考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学

冲刺篇

模拟试题5套及详解

（数学三）

陈启浩　编著

集合精华题目

覆盖考试要点

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学冲刺篇（数学三）——模拟试题 5 套及详解

陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学三”考试的学生．书中包含了5套精心设计的模拟试题，题目难度保持或者稍高于考研题目难度．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的详解部分，不仅给出了详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的教学人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学冲刺篇（数学三）模拟试题5套及详解/陈启浩编著．—北京：机械工业出版社，2013.10

（考研数学复习指导系列丛书）

ISBN 978-7-111-44146-5

Ⅰ．①2…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第224646号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　熊海丽
责任校对：张　媛　封面设计：路恩中
责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年10月第1版第1次印刷
184mm×260mm·6.5印张·150千字
标准书号：ISBN 978-7-111-44146-5
定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

深入地读完我们编写的2014考研数学复习指导系列丛书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行5场“实战演习”——认真、独立地做完5套模拟试题，作为最后的冲刺．

书中的5套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这5套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的语言，指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点．当然，在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看详解，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进击．

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，并欢迎读者对本书提出宝贵意见，可发邮件到cqhshuxue@gmail.com，非常感谢!

北京邮电大学教授　陈启浩

目　　录

模拟试题(一)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

（A）1； （B）2； （C）3； （D）4.

[ ]

（2）设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x + \cos^4 x)\mathrm{d}x, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x - \cos^7 x)\mathrm{d}x$，则它们的大小次序为

（A）$M<N<P$； （B）$N<M<P$； （C）$P<M<N$； （D）$P<N<M$.

[ ]

（3）收敛半径 $R=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的

（A）充分而非必要条件； （B）必要而非充分条件；

（C）充分必要条件； （D）既非必要又非充分条件．

[ ]

（4）微分方程 $y'' + y = 2\sin x$ 应有的特解形式为

（A）$a\cos x + b\sin x$； （B）$x(a\cos x + b\sin x)$；

（C）$ax\cos x$； （D）$bx\sin x$.

[ ]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，且存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$，则

（A）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\frac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；

（B）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\frac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$；

（C）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；

（D）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.

[ ]

（6）设 n 维向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m (m \leqslant n)$，记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 和 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$，则下列命题不正确的是

(A) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩；

(B) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等价；

(C) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩；

(D) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 记 $Y=X^2$ 和二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则 $F(1,4)$ 等于

(A) $\dfrac{1}{4}$；　(B) $\dfrac{1}{2}$；　(C) $\dfrac{3}{4}$；　(D) 1.

[　　]

(8) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则统计量 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

(A) $\dfrac{1}{n}\sigma^2,\ \dfrac{2}{n}\sigma^4$；　(B) $\dfrac{1}{n}\sigma^2,\ \dfrac{4}{n}\sigma^4$；

(C) $\sigma^2,\ \dfrac{2}{n}\sigma^4$；　(D) $\sigma^2,\ \dfrac{4}{n}\sigma^4$.　[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续，则常数 $a=$__________.

(10) 设二元函数 $f(u,v)$ 可微，则 $\dfrac{\partial}{\partial x}f\left(e^{xy}, \cos\dfrac{1}{x}\right)=$__________.

(11) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\dfrac{1}{2^n}\right]$ 的和为__________.

(12) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p+p\ln p$，(其中 p 是价格)，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$__________.

(13) 设四阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^*=$__________.

(14) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件，又记 X 为服从参数为 $P(A)$ 的 0 – 1 分布的随机变量，则 $E(X^2)=$ __________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本小题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

(16)(本小题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\mathrm{e}^x$，且 $f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n!}$，记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，求 $s(x)$ 的表达式并画出函数 $y=s(x)$ 的简图．

(17)(本小题满分 10 分)

求二元函数$f(x, y)=2x^2+y^2-2x^2y^2$ 在闭区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+2y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$上的最大值与最小值.

(18)(本小题满分 10 分)

设函数$f(x, y)=\begin{cases} xy, & (x, y)\in D_1, \\ 1-x-y, & (x, y)\in D_2, \end{cases}$其中 D_1, D_2 是$\triangle OAB$ 被曲线 $xy+x+y=1$ 划分成的两部分(见图 1-18), 求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

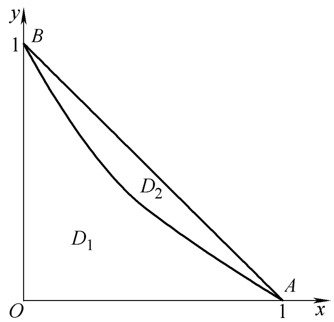

图　1-18

(19)(本小题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内二阶可导，且$f'_+(a)>0$，$f(b)=0$. 此外存在$c\in(a, b)$，使得$f(c)=0$，$f'(c)<0$. 证明：存在$\xi\in(a, b)$，使得$f''(\xi)=0$.

(20)(本小题满分 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(b, 3, 5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3, 4, b)^{\mathrm{T}}$线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，求常数$a$，$b$.

（21）（本小题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}$ 是三阶正交矩阵）下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

（22）（本小题满分 11 分）

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1-x^3y-xy^3), & |x|<1, |y|<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅰ）求随机变量 $Z=X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

（Ⅱ）求随机变量 $W=(X-Y)^2$ 的数学期望.

(23)(本小题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是未知参数，x_1，x_2，…，x_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本的观察值，求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

模拟试题(二)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $f(x)=(x-2)|x(x-2)|$，则

(A) $f(x)$ 在点 $x=0$，2 处都不可导；

(B) $f(x)$ 在点 $x=0$，2 处都可导；

(C) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，而在点 $x=2$ 处不可导；

(D) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导，而在点 $x=2$ 处可导．

[　　]

(2) 下列等式中不正确的是

(A) $\int_0^1 x^2 dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$；

(B) $\int_0^1 x^2 dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{2n}\right)^2$；

(C) $\int_0^1 x^2 dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$；

(D) $\int_0^1 x^2 dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$．

[　　]

(3) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$ 则

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都为零；

(C) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在但都不为零；

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

[　　]

(4) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列，则当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，下列结论正确的是

(A) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散；

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛;

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛;

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

[ ]

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性相关, 则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 不可由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示;

(B) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示;

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示;

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵且有以下命题:

① $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值;

② $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;

③ $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵;

④ $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$(其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵).

则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有两类, 它们是

(A) ①②; (B) ②③; (C) ②④; (D) ①④.

[ ]

(7) 下列命题不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $\{(x, y) \mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上服从均匀分布, 则 X 与 Y 相互独立;

(B) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y)=\begin{cases} ab\mathrm{e}^{-(ax+by)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}(\text{其中 } a,\ b \text{ 都是正数}),$$

则 X 与 Y 相互独立;

(C) 设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上服从均匀分布(其中 R 是正数), 则 X 与 Y 相互独立;

(D) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自同一总体的简单随机样本, 则随机变量 $X=f_1(X_1, X_2)$ 与 $Y=f(X_3, X_4)$(其中 f_1, f_2 都是连续函数)相互独立.

[ ]

(8) 设随机变量 $t\sim t(n)$，对 $\alpha\in(0,1)$，$t_{\alpha}(n)$ 为满足 $P(t>t_{\alpha}(n))=\alpha$ 的实数，则满足 $P(|t|\leqslant b)=\alpha$ 的 b 等于

(A) $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$;　　(B) $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$;　　(C) $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$;　　(D) $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $y=y(x)$ 由微分方程 $x^2y'+y+x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ 及 $y(1)=0$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为________.

(10) 设 a 是常数，则 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x=$________.

