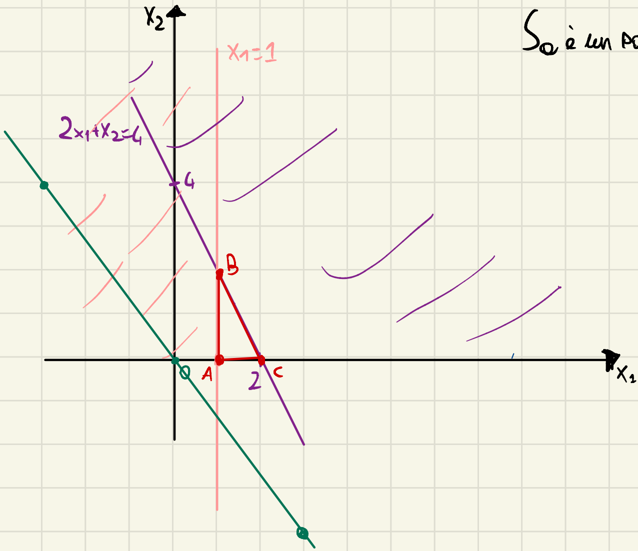
① max $4x_1+3x_2$

$2x_1+x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

• risolvere il problema per via grafica



S_a è un POLITOPO → S_{ott} = B (1,2) → val. ottimo = 10

- Si scrive il problema in forma standard, + duale in forma standard, risolvere duale in forma standard

PRIMALE

$\max\ 4x_1+3x_2$

$2x_1+x_2+x_3=4$

$x_1-x_4=1$

$x_1,\dots,x_4\geq 0$

$\longrightarrow$

DUALE

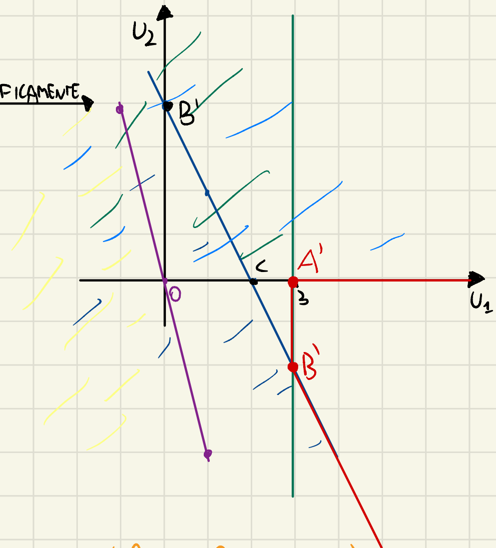
$\min\ 4u_1+u_2$ $\rightsquigarrow x_1$

$2u_1+u_2\geq 4$ GRAFICAMENTE

$u_1\geq 3$ $\rightsquigarrow x_2$

$u_2\leq 0$ $\rightarrow x_3$

$u_1\geq 0$ $\rightarrow x_4$



Sol. ottima $=B'\rightsquigarrow(3,2)\rightarrow$ val ottimo $=10$

- Si risolve il primale utilizzando il metodo del simplesso + apportuno e si visualizzi graficamente ad ogni iterazione dove ci si trova nel primale e nel duale

$B_0\{x_3,x_4\}$ NON È AMMISSIBILE PER IL PRIMALE (2° VINCOLO AVREI -1 COME TERMINE NOTO), NÉ PER IL DUALE (COEFF. OBIETTIVO TUTTI ≥ 0)

$\rightarrow$ PROCEDO CON PROBLEMA 1° FASE

$\max\ -a_1$

$2x_1+x_2+x_3=4$

$x_1-x_4+a_1=1$

$x_1,\dots,x_4\geq 0$

$B_0\{x_3,a_1\}$

$\max\ x_1-x_4-1$

$x_3=4-2x_1-x_2$

$a_1=1+x_4-x_1$

$\rightsquigarrow$ entra x_1 esce $a_1\rightarrow B_1\{x_3,x_1\}\rightsquigarrow$ BASE AMMISSIBILE

$\max\ 0-a_1$

$x_3=2-2x_4-2a_1$

$x_1=1+x_4-a_1$

$\max\ 6+4x_4+3x_2$

$x_3 = 2-2x_4-x_2$ → OTTIMALITÀ NON OK
$x_1 = 1+x_4$ ILLIMITATEZZA NON OK } entra x_4, esce x_3 $x_4=0, x_2=0, x_3=2\ x_1=1$ → PUNTO A nel primale

$x_1,\dots,x_4 \geq 0$

$2u_1+u_2=4$
$u_2=0$ → $u_1=2, u_2=0$ → C' nel duale

$\max\ 8+x_2-2x_3$

$x_4 = 1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3$
$x_1 = 2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_2$

$x_4=1, x_1=2, x_2=0, x_3=0$
val ottimo $=8$ → PUNTO C nel primale

$2u_1+u_2=6$
$u_1=0$ → $u_2=6$ → $(6,0)$

OTTIMALITÀ: NON OK
ILLIMITATEZZA: NON OK } entra x_2, esce x_4

$\max\ 10-x_3-2x_4$

$x_2 = 2-x_3-2x_4$
$x_1 = 1+0x_3+x_4$

OTTIMALITÀ OK, VAL. OTTIMO $=10$, $x_1=1, x_2=2, x_3=0, x_4=0$ → punto B nel primale

