RICERCA OPERATIVA - PARTE I

ESERCIZIO 1. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -2x_2 + x_3 - x_4 \\
& x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\
& -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Si eseguano i seguenti punti:

- si ricavi il duale di questo problema;
- si risolva il duale per via grafica indicandone soluzione ottima e valore ottimo;
- risolvere il primale utilizzando le condizioni di complementarità;
- fino a quanto può crescere il coefficiente di x_2 nell'obiettivo senza far diventare illimitato il problema primale?

ESERCIZIO 2. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PLI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - 2x_2 \\
& x_1 - x_2 \leq \tfrac{3}{2} \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in Z
\end{aligned}
$$

- Si trasformi il problema in forma standard con le opportune cautele;
- si risolva il problema in forma standard tramite l'algoritmo branch-and-bound;
- usando come vincolo difficile il solo vincolo $x_1 - x_2 \leq \frac{3}{2}$, scrivere il rilassamento Lagrangiano del problema con moltiplicatore di Lagrange $\lambda \geq 0$;
- studiare come varia il valore ottimo del rilassamento Lagrangiano in funzione di λ e calcolare quindi il bound fornito dal duale Lagrangiano.e

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si dia la definizione di insieme convesso. Si dimostri che la regione ammissibile S_a di un problema di PL in forma canonica

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
& \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

è un insieme convesso. Si dimostri anche la convessità dell'iniseme delle soluzioni ottime S_{ott}.

ESERCIZIO 4. (6 punti) Dato un problema di PL primale

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

e il suo duale

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{u}^T\mathbf{b} \\
& \mathbf{u}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

con, rispettivamente, regioni ammissibili S_a e D_a e insiemi di soluzioni ottime S_{ott} e D_{ott}, si enunci e si dimostri il II teorema della dualità sulle condizioni di complementarità. Si dimostri inoltre che se esistono $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$ e $\bar{\mathbf{u}} \in D_a$ tali che

$$\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \leq \gamma$$

per qualche $\gamma \geq 0$, allora, dato $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$, si ha

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \leq \gamma,$$

cioè $\bar{\mathbf{x}}$ ha valore della funzione obiettivo che differisce dal valore ottimo per non più di γ.