**Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística**
**CM -274**

# Práctica dirigida 3

1. Supongamos que $X$ es variable aleatoria distribuida normalmente con media $\mu(>0)$ y con varianza $\sigma^2 = 1$. Si

$$g(X) = e^{X^2/2} \int_X^\infty e^{-t^2/2} dt,$$

   Deriva una expresión explícita para $\mathbb{E}(g(X))$.

2. Sea $X$ una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

   Prueba que $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ converge si $0 < \alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

3. Sea X una variable aleatoria discreta. Sea $0 < s < r$. Demuestra que si existe el r- ésimo momento absoluto de $X$, entonces también existe el momento absoluto de orden $s$ de $X$.

4. Sea $X$ una variable aleatoria que toma valores enteros no negativos y es asociado con una transformada de la forma:

$$M_X(s) = c \cdot \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s},$$

   donde $c$ es un escalar. Encuentra $\mathbb{E}(X)$, $p_X(1)$ y $\mathbb{E}(X|X \neq 0)$.

5. Sea $X$ una función generadora de momentos $M(t)$.

   - Muestra que $M(t)M(-t)$ es la función generadora de momentos de $X - Y$, donde $Y$ es independiente de $X$ , pero que tiene la misma distribución.
   - De manera similar, describe las variables aleatorias que tienen funciones generadoras de momentos

$$\frac{1}{2 - M(t)}, \qquad \int_0^\infty M(ut)e^{-u} du.$$

6. Se define la función generadora de momentos de una variable aleatoria $X$ a la función $M_X = G_X(e^t)$

   (a) Prueba que para una variable aleatoria Poisson de parámetro $\lambda$ se tiene:

$$M(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

   (b) Sea $p_r > 0$ y $a_r \in \mathbb{R}$ para $1 \leq r \leq n$. ¿ Cuál de las siguientes expresiones es una función generadora de momentos y para que variable aleatoria?

$$M(t) = 1 + \sum_{r=1}^n p_r t^r \qquad M(t) = \sum_{r=1}^n p_r e^{a_r t}.$$

(c) Sea $X$ una variable aleatoria geométrica con parámetro $p$. Muestra que la función generadora de momentos de $X$, es dada por:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}, \quad q = 1-p, \quad t < -\ln q$$

Usa $M_X(t)$ para encontrar $\mathbb{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

7. Muestra que cada una de las siguientes familias es una familia exponencial.
   - familia normal con el parámetro $\mu$ o $\sigma$ conocido
   - familia gamma con el parámetro $\alpha$ o $\beta$ conocido o ambos desconocidos
   - familia beta con el parámetro $\alpha$ o $\beta$ conocido o ambos desconocidos
   - familia Poisson
   - familia binomial negativa con $r$ conocido, $0 < p < 1$.

8. Para cada una de las siguentes familias: (a) verifica que es una familia exponencial, $(b)$ describe la curva en la que se encuentra el vector de parámetro $\theta$, (c) realiza un gráfico del espacio de parámetros.
   - $N(\theta, \theta)$
   - $N(\theta, a\theta^2)$, $a$ conocido.
   - Gamma$(\alpha, 1\alpha)$
   - $f(x|\theta = C\exp\left(-(x-\theta)^4\right)$, $C$ una constante de normalización.

9. Sea $X$ que tiene una distribucíon uniforme en el intervalo $(0, \theta)$ con $\theta > 0$. Verifica que esta distribución no pertenece a la familia exponencial de un sólo paramétro.

10. El PDF conjunto de $X_1, X_2$ es

$$f(x_1, x_2) = \exp\{-\theta x_1 - \theta^{-1} x_2\} I_{(x_1>0 \cap x_2>0)}$$

con $\theta(>0)$ desconocido.
   - ¿Son $X_1, X_2$ independientes?
   - ¿ Este PDF pertenece a la familia exponencial de un sólo paramétro?.