$2u_1+u_2=4$
$u_1=3$ → $u_2=-2$, $u_1=3$ → $(-2,3)$ → PUNTO B', SOL OTTIMA, VAL OTTIMO $=10$

- Analisi sensitività coefficienti x_1, x_2 nell'obiettivo, visualizzando graficamente quello che succede

per c_1

$10-x_3-2x_4+\Delta c_1 x_1 =$
$10-x_3-2x_4+\Delta c_1(1+x_4) =$
$(10+\Delta c_1)-x_3+(\Delta c_1-2)x_4$

$\Delta c_1-2 \leq 0$ → $\Delta c_1 \leq 2$

} nel primale cambia la retta dell'obiettivo, nel duale si modificano i termini noti dei vincoli di x_1 ed x_2

per c_2

$10-x_3-2x_4+\Delta c_2 x_2 =$
$10-x_3-2x_4+\Delta c_2(2-x_3-2x_4) =$
$10+\Delta c_2 2-(1+\Delta c_2)x_3-2x_4(1+\Delta c_2)$

$1+\Delta c_2 \leq 0$ → $\Delta c_2 \leq -1$

② Sia dato il seguente problema PL:

$$\max\ (2-\alpha)x_1 - x_2 \qquad\qquad \max\ (2-\alpha)x_1 - x_2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2-\alpha \quad \rightarrow \quad x_3 = 2-\alpha - x_1 + x_2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \qquad\qquad x_4 = 1 - x_1 - 2x_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad\qquad x_1, \dots, x_4 \geq 0$$

$B_0\ \{x_3, x_4\} \rightarrow$ ammissibile per primale se $(2-\alpha) \geq 0$ $\rightarrow \alpha \leq 2$

ammissibile per duale se $(2-\alpha) \leq 0$ $\rightarrow \alpha \geq 2$

Lo si risolva spiegando come varia la soluzione al variare di alpha

$\alpha = 2 \rightarrow \max\ -x_2$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$ $\rightsquigarrow$ cond. OTTIMALITÀ OK, val ottimo $= 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$\boxed{\alpha > 2}$ $\rightarrow$ ottimalità non OK; $(2-\alpha)$ è negativo, (x_1, x_2) NON AMMISSIBILE x PRIMALE $\rightarrow$ APPLICO SIMPLESSO DUALE

esce x_3 ed entra x_2 $\rightarrow$ $\max\ (2-\alpha) + (1-\alpha)x_1 - x_3$

$x_2 = (\alpha - 2) + x_1 + x_3$

$x_4 = (3-2\alpha) - 3x_2 - 2x_3$ $\longrightarrow$ $\boxed{\alpha > \frac{3}{2}\ \text{duale illimitato} \rightarrow S_0 = \emptyset}$ $\rightsquigarrow$ termini noti dei vincoli entrambi negativi

$\boxed{2 < \alpha \leq \frac{3}{2} \rightsquigarrow \text{cond ottima} \rightarrow x_1^* = 0\quad x_3 = 0\quad x_2 = \alpha - 2\quad x_4 = 3 - 2\alpha \rightsquigarrow \text{val. ottimo} = 2 - \alpha}$

$\alpha < 2 \rightarrow B_0$ AMMISSIBILE x PRIMALE

$\rightarrow$ APPLICO SIMPLESSO PRIMALE

$\rightarrow$ Se $2-\alpha \leq 1 \rightsquigarrow$ entra x_1 esce x_3 $\rightarrow \leq \alpha < 2$

$\max\ 2-\alpha + (1-\alpha)\cdot(2-\alpha+x_2-x_3) - x_3$ $\rightarrow$ $\max\ (2-\alpha)^2 + (1-\alpha)x_2 - (2-\alpha)x_3$

$x_1 = 2-\alpha + x_2 - x_3$ $\qquad$ $x_1 = 2-\alpha+x_2-x_3$

$x_4 = -1 + \alpha - x_2 + x_3$ $\qquad$ $x_4 = \alpha - 1 - 3x_2 + x_3$

Se $2-a \geq 1 \rightsquigarrow \underline{a \leq 1}$ entra x_1 esce x_4

$$\max\ (2-a)(1-2x_2-x_4)-x_2 \qquad\qquad \max\ 2-a-x_2\overset{>0}{(2-a)}-x_4\overset{>0}{(2-a)}_{x_3}$$

$$x_3 = 1-a+3x_2+x_4 \longrightarrow x_3 = 1-a+3x_2+x_4 \longrightarrow \text{OTTIMALITÀ OK!}$$

$$x_1 = 1-2x_2-x_4 \qquad\qquad x_1 = 1-2x_2-x_4 \qquad\qquad \text{VAL OTT} = 2-a$$

