2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学（二）

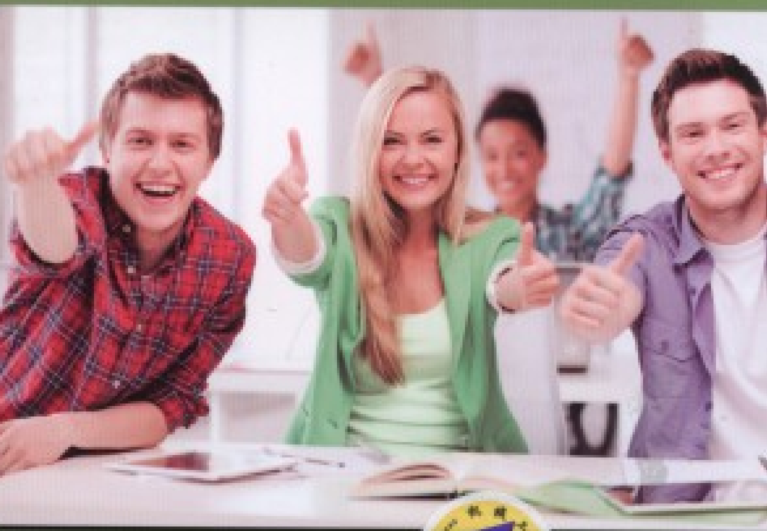
名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题

难易匹配真题

符合命题趋势



不止是模拟，更接近实战

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学(二)名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学二”考试的学生。书中包含了10套精心设计的模拟试题，题目难度稍高于考研真题。这些题目大部分为首次公开发布，并且非常适合考生用来检验复习效果以及进行临考重点复习。本书的解答部分，不仅给出了详尽的解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习。

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的教学人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（二）名师精选．全真模拟冲刺题10套/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015.5

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-48612-1

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第269247号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　韩效杰
版式设计：霍永明　责任校对：任秀丽
封面设计：路恩中　责任印制：刘　岚
北京京丰印刷厂印刷
2015年4月第2版·第1次印刷
184mm×260mm·12印张·290千字
0 001—3 000册
标准书号：ISBN 978-7-111-48612-1
定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
010-88379203	金 书 网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

前　　言

深入地读完我们编写的2016年全国硕士研究生入学统一考试备考用书（包括认真地推演了其中的每道例题和练习题）的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是，为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行10场“实战演习”——认真、独立地做完10套模拟试题，其中，各套模拟试题的难度稍高于考研真题，作为最后的冲刺.

书中的10套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出．其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这10套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的语言指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点．当然，我们在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看解答，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进发. 使用本书的实践表明：弄通模拟试题，不想拿高分都难.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，并欢迎对本书提出宝贵意见，可发邮件到cqhshuxue@gmail.com，非常感谢!

北京邮电大学教授　陈启浩

目　　录

模拟试题(一)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{(\mathrm{e}^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}, & -\pi<x<0,\\ x^2+x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$的可去间断点个数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

[　　]

（2）使函数$f(x)=x\ln(x+a)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$仅有单调减少区间$\left(0,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$的常数$a$为

（A）-2.　　（B）-1.　　（C）0.　　（D）1.

[　　]

（3）设函数$f(x)$在$[a,\ +\infty)$上二阶可导，$b\in(a,\ +\infty)$，且$f(a)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则方程$f''(x)=0$在$[a,\ +\infty)$上

（A）至少有一个实根.　　（B）至少有两个实根.

（C）恰好有一个实根.　　（D）恰好有两个实根.

[　　]

（4）设函数$f(x)$连续，且$f(0)=f'(0)=0$，记

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u, & x\leqslant 0,\\ \int_{-x}^0\ln(1+f(x+t))\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$$

则$F''(0)$为

（A）1.　　（B）$\dfrac{1}{2}$.　　（C）$\dfrac{1}{3}$.　　（D）0.

[　　]

（5）设二元函数$f(u,\ v)$有连续的偏导数，$z=f(\mathrm{e}^x\sin y,\ \mathrm{e}^x\cos y)$，其中$y=y(x)$是微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\sin x$满足$y(0)=-\dfrac{1}{2}$的解，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$为

（A）$(\mathrm{e}^x\sin y+\mathrm{e}^x\cos y)f_u'(u,\ v)+(\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{e}^x\sin y)f_v'(u,\ v)$(其中$u=\mathrm{e}^x\sin y$，$v=\mathrm{e}^x\cos y$).

（B）$(\mathrm{e}^x\sin y+\mathrm{e}^x\cos y)f_u'(u,\ v)+(\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{e}^x\sin y)f_v'(u,\ v)$ (其中$u=\mathrm{e}^x\sin y$，$v=$

$e^x\cos y$，$y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos y)\Big)$.

(C) $\left[e^x\sin y+e^x\cos y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]f_u'(u,\ v)+\left[e^x\cos y-e^x\sin y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]$ $\cdot f_v'(u,\ v)$(其中 $u=e^x\sin y$，$v=e^x\cos y$).

(D) $\left[e^x\sin y+e^x\cos y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]f_u'(u,\ v)+\left[e^x\cos y-e^x\sin y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]$ $\cdot f_v'(u,\ v)\left(\text{其中 } u=e^x\sin y,\ v=e^x\cos y,\ y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\right)$.

[　　]

(6) 设 D 是由曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线 $x=2$ 围成的平面图形，则二重积分 $\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 为

(A) $\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C) $3\sqrt{3}$.　　(D) 0.

[　　]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 n 为奇数的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

[　　]

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)$ 为

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=$ ________.

(10) 设函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ x\ln x, & x>1,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & |x|\leqslant 1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的曲率为________.

(12) 设二元函数 $f(u,\ v)$ 具有连续偏导数，且在点 $(1,\ 0)$ 的充分小领域内，$f(u,\ v)=1-u-2v+o\left(\sqrt{(u-1)^2+v^2}\right)$. 记 $g(x,\ y)=f(e^y,\ x+y)$，则 $\mathrm{d}g(x,\ y)\Big|_{(0,0)}=$ ________.

(13) 设二元函数 $f(x,\ y)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 在直角坐

标系中先 x 后 y 的二次积分为________.

(14) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 4 阶矩阵 $\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \hdashline A & C^{*}\end{array}\right)^{-1}=$ ________.

三、解答题: 15 ~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}\right)\arctan\dfrac{1}{x}$.

(16)(本题满分 10 分)

求由直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 围成的平面图形 D 分别绕直线 $y=1$ 和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积.

(17)(本题满分 10 分)

分别求 $a=1$ 与 $a=2$ 时，微分方程 $y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$ 的通解.

(18)(本题满分 10 分)

设二元函数 $z=z(x,\ y)$ 满足 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y,\\ z(x,\ 0)=x^2,\\ z(0,\ y)=y^2.\end{cases}$ 记 $w=z(x+y,\ x-y)$，求全微分 $\mathrm{d}w$.

(19)(本题满分 11 分)

设二重积分 $\iint\limits_D r^2\sin\theta\ \sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 在直角坐标系中的被积函数为 $f(x,\ y)$，其中 $D=\left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$，求 $f(x,\ y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

(20)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：当 $|x|$ 充分小时，有 $x^2 \leqslant \tan^2 x \leqslant x^2 + x^4$；

(Ⅱ)设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tan^2 \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ $(n=1, 2, \cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上 2 阶可导，且满足 $\max\{|f(x)|, |f''(x)|\} \leqslant 1$. 证明 $|f'(x)| \leqslant 2\ (x \in [0, 2])$.

(22)(本题满分 11 分)

设向量组(A):$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 与向量组(B):$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 等价,求

(Ⅰ)常数 a;

(Ⅱ)(A)由(B)的线性表示式.

(23)(本题满 11 分).

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$,正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形,其中正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,求

(Ⅰ)常数 a 及 f 的标准形;

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^*$ 能否正交相似对角化?如果能,写出使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$;如果不能,说明理由.

模拟试题(二)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸的指定位置上.

(1) 设 $y=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$，则 $y^{(10)}$ 为

(A) $\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

(B) $\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

(C) $\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

(D) $\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

[　　]

(2) 设函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\ln^2(1+t), \\ y=(e^t-1)^2, \end{cases}$ 且 $\dfrac{dy}{dx}$ 在 $t=0$ 处连续，则 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big|_{t=0}$ 为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(3) $y\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}$ 是函数 $y=x|\ln x|$ 的

(A) 最大值.　　(B) 最小值.　　(C) 极大值.　　(D) 极小值.

[　　]

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\sqrt{1-\sin^2x}\,dx=$

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $-\dfrac{1}{4}$.　　(C) $-\dfrac{3}{4}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

[　　]

(5) 设二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1$，$f_y'(0,0)=2$，则

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(B) $df(x,y)\Big|_{(0,0)}=dx+2dy$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,x)-f(0,0)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}f_x'(0,0)+f_y'(0,0)$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=f_x'(0,0)$.

[　　]

(6) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$, $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$, $f(x)$是连续函数，则以下等式正确的为

(A) $\iint\limits_D[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(B) $\iint\limits_D[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(C) $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(D) $\iint\limits_D f(x^2)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x^2)\mathrm{d}\sigma$.

[　　]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$阶可逆矩阵，则$(\boldsymbol{A}^*)^*=$

(A) $\boldsymbol{A}$.　　(B) $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　(C) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.　　(D) $\boldsymbol{A}^*$.

[　　]

(8) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，则下列选项中为正定矩阵的是

(A) $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$.　　(B) $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$.　　(C) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 不定积分 $\int\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=$________.

(10) 定积分 $\int_{-1}^{2}\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=$________.

(11) 曲线 $\begin{cases}x=t,\\ y=t+\dfrac{1}{2}t^2\end{cases}$ 在点$(0,0)$处的曲率圆面积为________.

(12) 设二元函数 $z=\begin{cases}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\ln x}, & x\geqslant 1,\ 0<y<+\infty,\\ \ln(x^{\ln 2})+y^2-3, & x<1,\ 0<y<+\infty,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=$________.

(13) 设 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, x\leqslant y\}$, 则 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = =$________.

(14) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r((\boldsymbol{A}^2)^*)=$________.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，记

$$g(t)=\lim_{x\to 0}\left[1+\sqrt[3]{\sin t}f(x)\right]^{\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\ln(1+x)}},$$

求 $g'(0)$.

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$满足 $e^x f(x)+2e^{\pi-x}f(\pi-x)=3\sin x$，求$f(x)$在$(0,\pi)$内的极值.

(19)(本题满分 11 分)

设函数$f(x)$在$[0,1]$上 3 阶可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=f'(1)=1$. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f^{(3)}(\xi)=0$.

(20)(本题满分 10 分)

设二元函数$f(x,\ y)=x\sqrt{y}+\dfrac{12}{\pi^3}\iint\limits_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant x^2\}$. 记$g(x)=f(\sin^2x,\ x^4)$，求$g(x)$的带拉格朗日型余项的 6 阶麦克劳林公式.

(21)(本题满分 11 分)

设二元连续函数$z=z(x,\ y)$由方程$2x^2+2y^2+z^2-8z+8=0$确定，求$z=z(x,\ y)$在平面区域$D=\{(x,\ y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}$上的最大值与最小值.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$，求使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的常数 a，b，c，并求该方程的所有解.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&2\\1&2\end{pmatrix}$，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{Q}$ 是 3 阶正交矩阵)，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 化为标准形，并写出该标准形.

模拟试题(三)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上

(A) 处处可导.　　(B) 恰好有一个不可导点.

(C) 恰好有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

[　　]

(2) 记 $F(x)=\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\,\mathrm{d}t$，则 $F''(x)$ 为

(A) $4\sin 4x$.　　(B) $-4\sin 4x$.　　(C) $4\cos 4x$.　　(D) $-4\cos 4x$.

[　　]

(3) 方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\tan^3 x}\mathrm{d}x$ 的正根个数为

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

[　　]

(4) 曲线 $y=\dfrac{1}{x(x+1)}+x\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(5) 设二元函数数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内具有 2 阶连续偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则以下结论不正确的是

(A) 当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值.

(B) 当 $C>0$，$AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值.

(C) 当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(D) 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

[　　]

(6) 微分方程 $y''+2y'+2y=\int_0^x \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$ 有特解

(A) $-\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^x\cos x+\dfrac{1}{4}$.　　(B) $\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^x\cos x+\dfrac{1}{4}$.

(C) $-\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^x\sin x+\dfrac{1}{4}$.　　(D) $\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^x\sin x+\dfrac{1}{4}$.

[　　]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶可逆矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则分块矩阵

$\begin{pmatrix} O & (2A)^* \\ (3B)^{-1} & O \end{pmatrix}^{-1}$ 等于

(A) $\begin{pmatrix} O & \frac{1}{4}A \\ 3B & O \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 3B & O \\ O & \frac{1}{4}A \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & \frac{1}{4}B \\ 3A & O \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} O & 3B \\ \frac{1}{4}A & O \end{pmatrix}$.

[ ]

(8) 已知矩阵 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 及 3 阶非零矩阵 P 满足 $PQ = O$，则

(A) $t = 6$ 时，$r(P) = 1$. (B) $t = 6$ 时，$r(P) = 2$.

(C) $t \neq 6$ 时，$r(P) = 1$. (D) $t \neq 6$ 时，$r(P) = 2$.

[ ]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}} =$ ________.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x) = x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

(11) 设 $z = f(\mathrm{e}^x, x^2 + y^2)$，其中二元函数 $f(u, v)$ 可微，且 $y = y(x)$ 是由 $\mathrm{e}^x + \sin y = x$ 确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} =$ ________.

(12) 微分方程 $(x\cos y + \cos x)y' - y\sin x + \sin y = 0$ 的通解为________.

(13) 设函数 $f(x, y)$ 连续，则 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$（其中 D 是由曲线 $y = x^2(x \leqslant 0)$ 直线 $x + y = 2$ 以及 x 轴围成的平面区域）在极坐标系下，先 r 后 θ 的二次积分为________.

(14) 设 A，B 都是 4 阶矩阵，它们相似，且 A 的特征值为 -2，-1，1，2，则行列式 $|B^* - E_4| =$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答题写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数$f(u)$在点 $u=1$ 处可导，且$f'(1)=1$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot\left(\sqrt{1+x}-1\right)}.$$

(16)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+y=5\mathrm{e}^{2x}+2\sin x$ 的通解.

(17)(本题满分 10 分)

设数列$\{a_n\}$由递推式$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)$($n=1$，2，…)确定，求以下极限：

(Ⅰ)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$(记为$a$)；

(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-1)}}$.

(18)(本题满分 10 分)

设二元连续函数$f(x,y)$满足$f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+x+3y\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由曲线$y=x^2$与直线$x=1$及$x$轴围成的平面图形，求$f(x,y)$以及$z=f(x^y,y^x)$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导，且 $0<f(x)<1$ 及 $f'(x)=1$，证明：存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $z=z(x, y)$ 是由方程 $2x^2+2y^2+z^2+4xz+2z+3=0$ 确定的隐函数，求 $z(x, y)$ 的极值.

(21)(本题满分 11 分)

设二元函数$f(x,\ y)=\begin{cases} x\ln x, & x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & 1<x+y\leqslant 2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \end{cases}$求二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,\ y)\mid x+y\leqslant 2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

(22)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=2, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0, \end{cases}$ 有两个不同的解,且 a 为系数矩阵的秩,求其通解及向量$\boldsymbol{\xi}=(a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\eta}_1=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_3=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$下的坐标.

(23)(本题满分 11 分)

已知$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3\,(c\geqslant 2)$与$g(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+x_3^2$中有且仅有一个是正定二次型，求常数$c$及用可逆线性变换将正定二次型化为规范形，用正交变换将非正定二次型化为标准形.

模拟试题(四)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 可导，则

(A) 若 $f(x)$ 只有一个零点，则 $f'(x)$ 必至少有两个零点.

(B) 若 $f'(x)$ 只有一个零点，则 $f(x)$ 必至少有两个零点.

(C) 若 $f(x)$ 没有零点，则 $f'(x)$ 至少有一个零点.

(D) 若 $f'(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有一个零点.

[　　]

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，$x_0 \neq 0$，$f(x_0) \neq 0$，且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则

(A) $f''(x_0) = 0$.

(B) $(x_0, -f(x_0))$ 是曲线 $y = -f(x)$ 的拐点.

(C) $(-x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(-x)$ 的拐点.

(D) $(-x_0, -f(x_0))$ 不是曲线 $y = -f(-x)$ 的拐点.

[　　]

(3) 对于定积分 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)\,\mathrm{d}x, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 有

(A) $I_1 < I_2$.　　(B) $I_1 < I_3$.　　(C) $I_3 < I_2$.　　(D) $I_3 < 1$.

[　　]

(4) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

(A) 收敛于0.　　(B) 收敛于1.　　(C) 收敛于 -1.　　(D) 发散.

[　　]

(5) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 则有

(A) $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.　　(B) $f''_{xy}(0, 0) > f''_{yx}(0, 0)$.

(C) $f''_{xy}(0, 0) < f''_{yx}(0, 0)$.　　(D) $f''_{xy}(0, 0)$ 与 $f''_{yx}(0, 0)$ 中至少有一个不存在.

[　　]

(6) 设二元函数 $f(x, y)$ 连续，记二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 对应的二重积分的积分区域为 D，则 D 的边界上与直线 $y = x - 1$ 平行的切线方程为

(A) $y = x - \frac{3}{4}$.　　(B) $y = x + \frac{3}{4}$.　　(C) $y = x - \frac{1}{2}$.　　(D) $y = x + \frac{1}{2}$.

[　　]

(7) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, -4, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 5, 4, t+2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-2, -8, 2, t)^{\mathrm{T}}$ 有以下结论：

①$t=2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；　②$t=2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关；

③$t=3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；　④$t=3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

则正确结论为

(A) ①③.　(B) ②③.　(C) ①④.　(D) ②④.

[　　]

(8) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&-b-1\\1&0&0\end{pmatrix}$都可相似对角化，则

(A) $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$.　(B) $a=b=\frac{1}{2}$.

(C) $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$.　(D) $a=b=-\frac{1}{2}$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}+x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)$的非铅直渐近线方程为________.

(10) 设函数$f(x)=(\sin x^3)^3+\ln\cos x$，则$f^{(4)}(0)=$________.

(11) 微分方程 $x^2y''-xy'=\ln x$ 的通解为________.

(12) 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(|x|\mathrm{e}^{-x}+\sin x^3+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

(13) 设二重积分 $\iint\limits_D(x^2+4y^2+xy)\,\mathrm{d}\sigma=\dfrac{9}{64}\pi$，其中 $D=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant ax\}$，则常数 $a=$________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 3 维列向量，且线性无关，已知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)^2}, & \dfrac{1}{2}<x<1,\\ A, & x=1\end{cases}$在点 $x=1$ 处左连续，求常数 A.

(16)(本题满分 10 分)

设曲线 C：$y=x^2$，$A(t)$是由曲线 C，直线 $x=-1$，$x=t(t\geqslant -1)$及 x 轴围成的曲边梯形的面积，$s(t)$为曲线 C 上由点$(-1，1)$到点$(t，t^2)$的弧长.

记由曲线 C_1：$\begin{cases} x=A(t), \\ y=\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$，直线 $x=0$，$x=\dfrac{2}{3}$以及 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积为 V，求 V.

(17)(本题满分 11 分)

证明：方程 $x\mathrm{e}^{2x}-2x-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2=0$ 在$(0，1)$内有且仅有一个实根.

（18）（本题满分 10 分）

设二元函数$f(u,v)$可微，且$f(1,1)=1$，$f_u'(1,1)=2$，$f_v'(1,1)=3$，以及$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$是单调函数，求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{x=1}$（其中$\varphi^{-1}$是$\varphi$的反函数）.

（19）（本题满分 10 分）

设函数$f(x,y)$连续，满足$f(x,y)=xy+\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$，求$f(\mathrm{e}^x,\sin x)$带佩亚诺型余项的 5 阶麦克劳林公式.

(20)(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $\frac{4}{\pi^2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+y=x$ 满足 $y(0)=1$，$y'(0)=1+\frac{\pi}{2}$ 的解，求 $y(x)$ 及极限 $\lim\limits_{x\to 0}[y(x)]^{\frac{1}{x}}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(u)$ 在 $[1,+\infty)$ 上具有 2 阶连续偏导数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=1$. 又设二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求.

(Ⅰ) $f(u)$ 的表达式；

(Ⅱ) 二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$ 与 $D_2=\{(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$ 的公共部分.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&0&a-3\end{pmatrix}$有零特征值，且有矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&3\\3&4&8\\b+1&c-2&-3\end{pmatrix}$，使得矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，求常数 a，b，c 及该矩阵方程的所有解.

(23)(本题满分 11 分)

设向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ a,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$线性表示，但表示式不是唯一的.

(Ⅰ) 求常数 a 及线性表示式的一般形式;

(Ⅱ) 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 及上述求得的 a，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，并求此标准形.

模拟试题(五)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=0$，$g'(1)=-1$，记 $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$ 则 $f'(1)$ 等于

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) 不存在.

[ ]

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}$ 的极大值与极小值分别为

(A) 1，-1. (B) -1，1. (C) 不存在，-1. (D) 1，不存在.

[ ]

(3) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2y^2+y=1$ 确定的取正值的隐函数，则 $y(x)$

(A) 有最小值，但无最大值. (B) 有最大值，但无最小值.

(C) 既有最大值，又有最小值. (D) 没有最大值与最小值.

[ ]

(4) 设二元函数 $\varphi(x,y)=\int_0^{\frac{y}{x^2}}\mathrm{d}u\int_0^u\dfrac{1}{y^2}f\left(\dfrac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$（其中 f 是连续函数），则 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$

(A) $\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$. (B) $\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$. (C) $\dfrac{1}{x^4}f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$. (D) $\dfrac{1}{x^4}f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

[ ]

(5) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分条件是

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(B) $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 都存在.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$.

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

[ ]

(6) 已知 $y_1=x\ln x$，$y_2=x\ln x+x$，$y_3=2x\ln x-x$ 是某个 2 阶齐次线性微分方程的三个特解，则此微分方程为

(A) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0.$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0.$

(C) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0.$ (D) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0.$

[ ]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量. 记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则线性方程组

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有无穷多解. (B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解.

(C) $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. (D) $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

[ ]

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则以下矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同且相似的是

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}.$ (B) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}.$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$

[ ]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

(10) 由拉格朗日中值定理知，对任意 $x\in(0,1)$，对应地存在唯一的 $\xi(x)\in(0,x)$，使得 $\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\xi^2(x)}}$，则极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=$________.

(11) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & x\leqslant1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\,dx=$________.

(12) 设二元函数 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\ \dfrac{x}{y}\right)$，其中 $\varphi(u,\ v)$ 具有 2 阶偏导数，满足 $\varphi''_{uv}+\dfrac{1}{y}\varphi''_{vv}=0$，则 $z''_{xy}=$________.

(13) 微分方程 $y''+2y'+y=2e^{-x}+x$ 的通解为 =________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其列向量组线性无关；$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，则 $r(\boldsymbol{B}^*)=$________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 条)

求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=|x+1|-|2x-1|$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}2t^2+\sin t, & t<0,\\ y(t), & t\geqslant 0,\end{cases}$ 其中 $y(t)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=\mathrm{e}^{-t}$ 满足 $y(0)=0$ 的解,求 $f''(t)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是正值连续函数,满足 $f(x)\cdot\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\sin x$ 及 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 上的平均值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $u=u(x,\ y)$具有 2 阶连续偏导数，且满足 $u''_{xx}=u''_{yy}$，$u(x,\ 2x)=x$，$u'_x(x,\ 2x)=x^2$. 又设 D 是由半圆 $x^2+z^2=1(z\geqslant 0)$，曲线 $z=u''_{xx}(x,\ 2x)$，$z=u''_{xy}(x,\ 2x)$围成的平面图形，求 D 的面积.

(19)(本题满分 11 分)

设$f(x)$是$[0,\ 2]$上 2 阶可导的正值函数，且 $f'(x)$单调增加，证明：积分 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2f(1)$.

(20)(本题满分 10 分)

二元函数 $f(x, y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2<4, x+y>2\}$ 内是否存在最大值与最小值?如果存在算出最大值与最小值;如果不存在请说明理由.

(21)(本题满分 11 分)

设凸曲线 $\overset{\frown}{OA}$:$y=y(x)$ 通过点 $O(0, 0)$ 和 $A(1, 4)$,$P(x, y)$ 是 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点. 已知曲线 $\overset{\frown}{OP}$ 与线段 $\overline{OP}$ 围成的平面图形面积为 $x^{\frac{4}{3}}$,求

(Ⅰ)求在 $[0, 1]$ 上的连续函数 $y=y(x)$;

(Ⅱ)$\iint\limits_D y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x, y) \mid \varphi(4x) \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$,$y=\varphi(x)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数,$f(x)$ 是任意连续函数.

(22)(本题满分 11 分)

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}=(0,\ 0,\ 8)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$b=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，求线性方程组，$2b^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+b^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求使二次型 $f_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$)都化为标准形的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是 3 阶正交矩阵)，并写出它们的标准形.

模拟试题(六)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数$f(x)=x(x-2)^2|x(x-2)|$的2 阶不可导点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[　　]

(2) 设$f(x)$是连续函数，则$\int_{-x}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\,(x\in(-\infty,+\infty))$是$f(x)$为偶函数的

(A) 充分而非必要条件. (B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

[　　]

(3)方程$2^x-x^2-1=0$的实根个数为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

[　　]

(4) 设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的2 阶偏导数$f''_{xx}(x,y)$，$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$存在，则必有

(A) $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$. (B) $f'_x(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

(C) $f'_x(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微. (D) $f'_x(x,y_0)$在点x_0处可微.

[　　]

(5) 极坐标系中的二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$(其中$f(u,v)$连续)在直角坐标系中的形式(先$x$后$y$)为

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. (D) $\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

[　　]

(6) 设2 阶可导函数$y=y(x)$是2 阶常系数微分方程$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{2x}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=0$的特解，则极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{y(x)}$为

(A) 不存在. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

[　　]

(7) 设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解的

(A) 必要而非充分条件. (B) 充分而非必要条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

[　　]

(8) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4$ 的最小特征值为

(A) -1.　　(B) -2.　　(C) 1.　　(D) 2.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续，则常数 $a=$________．

(10) 设函数 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为______．

(11) 设函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________．

(12) 设三元函数 $z=f(u,x,y)$ 可微，其中 $u=x^2\mathrm{e}^y$，且 $f_x'+f_y'=0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$____________．

(13) 2 阶常系数线性微分方程 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解为____________．

(14) 设 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^*=$____________．

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$．

(16)(本题满分10分)

设连续函数$f(x)$与$g(x)$满足

$$f(x)=3x^2+g(x)-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\ g(x)=4x-f(x)+2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

求由曲线$y=f(x)-x$与x轴围成的平面图形的面积.

(17)(本题满分10分)

设数列$\{x_n\}$由以下递推式确定：

$$0<x_0<1,\ x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(Ⅰ)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

(Ⅱ)计算当$n\to\infty$时，$\mathrm{e}^{\sin(x_n-1)}-\mathrm{e}^{x_n-1}$的等价无穷小.

(18)(本题满分 10 分)

证明：当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$2\sin x + \tan x > 3x$.

(19)(本题满分 10 分)

求二元函数 $u = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程式 $y''+(y')^2+1=0$ 及初始条件 $y(0)=y'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)[t-\ln(1+\tan t)]}{t^3}$，求 $y(x)\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$.

(21)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是正值连续函数，a，b 都为常数，D 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\leqslant 1$ 与 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1$ 的公共部分，求二重积分 $\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$.

(22)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(b, 3, 5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3, 4, b)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求常数 a，b 的值.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵)在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

模拟试题(七)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $y=\sin x\cos 2x$，则 $y^{(5)}(x)=$

(A) $\frac{1}{2}(3^5\cos 3x-\cos x)$.　　(B) $\frac{1}{2}(3^5\cos 3x+\cos x)$.

(C) $\frac{1}{2}(3^5\sin 3x-\sin x)$.　　(D) $\frac{1}{2}(3^5\sin 3x+\sin x)$.

[　　]

(2) 设 $F(x)=\int_0^x \max\{e^{-t},e^t\}dt$,则

(A) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ 1-e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & x<0,\\ 1-e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

[　　]

(3) 微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}(\sin x+\cos 2x)$应有的特解形式为

(A) $xe^{-x}(A_1\cos x+B_1\sin x+A_2\cos 2x+B_2\sin 2x)$.

(B) $e^{-x}(A_1\cos x+B_1\sin x+A_2\cos 2x+B_2\sin 2x)$.

(C) $e^{-x}[x(A_1\cos x+B_1\sin x)+A_2\cos 2x+B_2\sin 2x]$.

(D) $e^{-x}[(A_1\cos x+B_1\sin x)+x(A_2\cos 2x+B_2\sin 2x)]$.

[　　]

(4) 设函数$f(x)$在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的 2 阶导数，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)-f(-x)$是 x 的 3 阶无穷小，则

(A) $x=0$ 不是$f(x)$的驻点，且$(0,f(0))$未必是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(B) $x=0$ 是$f(x)$的驻点，且$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(C) $x=0$ 不是$f(x)$的驻点，但$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$ 是$f(x)$的驻点，但$(0,f(0))$未必是曲线 $y=f(x)$的拐点.

[　　]

(5) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上连续的奇函数，则

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

(B) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时,其值必为零.

(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，其值必不为零.

[　　]

(6) 设二元函数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x, y)\neq(0, 0), \\ 0, & (x, y)=(0, 0),\end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 不连续，但两个偏导数存在.　　(B) 连续，但两个偏导数不存在；

(C) 可微.　　(D) 连续，且两个偏导数存在.

[　　]

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ 线性表示.　　(B) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ 线性表示.　　(D) $\boldsymbol{\delta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

[　　]

(8) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实矩阵，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$，则方程组① $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，② $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，③$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以及④ $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 中，仍以 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 为基础解系的是

(A) ①②.　　(B) ②④.　　(C) ③④.　　(D) ①③.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $y=y(x)$ 由微分方程 $x^2y'+y+x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ 及 $y(1)=0$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为__________.

(10) 设常数 $a>0$，则定积分 $\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,\mathrm{d}x=$ __________.

(11) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微，且 $f_x'(0, 0)=1$，$f_y'(0, 0)=-1$，则极限 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}=$ __________.

(12) 设 $f(x,y)$ 是二元连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 在直角坐标系中的二次积分(先 y 后 x)为__________.

(13) 微分方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解为__________.

(14) 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & \lambda & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 及 3 阶矩阵 B，它们满足 $r(B)=2$，$r(AB)=1$，则常数 $\lambda=$____________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

计算极限 $\lim\limits_{x\to0}f(g(x))$，其中，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x^4)}{x-\arctan x}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2+x-1}{\sqrt{x}\sin\dfrac{x}{6}}, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}.$$

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续的导数，且满足

$$y(x) = 1 + x + 2\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

设 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，证明：函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内无极值点，但有唯一零点.

(18)(本题满分 11 分)

设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

(19)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$，分别求 D 绕 x 轴与 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 与 V_y.

(20)(本题满分 10 分)

设 $z=f(xy,\ yg(x))$,其中二元函数 $f(u,\ v)$ 具有 2 阶偏导数,且 $f_u'(1,\ 0)=f_{uu}''(1,\ 0)=1$. 又设曲线 $t=g(x)$(其中 $g(x)$2 阶可导)在点 $x=1$ 处与 x 轴相切,且(1, 0)是该曲线的拐点,求在点(1, 1)处的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(21)(本题满分 10 分)

求 2 阶微分方程 $y''+ay=2+\cos x\,(a\geqslant 0)$ 的通解.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 4 维向量组，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 已知三元线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$$

有无穷多解.

(Ⅰ)求常数 a 的值；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中求得的 a 值，计算所给方程组的通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$可相似对角化.

(Ⅰ)求常数 a 的值；

(Ⅱ)对求得的 a 值，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

模拟试题(八)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设数列$\{x_n\}$由递推式x_1，$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$确定，则

(A) 当$f(x)$单调增加且$x_1<x_2$时，$\{x_n\}$单调增加.

(B) 当$f(x)$单调增加且$x_1>x_2$时，$\{x_n\}$单调增加.

(C) 当$f(x)$单调减少且$x_1<x_2$时，$\{x_n\}$单调减少.

