Capítulo 3

Experimentos e Resultados

Nesse momento executa-se os algoritmos utilizados para obtenção dos resultados que solucionam os problemas de programação não linear compostos por funções objetivos quadráticas e não quadráticas perfeitas. Diversos estudos da aplicação dos métodos Quase-Newton para a solução desses problemas foram realizados, entre os quais se destacam as análises relacionadas ao esforço computacional dos algoritmos e precisão. O primeiro envolve o número de iterações, o número de avaliações da função objetivo e o tempo de processamento. Já o segundo envolve o erro percentual da solução encontrada e do valor de função objetivo dessa solução. A seguir são apresentados os experimentos e resultados.

4.1. 1º Experimento: Avaliação das Funções Quadráticas

Primeira Função Analisada

A primeira função analisada consiste na função da seção 2.1 que é apresentada aqui novamente:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^T \cdot A \cdot (x - c)}$$

Para o experimento em questão a função objetivo é dada em duas dimensões. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os limites inferior e superior das variáveis [-10, 10].

Na execução dos algoritmos, os métodos Quase-Newton, deverão considerados quatro pontos iniciais. Em dois pontos iniciais usando a técnica da seção áurea diretamente da avaliação da função e, nos outros dois pontos, usando a técnica da seção áurea feita por aproximações quadráticas para a função, conforme explicitado abaixo:

$$\begin{array}{llll}
x_{0_1} = [9 \quad 9] & \rightarrow \text{1º Quadrante} & \Rightarrow & \text{Aproximações Quadráticas} \\
x_{0_2} = [-3 \quad 2] & \rightarrow \text{2º Quadrante} & \Rightarrow & \text{Avaliação Direta da Função} \\
x_{0_3} = [-8 \quad -6] & \rightarrow \text{3º Quadrante} & \Rightarrow & \text{Aproximações Quadráticas} \\
x_{0_4} = [5 \quad -7] & \rightarrow \text{4º Quadrante} & \Rightarrow & \text{Avaliação Direta da Função}
\end{array}$$

Os resultados obtidos deverão ser apresentados nas tabelas abaixo.

Tabela 2 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_1}.

Método	$x_{0_1} = [9 \quad 9] \Longrightarrow$ **Aproximações Quadráticas para** $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 3 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_2}.

Método	$x_{0_2} = [-3 \quad 2] \Longrightarrow$ **Avalição Direta de** $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 4 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_3}.

Método	$x_{0_3} = [-8 \quad -6] \Longrightarrow$ **Aproximações Quadráticas para** $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 5 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_4}.

Método	$x_{0_4} = [5 \quad -7] \Longrightarrow$ **Avalição Direta de** $f(x)$				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

$\boxed{\textbf{Segunda Função Analisada}}$

A Segunda função analisada consiste na função apresentada na seção 2.2 que é apresentada novamente abaixo:

$$f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + a \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

A função objetivo apresentada acima possui duas variáveis de decisão. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os limites das variáveis de decisão [-10,10]. No intuito de obter uma função quadrática, o parâmetro $\boldsymbol{a}$ é igual a zero, resultando em:

$$\boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1}$$

Na execução dos algoritmos que implementam os métodos Quase- Newton deverão ser considerados dois pontos iniciais definidos aleatoriamente pelo aluno . Em um desses dois pontos iniciais será usada a técnica da seção áurea da avaliação direta da função e, no outro, por meio das aproximações quadráticas para a função a cada iteração.

Tabela 6 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_1}.

Método	Avalição Direta				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 7 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_2}.

Método	Aproximações Quadráticas				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Terceira Função Analisada

A terceira função analisada consiste na função da seção 2.3 que é apresentada novamente abaixo:

$$f(x) = -8 \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{4}{a^2} \cdot x_2 \cdot x_1^3 + \frac{4}{a^2} \cdot x_1 \cdot x_2^3$$

A função objetivo apresentada acima possui duas variáveis de decisão. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os limites das variáveis de decisão definem o seguinte intervalo $[0,3]$. Nesse intervalo, embora a função $f(x)$ possua dois termos cúbicos, a mesma se comporta como uma função quadrática. Sabendo que $a = \sqrt{2}$, tem-se que:

$$\boxed{f(x) = -8 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_1^3 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2^3}$$

Na execução dos algoritmos que implementam os métodos Quase-Newton, na análise dessa função, serão considerados dois pontos iniciais definidos aleatoriamente pelo aluno. Em um desses dois pontos iniciais será utilizada a técnica da seção áurea feita através da avaliação direta da função e, no outro, por meio das aproximações quadráticas para a função a cada iteração.