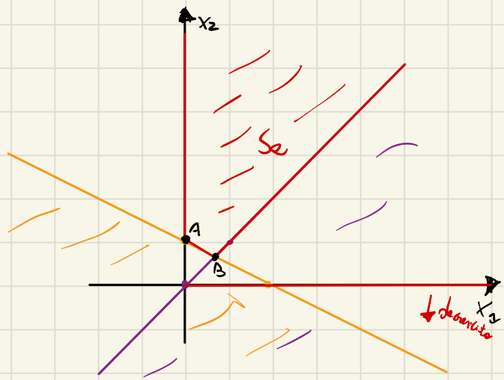
ESAME GENNAIO 2022

$\min\ x_2$

$-x_1-2x_2 \leq -2 \Rightarrow x_1+2x_2 \geq 2$

$x_1-x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$



$S_{OTT} = A\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \rightarrow$ Val. ottimo $= \frac{2}{3}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2=2 \rightarrow 3x_2=2 \rightarrow x_2=\frac{2}{3} \\ x_1-x_2=0 \rightarrow x_1=x_2 \quad x_1=\frac{2}{3} \end{cases}$$

FORMA STANDARD $\rightarrow$ $-\max -x_2$

$x_1+2x_2-x_3=2$

$x_1-x_2+x_4=0$

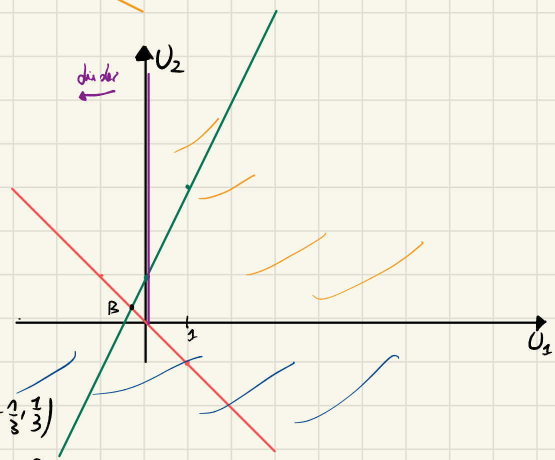
$\xrightarrow{\text{DUALE}}$ $-\min\ 2u_1$

$u_1+u_2 \geq 0 \quad x_1$

$2u_1-u_2 \geq -1 \quad x_2$

$u_1 \leq 0 \quad x_3$

$u_2 \geq 0 \quad x_4$



$$\begin{cases} u_1+u_2=0 \rightarrow u_1=-u_2 \rightsquigarrow -\frac{1}{3} \rightsquigarrow \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\ 2u_1-u_2=-1 \quad -3u_2=-1 \rightarrow u_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Val. $\frac{2}{3}$

RISOLUZIONE CON SIMPLESSO

$-\max -x_2$

$x_3 = -2 + x_1 + 2x_2$

$x_4 = 0 - x_1 + x_2$

$B_0 \{x_3, x_4\}$ NON AMMISSIBILE X PRIMALE
È " " X DUALE
→ MI TROVO IN 0

Esce x_3, entra $\min \left\{ \overset{x_1}{-\frac{0}{1}} ; \overset{x_2}{-\left(-\frac{1}{2}\right)} \right\} \rightsquigarrow x_1$

$-\max -x_2$

$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3$

$x_4 = -2 + 3x_2 - x_3$

$B_1 = \{x_1, x_4\}$, val ottimo $= 0$ $\quad x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -2 \rightarrow (2,0)$ nel primale
$(0,0)$ nel duale → DEGENERAZIONE

Esce x_4, entra x_2 (perché $x_3 \leq 0$)

$-\max -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$

$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$

$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$

$\rightsquigarrow$ BASE AMMISSIBILE X PRIMALE ED OTTIMA $\rightsquigarrow B_2 \{x_1, x_2\}$, val. ottimo $= \frac{2}{3}$

$-\max -x_2$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$

$x_1 - x_2 + x_4 = 0$

$$A = \begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \Delta b \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \geq 0$$

$\frac{2}{3} + \Delta b_2 \frac{2}{3} \geq 0 \quad \Delta b_2 \geq -1$

$\frac{2}{3} - \Delta b_2 \frac{1}{3} \geq 0 \rightsquigarrow \Delta b_2 \leq 2$

$\rightsquigarrow [-1, 2]$

Esercizio 2

$$\max \overset{>0}{(2-\alpha)}x_1 + \overset{>0}{(1-2\alpha)}x_2 \qquad \alpha=2 \qquad \alpha=\tfrac{1}{2}$$

$x_1 - x_2 + x_3 = 1$

$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$\underline{\alpha \geq 2}$ $\quad -3x_2$

$+x_3 = -x_1 + x_2$ $\rightarrow$ SOL OTTIMA, valore ottimo $=0$ $\quad B=\{x_3, x_4\}$

$+x_4 = 1 + x_1 - x_2$

$\underline{\tfrac{1}{2} \leq \alpha < 2}$

$\overset{\geq 0}{(2-\alpha)}x_1 + \overset{<0}{(1-2\alpha)}x_2 \rightarrow$ entra x_1 esce x_3

$x_3 = -x_1 + x_2$

$x_4 = 1 + x_1 - x_2$

$(2-\alpha)(1+x_2-x_3) + (1-2\alpha)x_2$

$x_1 = 1 + x_2 - x_3$

$x_4 = 2 - x_3$

$\longrightarrow$ $\max \overset{>0}{(2-\alpha)} + \overset{<0}{(3-3\alpha)x_2} - (2-\alpha)x_3$ $\qquad B(x_1, x_4)$