(11) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且

$$f'_x(0,0)=1,\quad f'_y(0,0)=-1,$$

则极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}=$________.

(12) 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{1}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的零点个数为________.

(13) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，记它的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，则三阶行列式 $\left|\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$________.

(14) 设 X 是离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

又设 Y 是连续型随机变量，其概率密度为 $\varphi(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 记 $a=P(X=1)$，则概率 $P(Y\geqslant a)=$________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$.

(16)(本小题满分 10 分)

设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{4-x^2}\}$，分别求 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 和 V_y.

(17)(本小题满分 10 分)

计算二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$.

(18)(本小题满分 10 分)

求微分方程 $y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-x}+\sin 2x\cos x$ 的通解 .

(19)(本小题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 .

(20)(本小题满分 11 分)

设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解$(1,\ 2,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$和$(1,\ -2,\ 4,\ 0)^{\mathrm{T}}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}$ 都是 4 维列向量，求方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解，其中矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

(21)(本小题满分 11 分)

设 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2b & 0\\ 0 & a & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

求二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$(其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵)的矩阵 $\boldsymbol{B}$，并计算 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=0,\ 1$ 时 a，b 的值及可逆线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$)，它将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$化为规范形.

(22)(本小题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅰ)求关于 X 与 Y 的边缘概率密度;

(Ⅱ)求概率 $P(Y \geqslant EX)$ 和 $P(X>2 \mid Y<4)$.

(23)(本小题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$

(Ⅰ)试用总体 X 的简单随机样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}$.

(Ⅱ)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X(其未知参数 θ 为(Ⅰ)中确定的 $\hat{\theta}$)的简单随机样本, 则由中心极限定理知, 当 n 充分大时取值为 2 的样本个数 Y 近似地服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$, 求它的两个参数 μ, σ^2.

模拟试题(三)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）函数$f(x)=x|(e^x-1)(x-1)|$的不可导点个数为

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3.

[　　]

（2）设$F(x)=\int_0^x \max\{e^{-t},e^t\}dt$，则

（A）$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0;\end{cases}$　（B）$F(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0;\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ 1-e^x, & x\geqslant 0;\end{cases}$　（D）$F(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & x<0,\\ 1-e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

[　　]

（3）已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(x-a)^n$在$x>0$时发散，在点$x=0$处收敛，则

（A）$a=1$；　（B）$a=-1$；

（C）$-1\leqslant a<1$；　（D）$-1<a\leqslant 1$.

[　　]

（4）设$y_1=e^x-e^{-x}\sin x$，$y_2=e^x+e^{-x}\cos x$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+py'+qy=f(x)$的两个解，则$f(x)$为

（A）e^{5x}；　（B）e^{3x}；　（C）e^x；　（D）e^{-x}.

[　　]

（5）设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶实对称矩阵，且齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$有相同的基础解系$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，则方程组①$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，③$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$以及④$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$中仍以$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$为基础解系的是

（A）①②；　（B）②④；　（C）③④；　（D）①③.

[　　]

（6）矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4$的最小特征值为

(A) -1；　　(B) -2；　　(C) 1；　　(D) 2.

[　　]

(7) 袋内有 7 个球，其中 4 个红球，3 个白球．现不放回地取球，每次取 1 个．记

$A=\{$第二次取球才取到白球$\}$，$B=\{$第二次取球取到的是白球$\}$，

则它们的概率为

(A) $P(A)=P(B)=\frac{4}{7}$；　　(B) $P(A)=\frac{2}{7}$，$P(B)=\frac{3}{7}$；

(C) $P(A)=P(B)=\frac{3}{7}$；　　(D) $P(A)=P(B)=\frac{2}{7}$.

[　　]

(8) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，$X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，记其均值为 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，方差为 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $E(\overline{X}+S^2)$ 为

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 3；　　(D) 4.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}}-2, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$__________.

(10) 设函数 $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$，则 $f^{(5)}(0)=$__________.

(11) 设二元函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\sin(xy)+xz=0$ 确定，且 $xz+1\neq 0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$__________.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，其对价格 P 的弹性 $\varepsilon_P=0.2$，则当需求量为 100 000件时，价格增加 1 元会使产品收益增加__________元．

(13) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为二阶与四阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，即它们的概率密度为 $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则 $P(\max\{X,Y\}\leqslant 1)=$__________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本小题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x$.

(16)(本小题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^2}(1-\cos x), & -\frac{\pi}{2}<x<0,\\ 1, & x=0,\\ \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, & 0<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{cases}$ 的极值．

(17)(本小题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在圆域 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$ 上的最大值与最小值．

(18)(本小题满分 10 分)

设 $\alpha=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\tan^2\dfrac{x}{2}}{1-(1+x)^{\sin^3 x}}$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}\sin^{n+1}\alpha$ 的和.

(19)(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases} xy, & (x,y)\in D_1, \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}, & (x,y)\in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1，D_2 是 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ 被圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 划分成的两部分，如图 3-19 所示．求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

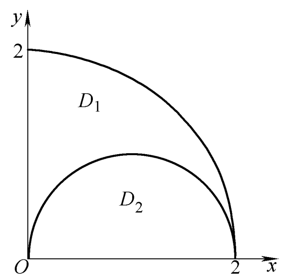

图　3-19

(20)(本小题满分 11 分)

已知线性方程组(A)：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3 \end{cases}$ 有无穷多解，

(Ⅰ)求常数 $a(a\neq 0)$ 的值；

(Ⅱ)对上述算得的 a 值，求方程组(A)与(B)：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$ 有公共解时的 λ 值及公共解.

(21)(本小题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵，其满足

$$\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

且二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^3$，求 $\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{A}^*$.

(22)(本小题满分 11 分)

设二维随机变量(U, V)的概率密度为

$$f(u,v)=\begin{cases}1, & 0<u<1,0<v<2u,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设 X 与 Y 都是离散型随机变量，其中 X 只取 -1，0，1 三个值，Y 只取 -1，1 两个值，且 $EX=0.2$，$EY=0.4$，$P(X=-1,\ Y=1)=P(X=1,\ Y=-1)=P(X=0,\ Y=1)=\frac{1}{3}P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)$. 求

(Ⅰ)(X, Y)的概率分布；

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,\ Y)$

(23)(本小题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}, & 0 < x < \theta, y > \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 和它的方差 $D(\hat{\theta})$.

模拟试题(四)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填写在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$，则 $y^{(n)}$ 为

(A) $(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^n}$； (B) $(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$；

(C) $(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{(x+1)^{n+1}}$； (D) $(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$.

[ ]

(2) 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的三个二阶偏导数 $f''_{xx}(x,y)$，$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 存在，则必有

(A) $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$； (B) $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

(C) $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续； (D) $f'_x(x,y_0)$ 在点 x_0 处可微．

[ ]

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\ (-1<\alpha<0)$

(A) 绝对收敛； (B) 条件收敛；

(C) 发散； (D) 收敛或发散与 α 取值有关．

[ ]

(4) 设 y_1，y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=\dfrac{1}{2}$； (B) $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=-\dfrac{1}{2}$；

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{1}{3}$； (D) $\lambda=\dfrac{1}{3}$，$\mu=\dfrac{2}{3}$.

[ ]

(5) 设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是 $n\times l$ 未知矩阵)，则该方程有无穷多解的充分必要条件为

(A) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$； (B) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$；

(C) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$； (D) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$.

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件为

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

(B) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征值相同；

(D) 分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形.

