Soluciones de Retos - Nivel II

Víctor Racsó Galván Oyola

Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274

1. Problema 1

Suponga que está en un plano cartesiano, específicamente en el punto $(0,0)$. Usted desea ir hacia el punto (n,n), pero recuerda la frase de su película favorita "Retroceder nunca, rendirse jamás", por lo que decide sólo moverse de una de las siguientes formas por cada paso:

$$(x,y) \Longrightarrow (x+1,y)$$

$$(x,y) \Longrightarrow (x,y+1)$$

Curiosamente cuando llega a su destino se pregunta: ¿De cuántas formas hubiese podido llegar hasta acá con esas condiciones? Generalice para llegar hasta (n,m) y además si es que no se puede cruzar la diagonal $y = x$.

1.1. Solución

En primer lugar, es sencillo darse cuenta de que para ir a (n,m) necesitaremos $n+m$ pasos (n horizontales y m verticales). Supongamos una asignación a un conjunto de n de las $n+m$ posiciones para las cuales se determinará un paso horizontal, dejando las restantes para los pasos verticales. Dado que los tipos de paso no son distinguibles, estamos planteando un problema de combinación de $n+m$ en n:

$$Q(n,m) = \binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$$

Esta sería la solución para las condiciones y valores dados.
Ahora veamos el caso en que no se puede cruzar la diagonal $y = x$:
Para modelar mejor este caso, podemos considerar un valor acumulado x, al cual se le suma 1 si se da un paso horizontal y se le resta 1 si se da un paso vertical; entonces, el valor acumulado de x a lo largo de todo el camino debe ser mayor o igual a 0. Inclusive esto es numéricamente equivalente a la cantidad de formas en las que se pueden usar n pareéntesis de apertura y n paréntesis de cerradura y formar una expresión correctamente balanceada. ¿Suena familiar? Sí, son los **Números de Catalán**.
En general, esta cantidad es igual a:

$$C_0 = 1$$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

2. Problema 2

Supongamos que tenemos un número primo p y elegimos un entero a tal que $1 \leqslant a \leqslant p$. Determinar cuál es la probabilidad de que se cumpla que

$$a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$$

2.1. Solución

Según el Pequeño Teorema de Fermat, se cumple siempre que

$$a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$$

Cuando p es primo y $MCD(a, p) = 1$, por lo que se cumplirá $\forall a \geqslant 1, a \in \mathbb{Z}, a \equiv M(mod\, p) \wedge M \neq 0$. De todos los números posibles en el rango, solamente $[1, p-1]$ cumplen con la propiedad, por lo que la respuesta final será

$$\frac{p-1}{p}$$

3. Problema 3

Suponga que tenemos un valor n y se va a tomar conjuntos de tamaño k de la siguiente secuencia: $A = 1, 2, \cdots, n$. Halle la esperanza del valor máximo y del valor mínimo de estos conjuntos.

3.1. Solución

En este caso, para la esperanza del valor mínimo, fijaremos el mínimo a un valor i y calcularemos su aporte a la esperanza mediante una función $f(i) = iP(X_{min} = i)$. Ahora el problema será hallar la función f.

Dado que hemos fijado el mínimo, entonces los únicos valores que podemos agrupar además de i deben ser $a_i > i$, por lo que para el rango que tenemos, esta cantidad de candidatos será $n - i$ y las formas en las que tendríamos como mínimo a i serán $\binom{n-i}{k-1}$. Por lo tanto su probabilidad será:

$$P(X_{min} = i) = \frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

Pero nos debemos dar cuenta de que $n - i \geqslant k - 1$, por lo que la función $f(i)$ tendrá la forma $f(i) = i\left(\frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}}\right)$ para $n - k + 1 \geqslant i \geqslant 1$; para el resto de valores tomará 0.

Entonces nuestra esperanza del mínimo valor será:

$$E(X_{min}) = \sum_{i=1}^{n-k+1} i\left(\frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}}\right)$$

Análogamente para el máximo, la expresión solo cambia a:

$$E(X_{max}) = \sum_{i=k}^{n} i\left(\frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}\right)$$

4. Problema 4

Suponga el siguiente juego:

> Hay n pilas, cada una con A_i elementos. Dos jugadores se turnan para quitar cantidades arbitrarias de a lo mucho $n-1$ pilas diferentes pero quitando al menos de una pila un valor no nulo. Pierde el que no puede realizar un movimiento válido.