$x_1 = 1 + x_2 - x_3$

$x_4 = 2 - x_3$

$\underline{1 \leq \alpha < 2}$ $\rightarrow$ VALORE OTTIMO $(2-\alpha)$

$\underline{\alpha < 1}$ $\rightarrow S_0 = \emptyset$

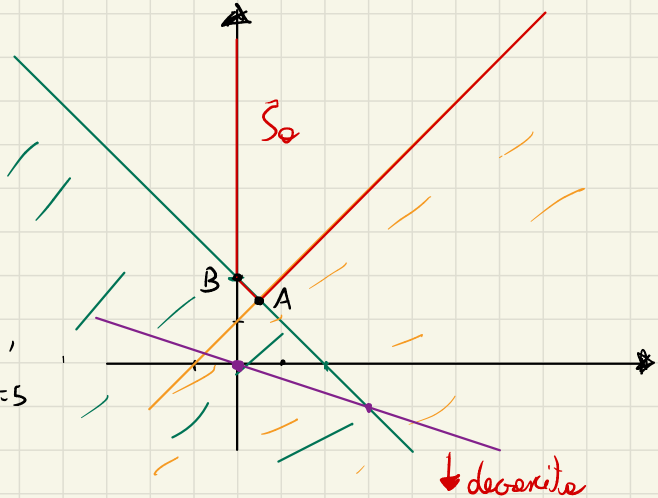
$\alpha \leq \tfrac{1}{2}$ $\rightarrow S_0 = \emptyset$

Esame febbraio 2020

$\min\ x_1+3x_2$
$x_1 \le x_2-1$
$x_1+x_2 \ge 2$
$x_1, x_2 \ge 0$

$A = \begin{cases} x_1-x_2=-1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$

val ottimo $=5$



$x_1+3x_2=1$

$x_2=0 \quad x_1=-4$

$x_1=1 \quad x_2=-1$

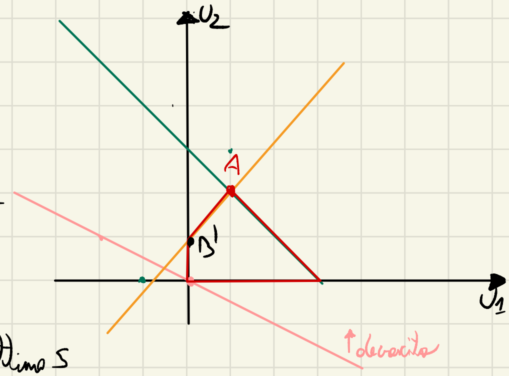
2) FORMA STANDARD + DUALE

$-\max\ -x_1-3x_2$
$x_1-x_2+x_3=-1$
$-x_1-x_2+x_4=-2$
$x_1,\dots,x_4 \ge 0$

$\xrightarrow{\text{DUALE}}$

$-\min\ -u_1-2u_2$
$u_1-u_2 \ge -1 \quad x_1$
$-u_1-u_2 \ge -3 \quad x_2$
$u_1 \ge 0 \quad x_3$
$u_2 \ge 0 \quad x_4$

$\hookrightarrow A\ (1,2) \rightarrow$ val ottimo 5



• Simplesso

$$-\max -x_1-3x_2$$
$$x_1-x_2+x_3=-1$$
$$-x_1-x_2+x_4=-2$$
$$x_1,\dots,x_4\geq 0$$

$B_0=\{x_3,x_4\}$ AMMISSIBILE x DUALE, non per PRIMALE

$$-\max -x_1-3x_2$$
$$x_3=-1-x_1+x_2$$
$$x_4=-2+x_1+x_2$$

$x_1=0$ $x_2=0$ $x_3=-1$ $x_4=-2$ ⇝ IN O NEL PRIMALE E NEL DUALE

esce x_4, entra $\begin{array}{c} x_1 \ \ x_2 \\ (+1,\ 3) \end{array}$ ⇝ entra x_1 $B_1=(x_3,x_1)$ $x_1=2$, $x_3=-3$, $x_2=0$ $x_4=0$

$$-\max -2-2x_2-x_4$$
$$x_3=-3+2x_2-x_4$$
$$x_1=2-x_2+x_4$$

$(2,0)$ ⇝ punto B nel primale

↳ nel DUALE ⇝ $u_1=0$, $u_2=1$ ⇝ $(0,1)$ ⇝ B'

esce x_3 entra x_2 (unico >0)

$$-\max -5-x_3-2x_4$$
$$x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$$
$$x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$$

⇝ $B(x_1,x_2)$ ⇝ $\frac{3}{2},\frac{1}{2},0,0$, val ottimo $=5$

• ANALISI SENSITIVITÀ NEI COEFFICIENTI

ΔC_1

$$-\max -5 - x_3 - 2x_4$$
$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$
$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$-5 - x_3 - 2x_4 + \Delta C_{x_1} X_1 =$$

$$-5 - X_3 - 2x_4 + \Delta C_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) =$$

$$-5 + \frac{1}{2}\Delta C_1 - \left(1 + \frac{1}{2}\Delta C_1\right)x_3 + x_4\left(\frac{1}{2}\Delta C_1 - 2\right) =$$

$$1 + \frac{1}{2}\Delta C_1 \geq 0 \qquad \Delta C_1 \geq -2$$
$$\frac{1}{2}\Delta C_1 - 2 \leq 0 \longrightarrow \Delta C_1 \leq 4$$