[　　]

(7) 设 X，Y 是随机变量，其中 $X \sim N(1,1)$，概率密度为 $f_1(x)$，Y 的概率密度为 $f_2(x)=\begin{cases} e^{-(x-1)}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x<1. \end{cases}$ 记 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x<0, \\ bf_2(x), & x \geqslant 0, \end{cases}$ 则当 $f(x)$ 是概率密度时，a，b 应满足

(A) $a+\dfrac{1}{2}b=1$；　　(B) $\dfrac{1}{2}a+b=1$；

(C) $a+\dfrac{1}{2}b=0$；　　(D) $\dfrac{1}{2}a+b=0$.

[　　]

(8) 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，其中 X 服从参数 λ 的指数分布. 记样本均值为 $\overline{X}$，方差为 S^2，则当 $(4-a)S^2-2a\overline{X}^2$ 为 $\dfrac{1}{\lambda^2}$ 的无偏估计量时，常数 a 为

(A) 3；　　(B) $\dfrac{3n}{3n+1}$；　　(C) $\dfrac{3n}{3n+2}$；　　(D) $\dfrac{n}{n+1}$.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{nx}}+(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}\right]=$ ____________.

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}dx=$ ____________.

(11) 设二元函数 $f(u,v)$ 可微，则 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(e^{xy},\sin x^2)=$ ____________.

(12) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^{2n}$ 的收敛域为____________.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 及三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，它们满足 $r(\boldsymbol{B})=2$，$r(\boldsymbol{AB})=1$，则 $\lambda=$ ____________.

(14) 设 A，B，C 是相互独立事件，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=P(C)=0.5$，则概率 $P(A-C\mid AB\cup C)=$ ____________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本小题满分 10 分)

设函数 $y=\varphi(\psi(x))$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \sin x, & x>0, \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x^2+x, & x\leqslant 0, \\ xe^x, & x>0, \end{cases}$ 求 $\varphi'(\psi(x))\big|_{x=0}$ 与 $[\varphi(\psi(x))]'\big|_{x=0}$.

(16)(本小题满分 10 分)

已知二元连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x,y)=y+\int_0^x f(x-t,y)\,\mathrm{d}t$,求二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x}f(x,y^2)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线 $x=y^2$ 和直线 $x=1$ 围成的区域.

(17)(本小题满分 10 分)

某厂家生产的一种产品同时在 A, B 两个市场销售,每件产品售价分别为 p_1 和 p_2,需求函数分别为 $q_1=3-0.5p_1$ 和 $q_2=2-3p_2$,总成本函数为 $C=5+2\left(q_1+\frac{41}{12}q_2\right)$. 如果 A 市场的价格对 B 市场的价格弹性为 2,且 $p_2=1$ 时,$p_1=\frac{3}{16}$. 试问:厂家如何确定两个市场的售价,能使其获得的总利润最大?

(18)(本小题满分 10 分)

设$f(x)$是$[0, 1]$上的非负、单调减少的连续函数，证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x(\text{其中} 0 < a < b < 1).$$

(19)(本小题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n+1}$,求

(Ⅰ) 该幂级数的和函数 $S(x)$及其定义域;

(Ⅱ) 方程 $S(x)=\frac{1}{2}$的实根个数.

(20)(本小题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量组．已知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,$$

问：a 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化？

(21)(本小题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵)经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是三阶正交矩阵)化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 又设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$(其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$)．求

(Ⅰ) $\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{A}$；

(Ⅱ) 可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$(其中 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$ 是三阶可逆矩阵)，它将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形．

(22)(本小题满分 11 分)

设随机变量 X 是连续型的，它的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$随机变量 Y 是离散型的，它的概率分布为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅰ)求 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$；

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X,X^2)$.

(23)(本小题满分 11 分)

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$，S^2 分别是它的均值与方差，求

(Ⅰ)$E(\overline{X}^2S^4)$；

(Ⅱ)$D(\overline{X}^2)$.

模拟试题(五)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 已知函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上二阶可导，且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$，则当$x>1$时，$f(x)$

(A) 单调减少且大于零；　　(B) 单调减少且小于零；

(C) 单调增加且大于零；　　(D) 单调增加且小于零．

[　　]

(2) 设二元函数$z=z(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且$z(x, 0)=x^2$，$z(0, y)=y$，则$z(x, y)$为

(A) $\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2+y$；　　(B) $\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-x^2+y$；

(C) $\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+x^2$；　　(D) $\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2$.

[　　]

(3) 设$\varphi(x)$是$[0, 1]$上的正值连续函数，a，b为常数，则当区域$D=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$时，$\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma=$

(A) πa；　　(B) πb；　　(C) $\pi(a+b)$；　　(D) $\dfrac{\pi}{2}(a+b)$.

[　　]

(4) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，则

(A) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$中至少有一收敛；

(B) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$中至少有一发散；

(C) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可推得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛；

(D) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\infty$，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散可推得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散．

[　　]

(5) 设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解的

(A) 必要而非充分条件；　　(B) 充分而非必要条件；

(C) 充分必要条件；　　(D) 既非充分又非必要条件．

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵．如果 $(1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ 的标准形应形如

(A) $a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$； (B) $b_1y_1^2+b_2y_2^2$；

(C) $c_1y_1^2$； (D) $d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2+d_4y_4^2$.

(其中 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, d_1, d_2, d_3, d_4 都是非零常数．).

[ ]

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都在 $(0, a)$ 上服从均匀分布，则随机变量 $Z=\max\{X, Y\}$ 的概率密度为

(A) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{2z}{a^2}, & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}；\end{cases}$ (B) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{z}{a}\right), & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}；\end{cases}$

(C) $f(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{z}{a}\right)^2, & 0<z<a,\\ 1, & z\geqslant a；\end{cases}$ (D) $f(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ 1-\left(1-\dfrac{z}{a}\right)^2, & 0<z<a,\\ 1, & z\geqslant a.\end{cases}$

[ ]

(8) 设 $X\sim N(a, \sigma^2)$，$Y\sim N(b, \sigma^2)$，且相互独立．现分别从总体 X 和 Y 中各抽取容量为 9 和 11 的简单随机样本，记它们的方差为 S_X^2 和 S_Y^2，并记 $S_{12}^2=\dfrac{1}{2}(S_X^2+S_Y^2)$，$S_{XY}^2=\dfrac{1}{18}(8S_X^2+10S_Y^2)$，则上述四个统计量 S_X^2，S_Y^2，S_{12}^2 和 S_{XY}^2 中方差最小者为

(A) S_X^2； (B) S_Y^2； (C) S_{12}^2； (D) S_{XY}^2.

[ ]

二、填空题： 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 已知 $f(x)$ 是连续函数，且满足

$$\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t=f(x)-\mathrm{e}^{5x},$$

则 $f''(0)=$________.

(10) 设二元可微函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $\int_y^z \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+xy+yz=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$________.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

(12) 设二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 有特解 $y_1=\mathrm{e}^x\cos x$，$y_2=\mathrm{e}^x\sin x$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=\cos x$ 的通解为________.

(13) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵），$|\boldsymbol{A}|<0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$________.

(14) 设存在常数 a，$b(b\neq 0)$，使得 $P(Y=a+bX)=1$，则随机变量 X 与 Y 的相关系数

$\rho =$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本小题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续的导数，且满足

$$y(x) = 1 + x + 2\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

(16)(本小题满分 10 分)

设二元函数 $f(x, y)=\begin{cases} x+2x^2y, & 0\leqslant x\leqslant a,\ |y|\leqslant a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求二重积分 $I(a) = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2 \geqslant ax\ (a>0)$.

