Problemas de Práctica

Víctor Racsó Galván Oyola

Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274

1. Nivel 1

1.1. Problema 1

Probar que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.2. Problema 2

Probar que la cantidad de permutaciones con reemplazo de tamaño k tomadas de un conjunto de tamaño n está dada por

$$\binom{n+k-1}{k}$$

1.3. Problema 3

Probar que

$$P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}$$

1.4. Problema 4

Halle el error en la siguiente prueba:
Una familia tendrá 2 hijos y queremos determinar la probabilidad de que los dos sean varones. Tenemos las siguientes situaciones:

1. Que sean 2 varones
2. Que sean 2 mujeres
3. Que sean 1 varón y 1 mujer

Dado que tenemos 1 solo caso a favor y son 3 casos en total, entonces la probabilidad de que ambos sean varones es $\frac{1}{3}$.

1.5. Problema 5

Demostrar el Principio Inclusión-Exclusión Generalizado.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ |I|=k}} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

2. Nivel 2

2.1. Problema 1

Suponga que está en un plano cartesiano, específicamente en el punto $(0,0)$. Usted desea ir hacia el punto (n,n), pero recuerda la frase de su película favorita "Retroceder nunca, rendirse jamás", por lo que decide sólo moverse de una de las siguientes formas por cada paso:

$$(x,y) \Longrightarrow (x+1,y)$$

$$(x,y) \Longrightarrow (x,y+1)$$

Curiosamente cuando llega a su destino se pregunta: ¿De cuántas formas hubiese podido llegar hasta acá con esas condiciones? Generalice para llegar hasta (n,m) y además si es que no se puede cruzar la diagonal $y=x$.

2.2. Problema 2

Supongamos que tenemos un número primo p y elegimos un entero a tal que $1 \leqslant a \leqslant p$. Determinar cuál es la probabilidad de que se cumpla que

$$a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$$

2.3. Problema 3

Suponga que tenemos un valor n y se va a tomar conjuntos de tamaño k de la siguiente secuencia: $A = 1, 2, \cdots, n$. Halle la esperanza del valor máximo y del valor mínimo de estos conjuntos.

2.4. Problema 4

Suponga el siguiente juego:

Hay n pilas, cada una con A_i elementos. Dos jugadores se turnan para quitar cantidades arbitrarias de a lo mucho $n-1$ pilas diferentes pero quitando al menos de una pila un valor no nulo. Pierde el que no puede realizar un movimiento válido.

En otras palabras, matemáticamente expresamos un movimiento válido como:

Sea $Q = Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ la secuencia de cantidades que se les va a quitar a cada pila (Q_i elementos serán retirados de la pila de posición i). Entonces debemos garantizar que $\exists Q_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$ y $\exists Q_j \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant n$.

Petr y Tourist están haciendo una apuesta y en ella acordaron elegir aleatoriamente los tamaños de las n pilas del rango $[1,n]$. Si se sabe que Tourist jugará primero, ¿Cuál es la probabilidad de que Tourist gane la partida?

2.5. Problema 5

Suponga el siguiente juego:

Se colocan Q reyes en un tablero de $n \times n$ (la esquina superior izquierda es el $(1,1)$ mientras que la inferior derecha es la (n,n)), los cuales solamente pueden moverse de 3 formas:

- $(x,y) \rightarrow (x-1,y)$ si es válido.
- $(x,y) \rightarrow (x-1,y-1)$ si es válido.

- $(x, y) \to (x, y-1)$ si es válido.

Además, un movimiento es válido si, al realizarse, el rey movido termina en una posición dentro del tablero y además que no tenga un símbolo de X dentro. Puede haber más de un rey en una misma casilla.

Petr y Tourist están jugando con un generador aleatorio de estados iniciales para el juego, suponga que el tablero para este juego es: Sin embargo, Tourist le dice a Petr que sus habilidades son su-

				K		X	
K							
		X			X		X
						K	X
X							
K				X			K

periores, por lo que señala "Incluso si le digo a mi primo pequeño que haga el primer turno por mí igual lograía vencerte". Sabemos que ambos son muy competitivos y siempre realizan los movimientos óptimos para cada uno, además Tourist juega primero pero este primer movimiento será hecho por su primo (de manera aleatoria dado que apenas pudo entender las reglas del juego). ¿Cuál es la probabilidad de que Tourist gane asumiendo un primer movimiento aleatorio?