$-2 \leq \Delta C_1 \leq 4$ ⤳ nel primale modifico retta obiettivo
nel duale modifico i vincoli

ΔC_2

$$-5 - x_3 - 2x_4 + \Delta C_{x_2} X_2 =$$

$$-5 - X_3 - 2x_4 + \Delta C_2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)$$

$$-5 + \frac{3}{2}\Delta C_2 + \left(\frac{1}{2}\Delta C_2 - 1\right) + x_4\left(\frac{1}{2}\Delta C_2 - 2\right)$$

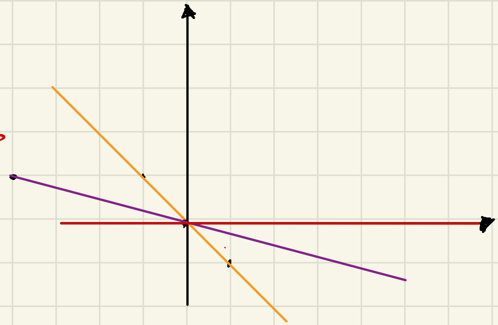
$$\frac{1}{2}\Delta C_2 - 1 \leq 0 \rightarrow \Delta C_2 \leq 2 \qquad 2 \leq \Delta C_2 \leq 4$$
$$\frac{1}{2}\Delta C_2 - 2 \leq 0 \rightarrow \Delta C_2 \leq 4$$

Esercizio 2

$$\max\ a x_1 + (2a-1) x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 2a$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\max\ a x_1 + (2a-1) x_2$$
$$x_3 = a - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 2a - x_1 - 4x_2$$

$a \leq 0 \rightarrow S_a = \emptyset$



$a > 1 \rightarrow$ entra x_2, esce x_4

$$\max\ a x_1 + (2a-1)\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4$$
$$x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4$$

$S_a \neq 0$ → S_{ott} è un punto
→ S_{ott} infinito limitato

S_a è illimitato

PROVA INTERMEDIA NOVEMBRE 2021

Esercizio 1

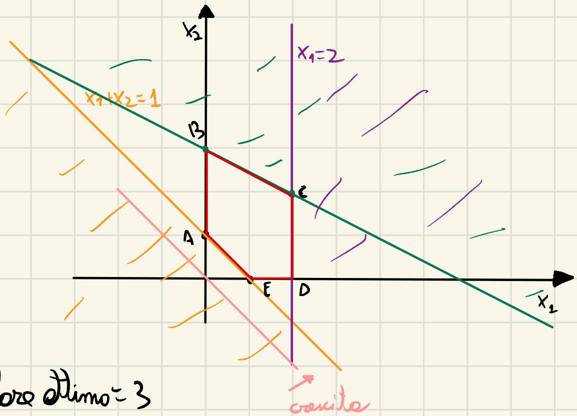
$\max\ x_1+x_2$

$x_1+x_2 \geq 1$

$x_1 \leq 2$

$x_1+2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$



$\max = C(2,2)$, valore ottimo $= 3$

FORMA STANDARD

$\max\ x_1+x_2$

$x_1+x_2-x_3=1$

$x_1+x_4=2$

$x_1+2x_2+x_5=6$

$\xrightarrow{\text{DUALE}}$

$\min\ -u_1+2u_2+6u_3$

$-u_1+u_2+u_3 \geq 1$ — x_1

$-u_1+u_3 \geq 1$ — x_2

$u_1 \geq 0$ — x_3

$u_2 \geq 0$ — x_4

$u_3 \geq 0$ — x_5

ALGORITMO DEL SIMPLESSO

$B_0\ (x_3, x_4, x_5)$ non AMMISSIBILE

↳ PROBLEMA I FASE:

$\max\ -s_1$

$+x_1+x_2-x_3+s_1=+1$

$x_1+x_4=2$

$x_1+2x_2+x_5=6$

$\rightarrow$

$B_0=\{s_1, x_4, x_5\}$

$\max\ -1+x_1+x_2-x_3$

$s_1=1-x_1-x_2+x_3$ entra x_1, esce s_1

$x_4=2-x_1$

$x_5=6-x_1-2x_2$

$\max \ 0 - n_1 - x_2$

$x_1 = 1 - n_1 + x_2 + x_3$
$x_4 = 1 + n_1 + x_2 - x_3$
$x_5 = 5 + n_1 - x_3 - x_2$

$\rightarrow$ 0 val ottimo $\rightarrow$ $B_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$ $\rightarrow$ BASE AMMISSIBILE

$\max \ 1 + x_3$

$x_1 = 1 - x_2 + x_3$
$x_4 = 1 + x_2 - x_3$
$x_5 = 5 - x_3 - x_2$

$\rightarrow$ $x_2 = 0, x_1 = 1, x_4 = 1, x_5 = 5, x_3 = 0$ $\rightarrow$ val ottimo $= 1$