(17)(本小题满分 10 分)

设 $a_0=1, a_1=-2, a_2=\dfrac{7}{2}, a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n\,(n\geqslant 2)$,求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

(18)(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)(1-\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x$;

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导且满足 $(1-x)f'(x)>2f(x)$ 时，(Ⅰ)中的 ξ 是唯一的.

(19)(本小题满分 10 分)

某厂制造某种电器，固定成本为 400 万元，每生产一件产品成本增加 0.8 万元，总收益 R(单元：万元)是月产量 x(单位：件)的函数

$$R(x)=\begin{cases}30x-\dfrac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 900, & x>60,\end{cases}$$

并且总纳税金 T(单位：万元)是 x 的函数

$$T(x)=\begin{cases}0.2x, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 900\cdot 1\%+\dfrac{1}{20}x, & x>60.\end{cases}$$

求该厂月产量 x 为多大时总利润最大，并求最大总利润．

(20)(本小题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为四维列向量组，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 已知方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ -\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$$

有无穷多解．

(Ⅰ) 求常数 a 的值；

(Ⅱ) 对(Ⅰ)中求得的 a 值，计算方程组的通解．

(21)(本小题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & a & 6\end{pmatrix}$可相似对角化.

(Ⅰ)求常数 a 的值;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中求得的 a 值,求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵),将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

(22)(本小题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $Z=\min\{X, Y\}$,求 Z^2 的数学期望 $E(Z^2)$.

(23)(本小题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 为未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为来自 X 的一个简单随机样本．求

(Ⅰ) θ 的矩估计量；

(Ⅱ) θ 的最大似然估计量．

模拟试题(一)详解

一、选择题

答案								
答案	(1)	(C)	(2)	(C)	(3)	(B)	(4)	(B)
	(5)	(A)	(6)	(B)	(7)	(C)	(8)	(C)

(1) 显然 $x=0$，1 都是方程的实根．记 $f(x)=2^x-x^2-1$，则 $f(x)$ 连续，且 $f(2)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，所以由零点定理(推广形式)知方程 $f(x)=0$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上有实根，记为 x_0.

如果 $f(x)=0$ 还有不同实根 x_1，不妨设 $x_1>x_0$，则由 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(0)=f(1)=f(x_0)=f(x_1)$ 及罗尔定理(高阶导数形式)知，存在 $\xi\in(0,\ x)$，使得

$$f^{(3)}(\xi)=0. \tag{1}$$

另一方面，计算 $f(x)$ 的三阶导数得

$$f^{(3)}(\xi)=2^{\xi}(\ln 2)^3\neq 0, \tag{2}$$

由式(1)与式(2)矛盾知，方程 $f(x)=0$，即 $2^x-x^2-1=0$ 除 0，1，x_0 外，别无其他实根．因此选(C).

附注 (Ⅰ) 零点定理的一种推广形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上连续，且 $f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，则存在 $\xi\in(a,\ +\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

(Ⅱ) 罗尔定理的一种高阶导数形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内三阶可导，且存在 x_1，$x_2\in(a,\ b)$ (其中 $x_1<x_2$)，使得 $f(a)=f(x_1)=f(x_2)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f^{(3)}(\xi)=0$.

(2) 利用对称区间上定积分性质可得

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^2x\mathrm{d}x=0$(由于被积函数是奇函数)，

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x>0$(由于 $\sin^3x$ 是奇函数，$\cos^4x$ 是偶函数，在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上 $\cos^4x\geqslant 0$，且仅在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处取等号)，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^7x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7x\mathrm{d}x<0$(由于 $x^2\sin^3x$ 是奇函数，$\cos^7x$ 是偶函数，在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上 $\cos^7x\geqslant 0$，且仅在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处取等号)，

所以，$P<M<N$. 因此选(C).

附注 应记住对称区间上定积分的性质：设 $f(x)$ 在 $[-a,\ a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x) \text{ 是偶函数}, \\ 0, & f(x) \text{ 是奇函数}. \end{cases}$$

此外,当 $f(x)$ 是非奇非偶函数时,有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x.$$

(3) 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1时,它在点 $x=-1$ 处可能是条件收敛$\left(\text{如} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} x^n\right)$,也可能不是条件收敛$\left(\text{如} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \text{ 或} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} x^n\right)$,但当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛时,它的收敛半径必为 1. 于是收敛半径为 1 是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的必要而非充分条件,因此选(B).

附注　对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,当其收敛半径为 R(正数)时,必在 $(-R,R)$ 内绝对收敛,但在端点 $x=-R,R$ 处可能收敛(条件收敛或绝对收敛),也可能发散,应视 $\{a_n\}$ 而定.

(4) 由于所给的微分方程右端函数

$$2\sin x = \mathrm{e}^{\alpha x}(0 \cdot \cos \beta x + 2 \cdot \sin \beta x)\ (\text{其中 } \alpha=0,\ \beta=1),$$

而 $\alpha+\beta\mathrm{i}=\mathrm{i}$ 是对应的齐次线性微分方程 $y''+y=0$ 的特征方程之根,所以 $y''+y=2\sin x$ 应有的特解形式为 $x(a\cos x + b\sin x)$. 因此选(B).

附注　对于常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy = \mathrm{e}^{\alpha x}[P_l^{(x)} \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

(式中 $P_l(x)$,$Q_m(x)$ 分别是 l 与 m 次多项式)应有如下形式的特解:

$$y^x = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x) \cos \beta x + R_n^{(2)}(x) \sin \beta x]$$

(式中 $R_n^{(1)}(x)$,$R_n^{(2)}(x)$ 都是 n 次多项式,$n=\max\{l,\ m\}$,$k=0$,1,视 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是否为 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根而定).

(5) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,$\lambda \neq 0$,且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 从而 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\alpha$. 因此选(A).

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$($\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵)有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 此外,当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 分别有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 与 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 以及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(6) 由于当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时,(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩;当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩,反之也对. 所以选项(A)、(C)、(D)都正确。因此选(B).

附注　当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时,未必等价. 例如,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 显然 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2)$,但是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示,即 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 不等价.

由本题可知,题中的(Ⅰ)、(Ⅱ)等价与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价是有区别的,应注意这一点.

(7) $F(1,4)=P(X\leqslant 1,Y\leqslant 4)=P(X\leqslant 1,X^2\leqslant 4)=P(-2\leqslant X\leqslant 1)$

$$=\int_{-2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

因此选(C).

附注 顺便计算 X 的分布函数 $G(x)=P(X\leqslant x)$:

当 $x\leqslant -1$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$;

当 $-1<x\leqslant 0$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x+1)$;

当 $0<x\leqslant 2$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x$;

当 $x>2$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

所以,$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & -1<x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x, & 0<x\leqslant 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

(8) 由于 $\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,所以

$$EY=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2,$$

$$DY=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4.$$

因此选(C).

附注 应记住以下结论:

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n).$$

此外,设 $X\sim\chi^2(n)$,则 $EX=n$,$DX=2n$.

二、填空题

(9) 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续知

$$a=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{x}}, \qquad (1)$$

式中，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e^x+\sin x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}=2.$　　(2)

将式(2)代入式(1)得 $a=e^2$.

