4.3. 4º Experimento: Técnica da Seção Áurea – Avaliação Direta da Função e Aproximações Quadráticas da Função a Cada Iteração

Primeira Função Analisada

A primeira função analisada consiste na função apresentada na seção 2.5 respectiva ao problema de Rosen-Suzuki. Esta, como já abordado, é uma função quadrática dada pela soma da função objetivo e penalidades que impõem um conjunto de restrições não lineares.

Para o experimento em questão a função objetivo será dada em duas dimensões. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os limites inferior e superior das variáveis de decisão definem o seguinte intervalo $[-10,10]$.

Na execução dos algoritmos que implementam os métodos Quase-Newton será considerado apenas um ponto inicial a fim de avaliar e comparar a técnica da seção áurea feita através da avaliação direta da função objetivo e por meio das aproximações quadráticas para função a cada iteração. Ponto inicial:

$$x_0 = [-6 \quad -5] \rightarrow 3º \text{ Quadrante} \Rightarrow \text{Avaliação Direta da Função}$$
$$x_0 = [-6 \quad -5] \rightarrow 3º \text{ Quadrante} \Rightarrow \text{Aproximações Quadráticas}$$

Tabela 14 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_0.

Método	$x_{0_1} = [-6 \quad -5] \Rightarrow$ **Avalição Direta de** $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					
Método	**Aproximações Quadráticas para**				
	Tempo de Processamento Médio ( )	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro (%)**	**Erro (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Segunda Função Analisada

A segunda função analisada consiste na função da seção 2.4 que é apresentada aqui novamente com o parâmetro a igual a 0,0263:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^T \cdot A \cdot (x - c) + 0{,}0263 \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^3}$$

Para o experimento em questão o problema de otimização possui 30 dimensões, com os limites inferior e superior [-10,10] para as variáveis. O parâmetro $\boldsymbol{a}$ será igual 0,0263. Na execução dos algoritmos será considerado apenas um ponto inicial gerado aleatoriamente, conforme apresentado abaixo:

x0 = - 10 + 20*rand(30,1)

Tabela 15 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_0.

Método	$x_{0_1} = [-6 \quad -5] \Rightarrow$ Avalição Direta de $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					
Método	**$x_{0_1} = [-6 \quad -5] \Rightarrow$ Aproximações Quadráticas para $f(x)$**				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

4.4. 5º Experimento: Avaliação dos Métodos Quase-Newton em Problemas com Hessiana Singular

Função Analisada

A função analisada consiste na função da seção 2.6 que é apresentada novamente abaixo:

$$\boxed{f(x) = 8 \cdot \left\| x_1 + \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \right\|_2 + 7 \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)}$$

A função objetivo apresentada acima possui duas variáveis de decisão. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os limites das variáveis de decisão definem o seguinte intervalo $[-10{,}10]$.

No presente experimento, considera-se apenas um ponto inicial para a execução dos algoritmos que implementam os métodos Quase-Newton. Para realizar uma análise mais apurada os algoritmos serão executados utilizando-se a técnica da seção áurea feita através da avaliação direta da função e por meio das aproximações quadráticas para a função a cada iteração, conforme apresentado abaixo:

$x_0 = [9 \quad 9] \;\rightarrow\;$ 1º Quadrante $\;\Longrightarrow\;$ Avaliação Direta da Função
$x_0 = [9 \quad 9] \;\rightarrow\;$ 1º Quadrante $\;\Longrightarrow\;$ Aproximações Quadráticas

Tabela 16 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_0.