PUNTO E nel primale, nel duale

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \rightarrow (-1, 0)$$

entra x_3, esce x_4 $\quad B_3 (x_1, x_3, x_5)$ $\quad x_1 = 2, x_3 = 1, x_4 = 4, x_2 = x_5 = 0$

$\max \ 2 + x_2 - x_4$

$x_1 = 2 - x_4$
$x_3 = 1 + x_2 - x_4$
$x_5 = 4 + x_4$

$\rightarrow$ $(2,0)$ $\rightarrow$ D nel primale, val ottimo $= 2$

duale

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 1)$$

entra x_2, esce x_5

$\max \ 6 - x_5$

$x_1 = 2 - x_4$
$x_3 = 5 - x_5$
$x_2 = 4 + x_4 - x_5$

$B_4 (x_1, x_3, x_2)$ $\rightarrow$ $(2, 2)$, val ottimo $= 4$

PUNTO C

duale

RIPASSO DOMANDE APERTE TEORIA

POSSIBILI FORME S_{OTT}

$S_a = \emptyset \rightarrow S_{OTT} = \emptyset$

S_a = politopo
- S_{OTT} è composto da un elemento
- S_{OTT} è composto da infiniti e limitati elementi

S_a = poliedro illimitato
- $S_{OTT} = \emptyset$ perché S_a ha direzione illimitata
- S_{OTT} è composto da un solo elemento
- S_{OTT} è composto da infiniti e limitati punti
- S_{OTT} è composto da infiniti e illimitati punti

INSIEME CONVESSO + DIMOSTRAZIONE S_a è convesso

$\forall x_1, x_2 \in C$ con $x_1 \neq x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_a$ "Dati due punti qualsiasi di C, anche il segmento che li congiunge è interamente contenuto in C

DIM: $x_1, x_2 \in S_a \Rightarrow a_i x_1 \leq b_i$ e $a_i x_2 \leq b_i$ (con $i \in [0, \dots, m]$) ed $x_1, x_2 \geq 0$

$$a_i [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = a_i \lambda x_1 + (1-\lambda) a_i x_2 \leq b_i \lambda + (1-\lambda) b_i$$

inoltre $\lambda_1 x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in S_a$

CONDIZIONE ILLIMITATEZZA + DIM.

DEF: $\exists\, \gamma_h > 0 : a_{rh} \geq 0$ con $r = \{1, \dots, m\}$

DIM Ponendo a 0 tutte le variabili fuori base esclusa γ_h nella riformulazione rispetto alla base B ottengo:

$$\max\ \gamma_0 + \gamma_h x_{i_{m+h}}$$
$$x_{i_1} = \beta_1 + a_{1h} x_{i_{m+h}}$$
$$\vdots$$
$$x_{i_m} = \beta_m + a_{mh} x_{i_{m+h}}$$

se $x_{i_{m+h}}$ cresce → resto in S_a ma obiettivo diverge a ∞ → $S_{ott} = \emptyset$ xké obiettivo illimitato

- DIMOSTRARE SE PRIMALE HA OBIETTIVO ILLIMITATO ⟹ $D_a = \emptyset$

DIM PER ASSURDO $D_a \neq \emptyset$, $\exists\, u_0 \in D_a \Rightarrow \forall x \in S_a \quad cx \leq u_0 b$ ⇝ ↯ perché x non può essere limitato se l'obiettivo è illimitato
per l'inverso si sfrutta la simmetria tra primale e duale

DIM X ASSURDO $D_a \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, u_0 \in D_a \rightarrow \forall x \in S_a\ cx \leq u_0 b$ ⇝ ↯ assurdo perché obiettivo è illimitato

- 2° teorema dualità

DEF: $x^* \in S_{ott}$ ed $u^* \in D_{ott} \Leftrightarrow x^*$ ed u^* appartengono ad S_a e D_a
e rispettano condizioni di complementarità, ovvero:
$(u^* A - c) x^* = 0$

DIM: Se sol. soddisfano COND. COMPLEMENTARITÀ $\longrightarrow$ sono ottime

$$\left.\begin{array}{l}(u^*A - c)x^* = 0 \text{ vale} \rightarrow u^*Ax^* = cx^* \\ x \in S_0 \rightarrow Ax^* = b\end{array}\right\} u^*b = cx^*$$ ⇝ le due soluzioni sono ottime per entrambi i problemi

Se sono ottime $\rightarrow$ soddisfano COMPLEMENTARITÀ

1° teorema duale

$u^*b = x^*c$; aggiungendo e sottraendo u^*Ax^* $\rightarrow u^*b + u^*Ax^* - u^*Ax^* - cx^* = 0 \rightarrow u^*(b - \underbrace{Ax^*}_{=b}) + x^*(u^*A - c) = 0$

$\rightarrow (u^*A - c)x^* = 0$

2° TEOREMA DUALE

$x^* \in S_{ott}$ e $u^* \in D_{ott} \Leftrightarrow$ entrambi appartengono ad S_a e D_a e rispettano condizioni di COMPLEMENTARITÀ