附注　计算 0^0，1^∞，∞^0 型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 时，应首先将函数指数化，即 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. 于是

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=\begin{cases}e^A, & \lim g(x)\ln f(x)=A,\\ 0, & \lim g(x)\ln f(x)=-\infty,\\ +\infty, & \lim g(x)\ln f(x)=+\infty.\end{cases}$$

(10) $\dfrac{\partial}{\partial x}f\left(e^{xy},\cos\dfrac{1}{x}\right)=f'_u\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}e^{xy}+f'_v\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\cos\dfrac{1}{x}$

$$=ye^{xy}f'_u+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}f'_v.$$

附注　计算多元复合函数的偏导数时，应先画出该函数与自变量之间的复合关系图，例如本题的关系图为

$$z=f\left(e^{xy},\ \cos\frac{1}{x}\right)\begin{cases}u\begin{cases}x\\ y\end{cases}\\ v-x\end{cases}$$

然后按关系图计算有关的偏导数.

(11) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\left(\text{由于}(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}=(-1)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\dfrac{1}{2^n}\right]=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}.$

附注　应记住 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$. 顺便计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(n+1)}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-1$$

$$=2\ln(1+x)\Big|_{x=1}-1$$

$$=2\ln2-1.$$

(12) 由题设知

$$\frac{p}{R}\frac{dR}{dp}=1+p+p\ln p\quad\text{即}\quad\frac{d\ln R}{dp}=\frac{1+p+p\ln p}{p}=\frac{1}{p}+1+\ln p,$$

所以,$\ln R(p)-\ln R(1)=\int_1^p\left(\frac{1}{t}+1+\ln t\right)\mathrm{d}t$

$$=(\ln t+t\ln t)\Big|_1^p=\ln p+p\ln p=\ln p^{1+p}.$$

将 $R(1)=1$ 代入上式得

$$R(p)=p^{1+p}.$$

附注 由于 $R(p)$ 是 p 的单调增加函数，所以 $R(p)$ 的弹性为$\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$.

(13) 由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，其中

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=1\text{，此外，由}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&-1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&-1\\0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&-1\\0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&0&-1&-1&1&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&-1\\0&0&1&0&-1&2&0&0\\0&0&0&1&1&-1&0&0\end{array}\right)$$

得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&2&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$. 从而 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&2&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$.

附注 如果记住以下公式，将快捷地算出 $\boldsymbol{A}^*$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\\|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

(14) 由于 $P(A)=C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$，则 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-3p^2(1-p)^2$	$3p^2(1-p)^2$

所以，$E(X^2)=1^2\cdot 3p^2(1-p)^2=3p^2(1-p)^2$.

附注　服从参数为 λ 的 0－1 分布的随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-\lambda$	λ

$(0<\lambda<1)$

由此可算出 X 的数字特征，例如

$$EX=E(X^2)=\lambda,\ DX=\lambda(1-\lambda).$$

三、解答题

(15) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}de^x$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x-\int e^x\cdot\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x-\left(\int\frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx+\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\cdot e^x dx\right)$$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x-\left(\int\frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx+\int e^x d\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x-\left(\int\frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx+\frac{e^x}{1+\cos x}-\int\frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx\right)$$

$$=\frac{\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x+C.$$

附注　当 $\int f(x)dx$ 不易计算时，有时可采用以下方法计算，即将不定积分 $\int f(x)dx$ 改写成两个不定积分之和：

$$\int f(x)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx,$$

并且对其中一个，例如对 $\int f_1(x)dx$ 施行分部积分消去 $\int f_2(x)dx$. 本题的 $\displaystyle\int e^x\cdot\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$ 就是如此计算的.

(16) 由于 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x)-f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^x,$$

所以，

$$f_n(x)=e^{\int dx}\left(C+\int\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^x\cdot e^{\int -dx}dx\right)$$

$$=e^x\left(C+\frac{1}{n!}x^n\right).$$

将 $f_n(1)=\dfrac{e}{n!}$ 代入上式得 $C=0$，所以 $f_n(x)=\dfrac{1}{n!}x^ne^x(n=1,2,\cdots)$. 从而 $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x(e^x-1)(-\infty<x<+\infty)$.

由于
$$s(x)=e^x(e^x-1)\begin{cases}<0, & x<0,\\ =0, & x=0,\\ >0, & x>0,\end{cases}$$
即函数 $y=s(x)$ 有唯一零点 $x=0$,在$(-\infty,0)$上 $s(x)<0$,在$(0,+\infty)$上 $s(x)>0$;
$$s'(x)=2e^x\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\begin{cases}<0, & x<-\ln 2,\\ =0, & x=-\ln 2,\\ >0, & x>-\ln 2,\end{cases}$$
即函数 $y=s(x)$ 在$(-\infty, -\ln2]$上单调减少，在$[-\ln2, +\infty)$上单调增加，$s(-\ln2)=-\frac{1}{4}$是极小值，无极大值；
$$s''(x)=4e^x\left(e^x-\frac{1}{4}\right)\begin{cases}<0, & x<-2\ln 2,\\ =0, & x=-2\ln 2,\\ >0, & x>-2\ln 2,\end{cases}$$
即曲线 $y=s(x)$ 在$(-\infty, -2\ln2]$上是凸的，在$[-2\ln2, +\infty)$上是凹的，$\left(-2\ln2, -\frac{3}{16}\right)$是拐点；

$\lim\limits_{x\to-\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(e^x-1)=0$，即曲线 $y=s(x)$ 有水平渐近线 $y=0$. 所以 $y=s(x)$ 的图形如图 1-16 所示.

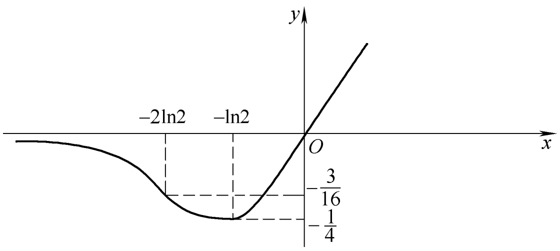

图 1-16

附注 作函数 $y=f(x)$ 的简图时，应确定 $y=f(x)$ 取正值与负值的区间(零点)，单调增加与单调减少区间(极值)，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间(拐点)以及渐近线. 本题一一计算了这些要素后，作出了简图.

(17) 由 $f'_x=4x-4xy^2$，$f'_y=2y-4x^2y$ 知方程组$\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x(1-y^2)=0,\\ 2y(1-2x^2)=0\end{cases}$ 在 D 的内部无解，即 $f(x, y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

D 的边界由 C_1：$x^2+2y^2=1(y\geqslant0)$ 与 C_2：$y=0(-1\leqslant x\leqslant1)$ 组成.

$f(x, y)\Big|_{C_1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+x^4\xlongequal{\text{记}}\varphi(x)(-1\leqslant x\leqslant1)$，且 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值$\frac{1}{2}$，在 $x=-1$ 或 1 处取最大值 2，即 $f(x, y)$ 在 C_1 上的最小值为$\frac{1}{2}$，最大值为 2.

$f(x, y)\Big|_{C_2}=2x^2(-1\leqslant x\leqslant1)$，在点 $x=0$ 处取到最小值 0，在点 $x=-1$，1 处取到最大值 2，即 $f(x, y)$ 在 C_2 上的最小值为 0，最大值为 2.

因此，$f(x, y)$ 在 D 上的最小值为 0，最大值为 2.

附注 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上必有最小值与最大值，它们可按以下步骤计算：

(Ⅰ) 计算$f(x, y)$在 D 的内部的所有可能极值点，记为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n);$$

(Ⅱ) 计算$f(x, y)$在 D 的边界上的最小值和最大值，记为 m_1 与 M_1；

(Ⅲ) 比较$f(x_1, y_1)$，$f(x_2, y_2)$，…，$f(x_n, y_n)$，m_1，M_1，其中最小者(最大者)即为$f(x, y)$在 D 上的最小值(最大值).

