1. $f_1(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{2}$ $\qquad f_2(x)=\dfrac{\sin bx}{x}+cx$

$\underset{在x=0}{f(x)}$ 可导 $\Rightarrow$ $\underset{在x=0.}{f(x)}$ 连续.

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}\right)=1=f(0)=a.$$

等价量或洛必达

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sin bx}{x}+cx\right)=b$$

$\Rightarrow a=b=1$

$f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f_1(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$$

$\downarrow$ 洛必达

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}+\frac{1}{2}$$

$\downarrow$ 洛必达

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}+\frac{1}{2}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f_2(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\sin bx}{x}+cx-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}+c \overset{洛必达}{=} \lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-1}{2x}+c \overset{洛必达}{=\!=} \lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{2}+c$$

$=c$

$\Rightarrow c=0$

综上 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$

2 (1) $x_{n+1}-x_n=\frac{1-x_n^2}{x_n+3}$　　$x_{n+1}=3-\frac{8}{x_n+3}$

只要做了证明，无论是否分类，均给满分，否则，0分

考虑 $x_{n+1}-x_n$ 的符号.

① $x_n>1 \Rightarrow \{x_n\}\downarrow$

$x_{n+1}-x_n<0$

$x_{n+1}>3-\frac{8}{1+3}=1 \Rightarrow$ 当 $x_n>1$ 时 $x_{n+1}>1$

$\Rightarrow$ 取 $x_0>1 \Rightarrow x_n>1$ 有下界 $\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛.

② $-1<x_n<1 \Rightarrow \{x_n\}\uparrow$

$x_{n+1}-x_n>0$

当 $-1<x_n<1$ 时　$-1<x_{n+1}<1$

$\Rightarrow$ 取 $-1<x_0<1$ 时　$x_n<1$，有上界. $\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛.

~~③ $-3<x_n<-1 \Rightarrow \{x_n\}\downarrow$.~~

~~取 $-3<x_0<-1$~~

③ $x_n<-3 \Rightarrow \{x_n\}\uparrow$

当 $x_n<-3$ 时 $x_{n+1}>1$，回到①

即取 $x_0<-3$ 时 $x_1>1$，$\Rightarrow x_n>1$ 且 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)\downarrow$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛.

④ $-3<x_n<-1$　$\{x_n\}\downarrow$

取 $-3<x_0<-1$，经若干次迭代后，$\exists k$ $x_k<-3 \longrightarrow x_{k+1}>1$，回到①.

$\Rightarrow \{x_n\}(n=k+1,k+2,\cdots)\downarrow$ 有下界 $\Rightarrow$ 收敛.

⑤ 考虑 $x_0=-1$ 及 $x_0=1$，易知.

$x_0=\frac{3x_0+1}{x_0+3}$，即 $x_0=\pm1$ 为不动点，$\Rightarrow$ ~~$x_n\equiv\pm1$~~ $x_n\equiv1$ 或 $x_n\equiv-1$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛.

$\Rightarrow$ 令 $\{x_n\}\longrightarrow a$.　　$a=\frac{3a+1}{a+3} \Rightarrow a=\pm1$

$\Rightarrow \begin{cases} \rightarrow -1 & x_0=-1 \\ \rightarrow 1 & x_0\neq-3,-1 \end{cases}$

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (2′)

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<0$$

$\Rightarrow \{a_n\}\downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=-2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}$$

(3′)

$$\Rightarrow a_n>-2+2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$$
$$=-2+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=-2+\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>-2$$

$\Rightarrow \{a_n\}$有下界

$\Rightarrow \{a_n\}$收敛

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\frac{k}{n}$.

(3′)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\cos x\,dx$$ 分部积分

$$=\sin 1+\cos 1-1$$ (2′)

T4 (1) $f(t)=\left|\int_0^{\arcsin t}\sec x\,dx\right|$ $\quad f'(t)=\begin{cases}\dfrac{\sec(\arcsin t)}{\sqrt{1-t^2}} & (0<t<1)\\ -\dfrac{\sec(\arcsin t)}{\sqrt{1-t^2}} & -1<t<0\end{cases}$

$f'(t)=\begin{cases}1/(1-t^2) & 1>t>0\\ -1/(1-t^2) & -1<t<0\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\quad \sec(\arcsin t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

(5')

(2) $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| & (0\le t<1)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| & (-1<t<0)\end{cases}$ (5')

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{6}}\frac{1}{2n+1}\sec\frac{t}{n}\,dt \xlongequal{\frac{t}{n}=x} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx \quad (5')$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4}\ln 3$$

T5 对$f(x)$的取值进行分类

① 若$f(x)\equiv 0$，则对$\forall\xi\in(0,1)$ $f(\xi)=\xi$ (3')

② 若$f(x)\not\equiv 0$，则

$M=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)>0$ 且 $\int_0^1 f(x)dx>0$.

令 $F(x)=f(x)-\int_0^x f(t)\,dt$ (2')

注，若对$F(0)$的取值进行分类，要注意$F(0)=0$时，$f(x)\equiv 0$.

$F(1)=f(1)-\int_0^1 f(t)\,dt<0$

设$x_M\in[0,1]$ st $f(x_M)=M$

则 $F(x_M)=M-\int_0^{x_M}f(t)dt\begin{cases}=M\overset{>0}{} & x_M=0\\ \geq(1-x_M)M & x_M>0\end{cases}$

$\Rightarrow\exists$一点，$\xi\in(x_M,t)$，(5')

st $F'(\xi)=0$

即 $\int_0^{\xi}f(t)\,dt=f(\xi)$