$(u^*A - c)x^* = 0$

DIM: prima dimostro che se x^* ed u^* sono complementari $\rightarrow$ sono ottime

se $(u^*A - c)x^* = 0$ vale allora lo riscrivo come $u^*Ax^* = cx^*$; $x^* \in S_{ott}$ significa che $Ax^* = b$

$\hookrightarrow u^*b = u^*Acx^* = cx^*$ ⇝ le soluzioni sono ottime dimostro che se x^* ed u^* sono ottime $\Rightarrow$ rispettono complementarità

$1°$ TEO DUALITÀ $\rightsquigarrow$ $u^*b = cx^*$; aggiungendo e sottraendo u^*Ax^* $\rightarrow$ $u^*b + u^*Ax^* - u^*Ax^* - cx^* = 0$

$\rightarrow u^*(b - Ax^*) + x^*(uA - c) = 0$ $\qquad x^*(uA-c) = 0$ C.V.D

$= b$ perché $x^* \in S_a$

$2°$ TEOREMA DUALITÀ

DEF: $x^* \in S_{OTT}$ e $u^* \in D_{OTT} \Leftrightarrow x^* \in S_a, u^* \in D_a$ e rispettano condizioni COMPLEMENTARITÀ

cioè: $(u^*A - c)x^* = 0$

DIMOSTRAZIONE

Se rispettono COND $\rightarrow$ OTTIME

se $(u^*A - c)x^* = 0$ vale, la riscrivo come $u^*Ax^* = cx^*$

inoltre $x^* \in S_a$ significa $Ax^* = b$ $\rightarrow$ $u^*b = u^*Ax^* = cx^*$, ovvero x^* ed u^* sono soluzioni ottime

Se sono OTTIME $\rightarrow$ COND. COMPLE. rispettate

dal $1°$ TEO della dualità sappiamo che $u^*b = cx^*$, aggiungendo e sottraendo

$u^*Ax^* \rightarrow u^*b + u^*Ax^* - u^*Ax^* - cx^* = 0 \rightarrow u^*(b - \overset{,,b}{Ax^*}) + x^*(Au^* - c) = 0$

$\hookrightarrow x^*(u^*A - c) = 0$ C.V.D

CONVESSITÀ + DIM S_a è convesso

$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0,1) \to \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

DIM $x_1, x_2 \in S_a$

$a_i x_1 \leq b_i ; a_i x_2 \leq b_i$ con $x_1, x_2 \geq 0, i \in [1 \dots m]$

$\forall \lambda \in [0,1) \to a_i [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq b_i \lambda + (1-\lambda) b_i$

$a_i \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 a_i \leq b_i \lambda + (1-\lambda) b_i$

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \geq 0 \longrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S_a$ C.V.D

CONVESSITÀ

$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0,1) \to \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S_a$

DIM S_a convesso: $x_1, x_2 \in S_a$

$a_i x_1 \leq b_i, a_i x_2 \leq b_i ; x_1, x_2 \geq 0 \quad i \in \{1 \dots m\}$

$\forall \lambda \in [0,1) \to a_i x_1 \lambda + (1-\lambda) a_i x_2 \leq b_i \lambda + (1-\lambda) b_i$

inoltre $x_1 \lambda + (1-\lambda) x_2 \geq 0 \longrightarrow x_1 \lambda + (1-\lambda) x_2 \in S_a$

POSSIBILI FORME S_{ott}

$S_a = \emptyset \rightarrow S_{ott} = \emptyset$

S_a = politopo $\rightarrow$ S_{ott} ha un elemento o illimitato finito

S_a = poliedro illimitato $\rightarrow$ S_{ott} $\emptyset$ perché obiettivo illimitato
S_{ott} ha un elemento
S_{ott} ha infiniti elementi limitati
S_{ott} ha infiniti punti illimitati.

CONDIZIONE ILLIMITATEZZA + DIM.

$\exists \gamma_h > 0 : a_{rh} \geq 0$ con $r = 1 \ldots m$

prendo la riformulazione di un problema PL rispetto alla base B e pongo a 0 tutte le variabili fuori base.

$$\begin{aligned} &\max \ \gamma_0 + \gamma_h x_{i_{m+h}} \\ &x_1 = \beta_1 + \alpha_{i_1} x_{i_{m+h}} \\ &\vdots \\ &x_m = \beta_m + \alpha_{i_{m+h}} x_{i_{m+h}} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ aumentando $x_{i_{m+h}}$ resto in S_a ma obiettivo diverge a ∞ $\longrightarrow$ OBIETTIVO ILLIMITATO C.V.D.

DIMOSTRAZIONE CHE SE $S_{ott} = \emptyset$ xké illimitato $\Rightarrow D_a = \emptyset$

Per assurdo $D_{ott} \neq \emptyset$ ed $\exists u_0 \in D_a \Rightarrow \forall x \in S_a \quad cx \leq u_0 b$ ed è un ASSURDO perché se obiettivo primale è illimitato non può essere limitato superiormente.

