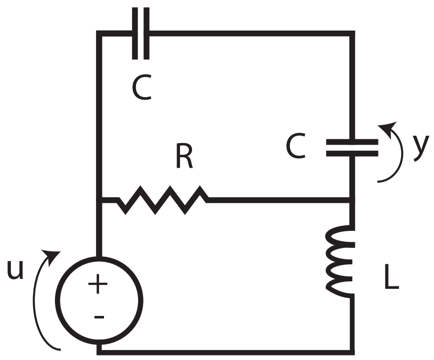
Università di Parma - Facoltà di Ingegneria

Prova intermedia di sistemi multivariabili del 24 Novembre 2021

Es. 1) (5 punti)

a) Trova una rappresentazione con un modello di stato per il seguente circuito elettrico, in cui il generatore di tensione u rappresenta l'ingresso e la tensione y l'uscita. I parametri R, L, C sono strettamente positivi.



b) Trova l'insieme di raggiungibilità X_R in funzione dei parametri L, R, C.

Es. 2) (6 punti) Considera il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) \\ &x(0) = x_0 \,, \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcola il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di A.
b) Calcola la potenza di matrice A^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.
c) Il sistema è asintoticamente stabile? E' semplicemente stabile?

Es. 3) (5 punti) Considera il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ &y(k) = Cx(k) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trova l'insieme degli stati raggiungibili X_R.

Continua dietro.

Es. 4) (8 punti) Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Metti il sistema nella forma standard di raggiungibilità, mettendo in evidenza le diverse componenti strutturali di questa forma.

b) Trova la funzione di trasferimento del sistema.

Es. 5) (6 punti) Considera le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -a-3 & 0 & 1 & a+3 \\ 2 & a & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove a è un parametro.

Trova i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui la coppia (A, B) è raggiungibile.

Es. 6) (3 punti bonus) Considera il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)\\ x(0) &= x_0.\end{aligned} \tag{1}$$

Sia V l'insieme degli stati iniziali x_0 per cui la soluzione del sistema (1) è periodica.

a) Dimostra che V è un sottospazio invariante rispetto ad A.

b) Sia $\mathcal{A}$ la trasformazione lineare associata ad A, cioè definita da $\mathcal{A}(x) = Ax$. Dimostra che la restrizione di $\mathcal{A}$ su V, $\mathcal{A}|_V$, ha tutti gli autovalori sull'asse immaginario.