(D) 当$f(x)$单调减少且$x_1>x_2$时，$\{x_n\}$单调减少.

[ ]

(2) 设函数$y=f(x)$可导，且曲线$y=f(x)$在点$(x_0,y_0)(y_0=f(x_0))$处的切线与直线$y=2-x$垂直，则当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\big|_{x=x_0}=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$是

(A) 与Δx同阶但非等价的无穷小.　　(B) 与Δx等价的无穷小.

(C) 比Δx高阶的无穷小.　　(D) 比Δx低阶的无穷小.

[ ]

(3) 设函数$y=y(x)$由方程$xy+e^{2y}=\cos(xy)$确定，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) 1.

[ ]

(4) 下列等式中不正确的是

(A) $\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{2n}\right)^2$.

(C) $\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$.　　(D) $\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[ ]

(5) 设$z=z(x,y)$，$y=y(x,z)$都是由方程$F(x,y,z)=0$确定的二元函数. 如果$z_0=z(x_0,y_0)$是$z=z(x,y)$的一个极小值，则

(A) $y_0=y(x_0,z_0)$是$y=y(x,z)$的一个极大值.

(B) $y_0=y(x_0,z_0)$是$y=y(x,z)$的一个极小值.

(C) $y_0=y(x_0,z_0)$可能是$y=y(x,z)$的一个极值.

(D) $y_0=y(x_0,z_0)$不是$y=y(x,z)$的极值.

[ ]

(6) 记 $I_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma(i=1,2,3)$,其中

$D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,

$D_2 = \{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\}$,$D_3 = \{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2 \leqslant 1\}$,

则 I_1, I_2, I_3 的大小满足

(A) $I_1 < I_2 = I_3$.　　　　(B) $I_2 = I_3 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 = I_1$.　　　　(D) $I_3 < I_2 = I_1$.

[　　]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，且存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则

(A) $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(B) $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $(\boldsymbol{P}^*)^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(C) $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(D) $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $(\boldsymbol{P}^*)^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

[　　]

(8) 设有 n 维向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 和(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_m$ $(m \leqslant n)$，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$，则下列命题不正确的是

(A) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩.

(B) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(C) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩.

(D) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$ ________.

(10) 已知 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $\int_0^x [5f(t)-2]\,\mathrm{d}t = f(x)-\mathrm{e}^{5x}$,则 $f''(0)=$ ______.

(11) 曲线 $y=\begin{cases} 3x^2+2x^3, & x \leqslant 0, \\ \ln(1+x)-x^2, & x>0 \end{cases}$ 的拐点为____________.

(12) 设二元函数 $f(u, v)$ 可微，则 $\dfrac{\partial}{\partial x} f\left(\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}, \cos\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

(13) 设 2 阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$$Y = e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x),$$

则 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = e^{x}\cos 2x$ 的通解为________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 2 阶与 4 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，$r(\boldsymbol{B}) = 2$，则

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设函数 $y = \varphi(\psi(x))$，其中 $\varphi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ \sin x, & |x| > 1, \end{cases}$ $\psi(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 2, \\ \cos x, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $y''(x)$.

(16)(本题满分 10 分)

求方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 在$(0,1)$内的实根个数.

(17)(本题满分 11 分)

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内 2 阶可导，且$f'_{+}(a)>0$，$f(b)=0$. 此外，存在 $c\in(a,b)$，使得$f(c)=0$，$f'(c)<0$. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

(18)(本题满分 10 分)

设 $du=(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y+y)dy$ 及 $u(0, 0)=0$,

(Ⅰ) 求 $u(x, y)$的表达式.

(Ⅱ) $u(0, 0)$是否为极值? 如果是, 指出它是极大值还是极小值; 如果不是, 说明理由.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^x\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\ (x\geqslant 0)$,求由曲线及 x 轴围成的图形的面积.

（20）（本题满分 10 分）

设变换$\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$可把 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a，其中二元函数 $z = z(x, y)$ 有连续的 2 阶偏导数.

（21）（本题满分 11 分）

设微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$，其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$求在$(-\infty, +\infty)$上连续，在$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$上满足所给微分方程及条件 $y(0) = 0$ 的函数 $y = y(x)$.

(22)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(A)$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3 \end{cases}$有无穷多解.

(Ⅰ)求常数 $a(a \neq 0)$的值;

(Ⅱ)对上述算得的 a 值,求方程组(A)与(B)$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$有公共解时的 λ 值及公共解.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵)经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 又设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$(其中 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$).

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)求将 $f(x_1, x_2, x_3)$化为规范形的可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$(其中 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$).

模拟试题（九）

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}})x(1+x)}$ 的无穷间断点个数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

[　　]

（2）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^7 x)\mathrm{d}x$，则它们的大小次序为

（A）$M<N<P$.　　（B）$N<M<P$.

（C）$P<M<N$.　　（D）$P<N<M$.

[　　]

（3）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内连续，在点 x_0 的去心邻域内 2 阶可导，在点 x_0 的左侧邻近单调增加且其图形是凹的，在点 x_0 的右侧邻近是单调减少且其图形是凸的，则以下结论不正确的为

（A）$f(x)$ 在点 x_0 处可导.　　（B）$f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

（C）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.　　（D）$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

[　　]

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0,\end{cases}$ 则

（A）$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\leqslant 0,\\ -\cos x, & x>0.\end{cases}$　　（B）$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2-1), & x\leqslant 0,\\ 1-\cos x, & x>0;\end{cases}$

（C）$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\leqslant 0,\\ 1-\cos x, & x>0.\end{cases}$　　（D）$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2-1), & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}-\cos x, & x>0.\end{cases}$

[　　]

（5）对二元函数 $f(x, y)$，以下命题正确的是

（A）设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

（B）设 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

（C）设 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则 $f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$.

（D）设 $f''_{xy}(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则 $f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$.

[　　]

（6）设 $y_1=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\sin x$，$y_2=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 是 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+$

$qy=f(x)$的两个特解，则$f(x)$为

(A) $5\mathrm{e}^x$. (B) e^{3x}. (C) e^x. (D) e^{-x}.

[ ]

(7) 设矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$m\times l$矩阵，$\boldsymbol{X}$是$n\times l$未知矩阵)，则该方程有无穷多解的充分必要条件是

(A) $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$. (B) $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$.

(C) $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$. (D) $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$.

[ ]

(8) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同的充分必要条件为

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(B) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的特征值相同.

(D) 分别以$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为矩阵的二次型有相同的规范形.

[ ]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$的 3 阶麦克劳林公式(带佩亚诺型余项)为________.

(10) 曲线$y=\dfrac{\mathrm{e}^x\sin 2x}{x(2x+1)}$的渐近线方程为____________________.

(11) 设函数$f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{(t-1)^2}{2}}\mathrm{d}t$,则定积分$\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=$____________.

(12) 设函数$z=f(x+y,\ yg(x))$，其中f具有 2 阶连续偏导数，曲线$w=g(x)$在点(0，1)处的切线方程为$w=1+x$，且$f(u,\ v)$的偏导数在$u=v$处都为v，则$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=$________.

(13) 微分方程$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$的通解为________.

(14) 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$)的规范形为____________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sin x}{1-(1+x)^{x\sin^2\sqrt{x}}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$具有 2 阶导数，满足$f(0)=1$，$f'(0)=0$，且对任意$x\geqslant 0$有

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0.$$

证明：$f(x)\geqslant 3\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{3x}\ (x\geqslant 0)$.

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分$\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

D 是由圆 $x^2+y^2=2x$ 与直线 $y=x-1$ 及 x 轴围成的位于该直线上方的区域(如图 9-18 中阴影部分所示)，求 D 分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 与 V_y.

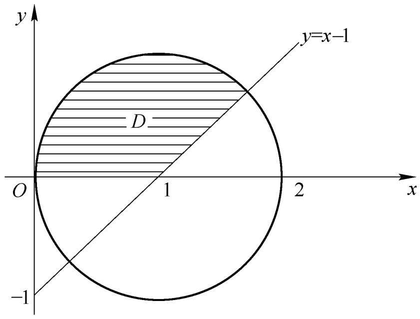


图　9-18

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上可微，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x$. 证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

(20)(本题满分 11 分)

已知二元连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x,y) = y + \int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$，函数 $g(x, y)$ 满足 $g_x'(x, y) = g_y'(x, y) = 1$ 及 $g(0, 0) = 0$. 求二重积分 $\iint\limits_D f(\sqrt{x}, g(x,y))\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $x = y^2$ 及直线 $x = 1$ 围成的平面图形.

(21)(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足

$$y(x) = x^3 - x\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t + y'(x)\ (x \geqslant 1),$$

且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x^3}$ 存在，求 $y(x)$.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组. 已知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

问：a 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化?

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，其秩为 2，且满足

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}^*$；

(Ⅱ) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵)，使得二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 成为标准形，并写出该标准形.

模拟试题(十)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分，每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}$ 的

(A) 可去间断点. (B) 跳跃间断点.

(C) 无穷间断点. (D) 第二类间断点，但不是无穷间断点.

[　　]

(2) 设函数 $f(x)$ 的 $f''(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{(e^x-1)\sin x}=1$，则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，但 $(0, f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，但 $(0, f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，但 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，且 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

[　　]

(3) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{x-\sin x}=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=$

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) 1.

[　　]

(4) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$,则

(A) $I_1>I_2>1$. (B) $1>I_1>I_2$.

(C) $I_2>I_1>1$. (D) $1>I_2>I_1$.

[　　]

(5) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x, y)}{x^2+1-2x\sin y-\cos^2 y}=1,$$

则 $f(0, 0)$

(A) 不是极值. (B) 是极小值.

(C) 是极大值. (D) 不存在.

[　　]

(6) 设区域 $D_1=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，$D_2=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，及 $D_3=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant\dfrac{4}{\pi}, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，记

$$I_i = \iint\limits_{D_i} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma\,(i=1,2,3),$$则

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_1<I_3<I_2$.

(C) $I_2<I_1<I_3$.　　(D) $I_3<I_1<I_2$.

[　　]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n-n_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

[　　]

(8) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶实对称矩阵，如果 $(1,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$(1,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0,\ 0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4))$ 的标准形应形如

(A) $a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$.　　(B) $b_1y_1^2+b_2y_2^2$.

(C) $c_1y_1^2$.　　(D) $d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2+d_4y_4^2$.

(其中 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，d_1，d_2，d_3，d_4 都是非零常数.)

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}=$______.

(10) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且满足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的曲率 =______.

(11) 反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}\mathrm{d}x=$______.

(12) 设二元可微函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $\displaystyle\int_y^z \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+xy+yz=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$______.

(13) 微分方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解为______.

(14) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，则 3 阶行列式 $\left|\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$______.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \arctan t^2\mathrm{d}t}{x^a}$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$, 求常数 a 的取值范围.

(16)(本题满分 10 分)

设一容器是由图 10-16 的平面图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体. 现将容器充满水，求将水从容器顶部全部抽出，至少需做的功.

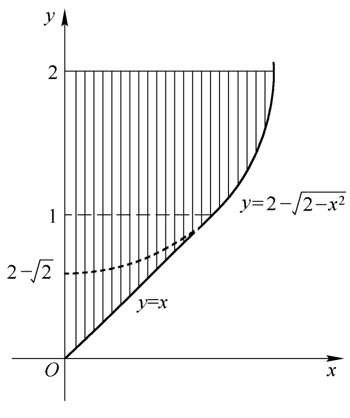


图　10-16

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y=u(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 确定，其中 $x=x(t)$ 是满足 $x(t)\big|_{t=0}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$ 的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=2\sin t$ 的特解. 又设 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cot t$，求满足 $y\big|_{t=0}=1$ 的可微函数 $y(t)$.

(18)(本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 4, 0\leqslant y\leqslant 1, x\geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 是正值连续函数，满足 $y(0)=1$ 及

$\Delta y(1+\Delta y)=\dfrac{y\Delta x}{x^2+1}+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$($o(1)$表示 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小)，其中 Δx，Δy 分别是自变量与函数在任意点 x 处的增量. 记

$$D_1=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{y(x)}\},$$
$$D_2=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant y(x)\}.$$

分别记 D_1 绕 x 轴，D_2 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积为 V_1 与 V_2，求 V_1+V_2.

(20)(本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x,\ y)=\begin{cases} x+2x^2y, & 0\leqslant x\leqslant a,\ |y|\leqslant a, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

(Ⅰ)求二重积分 $I(a)=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant ax\}$,$a>0$;

(Ⅱ)求极限 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{I(a)}-1}{\sin a-\ln(1+a)-\dfrac{1}{2}a^2}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(0)=f(1)=0$，在 $(0, 1)$ 内二阶可导且 $f''(x)<0$. 记 M 为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值，证明：存在唯一的 $\xi\in(0, 1)$，使得 $f'(\xi)=M$.

(22)(本题满分 11 分)

设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解 $(1, 2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1, -2, 4, 0)^{\mathrm{T}}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}$ 都是 4 维列向量，求方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解，其中矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2b & 0\\ 0 & a & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$(实对称矩阵)，并计算 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=0, 1, 4$ 时 a，b 的值.

(Ⅱ)对上述算得的 a，b 值，用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$)将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.

模拟试题(一)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	C	A	D	D	B	C	D

(1) 在$(-\pi, 0)$内$f(x)$仅有间断点$x=-\dfrac{\pi}{2}$. 由于

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\mathrm{e}^{\cos x}-1)\ln\left(1+\frac{1}{4}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1-\frac{\pi}{8}\right)}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=-\frac{2}{\ln\left(1-\frac{\pi}{8}\right)},$$

所以$x=-\dfrac{\pi}{2}$是$f(x)$的可去间断点.

在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内$f(x)$无间断点. 此外，由于

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin 2x}{(\mathrm{e}^{\cos x}-1)\ln\left(1+\frac{1}{4}x\right)}=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{\frac{1}{4}x}$$

$$=\frac{8}{\mathrm{e}-1}\neq0=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

所以，$x=0$不是$f(x)$的可去间断点.

由此可知，$f(x)$的可去间断点个数为1. 因此选(B).

附注 寻找分段函数的间断点，除各个分段区间内的间断点外，还应通过考虑函数在分段点处的连续性，确定它是否为间断点.

(2) 当$a=-2, -1$时，$f(x)$在$\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$上无定义，所以选项(A)，(B)应排除. 当$a=0$时，$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，且在$(0, +\infty)$上，由

$$f'(x)=\ln x+1\begin{cases}<0, & 0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}},\\ =0, & x=\dfrac{1}{\mathrm{e}},\\ >0, & x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}\end{cases}$$

知，$f(x)$的单调减少区间仅为$\left(0,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$. 因此选(C).

附注 本题是对选项逐一检验而得到正确选项. 这是求解单项选择题的常用方法之一.

(3) 由积分中值定理知，存在$\xi\in(a,\ b)$，使得$f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

由于$f(x)$在$[a,\ \xi]$上可导，且$f(a)=f(\xi)$所以由罗尔定理知，存在$\xi_1\in(a,\ \xi)$，使得$f'(\xi_1)=0$. 此外，由罗尔定理(推广形式)知，对$(\xi,\ +\infty)$上满足$f(\xi)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$的可导函数$f(x)$，存在$\xi_2\in(\xi,\ +\infty)$，使得$f'(\xi_2)=0$.

由于$f(x)$在$[a,\ +\infty)$上二阶可导，即$f'(x)$在$[a,\ +\infty)$上可导，且由以上证明的$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)(=0)$，因此由罗尔定理知，存在$\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset[a,\ +\infty)$，使得$f''(\xi)=0$.

根据以上推理得方程$f''(x)=0$在$(a,\ +\infty)$至少有一个实根. 因此选(A).

附注 题解中，有两点值得注意：

(Ⅰ) 积分中值定可以精确为：

设$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，则存在$\xi\in(a,\ b)$，使得$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(Ⅱ) 罗尔定理有种种推广形式，其中之一是：

设$f(x)$在$[a,\ +\infty)$上连续，在$(a,\ +\infty)$上可导，且$f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则存在$\xi\in(a,\ +\infty)$，使得$f'(\xi)=0$.

记住以上结论，对解题是有用.

(4) 当$x<0$时，$F'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\left(\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，

当$x>0$时，由 $F(x)=\int_{-x}^0\ln(1+f(x+t))\,\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{\text{令 } u=x+t}\int_0^x\ln(1+f(u))\,\mathrm{d}u$$

得$F'(x)=\ln(1+f(x))$. 此外由

$$F_-'(0)=\lim_{x\to0^-}F'(x)=\lim_{x\to0^-}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

$$F_+'(0)=\lim_{x\to0^+}F'(x)=\lim_{x\to0^+}\ln(1+f(x))=0$$

知$F'(0)=0$. 所以由

$$F_-''(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0,$$

$$F_+''(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+f(x))}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$$

得 $F''(0)=0$. 因此选(D)

附注 题解中，$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}F'(x)$ 与 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F'(x)$ 是根据以下结论：

设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，在 $(-\delta,\ 0)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi'(x)$ 存在，则 $\varphi'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\varphi'(x)$.

设函数 $\psi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，在 $(0,\ \delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\psi'(x)$ 存在，则 $\psi'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\psi(x)$.

第二个结论是2009年考研真题，第一个结论的证明与第二个相似. 因此上述结论可以作为定理记住和应用.

(5) 所给微分方程的通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int dx}\left(C+\int \sin x\cdot e^{\int dx}dx\right)=e^{-x}\left(C+\int e^x\sin x dx\right) \\ &= e^{-x}\left[C+\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]. \end{aligned}$$

将 $y(0)=-\dfrac{1}{2}$ 代入上式得 $C=0$. 所以 $y(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)$. 从而

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= f'_u(u,\ v)\left(e^x\sin y+e^x\cos y\cdot\frac{dy}{dx}\right)+f'_v(u,\ v)\left(e^x\cos y-e^x\sin y\cdot\frac{dy}{dx}\right) \\ &= \left[e^x\sin y+e^x\cos y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]f'_u(u,\ v)+ \\ &\quad \left[e^x\cos y-e^x\sin y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]f'_v(u,\ v), \end{aligned}$$

其中 $u=e^x\sin y$，$v=e^x\cos y$，$y=\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)$. 因此选(D).

附注 计算 $\dfrac{dz}{dx}$ 时，应注意 y 是 x 的函数，具体是 $y=\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)$.

(6) $\iint\limits_D(x+y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}2xd\sigma$（由于 D 关于 x 轴对称，y 在对称点处的值互为相反数，x 在对称点处的值彼此相等. D_1 是 D 的第一象限部分）

$$\begin{aligned} &= \int_1^2dx\int_0^{\sqrt{x^2-1}}2xdy=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx \\ &= \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

因此选(B).

附注 计算二重积分应充分利用积分区域的对称性. 当 D 具有某种对称性时，

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & \text{当} f(x,y) \text{在对称点处的值互为相反数}, \\ 2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma, & \text{当} f(x,y) \text{在对称点处的值彼此相等},\end{cases}$$

其中 D_1 是 D 按这种对称性划分成的两部分之一.

(7) 由$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(-\boldsymbol{A})^*=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$知，$n$ 为奇数时，有$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，即 $\boldsymbol{A}^*$是对称矩阵. 反之，当$\boldsymbol{A}^*$是对称矩阵，即$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$时，由以上计算得$(-1)^{n-1}=1$，即 n 为奇数.

所以，$\boldsymbol{A}^*$为对称矩阵是 n 为奇数的充分必要条件，因此选(C).

附注 对于 $n(n\geqslant 2)$阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n-1$. 因此 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$ 或 $n-1$.

(8) 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以存在 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}.$$

于是 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{P})=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3|=\begin{vmatrix}-2&0&1\\1&-1&0\\1&0&-2\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)=3$.

有 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3|=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=0，\text{但 } \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3 \text{ 的 2 阶子式}\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)=2$.

从而 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=5$. 因此选(D).

附注 本题也可按以下方法计算：

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)&=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)\\&=r\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{O}\\\hdashline\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3\end{array}\right),\end{aligned}$$

其中
$$\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{O}\\\hdashline\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2&0&1&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0\\1&0&-2&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}-2&0&1&0&0&0\\0&-1&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&-\frac{3}{2}&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=5$.

二、填空题

(9) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$,

其中, $|(-1)^n\sin n|<1(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=\mathrm{e}^0=1.$$

附注　设 $\alpha(x)$是有界函数, $\beta(x)$是某个极限过程中的无穷小, 则在这个极限过程中有

$$\lim\alpha(x)\beta(x)=0.$$

(10) 由于 $x\in[-1,1]$时, $\psi(x)=(x-1)^2$. 显然 $x\in[-1,0)$时, $\psi(x)>1$; $x\in[0,1]$时, $\psi(x)\leqslant 1$, 所以

$$\varphi(\psi(x))=\begin{cases}\psi(x)\ln\psi(x), & x\in[-1,0),\\ 1-\psi(x), & x\in[0,1]\end{cases}=\begin{cases}(1-x)^2\ln(1-x)^2, & x\in[-1,0),\\ 1-(x-1)^2, & x\in[0,1].\end{cases}$$

于是 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(1-x)^2\ln(1-x)^2\mathrm{d}x+\int_0^1[1-(x-1)^2]\mathrm{d}x$, 其中

$$\int_{-1}^{0}(1-x)^2\ln(1-x)^2\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\ln(1-x)\mathrm{d}(1-x)^3$$

$$=-\frac{2}{3}\left[(1-x)^3\ln(1-x)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(1-x)^2\mathrm{d}x\right]=\frac{16}{3}\ln 2-\frac{14}{9},$$

$$\int_0^1[1-(x-1)^2]\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-x^2)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

所以, $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\mathrm{d}x=\left(\dfrac{16}{3}\ln 2-\dfrac{14}{9}\right)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}\ln 2-\dfrac{8}{9}$.

附注　平时应练习分段函数的复合运算.

(11) 由 $y'=\tan x$, $y''=\sec^2 x$ 得所求的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

附注　应记住曲线 $y=y(x)$(其中 $y(x)$具有 2 阶导数)在点$(x_0,y(x_0))$处的曲率 $K(x_0)$的计算公式:

$$K(x_0)=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=x_0}.$$

(12) 由题设$f(u,v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2})$

$$=-(u-1)-2(v-0)+o(\sqrt{(u-1)^2+(v-0)^2})\text{知}$$

$$f_u'(1,0)=-1,\ f_v'(1,0)=-2.$$

记 $u=\mathrm{e}^y$, $v=x+y$, 则 $g(x,y)=f(u,v)$, 且

$$g_x'(x,y)=f_v',\ g_y'(x,y)=f_u'\cdot\mathrm{e}^y+f_v'.$$

所以，$\mathrm{d}g(x,\ y)\big|_{(0,0)}=g_x'(0,\ 0)\mathrm{d}x+g_y'(0,\ 0)\mathrm{d}y$

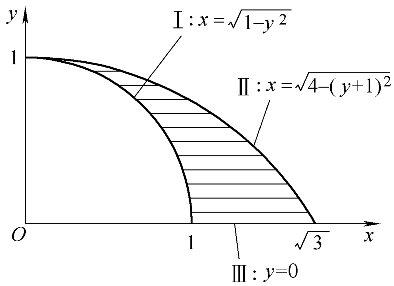
$$=f_v'(1,\ 0)\mathrm{d}x+[f_u'(1,\ 0)+f_v'(1,\ 0)]\mathrm{d}y=-2\mathrm{d}x-3\mathrm{d}y.$$

附注 本题获解的关键是由 $f(u,\ v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2})$ 得到 $f_u'(1,\ 0)=-1$，$f_v'(1,\ 0)=-2$.

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ 1\leqslant r\leqslant-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，它是由曲线Ⅰ：$r=1\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，Ⅱ：$r=-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$及Ⅲ：$\theta=0$ 围成. 显然Ⅰ即为圆 $x^2+y^2=1$ 的第一象限部分. 由于Ⅱ的方程可改成 $r^2=-r\sin\theta+\sqrt{3r^2+r^2\sin^2\theta}$，即 $x^2+y^2+y=\sqrt{3x^2+4y^2}$，化简后得 $x^2+y^2+2y=3$，即 $x^2+(y+1)^2=4$. Ⅲ为正向 x 轴. 所以 D 如图答 1-13 的阴影部分所示. 由此得到

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

上式左右边即为所求的先 x 后 y 的二次积分.



图答 1-13

附注 (Ⅰ) 对某个二次积分 I，要改变它的积分次序或积分坐标系，总是先写出与 I 相等的二重积分，然后再将该二重积分转换成所要求的二次积分.

(Ⅱ) 如何由 $x^2+y^2+y=\sqrt{3x^2+4y^2}$ 得到 $x^2+y^2+2y=3$？具体如下：

由 $x^2+y^2+y=\sqrt{3x^2+4y^2}$ 得 $(x^2+y^2+2y)-y=\sqrt{3x^2+4y^2}$，即

$$(x^2+y^2+2y)^2-2y(x^2+y^2+2y)-3(x^2+y^2+2y)+6y=0,$$

或者 $(x^2+y^2+2y)^2-(2y+3)(x^2+y^2+2y)+2y\cdot3=0$. 由此得到

$$[(x^2+y^2+2y)-2y][(x^2+y^2+2y)-3]=0，即 x^2+y^2+2y=3.$$

(14) $$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}^*\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -(\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} & (\boldsymbol{C}^*)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ -\frac{1}{|\boldsymbol{C}|}\boldsymbol{CBA} & \frac{1}{|\boldsymbol{C}|}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c:c}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} & \boldsymbol{O}\\ \hdashline -\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

附注 这里利用了分块矩阵的求逆公式：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{D}$ 都是可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

同样有$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}$.

三、解答题

(15) 由于$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}-1\right)=\dfrac{2+0}{1+0}-1-1=0$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x-|x|}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}-1\right)=\frac{0+0}{0+1}+1-1=0,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}\right)=0$. 此外$\left|\arctan\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{\pi}{2}$，因此

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x-|x|}{|x|}\right)\arctan\frac{1}{x}=0.$$

附注 由于$\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}$是以 $x=0$ 为分段点的分段函数，所以计算 $x\to0$ 的极限时，应从计算左、右极限入手. 在计算时还应注意到$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

(16) 记 D 绕直线 $y=1$ 旋转一周而成的旋转体体积为 V，则

$$\begin{aligned}V&=\pi\left[\int_0^1(1-x^2)^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\int_0^1(x^4-3x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

记 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积为 V_y，则

$$\begin{aligned}V_y&=2\pi\left(\int_0^1 x\cdot x\mathrm{d}x-\int_0^1 x\cdot x^2\mathrm{d}x\right)\\&=2\pi\int_0^1(x^2-x^3)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

附注 应记住以下公式：

设平面图形 $D_1=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\leqslant k\}$绕直线 $y=k$ 旋转一周而成的旋转体体积

$$V_k=\pi\left\{\int_a^b[k-f_1(x)]^2\mathrm{d}x-\int_a^b[k-f_2(x)]^2\mathrm{d}x\right\}.$$

设平面图形 $D_2=\{(x,y)\mid c\leqslant a\leqslant x\leqslant b,f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$绕直线 $x=c$ 旋转一周而成的旋转体体积

$$V_c=2\pi\left[\int_a^b(x-c)f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b(x-c)f_1(x)\mathrm{d}x\right].$$

(17) 所给微分方程 $$y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x \tag{1}$$
对应的齐次微分方程的通解为
$$Y=C_1\cos|a|x+C_2\sin|a|x \quad (C_1,\ C_2\text{ 是任意常数}).$$
当 $a=1$ 时，式(1)有特解
$$y^*=x(A_1\sin x+B_1\cos x)+(A_2\sin 2x+B_2\cos 2x).$$
将它代入 $a=1$ 时的式(1)得
$$2A_1\cos x-2B_1\sin x-3A_2\sin 2x-3B_2\cos 2x=\sin x+2\cos 2x.$$
由此得到 $A_1=0$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$A_2=0$，$B_2=-\frac{2}{3}$. 故
$$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x.$$
因此，当 $a=1$ 时，式(1)的通解为
$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x.$$
当 $a=2$ 时，式(1)有特解
$$y^*=A_1\sin x+B_1\cos x+x(A_2\sin 2x+B_2\cos 2x).$$
将它代入 $a=2$ 的式(1)得
$$3A_1\sin x+3B_1\cos x+4A_2\cos 2x-4B_2\sin 2x=\sin x+2\cos 2x.$$
由此得到 $A_1=\frac{1}{3}$，$B_1=0$，$A_2=\frac{1}{2}$，$B_2=0$. 故
$$y^*=\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{2}x\sin 2x.$$
因此，当 $a=2$ 时，式(1)的通解为
$$y=Y+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{2}x\sin 2x.$$

附注 设有 2 阶线性微分方程
$$y''+ay'+by=\mathrm{e}^{\alpha x}(a_1\cos\beta x+b_1\sin\beta x) \tag{*}$$
(其中，a，b，a_1，b_1，α，β 都是常数)，则式(*)有特解
$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),$$
其中，$k=\begin{cases}0, & \text{当 }\alpha+\mathrm{i}\beta\text{ 是方程 }\lambda^2+a\lambda+b=0\text{ 的 0 重根},\\ 1, & \text{当 }\alpha+\mathrm{i}\beta\text{ 是方程 }\lambda^2+a\lambda+b=0\text{ 的 1 重根},\end{cases}$ 常数 A，B 可由 y^* 代入式(*)确定.

(18) 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\int(x+y)\mathrm{d}y=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$. (1)

$z(x,\ 0)=x^2$ 两边对 x 求偏导数得 $\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=2x$，将它与由式(1)得到的 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=0}=\varphi(x)$ 比较得 $\varphi(x)=2x$，所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+2x.$$

同样可得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+\dfrac{1}{2}x^2+2y.$

记 $u=x+y$，$v=x-y$，则 $w=z(u, v)$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w&=\mathrm{d}z(u, v)=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial z}{\partial u}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+\frac{\partial z}{\partial v}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)\\&=\left[(x+y)(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2+2(x+y)\right](\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)\\&\quad+\left[(x+y)(x-y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+2(x-y)\right](\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)\\&=(3x^2-y^2+4x)\mathrm{d}x+(4y-2xy)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

附注　题解有以下两点值得注意：

（Ⅰ）由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，而不是 $z=xy+\dfrac{1}{2}y^2+C$(C 是任意常数).

（Ⅱ）由题设知 $z(x, y)$是关于 x 与 y 的对称函数(即 $z(y, x)=z(x, y)$)，所以$\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}$等于互换$\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}$中的 x 与 y 即可.

（19）由于
$$\begin{aligned}\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta&=\iint_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

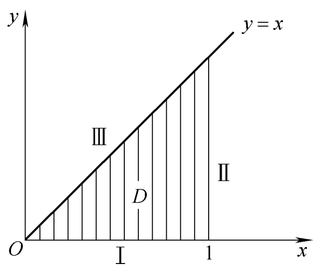
所以$f(x, y)=y\sqrt{1-x^2+y^2}$. 此外，

$$D=\left\{(r, \theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant1, 0\leqslant y\leqslant x\}$$

如图答 1-19 阴影部分所示. 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1-x^2+2y^2}{\sqrt{1-x^2+y^2}}.$$

所以，方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$在 D 的内部无解，即$f(x, y)$在 D 的内部无可能极值点.



图答　1-19

D 有边界Ⅰ：$y=0(0\leqslant x\leqslant1)$，Ⅱ：$x=1(0\leqslant y\leqslant1)$以及Ⅲ：$y=x(0\leqslant x\leqslant1)$.

在Ⅰ上，$f(x, y)\equiv0(0\leqslant x\leqslant1)$，所以它的最大值与最小值都为 0.

在Ⅱ上，$f(x, y)=y^2(0\leqslant y\leqslant1)$，所以它的最大值为 1，最小值为 0.

在Ⅲ上，$f(x, y)=x(0\leqslant x\leqslant1)$，所以它的最大值为 1，最小值为 0.

因此，$f(x, y)$在 D 的边界上，即在 D 上的最大值为 1，最小值为 0.

附注 解题时应注意的是，$f(x, y)$在极坐标系中的表达式为 $r\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}$，而不是 $r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}$.