(18) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}(1-x-y)\mathrm{d}\sigma$,

式中，$D_1=\left\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \dfrac{1-x}{1+x}\right\}$；$D_2=\left\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, \dfrac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x\right\}$.

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2}(1-x-y)^2\Big|_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(1-x)^2}{1+x}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } t=1+x} \frac{1}{2}\int_1^2\left(-\frac{4}{t}+8-5t+t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{17}{12}-2\ln 2.\end{aligned}$$

附注　计算分块函数的二重积分，必须根据函数的分块将积分区域分成若干小块，并逐一计算各小块上的二重积分后相加即得所求的二重积分.

(19) c 将$[a, b]$分成两个小区间$[a, c]$与$[c, b]$.

由于$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以存在 $x_1\in(a, c)$，使得$f(x_1)>f(a)$. 由于$f'(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$,所以存在$x_2\in(x_1, c)$，使得$f(x_2)>f(c)$. 因此$f(x)$在$[a, c]$上的最大值在$(a, c)$内取到. 于是由费马定理知存在 $\eta_1\in(a, c)$，使得$f'(\eta_1)=0$.

此外，由$f(c)=f(b)$知$f(x)$在$[c, b]$上满足罗尔定理条件，所以存在 $\eta_2\in(c, b)$，使得$f'(\eta_2)=0$.

由题设及以上证明知，$f'(x)$在$[\eta_1, \eta_2]$上满足罗尔定理条件，所以存在$\xi\in(\eta_1, \eta_2)\subset(a, b)$，使得$f''(\xi)=0$.

附注　当函数$f(x)$在$[a, c]$上有连续导数，且$f'_+(a)\cdot f'_-(c)<0$，则容易知道，存在$\xi\in(a, c)$，使得$f'(\xi)=0$. 但是，从本题的证明可知，“当$f(x)$在$[a, c]$上可导(未必有连续导数)，且$f'_+(a)\cdot f'_-(c)<0$，则存在$\xi\in(a, c)$，使得$f'(\xi)=0$,”记住这个结论，有助于快速解题.

(20) 由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

无解，从而

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3 \mid \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) > r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

由于$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3 \mid \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\1&2&4&0&1&3\\1&3&b&a&1&5\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\0&1&1&-1&1&3-b\\0&2&b-3&a-1&1&5-b\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\0&1&1&-1&1&3-b\\0&0&b-5&a+1&-1&b-1\end{array}\right)$$

所以，$b=5$ 时，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3 \mid \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3>2=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，即此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

有解，从而

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$

将 $b=5$ 代入得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&6&1&1&3\\0&1&4&1&2&4\\a&a+1&a+6&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&6&1&1&3\\0&1&4&1&2&4\\0&1&6-5a&1-a&3-a&5-3a\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&6&1&1&3\\0&1&4&1&2&4\\0&0&2-5a&-a&1-a&1-3a\end{array}\right)$$

所以，$a\neq\dfrac{2}{5}$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ $(=3)$，即此时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}),$$

而无解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) > r(\boldsymbol{A}).$$

(Ⅱ) 设有两个 n 维向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，(B)：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，则向量组(A)可由向量组(B)线性表示，且表示式唯一的充分必要条件是矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \tag{1}$$

有唯一解；向量组(A)可由向量组(B)线性表示，但表示式不唯一的充分必要条件是矩阵方程(1)有无穷多解；向量组(A)不可由向量组(B)线性表示的充分必要条件是矩阵方程(1)无解.

(21) 由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，所以，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -1$，且对应 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则由 A 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，即

$$a_1 + a_3 = 0.$$

它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，它们即为 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量. $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

它们是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应特征值 1，1，-1 的特征向量. 由此可知，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\mu_1 = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1} = -1, \mu_2 = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2} = -1, \mu_3 = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3} = 1,$$

它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，记 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

附注 题解中有两点值得注意：

（Ⅰ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使它正交相似对角化，则 $\boldsymbol{Q}$ 也使 $\boldsymbol{A}^*$ 正交相似对角化.

(22)（Ⅰ）关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3)\mathrm{d}y, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

记 Z 的分布函数为 $F(z)$，则 $F(z) = P(Z \leqslant z)$.

当 $z<0$ 时，$P(Z\leqslant z) = P(X^2 \leqslant z) = 0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$P(Z \leqslant z) = P(X^2 \leqslant z) = P(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z})$

$$= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \sqrt{z};$$

当 $z\geqslant 1$ 时，$P(Z \leqslant z) = P(X^2 \leqslant z) = P(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z})$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = 1,$$

所以，$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \sqrt{z}, & 0 \leqslant z < 1, \\ 1, & z \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \sqrt{z}, & 0 < z < 1, \\ 1, & z \geqslant 1, \end{cases}$ 从而

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}}, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（Ⅱ）$E(X-Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY)$，

式中 $E(X^2) = D(X^2) + (EX)^2 = \frac{1}{12}\times 2^2 + 0 = \frac{1}{3}$. 同样可得 $E(Y^2) = \frac{1}{3}$. 此外，

$$E(XY) = \iint\limits_{xOy\text{平面}} xyf(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}} xy\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{4}\left(\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}} xy\mathrm{d}\sigma - 2\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}} x^4y^2\mathrm{d}\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0 - 2\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}\right) = -\frac{2}{15},$$

所以, $E(X-Y)^2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-2\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)=\frac{14}{15}.$

附注　$E(X-Y)^2$ 也可按计算公式直接计算:

$$E(X-Y)^2 = \iint\limits_{xOy\text{平面}}(x-y)^2f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}(x-y)^2\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x-y)^2(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+2x^4y^2+2x^2y^4-2xy-2x^3y^3-x^5y-xy^5)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}(x^2+y^2+2x^4y^2+2x^2y^4)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^4+\frac{7}{5}x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^4+\frac{7}{5}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{14}{15}.$$

(23) 由于 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$, 所以由矩估计法令

$$EX = \bar{x}\left(=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

得　$\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{x}$, 即 $\theta = \frac{\bar{x}^2}{(1-\bar{x})^2}$. 所以 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{x}^2}{(1-\bar{x})^2}$.

似然函数 $L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 的最大值只能当 $0<x_1$, x_2, $\cdots$, $x_n<1$ 时取到, 所以取

$$L(\theta) = \sqrt{\theta}x_1^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\sqrt{\theta}x_2^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\cdots\cdot\sqrt{\theta}x_n^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$= \theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}(0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1),$$

取对数得

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta}-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n).$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\ln(x_1x_2\cdots x_n)$ 知 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 的解为

$$\theta=\frac{n^2}{\ln^2(x_1x_2\cdots x_n)},$$

所以，θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_2=\frac{n^2}{\ln^2(x_1x_2\cdots x_n)}$.

附注 应熟练掌握总体未知参数的两种点估计法：矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(二)详解

一、选择题

答案

(1)	(D)	(2)	(D)	(3)	(C)	(4)	(D)
(5)	(B)	(6)	(C)	(7)	(C)	(8)	(C)

(1) 由于$f(x)=|x|\cdot(x-2)|x-2|$，所以$f(x)$在点$x=0$处不可导，在点$x=2$处可导，因此选(D).

附注 应记住以下结论：

函数$|x-a|$在点$x=a$处不可导，而函数$(x-a)|x-a|$在点$x=a$处可导.

(2) 由于x^2在$[0,1]$上连续，选项(A)，(B)，(C)的右边都是x^2在$[0,1]$的积分和式的极限，它们都等于$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，即选项(A)，(B)，(C)都正确. 因此选(D).

