Métodos numéricos en la Solución de un Arreglo de Resistencias

Carlos Espinoza 1, Diego Yupanqui 2, Luis Ramos 3

Facultad de Ciencias 1*, Universidad Nacional de Ingeniería* 1*, e-mail: espinoza_mansilla@hotmail.com*

Facultad de Ciencias 2*, Universidad Nacional de Ingeniería* 2*, e-mail: diego.d301095@gmail.com*

Facultad de Ciencias 3*, Universidad Nacional de Ingeniería* 3*, e-mail: lerg.10897@gmail.com*

En el mundo moderno la necesidad de equipos electrónicos se ha vuelto vital para los seres humanos por lo que es importante conocer lo mas basico de estos, es decir, el funcionamiento de sus circuitos y como estos transmiten corriente; en este articulo se vera un ejemplo practico de las leyes de kirchhoff, la ley de mallas y de nodos resueltas mediante métodos numéricos de resolución de ecuaciones, asi como también el manejo de errores en el mismo en busca de la solución exacta.

Palabras Claves: Kirchhoff,sistemas de ecuaciones, errores, matriz.

In the modern world electronic gear are become vital for the mankind, because of that is important to know basic knowledge about that,ergo, the behaviour of the circuits and how this work; in this article we will see a practice example of Kirchhoff's law, mesh law and nodes law computed by numeric methods of equations system resolution, as well as error management in pursuit of the exact solution.

Keywords: Kirchhoff, equations system, errors, matrix

1. INTRODUCCIÓN

Para diseñar cualquier circuito eléctrico, ya sea analógico o digital, los ingenieros eléctricos deben ser capaces de predecir las tensiones y corrientes de todo el circuito. Los circuitos lineales, es decir, circuitos con la misma frecuencia de entrada y salida, pueden analizarse a mano usando la teoría de los números complejos. Otros circuitos solo pueden analizarse con programas informáticos especializados o con técnicas de estimación como el método de linealización.

Los programas informáticos de simulación de circuitos, como SPICE, y lenguajes como VHDL y Verilog, permiten a los ingenieros diseñar circuitos sin el tiempo, gasto y riesgo que tiene el construir un circuito prototipo.

Si el circuito contiene componentes no lineales y reactivos, pueden necesitarse otras leyes más complejas. Su aplicación genera un sistema de ecuaciones que puede resolverse ya sea de forma algebraica o numérica.

En el presente articulo daremos una introduccion a como funcionan dichos software.

2. CONCEPTOS PREVIOS

Empezaremos estudiando algunos conceptos de resolución de circuitos:

* LEY DE OHM: Establece que la diferencia de potencial que aplicamos entre los extremos de un conductor determinado es proporcional a la intensidad de la corriente que circula por el citado conductor. La ley viene dada por la siguiente fórmula:

$$V = IR \tag{1}$$

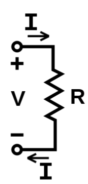

Figura 1: Circuito simple con resistencia R

* EQUIVALENCIA DE RESISTORES DE CIRCUITOS EN SERIE: cuando se tienen resistores ubicados en serie como los de la figura 4, el resistor equivalente R, tal y como se muestra en la figura 3 viene dado por:

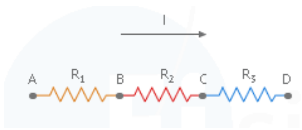

Figura 2: Circuitos en con resistencias en serie

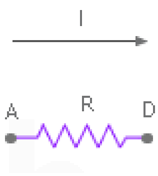

Figura 3: Circuito equivalente

* EQUIVALENCIA DE RESISTORES DE CIRCUITOS EN PARALELO: cuando se tienen resistores ubicados en paralelo como se muestran en la figura 4, el resistor equivalente R, tal y como se ve en la figura 5 viene dado por:

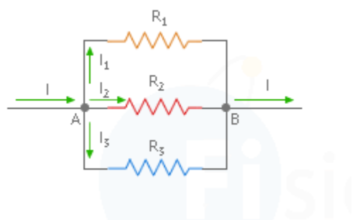

Figura 4: Circuitos con resistencias en paralelo

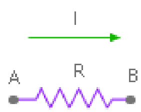

Figura 5: Circuito equivalente

* FUENTES DE PODER CON RESISTENCIA INTERNA: si tenemos un circuito con una fuente de poder que posee una resistencia interna tal como se muestra en la figura 2, mediante la ley de OHM la fuerza electromotriz vendrá dada por:

$$E = I(r + R) \tag{2}$$

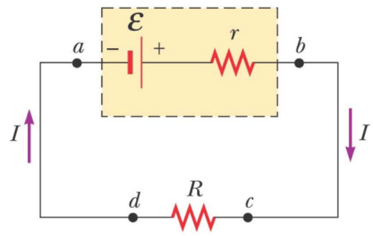

Figura 6: Circuito con resistencia interna r y resistencia externa R

* PRIMERA REGLA DE KIRCHHOFF: en cualquier nodo, la suma de las corrientes que entran en ese nodo es igual a la suma de las corrientes que salen. De forma equivalente, la suma de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero.