(20)(Ⅰ) 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}2\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x^2}=\frac{2}{3},$$

所以，在点 $x=0$ 的充分小去心邻域内有

$$0<\frac{\tan^2x-x^2}{x^4}<1.$$

由此证得，当 $|x|$ 充分小时，$x^2\leqslant\tan^2x\leqslant x^2+x^4$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知

$$\frac{1}{n+k}=\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2\leqslant\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^4=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{(n+k)^2},$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right]=\ln2+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\ln2+0\cdot\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln2,$$

所以,由数列极限存在准则 Ⅰ 知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\tan^2\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}=\ln2.$

附注 数列极限存在准则有两个：

准则Ⅰ 设有数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$，如果它们满足

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots),$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

准则Ⅱ 设数列$\{x_n\}$单调不减有上界，或单调不增有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(21) 由于$f(t)$在$[0,2]$上 2 阶可导，所以对任意 $x\in[0,2]$及 $t\in[0,2]$，有泰勒公式：

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2(\xi\text{ 是介于 }t\text{ 与 }x\text{ 之间的实数}),$$

特别有

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2(\xi_1\text{ 是对应 }t=0\text{ 的 }\xi),\tag{1}$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(2-x)^2(\xi_2\text{ 是对应 }t=2\text{ 的 }\xi).\tag{2}$$

式(2)－式(1)得

$$f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(2-x)^2-f'(\xi_1)x^2],$$

即
$$f'(x)=\frac{1}{2}\left\{f(2)-f(0)-\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(2-x)^2-f''(\xi_1)x^2]\right\}.$$

由此得到

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\left\{|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|(2-x)^2+|f''(\xi_2)|x^2]\right\}$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{2}(2-2x+x^2)\leqslant 2\quad(\text{由于 }2-2x+x^2\text{ 在}[0,2]\text{上的最大值为 }2).$$

附注　为了将 $f'(x)$ 与 $f(x)$，$f''(x)$ 联系起来，常常使用带拉格朗日型余项的泰勒公式. 本题就是按此想法证明的.

(22)(Ⅰ)由(A)与(B)等价知，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 由于

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&1&4\end{vmatrix}\neq 0,$$ 即 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，所以

$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，即 $0\neq|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=a-5$. 由此得到 $a\neq 5$.

(Ⅱ)当 $a\neq 5$ 时，由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&-1&-1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&-1&-1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&1&\frac{2}{a-5}&-\frac{1}{a-5}&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{2a-14}{a-5}&\frac{-a+7}{a-5}&-1\\0&1&0&\frac{-a+3}{a-5}&\frac{a-4}{a-5}&2\\0&0&1&\frac{2}{a-5}&-\frac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$$

知，(A)由(B)的线性表式为
$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{2a-14}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{-a+3}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2+\dfrac{2}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3,\\ \boldsymbol{\alpha}_2=\dfrac{-a+7}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{a-4}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2-\dfrac{1}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3,\\ \boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2.\end{cases}\tag{1}$$

附注 将初等行变换后的矩阵$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\dfrac{2a-14}{a-5}&\dfrac{-a+7}{a-5}&-1\\0&1&0&\dfrac{-a+3}{a-5}&\dfrac{a-4}{a-5}&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$的列向量由左至右顺序记为$\boldsymbol{\beta}_1'$，$\boldsymbol{\beta}_2'$，$\boldsymbol{\beta}_3'$；$\boldsymbol{\alpha}_1'$，$\boldsymbol{\alpha}_2'$，$\boldsymbol{\alpha}_3'$，容易看到
$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1'=\dfrac{2a-14}{a-15}\boldsymbol{\beta}_1'+\dfrac{-a+3}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2'+\dfrac{2}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3',\\ \boldsymbol{\alpha}_2'=\dfrac{-a+7}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1'+\dfrac{a-4}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2'-\dfrac{1}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3',\\ \boldsymbol{\alpha}_3'=-\beta_1'+2\beta_2'.\end{cases}\tag{2}$$

由于“初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系”(记住这一结论)，因此由式(2)直接得到式(1)，即(A)由(B)的线性表示式.

(A)由(B)的线性表示式也可以用以下方法计算：

记$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，则由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}\text{得}$$

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2-\dfrac{2}{a-5}&-1+\dfrac{4}{a-5}&-\dfrac{2}{a-5}\\-1-\dfrac{1}{a-5}&1+\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}\\\dfrac{1}{a-5}&-\dfrac{2}{a-5}&\dfrac{1}{a-5}\end{pmatrix}.$$

于是，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 2-\dfrac{2}{a-5} & -1+\dfrac{4}{a-5} & -\dfrac{2}{a-5} \\ -1-\dfrac{1}{a-5} & 1+\dfrac{2}{a-5} & -\dfrac{1}{a-5} \\ \dfrac{1}{a-5} & -\dfrac{2}{a-5} & \dfrac{1}{a-5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} \dfrac{2a-14}{a-5} & \dfrac{-a+7}{a-5} & -1 \\ \dfrac{-a+3}{a-5} & \dfrac{a-4}{a-5} & 2 \\ \dfrac{2}{a-5} & -\dfrac{1}{a-5} & 0 \end{pmatrix},$$

它即为式(1).

(23)(Ⅰ)由于$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的一个特征向量，记它对应的特征值为$\lambda$，则有

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & -a \\ -4 & -a & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0,\ \text{即}\begin{cases} \lambda-2=0, \\ 1+2(\lambda-3)-a=0, \\ -4-2a+\lambda=0. \end{cases}$$

解此方程组得$\lambda=2$，$a=-1$.

将$a=-1$代入$\boldsymbol{A}$，得$\boldsymbol{A}$的特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)=0,$$

它的根除$\lambda_1=\lambda=2$外，还有$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$，所以，$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$的标准形为$2y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

(Ⅱ)由于$\boldsymbol{A}^*$是实对称矩阵，所以它能化为对角形矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$. 由于$\boldsymbol{A}^*$的特征值为$\mu_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-20$，$\mu_2=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-8$，$\mu_3=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=10$，所以

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} -20 & & \\ & -8 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

由题设知，$\boldsymbol{A}$的对应$\lambda_1=2$的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应$\lambda_2=5$的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2=(u_1,\ u_2,\ u_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\xi}_2$满足

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}. \tag{1}$$

由于 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，式(1)与$\begin{cases}u_2+u_3=0,\\u_1+u_2\quad=0\end{cases}$同解，它的基础解系为$(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，故取$\boldsymbol{\xi}_2=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应$\lambda_3=-4$的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=(v_1,\ v_2,\ v_3)^{\mathrm{T}}$，则由$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵知$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_1)=0,\\(\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_2)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}v_1+2v_2+v_3=0,\\v_1-v_2+v_3=0.\end{cases}$它的基础解系为$(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，故取$\boldsymbol{\xi}_3=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

显然，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$是正交向量组. 现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

记$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1^0,\ \boldsymbol{\xi}_2^0,\ \boldsymbol{\xi}_3^0)$，则$\boldsymbol{P}$即为所求的正交矩阵.

附注 设$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，有特征值λ及与之对应的特征向量$\boldsymbol{\xi}$，则$\boldsymbol{A}^*$有特征值$\mu=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及与之对应的特征向量$\boldsymbol{\xi}$. 所以当$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$为对角形矩阵时，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$也是对角形矩阵，且对角线上的元素都是$\boldsymbol{A}^*$的特征值.

模拟试题(二)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	D	C	A	D	D	B	A

(1) 由于 $y=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right)\Bigg],$$

所以，$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left[(-1)^{10}\frac{10!}{(x-1)^{11}}+(-1)^{10}\frac{10!}{(x+1)^{11}}-2(-1)^{10}\frac{10!}{x^{11}}\right]$

$$=\frac{10!}{2(x-1)^{11}}-\frac{10!}{x^{11}}+\frac{10!}{2(x+1)^{11}}.$$ 因此选(C)

附注 应记住公式：对 $a\neq0$，

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(2) 由于$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^t(e^t-1)}{\frac{2}{1+t}\ln(1+t)}=\frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)}$，并且由题设知

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to0}\frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1,$$

所以，$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right|_{t=0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{dy}{dx}-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)}-1}{t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t(1+t)(e^t-1)-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{[e^{2t}-e^t-\ln(1+t)]+e^t t(e^t-1)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-e^t-\ln(1+t)}{t^2}+1$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0}\frac{2e^{2t}-e^t-\frac{1}{1+t}}{2t}+1$$

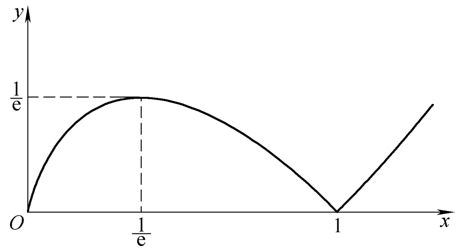
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2(e^{2t}-1)-(e^{t}-1)-\left(\frac{1}{1+t}-1\right)}{2t}+1=3.$$

因此选(D).

附注 由于在点 $x=0$ 的某个邻域内$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}\frac{e^{t}(1+t)(e^{t}-1)}{\ln(1+t)}, & t\neq 0,\\ 1, & t=0\end{cases}$是分段函数，所以用导数定义计算$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{t=0}$.

(3) 由于 $y=x|\ln x|=\begin{cases}-x\ln x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x\ln x, & x>1\end{cases}$在$(0,+\infty)$上连续，当 $0<x<1$ 时，

$$y'=-(\ln x+1)\begin{cases}>0, & 0<x<\frac{1}{e},\\ =0, & x=\frac{1}{e},\\ <0, & \frac{1}{e}<x<1;\end{cases}$$



图答 2-3

当 $x>1$ 时，$y'=\ln x+1>0$，即 $y=x|\ln x|$ 在 $(1,+\infty)$上单调增加，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$. 所以 $y=x|\ln x|$ 的概图如图答 2-3 所示. 由图可知 $y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$是 $y=x|\ln x|$ 的极大值(不是最大值). 因此选(C).

附注 本题是利用函数的单调性画出它的概图，快捷地得到正确的选项.

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x|\cos x|dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3}{4}.$$ 因此选(A)

附注 题解中应注意的是：在$\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$上 $\sqrt{1-\sin^2 x}\neq\cos x$，而应为 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$.

(5) 由于$f(x,y)$在点$(0,0)$的关于 x 的偏导数存在，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=f_x'(0,0).$$

因此选(D).

附注 由于$f(x,y)$的偏导数仅在点$(0,0)$处存在，所以选(A)(B)及(C)都不正确.

(6) 由于 D 关于 y 轴对称，而 $f(x^2)$在对称点处的值彼此相等，所以 $\iint\limits_D f(x^2)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x^2)d\sigma$. 因此选(D).

附注　在计算二重积分时，应充分利用积分区域的对称性，适当地化简二重积分.

(7) 对于 $n>2$ 有

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

$$=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

因此选(B).

附注　当 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆时，本题结论仍成立. 这是因为，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 另一方面，当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，或 0，即 $r(\boldsymbol{A}^*)<n-1$. 从而 $r((\boldsymbol{A}^*)^*)=0$，由此得到 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{O}$.

故仍有 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

(8) 由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵知，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 也是实矩阵，并且由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=\boldsymbol{A}^*$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 也是对称的. 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 也是实对称矩阵. 此外，由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 全为正的知，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}$，$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}$，…，$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}$ 也全为正的. 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵. 同样可得 $\boldsymbol{B}^*$ 是正定矩阵. 于是，对于任意 $\boldsymbol{x}$(n 维非零列向量)，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}>0$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}>0$，由此可知

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{x}>0,$$

即 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$ 是正定矩阵. 因此选(A).

附注　应记住以下结论：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$ 都是正定矩阵，但 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$ 等未必是正定矩阵.

二、填空题

(9) $\displaystyle\int\arctan\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\int(\arctan1+\arctan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}x+\int\arctan x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}+x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}x+x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

附注　以下公式是常用的：

$$\arctan\frac{a+x}{1-ax}=\arctan a+\arctan x,$$

$$\arctan\frac{a-x}{1+ax}=\arctan a-\arctan x.$$

(10) 由于 $\max\{1,x^2\}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1,\\ x^2, & |x|>1,\end{cases}$所以

$$\int_{-1}^{2}\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^2\mathrm{d}x=2+\frac{7}{3}=\frac{13}{3}.$$

附注　同样可以计算 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\min\{1,x^2\}\mathrm{d}x$：

$$\int_{-1}^{2}\min\{1,x^2\}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}+1 = \frac{5}{3}.$$

(11) 曲线方程可以改写成 $y = x + \frac{1}{2}x^2$，所以

$$y' = 1 + x,\ y'' = 1.$$

因此，该曲线在点(0，0)处的曲率为

$$K = \left.\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{[1+(1+x)^2]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

于是由曲率圆的半径 $R = \frac{1}{K} = 2\sqrt{2}$得曲率圆的面积为

$$S = \pi R^2 = 8\pi.$$

附注 曲线 $y = y(x)$在点$(x_0,\ y(x_0))$处的曲率 K 计算公式为

$$K = \left.\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=x_0}.$$

(12) 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{z(x,\ 2)-z(1,\ 2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{\ln x}-1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{e}^{\ln x(\ln2-\ln x)}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\left[\frac{\ln x}{x-1}\cdot(\ln2-\ln x)\right] = \ln2\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1} = \ln2,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{z(x,\ 2)-z(1,\ 2)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{[\ln(x^{\ln2})+1]-1}{x-1} = \ln2\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{x-1} = \ln2,$$

所以$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \ln2.$

附注 由于$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\ 2)} = \left.\frac{\mathrm{d}z(x,\ 2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$，而 $z(x,\ 2)$是分段点为 $x=1$ 的分段函数，所以按定义计算$\left.\frac{\mathrm{d}z(x,2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

(13) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^r r\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 r\mathrm{d}\mathrm{e}^r$

$$= \pi\left(r\mathrm{e}^r\Big|_0^1 - \int_0^1\mathrm{e}^r\mathrm{d}r\right) = \pi.$$

附注 由于 D 是圆的一部分，而且被积函数是 x^2+y^2 的函数，所以用极坐标计算所给二重积分.

(14) 由于 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 & -1 \\ -14 & 4 & 10 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & -7 & 17 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & -7 & 17 \end{pmatrix},$$

所以　$r(\boldsymbol{A}^2)=3$，从而 $r((\boldsymbol{A}^2)^*)=1$.

附注　本题是利用以下公式(应记住)计算的：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

三、解答题

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x)}{x^2}}$,

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-\sin x+\frac{1}{2}}{\cos x+\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2(1+x)}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+x)\left(-\sin x+\frac{1}{2}\right)-\left(\cos x+\frac{x}{2}\right)}{4(1+x)\left(\cos x+\frac{x}{2}\right)\cdot x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x-2x\sin x+\frac{1}{2}x+(1-\cos x)}{x}=-\frac{3}{8}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{8}}$.

附注　本题是 1^∞ 型未定式极限，所以利用公式 $A^B=\mathrm{e}^{B\ln A}$ 转化成先计算“$\dfrac{0}{0}$”型未定式极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x)}{x^2}$.

(16) 由于 $g(t)=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\sqrt[3]{\sin t}\,f(x)\right]^{\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\ln(1+x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2}\cdot\ln\left[1+\sqrt[3]{\sin t}\,f(x)\right]}{\ln(1+x)}}$,

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2}\cdot\ln\left[1+\sqrt[3]{\sin t}\,f(x)\right]}{\ln(1+x)}=\sqrt[3]{t^2\sin t}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\sqrt[3]{t^2\sin t}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt[3]{t^2\sin t}\,f'(0)=\sqrt[3]{t^2\sin t}.$$

所以，$g(t)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}$. 因此

$$g'(0)=\lim_{t\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{t^2\sin t}}{t}=1.$$

附注 题解中有两点值得注意：

（Ⅰ）由于$f(x)$仅在点$x=0$处可导，所以极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$必须按导数定义计算.

（Ⅱ）$g'(0)$也可以按以下方法计算：

由于$t\neq0$时，$g'(t)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}\left(\dfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\sin^{\frac{1}{3}}t+\dfrac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}\sin^{-\frac{2}{3}}t\cos t\right)$，且

$$\lim_{t\to0}g'(t)=\lim_{t\to0}\mathrm{e}^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}\cdot\lim_{t\to0}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\frac{2}{3}}\cos t\right]=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1,$$

所以，$g'(0)=\lim\limits_{t\to0}g'(t)=1$.

（17）$\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt2}\int\csc\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt2}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\left(\csc\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\sec\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt2}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\sec\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+C.$$

附注 应记住以下积分公式：

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C,$$

$$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

（18）对
$$\mathrm{e}^xf(x)+2\mathrm{e}^{\pi-x}f(\pi-x)=3\sin x \tag{1}$$
令$t=\pi-x$，即$x=\pi-t$得

$$\mathrm{e}^{\pi-t}f(\pi-t)+2\mathrm{e}^tf(t)=3\sin t,$$

即
$$2\mathrm{e}^{\pi-x}f(\pi-x)+4\mathrm{e}^xf(x)=6\sin x. \tag{2}$$

式(2)－式(1)得　$\mathrm{e}^xf(x)=\sin x$，所以$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

由于$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(-\sin x+\cos x)\begin{cases}>0, & 0<x<\dfrac{\pi}{4},\\ =0, & x=\dfrac{\pi}{4},\\ <0, & \dfrac{\pi}{4}<x<\pi,\end{cases}$ 所以$f(x)$在$(0,\pi)$内有极大值

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，无极小值.

附注　由于$f(x)$是由式(1)确定，所以要计算它在$(0,\pi)$内的极值，应先确定$f(x)$的表达式.

(19) 记$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[0,1]$上可导，且$F(0)=F(1)(=0)$，所以由罗尔定理知，存在$\eta\in(0,1)$，使得$F'(\eta)=0$. 于是$F'(x)$在$[0,\eta]$上可导，且$F'(0)=F'(\eta)$，所以由罗尔定理知，存在$\eta_1(0,\eta)$，使得$F''(\eta_1)=0$. 同样可知，存在$\eta_2\in(\eta,1)$，使得$F''(\eta_2)=0$.

由此可知，$F''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上满足罗尔定理条件，因此存在$\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$，使得$F^{(3)}(\xi)=0$，即$f^{(3)}(\xi)=0$.

附注　罗尔定理的高阶导数形式有各种叙述，例如，

设$f(x)$在$[a,b]$上2阶可导，且$f(a)=f(c)=f(b)$(其中$c\in(a,b)$)，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

设$f(x)$在$[a,b]$上3阶可导，且$f(a)=f(x_1)=f(x_2)=f(b)$(其中$a<x_1<x_2<b$)，或$f'(a)=f'(\eta)=f'(b)$(其中$\eta\in(a,b)$)，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f^{(3)}(\xi)=0$.

(20) 记$A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则所给等式成为

$$f(x,y)=x\sqrt{y}+\frac{12}{\pi^3}A,$$

上式两边在D上二重积分得

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma+\frac{12}{\pi^3}A\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}xy^{\frac{1}{2}}y+\frac{12}{\pi^3}A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi^5}{15\times16}+\frac{1}{2}A,\end{aligned}$$

即$A=\frac{\pi^5}{120}$. 因此$f(x,y)=x\sqrt{y}+\frac{\pi^2}{10}$.

于是，对$x\in(-\infty,+\infty)$有

$$\begin{aligned}g(x)&=f(\sin^2x,x^4)=x^2\sin^2x+\frac{\pi^2}{10}\\&=\frac{1}{2}x^2(1-\cos2x)+\frac{\pi^2}{10}\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+\frac{1}{6!}(\cos2x)^{(6)}\Big|_{x=\xi}x^6\right]+\frac{\pi^2}{10}\\&=x^4-\frac{1}{3}x^6-\frac{2}{45}(\cos2\xi\cdot x^8)\ (\text{其中}\ \xi\ \text{介于}\ 0\ \text{与}\ x\ \text{之间的实数}).\end{aligned}$$

附注　注意：$\cos x$的$2n$阶带拉格朗型余项的麦克劳公式是

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\frac{1}{(2n+2)!}(\cos x)^{(2n+2)}\Big|_{x=\xi}x^{2n+2},$$

不是 $$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}(\cos x)^{(2n+1)}\Big|_{x=\xi}x^{2n+1}.$$

(21) 所给方程两边对 x 求偏导数得

$$2x+z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ 即\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{4-z}.$$

同样可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{4-z}$. 由于方程组 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2x}{4-z}=0,\\ \frac{2y}{4-z}=0\end{cases}$ 在 D 内部无解,即 $z=z(x,y)$ 在 D 内部无可能极值点.

D 有边界Ⅰ: $y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, Ⅱ: $x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$ 以及Ⅲ: $x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$.

在Ⅰ上,所给方程为 $2x^2+z^2-8z+8=0$,即

$$z=4\pm\sqrt{8-2x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

它有最大值 $4+2\sqrt{2}$,最小值 $4-2\sqrt{2}$. 同样可以算出 z 在Ⅱ上有最大值 $4+2\sqrt{2}$,最小值 $4-2\sqrt{2}$.

在Ⅲ上,所给方程成为

$$2x^2+2(1-x^2)+z^2-8z+8=0,$$

即 $$z=4\pm\sqrt{7-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1).$$

它有最大值 $4+\sqrt{6}$,最小值 $4-\sqrt{7}$.

综上所述,$z=z(x,y)$ 在 D 上的

$$最大值=\max\{4+2\sqrt{2},\ 4+\sqrt{6}\}=4+2\sqrt{2},$$
$$最小值=\min\{4-2\sqrt{2},\ 4-\sqrt{7}\}=4-2\sqrt{2}.$$

附注 在 D 上 $z\neq 4$(这是因为 $z=4$ 时,所给方程在为 $x^2+y^2=4$,这在 D 上是不可能的),所以 $z=z(x,y)$ 在 D 的内部的可能极值点仅来自方程组 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 的解. 因此当它在 D 内无解时,$z=z(x,y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

(22) 使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,必须

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}).\tag{1}$$

由于 $$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(以下同)]{初等行变换}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&2&2&0&4&-2\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right),$$

所以，使式(1)成立的 a，b，c 满足 $\begin{cases}a-1=0,\\b-2=0,\\c-1=0,\end{cases}$ 即 $a=1$，$b=2$，$c=1$.

当 $a=1$，$b=2$，$c=1$ 时，所给的矩阵方程与

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\tag{2}$$

同解. 记 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$，则式(2)等价于以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\tag{5}$$

式(3)的通解为 $(x_{11},x_{21},x_{31})^{\mathrm{T}}=c_1(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}=(-c_1+1,-c_1,c_1)^{\mathrm{T}}$，式(4)的通解为 $(x_{12},x_{22},x_{32})^{\mathrm{T}}=c_2(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(2,2,0)^{\mathrm{T}}=(-c_2+2,-c_2+2,c_2)^{\mathrm{T}}$，式(5)的通解为 $(x_{13},x_{23},x_{33})^{\mathrm{T}}=c_3(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}=(-c_3+1,-c_3-1,c_3)^{\mathrm{T}}$.

所以，式(2)，即所给的矩阵方程的解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-c_1+1&-c_2+2&-c_3+1\\-c_1&-c_2+2&-c_3-1\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\quad(\text{其中 }c_1,c_2,c_3\text{ 都是任意常数}).$$

附注　(Ⅰ)设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$，$m\times l$ 矩阵)，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$.

特别 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$；$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充

分必要条件是 $r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$.

(Ⅱ)当矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解时，可按以下方法求解：如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆(此时 $m=n$)，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；

如果 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则如题解中那样，将 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 表示成若干个线性方程组，然后逐一计算各个方程组的通解，即可得到 $\boldsymbol{X}$.

(23) 由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1，2，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 由于 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 还有特征值0，设它对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\xi}_3$ 满足

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_1)=0, \\ (\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_2)=0,\end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a \qquad -c=0, \\ a+b+c=0. \end{cases}$$

取它的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3$，即 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

由此可知，$\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 $(-1)^2=1$，$2^2=4$，$0^2=0$，且 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 是它们对应的特征向量.

显然，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$(正交矩阵)，则正交变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Qx}$ 将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2$.

附注 应熟练掌握用正交变换或可逆线性变换(即配方方法)将二次型化为标准形的方法.

模拟试题(三)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	B	B	D	C	A	B	C

(1) 当$|x|\leqslant 1$时，由$1\leqslant\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leqslant\sqrt[n]{2}(n=1,2,\cdots)$知$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$;

当$|x|>1$时，$f(x)=|x|^3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left|\frac{1}{x}\right|^{3n}}=|x|^3$,

所以，$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$上可导，但由

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

知，$f(x)$在点$x=1$处不可导. 此外由$f(x)$是偶函数知，$f(x)$在点$x=-1$处也不可导. 因此选(C).

附注 由于$f(x)$是由数列极限确定的，所以要讨论它的可导性，首先要通过数列极限计算，确定$f(x)$的解析表达式.

(2) 由于$F(x)=\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\mathrm{d}x\xlongequal{令\ u=2x-t}\int_0^{2x}\cos^2u\mathrm{d}u$,所以

$$F'(x)=2\cos^2 2x,\ F''(x)=-4\sin 4x.$$

因此选(B)

附注 要计算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)}f(t,x)\mathrm{d}t$时，首先将被积函数中的$x$移到积分号外，或移到积分限中去.

(3) 记$f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^3x}\mathrm{d}x$,则$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\begin{cases}>0, & 0<x<\mathrm{e}\\ =0, & x=\mathrm{e}\\ <0, & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

且$f(x)$的最大值$f(\mathrm{e})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^3x}\mathrm{d}x>0$,以及$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以方程$f(x)=0$,即$\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^3x}\mathrm{d}x$的正根个数为2. 因此选(B)

附注 设函数$f(x)$在(a,b)内可导，且

$$f'(x)\begin{cases}>0, & a<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ <0, & x_0<x<b,\end{cases}\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty,$$

则当$f(x_0)>0$时，在(a,b)内方程$f(x)=0$有且仅有两个实根；当$f(x_0)=0$时，在(a,b)内方程$f(x)=0$有且仅有一个实根；当$f(x_0)<0$时，在(a,b)内方程$f(x)=0$没有实根.

设函数$f(x)$在(a,b)内可导，且

$$f'(x)\begin{cases}<0, & a<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<b,\end{cases}\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty,$$

则当$f(x_0)<0$时，在(a,b)内方程$f(x)=0$有且仅有两个实根；当$f(x_0)=0$时，在(a,b)内方程$f(x)=0$有且仅有一个实根；当$f(x_0)>0$时，在(a,b)内方程$f(x)=0$没有实根.

(4) 由于$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to -1}y=\infty$，且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}y&=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x(x+1)}+x\ln(1+e^x)\right]=\lim_{x\to-\infty}x\ln(1+e^x)\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=0.\end{aligned}$$

所以，所给曲线有铅直渐近线$x=0$，$x=-1$，以及水平渐近线$y=0$. 因此选(D).

附注 考虑所给曲线的非铅直渐近线时，注意到曲线方程中出现e^x，因此要分$x\to+\infty$与$x\to-\infty$两种情形计算.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}$不存在，所以只要计算$x\to-\infty$的情形. 由于$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，所以曲线的非铅直渐近线仅有$y=0$(水平渐近线)

(5) 由于当$AC-B^2=0$时，$f(x_0,y_0)$可能是极值，也可能不是极值，所以(C)不正确. 因此选(C).

附注 (C)的不正确性可用以下例子以明之：

设$f_1(x,y)=x^3+y^3$，记$(x_0,y_0)=(0,0)$，则$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，且$AC-B^2=0$. 此时$f(x_0,y_0)=0$不是$f(x,y)$的极值.

设$f_2(x,y)=x^4+y^4$，记$(x_0,y_0)=(0,0)$，则$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，且$AC-B^2=0$. 此时$f(x_0,y_0)$是$f(x,y)$的极值.

(6) 由于

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t\sin t\,dt&=\int_0^x\sin t\,de^t=e^x\sin x-\int_0^x\cos t\,de^t\\&=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-1+\int_0^x e^t\sin t\,dt\right),\end{aligned}$$

即 $\int_0^x e^t\sin t\,dt=e^x\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+\frac{1}{2}$,所以所给微分方程为

$$y''+2y'+2y=e^x\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+\frac{1}{2}. \tag{1}$$

由于式(1)对应的齐次方程的特征方程 $\lambda^2+2\lambda+2=0$ 有根 $\lambda_{1,2}=-1\pm i$，所以式(1)有特解

$$y^*=e^x(A\sin x+B\cos x)+C. \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得

$$e^x[(4A-4B)\sin x+(4A+4B)\cos x]+2C=e^x\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+\frac{1}{2}.$$

由此得到 $A=0$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=\frac{1}{4}$. 所以 $y^*=-\frac{1}{8}e^x\cos x+\frac{1}{4}$. 因此选(A).

附注　对于2阶常系数线性方程

$$y''+ay'+by=f(x), \tag{1}$$

当 $f(x)$ 为 $e^{\alpha x}P(x)$，$e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x]$(这里 $P(x)$，$Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 都是多项式)，式(1)有确定的特解形式. 因此为了计算本题的特解，应先算出 $\int_0^x e^t\sin t\mathrm{d}t$.

(7) 由于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^*\\(3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & |2\boldsymbol{A}|(2\boldsymbol{A})^{-1}\\(3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 8(2\boldsymbol{A})^{-1}\\(3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,

所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^*\\(3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & ((3\boldsymbol{B})^{-1})^{-1}\\(8(2\boldsymbol{A})^{-1})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}\\\frac{1}{4}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 因此选(B).

附注　题解中应用了以下公式(应记住)：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n\geqslant2)$，$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ (k 是常数).

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 m，n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(8) 由题设知 $r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant3$. 由于当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{Q})=2$，所以此时 $r(\boldsymbol{P})\leqslant1$. 此外，由 $\boldsymbol{P}$ 是非零矩阵知，$r(\boldsymbol{P})\geqslant1$，从而 $r(\boldsymbol{P})=1$. 因此选(C).

附注　本题也可按以下方法计算：

当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})=2$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含 $3-2=1$ 个线性无关的解向量. 从而由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$ 知，非零矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 的线性无关列向量个数为1，即得 $r(\boldsymbol{P})=r(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})=1$.

二、填空题

(9) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)},$$

其中，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$

$$=\ln2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln2-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=2\ln2-1.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{2\ln2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}.$

附注 $\ln(1+x)$ 是$[0,1]$上的连续函数,而$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$是它的一个积分和式，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}y.$$

(10) 记$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则$f(x)=x+2A$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+2A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x,$$

即 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+2A$. 所以

$$A=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\sin x$$

$$=-\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\right)=1-\frac{\pi}{2}.$$

于是$f(x)=x+2-\pi$. 从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2-\pi)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}-\pi.$$

附注 本题获解的关键，是注意到$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$是常数.

(11) 由 $\mathrm{e}^x+\sin y=x$ 得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\mathrm{e}^x}{\cos y}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_u'\cdot\mathrm{e}^x+f_v'\cdot\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{e}^xf_u'+\frac{2(x\cos y+y-y\mathrm{e}^x)}{\cos y}f_v'.$$

附注 计算$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$时，要注意 y 是 x 的函数，而$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可由方程 $\mathrm{e}^x+\sin y=x$ 两边对 x 求导得到.

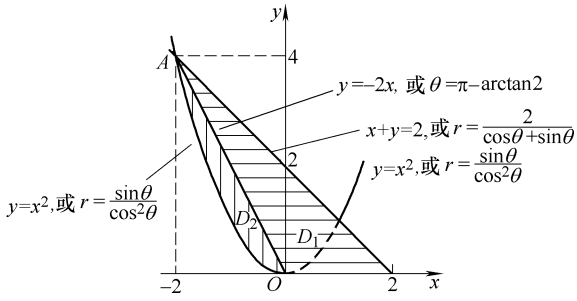
(12)由于所给微分方程可以改写成

$$(x\cos y\mathrm{d}y+\sin y\mathrm{d}x)+(\cos x\mathrm{d}y-y\sin x\mathrm{d}x)=0,$$

即 $\mathrm{d}(x\sin y+y\cos x)=0$. 因此通解为 $x\sin y+y\cos x=C$

附注　对于微分方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$，有时将 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y$，经适当转换后分成若干组，使各组分别是某个二元函数的全微分，由此得到所给微分方程的通解. 本题就是按此方法求解的，十分快捷.

