Università di Parma - Facoltà di Ingegneria

Prova intermedia di sistemi multivariabili del 18 Dicembre 2020

Es. 1) (7 punti) Considera il seguente sistema a tempo continuo, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)\,, y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\,a-2 & 3 & 1-a & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 4-5\,a & -4 & 2\,a-2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Trova l'insieme degli stati non osservabili X_{NO} in funzione di $a \in \mathbb{R}$.
b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la coppia (C, A) è rilevabile?

Es. 2) (8 punti) Considera il sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcola l'insieme degli stati raggiungibil X_R.
b) Trova una matrice F tale che la matrice del sistema retroazionato $A + BF$ abbia tutti gli autovalori in 0.

Es. 3) (8 punti)
a) Trova la scomposizione di Kalman per il seguente sistema a tempo continuo, mettendo in evidenza gli zeri strutturali e le sottomatrici di questa forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\,, \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.
c) Calcola la risposta all'impulso del sistema.
d) La coppia (A, B) è stabilizzabile? La coppia (C, A) è rilevabile?

Es. 4) (7 punti) Un sistema a tempo continuo è descritto dall'equazione

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

determina una legge di controllo in retroazione che minimizzi la funzione di costo

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))\,dt\,,$$

con $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ed $R = 1$. **Suggerimento:** Se $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, in una delle equazioni del sistema ottenuto può essere conveniente raccogliere il termine $a - b$.

Es. 5) (3 punti bonus) Sia $A, Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con Q, R simmetriche, considera la matrice

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix}.$$

Dimostra che lo spettro di H è simmetrico rispetto all'asse immaginario, cioè che se λ è autovalore di H, allora anche $-\lambda$ è un autovalore di H.

venerdì 18 dicembre 2020 08:55

$$1)\ e)\ X_{NO}(0) = \ker C = \ker \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{M}$$

$$= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO}(1) = X_{NO}(0) \cap \ker MA$$

$$= X_{NO}(0) \cap \ker \begin{bmatrix} 3e-2 & 3 & 1-e & 2 \\ 4-5e & -4 & 2e-2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \ker \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3e-2 & 3 & 1-e & 2 \\ 4-5e & -4 & 2e-2 & -3 \end{bmatrix}}_{M}$$

$$\det M = -(3e-2)(2e-2) + (1-e)(4-5e)$$

$$= -(6e^2 - 6e - 4e + 4)$$

$$+ 4 - 5e - 4e + 5e^2$$

$$= -e^2 + e = e(1-e)$$

se $e \notin \{0,1\}$ $X_{NO} = \{0\}$

se $e = 0$

$$X_{NO}(1) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \ker \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ M \\ \\ \end{array}$$

$$X_{NO}(2) = X_{NO}(1) \cap \ker MA$$

$$= X_{NO}(1) \cap \underbrace{\ker \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\subset X_{NO}(1)}$$

$$= X_{NO}(1)$$

$$= \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se $e = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO}(1) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ M \\ \\ \end{array}$$

$$X_{NO}(2) = X_{NO}(1) \cap \ker MA =$$

$$= X_{NO}(1) \cap \underbrace{\ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C\, X_{NO}(1)}$$

$$= X_{NO}(1) = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$X_{NO} = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } e \notin \{0, 1\} \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{se } e = 0 \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{se } e = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Se $a \notin \{0, 1\}$, $C(C, A)$ è rilevabile

Se $a = 0$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AT_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AT_1 = -T_1, \quad T^{-1}AT_1 = \begin{bmatrix} \overset{A_{NO}}{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma(A_{NO}) = \{-1\} \Rightarrow C(C, A)$ è rilevabile

$a = 1$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AT_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AT_1 = T_1 \Rightarrow T^{-1}AT_1 = \begin{bmatrix} \overset{A_{NO}}{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A_{NO}) = \{1\}$$

