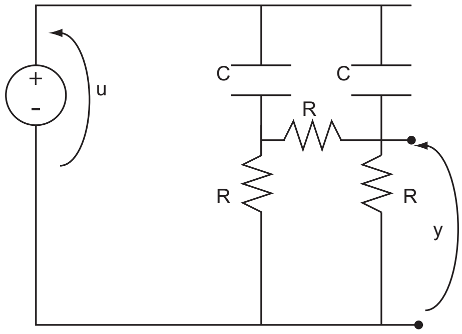
Università di Parma - Facoltà di Ingegneria

Prova intermedia di sistemi multivariabili del 21 Novembre 2012

Es. 1) (7 punti) Considera il seguente circuito elettrico, in cui il generatore di tensione u rappresenta l'ingresso e la tensione y l'uscita.



a) Trova una rappresentazione del sistema mediante un modello di stato.
b) Determina il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice A, determina inoltre i modi associati.
c) Determina l'insieme di raggiungibilità X_R.

Es. 2) (8 punti) Considera il sistema autonomo a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$
$$x(0) = x_0 \,.$$

a) Determina una matrice fondamentale di soluzioni del sistema.
b) Calcola l'esponenziale di matrice e^{At}.
c) Trova la soluzione del sistema a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [0, 1, 0]^T$.

Es. 3) (7 punti) Considera il sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + B$$

dove $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Determina gli insiemi di raggiungibilità $X_R(k)$ e di controllabilità $X_C(k)$ per ogni $0 < k \in \mathbb{N}$.

b) Determina un controllo che consenta di raggiungere l'origine a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0, 0, 1]^T$ nel numero minimo di passi.

Es. 4) (8 punti) Considera il seguente sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Metti il sistema nella forma standard per i sistemi non completamente raggiungibili, indcando le diverse sottomatrici che compongono $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

b) Determina gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili.

c) Calcola la matrice delle funzioni di trasferimento del sistema.

Es. 5) (3 punti bonus, più difficile, fare per ultimo) Sia data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un sottospazio $V di \mathbb{R}^n$ si dice invariante rispetto alla trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A se vale la relazione

$$AV \subset V \,.$$

Dimostra che l'insieme di raggiungibilità $X_R = \text{Im } R = \text{Im } [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ è il più piccolo sottospazio invariante rispetto ad A contenente Im B.