(13) D 如图答 3-13 所示. 用$\overline{AO}$(其中 A 是曲线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 的交点，其坐标为$(-2,\ 4)$)将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分(见图)，所以



图答　3-13

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{\pi-\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\pi-\arctan 2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

附注　顺便写出所给二重积分的先 y 后 x 与先 x 后 y 的二次积分：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x\text{(先 }x\text{ 后 }y\text{ 的二次积分)}$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y\text{(先 }y\text{ 后 }x\text{ 的二次积).}$$

(14) 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$，从而 $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值$\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{-2}=-2$，$\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{-1}=-4$，$\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{1}=4$，$\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{2}=2$. 由此可知 $\boldsymbol{B}^*\sim\begin{pmatrix}-2&&&\\&-4&&\\&&4&\\&&&2\end{pmatrix}$. 所以

$$|\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_4|=\begin{vmatrix}-3&&&\\&-5&&\\&&3&\\&&&1\end{vmatrix}=45.$$

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，有特征值 λ，则 $\boldsymbol{A}^*$ 对应有特征值$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$.

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是相似的 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_n|$.

三、解答题

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x)-f(1)}{\frac{1}{2}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1))-f(1)}{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}\cdot\frac{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}{\frac{1}{2}x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+(\ln(1+x^2)+e^x-x-1))-f(1)}{\ln(1+x^2)+e^x-x-1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)+e^x-x-1}{\frac{1}{2}x^2},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+(\ln(1+x^2)+e^x-x-1))-f(1)}{\ln(1+x^2)+e^x-x-1}\overset{\text{令 }u=\ln(1+x^2)+e^x-x-1}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}$

$=f'(1)=1,$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)+e^x-x-1}{\frac{1}{2}x^2}=2\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\right]=2+2\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}2+2\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=2+2\times\frac{1}{2}=3.$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\ln(1+x^2)+e^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}=1\times3=3.$

附注 由于$f(u)$仅在点 $u=1$ 处可导，因此对所给极限不能直接应用洛必达法则计算，而只能利用导数定义计算.

(16) 所给微分方程
$$y''+y=5e^{2x}+2\sin x \tag{1}$$
对应的齐次微分方程
$$y''+y=0 \tag{2}$$
的特征方程 $\lambda^2+1=0$ 有根 $\lambda=\pm i$，所以式(2)的通解
$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

式(1)有特解 $y^*=Ae^{2x}+x(B_1\cos x+B_2\sin x)$.
将它代入式(1)得
$$5Ae^{2x}-2B_1\sin x+2B_2\cos x=5e^{2x}+2\sin x,$$
由此得到 $A=1$，$B_1=-1$，$B_2=0$. 所以 $y^*=e^{2x}-x\cos x$. 从而式(1)的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}-x\cos x$.

附注 应熟练掌握常系数线性微分方程的解法.

(17)(Ⅰ) 显然$\{a_n\}$是正项数列，且由
$$a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)=\frac{1}{3}\left(a_n+a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)$$
$$\geqslant\sqrt[3]{a_n\cdot a_n\cdot\frac{1}{a_n^2}}=1\,(n=1,2,\cdots)$$
知，$\{a_n\}$有下界. 此外

由 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)-a_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_n^2}-a_n\right)\leqslant0\,(n=1,2,\cdots)$知，$\{a_n\}$单调不增. 从而由数列极限存在准则知，$\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ 存在，记为 a. 对递推式两边取极限得 $a=\dfrac{1}{3}\left(2a+\dfrac{1}{a^2}\right)$,

所以 $a=1$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-1)}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(\sqrt{2-x}+\ln\frac{1+x}{2}\right)}{\sin^2(x-1)}},$$

其中, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left(\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{1+x}{2}\right)}{\sin^2(x-1)}\xlongequal{令\ t=x-1}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left[1+(\sqrt{1-t}-1)+\ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right)\right]}{\sin^2t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1-t}-1+\ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right)}{t^2}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}+\dfrac{1}{2+t}}{2t}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{t\to0}\frac{-t+2(\sqrt{1-t}-1)}{t}=\frac{1}{8}\left[-1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{4}.$$

所以, $\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-1)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

附注　当数列 $\{a_n\}$ 由递推式确定时, 要计算它的极限, 通常使用数列存在准则Ⅱ, 即当 $\{a_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(18) 记 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 则 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+x+3Ay$. 于是有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left(\frac{1}{2}x^2y+x\right)\mathrm{d}\sigma+3A\iint_D y\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$A=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2y+x\right)\mathrm{d}y+3A\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}y\mathrm{d}y=\frac{2}{7}+\frac{3}{10}A.$$

所以 $A=\dfrac{20}{49}$. 从而 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+x+\dfrac{60}{49}y$, 由此得到

$$z=f(x^y,y^x)=\frac{1}{2}x^{2y}\cdot y^x+x^y+\frac{60}{49}y^x.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(2y\cdot x^{2y-1}\cdot y^x+x^{2y}\cdot y^x\ln y)+yx^{y-1}+\frac{60}{49}y^x\ln y$$

$$=x^{2y-1}y^{x+1}+\frac{1}{2}x^{2y}\cdot y^x\ln y+yx^{y-1}+\frac{60}{49}y^x\ln y.$$

附注　算出常数 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是本题获解的关键. 它的计算步骤为:

将 $f(x,y)$ 表示为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+x+3Ay$. 然后将上式两边在 D 上进行二重积分得到

A 的一个方程，解之即得 A.

(19) 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)F(1)=F(0)\cdot[f(1)-1]<0$，所以由连续函数的零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

下面用反证法证明 ξ 的唯一性. 设另有不同于 ξ 的 $\eta\in(0,1)$，使得 $f(\eta)=\eta$. 不妨设 $\eta<\xi$，则

$$f(\xi)-f(\eta)=\xi-\eta.$$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\theta\in(\eta,\xi)\subset(0,1)$，使得

$$f'(\theta)(\xi-\eta)=\xi-\eta，即 f'(\theta)=1.$$

这与题设 $f'(x)\neq 1\ (x\in[0,1])$ 矛盾. 因此满足式(1)的 ξ 是唯一的.

附注 唯一性问题，往往用反证法证明. 本题就是如此.

(20) 所给方程两边对 x 求偏导数得

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+4z+4x\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}=0，即\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+2z}{z+2x+1}.$$

所给方程两边对 y 求偏导数得

$$4y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+4x\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0，即\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{z+2x+1}.$$

解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z=-x,\\ y=0,\end{cases}$ 将它代入题中所给方程得 $x^2+2x-3=0$，即 $x=-3,1$. 所以 $z=z(x,y)$ 的可能极值点为 $\begin{cases}x=-3,\\ y=0\end{cases}$ (此时 $z=3$)，$\begin{cases}x=1,\\ y=0\end{cases}$ (此时 $z=-1$).

由于 $$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\left(2+2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)(z+2x+1)-(2x+2z)\left(\dfrac{\partial z}{x}+2\right)}{(z+2x+1)^2},$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2\dfrac{\partial z}{\partial y}(z+2x+1)-(2x+2z)\cdot 2\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z+2x+1)^2},$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2(z+2x+1)-2y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z+2x+1)^2},$$

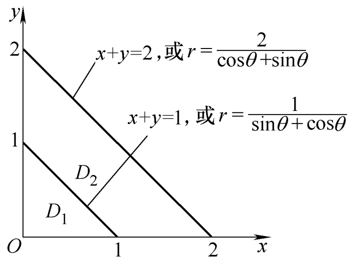
所以，由 $(AC-B^2)\big|_{(-3,0)}=(AC-B^2)\big|_{(-3,0,3)}=1>0$，$A\big|_{(-3,0)}=A\big|_{(-3,0,3)}=1>0$ 知，$z(-3,0)=3$ 是 $z=z(x,y)$ 的极小值.

由 $(AC-B^2)\big|_{(1,0)}=(AC-B^2)\big|_{(1,0,-1)}=1>0$，$A\big|_{(1,0)}=A\big|_{(1,0,-1)}=-1<0$ 知，$z(1,0)=-1$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值.

附注　应熟练掌握二元隐函数极值的计算方法.

(21) 用直线 $x+y=1$ 将 D 划分成 D_1 与 D_2 两部分(如图答 3-21), 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} x\ln x\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$



图答　3-21

其中 $$\iint\limits_{D_1} x\mathrm{lnd}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} x\ln x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1}(x-x^2)\ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$= \left[\ln x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}x^3\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{5}{36},$$

$$\iint\limits_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{r^3}\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1.$$

所以, $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{5}{36}+1 = \frac{31}{36}.$

附注　D_1 与 D_2 都是角域的一部分, 但是 $\iint\limits_{D_1} x\ln x\,\mathrm{d}\sigma$ 按直角坐标计算, 而 $\iint\limits_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$ 按极坐标计算, 这主要是由于后者的被积函数是 x^2+y^2 的函数.

(22) 由于
$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&2\\a&b&c&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&-3&3&1\\0&b-a&c+2a&-a\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&1&-1&-\frac{1}{3}\\0&b-a&c+2a&-a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{4}\\0&1&-1&-\frac{1}{3}\\0&0&a+b+c&-\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b\end{array}\right),$$

所以由题设知, $\begin{cases}a+b+c=0,\\-\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b=0,\\a=2,\end{cases}$ 即 $a=2$, $b=8$, $c=-10$. 此时(Ⅰ)与(Ⅱ)

$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{4}{3},\\x_2-x_3=-\frac{1}{3}\end{cases}$ 同解. (Ⅱ)的导出组的基础解系为 $C(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 此外, (Ⅱ)有一特解

$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$，所以(Ⅰ)的通解为

$$(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}=C(1,\ 1,\ 1)+\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0\right)^{\mathrm{T}}(\text{其中 }C\text{ 是任意常数}).$$

对上述算得的 a，b，c 知，$\boldsymbol{\xi}=(2,\ 8,\ -10)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 关于向量组 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的线性表示式为

$$\boldsymbol{\xi}=y_1\boldsymbol{\eta}_1+y_2\boldsymbol{\eta}_2+y_2\boldsymbol{\eta}_3=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

所以，$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)^{-1}\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\16\\-8\end{pmatrix},$$

因此所求的线性表示式为

$$\boldsymbol{\xi}=26\boldsymbol{\eta}_1+16\boldsymbol{\eta}_2-8\boldsymbol{\eta}_3.$$

附注　由所给方程组有两个不同的解可得，这个方程组对应的齐次线性方程组有非零解，所以系数矩阵的秩≤2. 此外由系数矩阵本身可知，其秩≥2. 因此系数矩阵的秩为 2. 从而有$\begin{cases}a+b+c=0,\\-\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b=0,\\a=2.\end{cases}$

(23) 由于 $g(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1-x_2)^2+3x_2^2+x_3^2$ 在

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2,\\y_2=\sqrt{3}x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}\quad\text{即}\quad\text{可逆线性变换}\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2,\\x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2,\\x_3=y_3\end{cases}$$

下，成为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$，所以 $g(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 是正定二次型，其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

由于 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 是非正定二次型，所以它的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&c\end{pmatrix}$$

的顺序主子式不全为正，故有 $c\leqslant 2$. 从而由题设 $c\geqslant 2$ 得 $c=2$ 于是

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

由于 $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$，所以 A 有特征值 $\lambda=0$，1，3.

设 A 对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\xi=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则它满足

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}，即\begin{cases}a_1\qquad+a_3=0,\\ \qquad a_2+a_3=0.\end{cases}$$

可取它的基础解系为 ξ，即 $\xi=(-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

设 A 的对应 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\eta=(b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$，则它满足

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\mathbf{0},\quad 即\begin{cases}\qquad\qquad b_3=0,\\ b_1+b_2+b_3=0.\end{cases}$$

可取它的基础解系为 η，即 $\eta=(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

设 A 的对应 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\zeta=(c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 A 是实对称矩阵知

$$\begin{cases}(\zeta, \xi)=0,\\(\zeta, \eta)=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-c_1-c_2+c_3=0,\\ c_1-c_2\qquad=0.\end{cases}$$

可取它的基础解系为 ζ，即 $\zeta=(1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

显然，ξ，η，ζ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\xi^0=\frac{\xi}{\|\xi\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta^0=\frac{\eta}{\|\eta\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\zeta^0=\frac{\zeta}{\|\zeta\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},$$

记 $Q=(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$（正交矩阵），则正交变换 $x=Qz$（其中 $x=$

$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$)将$f(x_1, x_2, x_3)$化为标准形 $z_2^2+3z_3^2$.

附注 由于$\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(x_1, x_2, x_3)$($\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵)为正定二次型的充分必要条件是它的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的顺序主子式都大于零. 故当题中$f(x_1, x_2, x_3)$不是正定二次型时，它的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix}$的顺序主子式 1，$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}|=c-2$ 不全大于零. 于是有 $c\leqslant 2$.

模拟试题(四)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	D	B	B	A	C	A	C	A

(1) 设$f(x)=x$，则$f(x)$只有一个零点，但$f'(x)$没有零点．表明选项(A)不正确．

设$f(x)=x^2$，则$f'(x)$只有一个零点，但$f(x)$也只有一个零点．表明选项(B)不正确．

设$f(x)=e^x$，则$f(x)$没有零点，且$f'(x)$也没有零点．表明选(C)不正确．

因此选(D)

附注　(D)的结论可用反证法证明其正确，具体如下：

设$f(x)$有两个零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则由罗尔定理知，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$f'(\xi)=0$，这与$f'(x)$没有零点相矛盾，从而$f(x)$至多有一个零点．

(2)由$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点知，$(x_0,-f(x_0))$是曲线$y=-f(x)$的拐点．因此选(B)

附注　实际上，$(-x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(-x)$的拐点，$(-x_0,-f(x_0))$是曲线$y=-f(-x)$的拐点．

(3) 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上，$\sin(\sin x)\leqslant\sin x$(仅在点$x=0$处取等号)，$\cos(\sin x)\geqslant\cos x$(仅在点$x=0$处取等号)，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$$

故有$I_1<I_3$．因此选(B)

附注　选项(A)是不正确的，这是由于

$$\begin{aligned}I_1-I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\cos t)-\sin(\sin t)]\,dt\quad\left(\text{其中 }x=\frac{\pi}{2}-t\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\cos x)-\sin(\sin x)]\,dx=0,\end{aligned}$$

所以，$I_1=I_2$．

(4) 由于$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

$$=\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \quad \left(\text{其中 } x=\frac{1}{t}\right)$$

$$=\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=0.$$

所以选(A).

附注 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}=0$，所以本题是积分区间无穷长的反常积分.

(5) 当$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$时，

$$f_x'(x,\ y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y'(x,\ y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

并且 $f_x'(0,\ 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=0$，$f_y'(0,\ 0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,\ y)-f(0,\ 0)}{y}=0$，

所以，$f_{xy}''(0,\ 0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x'(0,\ y)-f_x'(0,\ 0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-\dfrac{y^5}{y^4}}{y}=-1$，

$$f_{yx}''(0,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y'(x,\ 0)-f_y'(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^5}{x^4}}{x}=1.$$

故 $f_{xy}''(0,\ 0)<f_{yx}''(0,\ 0)$. 因此选(C).

附注 在已算出$f_x'(x,\ y)$时可按以下方法快捷算出$f_y'(x,\ y)$，这是因为当$\varphi(y,\ x)=-\varphi(x,\ y)$时，$\varphi_y'(x,\ y)=-\varphi_x'(y,\ x)$. 所以本题有

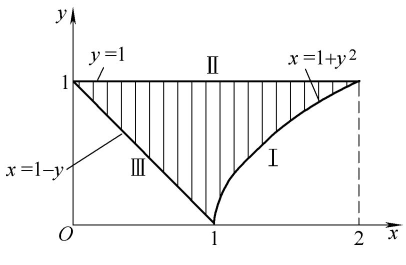
$$f_y'(x,\ y)=-\left.\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right|_{x\text{与}y\text{互换}}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

(6) 由于 $D=\{(x,\ y)\mid 1-y\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}+\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\ \sqrt{x-1}\leqslant y\leqslant 1\}$，如图答 4-6 的阴影部分所示.

D 的边界由Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三部分组成. 显然Ⅱ，Ⅲ上任一点的切线都为它们自己，从而不可能与直线 $y=x-1$ 平行.

设$(x_0,\ y_0)(x_0=1+y_0^2,\ 0<y_0<1)$是Ⅰ上的一点，则此点的切线斜率倒数是 $2y_0$. 于是由题设得$\dfrac{1}{2y_0}=1$，即 $y_0=\dfrac{1}{2}\left(\text{对应地有 } x_0=\dfrac{5}{4}\right)$. 从而所求的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=x-\frac{5}{4}，\text{即 } y=x-\frac{3}{4}. \text{ 因此选(A).}$$



图答 4-6

附注 要计算Ⅰ上的与直线 $y=x-1$ 平行的切线方程，应先确定切点的坐标.

(7) 由于 $|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & t+2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & t-7 & t+6 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 4 & -5 & 8 \\ 4 & t-7 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & t-9 & t-2 \end{vmatrix} = 14(t-2),$$

所以，$t=2$ 时，$|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)| = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；$t=3$ 时，$|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)| \neq 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 由此可知，结论①④正确. 因此选(C).

附注　确定 n 个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关性的好方法是计算行列式 $D = |(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)|$. 如果 $D=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；如果 $D\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(8) 由 $|\lambda \boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda-1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1$(二重)，$\lambda=-1$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，所以 $r(1\cdot \boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A}) = 3-2=1$，即

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1，\text{从而} -a=b. \tag{1}$$

用 $-b-1$ 代替 b，$\boldsymbol{A}$ 就成为 $\boldsymbol{B}$，所以由 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化得

$$-a = -b-1. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$. 因此选(A).

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有好多种，其中常用的有：

设 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ_1，λ_2，…，λ_s，它们的重数分别为 n_1，n_2，…，n_s($n_1+n_2+\cdots+n_s=n$)，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件为

$$r(\lambda_i \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}) = n - n_i (i=1, 2, \cdots, s).$$

二、填空题

(9) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3}{(x-1)^2} + x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}} = 1+1=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}+x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-2x\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]+\lim_{x\to\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$
$$=2+\lim_{x\to\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$
$$\overset{令 t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}2+\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}$$
$$\overset{洛必达法则}{=\!=\!=\!=}2+\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

所以，所给曲线的非铅直渐近线方程为 $y=2x+\dfrac{5}{2}$.

附注 对于曲线 $y=f(x)$，如果极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}$ 存在为 a，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)$ 存在为 b，则该曲线的非铅直渐近线方程为 $y=ax+b$.

(10) 由于 $(\sin x^3)^3$ 是奇函数，所以它在点 $x=0$ 处的 4 阶导数为 0.

由于 $(\ln\cos x)'=-\tan x$，$(\ln\cos x)''=(-\tan x)'=-\sec^2x$，

$(\ln\cos x)^{(3)}=(-\sec^2x)'=-2\sec^2x\tan x$，

所以，$$(\ln\cos x)^{(4)}\Big|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln\cos x)^{(3)}-(\ln\cos x)^{(3)}\big|_{x=0}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sec^2x\tan x}{x}=-2.$$

从而 $f^{(4)}(0)=0+(-2)=-2$.

附注 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处任意阶可导，则

当 $f(x)$ 是奇函数时，$f^{(2k)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$；

当 $f(x)$ 是偶函数时，$f^{(2k+1)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$.

(11) 令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln x$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

将它们代入所给微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t.\tag{1}$$

式(1)的齐次微分方程的通解为 $Y=c_1+c_2\mathrm{e}^{2t}$. 式(1)有特解 $y^*=t(A+Bt)$，将它代入式(1)得 $A=B=-\dfrac{1}{4}$，即 $y^*=t\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}t\right)=-\dfrac{1}{4}(t+t^2)$，所以式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=c_1+c_2\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{4}(t+t^2)=c_1+c_2x^2-\frac{1}{4}(\ln x+\ln^2x).$$

附注　$x^2y''+axy'+by'=f(x)$ 是 2 阶欧拉方程，令 $x=e^t$ 可将它转化成 2 阶常系数线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=f(e^t).$$

(12) $\int_{-1}^{1}(|x|e^{-x}+\sin x^3+\sqrt{1-x^2})dx=\int_{-1}^{1}|x|e^{-x}dx+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

$$=\int_{-1}^{0}-xe^{-x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-x}dx+\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{0}xde^{-x}-\int_{0}^{1}xde^{-x}+\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(xe^{-x}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{-x}dx\right)-\left(xe^{-x}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{-x}dx\right)+\frac{\pi}{2}$$

$$=2-\frac{2}{e}+\frac{\pi}{2}.$$

附注　利用定积分几何意义有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\text{上半单位圆的面积}=\frac{\pi}{2}.$$

(13) 由于 $\iint\limits_D(x^2+4y^2+xy)d\sigma=\iint\limits_D(x^2+4y^2)d\sigma+\iint\limits_D xyd\sigma$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma\left(\text{由于 }D\text{ 关于 }x\text{ 轴对称,而 }xy\text{ 在对称点处的值互为相反数,所以}\iint\limits_D xyd\sigma=0\right)$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{a\cos\theta}r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)rdr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}a^4\cos^4\theta(4-3\cos^2\theta)d\theta=2a^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta-\frac{3}{2}a^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$$

$$=2a^4\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}a^4\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{64}\pi a^4.$$

所以，由题设得 $\frac{9}{64}\pi a^4=\frac{9}{64}\pi$，即 $a=1$.

附注　本题题解有以下两点值得注意：

(Ⅰ) 计算二重积分时，应先利用积分区域的对称性，对所给的二重积分进行化简.

(Ⅱ) 记住公式：对大于 1 的正整数 n 有

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{n\cdot(n-2)\cdots2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数时},\\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots2}{n(n-2)\cdots3}, & n\text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

(14) 由题设得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是式(1)可以表示为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的最大特征值为 2，从而 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为 2.

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果它们相似，则

(Ⅰ) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(Ⅱ) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

(Ⅲ) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

(Ⅳ) $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

(Ⅴ) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{B}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

三、解答题

(15) 由 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处左连续知，

$$A=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)^2\sin\pi x}\overset{\text{令 }t=1-x}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t^2\sin\pi t}=\frac{1}{\pi^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{t^3}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{\pi}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos\pi t}{3t^2}=\frac{1}{3\pi}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(\pi t)^2}{t^2}=\frac{\pi}{6}.$$

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 作变量代换，将 $x\to1^-$ 转换成 $t\to0^+$.

(Ⅱ) 对 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t^2\sin\pi t}$ 在应用洛必达法则之前，先用等价无穷小代替，将未定式极限简化为 $\frac{1}{\pi^2}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{t^3}$.

(16) 由题设知，$x=A(t)=\int_{-1}^{t}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(t^3+1)$，此外由

$$s(t)=\int_{-1}^{t}\sqrt{1+[(x^2)']^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{t}\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

得 $y=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+4t^2}$. 于是 C_1 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}(t^3+1),\\ y=\sqrt{1+4t^2}\end{cases}(-1\leqslant t\leqslant1).\tag{1}$$

记由式(1)确定的函数为 $y=y(x)$，则

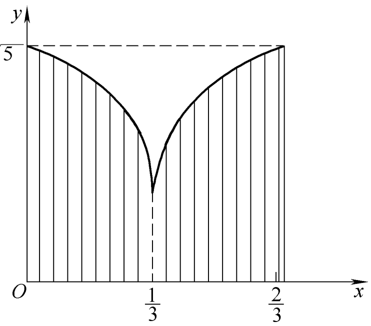
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4}{t\sqrt{1+4x^2}}\begin{cases}<0, & -1<t<0\left(即\ 0<x<\dfrac{1}{3}\right),\\ >0, & 0<t<1\left(即\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}\right),\end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4(1+2t)^2}{t^2(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}>0\quad\left(-1<t<1,\ 即\ 0<x<\frac{3}{2}\right).$$

于是 $y=y(x)\ \left(0<x<\dfrac{2}{3}\right)$的概图如图答 4-16 所示. 因此

$$V=\pi\int_0^{\frac{2}{3}}y^2(x)\,dx\xlongequal{参数方程(1)代入}\pi\int_{-1}^{1}(1+4t^2)\cdot t^2\,dt$$

$$=2\pi\int_0^1(t^2+4t^4)\,dt=\frac{34}{15}\pi.$$



图答　4-16

附注　本题的关键是由 C_1 的参数方程，画出 C_1 的概图.

(17) 记$f(x)=xe^{2x}-2x-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2$，则$f(x)$在[0, 1]上连续，且

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2+\sin x+x,$$

$$f''(x)=4e^{2x}+4xe^{2x}+\cos x+1>0\ (x\in(0,1)),$$

所以，由$f'(0)f'(1)=(-1)\times(3e^2-1+\sin1)<0$知，存在唯一的$x_0\in(0,1)$，使得

$$f'(x)\begin{cases}<0, & x\in(0,x_0),\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x\in(x_0,1).\end{cases}$$

于是$f(x)<f(0)=-1<0(x\in[0,x_0])$，即方程$f(x)=0$在$[0,x_0]$上无实根.

由于$f(x_0)f(1)=f(x_0)\left(e^2-2-\cos1+\dfrac{1}{2}\right)<0$，且$f(x)$在$(x_0,1)$内单调增加，所以方程$f(x)=0$在$(x_0,1)$内有且仅有一个实根.

综上所述，方程$f(x)=0$在(0, 1)内有且仅有一个实根.

附注　由于$f'(x)$在(0, 1)内是变号的，所以不能由$f(0)f(1)<0$确定方程$f(x)=0$在(0, 1)内有且仅有一个实根. 因此需进一步分析，即考虑$f''(x)$. 本题就是按此思路求解的.

(18) 由于$\varphi(x)$可导，且由$\varphi(x)$单调知它的反函数$\varphi^{-1}(x)$存在. 于是

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\,dt=\varphi^{-1}(\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx}$$

$$=x[f_u'(x,f(x,x))+f_v'(x,f(x,x)(f_u'(x,x)+f_v'(x.x)],$$

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\mathrm{d}t\right|_{x=1}=f_u'(1,1)+f_v'(1,1)[f_u'(1,1)+f_v'(1,1)]$

$$=f_u'(1,1)+f_v'(1,1)(2+3)=2+3(2+3)=17.$$

附注 题解中应注意的是:$\varphi^{-1}(\varphi(x))=x$.

(19) 记 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 则所给等式成为

$$f(x,y)=xy+A,$$

于是有
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma+A\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma,\tag{1}$$

其中$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}xy\mathrm{d}y=\dfrac{1}{12}$,$\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}$.

将它们代入式(1)得

$$A=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A,\ \text{即}\ A=\frac{1}{8},$$

所以, $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$. 从而

$$\begin{aligned}f(\mathrm{e}^x,\sin x)&=\mathrm{e}^x\sin x+\frac{1}{8}\\&=\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^6)\right)+\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{8}+x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)\end{aligned}$$
(即为有求的带佩亚诺型余项的 5 阶麦克劳林展开式).

附注 计算初等函数的带佩亚诺型余项的麦克劳林展开式, 通常总是利用常用函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$ 等的带佩亚诺型余项的适当阶麦克劳林公进行计算.

(20) 所给微分方程
$$\frac{4}{\pi^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=x\tag{1}$$

对应的齐次微分方程的通解为 $Y=C_1\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+C_2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$. 此外, 式(1)有特解 $y^*=x$. 所以式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos\frac{\pi}{2}x+C_2\sin\frac{\pi}{2}x+x,\tag{2}$$

且
$$y'=-\frac{\pi}{2}C_1\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}C_2\cos\frac{\pi}{2}x+1.\tag{3}$$

将 $y(0)=1$, $y'(0)=1+\dfrac{\pi}{2}$代入式(2)、式(3)得 $C_1=C_2=1$, 所以

$$y(x)=\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x+x.$$

$$\lim_{x\to0}[y(x)]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln y(x)}{x}},$$

其中，$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln y(x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)}{y(x)}=\frac{y'(0)}{y(0)}=1+\frac{\pi}{2}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}[y(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{1+\frac{\pi}{2}}$.

附注　注意题解中$\lim\limits_{x\to 0}[y(x)]^{\frac{1}{x}}$的计算方法. 它不是将已算出的 $y(x)$ 的表达式代入计算，而是应用洛必达法则和 $y(0)=1$，$y'(0)=1+\dfrac{\pi}{2}$直接计算的，比较快捷.

(21)(Ⅰ)令 $u=x^2+y^2$，则 $z=uf(u)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(u)+2xuf'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(u)+8x^2f'(u)+2uf'(u)+4x^2uf''(u),$$

同样可得$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(u)+8y^2f'(u)+2uf'(u)+4y^2uf''(u)$.

于是由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0.$$

即 $$[u^2f'(u)+uf(u)]'=0.$$

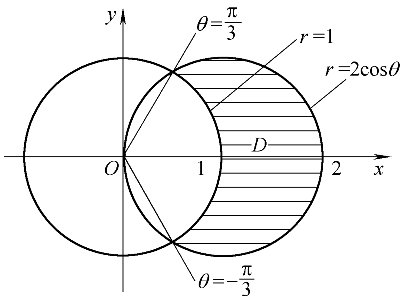
所以， $$u^2f'(u)+uf(u)=C_1. \tag{1}$$

将$f(1)=0$，$f'(1)=1$ 代入式(1)得 $C_1=1$. 所以式(1)成为

$$u^2f'(u)+uf(u)=1,\text{ 即 }\quad f'(u)+\frac{1}{u}f(u)=\frac{1}{u^2}\quad\text{(线性微分方程)}$$

它的通解为 $$f(u)=e^{-\int\frac{1}{u}du}\left(C+\int\frac{1}{u^2}e^{\int\frac{1}{u}du}du\right)=\frac{C_2}{u}+\frac{\ln u}{u}. \tag{2}$$

将$f(1)=0$ 代入式(2)得 $C_2=0$，所以$f(u)=\dfrac{\ln u}{u}$ $(u\geqslant 1)$.



图答　4-21

(Ⅱ) D 如图答 4-21 阴影部分所示. 所以

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)d\sigma\xlongequal{\text{极坐标}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}r\cdot\frac{\ln r^2}{r^2}\cdot rdr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}2\ln rdr=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}r(\ln r-1)\Big|_1^{2\cos\theta}d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta(\ln 2\cos\theta-1)d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}[(\ln 2-1)+\ln\cos\theta]d\sin\theta$$

$$=8\left\{[(\ln 2-1)+\ln\cos\theta]\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec\theta-\cos\theta)d\theta\right\}$$

$$=8\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+[\ln(\sec\theta+\tan\theta)-\sin\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right\}=8\ln(2+\sqrt{3})-8\sqrt{3}.$$

附注 由于 D 是角域的一部分，而且被积函数是 x^2+y^2 的函数，所以题解中用极坐标计算所给的二重积分.

(22) 由 $\boldsymbol{A}$ 有零特征值知，

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&0&a-3\end{pmatrix}=a-1=0，即\ a=1.$$

要使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，必须 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$. 于是由

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&2&2&3\\2&1&5&3&4&8\\-1&0&-2&b+1&c-2&-3\end{array}\right)(即将\ a=1\ 代入)$$

$$\xrightarrow{初等行变换}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&2&2&3\\0&1&1&-1&0&2\\0&0&0&b+3&c&0\end{array}\right)$$

知 $\begin{cases}b+3=0,\\c\quad\ \ =0,\end{cases}$ 即 $b=-3$，$c=0$.

设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$，并将 $a=1$，$b=-3$，$c=0$ 代入，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 与

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\-1&0&2\end{pmatrix}\tag{1}$$

同解，而式(1)即为以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.\tag{4}$$

显然，式(2)的通解为 $C_1(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(2,-1,0)^{\mathrm{T}}=(2C_1+2,C_1-1,-C_1)^{\mathrm{T}}$，

式(3)的通解为 $C_2(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(2,0,0)^{\mathrm{T}}=(2C_2+2,C_2,-C_2)^{\mathrm{T}}$，

式(3)的通解为 $C_3(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,2,0)^{\mathrm{T}}=(2C_3+3,C_3+2,-C_3)^{\mathrm{T}}$.

所以，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2C_1+2&2C_2+2&2C_3+3\\C_1-1&C_2&C_3+2\\-C_1&-C_2&-C_3\end{pmatrix}$(其中 C_1，C_2，C_3 是任意常数).

附注　矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解法同模拟试题(二)(22)的解答.

(23)(Ⅰ)由于 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$，所以 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=0$ 的解为 $a=1,\ -2$.