$$\sum_{k=0}^{n} I_k = I_1 + I_2 + I_3 \cdots + I_n = 0 \tag{3}$$

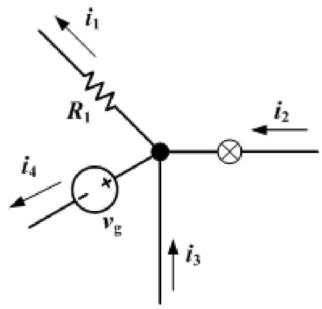

Figura 7: Nodo de circuito con corrientes entrantes y salientes

* SEGUNDA REGLA DE KIRCHHOFF: La segunda ley de Kirchhoff indica que la suma algebraica de todos los voltajes en una malla o bucle cerrado debe ser igual a cero. Expresada matemáticamente, la segunda ley de Kirchhoff se resume de la siguiente forma:

$$\sum Voltajes\ de\ bulce\ cerrado = 0 \qquad (4)$$

El siguiente circuito consta representado de la siguiente forma

3. ANÁLISIS

Se tiene un circuito con resistencias externas e internas(R_k y r_k) y fuerzas electromotriz(E_k) en la figura 1, se necesita calcular los valores de las corriente(I_k)

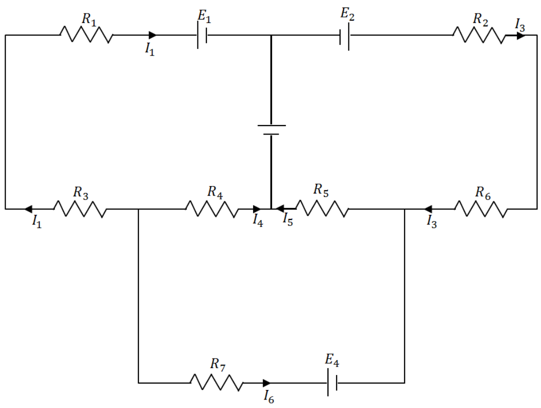

Figura 8: Circuito a resolver

Con los valores de las resistencias y voltajes en el cuadro 1.

k	$E_k(Volts)$	$r_k(\Omega)$	$R_k(\Omega)$
1	12	0.1	25
2	10	0.5	40
3			16
4	12	0.5	20
5	24	0.2	9
6			4
7			20

Cuadro 1: Valores de resistencias y voltajes

Entonces las incognitas a calcular serán las corrientes electricas I_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$

Haciendo cambios de variables:

$I_1 = I_x$
$I_2 = I_y - I_x$
$I_3 = I_y$
$I_4 = I_z - I_y$
$I_5 = I_y - I_z$
$I_6 = -I_z$

Podemos resolver ahora el circuito en mallas

Malla 1:

$-R_1 I_x - r_1 I_x - E_1 - r_5(I_x - I_y) - E_5 - R_4(I_x - I_z) - R_3 I_x = 0$

$E_1 + E_5 = I_x(-R_1 - r_1 - r_5 - R_4 - R_3) + I_y r_5 + I_z R_4$

Malla 2:

$E_5 - r_5(I_y - I_x) + E_2 - r_2 I_y - R_2 I_y - R_6 I_y - R_5(I_x - I_z) = 0$

$E_5 + E_2 = r_5(I_y - I_x) + r_2 I_y + R_2 I_y + R_6 I_y + R_5(I_y - I_z)$

$E_5 + E_2 = I_x(-r_5) + I_y(r_5 + r_2 + R_2 + R_6 + R_5) + I_z(-R_5)$

Malla 3:

$E_4 - r_4 I_z - R_7 I_z - R_4(I_z - I_x) - R_5(I_z - I_y) = 0$

$E_4 = r_4 I_z + R_7 I_z + R_4(I_z - I_x) + R_5(I_z - I_y)$

$E_4 = I_x(-R_4) + I_y(-R_5) + I_z(r_4 + R_7 + R_4 + R_5)$

De las ecuaciones resultantes de las 3 mallas, se forma un sistema de ecuaciones de 3 variables I_x, I_y e I_z. Este sistema de ecuaciones representado de la forma con los valores reemplazados según el cuadro 1:

$$\begin{aligned}
-61{,}3I_x + \quad 0{,}2I_y + \quad 20{,}0I_z &= 36{,}0 \\
-0{,}2I_x + \ 53{,}7I_y + \ -9{,}0I_z &= 34{,}0 \\
-20{,}0I_x + -9{,}0I_y + -49{,}5I_z &= 12{,}0
\end{aligned}$$

Podemos expresar el sistema de ecuaciones como:

$$x = \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} E_1 + E_5 \\ E_5 + E_2 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los valores de la tabla, obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} -61{,}3 & 0{,}2 & 20{,}0 \\ -0{,}2 & 53{,}7 & -9{,}0 \\ -20{,}0 & -9{,}0 & 49{,}5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 36{,}0 \\ 34{,}0 \\ 12{,}0 \end{bmatrix}$$

Cálculamos el número de condición de la matriz A con la norma infinita.

$$cond(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$$

De donde la norma infinita de A es

$$||A||_\infty = 98$$

Siendo la matriz inversa de A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}01806596 & 0{,}00096603 & 0{,}00536251 \\ 0{,}00096603 & 0{,}01908982 & 0{,}00276998 \\ -0{,}00536251 & 0{,}00276998 & 0{,}01640841 \end{bmatrix}$$

la norma infinita es

$$||A^{-1}||_\infty = 0{,}024540907568996767$$

Por tanto el número de condición de A es

$$cond(A) = 2{,}4050089417616833$$

A partir del número de condición se puede deducir que es el problema esta bien condicionado ya que es muy próximo a 1 con respecto a la norma infinita. La matriz aumentada $[A|B]$:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -61{,}3 & 0{,}2 & 20{,}0 & 36{,}0 \\ -0{,}2 & 53{,}7 & -9{,}0 & 34{,}0 \\ -20{,}0 & -9{,}0 & 49{,}5 & 12{,}0 \end{array}\right]$$

Ahora mostraremos dos métodos para resolver el sistema de ecuaciones plateado.

1. Método de Eliminación de Gauss

El método más conocido (y, en muchos casos, el más popular) para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales es el método de eliminación de Gauss. La idea básica de este método consiste en manipular las ecuaciones por medio de operaciones elementales para tranformar el sistema original en un sistema equivalente que sea más sencillo de resolver. Las operaciones elementales en la eliminación de Gauss son tres:

1. Multiplicación de una ecuación por una constante no cero.
2. Sustracción del múltiplo de una ecuación de otra ecuación.
3. Intercambio de ecuaciones.

Si alguna de estas operaciones se aplican a algún sistema de ecuaciones el sistema obtenido será equivalente al original. Lo mismo sucede cuando se realiza una cadena de estas operaciones. Nuestro objetivo es resolver el sistema Ax = B, entonces aplicamos el siguiente algoritmo:

for $k = 1$ hasta n **do**
  for $i = k+1$ hasta n **do**
    $m := a_{ik}/a_{kk}$
    for $j = k+1$ hasta n **do**
      $a_{ij} := a_{ij} - m a_{kj}$
    end for
    $b_i := b_i - m b_k$
  end for
end for
$x_n = b_n/a_{nn}$
for $i = n-1$ hasta 1 **do**
  $x_i := b_i$
  for $j = i+1$ hasta n **do**
    $x_i := x_i - a_{ij}x_j$
  end for
  $x_i := x_i/a_{ii}$
end for

Aplicando el método de Eliminación de Gauss $[A|B] =$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -61{,}3 & 0{,}2 & 20{,}0 & 0{,}962898 \\ 0{,}0 & 53,699347471 & 9,065252855 & 11,882544861 \\ 0{,}0 & 0 & 41,444364275 & 2,260437398 \end{array}\right]$$

De esta forma la x queda de la siguiente manera

$$x = \begin{bmatrix} -0{,}55317944 \\ 0{,}64751644 \\ 0{,}09802984 \end{bmatrix}$$

2. Método de Descomposición de Doolittle

Este algoritmo descompone las matrices regulares. La descomposición de Doolittle est estrechamente relacionada con la eliminación de Gauss. Para ilustrar la relaón, considere una matriz A de $3x3$ y suponemos que existen matrices triangulares