Tabela 8 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_1}.

Método	**Aproximações Quadráticas**				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 9 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando o ponto inicial x_{0_2}.

Método	**Avalição Direta**				
	Tempo de Processamento Médio (s)	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro f(x) (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

4.2. 2º Experimento: Avaliação das Funções Não Quadráticas

Função Analisada

A função analisada consiste na função da seção 2.2 que é apresentada novamente abaixo:

$$f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + a \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

função objetivo apresentada acima possui duas variáveis de decisão. Nesse caso, o número máximo de iterações, calculado por meio da equação (35), é igual a 400 e os

limites das variáveis de decisão definem o seguinte intervalo [-10,10]. No intuito de obter uma função não quadrática perfeita, foram considerados três valores do parâmetro ***a***, os quais são apresentados abaixo seguido da respectiva função objetivo:

$$a = -0{,}0263 \rightarrow \boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 0{,}0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)}$$

$$a = 0{,}0263 \rightarrow \boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 0{,}0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)}$$

$$a = 1 \rightarrow \boxed{f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + (x_1^3 + x_2^3)}$$

Para cada valor do parâmetro ***a*** deverão ser considerados dois pontos iniciais, dentre os quais um será executado considerando a técnica da seção áurea feita através da avaliação direta da função e o outro considerando as aproximações quadráticas para a função a cada iteração.

Vale ressaltar que o parâmetro ***a*** pondera o termo cúbico da função objetivo f(x) do problema de otimização estudado, quanto maior o valor absoluto desse parâmetro, maior é a influência do termo não quadrático na função. Para esta função os valores assumidos para parâmetro ***a*** que não comprometem a convexidade da função no intervalo [-10 , 10] estão no intervalo:

$$-0{,}0263 \leq a \leq 0{,}0263 \tag{36}$$

Tabela 10 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando $a = -0{,}0263$.

Parâmetro $a = -0,0263$					
	$x_{0_1} =$ $\Rightarrow$ Aproximações Quadráticas				
Método	**Tempo de Processamento Médio (s)**	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					
	$x_{0_2} = [-3 \quad 2] \Rightarrow$ **Avalição Direta** $f(x)$				
Método	**Tempo de Processamento Médio (s)**	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 11 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando $a = 0{,}0263$.

Parâmetro $a = 0,0263$					
	$x_{0_1} =$ $\Rightarrow$ Aproximações Quadráticas				
Método	**Tempo de Processamento Médio (s)**	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					
	Avalição Direta				
Método	**Tempo de Processamento Médio (s)**	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Tabela 12 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando $a = 1$.

Parâmetro $a = 1$					
	$x_{0_1} =$ Aproximações Quadráticas				
Método	**Tempo de Processamento Médio s**	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro x^* (%)**	**Erro $f(x^*)$ (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					
	Avalição Direta				
Método	**Tempo de Processamento Médio (s)**	**Nº de Iterações**	**Nº de Avaliações da $f(x)$**	**Erro (%)**	**Erro f(x) (%)**
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

4.3. 3º Experimento: Avaliação do Custo Computacional em Função da Variação da Dimensão

Função Analisada

A função analisada consiste na função da seção 2.4 que é apresentada aqui novamente com o parâmetro a igual a 0,0263:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^T \cdot A \cdot (x - c) + 0{,}0263 \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^3}$$

Para o experimento em questão a função objetivo é dada em 5, 10, 15, 20 e 25 dimensões. Os limites inferior e superior definem o seguinte intervalo [-10,10] para as variáveis de decisão. Como já abordado, se o parâmetro $\boldsymbol{a}$ assumir determinados valores, a função objetivo passa ser não convexa devido a expressiva influência do termo não quadrático. Dessa forma, o parâmetro $\boldsymbol{a}$ considerado nesse experimento será igual a 0,0263.

Na execução dos algoritmos será considerado apenas um ponto inicial. Será utilizada a técnica da seção áurea feita através da avaliação direta da função.

$$\text{Dimensão igual a } n \quad \Rightarrow \quad x_{0_n} = [8 \quad 8 \quad \cdots \quad 8]_{1 \times n}$$

Tabela 13 – Resultados relacionados ao esforço computacional e precisão considerando a dimensão n.

Método	Dimensão igual a 5				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Método	Dimensão igual a 10				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Método	Dimensão igual a 15				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Método	Dimensão igual a 20				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					

Método	Dimensão igual a 25				
	Tempo de Processamento Médio (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações da $f(x)$	Erro x^* (%)	Erro $f(x^*)$ (%)
DFP					
BFGS					
Huang					
Biggs					