附注 也可通过直接计算，确认选项(D)不正确：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\sum_{i=1}^{n}(9i^2-6i+1)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\left[\frac{9}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{6}{2}n(n+1)+n\right]\\ &= \frac{1}{9}\neq\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3) 由于$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{x^2}}{x}=1$，

同样，$f_y'(0,0)=1$. 因此选(C).

附注 $f(x,y)$在点$(0,0)$连续但不可微，证明如下：

$$\text{由于}\ |f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}|x+y|$$
$$\leqslant 2|x+y|\to0\ ((x,y)\to(0,0)),$$

所以，$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

$$\text{由于}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿}y=x}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿}y=x}}\frac{\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}x}{|x|}\ \text{不存在},$$

所以，$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

(4) 由$\{a_n\}$是单调减少收敛于零的正项数列知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，所以对它两项两项地加括号所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$$

收敛. 因此选(D).

附注 本题获解的关键是，按莱布尼茨定理确定 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 此外应记住以下的收敛级数性质：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，则对它任意加括号所得级数仍收敛. 但反之未必正确，即当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 任意加括号后所得的级数收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 未必收敛.

(5) 由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关知 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\delta}$ 线性相关知 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示. 因此选(B).

附注 关于向量组的线性相关性的以下结论应记住：

(Ⅰ) 设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$.

如果(A)线性无关，则它的任一部分组也线性无关；

如果(A)的任一部分组线性相关，则(A)线性相关.

(Ⅱ) 设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$.

如果(A)线性相关，则至少存在一个向量可由其余向量线性表示；如果(A)线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式是唯一的.

(6) ②④都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件，而①③都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分而非必要条件. 因此选(C).

附注 应记住以下的结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则“$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量”，或“A 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵)都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$”，都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件，而“$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值”，或“$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵”，则是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分而非必要条件.

(7) 对于选项(C)，(X, Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 它关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}y, & -R\leqslant x\leqslant R,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & -R\leqslant x\leqslant R,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & -R\leqslant y\leqslant R,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

显然，$f_X(x)f_Y(y)=f(x, y)$ 不是几乎处处成立的，所以 X 与 Y 不相互独立. 因此选

(C).

附注　应记住选项(A)，(B)，(D)的结论.

(8) 由于随机变量 t 的概率密度曲线关于纵轴对称，所以

由　$\alpha=P(|t|\leqslant b)=1-P(|t|>b)=1-P(t>b)-P(t<-b)=1-2P(t>b)$

得　$P(t>b)=\dfrac{1-\alpha}{2}$. 从而由 $t_\alpha(n)$的定义得 $b=t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$. 因此选(C).

附注　应当记住：

当 $X\sim N(0,1)$时，满足 $P(|X|\leqslant b)=\alpha$ 的 $b=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$(其中 u_α 为满足 $P(X>u_\alpha)=\alpha$ 的实数)；

当 $X\sim t(n)$时，满足 $P(|X|\leqslant b)=\alpha$ 的 $b=t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$(其中 $t_\alpha(n)$为满足 $P(X>t_\alpha(n))=\alpha$ 的实数).

二、填空题

(9) 所给微分方程 $x^2y'+y+x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ 可以改写成

$$y'+\frac{1}{x^2}y=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

它的通解为　$y(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\left(C+\int-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(C-x)$.

将 $y(1)=0$ 代入得 $C=1$. 所以 $y(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-x)$. 从而由

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x}\right)=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-x)+x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=1-1=0$$

得曲线 $y=y(x)$的斜渐近线方程 $y=-x$.

附注　计算曲线 $y=f(x)$的斜渐近线方程时，总是要先计算

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ 和 }b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

如果这两个极限中至少有一个不存在，则计算

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ 和 }b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x];$$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ 和 }b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x].$$

(10)由于在$[0,+\infty)$上

$$0<\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}<\frac{1}{1+x^2},$$

且 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 是收敛的反常积分，从而有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }x=\frac{1}{t}}\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{(1+t^a)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^a)(1+x^2)}dx$$

即 $$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^a)(1+x^2)}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

所以，$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{4}$.

附注 对收敛的反常积分，可以与定积分那样施行变量代换法与分部积分法.

(11) 由于 $$\lim_{t\to 0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{f(2t,0)-f(0,0)}{2t} + \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right] - 2\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}, \tag{1}$$

其中，$\lim_{t\to 0}\frac{f(2t,0)-f(0,0)}{2t} = f_x'(0,0) = 1$,

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right] = f_y'(0,0)\cdot 1 = -1,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f_x'(0,0)t+f_y'(0,0)t+o(|t|)}{t}$$

$$= f_x'(0,0)+f_y'(0,0) = 0.$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t} = 2\times 1+(-1)-2\times 0 = 1.$$

附注 由于$f(x,y)$仅在点$(0,0)$处可微，所以需用偏导数与全微分的定义计算本题的极限.

由于$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，所以有

$$f(x,y)-f(0,0) = f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

特别当$x=y=t$时，上式成为

$$f(t,t)-f(0,0) = [f_x'(0,0)+f_y'(0,0)]t+o(|t|).$$

计算$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}$时就利用了上式.

(12) 由于$f'(x) = e^{x+1}(x+1)\begin{cases} <0, & x<-1, \\ =0, & x=-1, \\ >0, & x>-1, \end{cases}$所以$f(x)$有最小值$f(-1) = -\frac{1}{2}$,

此外，$\lim_{x\to -\infty}f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(xe^{x+1}+\frac{1}{2}\right) = e\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}}+\frac{1}{2} = e\times 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{x+1}+\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

所以，由零点定理(推广形式)及$f(x)$的单调性(即$f(x)$在$(-\infty, -1)$上单调减少，在$(-1, +\infty)$上单调增加)知，$f(x)$在$(-\infty, -1)$与$(-1, +\infty)$上各仅有一个零点，故$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上的零点个数为2.

附注　当函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$时，$f(x)$在$[a, b]$上有零点；当函数$f(x)$在$[a, b]$上连续、单调，且$f(a)\cdot f(b)<0$时，$f(x)$在$[a, b]$上有且仅有一个零点.

上述的区间换为无穷区间，结论仍成立.

(13) 显然$|\boldsymbol{A}|=2$，此外，记三阶单位矩阵为$\boldsymbol{E}$，则

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*=2(\boldsymbol{A}^{-1})^2-3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2\cdot 2(\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}),$$

所以，$\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right| = |\boldsymbol{A}^{-1}|^2\cdot 8|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 8\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ -3 & -3 & -5\end{vmatrix}=-58.$$

附注　计算矩阵的行列式时，以下结论是常用的：

设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是n阶矩阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,\quad |k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|(k\text{ 是常数}),$$
$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n>1).$$

当$\boldsymbol{A}$可逆时，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

(14) 由于$a=P(X=1)=F(1)-F(1^-)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，所以

$$P(Y\geqslant a)=P\left(Y\geqslant\frac{1}{4}\right)=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=e^{-\frac{1}{4}}.$$

附注　由于$F(x)$有间断点$x=0, 1, 2$，所以X的概率分布为

X	0	1	2
P	$F(0)-F(0^-)$	$F(1)-F(1^-)$	$F(2)-F(2^-)$

即

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

三、解答题

(15) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(e^x+\sin x)}{\ln(1+x^2)}}$, (1)

其中，$x\to 0$时

$$\sin x\ln(e^x+\sin x)=\sin x\ln\sim[1+(e^x-1+\sin x)]$$

$$\sim x(e^x-1+\sin x),$$

$$\ln(1+x^2)\sim x^2.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(e^x+\sin x)}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1+\sin x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=2.$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}=e^2.$$

附注 本题题解中有两点值得注意:

(Ⅰ)计算 0^0,1^∞,∞^0 型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 时,应先指数化,即 $\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$.