当 $a=1$ 时，由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right)$ 知，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a=-2$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

知，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 设表示式为 $\boldsymbol{\beta}=x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}. \tag{1}$$

由以上的初等行变换知，式(1)与方程组 $\begin{cases}x\quad -z=1,\\ y-z=0\end{cases}$ 同解，它对应的齐次方程组的通解为 $c(1,1,1)^{\mathrm T}$，且有特解 $(1,0,0)^{\mathrm T}$. 所以式(1)的通解为 $(x,y,z)^{\mathrm T}=c(1,1,1)^{\mathrm T}+(1,0,0)^{\mathrm T}=(c+1,c,c)$. 从而所求的 $a=-2$，线性表示式的一般形式及 $\boldsymbol{\beta}=(c+1)\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3$(其中 c 是任意常数).

(Ⅱ)由于 $a=-2$ 时，

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\\lambda&\lambda+2&-1\\\lambda&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\0&\lambda+3&-3\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0,3,-3$.

设对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm T}$，则 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

由于 $\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

所以式(1)与方程组$\begin{cases} a_1 \quad\quad - a_3 = 0, \\ a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$同解，故 $\boldsymbol{a}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{a}=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{b}$ 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

由于 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以式(2)与方程组$\begin{cases} b_1 \quad\quad + b_3 = 0 \\ b_2 \quad\quad\quad = 0 \end{cases}$同解，故 $\boldsymbol{b}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都正交，所以有$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 \quad\quad - c_3 = 0, \end{cases}$故 $\boldsymbol{c}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{c}=(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是正交向量组，现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\zeta}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$(正交矩阵)，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$化为标准形 $3y_2^2-3y_3^2$.

附注　由于当 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|\neq 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示. 因此题解从 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|=0$ 入手.

模拟试题(五)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	A	B	C	D	C	C	B

(1) $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)\sin\dfrac{\pi}{2x}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-1.$$

因此选(C).

附注　计算分段函数在分段点处的导数，总是从导数定义出发.

(2) 由于

$|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=-\sin\pi x$;

$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=x$;

$x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=1$,

$x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin x}{x^n+x^2-1}=-1$,

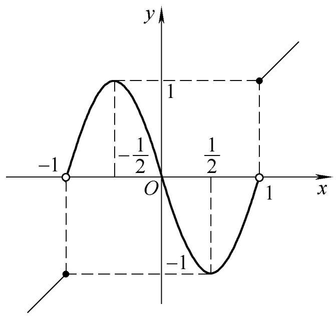
所以，$y=f(x)=\begin{cases}-\sin\pi x, & |x|<1,\\ x, & |x|\geqslant1\end{cases}$的图形如图答 5-2 所示，由图可知，$f(x)$的极大值为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$，极小值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$. 因此选(A).

附注　画图得到正确选项，是解选择题的常用方法之一.

(3) 所给方程两边对 x 求导得

$$2xy^2+2x^2yy'+y'=0,$$

所以有　$y'=-\dfrac{2xy^2}{2x^2y+1}\begin{cases}>0, & x<0,\\ =0, & x=0,\\ <0, & x>0.\end{cases}$由此可知 $y=y(x)$ 有最大值 $y(0)=1$，无最小值. 因此选(B).



图答　5-2

附注　本题也可以用以下方法求解

由所给方程知 $y(0)=1$. 当 $x\neq0$ 时，方程可以改写成

$$y^2+\frac{1}{x^2}y-\frac{1}{x^2}=0,$$

它的 $y>0$ 的解为 $y=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x^2}=\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}+1}$. 由此可知，当 $x\neq 0$ 时，$y<1$. 从而 $y(0)=1$ 是 $y=y(x)$ 的最大值. 由于 $x\to\infty$ 时，$y(x)>0$，但 $y(x)\to 0$，所以 $y=y(x)$ 无最小值.

(4) 由于
$$\varphi(x,y)=\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{y^2}f\left(\frac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$$
$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{v}{y}}\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{y}\mathrm{d}u\int_0^{\frac{u}{y}}f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{\text{令 } z=\frac{u}{y}}\int_0^{\frac{y}{x^2}}\mathrm{d}z\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
所以，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{\frac{y}{x^2}}f(t)\,\mathrm{d}t$. 从而$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x^4}f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$. 因此选(C).

附注 要对$\displaystyle\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{y^2}f\left(\frac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$ 关于 y 求偏导数，应首先把被积函数中的 y 移到外层积分限或移出外层积分号. 本题题解就是如此处理的.

(5) 对于选项(D)，由 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}=0$. 所以有 $f'_x(0,0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}\right]=0$. 同样可得 $f'_y(0,0)=0$. 于是由 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$
所以，由二元函数可微的定义知，$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微. 因此选(D)

附注 显然，选项(A)，(B)不是$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充分条件. 选项(C)也不是充分条件. 例如$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，由
$$f'_x(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0，\text{特别由} f'_x(0,0)=0 \text{知，}$$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'_x(x,0)=f'_x(0,0)$. 同样可得$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'_y(0,y)=f'_y(0,0)$. 但是由
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq 0.$$
知，$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

(6) 显然选项(A)，(B)的微分方程不可能有特解 y_1，y_2，y_3.

下面考虑选项(C)：

由于$\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=1+\ln x$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{x}$，所以，$x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}+y_1=0$.

由于$\frac{dy_2}{dx}=2+\ln x$，$\frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{1}{x}$，所以，$x^2\frac{d^2y_2}{dx^2}-x\frac{dy_2}{dx}+y_2=0$.

由于 $y_3=3y_1-y_2$，所以它必满足 $x^2\frac{d^2y_3}{dx^2}-x\frac{dy_3}{dx}+y_3=0$. 因此选(C)

附注　(C)是正确的选项，也可如下证明：

令 $x=e^t$，则 $y_1=te^t$，$y_2=te^t+e^t$，$y_3=2te^t-e^t$，选项(C)中的微分方程(欧拉方程)成为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{1}$$

由于式(1)的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ 有根 $\lambda=1$(二重)，所以它有特解 e^t，te^t，从而有特解 y_1，y_2，y_3.

(7)由于选项(C)与(D)中有且仅有一个是正确的. 因此只要考虑这两个选项即可. 由 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})\leqslant n<n+1$ 知，$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 因此选(C).

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则

$r(\boldsymbol{A})=n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充分必要条件；

$r(\boldsymbol{A})<n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件.

(8)$\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1，1，2. 由 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$ 知，选项(A)的矩阵$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$有特征值 $\lambda=3$，-1(二重)，它与 $\boldsymbol{A}$ 有不同特征值，故不与 $\boldsymbol{A}$ 相似，因此不能选(A).

对于选项(B)的矩阵$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$，由$\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$知，它有特征值 -1，1，2，即与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，所以这个实对称矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 相似且合同. 因此选(B)

附注　(Ⅰ)设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件有以下两类：

(ⅰ)存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(ⅱ)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，或者 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值(n_i 重以 n_i 个计算).

(Ⅱ)设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有以下三类：

(ⅰ)存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$,

(ⅱ)二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$)有相同的规范形，或者这两个二次型有相同的正惯性指数，也有相同的负惯性指数.

(ⅲ)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值(n_i 重的以 n_i 个计算).

二、填空题

(9) 由 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)+1}{x}}{\dfrac{x-\sin x}{x^3}}$ 知，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{洛必达法则}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

所以，$f(0)=-1$，$f'(0)=\dfrac{1}{3}$. 因此所求的切线方程为

$$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-0)，即\ y=\frac{1}{3}x-1.$$

附注 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-k}{x-x_0}=A$ (A，k 是常数)，则 $f(x_0)=k$，$f'(x_0)=A$.

(10) 由 $\arcsin x=\dfrac{x}{\sqrt{1-\xi^2(x)}}$ 得 $\xi=\dfrac{\sqrt{\arcsin^2x-x^2}}{\arcsin x}$. 所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\arcsin^2x-x^2}}{x\arcsin x}\xlongequal{令\ t=\arcsin x}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t^2-\sin^2t}}{t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t+\sin t}{t}}\cdot\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t-\sin t}{t^3}},$$

其中

$$\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t+\sin t}{t}}=\sqrt{\lim_{t\to0}\frac{t+\sin t}{t}}=\sqrt{2},$$

$$\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t-\sin t}{t^3}}=\sqrt{\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t^3}}\xlongequal{洛必达法则}\sqrt{\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{3t^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

因此

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

附注 只有对 $x\in(0,1)$，存在唯一的 ξ 时，ξ 才是 x 的函数，才可以写成 $\xi(x)$. 下面证明上述的 ξ 是唯一的.

对函数 $\arcsin t$ 在 $[0,x]$ ($x\in(0,1)$) 上应用拉格朗日中值定理，如果在 $(0,x)$ 内存在两个 ξ_1，ξ_2，使得

$$\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\xi_1^2}},\quad \arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\xi_2^2}},$$

则 $\xi_1=\xi_2$，由此证明了唯一性.

(11) $$\int_{-1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}e^{2f(x)}\sin x\mathrm{d}x+\int_{1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}e^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x+\int_{1}^{\pi}x^2\sin x\mathrm{d}x=-\int_{1}^{\pi}x^2\mathrm{d}\cos x$$

$$=-\left(x^2\cos x\Big|_1^{\pi}-\int_1^{\pi}2x\cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \pi^2 + \cos 1 + \int_0^{\pi} 2x \mathrm{d}\sin x$$
$$= \pi^2 + \cos 1 + \left(2x\sin x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x\right)$$
$$= \pi^2 + \cos 1 - 4.$$

附注　由于 $\mathrm{e}^{\cos x}\sin x$ 是奇函数，所以题解中 $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\cos x}\sin x \mathrm{d}x = 0$.

(12) 由于 $z_x' = \cos(xy) \cdot y + \varphi_u' + \varphi_v' \cdot \dfrac{1}{y}$，所以

$$z_{xy}'' = -\sin(xy) \cdot xy + \cos(xy) + \varphi_{uv}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \varphi_{vv}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y} + \varphi_v' \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$
$$= -xy\sin(xy) + \cos(xy) - \frac{x}{y_2}\left(\varphi_{uv}'' + \frac{1}{y}\varphi_{vv}''\right) - \frac{1}{y^2}\varphi_v'$$
$$= -xy\sin(xy) + \cos(xy) - \frac{1}{y^2}\varphi_v'.$$

附注　要熟练掌握二元复合函数的 1，2 阶偏导数的计算

(13) 所给微分方程　　$y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x} + x$　　(1)

对应的齐次微分方程　　$y'' + 2y' + y = 0$ 的通解为

$$Y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}.$$

此外，式(1)有特解

$$y^* = Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B + Cx.$$

将它代入式(1)得

$$(2A\mathrm{e}^{-x} - 4Ax\mathrm{e}^{-x} + Ax^2\mathrm{e}^{-x}) + 2(2Ax\mathrm{e}^{-x} - Ax^2\mathrm{e}^{-x} + C)$$
$$+ (Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B + Cx) = 2\mathrm{e}^{-x} + x.$$

由此得到 $A = 1$，$B = -2$，$C = 1$. 所以

$$y^* = x^2\mathrm{e}^{-x} - 2 + x.$$

因式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x} - 2 + x.$$

附注　由于式(1)的右边为 $2\mathrm{e}^{-x}$ 与 x 两项之和，其中 $2\mathrm{e}^{-x} \xlongequal{记} 2\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的 $\lambda = -1$ 是齐次微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ 的二重根，所以，$y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$ 有形如 $Ax^2\mathrm{e}^{-x}$ 的特解. 此外，$y'' + 2y' + y = 0 = x$ 有形如 $B + Cx$ 的特解. 从而式(1)有形如 $y^* = Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B + Cx$ 的特解.

(14) 由于 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$，即 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$.　　(1)

此外，由 $r(\boldsymbol{A}) = n$ 及 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n \leqslant r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$ 得 $r(\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$.　　(2)

所以，$r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}) = n$. 从而 $r(\boldsymbol{B}^*) = n$.

附注　题解中利用了关于矩阵秩的以下结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times l$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n \leqslant r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}.$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

三、解答题

(15) 由于$f(x)=\begin{cases}x-2, & x\leqslant -1,\\ 3x, & -1<x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ -x+2, & x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$所以

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+C,$

其中$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-1}^{x}(t-2)\mathrm{d}t, & x\leqslant -1,\\ \int_{-1}^{x}3t\mathrm{d}t & -1\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ \int_{-1}^{\frac{1}{2}}3t\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{x}(-t+2)\mathrm{d}t, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{5}{2}, & x\leqslant -1,\\ \dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}, & -1<x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-2, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

因此$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{5}{2}+C, & x\leqslant -1,\\ \dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}+C, & -1<x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-2+C & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

附注 分段函数$f(x)$的不定积分应用以下公式计算是比较快捷的:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t+C,$$

其中x_0是$f(x)$的最靠左边的分段点.

(16) 由于$y(t)=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}t}(C+\int \mathrm{e}^{-t}\cdot \mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}t}\mathrm{d}t)=C\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}.$

将$y(0)=0$代入上式得$C=-1$，所以$y(t)=-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}(t\geqslant 0)$.

当$t<0$时，$f'(t)=(2t^2+\sin t)'=4t+\cos t$;

当$t>0$时，$f'(t)=y'(t)=(-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t})'=2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}$.

由于$\lim\limits_{t\to 0^-}f'(t)=1$，$\lim\limits_{t\to 0^+}f'(t)=1$，所以，$f'(0)=1$. 因此

$$f'(t)=\begin{cases}4t+\cos t, & t\leqslant 0,\\ 2e^{-2t}-e^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

由此可得，$t<0$ 时，$f''(t)=4-\sin t$；$t>0$ 时，$f''(t)=-4e^{-2t}+e^{-t}$.

由于$\lim\limits_{t\to 0^-}f''(t)=4$，$\lim\limits_{t\to 0^+}f''(t)=-3$，所以$f''(0)$不存在. 因此

$$f''(t)=\begin{cases}4-\sin t, & t<0,\\ -4e^{-2t}+e^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

附注　$f'(0)=1$ 与$f''(0)$不存在也可证明如下：

由于$f(t)=\begin{cases}2t^2+\sin t, & t<0,\\ -e^{-2t}+e^{-t}, & t\geqslant 0,\end{cases}$所以

$$f'_-(0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{2t^2+\sin t}{t}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-e^{-2t}+e^{-t}}{t}=1.$$

从而$f'(0)=1$.

由于$f'(t)=\begin{cases}4t+\cos t, & t\leqslant 0,\\ 2e^{-2t}-e^{-t}, & t>0,\end{cases}$所以

$$f''_-(0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{4t+\cos t-1}{t}=4,$$

$$f''_+(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2e^{-2t}-e^{-t}-1}{t}=-3.$$

从而$f''(0)$不存在.

(17) 令 $u=x-t$，则$f(x)\cdot\int_0^x f(x-t)\,dt=\sin x$ 成为

$$f(x)\cdot\int_0^x f(u)\,du=\sin x,\text{即}\int_0^x f(u)\,du=\frac{\sin x}{f(x)}.$$

上式两边对 x 求导得$f(x)=\dfrac{\cos x\cdot f(x)-\sin x\cdot f'(x)}{f^2(x)}$，即

$$f'(x)-\cot x\cdot f(x)=-\frac{1}{\sin x}f^3(x).$$

令 $y=\dfrac{1}{f^2(x)}$，得 $y'+2\cot x\cdot y=\dfrac{2}{\sin x}$，所以

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int 2\cot x dx}\left(c+\int\frac{2}{\sin x}e^{\int 2\cot x dx}dx\right)\\&=\frac{1}{\sin^2 x}\left(c+\int 2\sin x\,dx\right)=\frac{1}{\sin^2 x}(c-2\cos x).\end{aligned}$$

将$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ 代入上式得 $c=2$，所以，在$\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$上$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$. 因此

$f(x)$在$\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(2-\sqrt{2}).$$

附注 $y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,\ 1)$称为伯努利方程，它可通过变量代换 $z=y^{1-n}$转换成线性微分方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$后求解.

(18) $u(x,\ 2x)=x$ 两边对 x 求导得

$$u_x'(x,\ 2x)+2u_y'(x,\ 2x)=1,$$

再对 x 求导得 $[u_{xx}''(x,\ 2x)+2u_{xy}''(x,\ 2x)]+2[u_{yx}''(x,\ 2x)+2u_{yy}''(x,\ 2x)]=0.$
利用 $u_{xx}''=u_{yy}''$，$u_{xy}''=u_{yx}''$化简后得

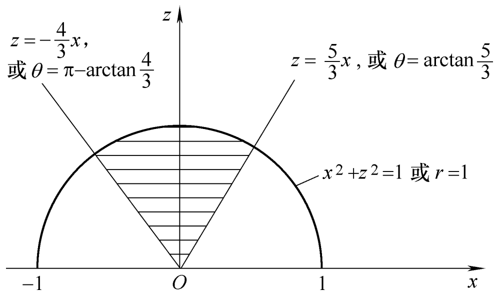
$$5u_{xx}''(x,\ 2x)+4u_{xy}''(x,\ 2x)=0 \tag{1}$$

$u_x'(x,\ 2x)=x^2$ 两边对 x 求导得

$$u_{xx}''(x,\ 2x)+2u_{xy}''(x,\ 2x)=2x. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $u_{xx}(x,\ 2x)=-\frac{4}{3}x$，$u_{xy}''(x,\ 2x)=\frac{5}{3}x$. 于是 D 如图答 5-18 的阴影部分所示，所以 D 的面积为

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathrm{antan}\frac{5}{3}}^{\pi-\mathrm{antan}\frac{4}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}-\arctan\frac{5}{3}\right).$$



图答 5-18

附注 本题获解的关键是利用题设从 $u(x,\ 2x)=x$，$u_x(x,\ 2x)=x^2$ 中算出 $u_{xx}''(x,\ 2x)$与 $u_{yy}''(x,\ 2x)$的表达式.

(19) 由于$f(x)$在$[0,\ 2]$上 2 阶可导，所以，对于 $x\in[0,\ 2]$，

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2(\xi\text{ 是介于 1 与 }x\text{ 之间的实数})$$

由于$f'(x)$在$[0,\ 2]$上单调增加，所以有$f''(x)\geqslant 0(x\in[0,\ 2])$，从而

$$f(x)\geqslant f(1)+f'(1)(x-1)(x\in[0,\ 2]).$$

因此，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^2[f(1)+f'(1)(x-1)]\mathrm{d}x = 2f(1)+f'(1)\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x$

$$= 2f(1)+\frac{1}{2}f'(1)(x-1)^2\Big|_0^2 = 2f(1).$$

附注 设 $x_0\in[0,\ 2]$，则写出$f(x)$在点 x_0 处的一阶泰勒公式是联系 $f(x)$，$f'(x)$与 $f''(x)$的常用方法. 本题得证的关键是取 $x_0=1$.

(20) 由于$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2xy^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=4y-2x^2y$，所以方程组$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2x-2xy^2=0,\\ 4y-2x^2y=0\end{cases}$ 在 D 内

部的解为 $x=\sqrt{2}$，$y=1$，即在 D 内部 $f(x,y)$ 在唯一可能极值点 $(\sqrt{2},1)$，由于

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\Bigg|_{(\sqrt{2},1)}=[(2-2y^2)(4-2x^2)-(-4xy)^2]_{(\sqrt{2},1)}$$

$$=[(2-2y^2)(4-2x^2)-(-4xy)^2]\Big|_{(\sqrt{2},1)}=-32<0$$

所以 $(\sqrt{2},1)$ 不是 $f(x,y)$ 在 D 内的极值点，即 $f(x,y)$ 在 D 内无极值，从而 $f(x,y)$ 在 D 内不存在最大值与最小值.

附注　由于 D 是开区域，当 $f(x,y)$ 在 D 内取不到极值时，必取不到最大值与最小值.

(21)(Ⅰ)由题设得

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xy(x)=x^{\frac{4}{3}}.$$

上式两边对 x 求导得

$$xy'(x)-y(x)=-\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}，即\frac{xy'-y}{x^2}=-\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}，或\left(\frac{y}{x}\right)'=-\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}.$$

所以 $\frac{y}{x}=4x^{-\frac{2}{3}}+C$，将 $y(1)=4$ 代入得 $C=0$. 所以

$$y=y(x)=4x^{\frac{1}{3}}(0\leqslant x\leqslant 1).$$

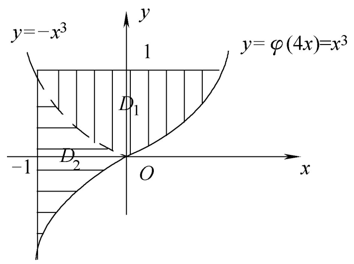
(Ⅱ) $y=4x^{\frac{1}{3}}$ 的反函数 $y=\varphi(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^3$，所以 D 如图答 5-21 的阴影部分所示. 用曲线 $y=-x^3$ 将 D 划分成 D_1 与 D_2 两部分(如图所示).

由于 D_1 关于 y 轴对称，且在对称点处，$g(x,y)=y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]$ 的值互为相反数，所以

$$\iint_{D_1}y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\,\mathrm{d}\sigma=0.\qquad(1)$$

由于 D_2 关于 x 轴对称，且在对称点处，$g(x,y)$ 的值互为相反数，所以

$$\iint_{D_2}y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\,\mathrm{d}\sigma=0.\qquad(2)$$



图答　5-21

于是，由式(1)，式(2)得

$$\iint_D y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_{D_1}y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

附注　本题的题解有两点值得注意：

(Ⅰ)微分方程 $xy'(x)-y(x)=-\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$ 也可用以下方法求解：

所给微分方程可以改写成

$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=-\frac{8}{3}x^{-\frac{2}{3}}\text{（线性微分方程）},$$

所以，$y(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(c+\int-\frac{8}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx\right)$

$=cx+4x^{\frac{1}{3}}.$

（Ⅱ）计算 $\iint\limits_D y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]d\sigma$ 的关键是将 D 划分成 D_1 与 D_2 两部分，然后利用对称性快捷地算出 D_1 与 D_2 上的二重积分.

（22）由于 $b=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，$b^4=16$，

$$2b^2\boldsymbol{A}^2=2\cdot2^2(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=8\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T=16\boldsymbol{A}\text{，其中，}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^3\boldsymbol{\beta}^T=8\boldsymbol{A},$$

所以，所给的方程组成为

$$(8\boldsymbol{A}-16\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}\text{，即}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

或者
$$\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\1&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

由于 $\left(\begin{array}{ccc:c}-1&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{（以下同）}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}-1&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&1\end{array}\right)$，

所以，式(1)与方程组
$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\x_2-2x_3=1\end{cases} \tag{2}$$

同解. 式(2)的导出组的通解为 $c(1,\ 2,\ 1)^T$，此外，式(2)有特解 $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)^T$，所以，式(2)，即式(1)的通解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T=c(1,\ 2,\ 1)^T+\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)^T$（其中，$c$ 是任意常数）.

附注 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 是一个常数，记为 c；$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 是 n 阶矩阵，记为

$\boldsymbol{A}$，则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，且对正整数 k，有

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{\alpha\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\beta})^{\mathrm{T}}\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=c^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

(23) 由于 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -4\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ \lambda-3 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -4\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=2,\ 5,\ -4$.

设对应 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

由于 $\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}0 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

所以，式(1)与方程组 $\begin{cases}a_2-2a_3=0,\\ a_1\quad -a_3=0\end{cases}$ 同解，故可取 $\boldsymbol{a}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{b}$ 满足

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

由于 $\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}0 & -9 & -9\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 9 & 9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

所以，式(2)与方程组 $\begin{cases}b_2+b_3=0,\\ b_1+b_2\quad =0\end{cases}$ 同解，故可取 $\boldsymbol{b}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{b}=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=-4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都正交，所以有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a})=0,\\ (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b})=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}c_1+2c_2+c_3=0,\\ c_1-c_2+c_3=0.\end{cases}\text{由于它与}\begin{cases}c_2\quad =0,\\ c_1\quad +c_3=0\end{cases}\text{同解,}$$

故可取 $\boldsymbol{c}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{c}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

显然，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$(正交矩阵)，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix}$. 于是在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下，$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=2y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$(标准形).

由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q}=-40\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q}\quad(|\boldsymbol{A}|=2\times5\times(-4)=-40)$

$$=-40(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ})^{-1}=-40(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ})^{-1}$$

$$=-40\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-20 & & \\ & -8 & \\ & & 10\end{pmatrix}$$

知，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下，

$$f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-20 & & \\ & -8 & \\ & & -10\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

$$=-20y_1^2-8y_2^2+10y_3^2\text{(标准形)}.$$

附注 由题解可知，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实对称矩阵，则当正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$(其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)将二次型 $f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 化为标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$(其中 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值)时，必将二次型 $f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\cdots+\mu_ny_n^2$(其中 $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值).

模拟试题(六)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	C	C	D	B	C	C	B

(1) $f(x)=x|x|(x-2)^2|x-2|$，可能的不可导点为 $x=0$，2.

在点 $x=0$ 邻近，

$$f(x)=-x|x|(x-2)^3=\begin{cases}x^2(x-2)^3, & x\leqslant 0,\\ -x^2(x-2)^3, & x>0,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2, & x<0,\\ -[2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2], & x>0,\end{cases}\text{且} f'(0)=0.$$

由此得到，$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2}{x}=-16,\ f''_+(0)=16,$$

所以，$x=0$ 是 $f(x)$ 的 2 阶不可导点.

在点 $x=2$ 邻近.

$$f(x)=x^2(x-2)^2|x-2|=\begin{cases}-x^2(x-2)^3, & x\leqslant 2,\\ x^2(x-2)^3, & x>2,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-[2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2], & x<2,\\ 2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2, & x>2,\end{cases}\text{且} f'(2)=0.$$

由此得到 $$f''_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-[2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2]}{x-2}=0,\ f''_+(2)=0,$$

所以，$x=2$ 是 $f(x)$ 的 2 阶可导点. 因此选(B).

附注 应记住以下结论：

$(x-a)|x-a|$ 在 $x=a$ 处 2 阶不可导，$(x-a)^2|x-a|$ 在点 $x=a$ 处 2 阶可导.

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时，由定积分性质知 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(-\infty<x<+\infty)$ 成立.

反之，当 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(-\infty<x<+\infty)$ 时，由

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t&=\int_{-x}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(\text{其中 } u=-t)\\&=\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

得 $\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 于是由 x 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意实数知，$f(-t)=f(t)\,(-\infty<t<+\infty)$，即 $f(x)$ 是偶函数. 因此选(C).

附注 应记住本题的结论：

设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(-\infty<x<+\infty)$ 是 $f(x)$ 为偶函数的充分

必要条件.

(3) 显然 $x=0$，1 都是方程的实根. 记 $f(x)=2^x-x^2-1$，则 $f(x)$ 连续，且 $f(2)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，所以由零点定理(推广形式)知所给方程 $f(x)=0$ 在 $(2,+\infty)$ 上有实根，记为 x_0.

如果 $f(x)=0$ 还有不同实根 x_1，不妨设 $x_1>x_0$，则由 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上 3 阶可导，且 $f(0)=f(1)=f(x_0)=f(x_1)$ 及罗尔定理(高阶导数形式)知，存在 $\xi\in(0,x_1)$，使得

$$f^{(3)}(\xi)=0. \tag{1}$$

另一方面，计算 $f(x)$ 的 3 阶导数得

$$f^{(3)}(\xi)=2^{\xi}(\ln 2)^3\neq 0. \tag{2}$$

由式(1)与式(2)矛盾知，方程 $f(x)=0$，即 $2^x-x^2-1=0$ 除 0，1，x_0 外，别无其他实根. 因此选(C).

附注 (Ⅰ)零点定理的一种推广形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，则存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

(Ⅱ) 罗尔定理的一种推广形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 3 阶可导，且有 x_1，$x_2\in(a,b)$(其中 $x_1<x_2$)，使得 $f(a)=f(x_1)=f(x_2)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(3)}(\xi)=0$.

题解中使用了以上两种推广形式.

(4) 由于 $f''_{xx}(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_x(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$，所以由 $f''_{xx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在知 $f'_x(x,y_0)$ 在点 x_0 处可微. 因此选(D).

附注 当题中所给的三个 2 阶偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续时，选项(A)、(B)、(C)都正确，但仅假设这三个偏导数在点 (x_0,y_0) 处存在，未必能推出这三个选项正确.

(5) 由于 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中

$$D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

$$=\{(x,y)\mid 1-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\},$$

所以，由 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 得

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$. 因此选(B).

附注 将所给的二次积分改写成先 θ 后 r 次序的二次积分，具体如下：

由于积分区域 $D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\arccos\dfrac{r}{2},0\leqslant r\leqslant 2\right\}$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^2\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{r}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta.$$

(6) 由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{y''(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^{2x}-py'(x)-qy(x)}=\frac{1}{1-p\cdot 0-q\cdot 0}=1.$$

因此选(C).

附注　这里不必算出 $y(x)$(实际上，在未知 p，q 的情况下，计算 $y(x)$ 是不容易的)，只需利用洛必达法则即可算出所给的极限.

(7) 由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}_0$ 可使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{x}_0$ 也是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

反之，设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0$，即 $(\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\xi})=0$. 记实向量 $\boldsymbol{A\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$，则由上式得 $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=0$，即 $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$. 所以有 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\xi}$ 也是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因此选(C).

附注　本题表明：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组.

(8) 由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4$

$$=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

所以，$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-4&0\\-1&\lambda&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0$(其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵)有解 $\lambda=-2,2,3$.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值为 -2. 因此选(B).

附注　题解中，如果注意到 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，它们的三次方与四次方分别左乘、右乘 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 表明，对 $\boldsymbol{B}$ 施行三次“交换第一、二行”的初等变换后，再施行四次“交换第二、三列”的初等变换，则可以很快获解.

二、填空题

(9) 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续知，

$$a=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{\ln(1+x)}},\tag{1}$$

其中，
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[1+(e^x+\sin x-1)]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1+\sin x}{x}=2.\tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得 $a=e^2$.

附注　(Ⅰ)计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 时，首先要对 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 进行化简，其中对 $f(x)$ 或 $g(x)$ 作等价无穷小代替是最常用的，也是最有效的化简方法.

(Ⅱ) 计算 0^0, 1^∞, ∞^0 型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 时，应首先将函数指数化，即 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，于是

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=\begin{cases}e^A, & \lim g(x)\ln f(x)=A,\\ 0, & \lim g(x)\ln f(x)=-\infty,\\ +\infty, & \lim g(x)\ln f(x)=+\infty.\end{cases}$$

(10) 由于 $t=0$ 是 $\frac{\sin t}{t}$ 的可去间断点，定义 $\left.\frac{\sin t}{t}\right|_{t=0}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$，则 $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 是积分上限函数. 于是有

$$f(0)=\left.\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right|_{x=0}=0,$$

$$f'(0)=\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1,$$

从而所求的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，即 $y=x$.

附注 如果 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点，且定义 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是积分上限函数，故有

$$F(a)=0,\quad F'(a)=f(a).$$

题解中利用了上述结论.

(11) 由 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$ 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

附注 计算由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 表示的函数 $y=y(x)$ 的 2 阶导数时，必须按公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \text{或} \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

计算.

(12) $$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\left(f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\right)+\left(f_1'\frac{\partial u}{\partial y}+f_3'\right)$$
$$=f_1'(2xe^y+x^2e^y)+(f_x'+f_y')=f_1'(2+x)xe^y.$$

附注 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 f_x' 是不同的概念：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2', \text{而} f_x'=f_2'.$$

同样, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 与 f_y' 也是不同的概念.

(13) $y''-2y'+y=0$ 的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ 有根 $\lambda=1$(二重), 所以 $y''-2y'+y=0$ 的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$.

此外, 记 $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\alpha x}$, 则 $\alpha=1$ 是上述特征方程的二重根, 所以, $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$ 有特解 $y^*=x^2\cdot A\mathrm{e}^x$, 将它代入 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$ 得 $A=\dfrac{1}{2}$, 故 $y^*=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$. 因此所求的通解为

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x.$$

附注　要记住 2 阶常系数齐次线性微分方程的通解及右端函数为 $\mathrm{e}^{\lambda x}P_n(x)$, $\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_l(x)\cdot\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x]$ ($P_n(x)$, $Q_l(x)$, $R_m(x)$ 分别为 n, l, m 次多项式)或它们的线性组合的 2 阶常系数非齐次线性微分方程应有的特解形式.

(14) 由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,

其中, $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\0&1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1$,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\\\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&2&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&2&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$.