En otras palabras, matemáticamente expresamos un movimiento válido como:

> Sea $Q = Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ la secuencia de cantidades que se les va a quitar a cada pila (Q_i elementos serán retirados de la pila de posición i). Entonces debemos garantizar que $\exists Q_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$ y $\exists Q_j \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant n$.

Petr y Tourist están haciendo una apuesta y en ella acordaron elegir aleatoriamente los tamaños de las n pilas del rango $[1, n]$. Si se sabe que Tourist jugará primero, ¿Cuál es la probabilidad de que Tourist gane la partida?

4.1. Solución

Este juego se puede plantear con un descenso constante, es decir, para cualquier jugada de algún jugador, siempre se puede llegar a un estado con características similares al inicial mediante una jugada válida.
Por ejemplo, supongamos que un jugador realiza la jugada siguiente (b_i es la cantidad de elementos que se le quita a la i-ésima pila):

$$B_{J1} = (b_1, b_2, \ldots, b_i > 0, \ldots, 0, \ldots, b_n)$$

Entonces, supongamos que el otro jugador realiza la siguiente jugada dado que $M = \text{máx}_i\, b_i > 0$:

$$B_{J2} = (M - b_1, M - b_2, \ldots, M - b_i, \ldots, M - M, \ldots, M - 0, \ldots, M - B_N)$$

Con lo que existe al menos un $b_i = 0$ en la posición del máximo y además existe un $b_j > 0$ en la posición en la que B_{J1} tiene 0.
Con esto nos damos cuenta de que cualquier estado tal que

$$a_i = C, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Se puede reducir de manera directa a 0 luego de 2 turnos, por lo que es un estado en el que el jugador actual perderá.
Nuestro problema entonces se reduce a hallar la probabilidad de que al menos un a_i sea diferente a las demás:

$$P(\text{Tourist gane}) = 1 - P(a_i = c, \forall i = 1, 2, \ldots, n, c \in [1, n])$$

Sin embargo, fijando un valor $a_1 = c$, entonces se tiene una probabilidad de $\frac{1}{n}$ de ser elegido:

$$P(a_i = c, \forall i = 1, 2, \ldots, n) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Pero necesitamos la probabilidad completa:

$$P(\text{Tourist gane}) = 1 - \sum_{c=1}^{n} P(a_i = c, \forall i = 1, 2, \ldots, n) = 1 - \sum_{c=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

5. Problema 5

Suponga el siguiente juego:

> Se colocan Q reyes en un tablero de $n \times n$ (la esquina superior izquierda es el $(1,1)$ mientras que la inferior derecha es la (n,n)), los cuales solamente pueden moverse de 3 formas:
>
> - $(x,y) \rightarrow (x-1,y)$ si es válido.
> - $(x,y) \rightarrow (x-1,y-1)$ si es válido.
> - $(x,y) \rightarrow (x,y-1)$ si es válido.
>
> Además, un movimiento es válido si, al realizarse, el rey movido termina en una posición dentro del tablero y además que no tenga un símbolo de X dentro. Puede haber más de un rey en una misma casilla.

Petr y Tourist están jugando con un generador aleatorio de estados iniciales para el juego, suponga que el tablero para este juego es: Sin embargo, Tourist le dice a Petr que sus habilidades son su-

				K		X	
K							
		X			X		X
						K	X
X							
K				X			K

periores, por lo que señala "Incluso si le digo a mi primo pequeño que haga el primer turno por mí igual lograía vencerte". Sabemos que ambos son muy competitivos y siempre realizan los movimientos óptimos para cada uno, además Tourist juega primero pero este primer movimiento será hecho por su primo (de manera aleatoria dado que apenas pudo entender las reglas del juego). ¿Cuál es la probabilidad de que Tourist gane asumiendo un primer movimiento aleatorio?

