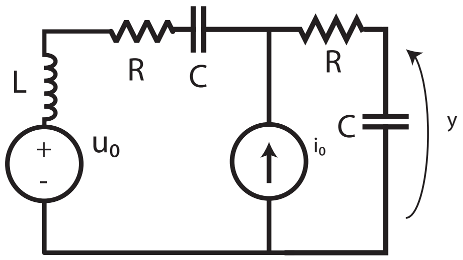
Università di Parma - Facoltà di Ingegneria

Prova intermedia di sistemi multivariabili del 1 Dicembre 2017

Es. 1) (6 punti) a) Trova una rappresentazione con un modello di stato per il seguente circuito elettrico, in cui il generatore di tensione u_0 e il generatore di corrente i_0 sono gli ingressi e la tensione y l'uscita.



b) Trova l'insieme di raggiungibilità X_R.

Es. 2) (6 punti) Considera il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t)\\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcola l'esponenziale di matrice e^{At}.
b) Trova l'insieme degli stati iniziali x_0 per cui $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Es. 3) (5 punti) Considera il sistema a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$$\text{dove } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determina l'insieme di raggiungibilità $X_R(k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
b) Determina un controllo che consenta di portare il sistema dallo stato iniziale $x(0) = [0,0,0,1]^T$ allo stato finale $x_1 = [0,0,0,0]$ nel minor numero di passi.

Es. 4) (8 punti) Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Metti il sistema nella forma standard per i sistemi non completamente raggiungibili, indicando le diverse sottomatrici che compongono $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.
b) Determina gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili.
c) Calcola la matrice delle funzioni di trasferimento del sistema.
d) La coppia (A, B) è stabilizzabile?

Continua dietro

Es. 5) (6 punti) Considera il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

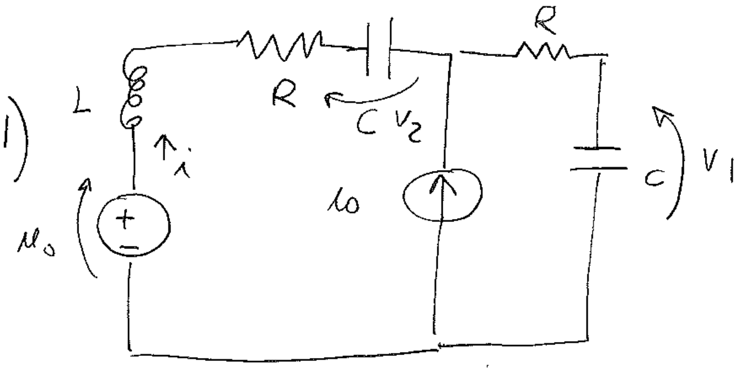
a) Metti il sistema nella forma canonica di controllo

b) Con il metodo che preferisci trova una retroazione stato-ingresso $u(t) = Fx(t)$ in modo tale che la matrice $A + BF$ abbia tutti gli autovalori in -1.

Es. 6) (3 punti bonus, più difficile, fare per ultimo)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice con autovalori distinti. Dimostra che è sempre possibile trovare un vettore colonna $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tale che la coppia (A, b) è raggiungibile. (Suggerimento: nota che A è senz'altro diagonalizzabile e usa il test PBH).

1)



$$L\dot{i} = u_0 - V_1 - R(i+i_0) - V_2 - Ri$$

$$C\dot{V}_2 = i$$

$$C\dot{V}_1 = i + i_0$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 1/c & 0 & 0 \\ 1/c & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \\ 0 & 1/c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$y = V_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} i \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad / \quad D = [0, 0]$$

$$X_R(1) = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_R(2) = X_R(1) + \operatorname{Im} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X_R(1) + \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^3$$

$$X_R = \mathbb{R}^3$$

2) $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$

$$\lambda = -1 \quad \operatorname{Ker} A+I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \overset{v_1}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda = 2 \quad \operatorname{Ker} A-2I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\operatorname{Ker}(A-2I)^2 = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \overset{v_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{2t} & te^{2t} \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & (1-t)e^{2t} - e^{-t} & te^{2t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \iff x_0 \in \operatorname{Im} v_1$$