附注　如果记住以下公式, 将能快捷地算出 $\boldsymbol{A}^*$:

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵, 则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\\|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

三、解答题

(15) $$\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)-$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x + \sqrt{1+\sin 2x}) + C.$$

附注 本题获解的关键是,把所给的不定积分表示为两个不定积分之差,然后利用基本积分公式($a>0$)

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C \text{ 和} \int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

计算. 顺便指出,下列两个不定积分公式也是常用的,应记住($a>0$):

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C;$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \pm \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + C.$$

(16) 记 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$,则

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + g(x) - A, \\ g(x) = 4x - f(x) + 2B. \end{cases}$$

由此得到

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + B - \frac{A}{2},$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + B + \frac{A}{2}.$$

在[0,1]上积分得

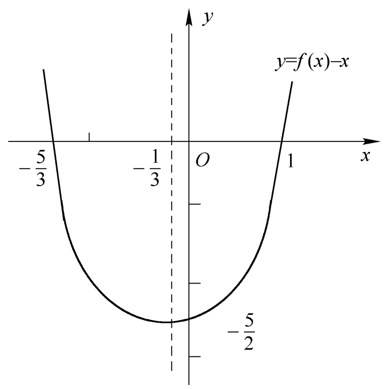
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + B - \frac{A}{2}, \text{即} \frac{3}{2}A = \frac{3}{2} + B,$$

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + B + \frac{A}{2}, \text{即 } A=-1, \text{从而 } B=-3.$$

因此 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$. 由此得到所求图形面积

$$S = \int_{-\frac{5}{3}}^{1}|f(x)-x|\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{5}{3}}^{1}(3x^2+2x-5)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3+x^2-5x)\Big|_{-\frac{5}{3}}^{1} = \frac{128}{27}.$$



图答 6-16

附注 由于 $y=f(x)-x$ 的图形如图答6-16所示,所以

$$S = \int_{-\frac{5}{3}}^{1}|f(x)-x|\mathrm{d}x.$$

(17)(Ⅰ)由 $x_0\in(0,1)$ 得

$$0 < x_1 = -x_0^2 + 2x_0 = x_0(2-x_0) < \left[\frac{1}{2}(x_0+2-x_0)\right]^2 = 1,$$

同理可得 $0<x_n<1$ $(n=2,3,\cdots)$,所以 $\{x_n\}$ 有上界,并且由

$$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0(n=0,1,2,\cdots)$$

知$\{x_n\}$单调增加. 因此，由数列极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记为$A$，对于所给的递推式两边，令$n\to\infty$取极限得

$$A=-A^2+2A，即 A=1，0(不合题意，舍去)，$$

由此得到$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(Ⅱ) 将$e^{\sin(x_n-1)}-e^{x_n-1}$中的$x_n-1$改为$x$，考虑函数$e^{\sin x}-e^x$.

由于$x\to0$时，$e^{\sin x}-e^x=e^x(e^{\sin x-x}-1)\sim\sin x-x$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)-x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\sim-\frac{1}{6}x^3,$$

所以，由$x_n-1\to0(n\to\infty)$知，当$n\to\infty$时，$e^{\sin(x_n-1)}-e^{x_n-1}$的等价无穷小为$-\dfrac{1}{6}(x_n-1)^3$.

附注　由递推式确定的数列$\{x_n\}$的极限，往往利用以下的数列极限存在准则计算：

如果，数列$\{x_n\}$是单调不减有上界或单调不增有下界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(18) 记$f(x)=2\sin x+\tan x-3x$，则

$$f'(x)=2\cos x+\sec^2x-3=\tan^2x-2(1-\cos x)$$

$$>\tan^2x-2\cdot\frac{x^2}{2}=\tan^2x-x^2>0，x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

即$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加. 所以，对$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$有

$$f(x)>\lim_{x\to0^+}f(x)=0,$$

即$2\sin x+\tan x>3x\left(x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

附注　要证明函数不等式$f(x)>g(x)(x\in(a,b))$(其中$f(x)$与$g(x)$在(a,b)内可导)，总是按以下步骤进行：

(Ⅰ) 作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-g(x)$；

(Ⅱ) 计算$\varphi'(x)$.

如果$\varphi'(x)>0(x\in(a,b))$，且$\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=A\geqslant0$，则有

$$\varphi(x)>0，即 f(x)>g(x)(x\in(a,b)).$$

如果$\varphi'(x)<0(x\in(a,b))$，且$\lim\limits_{x\to b^-}\varphi(x)=B\geqslant0$，则有

$$\varphi(x)>0，即 f(x)>g(x)(x\in(a,b)).$$

如果$\varphi'(x)\begin{cases}<0, & a<x<x_0,\\=0, & x=x_0,\\>0, & x_0<x<b,\end{cases}$且$\varphi(x_0)=C>0$，则有

$$\varphi(x)>0，即 f(x)>g(x)(x\in(a,b)).$$

(19) 由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x[1+2(x^2+y^2)]$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y[1+2(x^2+y^2)]$知，方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$仅有解$x=$

0，$y=0$，所以 u 在 D 的内部无可能极值点.

D 的边界由三部分组成Ⅰ：$x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$，Ⅱ：$y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$，Ⅲ：$x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$.

记
$$f_1(x)=u|_{\mathrm{I}}=x^2+(1-x)^2+[x^2+(1-x)^2]^2$$
$$=2x^2-2x+1+(2x^2-2x+1)^2,$$

则
$$f_1'(x)=(4x-2)[1+2(2x^2-2x+1)]\begin{cases}<0, & 0<x<\dfrac{1}{2},\\ =0, & x=\dfrac{1}{2},\\ >0, & \dfrac{1}{2}<x<1,\end{cases}$$

所以，u 在Ⅰ上的最大值为 $u(0,1)=u(1,0)=2$，最小值为 $u\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

记 $f_2(x)=u|_{\mathrm{II}}=x^2+x^4$，它在 $(0,1)$ 内单调增加，所以 u 在Ⅱ上的最大值为 $u(1,0)=2$，最小值为 $u(0,0)=0$.

同样可得 u 在Ⅲ上的最大值为 $u(0,1)=2$，最小值为 $u(0,0)=0$. 于是 u 在 D 的边界上的最大值为 2，最小值为 0，它们即分别为 u 在 D 上的最大值与最小值.

附注　二元连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D（它的边界为 C）上必有最大值与最小值，它们可按以下步骤计算.

（Ⅰ）计算 $f(x,y)$ 在 D 的内部的所有可能极值点，记为
$$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n).$$

（Ⅱ）计算 $f(x,y)$ 在 C 上的最大值与最小值，分别记为 M_1 与 m_1，则 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $\max\{f(x_1,y_1),f(x_2,y_2),\cdots,f(x_n,y_n),M_1\}$，最小值为 $\min\{f(x_1,y_1),\cdots,f(x_n,y_n),m_1\}$. 这里 M_1 与 m_1 有两种计算方法：

方法一　将 C 的方程代入 $f(x,y)$，记 $\varphi(x)=f(x,y)|_C(a\leqslant x\leqslant b)$，然后按一元函数最值计算方法计算 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值，由此得到 M_1 与 m_1.

方法二　设 C 的方程为 $c(x,y)=0$，用拉格朗日乘数法，计算 $f(x,y)$ 在约束条件 $c(x,y)=0$ 下的最值，即可得到 M_1 与 m_1.

（20）由于
$$\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)[t-\ln(1+\tan t)]}{t^3}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{t-\ln(1+\tan t)}{t}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+\tan t)}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}\right)=0,$$

所以，$y(0)=y'(0)=0$.

令 $p=y'$，则所给微分方程成为
$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-(p^2+1)，即\frac{p}{p^2+1}\mathrm{d}p=-\mathrm{d}y,$$

所以，$\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=-y+C_1$，将 $p\big|_{y=0}=0$ 代入得 $C_1=0$，因此

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=-y\text{，即 }1+p^2=\mathrm{e}^{-2y},$$

从而 $p=\pm\sqrt{\mathrm{e}^{-2y}-1}$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2y}-1}}=\pm\mathrm{d}x$，它的通解为

$$\arcsin \mathrm{e}^y=\pm x+C.$$

将 $y(0)=0$ 代入上式得 $C=\frac{\pi}{2}$，所以有

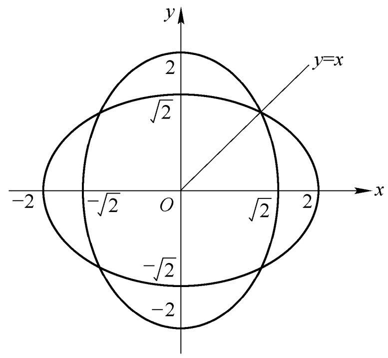
$$\arcsin \mathrm{e}^y=\pm x+\frac{\pi}{2}\text{，即 }y=\ln\cos x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right).$$

附注　$y''+(y')^2+1=0$ 是可降阶的 2 阶微分方程，由于在其中不出现 x，所以令 $p=y'$，并将 y 看做自变量$\left(\text{此时 }y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)$进行降阶.

(21) D 如图答 6-21 所示，显然它关于直线 $y=x$ 对称，在对称点 (x,y) 与 (y,x) 处

$$\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}-\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}$$

的值互为相反数，所以



图答　6-21

$$\iint\limits_D\left[\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}-\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\right]\mathrm{d}\sigma=0,$$

即
$$\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}+\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma$$（由于 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，所以 $\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma$，其中 D_1 是 D 的第一象限部分）

$$=2(a+b)\cdot2\iint\limits_{D_1'}\mathrm{d}\sigma$$（由于 D_1 关于直线 $y=x$ 对称，所以 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1'}\mathrm{d}\sigma$，其中 D_1' 是 D_1 位于直线 $y=x$ 上方的部分）

$$\xlongequal{\text{极坐标}}4(a+b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}}r\mathrm{d}r=4(a+b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}}\mathrm{d}\theta$$

$$=8(a+b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=8(a+b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sec^2\theta+\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=4(a+b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2\tan^2\theta+1}\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan\theta)=4\sqrt{2}(a+b)\cdot\arctan(\sqrt{2}\tan\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\sqrt{2}(a+b)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{2}\right).$$

附注 利用积分区域的对称性是化简二重积分计算的重要手段. 对于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 当积分区域 D 具有某种对称性时, 如果在对称点处 $f(x,y)$ 的值互为相反数, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$; 如果在对称点处 $f(x,y)$ 的值彼此相等, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ (其中 D_1 是 D 按其所具有的对称性划分成的两部分之一).

(22) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示, 所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$$

无解, 从而

$$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) > r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3).$$

由于 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & b & a & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3-b \\ 0 & 2 & b-3 & a-1 & 1 & 5-b \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3-b \\ 0 & 0 & b-5 & a+1 & -1 & b-1 \end{array}\right),$$

所以, $b=5$ 时, $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 3 > 2 = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 即此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$$

有解, 从而

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$

将 $b=5$ 代入得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ a & a+1 & a+6 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6-5a & 1-a & 3-a & 5-3a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2-5a & -a & 1-a & 1-3a \end{array}\right),$$

所以，$a\neq\frac{2}{5}$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ $(=3)$，即此时，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}),$$

而无解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A}).$$

(Ⅱ) 设有两个 n 维向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，(B) $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，则向量组(A)可由向量组(B)线性表示，且表示式唯一的充分必要条件是矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \tag{1}$$

有唯一解. 向量组(A)可由向量组(B)线性表示，但表示式不唯一的充分必要条件是矩阵方程(1)有无穷多解. 向量组(A)不可由向量组(B)线性表示的充分必要条件是矩阵方程(1)无解.

(23) 由 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 知，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，且对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

设对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，即

$$a_1+a_3=0.$$

它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，它们可取为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

它们是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 $1, 1, -1$ 的特征向量.

由此可知，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-1,\ \mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1,\ \mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1,$$

它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$，记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

从而 $A^* = Q\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 ξ，则 A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 ξ.

(Ⅱ) 设 A 是可逆实对称矩阵，正交矩阵 Q 使它正交相似对角化，则 Q 也使 A^* (实对称矩阵) 正交相似对角化.

模拟试题(七)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	A	A	B	D	C	D	B	B

(1) 由于 $y=\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$,所以

$$y^{(5)}=\frac{1}{2}\left[3^5\sin\left(3x+5\times\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+5\times\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(3^5\cos 3x-\cos x).$$

因此选(A).

附注　应记住以下公式:

$$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

(2) 由于 $\max\{e^{-t},e^t\}=\begin{cases}e^{-t}, & t<0,\\ e^t, & t\geqslant 0,\end{cases}$所以

$$F(x)=\int_0^x\max\{e^{-t},e^t\}dt=\begin{cases}\int_0^x e^{-t}dt, & x<0,\\ \int_0^x e^t dt, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

因此选(A).

附注　同样可以计算$\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}dt$,具体如下:

由于 $\min\{e^{-t},e^t\}=\begin{cases}e^t, & t\leqslant 0,\\ e^{-t}, & t>0,\end{cases}$所以

$$\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^x e^t dt, & x\leqslant 0,\\ \int_{-\infty}^0 e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt, & x>0\end{cases}=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ 2-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

(3) 由于 $e^{-x}\sin x=e^{\alpha x}\sin\beta_1 x$, $e^{-x}\cos 2x=e^{\alpha x}\cos\beta_2 x$ 中的

$$\alpha+i\beta_1=-1+i,\alpha+i\beta_2=-1+2i$$

都不是 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程之根,所以所给微分方程应有的特解形式为

$$e^{-x}(A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 2x + B_2\sin 2x).$$

因此选(B).

附注 2 阶常系数线性微分方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x](\beta \neq 0)$$

(这里 $P_l(x)$,$Q_m(x)$ 分别是 l 与 m 次多项式)应具有的特解形式为:

当 $\alpha + \mathrm{i}\beta$ 不是 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程之根时,应具有的特解形式为 $y^* = e^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x + R_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$;

当 $\alpha + \mathrm{i}\beta$ 是 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程之根时,应具有的特解形式为 $y^* = e^{\alpha x}x[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x + R_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$.

以上的 $R_n^{(1)}(x)$ 与 $R_n^{(2)}(x)$ 都是 $n = \max\{l,m\}$ 次多项式.

(4) 由题设知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(-x)}{x^3} = A \neq 0.$$

于是由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x) + f'(-x)}{3x^2} = A.$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}[f'(x) + f'(-x)] = 0$,即 $f'(0) = 0$,所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

但是 $(0,f(0))$ 未必是曲线的拐点,故选(D).

附注 记 $f_1(x) = \cos x + x^3$,$f_2(x) = x^3\cos x$,它们在点 $x = 0$ 的邻域内都有 2 阶连续导数,且 $f_1(x) - f_1(-x) = 2x^3$,$f_2(x) - f_2(-x) = 2x^3\cos x$ 都在 $x\to 0$ 时是 x 的 3 阶无穷小,但是由 $f_1''(0) = -1 \neq 0$ 知 $(0,f_1(0))$ 不是曲线 $y = f_1(x)$ 的拐点;由 $f_2''(x) = 6x\cos x - 6x^2\sin x - x^3\cos x\begin{cases} < 0, & x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ > 0, & x > 0 \end{cases}$(在点 $x = 0$ 的某个邻域内)知,$(0,f_2(0))$ 是曲线 $y = f_2(x)$ 的拐点.

(5) 当 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛时,有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} f(-t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt \\ &= -\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

因此选(C).

附注 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛时,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 是奇函数}, \\ 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx, & f(x) \text{ 是偶函数}. \end{cases}$$

(6) 由于 $\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \dfrac{\left[\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right]^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \to 0 = f(0,0)\ ((x,y)\to(0,0))$,

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 此外,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

所以,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在,因此选(D).

附注　$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微,证明如下:

由于
$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

且
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿直线}y=x}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{4x^4}=\frac{1}{4},\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿直线}y=0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0,$$

所以,$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$ 不存在,从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

(7) 由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,从而由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关知,$\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示,故 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示. 因此选(B).

附注　关于向量组线性相关性的以下结论应记住:

(Ⅰ) 设向量组(A):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$.

如果(A) 线性无关,则它的任一部分组都线性无关;

如果(A) 的某一部分组线性相关,则(A) 线性相关.

(Ⅱ) 设向量组(B):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$.

如果(B) 线性相关,则至少存在一个向量可用其余向量线性表示;

如果(B) 线性相关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,且表示式是唯一的.

(8) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组,所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,即② 正确.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 都有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$,所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,即④ 正确.

因此选(B).

附注　$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 未必是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,例如 $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $(0,1)^{\mathrm{T}}$,但它不是 $\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,所以(A)、(D) 都不能选.

$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 也未必是 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 例如 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,但它们不是 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,这是因为 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*$ 是零矩阵,故

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$ 无基础解系.

二、填空题

(9) 所给微分方程 $x^2y' + y + x^2e^{\frac{1}{x}} = 0$ 可以改写成

$$y' + \frac{1}{x^2}y = -e^{\frac{1}{x}},$$

它的通解为

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left(C - \int e^{\frac{1}{x}}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx\right) = e^{\frac{1}{x}}(C - \int dx) = e^{\frac{1}{x}}(C - x).$$

将 $y(1) = 0$ 代入得 $C = 1$. 所以 $y(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - x)$,从而由

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x}\right) = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - ax) = \lim_{x\to\infty}[e^{\frac{1}{x}}(1-x) + x] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) = 0$$

得曲线 $y = y(x)$ 的斜渐近线方程为 $y = -x$.

附注 计算曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线方程时,总是先计算

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax].$$

如果这两个极限中至少有一个不存在,则计算

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - a_1x];$$

$$a_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - a_2x].$$

(10) $$\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}dx = \int_0^a x\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}dx$$

$$\xlongequal{\text{令 } t = x - \frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(t + \frac{a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}dt$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}t\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}dt + \frac{a}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}a^3.$$

附注 题解中,$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}dt = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 是根据定积分的几何意义直接得到的.

(11) 由于$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(2t,\ 0) + f(0,\ \sin t) - 2f(t,\ t)}{t}$

$$=2\lim_{t\to0}\frac{f(2t,0)-f(0,0)}{2t}+\lim_{t\to0}\left[\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right]-$$

$$2\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t},\qquad(1)$$

其中，$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(2t,0)-f(0,0)}{2t}=f'_x(0,0)=1$，

$$\lim_{t\to0}\left[\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right]=\lim_{t\to0}\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}=f'_y(0,0)=-1,$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{[f'_x(0,0)+f'_y(0,0)]t+o(|t|)}{t}$$

（利用$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微）

$$=f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=0,$$

所以，将它们代入式(1)得

$$\lim_{t\to0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}=2\times1+(-1)-2\times0=1.$$

附注　由于$f(x,y)$仅在点$(0,0)$处可微，所以需用偏导数与全微分的定义计算本题中的极限.

由于$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，所以有

$$f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

特别当$x=y=t$时，上式成为

$$f(t,t)-f(0,0)=[f'_x(0,0)+f'_y(0,0)]t+o(|t|).$$

计算$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}$时就利用了上式.

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

其中,$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\leqslant r\leqslant1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$

= 第一象限内由直线 $x+y=1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 围成的区域

$=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant1\}$.

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

附注　本题是分两步完成的：

首先，将所给的极坐标系中的二次积分转换成直角坐标系中的二重积分，此时被积函数为$f(x,y)$，积分区域为D.

然后，将所得到的二重积分转换成先y后x的二次积分.

(13) 所给微分方程可改写成

$$(x^2\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x)-\mathrm{d}y-\cos x\mathrm{d}x=0,\text{ 即 }\mathrm{d}(x^2y-y-\sin x)=0.$$

所以$x^2y-y-\sin x=C$. 将$y(0)=1$代入得$C=-1$，因此所求的特解为

$$x^2y-y-\sin x=-1.$$

附注 对于微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，有时可以将左边的表达式适当改写后凑成某个二元函数 $u(x,y)$的全微分而求得通解 $u(x,y)=C$. 这是求解上述类型微分方程的常用方法之一，这样往往比较快捷.

本题也可按以下方法求解：

将所给微分方程改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}(\text{线性微分方程}),$$

则它的通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{x^2-1}\left(C+\int\cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{x^2-1}(C+\sin x).\end{aligned}$$

将 $y(0)=1$ 代入得 $C=-1$，所以所求特解为

$$y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x-1).$$

(14) 由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-3\leqslant r(\boldsymbol{AB})$得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，所以

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&\lambda&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&\lambda&3\\0&2&2\end{vmatrix}=2(\lambda-3)=0,$$

由此得到 $\lambda=3$.

附注 应记住关于矩阵的以下两个不等式：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times l$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}.$$

三、解答题

(15) 由于 $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}=0$,

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}+1}=0,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$. 此外，由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}f(x)&=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x^4)}{x-\arctan x}=-\lim_{x\to0^-}\frac{x^4}{x-\arctan x}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\lim_{x\to0^-}\frac{4x^3}{1-\frac{1}{1+x^2}}=-4\lim_{x\to0^-}x(1+x^2)=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}+\frac{1}{2}x^2+x-1}{\sqrt{x}\sin\frac{x}{6}}=6\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}+x-1}{\sqrt{x}}=0$$

得$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 于是

$$\lim_{x\to0}f(g(x))\xlongequal{\text{令 }u=g(x)}\lim_{u\to0}f(u)=0.$$

附注　本题实际上是利用复合函数的极限运算法则计算的:

设 $x\to x_0$ 时, $u=g(x)\to u_0$, 且 $u\to u_0$ 时, $f(u)\to A$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=A.$$

(16) $y(0)=1$, 此外, 由

$$y(x)=1+x+2x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

得
$$y'=1+2\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t=1+y^2-y^2(0)=y^2,$$

所以,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)=-1$,从而$\frac{1}{y}=-x+C$. 将 $y(0)=1$ 代入得 $C=1$. 因此 $y=\frac{1}{1-x}$,从而

$$y^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

附注　计算 $\int_0^x(x-t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 关于 x 的导数时, 必须首先将被积函数中的 x 移到积分号外, 故将它改写成

$$x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

(17) 由于曲线 $y=f(x)$ 与曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处有相同的切线, 从而 $f'(1)=y'(1)=-1$(曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处的切线斜率为 $y'(1)=-1$).

此外, 曲线 $y=f(x)$ 与曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处有相同的凹凸性, 而 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处是凸的, 从而 $f''(1)<0$. 由于 $f''(x)$ 不变号, 所以在(1, 2)内 $f''(x)<0$, 即 $f'(x)$ 单调减少, 故 $f'(x)<f'(1)=-1<0(x\in(1,2))$, 从而 $f(x)$ 在(1, 2)内无极值点.

由
$$\begin{aligned}&f(1)=1,\\&f(2)=f(1)+[f(2)-f(1)]=1+f'(\xi)(\text{其中 }\xi\in(1,2))\\&\qquad<1+f'(1)=0(\text{利用式}(1))\end{aligned}$$

知, $f(1)f(2)<0$, 并且上面已证 $f'(x)<0(x\in(1,2))$, 所以 $f(x)$ 在(1, 2)内有唯一零点.

附注　曲率圆定义如下:

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处 2 阶可导, 则当曲线 $y=f(x)$ 在点(x_0, y_0)(其中 $y_0=f(x_0)$)处的曲率 $K\neq0$ 时, 称以点 D 为圆心、$R=\frac{1}{K}$为半径的圆为该曲线在点(x_0, y_0)处的曲率圆,

其中点 D 位于该曲线在点(x_0, y_0)处的法线(在凹的一侧)上，与点(x_0, y_0)的距离为 R.

曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 在点(x_0, y_0)处有相同的切线及凹凸性.

(18) 记$f(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$，则$f(x)$在$(e, e^2)$内可导且

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}, f''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<0,$$

所以$f'(x)$在(e, e^2)内单调减少，故有$f'(x)>f'(e^2)=0$，即$f(x)$在(e, e^2)内单调增加，由此得到，对$(a, b)\subset(e, e^2)$有$f(a)<f(b)$，即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)(e<a<b<e^2)$.

附注 (Ⅰ)将欲证不等式中的 b 改为 x，使证明文字不等式问题转化为证明函数不等式问题(可采用导数方法证明这个函数不等式)，是证明文字不等式的常用方法之一.

(Ⅱ) 本题也可用柯西中值定理证明，具体如下：

记 $g(x)=\ln^2 x$，$G(x)=x$，则它们在$[a, b]$上满足柯西中值定理的条件，所以存在$\xi\in(a, b)$，使得

$$\frac{g(b)-g(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{g'(\xi)}{G'(\xi)},\text{即}\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$$

$\Bigg($这是由于$\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)'=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}<0(x\in(e, e^2))$，即$\dfrac{2\ln x}{x}$在$(e, e^2)$内单调减少，所以有 $\dfrac{2\ln\xi}{\xi}>\dfrac{2\ln x}{x}\Big|_{x=e^2}=\dfrac{4}{e^2}\Bigg)$，于是

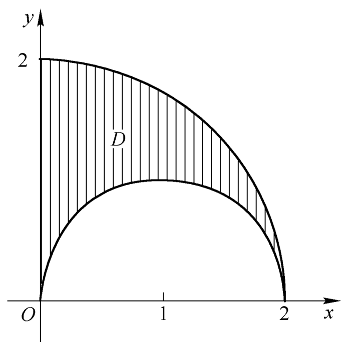
$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)(e<a<b<e^2).$$

(19) D 如图答 7-19 的阴影部分所示，所以

$$V_x=\pi\int_0^2[(\sqrt{4-x^2})^2-(\sqrt{2x-x^2})^2]dx$$
$$=\pi\int_0^2(4-2x)dx=4\pi,$$
$$V_y=2\pi\left(\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx-\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx\right),$$

其中，$\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$,

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$
$$\xlongequal{\text{令 } t=x-1}\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}dt$$
$$=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$



图答 7-19

所以 $V_y=2\pi\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{16}{3}\pi-\pi^2$.

附注 应记住以下公式：

设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是连续函数，且 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$，记 $D=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b, f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$，则

D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_x = \pi\int_a^b x[f_2^2(x) - f_1^2(x)]\mathrm{d}x;$$

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_y = 2\pi\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

(20) 由题设知 $g(1)=g'(1)=g''(1)=0$，所以由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u(xy,yg(x))\cdot y + f'_v(xy,yg(x))\cdot yg'(x)$$

得
$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=1}\right)\Bigg|_{x=1}\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f'_u(x,\ g(x)) + f'_v(x,\ g(x))g'(x)]\Big|_{x=1}\\ &=\{f''_{uu}(x,\ g(x)) + f''_{uv}(x,\ g(x))g'(x) +\\ &\quad [f''_{vu}(x,\ g(x)) + f''_{vv}(x,\ g(x))g'(x)]g'(x) + f'_v(x,\ g(x))g''(x)\}\Big|_{x=1}\\ &= f''_{uu}(1,\ 0) = 1.\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\Bigg|_{y=1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f'_u(y,0)y]\Big|_{y=1}\\ &= [f''_{uu}(y,0)y + f'_u(y,0)]\Big|_{y=1} = f''_{uu}(1,0) + f'_u(1,0) = 2.\end{aligned}$$

附注　注意，题解中利用

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=1}\right)\Bigg|_{x=1} \text{和} \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\Bigg|_{y=1}$$

进行计算，比较快捷.

(21) 微分方程

$$y'' + ay = 2 + \cos x \tag{1}$$

对应的齐次线性微分方程为

$$y'' + ay = 0. \tag{2}$$

当 $a=0$ 时，式(1)成为 $y''=2+\cos u$，所以，它的通解为 $y=x^2-\cos x+A_1x+A_2$.

当 $a=1$ 时，式(2)的特征方程根为 $r=\pm\mathrm{i}$，所以式(2)的通解为 $Y_2=B_1\cos x+B_2\sin x$，且式(1)有特解 $y_2^*=a_1+x(b_1\cos x+b_2\sin x)$，将它代入式(1)(此时 $a=1$)得

$$-2b_1\sin x + 2b_2\cos x + a_1 = 2 + \cos x.$$

由此得到 $\begin{cases}a_1=2,\\ -2b_1=0,\\ 2b_2=1,\end{cases}$ 即 $a_1=2$，$b_1=0$，$b_2=\dfrac{1}{2}$，所以 $y_2^*=2+\dfrac{1}{2}x\sin x$. 从而此时式(1)的通解为

$$y = Y_2 + y_2^* = B_1\cos x + B_2\sin x + 2 + \frac{1}{2}x\sin x.$$

当 $a\in(0, 1)\cup(1, +\infty)$ 时，式(2)的特征方程的根为 $r=\pm\sqrt{a}\mathrm{i}$，所以式(2)的通解为 $Y_3 = C_1\cos\sqrt{a}x + C_2\sin\sqrt{a}x$，且式(1)有特解 $y_3^* = a_1 + b_1\cos x + b_2\sin x$，将它代入式(1)得

$$aa_1 + (a-1)b_1\cos x + (a-1)b_2\sin x = 2 + \cos x.$$

由此得到 $\begin{cases} aa_1 = 2, \\ (a-1)b_1 = 1, \\ (a-1)b_2 = 0, \end{cases}$ 即 $a_1 = \frac{2}{a}$，$b_1 = \frac{1}{a-1}$，$b_2 = 0$，所以 $y_3^* = \frac{2}{a} + \frac{1}{a-1}\cos x$. 从而此时式(1)的通解为

$$y = Y_3 + y_3^* = C_1\cos\sqrt{a}x + C_2\sin\sqrt{a}x + \frac{2}{a} + \frac{1}{a-1}\cos x.$$

上述的 A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2 都是任意常数.

附注 要熟练掌握2阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的计算和二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$（其中 $f(x)$ 为 $\mathrm{e}^{\lambda x}R_n(x)$ 或 $\mathrm{e}^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ 或它们的线性组合，$R_n(x)$，$P(x)$，$Q_m(x)$ 分别是 n，l 及 m 次多项式）的特解的计算.

(22)（Ⅰ）设 $x=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，则所给方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4,$$

成为
$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即
$$(x_1-x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-x_1+x_2+ax_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

于是由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关得 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ -x_1+x_2+ax_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

对式(1)的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{2}$$

当所给方程组有无穷多解时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$（其中 $\boldsymbol{A}$ 是式(1)的系数矩阵），所以由式(2)得 $a-2=0$，即 $a=2$.

（Ⅱ）当 $a=2$ 时，式(1)，即所给方程组与

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \tag{3}$$

同解. 它对应的导出组的通解为 $C(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，且式(3)有特解 $(1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$，所以式(3)，即所给方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C(1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,2,0)^{\mathrm{T}}(\text{其中 } C \text{ 是任意常数}).$$

附注　本题(Ⅰ)获解的关键是根据 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，将所给方程组化简为方程组(1).

(23)(Ⅰ)由

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -a & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2$$

知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-2$，6(二重)，所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，必须满足

$$r(6\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})=3-2=1, \tag{1}$$

其中，$6\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}$. 因此满足式(1)的 $a=0$，即当 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时，$a=0$.

(Ⅱ) 当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2+6x_3^2\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$(实对称矩阵)，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -5 & 0\\ -5 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-6)(\lambda-7),$$

所以，$\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=-3$，6，7.

设对应于 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-5 & -5 & 0\\ -5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=0,\text{即}\begin{cases}a_1+a_2=0,\\ a_3=0.\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\alpha}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

设对应于 $\lambda=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$\begin{pmatrix}4 & -5 & 0\\ -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=0,\text{即}\begin{cases}4b_1-5b_2=0,\\ -5b_1+4b_2=0.\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\beta}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\beta}=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应于 $\lambda=7$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}=(c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都正交，即

$\begin{cases} -c_1+c_2 \quad\quad =0, \\ \quad\quad\quad\quad c_3=0. \end{cases}$ 于是取 $\boldsymbol{\gamma}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\gamma}=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\beta}=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$（正交矩阵），则所求正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

它将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 化为标准形 $-3y_1^2+6y_2^2+7y_3^2$.

附注 用正交变换将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 化为标准形，首先要将二次型表示成 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵），这是本题获解的关键. 此外，应熟练掌握用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵）为标准形的方法.

模拟试题(八)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	A	B	B	D	D	A	C	B

(1) 设$f(x)$是单调增加函数，则当$x_1<x_2$时，$f(x_1)<f(x_2)$，即$x_2<x_3$，同样可证$x_3<x_4$，…，$x_n<x_{n+1}$，…，即$\{x_n\}$单调增加. 因此选(A).