5.1. Solución

Este juego es un **Juego Imparcial** según la teoría combinatoria de juegos, por lo que podemos aplicar el teorema de Sprague-Grundy.
Según el teorema, de manera muy simple, se deben tomar todas las posiciones en las que no se puedan realizar movimientos y asignarles el valor de 0, luego a cada posición no terminal (aún no ha sido asignado un valor) se deben tomar todos los valores de las posibles jugadas siguientes a esa posición y obtener el *MEX* del conjunto formado por ellas.
En este caso, la tabla (considerando solo posiciones de juegos) se verá así.

0	1	0	1	0	1	X	0
1	2	3	2	3	2	0	1
0	3	X	0	1	X	1	X
1	2	0	1	2	0	2	X
0	3	1	2	0	1	3	0
X	1	0	3	1	2	0	1
0	2	3	1	X	0	1	2
1	3	0	2	0	1	2	0

Además el juego se puede analizar como la combinación de 5 juegos con las condiciones pero usando sólo un rey, por lo que la función que determinará si Tourist puede ganar es

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_5 = 0 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 0 \oplus 2 = 1$$

Donde $\oplus$ es el llamado BITWISE XOR.
Ahora, si esta función fuera 0 entonces la probabilidad de que Tourist gane sería nula, pero dado que es otro número, entonces sí puede ganar.
Ahora, para considerar la probabilidad debemos ver todos los posibles pasos que pueda tomar Tourist y verificar que en esos estados la función f tenga valor igual a 0.
Veamos:

Rey 1 Sólo se puede mover hacia la posición $(1, 4)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 0 \oplus 2 = 0$$

APORTE = 1

Rey 2 Sólo se puede mover hacia la posición $(1, 1)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 0 \oplus 2 \oplus 0 \oplus 2 = 1$$

APORTE = 0

Rey 3 Se puede mover hacia la posición $(3, 7)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 2 = 2$$

APORTE = 0

Se puede mover hacia la posición $(4, 6)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 2 = 3$$

APORTE = 0

Rey 4 No se puede mover

Rey 5 Se puede mover hacia la posición $(6, 8)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

APORTE = 0

Se puede mover hacia la posición $(7, 7)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

APORTE = 0

Se puede mover hacia la posición $(6, 7)$, dando lugar a:

$$f(\vec{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus, \dots, \oplus x_n = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

APORTE = 1

Por lo tanto, la probabilidad de que Tourist gane es:

$$P(\text{Tourist gane}) = \frac{\sum_{i=1}^{5} \text{APORTES}}{\text{Total de Movimientos}} = \frac{2}{7}$$

6. Anexo: Números de Catalán

Imaginemos que tenemos n pares de paréntesis (n abren y n cierran) y queremos formar una expresión con los paréntesis bien distribuidos siguiendo estas reglas de formación:

a) El vacío está correctamente balanceado

b) Si la expresión A está correctamente balanceada, entonces (A) también lo está

c) Si las expresiones A y B están correctamente balanceadas, entonces AB (concatenación) también lo está.

Siguiendo esas reglas, podemos plantear una función C_{n+1} que da la cantidad de expresiones con las reglas anteriores y E_{n+1} el conjunto que las contiene, que devuelva la cantidad de expresiones válidas con $(n+1)$ pares de paréntesis, con lo cual podemos llegar a lo siguiente:
Supongamos que tomamos solamente n pares y hacemos una partición de una expresión E_n en la unión de dos expresiones E_i y E_{n-i}, entonces es necesario notar que la única posición a la que se le puede asignar el par restante es de la forma (C_iC_{n-i}), esto porque se da que:

$$(E_iE_{n-i}) = E_i()E_{n-i} = (E_i)E_{n-i} = E_i(E_{n-i})$$

Lo que significa que aparentemente una suma de las posiciones posibles para el par restante aportaría 4 veces lo que en realidad es correcto. Ahora es sencillo ver que:

$$E_{n+1} = (E_iE_{n-i}),\ \forall i = 0, 1, \ldots, n$$

Por lo tanto, si pasamos a combinatorias de los conjuntos, tenemos:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i}$$

Dado que $C_i = |E_i|$.