2° TEOREMA DUALITÀ

$x^* \in S_{ott}$ e $u^* \in S_{ott} \Leftrightarrow x^* \in S_a$ ed $u^* \in S_a$ e rispettano criterio complementarità:

- $(u^*A - c)x^* = 0$

DIM 1^a parte: se • vale $\rightarrow$ sono ottime

$u^*Ax = cx^* \rightarrow u^*b = u^*Ax^* = cx^* \rightarrow$ le due soluzioni sono ottime per entrambi i problemi

$x^* \in S_a \rightarrow Ax^* = b$

2^a parte se sono ottime $\rightarrow$ vale •

$u^*b - cx^* = 0$; aggiungendo e sottraendo $u^*Ax^* \rightarrow u^*b - u^*Ax^* + u^*Ax^* - cx^* = \underbrace{u^*(b - Ax^*)}_{=0 \text{ perché } Ax^* = b \text{ perché } x^* \in S_a} + x^*(u^*A - c) = 0$

$\hookrightarrow x^*(u^*A - c) = 0$ C.V.D.

TEOREMA FONDAMENTALE P.L.

Dato un problema PL in forma canonica, se $S_{ott} \neq \emptyset \Rightarrow S_{ott}$ contiene almeno un vertice di S_a

DIMOSTRAZIONE

$v_1, \dots, v_k$ vertici di S_a

$r_1, \dots, r_h$ raggi di S_a (nel caso fosse illimitato)

Se $S_{ott} \neq \emptyset \rightarrow x^* \in S_{ott}$

PER ASSURDO $\rightarrow$ nessun vertice di S_a appartiene ad S_{ott} $\rightarrow$ $cv_i \leq cx^* \quad \forall i \in [1, \dots k]$

$\exists \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^* \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* = 1 \quad \exists u_1^*, \dots, u_h^* \geq 0$ tali che $x^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* v_i + \sum_{j=1}^{h} u_j^* r_j$

da cui $cx^* = c\left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* v_i + \sum_{j=1}^{h} u_j^* r_j\right]$

per linearità della funzione obiettivo $\longrightarrow cx^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* cv_i + \sum_{j=1}^{h} u_j^* cr_j$

per lemma $cr_j \leq 0 \rightarrow cx^* \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* cv_i < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* (cx^*)$

$\hookrightarrow cx^* < (cx^*) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^*}_{=1} \longrightarrow cx^* < cx^*$ ↯ C.V.D

TEOREMA FONDAMENTALE PL

Se $S_{ott} \neq \emptyset \rightarrow S_{ott}$ contiene almeno un vertice di S_a

DIMOSTRAZIONE

$v_1, \dots, v_K \rightsquigarrow$ vertici S_a

$r_1, \dots, r_h \rightsquigarrow$ raggi S_a (se illimitato)

$S_{ott} \neq \emptyset \rightarrow x^* \in S_{ott}$

PER ASSURDO $v_1, \dots, v_K \notin S_{ott} \Rightarrow c v_i < c x^* \quad \forall i = 1 \dots K$

Poiché $x^* \in S_a \rightarrow \exists \lambda_1^*, \dots, \lambda_K^* \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* = 1 \, ; \, \exists \mu_1^*, \dots, \mu_h \geq 0$ tali che $x^* = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* v_i + \sum_{j=1}^{h} \mu_j^* r_j$

teorema rappresentazione

$$\rightarrow c x^* = c \left[\sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j^* r_j \right]$$

Per linearità f. ob.

$$c x^* = \left[\sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* c v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j^* c r_j \right]$$

$\hookrightarrow \leq 0$ per LEMMA

$$\hookrightarrow c x^* \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* c v_i < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* c x^*$$

$$\hookrightarrow c x^* < \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^*}_{=1} c x^* \rightarrow c x^* < c x^* \quad \text{↯} \quad \text{C.V.D.}$$

TEOREMA FONDAMENTALE PL

Se $S_{OTT} \neq \emptyset \Rightarrow S_{OTT}$ ha almeno un vertice di S_a

DIM

$v_1, \ldots, v_k \in S_a \rightsquigarrow$ vertici
$r_1, \ldots, r_h \in S_a$ se poliedro illimitato

PER ASSURDO $v_1, \ldots, v_k \notin S_{ott} \rightarrow c v_i < c x^*$

$\rightarrow$ per teorema rappresentazione S_a $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$; E $u_1, \ldots, h \geq 0$

tali che $x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* v_i + \sum_{i=1}^{h} u_i^* r_i$

$cx^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* c v_i + \sum_{i=1}^{h} \overset{\geq 0}{u_i^*} r_i c$ ≤ 0

$\hookrightarrow cx^* \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* c v_i < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c x^*$

$\hookrightarrow cx^* < 1 c x^*$ $\lightning$

2° TEOREMA INDIVIDUALITÀ

$x^* \in S_{OTT}$ e $u^* \in D_{OTT} \Leftrightarrow x^* \in S_a, u \in D_a$ e rispettano condizione complementarità $(u^* A - c) x = 0$

Se rispettano → sono ottime

$u^*Ax^* - cx^* = 0 \rightarrow u^*b = u^*Ax^* = cx^*$ → le soluzioni sono ottime per entrambi i problemi

$x^* \in b_a \rightarrow Ax^* = b$

Se sono ottime → rispettano

$u^*b - cx^* = 0 \rightarrow u^*b - u^*Ax^* + u^*Ax^* - cx^*$

$\rightarrow u^*\underbrace{(b - Ax^*)}_{=0} + x^*(Au^* - c) = 0$ CVD