3) a) $X_R(1) = \text{Im}\, B = \text{Im}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$X_R(2) = X_R(1) + \text{Im}\, A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = X_R(1) + \text{Im}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \text{Im}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$X_R(3) = X_R(2) + \text{Im}\, A\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = X_R(2) + \text{Im}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = X_R(2)$$

$$X_R = X_R(2) = \text{Im}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

b) 1 PASSO

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + B\,u(0) = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$u(0) = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

4) a) $X_R(1) = \mathrm{Im}\, B = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $X_R(2) = X_R(1) + \mathrm{Im}\, A\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$= X_R(1) + \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0&0\\2&1\\0&0\\0&2\end{bmatrix} = X_R(1)$$

$X_R = X_R(1)$

$$T = \Big[\underbrace{\begin{matrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{matrix}}_{T_1}\ \underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{matrix}}_{T_2}\Big], \quad T^{-1} = \begin{bmatrix}0&\phi&0&0\\0&\phi&0&1\\1&0&\phi&0\\0&0&\phi&\phi\end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1}AT = T^{-1}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\2&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&2&-2&0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc}2&1&0&0\\0&2&-2&0\\\hline 0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right]$$

A R

zeri strut.

A_{NR}

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\\hline 0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\}B_R\\ \}\text{zeri strutt.}\end{matrix} \qquad \hat{C} = CT = [\overbrace{1\ \ 1}^{C_R}\,|\,\overbrace{0\ \ 0}^{C_{NR}}]$$

b) $\{2\} = \sigma(A_R)$, $\sigma(A_{NR}) = \{1, -1\}$

c) $H(s) = [1,1]\begin{bmatrix}s-2&-1\\0&s-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2}[1,1]\begin{bmatrix}s-2&1\\0&s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{(s-2)^2}[s-2, s-1]\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2}[s-2, 1] = \left[\frac{1}{s-2}, \frac{1}{(s-2)^2}\right]$$

d) NO IN QUANTO $1 \in \sigma(A_{NR})$

5) $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $q = [0\,0\,0\,1] R^{-1} = [1\,0\,0\,0]$

$$P = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ qA^2 \\ qA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d(\lambda) = (\lambda+1)^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

$$f_c = [f_1, f_2, f_3, f_4]$$

$$A_c + B_c f_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+f_1 & f_2 & 1+f_3 & f_4 \end{bmatrix}$$

$1 + f_1 = -1 \qquad f_1 = -2$

$f_2 = -4$

$f_3 + 1 = -6 \qquad f_3 = -7$

$f_4 = -4$

$f_c = [-2, -4, -7, -4]$, $u = f_c z = f_c P x$

$f = f_c P = [6, -7, -4, -11]$

6) A diagonalizzabile $\Rightarrow A = P^{-1} D P$ con D diagonale

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}, \quad \sigma(A) = \{ d_1, d_2, \dots, d_n \}$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} \left[D - d_i I, \hat{b} \right] = \operatorname{rank} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c} d_1 - d_i & & & & & & & 1 \\ & \ddots & & 0 & & 0 & & 1 \\ & & & 0 & & & & 1 \\ 0 & & & 0 & & \ddots & & 1 \\ & & & & & & d_n - d_i & 1 \end{array} \right] = n$$

i-esima colonna.

INFATTI
Tutti i termini $d_j - d_i$ sono diversi da zero per $i \neq j$

quindi $(D, \hat{b})$ è RAGGIUNGIBILE e quindi anche
$(P^{-1} D P, P^{-1} \hat{b}) = (A, P^{-1} \hat{b})$ è RAGGIUNGIBILE.