$\Rightarrow (C, A)$ non è rilevabile

Quindi

(C, A) è rilevabile $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 1$

2) e) $X_R(1) = \mathrm{Im}\, B$

$$X_R(2) = \mathrm{Im}\,[B, AB]$$

$$= \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$X_R(3) = X_R(2) + \mathrm{Im}\, AM = X_R(2) + \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^4$$

$$X_R = \bar{\mathbb{R}}^4$$

b) $X(1) = Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Bu(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + Bu(2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = Ax(3) + Bu(3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lfloor\ 0\ \rfloor$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = A + B\bar{F} = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = B\mu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifica: $\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X$, ok

$$d(\lambda) = \lambda^4$$

$$f = -[0\ 0\ 0\ 1]\, X^{-1} \bar{A}^4$$

$$= -[1\ 0\ 0\ 0]\, \bar{A}^4$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q}$$

$$q\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q\bar{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q\bar{A}^4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f = [2, -3, -3, -2]$$

$$F = \bar{F} + u(0) f = \bar{F} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

3) $X_R(1) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_R(2) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$X_R(3) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X_R(2) = X_R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO}(0) = \ker C$$

$$X_{NO}(1) = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix} M$$

$$X_{NO}(2) = X_{NO}(1) \cap \ker MA$$

$$= X_{NO}(1) \cap \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X_{NO}(1)$$

$$= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_R \cap X_{NO} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cap \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Im} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{T_2}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} \quad T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \end{array}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} A T = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$A_{R,0}$

$A_{R,NO}$

$A_{NR,0}$

zeri str.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} & 0 & & 0 \\ \hline & & & \\ \hline 0 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

$$\hat{\ }^{-1} \qquad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$B_{R,0}$

$B_{R,NO}$

$$B = T\,B = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{zeri strut.}$$

$$\hat{C} = C\,T = \left[\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{C_{R,O}} \quad \underbrace{}_{\text{zeri str.}} \quad \underbrace{}_{C_{NR,O}}$$

b)

$$H(s) = C_{R,O}\,(sI - A_{R,O})^{-1} B_{R,O} + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s^{-1} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $h(t) = \begin{bmatrix} 1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$

d) (A, B) non è stabilizzabile perché $0 \in \sigma(A_{NR})$

(C, A) non è rilevabile perché $0 \in \sigma(A_{NO})$

4) $A'P + PA + Q - PBR\,B'P = 0$

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad PA = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-b, & b-c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2a+1 & b-a \\ b-a & 3-2b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a-b)^2 & (a-b)(b-c) \\ (a-b)(b-c) & (b-c)^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2a+1-a^2-b^2+2ab = 0 \\ b-a-ab-bc+ac+b^2 = 0 \\ 3-2b-b^2-c^2+2bc = 0 \end{cases}$$

$$b-a-c(b-a)+b(b-a) = 0$$

$$(b-a)(1-c+b) = 0$$

1) Se $b = c - 1$

$$3 - \cancel{2c} + 2 - (\cancel{c^2} + 1 - \cancel{2c}) - \cancel{c^2} +$$

$$+ 2(\cancel{c} - 1)c = 0$$

$$4 - 2c = 0, \quad c = 2, \quad b = 1$$

$$\Rightarrow 2a + \cancel{1} - a^2 \cancel{-1} + 2a = 0$$

$$a^2 = 4a, \quad a = 0 \ \text{NON ACC}$$
$$a = 4$$

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F^* = -R^{-1} B^T P = -[3 \ \ -1]$$
$$= [-3, 1]$$

$$u^*(t) = [-3, 1]\, x(t)$$

5) $\lambda \in \sigma(H) \Rightarrow \exists \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} : H \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A & R \\ \cdot & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda v_2 \end{bmatrix}$$

$$A v_1 + R v_2 = \lambda v_1$$

$$Q v_1 - A^T v_2 = \lambda v_2$$

$$H^T \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & Q \\ R & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^T v_2 - Q v_1 \\ R v_2 + A v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda v_2 \\ \lambda v_1 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -\lambda \in \sigma(H^T) = \sigma(H)$$

$$\Rightarrow -\lambda \in \sigma(H)$$