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

tal que $A = LU$. Después de completar la multiplicación en el lado derecho, obtenemos
$A =$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{11}L_{21} & U_{12}L_{21} + U_{22} & U_{13}L_{21} + U_{23} \\ U_{11}L_{31} & U_{12}L_{31} + U_{22}L32 & U_{13}L_{31} + U_{23}L32 + U_{33} \end{bmatrix}$$

Aplicamos el primer paso de la eliminación de Gauss a A El primer paso del procedimiento de eliminación consiste en elegir la primera fila como el pivote y aplicar las operaciones elementales.

$$Fila2 \leftarrow Fila2 - L_{21} * Fila1(EliminaA_{21})$$
$$Fila3 \leftarrow Fila3 - L_{31} * Fila3(EliminaA_{31})$$

El resultado es

$$A' = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{22}L_{32} & U_{23}U_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Ahora usaremos la segunda fila como pivote y operaremos

$$Fila3 \leftarrow Fila32 - L_{32} * Fila2(EliminaA_{32})$$

Obteniendo como resultado

$$A'' = U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Observamos que

1. La matriz U es idéntica a el resultado de usar la primera parte de la eliminación de Gauss.

2. Los elementos fuera de la diagonal de L son usados como multiplicadores durante la eliminación de Gauss en los pivotes.

De esta manera podemos encontrar y almacenar los valores no nulos de la matriz, a excepción de la diagonal) L junto con los valores no nulos de U de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} L \backslash U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21} & U_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

El siguiente algoritmo calcula la matriz $[L\backslash U]$, a partir de la matriz a como entrada, que es el producto LU.

for $k = 0$ hasta $n - 2$ **do**
  for $i = k + 1$ hasta $n - 1$ **do**
    if $a_{ik} \neq 0$ **then**
      $lam = aik/akk$
      for $j = k + 1$ hasta $n - 1$ **do**
        $lam = aij = aij - lam * aij$
      end for
      $aik = lam$
    end if
  end for
end for

Supongamos ahora que queremos resolver el sistema

$Ly = b$, se porcede de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ L_{21}y_1 + y_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ L_{k1}y_1 + L_{k2}y_2 + \ldots + L_{k,k-1}y_{k-1} + y_k &= b_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teniendo como resultado y_k

$$y_k = b_k - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} Ljky_j,\ k = 2, 3, \ldots, n$$

De manera similar se puede resolver el sistema $Ux = y$ a partir del resultado anterior.
El siguiente algoritmo resuelve estos dos sistemas, teniendo como entrada la matriz $[L\backslash U]$, resultado del algoritmo anterior, y el vector b, se tiene como resultado x .

for $k = 1$ hasta $n - 1$ **do**
  $b_k := b_k - \sum_{n=0}^{k-1} a_{kn}b_n$
end for
$b_{n-1} = b_{n-1}/a_{n-1n-1}$
for $k = n - 2$ hasta 0 **do**
  $b_k := (b_k - \sum_{n=k+1}^{n-1} a_{kn}b_n)/a_{kk}$
end for

Aplicando el método de descomposición Doolittle

La matriz $[L\backslash U]$ es:

$$\begin{bmatrix} -6{,}13000000e^{1} & 2{,}00000000^{-1} & 2{,}00000000e^{1} \\ 3{,}26264274e^{-3} & 5{,}36993475e^{1} & 9{,}06525285 \\ 3{,}26264274e^{-1} & -1{,}68814954e^{-1} & 6{,}09443643e^{1} \end{bmatrix}$$

De esta forma la x queda de la siguiente manera

$$x = \begin{bmatrix} -0{,}55317944 \\ 0{,}64751644 \\ 0{,}09802984 \end{bmatrix}$$

Los resultados de x por ambos métodos son idénticos por lo tanto usamos cualquier resultado para resolver la parte final del problema inicial.

4. OBSERVACIONES

Se observa que la matriz A formada por el sistema de ecuaciones es simétrica.
Los resultados obtenidos por ambos algoritmos son idénticos.

5. CONCLUSIONES

La matriz A no es definida positiva.
La matriz A está bien condicionada.
Es necesario cambiar la dirección de las corrientes que son negativas.
El resultado tiene un alto grado de confiabilidad.

---

1. Jaan Kiusalaas, *Numerical Methods in Engineering with Python.* Cambridge University Press **37** (2010).
2. Mathews J., Fink K, *Métodos numéricos con MATLAB.* Prentince Hall **37** (2000).
3. L.Héctor Juaréz V., *Análisis Númerico.* Universidad Autónoma Metropolitana **37** (2008).