附注 记住以下结论对判别数列$\{x_n\}$的单调性是有用的：

设$\{x_n\}$由递推式x_1，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$确定，且$f(x)$是单调增加函数，则当$x_1<x_2$时，$\{x_n\}$单调增加；当$x_1>x_2$时，$\{x_n\}$单调减少.

(2) 由题设知$f'(x_0)=-\dfrac{1}{-1}=1$，所以

$$\Delta y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)=\Delta x+o(\Delta x).$$

即当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\Big|_{x=x_0}$与Δx是等价无穷小. 因此选(B).

附注 当函数$y=f(x)$在点x_0处可导(可微)时，

$$\Delta y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

当二元函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微时，

$$\Delta z\big|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right).$$

(3) 由所给方程得$y(0)=0$. 对所给方程两边关于x求导得

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+2\mathrm{e}^{2y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin(xy)\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\right),$$

所以$y'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-y[1+\sin(xy)]}{x+2\mathrm{e}^{2y}+x\sin(xy)}$，且$y'(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Bigg|_{x=0}&=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-y'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-y[1+\sin(xy)]}{x[x+2\mathrm{e}^{2y}+x\sin(xy)]}\\&=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{y(x)-y(0)}{x}\cdot\frac{1+\sin(xy)}{x+2\mathrm{e}^{2y}+x\sin(xy)}\right]=-y'(0)\cdot\frac{1}{2}=0.\end{aligned}$$

因此选(B).

附注 用二阶导数定义计算$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Bigg|_{x=0}$比先算出$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，然后将$x=y=y'=0$代入快捷得多.

(4) 由于x^2在$[0, 1]$上连续，选项(A)、(B)、(C)的右边都是x^2在$[0, 1]$上的积分和式的极限，它们都等于$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，即选项(A)、(B)、(C)都正确. 因此选(D).

附注 也可以通过直接计算确认(D)不正确：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\sum_{i=1}^{n}(9i^2-6i+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\left[\frac{9}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{6}{2}n(n+1)+n\right]$$
$$=\frac{1}{9}\neq\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

(5) 由于 $z_0=z(x_0,\ y_0)$ 是 $z=z(x,\ y)$ 的极小值，因此存在点 $(x_0,\ y_0)$ 的某个邻域，对此邻域内的任一点 $(x,\ y)$ ($(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$) 处，都有 $z=z(x,\ y)>z_0$. 于是 $y=y(x,\ z)$ 不能在点 $(x_0,\ z_0)$ 的邻域内都有定义，从而 $y_0=y(x_0,\ z_0)$ 不是 $y=y(x,\ z)$ 的极值. 因此选 (D).

附注 要使函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处取到极值，首先必须使 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的某个邻域内有定义.

(6) 由于 D_2 与 D_3 关于直线 $y=x$ 对称，$\sqrt{x^2+y^2}$ 在对称点 $(x,\ y)$ 与 $(y,\ x)$ 处的值彼此相等，所以 $I_2=I_3$. 此外，由

$$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3},$$
$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}$$

知 $I_1<I_2$. 因此选 (A).

附注 利用对称性直接得到 $I_2=I_3$，使计算量减少，实际上 $I_3=\dfrac{32}{9}$ 也可由计算得到：

$$I_3=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{8}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta$$
$$=-\frac{8}{3}\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{32}{9}.$$

(7) 由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，所以当 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，$\boldsymbol{B}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 此外，由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $\boldsymbol{B}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{\lambda}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 因此选 (C).

附注 应记住以下结论：

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ ($\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵) 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(8) 由于当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩；当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩，反之也对，所以选项(A)、(C)、(D)都正确. 因此选(B).

附注 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时，未必等价. 例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 显然 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2)$，但是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不等价.

由本题可知，题中的(Ⅰ)、(Ⅱ)等价与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价是有区别的，应注意这一点.

二、填空题

(9) 由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x-\sin x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^3}}{x}$

知 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x-\sin x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^3}\right]=0$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

附注 类似地可考虑：

设 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$. 具体的计算如下.

由 $$\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3\ \text{得}\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3.$$

由此得到 $\lim\limits_{x\to0}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=0$，从而有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 以及

$$3=\lim_{x\to0}\frac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2},\text{即}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2.$$

于是 $$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2.$$

(10) 由 $\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t=f(x)-\mathrm{e}^{5x}$ 得

$$f(0)=1,5f(x)-2=f'(x)-5\mathrm{e}^{5x}\ \text{以及}\ f'(0)=8,$$

所以有 $$\frac{f'(x)-8}{x}=\frac{5[f(x)-f(0)]+5(\mathrm{e}^{5x}-1)}{x}.$$

令 $x\to0$，由上式得

$$f''(0)=5f'(0)+5\times5=65.$$

附注 本题也可以解答如下：

对所给等式两边关于 x 求导得

$$5f(x)-2=f'(x)-5\mathrm{e}^{5x},$$

即 $$y'-5y=5\mathrm{e}^{5x}-2(\text{其中}\ y=f(x)),$$

所以，$y=\mathrm{e}^{5x}\left[C+\int(5\mathrm{e}^{5x}-2)\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{5x}\left(C+\dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{-5x}+5x\right)$.

将 $y\big|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C=\dfrac{3}{5}$. 因此

$$y=\mathrm{e}^{5x}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5x}+5x\right)=\frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}+\frac{2}{5}+5x\mathrm{e}^{5x}.$$

从而 $y'=8e^{5x}+25xe^{5x}$，$y''=65e^{5x}+125xe^{5x}$. 由此得到

$$f''(0)=y''\big|_{x=0}=65.$$

（11）容易知道，当 $x<0$ 时，$y'=6x+6x^2$；$x>0$ 时，$y'=\dfrac{1}{1+x}-2x$. 由此可得 $y'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}y'=\lim\limits_{x\to 0^-}(6x+6x^2)=0$，$y'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}y'=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1+x}-2x\right)=1$，即 $y'(0)$不存在. 所以

$$y'=\begin{cases}6x+6x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}-2x, & x>0,\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}6+12x, & x<0,\\ -\dfrac{1}{(1+x)^2}-2, & x>0.\end{cases}$$

于是方程 $y''=0$ 有唯一解 $x=-\dfrac{1}{2}$，且

$$y''\begin{cases}<0, & x<-\dfrac{1}{2},\\ >0, & -\dfrac{1}{2}<x<0.\end{cases}$$

此外，y 在点 $x=0$ 处连续，但 $y''(0)$不存在，且

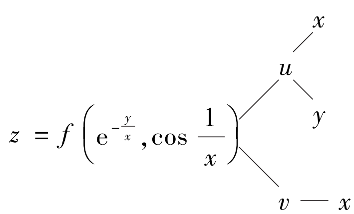
$$y''\begin{cases}>0, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ <0, & x>0,\end{cases}$$

因此，所给曲线有两个拐点：$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$(0,\ 0)$.

附注 对于连续曲线 $y=f(x)$，其可能拐点的横坐标来自 $f''(x)$的零点及使 $f''(x)$不存在的点. 因此，本题的可能拐点横坐标除 $x=-\dfrac{1}{2}$外，还有 $x=0$.

（12）$\dfrac{\partial}{\partial x}f\left(e^{-\frac{y}{x}},\cos\dfrac{1}{x}\right)=f'_u\cdot\dfrac{y}{x^2}\cdot e^{-\frac{y}{x}}+f'_v\cdot\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2}\left(ye^{-\frac{y}{x}}f'_u+\sin\dfrac{1}{x}f'_v\right)$.

附注 计算多元复合函数的偏导数时，应先画出该函数与自变量之间的复合关系图，例如，本题的关系图为



（13）由于

$$y''+py'+qy=e^x\cos 2x \tag{1}$$

的齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

的通解为 $Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$，所以式(2)的特征方程有根 $1\pm i$，从而 $p=-[(1+i)+(1-i)]=-2$，$q=(1+i)(1-i)=2$，即式(1)为

$$y''-2y'+2y=e^x\cos 2x. \tag{3}$$

式(3)应有特解

$$y^*=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

将它代入式(3)得

$$\begin{gathered}e^x[(-3A+4B)\cos 2x+(-4A-3B)\sin 2x]-\\2e^x[(A+2B)\cos 2x+(B-2A)\sin 2x]+\\2e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)=e^x\cos 2x,\end{gathered}$$

即 $A=-\frac{1}{3}$，$B=0$. 因此 $y^*=-\frac{1}{3}e^x\cos 2x$.

于是式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=e^*(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{1}{3}e^x\cos 2x.$$

附注 本题获解的关键是由 $Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$确定式(2)的 p 与 q 的值.

(14) 由于

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{B}^*), \tag{1}$$

其中，由 $r(\boldsymbol{A})=1$，即 $r(\boldsymbol{A})$等于 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 -1 知 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$；由 $r(\boldsymbol{B})=2$，即 $r(\boldsymbol{B})$小于 $\boldsymbol{B}$ 的阶数 -1 知 $r(\boldsymbol{B}^*)=0$. 将它们代入式(1)得

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=1+0=1.$$

附注 应记住以下公式：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

三、解答题

(15) 由于 $y=\varphi(\psi(x))=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ \sin x^2, & 1<|x|\leqslant 2,\\ \cos x, & |x|>2,\end{cases}$并且

当 $|x|<1$ 时，$y'(x)=2x$，

当 $1<|x|<2$ 时，$y'(x)=2x\cos x^2$，

当 $|x|>2$ 时，$y'(x)=-\sin x$，

$y'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}y'(x)=2$，$y'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}y'(x)=2\cos 1$，

$y'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}y'(2)=4\cos 4$，$y'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}y'(2)=-\sin 2$，

所以，$y'(x)$在点 $x=1$，2 处都不存在. 由于 $y(x)$是偶函数，所以 $y'(x)$在点 $x=-1$，-2 处也不存在. 从而

$$y'(x)=\begin{cases}2x, & |x|<1,\\ 2x\cos x^2, & 1<|x|<2,\\ -\sin x, & |x|>2.\end{cases}$$

因此 $y''(x)=\begin{cases}2, & |x|<1,\\ 2\cos x^2-4x^2\sin x^2, & 1<|x|<2,\\ -\cos x, & |x|>2.\end{cases}$

附注 本题的解答有两点值得注意：

(Ⅰ) 要计算分段函数的复合函数的导数或2阶导数，应先算出复合函数的表达式.

(Ⅱ) 对于分段函数 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant x_0,\\ f_2(x), & x>x_0,\end{cases}$ 如果已算出 $f_1'(x)(x<x_0)$ 与 $f_2'(x)(x>x_0)$，则当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)$ 都存在时，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$.

(16) 记 $f(x)=xe^{2x}-2x-\cos x$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上2阶可导，且由

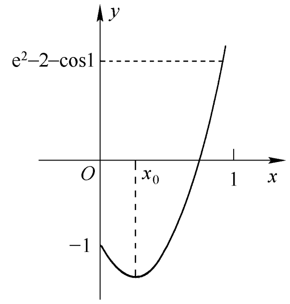
$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2+\sin x,$$
$$f''(x)=4(1+x)e^{2x}+\cos x>0$$

知，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加，且 $f'(0)f'(1)=-(3e^2-2+\sin 1)<0$，所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，由此得到

$$f'(x)\begin{cases}<0, & 0<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<1.\end{cases}$$

因此，由 $f(0)=-1<0$ 知 $f(x)<0(x\in(0,x_0])$，即方程 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0]$ 上无实根. 此外，由 $f(x_0)\cdot f(1)<0$ 及 $f'(x)>0$ $(x\in(x_0,1))$ 知方程 $f(x)=0$ 在 $(x_0,1)$ 上有唯一实根.

综上所述，所给方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根.



图答 8-16

附注 由题解中分析可知，曲线 $y=f(x)$ 如图答 8-16 所示，由图可知方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

(17) c 将 $[a,b]$ 分成两个小区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$.

由于 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以存在 $x_1\in(a,c)$，使得 $f(x_1)>f(a)$. 由于 $f'(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$，所以存在 $x_2\in(x_1,c)$，使得 $f(x_2)>f(c)$. 因此，$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上的最大值在 (a,c) 内取到. 于是由费马引理知，存在 $\eta_1\in(a,c)$，使得 $f'(\eta_1)=0$.

此外，由 $f(c)=f(b)(=0)$ 知，$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上满足罗尔定理条件，所以存在 $\eta_2\in(c,b)$，使得 $f'(\eta_2)=0$.

由题设及以上证明知，$f'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上满足罗尔定理条件，所以存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

附注 当函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数时，如果 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则容易知道，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$. 但是，从本题的证明可知，“当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导(未

必有连续导数)时，如果 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.”记住这个结论有助于快速解题.

(18)(Ⅰ)由于

$$\begin{aligned}du&=(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y+y)dy\\&=(2x\cos y dx-x^2\sin y dy)+(3x^2ydx+x^3dy)+ydy\\&=d\left(x^2\cos y+x^3y+\frac{1}{2}y^2\right),\end{aligned}$$

所以，$u=x^2\cos y+x^3y+\frac{1}{2}y^2+C$. 将 $u(0,0)=0$ 代入上式得 $C=0$，因此

$$u(x,y)=x^2\cos y+x^3y+\frac{1}{2}y^2.$$

(Ⅱ)由于在点 $(0,0)$ 的充分小的去心邻域内，

$$u(x,y)=x^2(\cos y+xy)+\frac{1}{2}y^2>0=u(0,0),$$

所以，$u(0,0)=0$ 是 $u(x,y)$ 的极小值.

附注　题解中，根据极小值定义判定 $u(0,0)=0$ 是 $u(x,y)$ 的极小值，比较快捷. 但也可以用以下方法判定：

由于
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos y+3x^2y,\frac{\partial u}{\partial y}=x^3-x^2\sin y+y,$$

所以，
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos y+6xy,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x^2\cos y+1,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2x\sin y+3x^2.$$

于是由
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2>0,\left.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right|_{(0,0)}=2\times1-0=2>0$$

知，$u(0,0)=0$ 是 $u(x,y)$ 的极小值.

(19)因为
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=3x-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\\&=-x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}-2),\end{aligned}$$

并且 $x>4$ 时，$f(x)<0$，所以 $y=f(x)(x\geqslant0)$ 的图形如图答 8-19 所示. 于是，所求的面积为

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1-(3x-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}})dx+\int_1^4(3x-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}})dx\\&=-\left.\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^1+\left.\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_1^4=1.\end{aligned}$$

附注　计算平面图形面积时，应先画出该图形.

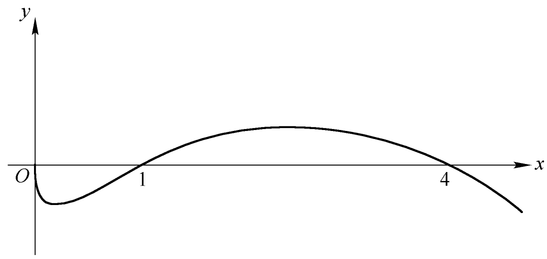
当平面图形 D 是由曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$(其中 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续)及直线 $x=a$，$x=b$ 围成的，则 D 的面积为

$$S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx.$$

本题的平面图形实际上是由曲线 $y=f(x)$，直线 $y=0$，$x=0$，$x=4$ 围成的，所以

$$A=\int_0^4|f(x)-0|dx=\int_0^4|f(x)|dx$$

$$=\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$



图答 8-19

（20）由于
$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(3\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)z,$$

并且
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}=-2\frac{\partial}{\partial u}+a\frac{\partial}{\partial v},$$

所以
$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2+a)\frac{\partial}{\partial v}\left[5\frac{\partial}{\partial u}+(3-a)\frac{\partial}{\partial v}\right]z$$
$$=5(2+a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(2+a)(3-a)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

于是由题设得
$$\begin{cases}5(2+a)\neq 0,\\(2+a)(3-a)=0,\end{cases}\text{即 } a=3.$$

附注 由于$\frac{\partial z}{\partial x}$可以理解为$\frac{\partial}{\partial x}$作用于 z，同样$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$可以理解为$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}z\right)$或$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)z$，因此有
$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(3\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)z.$$

由此得到
$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=5(2+a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(2+a)(3-a)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

从而使得问题快速获解.

（21）$y'-2y=\varphi(x)$的通解为
$$y=\mathrm{e}^{2x}\left(C+\int_1^x\varphi(t)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\right).\tag{1}$$

由于 $\varphi(x)\mathrm{e}^{-2x}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x<1,\\0, & x>1,\end{cases}$所以
$$\int_1^x\varphi(t)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_1^x 2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t, & x<1,\\0, & x>1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2x}, & x<1,\\0, & x>1,\end{cases}$$

于是，当 $x<1$ 时，$y=e^{2x}(C+e^{-2}-e^{-2x})$. 将 $y(0)=0$ 代入得 $C=1-e^{-2}$. 将它代入式(1)得$y(x)=\begin{cases}e^{2x}(1-e^{-2x}), & x<1,\\ e^{2x}(1-e^{-2}), & x>1.\end{cases}$由于 $\lim\limits_{x\to1^-}y(x)=\lim\limits_{x\to1^+}y(x)$，所以，所求函数

$$y(x)=\begin{cases}e^{2x}(1-e^{-2x}), & x\leqslant1,\\ e^{2x}(1-e^{-2}), & x>1.\end{cases}$$

附注 本题是利用线性微分方程的通解公式

$$y=e^{2x}\left(C+\int_1^x\varphi(t)e^{-2t}dt\right)$$

和分段函数 $\varphi(t)e^{-2t}$ 的积分上限函数算出了 $y(x)$，十分快捷.

但也可以按以下方法计算(虽然不是十分快捷，但比较容易理解)：

由题设知，在$(-\infty,1)$上，$y(x)=y_1(x)$满足

$$y_1'-2y_1=2,$$

它的通解为 $y_1(x)=e^{2x}\left(C_1+\int 2e^{-2x}dx\right)=e^{2x}(C_1-e^{-2x})$. 将 $y_1(0)=y(0)=0$ 代入得 $C_1=1$, 所以

$$y_1(x)=e^{2x}-1(x<1).$$

由题设知，在$(1,+\infty)$上，$y(x)=y_2(x)$满足

$$y_2'-2y_2=0,$$

它的通解为 $y_2(x)=C_2e^{2x}$. 为使 $y(x)$在 $x=1$ 处连续，必须

$$\lim_{x\to1^+}y_2(x)=\lim_{x\to1^-}y_1(x)=e^2-1,\text{即 } C_2e^2=e^2-1,$$

所以 $C_2=1-e^{-2}$，因此 $y_2(x)=(1-e^{-2})e^{2x}(x>1)$. 由此得到

$$y(x)=\begin{cases}y_1(x), & x\leqslant1,\\ y_2(x), & x>1\end{cases}=\begin{cases}e^{2x}-1, & x\leqslant1,\\ (1-e^{-2})e^{2x}, & x>1.\end{cases}$$

(22)(Ⅰ) 方程组(A)的增广矩阵

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\2&a+4&-5&6\\-1&-2&a&-3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&a&-7&0\\0&0&a+1&0\end{array}\right),$$

所以，方程组(A)有无穷多解时，$a+1=0$，即 $a=-1$.

(Ⅱ) 当 $a=-1$ 时，方程组(A)与(B)组成的方程组为

$$(\mathrm{C})\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3,\\2x_1+3x_2-5x_3=6,\\-x_1-2x_2-x_3=-3\\x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1+\lambda x_2=1.\end{cases}$$

对方程组(C)的增广矩阵 $\overline{C}$ 施行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\2&3&-5&6\\-1&-2&-1&-3\\1&1&1&0\\2&\lambda&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\2&3&-5&6\\-1&-2&-1&-3\\1&2&1&3\\2&\lambda&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&-7&6\\0&-1&0&-3\\0&1&0&3\\0&\lambda-2&-2&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&3\\0&0&-7&3\\0&0&7&-3\\0&\lambda-2&-2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&3\\0&0&-7&3\\0&0&0&0\\0&0&-2&7-3\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{3}{7}\\0&0&0&0\\0&0&-2&7-3\lambda\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{3}{7}\\0&0&0&0\\0&0&0&\frac{43}{7}-3\lambda\end{array}\right),$$

由此可知，方程组(A)与(B)有公共解，即方程组(C)有解时，$r(\boldsymbol{C})=r(\overline{\boldsymbol{C}})$(其中 $\boldsymbol{C}$ 是方程组(C)的系数矩阵)，即 $\lambda=\frac{43}{21}$，并且此时的公共解为 $x_1=-\frac{18}{7}$，$x_2=3$，$x_3=-\frac{3}{7}$.

附注 设方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$(其中 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 分别是 $m_1\times n$ 与 $m_2\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 分别是 m_1 维与 m_2 维列向量)，则这两个方程组有公共解的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2\end{cases}$$

有解.

(23)(Ⅰ)由题设知，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$. 从而 $\lambda_1=2$ 对应于 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 $\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=1$，所以由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 知 $\mu_1=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交，即

$$b_1+b_2-b_3=0.$$

故取 $\boldsymbol{\beta}$ 为这个方程的基础解系，即 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 现将它们正交化：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}_1)}{(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)}\boldsymbol{\gamma}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}.$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\gamma}_1}{\|\boldsymbol{\gamma}_1\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}_2}{\|\boldsymbol{\gamma}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},$$

于是所求的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. 由于

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，所以令

$$\begin{cases}z_1=\sqrt{2}y_1,\\ z_2=y_2,\\ z_3=y_3.\end{cases}\text{即 }\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{z},\text{则}$$

$$2y_1^2-y_2^2-y_3^2=z_1^2-z_2^2-z_3^2\text{(规范形)}.$$

从而 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在可逆线性变换

$$x = Qy = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} z$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} z$$

下，化为规范形，即

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

附注 （Ⅰ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

（Ⅱ）要熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法及由正交变换与标准形计算二次型矩阵的方法.

模拟试题(九)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	C	A	D	B	A	B	D

(1) $f(x)$有间断点 $x=-1, 0, 1$. 由于

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\ln(1+x^2)}{(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}})x(1+x)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}})x(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{-\frac{x}{1-x}\cdot x}=-1,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1+x^2)}{(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}})x(1+x)}=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(1+x^2)}{(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}})x(1+x)}=\frac{\ln 2}{2},$$

所以, $f(x)$仅有一个无穷间断点 $x=-1$. 因此选(B).

附注 由题解可知, $x=0$, 1 分别是$f(x)$的可去间断点和跳跃间断点.

(2) 利用对称区间上定积分的性质可得:

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x=0$(由于被积函数是奇函数),

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0$(由于 $\sin^3 x$ 是奇函数,$\cos^4 x$ 是偶函数,在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上 $\cos^4 x\geqslant 0$,且仅在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取等号),

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^7 x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\mathrm{d}x<0$(由于 $x^2\sin^3 x$ 是奇函数,$\cos^7 x$ 是偶函数,在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上 $\cos^7 x\geqslant 0$,且仅在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取等号), 所以, $P<M<N$. 因此选(C).

附注 应记住对称区间上定积分的性质. 设函数$f(x)$在$[-a, a]$$(a>0)$上连续, 则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数},\\ 0, & f(x)\text{ 是奇函数}.\end{cases}$$

(3) 设$f(x)$在点 x_0 处可导, 并由已知条件, 可知

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0, f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0,$$

所以$f'(x_0)=0$. 于是，对于点x_0左侧邻近内的任意x有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2\text{(其中}\xi\in(x,x_0)\text{)}$$
$$=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\geqslant f(x_0).$$

这与$f(x)$在点x_0的左侧邻近单调增加(即$f(x)<f(x_0)$)矛盾. 因此选(A).

附注 根据已知条件和函数的特性，本题只在选项(A)，(B)中选择即可. 题解中假定$f(x)$在点x_0处可导，结果推出矛盾，因此确定选(A).

(4) $$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-1}^{0}t\mathrm{d}t+\begin{cases}\int_0^x t\mathrm{d}t, & x\leqslant 0,\\ \int_0^x \sin t\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}=-\frac{1}{2}+\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\leqslant 0,\\ 1-\cos x, & x>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}-\cos x, & x>0.\end{cases}\text{因此选(D).}$$

附注 分段连续函数$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant x_0,\\ f_2(x), & x>x_0\end{cases}$的积分上限函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$总是按以下方法计算：

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{x_0}f_1(t)\mathrm{d}t+\begin{cases}\int_{x_0}^x f_1(t)\mathrm{d}t, & x\leqslant x_0,\\ \int_{x_0}^x f_2(t)\mathrm{d}t, & x>x_0.\end{cases}$$

(5) 根据函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微的充分条件知，(B)是正确的，因此选(B).

附注 (Ⅰ) 函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微的必要而非充分条件是$f'_x(x_0, y_0)$和$f'_y(x_0, y_0)$都存在.

函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微的充分而非必要条件是$f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$在点(x_0, y_0)处都连续.

(Ⅱ) 由$f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微，只能保证$f''_{xy}(x_0, y_0)$，$f''_{yx}(x_0, y_0)$存在，而不能保证$f''_{xy}(x, y)$，$f''_{yx}(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续，所以不能保证$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$.

由于$f''_{xy}(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续，不能保证$f''_{yx}(x, y)$也在点(x_0, y_0)处连续，所以不能保证$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$.

(6) 容易看到$y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$是$y''+py'+qy=0$的特解，从而

$$p=-[(-1+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})]=2,\quad q=(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})=2.$$

此外，由题设知e^x是$y''+py'+qy=f(x)$，即$y''+2y'+2y=f(x)$的特解，所以，$f(x)=(\mathrm{e}^x)''+2(\mathrm{e}^x)'+2\mathrm{e}^x=5\mathrm{e}^x$. 因此选(A).

附注　由于微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 有解 $y_2=e^x+e^{-x}\cos x$，其中 $e^{-x}\cos x$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的解，所以由线性微分方程解的构造知，e^x 是 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解.

(7) 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量)有无穷多解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<n.$$

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$($\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 都是 m 维列向量)，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$($\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 都是 n 维列向量)，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_1)=r(\boldsymbol{A})\leqslant n,\ r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_2)=r(\boldsymbol{A})\leqslant n,\ \cdots,\ r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_n)=r(\boldsymbol{A})\leqslant n$$

(其中至少有一式只取不等号)，即

$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=r(\boldsymbol{A})<n.$$

由此得到 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n.$$

因此选(B).

附注　应记住关于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是 $n\times l$ 未知矩阵)的解的结论：

该方程有无穷多解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$；有唯一解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$；无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$.

(8) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是，分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形. 因此选(D).

附注　(Ⅰ) 选项(A)是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的必要而非充分条件，选项(B)、(C)既不是必要条件，也不是充分条件.

(Ⅱ) 两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有两种：

(i) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的正、负特征值分别相等(k 重特征值按 k 个计算)；

(ii) 以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形.

二、填空题

(9) $$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}(1+x+x^2+x^3+o(x^3))-\frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3).$$

附注　题解中是利用 $\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}$ 的 3 阶麦克劳林公式(带佩亚诺型余项)算得 $f(x)$ 的 3 阶麦克劳林公式(带佩亚诺型余项)的. 现在用直接法计算：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+o(x^3),\tag{1}$$

其中，$f(0)=-\dfrac{1}{2}$，

$$f'(0)=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\right]'\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right]\Bigg|_{x=0}=-\frac{1}{4},$$

$$f''(0)=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\right]''\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x+2)^3}\right]\Bigg|_{x=0}=-\frac{3}{4},$$

$$f^{(3)}(0)=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\right]^{(3)}\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{3}\left[-\frac{6}{(x-1)^4}+\frac{6}{(x+2)^4}\right]\Bigg|_{x=0}=-\frac{15}{8}.$$

将它们代入式(1)得

$$\begin{aligned}f(x)&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)x^2+\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)x^3+o(x^3)\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

(10) 由于 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{e^x\sin 2x}{x(2x+1)}=\infty$,

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x^2(2x+1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x(2x+1)}=0,$$

所以，所给曲线的渐近线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$ 和 $y=0$.

附注 由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin 2x}{x(2x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x^2(2x+1)}\text{不存在},$$

所以直线 $x=0$ 不是渐近线，$x\to+\infty$ 方向也无渐近线.

(11) $\displaystyle\int_0^1(x-1)^2f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,d(x-1)^3$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3}\left[(x-1)^3f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)^3e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx\right]\\&=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx=\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^2\,de^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\\&=\frac{1}{3}\left[(x-1)^2e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\Big|_0^1-2\int_0^1(x-1)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx\right]\\&=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

附注 本题也可以利用二次积分计算，具体如下：

$$\begin{aligned}\int_0^1(x-1)^2f(x)\,dx&=\int_0^1dx\int_0^x(x-1)^2e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dt\\&\xlongequal{\text{交换积分次序}}\int_0^1dt\int_t^1(x-1)^2e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dx\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^1 (t-1)^3 e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dt,$$ 以下计算同题解.

(12) 由$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u(x+y,\ yg(x)) + f'_v(x+y,\ yg(x))yg'(x)$得

$$\frac{\partial z(0,y)}{\partial x} = f'_u(y,y) + f'_v(y,y)y(\text{利用 } g(0) = g'(0) = 1)$$
$$= y + y^2(\text{利用} f'_u(y,y) = f'_v(y,y) = y),$$

所以$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \left.\frac{d}{dy}(y+y^2)\right|_{y=1} = 3.$

附注　由于$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \left.\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial z(0,y)}{\partial x}\right)\right|_{y=1}$，所以可以先算出$\frac{\partial z(0,y)}{\partial x} \xlongequal{\text{记}} \varphi(y)$，然后计算$\left.\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|_{y=1}$即得$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$，这样计算比先算出$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，然后将 $x=0$，$y=1$ 代入计算$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$快捷.

(13) 所给微分方程可以改写成

$$(x\cos y + \cos x)dy + (-y\sin x + \sin y)dx = 0,$$

即
$$(x\cos y dy + \sin y dx) + (\cos x dy - y\sin x dx) = 0.$$

由此得到 $d(x\sin y + y\cos x) = 0$. 所以所给微分方程的通解为

$$x\sin y + y\cos x = C.$$

附注　所给的微分方程既不是变量可分离的微分方程，也不是齐次微分方程和线性微分方程，因此，应采用适当分项凑全微分的方法求解.

(14) 由于$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}) = (x_1+x_3,\ x_2+x_3,\ x_3)\begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ x_2+x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 + x_3^2,$$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 \quad\quad + x_3, \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3, \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3, \end{cases}$即$\begin{cases} x_1 = y_1 \quad\quad - y_3, \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3, \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$(可逆线性变换)，则

$$f(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2(\text{规范形}).$$

附注　本题也可解答如下：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

则

$$|\lambda \boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[\lambda-(2+\sqrt{3})][\lambda-(2-\sqrt{3})],$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 有三个正特征值，所以$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

三、解答题

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sin x}{1-(1+x)^{x\sin^2\sqrt{x}}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sin x}{e^{x\sin^2\sqrt{x}\ln(1+x)}-1}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2\sqrt{x}\ln(1+x)}$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

附注 计算$\dfrac{0}{0}$型未定式极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$时，首先进行化简，其中等价无穷小代替是化简的重要手段. 只有不能或不易化简时，才考虑应用洛必达法则.

(16) 题设不等式可以改写成

$$[f'(x)-2f(x)]'-3[f'(x)-2f(x)]\geqslant0(x\geqslant0).$$

记 $g(x)=f'(x)-2f(x)$，则上式成为

$$g'(x)-3g(x)\geqslant0,\text{即}[e^{-3x}g(x)]'\geqslant0(x\geqslant0).$$

所以，对 $x\geqslant0$，$e^{-3x}g(x)\geqslant[e^{-3x}g(x)]\Big|_{x=0}=g(0)=f'(0)-2f(0)=-2$，

即
$$f'(x)-2f(x)\geqslant-2e^{3x}.$$

上式两边同乘 e^{-2x} 得 $[e^{-2x}f(x)]'+2e^x\geqslant0$，即 $[e^{-2x}f(x)+2e^x]'\geqslant0(x\geqslant0)$. 由此推得，对$x\geqslant0$有

$$e^{-2x}f(x)+2e^x\geqslant[e^{-2x}f(x)+2e^x]\Big|_{x=0}=3,$$

即 $f(x)\geqslant3e^{2x}-2e^{3x}$.

附注 在证明过程中多次应用以下结论：

当 $f'(x)-\lambda f(x)\geqslant0$ 时有 $[e^{-\lambda x}f(x)]'\geqslant0$(其中 λ 是常数).