Método	$x_{0_1} = [9 \quad 9] \Rightarrow$ Avaliação Direta de $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					
Método	**$x_{0_1} = [9 \quad 9] \Rightarrow$ Aproximações Quadráticas para $f(x)$**				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

4.5. 6º Experimento: Avaliação Estatística dos Métodos Quase-Newton com a Variação do Parâmetro a

Função Analisada

A função analisada consiste na função da seção 2.2 que é apresentada novamente abaixo:

$$f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + a \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

A função objetivo apresentada acima possui duas variáveis de decisão. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os limites das variáveis de decisão definem o seguinte intervalo $[-10{,}10]$. No intuito de realizar a avaliação estatística, serão considerados três valores para o parâmetro $\boldsymbol{a}$, os quais são apresentados abaixo seguido da respectiva função objetivo:

$$a = -0{,}0263 \rightarrow \boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 0{,}0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)}$$

$$a = 0 \rightarrow \boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1}$$

$$a = 0{,}0263 \rightarrow \boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 0{,}0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)}$$

Nos casos estudados, para $a = 0$, a função $f(x)$ é quadrática e para $a \neq 0$, a função $f(x)$ é não quadrática. Além disso, tal parâmetro $\boldsymbol{a}$ está dentro dos limites que mantêm a convexidade da função objetivo.

Os pontos iniciais devem ser determinados por meio de uma busca aleatória feita através da função ***rand*** disponível no Matlab, lembrando que todas as variáveis de decisão devem estar dentro da faixa definida pelos limites. Dessa forma tem-se a seguinte expressão que determina o ponto inicial:

$$x_0 = 20 \,.\, \boldsymbol{rand}(2,1) - 10$$

Cada método deverá ser executado 50 vezes, considerando a técnica da seção áurea feita por meio da avaliação direta da função objetivo e por meio de se utilizar aproximações quadráticas para essa mesma função. A análise estatística consiste no estudo dos seguintes resultados obtidos pelas execuções dos algoritmos Quase-Newton: Tempo de processamento médio(s); Número de iterações; Número de avaliações da função objetivo; Erro percentual da solução; e Erro percentual do valor da função objetivo. Os três primeiros itens serão avaliados com o auxílio de uma ferramenta estatística denominada *boxplot*. Esta fermenta pode realizar uma análise gráfica da dispersão de um conjunto de dados. Já os dois últimos itens serão avaliados por meio de gerar o gráfico do Erro (%) ***X*** Execução.

Tabela 17 – Análise estatística dos Métodos Quase-Newton para a técnica da seção áurea feita por meio da avaliação direta da função objetivo e parâmetro $\alpha = -0{,}0263$.

Técnica da Seção Áurea Feita por meio da Avaliação Direta de $f(x)$ $\alpha = -0{,}0263$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Iterações				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Avaliações de $f(x)$				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				

Tabela 18 - Análise estatística dos Métodos Quase-Newton para a técnica da seção áurea feita por meio de aproximações quadráticas para a função objetivo e parâmetro $a = 0$.

Técnica da Seção Áurea Feita por meio de Aproximações Quadráticas para $f(x)$ $a = 0$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Iterações				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Avaliações de $f(x)$				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				

Tabela 19 - Análise estatística dos Métodos Quase-Newton para a técnica da seção áurea feita por meio da avaliação direta da função objetivo e parâmetro $a = 0$.

Técnica da Seção Áurea Feita por meio da Avaliação Direta de $f(x)$ $a = 0$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Iterações				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Avaliações de $f(x)$				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				

Tabela 20 - Análise estatística dos Métodos Quase-Newton para a técnica da seção áurea feita por meio de aproximações quadráticas para a função objetivo e parâmetro $\alpha = 0{,}0263$.

Técnica da Seção Áurea Feita por meio de Aproximações Quadráticas para $f(x)$ $\alpha = 0,0263$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Iterações				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				
Número de Avaliações de $f(x)$				
Métodos	**DFP**	**BFGS**	**Huang**	**Biggs**
Média				
Mediana				
Desvio Padrão				
Erro Padrão				
Variância				
Mínimo				
Máximo				
Nº de Dados				

Capítulo 4

Conclusão

4. Conclusões Gerais

Concluir sobre o comportamento dos métodos Quase Newton (BFGS, DFP, de HUANG e de BIGGS) para a otimização de funções quadráticas e não quadráticas perfeitas, utilizando ou não as aproximações quadráticas.

Na solução de complexos problemas irrestritos, o que representa o uso de métodos Quase Newton na otimização de funções implícitas quadráticas e não quadráticas.