11. Considera el PDF $f(x) = \dfrac{63}{4}(x^6 - x^8), -1 < x < 1$. Grafica $(1/\sigma)f((x-\mu)/\sigma)$ para cada uno de los siguientes en los mismos ejes.
   - $\mu = 0, \sigma = 1$
   - $\mu = 3, \sigma = 1$
   - $\mu = 3, \sigma = 2$

12. Muestra que si $f(x)$ es un PDF, simétrico alrededor del 0, entonces $\mu$ es la mediana del PDF de escala-localización $(1/\sigma)f((x-\mu)/\sigma)$, $-\infty < x < \infty$.

13. Sea $f(x)$ el PDF con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Muestra como crear una familia escala-localización basado en $f(x)$ tal que el PDF estándar de la familia, $f^*(x)$ tiene media 0 y varianza 1.

14. Sea $Z$ una variable aleatoria con PDF $f(z)$. Definimos $z_\alpha$ el número que satisface la siguiente propiedad

$$\alpha = \mathbb{P}(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} f(z)dz.$$

Muestra que si $X$ es una variable aleatoria con PDF $(1/\sigma)f((x-\mu)/\sigma)$ y $x_\alpha = \sigma_\alpha + \mu$, entonces $\mathbb{P}(X > x_\alpha) = \alpha$. (Así si una tabla de valores fuera disponible, entonces valores de $x_\alpha$ podrian ser calculados por algún miembro de la familia escala-localización).

15. • Para un modelo jerárquico

$$Y|\Lambda \sim \text{Poisson}(\Lambda) \text{ y } \Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

encuentra la distribución marginal, media y varianza de $Y$.Muestra que la distribución marginal de $Y$ es una binomial negativa si $\alpha$ es un entero.

• Muestra el modelo de tres escenarios

$$Y|N \sim \text{Binomial}(N, p),\ N|\Lambda \sim \text{Poisson}(\Lambda) \text{ y } \Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

conduce a la misma distribución marginal de $Y$.

16. Una generalización de la jerarquía de ensayos de Bernoulli es permitir que la probabilidad de éxito varíe de una prueba a otra, manteniendo los ensayos independientes. Un modelo estándar para esta situación es

$$\begin{aligned} X_i|P_i &\sim \text{Bernoulli}(P_i),\ i = 1, \ldots, n, \\ P_i &\sim \text{Beta}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Este modelo podría ser apropiado, por ejemplo, si estamos midiendo el éxito de un medicamento en $n$ pacientes y dado que los pacientes son diferentes, somos reacios a suponer que las probabilidades de éxito son constantes (Esto puede ser pensado como un modelo empírico Bayesiano).

Una variable de interés es $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, el número total de éxitos.

• Muestra que $\mathbb{E}Y = n\alpha/(\alpha + \beta)$.

• Muestra que el valor de la varianza de $Y$ es $n\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$ y así $Y$ tiene la misma media y varianza que una variable Binomial($n$, $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta)}$.¿ Cuál es la distribución de $Y$?

• Supongamos ahora que el modelo es

$$\begin{aligned} X_i|P_i &\sim \text{Binomial}(n_i, P_i),\ i = 1, \ldots, k, \\ P_i &\sim \text{Beta}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Muestra que para $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $\mathbb{E}Y = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \sum_{i=1}^{k} n_i$ y $\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{k} \text{Var}X_i$, donde

$$\text{Var}X_i = n_i \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta+n_i)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

17. Es requerido estimar $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ donde $0 \le g(x) \le 1$ para todo $x$. Sean $X$ y $Y$ variables aleatorias independientes con función densidad común $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ en otros casos. Sea $U = I_{\{Y \le g(X)\}}$, la función indicador del evento que $Y \le g(X)$ y sea $V = g(X)$, $W(X) = \dfrac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}$.

Muestra que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = J$ y que $\text{Var}(W) \le \text{Var}(V) \le \text{Var}(U)$. Prueba que $W$ es el estimador más eficiente de $J$.