(17) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4x+\cos^4x}}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2x\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}}dx$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{\csc^2 2x-\frac{1}{2}}}\frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=-\int\frac{1}{\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}}d\cot 2x$$

$$=-\ln\left(\cot2x+\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}\right)+C.$$

附注 对于三角函数的不定积分，当被积函数中出现一种类型以上的三角函数时，总是利用三角函数的性质将它们合并成一种类型的三角函数，以便于不定积分的计算.

(18) 直线 $y=x-1$ 与圆 $x^2+y^2=2x$ 的交点 $C=\left(1+\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$.

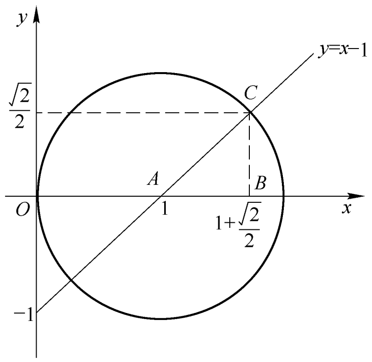
V_x = 曲边三角形 OBC 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 − 三角形 ABC 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积(曲边三角形 OBC 与三角形 ABC 如图答 9-18 所示)

$$=\pi\int_0^{1+\frac{\sqrt2}{2}}(2x-x^2)dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt2}{2}$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{5\sqrt{2}}{12}\right)-\frac{\sqrt{2}}{12}\pi=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

V_y = 曲边三角形 OBC 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 − 三角形 ABC 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$=2\pi\left[\int_0^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_1^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}x(x-1)\,\mathrm{d}x\right],\quad(1)$$



图答　9-18

其中，$\int_0^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{令\,t=x-1}\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(t+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2u\,\mathrm{d}u(其中\ t=\sin u)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u=-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4},$$

$$\int_1^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}x(x-1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

将它们代入式(1)得

$$V_y=2\pi\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right)\right]=\frac{3}{4}\pi^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

附注　应记住以下公式：

设函数 $f(x)$ 是 $[a,b](a\geqslant 0)$ 上连续的非负函数，记 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$，则 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x;$$

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

(19) 由于 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ 即为 $[xf(x)]'\big|_{x=\xi}=0$，所以作辅助函数 $F(x)=xf(x)$，它在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且由

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x=x_1f(x_1)\left(x_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)(根据积分中值定理)，即\ F(1)=F(x_1),$$

从而可知，$F(x)$ 满足罗尔定理条件，所以存在 $\xi\in(x_1,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

附注　题解中综合使用了罗尔定理与积分中值定理.

(20) 由于 $\int_0^x f(x-t,y)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(u,y)\,\mathrm{d}u\ (u=x-t)$，所以 $f(x,y)=y+\int_0^x f(u,y)\,\mathrm{d}u$，从而 $f(0,y)=y$，且

$$f_x'(x,y)=f(x,y).$$

由此得到 $f(x,y)=y\mathrm{e}^x$. 此外，由题设知

$$\mathrm{d}g(x,y)=g_x'(x,y)\,\mathrm{d}x+g_y'(x,y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x+y),$$

所以 $g(x, y)=x+y+C$. 从而由 $g(0, 0)=0$ 得 $C=0$. 因此

$$g(x, y)=x+y.$$

由以上的 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 得

$$f(\sqrt{x},g(x,y)) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x+y).$$

从而, $\iint\limits_D f(\sqrt{x},g(x,y))\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x+y)\mathrm{d}\sigma$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x+y)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令 t=\sqrt{x}} 4\int_0^1 t^4\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 4\left(t^4\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - 4\int_0^1 t^3\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)$$

$$= 4\mathrm{e} - 16\int_0^1 t^3\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 4\mathrm{e} - 16\left(t^3\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - 3\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)$$

$$= -12\mathrm{e} + 48\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = -12\mathrm{e} + 48\left(t^2\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)$$

$$= 36\mathrm{e} - 96\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 36\mathrm{e} - 96.$$

附注 题解中值得注意的是:

为了对 $f(x,y) = y + \int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$ 的两边对 x 求偏导数, 需将被积函数中的 x 移走, 故令 $u=x-t$.

(21) 将所给方程改写为

$$\frac{y(x)}{x} = x^2 - \int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t + \frac{y'(x)}{x}. \tag{1}$$

上式两边对 x 求导得

$$\frac{xy'-y}{x^2} = 2x - \frac{y}{x^2} + \frac{xy''-y'}{x^2},$$

即

$$y'' - \frac{x+1}{x}y' = -2x^2. \tag{2}$$

令 $p=y'$, 则式(2)成为

$$p' - \frac{x+1}{x}p = -2x^2,$$

它的通解为

$$p = \mathrm{e}^{\int\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x}\left(C_1 - \int 2x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= x\mathrm{e}^x\left(C_1 - 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) = C_1x\mathrm{e}^x + 2(x+1)x,$$

从而, 式(2)的通解为

$$y(x) = \int[C_1x\mathrm{e}^x + 2(x+1)x]\mathrm{d}x$$

$$= C_1(x-1)\mathrm{e}^x + \frac{2}{3}x^3 + x^2 + C_2.$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}$ 存在知 $C_1=0$, 所以

$$y(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2. \tag{3}$$

由题设等式得 $y(1)=1+y'(1)$，于是由式(3)得 $C_2=\frac{10}{3}$，因此

$$y(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+\frac{10}{3}.$$

附注　为消除题中所给等式中的积分运算，必须将它写成式(1)．此外，式(2)通解中的常数 C_1 与 C_2 分别由条件

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}\text{存在}$$

和 $y(1)=1+y'(1)$(它是在所给等式中令 $x=1$ 得到的)确定.

(22) 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}$$

知，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}$(其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$可逆)，即

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{B},$$

所以，由 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-(\lambda+1)&0\\0&\lambda+a&-(\lambda+1)\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda+a&-(\lambda+1)\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-(1+a)]$$

知，方程 $f(\lambda)=0$ 不可能有三重根．这是因为，如有三重根，则

$$(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-(1+a)]=(\lambda+1)^3,$$

但 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=(\lambda+1)^2$ 是不可能的．此外，方程 $f(\lambda)=0$ 有二重根时应分两种情形讨论：

(Ⅰ) 当 $\lambda=-1$ 是方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根时，由以上计算知 $a=1$，并且由

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

知，$r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=1=3-2$(即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=-1$ 的重数之差)，所以此时 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化．由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(Ⅱ) 当 $\lambda=-1$ 不是方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根时，方程 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 必有二重根，

从而$(-1)^2-4[-(1+a)]=0$，即 $a=-\dfrac{5}{4}$，并且此时的二重根为 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，于是由

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & -1\\ -1 & \frac{1}{2} & -1\\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & \frac{1}{2} & -1\\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & -\frac{3}{2} & -3\\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & -\frac{3}{2} & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

知 $r\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\right)=2\neq1=3-2$(即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=\dfrac{1}{2}$的重数之差)，所以此时 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化. 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

综上所述，当 $a=-\dfrac{5}{4}$时，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 A 可相似对角化的充分条件有以下四种：

(Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值；

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量；

(Ⅲ) $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵；

(Ⅳ) $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$($n_i$ 是 λ_i 的重数，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵).

本题的求解就是从利用(Ⅳ)入手的.

(23)(Ⅰ) 由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-1$，1. 由于 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 还有特征值 $\lambda=0$. 显然对应于 $\lambda=-1$，1，分别有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 设对应于 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交，故有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=0,\\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}a_1-a_3=0,\\ a_1+a_3=0,\end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

从而 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 显然 $|\boldsymbol{Q}|=-1$，所以 $\boldsymbol{Q}^*=|\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{Q}^{-1}=-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，因此

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{A}^*(-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^*.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^*+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\\&=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}^*+\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1}$$

由此可知，取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}$，则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $-y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

附注　我们知道，使 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 也使 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 化为标准形，即 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\mu_3y_3^2$，其中 μ_1,μ_2,μ_3 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，μ_1,μ_2,μ_3 可由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 直接得到，即 $\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}$，$\mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}$，$\mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}$. 但是现在 $|\boldsymbol{A}|=0$，故为了算出 μ_1,μ_2,μ_3，或为了将 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 化为标准形，采用了题解中的方法.

模拟试题(十)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	C	C	B	B	A	C	A

(1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}=-e\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan x}{x}=-e$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+e^{1-\frac{1}{x}})\tan x}{x(1-e^{-\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}=1,$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. 因此选(B).

附注 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$, 所以当 $f(x)$ 中包含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 时, 要计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, 必须从计算 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 入手.

(2) 由于 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{(e^x-1)\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2x}$, 所以, 在点 $x=0$ 的某个邻域内 $f'(x)\geqslant 0$(仅在点 $x=0$ 处取等号), 且

$$f''(x)\begin{cases}<0, & x<0,\\ =0, & x=0,\\ >0, & x>0.\end{cases}$$

由此可知, $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 因此选(C).

附注 由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{(e^x-1)\sin x}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)\sin x=0$ 知, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$, 因此对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{(e^x-1)\sin x}$ 中的分母可用等价无穷小代替, 对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2}$ 可使用洛必达法则.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{x-\sin x}=1$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\tan x=0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\tan x}{x-\sin x}=1, \text{即} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\tan x}{x-\sin x}=2.$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\tan x}{(1-\cos x)\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\tan x}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)\tan x}{x-\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{\frac{1}{2}x^3}\right)=4\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} 4\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

因此选(C).

附注　本题是利用一个极限计算另一个极限，同样可以考虑以下问题：

设$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}$. 解答如下：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(3x-\sin 3x)+[\sin 3x+xf(x)]}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}+1\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}+1=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}.\end{aligned}$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$与$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$都是定积分,且对于$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$,有$\frac{\tan x}{x}>1$,$\frac{x}{\tan x}<1$,所以$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x>\frac{\pi}{4}$,$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{4}<1$. 由此可知选项(A)、(C)、(D)都应排除. 因此选(B).

附注　题解中用排除法选(B)，也可直接证明它是正确的.

$I_1>I_2$ 已证明了，下面证明 $I_1<1$.

记$f(x)=\frac{\tan x}{x}$，则$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}>0\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right)$，即$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调增加，从而对$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$有$f(x)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}$，由此得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x<\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=1.$$

(5) 由题设及$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+1-2x\sin y-\cos^2 y)=0$知，$f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. 于是在点(0, 0)的某个充分小的去心邻域内有

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&>\frac{1}{2}(x^2+1-2x\sin y-\cos^2 y)\\&=\frac{1}{2}(x^2+\sin^2 y-2x\sin y)=\frac{1}{2}(x-\sin y)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以，$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值，因此选(B).

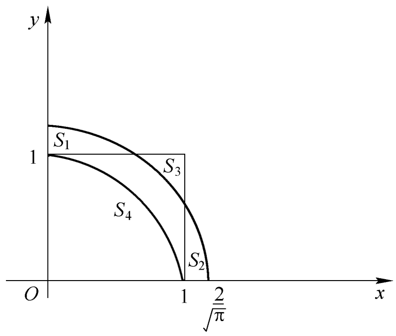
附注　由于$f(x,y)$的表达式未知，故用定义判定$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

(6) 由于 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$是正值函数，$D_1\subset D_2$，所以$I_1<I_2$.

圆 $x^2+y^2=\frac{4}{\pi}$将 D_2 划分成 S_3 与 S_4 两部分，S_1，S_2，S_3，S_4 如图答 10-6 所示，则 $D_2=$

$S_3 \cup S_4$，$D_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_4$. 由于 D_2 与 D_3 的面积同为 1，所以 S_3 与 $S_1 \cup S_2$ 的面积相等，此外，在 S_3 上，$e^{-(x^2+y^2)} \leqslant e^{-\frac{4}{\pi}}$；在 $S_1 \cup S_2$ 上，$e^{-(x^2+y^2)} \geqslant e^{-\frac{4}{\pi}}$，所以

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = \iint\limits_{S_3} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma + \iint\limits_{S_4} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma \\ &< \iint\limits_{S_3} e^{-\frac{4}{\pi}} d\sigma + \iint\limits_{S_4} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = \iint\limits_{S_1 \cup S_2} e^{-\frac{4}{\pi}} d\sigma + \iint\limits_{S_4} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma \\ &< \iint\limits_{S_1 \cup S_2} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma + \iint\limits_{S_4} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = \iint\limits_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = I_3. \end{aligned}$$



图答 10-6

由上可知 $I_1 < I_2 < I_3$. 因此选(A).

附注 本题的核心是判断 I_2 与 I_3 的大小，这里利用了以下的结论：

S_3 与 $S_1 \cup S_2$ 的面积相等；

在 S_3 上，$e^{-(x^2+y^2)} \leqslant e^{-\frac{4}{\pi}}$；在 $S_1 \cup S_2$ 上，$e^{-(x^2+y^2)} \geqslant e^{-\frac{4}{\pi}}$，所以

$$\iint\limits_{S_3} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma < \iint\limits_{S_3} e^{-\frac{4}{\pi}} d\sigma = \iint\limits_{S_1 \cup S_2} e^{-\frac{4}{\pi}} d\sigma < \iint\limits_{S_1 \cup S_2} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma.$$

(7) $r(\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - n_i$(对每个 $\boldsymbol{A}$ 的 n_i 重特征值 λ_i)是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件. 因此选(C).

附注 应记住题中的这个充分必要条件. 它的特殊情形是：$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(8) 由题设知 $r(\boldsymbol{A}^*) = 4 - 3 = 1$，从而 $r(\boldsymbol{A}) = 4 - 1 = 3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有且仅有 3 个不为零. 由此推得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形应形如 $a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2$($a_1$，$a_2$，$a_3$ 全不为零). 因此选(A).

附注 应记住以下关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_s$，则 $r(\boldsymbol{A}) = n - s$.

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$$

二、填空题

(9) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1} \xlongequal{\text{令 } t = \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1} \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{2}\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2}.$$

附注 题解中令 $t = \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1$，使问题快速获解.

(10) 对题设等式应用洛必达法则得

$$1 = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{2(x-1)},$$

所以，$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}f'(x)=0.$ (1)

于是$f''(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{2(x-1)}=2.$ (2)

由式(1)，式(2)得曲线$y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的曲率为

$$K=\frac{|f''(1)|}{\{1+[f'(1)]^2\}^{\frac{3}{2}}}=2.$$

附注 曲线$y=y(x)$(其中$y=y(x)$二阶可导)在点$(x, y(x))$处曲率的计算公式为

$$K=\frac{|y''(x)|}{\{1+[y'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

(11) 所给的无穷区间上反常积分是收敛的，所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^6\sqrt{1+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^{10}}}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\, t=x^{-5}}\frac{1}{5}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left[t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

附注 对于收敛的反常积分可以如定积分那样，使用换元积分法和分部积分法计算.

(12) 显然$x=0$，$y=0$时，所给方程成为$\int_0^z e^{t^2}\mathrm{d}t=0$，从而$z(0, 0)=0$. 此外，所给方程两边对$x$求偏导数得

$$e^{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+y+y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{e^{z^2}+y},\text{且}\frac{\partial z(0,0)}{\partial x}=0.$$

从而

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{\partial z(0,y)}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=0}=\lim_{y\to0}\frac{\dfrac{\partial z(0,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x}}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\dfrac{-y}{e^{z^2(0,y)}+y}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-1}{e^{z^2(0,y)}+y}=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

附注 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$也可以由$\dfrac{\partial z}{\partial x}$对$y$求偏导数算出$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，然后将$x=y=z=0$代入计算得到，但没有如题解中那样对$\dfrac{\partial z(0, y)}{\partial x}$按定义计算快捷.

(13) 将所给微分方程改写成

$$(x^2\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x)-\mathrm{d}y-\cos x\mathrm{d}x=0,$$

即$\mathrm{d}(x^2y-y-\sin x)=0$，所以所给微分方程的通解为

$$x^2y-y-\sin x=C.$$

将 $y(0)=1$ 代入上式得 $C=-1$. 所以所求的特解为

$$x^2y-y-\sin x=-1.$$

附注 所给微分方程也可以改写为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1},\text{（一阶线性微分方程）}$$

它的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(C+\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}}dx\right) \\ &= \frac{1}{x^2-1}\left(C+\int\cos x dx\right)=\frac{1}{x^2-1}(C+\sin x). \end{aligned}$$

将 $y(0)=1$ 代入上式得 $C=-1$，所以所求的特解为

$$y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x-1).$$

(14) 显然 $|\boldsymbol{A}|=2$，此外，记三阶单位矩阵为 $\boldsymbol{E}$，则

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*=2(\boldsymbol{A}^{-1})^2-3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2\cdot 2(\boldsymbol{E}_3-3\boldsymbol{A}),$$

所以，

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right| &= |\boldsymbol{A}^{-1}|^2\cdot 8|\boldsymbol{E}_3-3\boldsymbol{A}| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2\times 8\times\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ -3 & -3 & -5\end{vmatrix}=-58. \end{aligned}$$

附注 计算矩阵的行列式时，以下结论是常用的：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶行列式，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,\quad |k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|\ (k\text{ 为常数}),$$

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n>1),$$

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\ (\boldsymbol{A}\text{ 可逆时}).$$

三、解答题

(15) 当 $a\leqslant 0$ 时，有

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\arctan t^2dt}{x^a}=+\infty,$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 矛盾,所以 $a>0$.

当 $a>0$ 时,由

$$0=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\arctan t^2dt}{x^a}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x^2}{ax^{a-1}}$$

知 $a-1>0$,即 $a>1$.

当 $a>1$ 时,由

$$0=\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\arctan t^2\mathrm{d}t}{x^a}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x^2}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{ax^{a-3}}$$

知 $a-3<0$,即 $a<3$. 从而 a 的取值范围为(1,3).

附注　求解时,应注意次序:

首先肯定 $a>0$,只有这样才能对 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\arctan t^2\mathrm{d}t}{x^a}$ 应用洛必达法则,然后肯定 $a>1$,因为只有这样才能对 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan x^2}{ax^{a-1}}$ 施行等价无穷小代替.

(16) 题图中的阴影部分被直线 $y=1$ 划分成上、下两部分，分别记为 D_1 与 D_2，且分别记由它们绕 y 轴旋转一周而成的旋转体为 Ω_1 与 Ω_2.

于是，将容器中的水从容器顶部抽出需做的功为

$$W=W_1+W_2,$$

其中，W_1，W_2 分别为将 Ω_1，Ω_2 中的水从顶部抽出需做的功.

由于 $W_1=\int_1^2(2-y)\cdot\pi[2-(y-2)^2]\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{t=2-y}\pi\int_0^1t(2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\pi,$$

$$W_2=\int_0^1(2-y)\cdot\pi y^2\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\pi,$$

所以，$W=W_1+W_2=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{7}{6}\pi$. 因此，将容器中的水从容器顶部抽出至少需做的功为 $\dfrac{7}{6}\pi$.

附注　(Ⅰ) W_1 是 $\mathrm{d}W_1$ 在[1，2]上的积分，其中 $\mathrm{d}W_1$ 是将纵坐标为 $y\in[1,2]$ 的水平平面下位于 Ω_1 中的高为 $\mathrm{d}y$ 的薄水片移到容器顶部所做的功，由于薄水片的重力为

$$\rho\cdot\pi[2-(y-2)^2]\mathrm{d}y=\pi[2-(y-2)^2]\mathrm{d}y\text{(水的重力密度}\rho=1),$$

所以，$\mathrm{d}W_1=\pi(2-y)[2-(y-2)^2]\mathrm{d}y$.

对于 W_2 也有同样的说法.

(Ⅱ) 顺便计算容器的体积 V:

$$V=V_1+V_2,$$

其中，$V_1=D_1$ 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$=\pi\int_1^2[2-(y-2)^2]\mathrm{d}y=\pi\left(-\frac{1}{3}y^3+2y^2-2y\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{3}\pi,$$

$V_2=D_2$ 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1=\frac{1}{3}\pi.$$

所以，$V=\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{1}{3}\pi=2\pi$.

(17) 所给微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=2\sin t \tag{1}$$

的齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0 \tag{2}$$

的通解为 $X(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$.

由于 $2\sin t=e^{\alpha t}\cdot 2\sin\beta t$ 的 $\alpha+i\beta=i$ 是式(2)的特征方程之根，所以式(1)有特解

$$x^*(t)=t(A\cos t+B\sin t).$$

将它代入式(1)得

$$-2A\sin t+2B\cos t=2\sin t,$$

所以有 $\begin{cases}-2A=2,\\ B=0,\end{cases}$ 即 $A=-1$，$B=0$，因此 $x^*(t)=-t\cos t$. 从而式(1)的通解为

$$x(t)=X(t)+x^*(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t, \tag{3}$$

且

$$\frac{dx(t)}{dt}=-C_1\sin t+C_2\cos t-\cos t+t\sin t. \tag{4}$$

将 $x(t)\Big|_{t=0}=\dfrac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}=0$ 代入式(3)，式(4)得 $C_1=0$，$C_2=1$. 所以

$$\frac{dx(t)}{dt}=t\sin t.$$

于是由 $\dfrac{dy}{dx}=\cot t$，即 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\cot t$，得

$$\frac{dy}{dt}=\cot t\cdot\frac{dx}{dt}=\cot t\cdot t\sin t=t\cos t.$$

因此

$$\begin{aligned}y(t)&=\int t\cos t\,dt=\int t\,d\sin t=t\sin t-\int\sin t\,dt\\&=t\sin t+\cos t+C.\end{aligned}$$

将 $y(0)=1$ 代入上式得 $C=0$，所以所求的 $y(t)=t\sin t+\cos t$.

附注 本题在求出 $x(t)$ 后，由 $\dfrac{dy}{dx}$ 求满足 $y\Big|_{t=0}=1$ 的 $y(t)$ 的表达式，它是由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ (其中 $x(t)$，$y(t)$ 可导)求 $\dfrac{dy}{dx}$ 的逆问题.

(18) 由 $f_x'=2x(1-y^2)$，$f_y'=2y(2-x^2)$ 得方程组

$$\begin{cases}f_x'=0,\\ f_y'=0,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}2x(1-y^2)=0,\\ 2y(2-x^2)=0.\end{cases}$$

显然该方程组在 D 的内部无解，因此 $f(x,y)$ 在 D 内部无可能极值点.

D 的边界由Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ组成，如图答 10-18 所示.

在Ⅰ：$x^2=4-y^2(0\leqslant y\leqslant 1)$上，

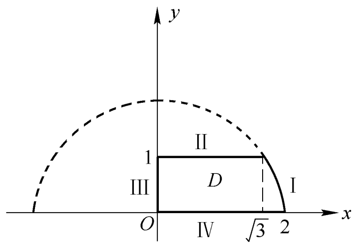
$$f(x,y)\Big|_{\mathrm{I}}=(x^2+2y^2-x^2y^2)\Big|_{x^2=4-y^2}$$
$$=4-3y^2+y^4\xlongequal{\text{记}}\varphi(y),$$

由于$\varphi'(y)=4y\left(y^2-\dfrac{3}{2}\right)<0(0<y<1)$，所以$f(x,y)$在Ⅰ上的最大值为$\varphi(0)=4$，最小值为$\varphi(1)=2$.

在Ⅱ：$y=1(0\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$上，$f(x,y)\Big|_{\mathrm{II}}=2$，所以$f(x,y)$在Ⅱ上的最大值与最小值都为2.

在Ⅲ：$x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$上，$f(x,y)\Big|_{\mathrm{III}}=2y^2$，所以$f(x,y)$在Ⅲ上的最大值为2，最小值为0.

在Ⅳ：$y=0(0\leqslant x\leqslant 2)$上，$f(x,y)\Big|_{\mathrm{IV}}=x^2$，所以$f(x,y)$在Ⅳ上的最大值为4，最小值为0.



图答　10-18

综上所述，$f(x,y)$在D上的最大值为4，最小值为0.

附注　二元连续函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的最值可按以下步骤计算：

（Ⅰ）计算$f(x,y)$在D内部的可能极值点，设为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)；

（Ⅱ）计算$f(x,y)$在D的边界上的最大值与最小值，记为M_1与m_1.

（Ⅲ）比较$f(x_1,y_1)$，$f(x_2,y_2)$，…，$f(x_n,y_n)$，M_1，m_1，则它们中最大(小)者即为$f(x,y)$在D上的最大值(最小值).

(19) 所给等式可以改写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(1+\Delta y)=\frac{y}{x^2+1}+o(1).$$

由于$y(x)$是连续函数，所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，因此上式两边令$\Delta x\to 0$取极限得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x^2},\text{ 即}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

它的通解为$\ln y=\arctan x+\ln C$，即$y=C\mathrm{e}^{\arctan x}$.

将$y(0)=1$代入上式得$C=1$，所以$y(x)=\mathrm{e}^{\arctan x}$.

由此可得

$$V_1=\pi\int_0^1(\sqrt{y(x)})^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x,\tag{1}$$

$$\begin{aligned}V_2&=2\pi\int_0^1 xy(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^1\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x^2=\pi\left(x^2\mathrm{e}^{\arctan x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x\right)\\&=\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\pi\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x\\&=\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\pi\int_0^1\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x+\pi\int_0^1\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}\arctan x\end{aligned}$$

$$= \pi e^{\frac{\pi}{4}} - \pi\int_0^1 e^{\arctan x}dx + \pi e^{\arctan x}\Big|_0^1$$

$$= 2\pi e^{\frac{\pi}{4}} - \pi - \pi\int_0^1 e^{\arctan x}dx. \tag{2}$$

式(1)与式(2)相加得

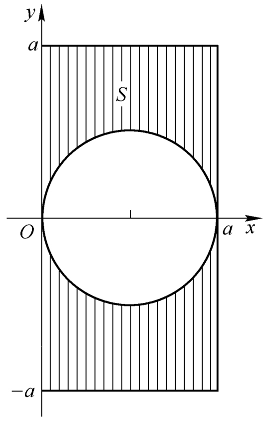
$$V_1 + V_2 = 2\pi e^{\frac{\pi}{4}} - \pi.$$

附注 设平面区域 $D=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$(其中 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续),则

D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$,

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

(20)(Ⅰ)$I(a) = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D\cap D_1}(x+2x^2y)d\sigma$,其中 $D_1 = \{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,\ |y|\leqslant a\}$,$D\cap D_1$ 如图答 10-20 阴影部分所示. 显然 $D\cap D_1$ 关于 x 轴对称,在对称点处,x 的值彼此相等,而 $2x^2y$ 的值互为相反数,所以



图答 10-20

$$\iint\limits_{D\cap D_1}(x+2x^2y)d\sigma = 2\iint\limits_S xd\sigma \text{(其中 } S \text{ 是 } D\cap D_1 \text{ 的第一象限部分)}$$

$$= 2\int_0^a dx\int_{\sqrt{ax-x^2}}^a xdy = 2\int_0^a x(a-\sqrt{ax-x^2})dx$$

$$= ax^2\Big|_0^a - \int_0^a 2x\sqrt{ax-x^2}dx$$

$$= a^3 - \int_0^a 2x\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx$$

$$\xlongequal{\text{令 } t = x-\frac{a}{2}} a^3 - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 2\left(t+\frac{a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}dt$$

$$= a^3 - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 2t\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}dt - a\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}dt$$

$$= a^3 - a\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$ ($\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 2t\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}dt = 0$ 是由奇函数在对称区间上的定积分性质得到的,$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}dt = \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 是由定积分几何意义得到的)

$$= \left(1-\frac{\pi}{8}\right)a^3.$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)中算得的 $I(a)$ 知

$$\lim_{a\to0^+}\frac{e^{I(a)}-1}{\sin a-\ln(1+a)-\frac{1}{2}a^2}=\lim_{a\to0^+}\frac{I(a)}{\sin a-\ln(1+a)-\frac{1}{2}a^2}$$

$$=\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\lim_{a\to0^+}\frac{a^3}{\sin a-\ln(1+a)-\frac{1}{2}a^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\lim_{a\to0^+}\frac{3a^2}{\cos a-\frac{1}{1+a}-a}$$

$$=3\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\lim_{a\to0^+}\frac{a^2}{(1+a)(\cos a-1)-a^2}=3\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\lim_{a\to0^+}\frac{1}{-(1+a)\frac{1-\cos a}{a^2}-1}$$

$$=3\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{\pi}{4}-2.$$

附注　在计算各种问题时，第一步总是化简. 在本题(Ⅰ)的二重积分计算中，首先利用积分区域的对称性进行化简；(Ⅱ)的$\frac{0}{0}$型未定式极限计算，也是先利用等价无穷小代替进行化简. 化简后的问题变得简单些，容易计算些.

(21) 由题设知$f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件，所以存在$x_0\in(0,1)$，使得$f'(x_0)=0$. 于是由$f''(x)<0(x\in(0,1))$知

$$f'(x)\begin{cases}>0,\ 0<x<x_0,\\=0,\ x=x_0,\\<0,\ x_0<x<1,\end{cases}$$

由此可知$f(x)$在点x_0处取最大值M，即$f(x_0)=M$.

记$F(x)=f(x)-Mx$，则$F(x)$在$[x_0,1]$上连续，且

$$F(x_0)F(1)=M(1-x_0)\cdot(-M)<0,$$

所以由零点定理知，存在$x_1\in(x_0,1)$，使得$F(x_1)=0$. 于是由$F(x)$在$[0,x_1]$上连续，在$(0,x_1)$内可导，且$F(0)=F(x_1)(=0)$及罗尔定理知，存在$\xi\in(0,x_1)\subset(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$. 由于$F''(x)=f''(x)<0$，所以上述的$\xi$是唯一的. 由此证得存在唯一的$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=M$.

附注　本题是对辅助函数$F(x)$，证明满足$F'(\xi)=0$的ξ在$(0,1)$内的存在性与唯一性. 由$F''(x)<0(x\in(0,1))$即可推出ξ的唯一性. 欲证ξ的存在性，只要在$[0,1]$上找到不同的两点x_0与x_1，使得$F(x_0)=F(x_1)$即可. 题解就是按此思路进行的.

(22) 由题设知$(1,2,2,1)^T-(1,-2,4,0)^T=(0,4,-2,1)^T$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，所以有

$$4\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=0,\text{ 即 }\boldsymbol{\alpha}_4=-4\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

于是由$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的秩为3知，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 此外，由题设$(1,-2,4,0)^T$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的解得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3.$$

于是，方程组$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$即为

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.\tag{1}$$

由于式(1)的系数矩阵的秩为3，且对应的齐次方程组的基础解系为$(2,\ 2,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$，此外式(1)有特解$(-2,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，所以方程组$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$的通解为

$$\boldsymbol{y}=C(2,2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(-2,0,0,1)^{\mathrm{T}}(\text{其中 } C \text{ 是任意常数}).$$

附注 要记住，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(其中$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{x}$是$n$维未知列向量)的基础解系中包含的线性无关的解向量个数为$n-r(A)$.

(23)(Ⅰ)由于

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = x_1^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+x_3^2 \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

所以$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

由于$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda=0,\ 1,\ 4$，所以有

$$\begin{cases}1+a+1=0+1+4,\\ |\boldsymbol{B}|=0\cdot1\cdot4,\end{cases}\text{即 } a=3,b=1.$$

(Ⅱ)由以上计算知$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

设$\boldsymbol{B}$的对应于$\lambda=0$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}$满足

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

由于
$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[(\text{以下同})]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以式(1)与方程组$\begin{cases}a_1\quad+a_3=0,\\ \quad a_2\quad=0\end{cases}$同解，可取$\boldsymbol{\alpha}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

设$\boldsymbol{B}$的对应于$\lambda=1$的特征向量为$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\beta}$满足

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

由于
$$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},$$

所以式(2)与方程组 $\begin{cases} b_2+b_3=0, \\ b_1+b_2 \quad\quad =0 \end{cases}$ 同解，可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{B}$ 的对应于 $\lambda=4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都正交，于是有

$$\begin{cases} c_1 \quad\quad\quad -c_3=0, \\ -c_1+c_2-c_3=0. \end{cases}$$

可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\gamma}$，即 $\boldsymbol{\gamma}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. 显然 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

使得 $f(x_1,x_2,x_3)=y_2^2+4y_3^2$(标准形).

附注　题中的 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵，所以要用正交变换将 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，必须首先将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 改写成 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵). 此外，要熟练掌握用正交变换把二次型化为标准形的方法.