(Ⅱ)计算 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时,应先进行化简,其中 $f(x)$,$g(x)$ 分别用它们的等价无穷小代替是化简的重要手段之一.

(16)D 如图 2-16 的阴影部分所示,所以

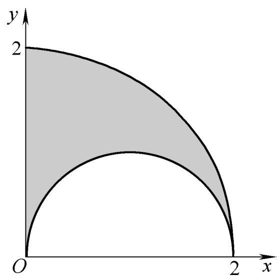

图 2-16

$$V_x=\pi\int_0^2[(\sqrt{4-x^2})^2-(\sqrt{2x-x^2})^2]dx$$

$$=\pi\int_0^2(4-2x)dx=4\pi.$$

$$V_y=2\pi\int_0^2 x(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2x-x^2})dx$$

$$=2\pi\left(\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx-\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx\right),$$

其中 $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$,

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

$$\xlongequal{t=x-1}\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

所以,$V_y=2\pi\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{16}{3}\pi+\pi^2$.

附注 应记住以下公式:

设 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 都是连续函数,且 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$,设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$,则

D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_x=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx,$$

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_y=2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

(17)记$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,

$$D_2 = \left\{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \arccos \frac{1}{r}\right\}$$

$$= \left\{(r, \theta) \mid \frac{1}{\cos \theta} \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\},$$

则 D_1 与 D_2 如图 2-17 所示，于是由

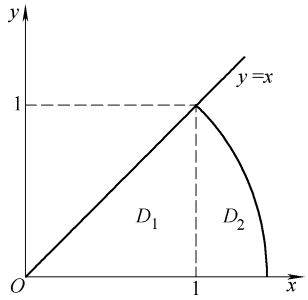

图　2-17

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \iint_{D_1} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \sin x \mathrm{d}x = 1 - \cos 1,$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \iint_{D_2} \sin^2\theta \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}} r\sin^2\theta \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\tan^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\tan \theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}$$

得到

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= (1 - \cos 1) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} - \cos 1 + \frac{\pi}{4}.$$

附注　对$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$,只有改变积分次序才能算出其值，但是，对于$\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta \mathrm{d}\theta$，不改变积分次序，同样可以算出其值. 具体如下：

$$\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} r(\theta - \sin\theta\cos\theta)\Bigg|_0^{\theta = \arccos\frac{1}{r}} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} r\left(\arccos\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\right)\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{r} = \cos t} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t(t - \cos t\sin t)\sec t\tan t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan t\mathrm{d}\tan t - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}t\mathrm{d}\tan^2 t - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\tan^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{3}{4}(\tan t - t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}.$$

显然，现在的计算比题解中的计算复杂得多.

(18) 所给微分方程可以改写成

$$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x. \tag{1}$$

式(1)的齐次线性微分方程

$$y'' + 2y' + y = 0 \tag{2}$$

的特征方程之根为二重根 -1，所以式(2)的通解为

$$Y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}.$$

此外，式(1)有特解

$$y^* = Ax^2\mathrm{e}^{-x} + (A_1\cos x + B_1\sin x) + (A_2\cos 3x + B_2\sin 3x). \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)得

$$A = \frac{1}{2},\ A_1 = -\frac{1}{4},\ B_1 = 0,\ A_2 = -\frac{3}{100},\ B_2 = -\frac{1}{25},$$

从而有
$$y^* = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{100}\cos 3x - \frac{1}{25}\sin 3x.$$

因此，所给方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= Y + y^* \\ &= (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{100}\cos 3x - \frac{1}{25}\sin 3x. \end{aligned}$$

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 由于式(2)的特征方程的根为 $r = -1$(二重)，所以它的通解为$(C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}$.

(Ⅱ) 由于式(1)的右边有 $\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{-x}$的项，这里的 $\lambda = -1$ 是式(2)的特征方程之二重根，所以式(1)的特解中有 $Ax^2\mathrm{e}^{-x}$的项.

(19) 记 $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}{\dfrac{x^{2n}}{n(2n-1)}} = x^2.$$

所以，所给幂级数的收敛区间为$\{x \mid x^2 < 1\} = (-1, 1)$. 当 $x = -1$，1 时，幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)},$$

它是收敛的，所以所给幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

对 $x\in[-1,1]$得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n-1}$$
$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n(2n-1)}t^{2n-1}\right]'\mathrm{d}t=x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}t^{2n-2}\mathrm{d}t$$
$$=x\int_0^x\frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(t^2)^n\mathrm{d}t=x\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$=-x\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}\frac{1}{t}=-x\left[\frac{\ln(1+t^2)}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\ln(1+x^2)+2x\arctan x.$$

所以所给幂级数的和函数

$$s(x)=-\ln(1+x^2)+2x\arctan x\,(x\in[-1,1]).$$

附注　题解中以下两点值得注意：

(Ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(t^2)^n=\ln(1+t^2)(-1\leqslant t\leqslant 1)$是按公式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n(-1<x\leqslant 1)$$

得到的.

(Ⅱ) 由于 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}=1$, 所以 $\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ 是定积分而不是反常积分.

(20) 由题设知$(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}-(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}=(0,4,-2,1)^{\mathrm{T}}$是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以有

$$4\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0},\ 即\ \boldsymbol{\alpha}_4=-4\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

由题设$(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}$是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,$$

于是方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

成为

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.\tag{1}$$

由 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的秩为 3 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，由此得到式(1)的系数矩阵的秩为 3，于是对应的齐次方程组的解$(2,2,1,-1)^{\mathrm{T}}$即为这个齐次方程组的基础解系，此外式(1)有特解$(-2,0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 所以，式(1)，即方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{y}=C(2,2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(-2,0,0,1)^{\mathrm{T}}(C\ 为任意常数).$$

附注　要记住：齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知列向量)的基础解系中所包含的线性无关的解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$.

(21) 由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=x_1^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+x_3^2$$

$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

由题设知

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}-1 & -b & -1\\ -b & -a & -1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0(\text{因为 }\boldsymbol{B}\text{ 有特征值 }\lambda=0),\\ \begin{vmatrix}0 & -b & -1\\ -b & 1-a & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0(\text{因为 }\boldsymbol{B}\text{ 有特征值 }\lambda=1),\end{cases}$$

即 $\begin{cases}-2b+1+b^2=0,\\ -2b-(1-a)=0.\end{cases}$ 解此方程组得 $a=3$，$b=1$.

于是，$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2.$$

记 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\ y_2=\sqrt{2}x_2,\\ y_3=x_3,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}y$，则

$$f(x_1, x_2, x_3)=y_1^2+y_2^2(\text{规范形}).$$

附注 题解中的以下两点值得注意：

(Ⅰ) $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵，所以它不是二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵，只有写成 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵)时，$\boldsymbol{B}$ 才是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵.

(Ⅱ) 计算 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$)下的规范形，总是对 $f(x_1, x_2, x_3)$ 施行配平方方法.

(22)(Ⅰ)关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) 由于 $EX=1$，所以

$$P(Y\geqslant EX)=P(Y\geqslant 1)=\int_1^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=-\int_1^{+\infty}y\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}$$

$$= -ye^{-y}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-y}dy = \frac{2}{e}.$$

由于

$$P(X>2 \mid Y<4) = \frac{P(X>2,Y<4)}{P(Y<4)},$$

其中，$P(X>2,Y<4) = \iint\limits_{\substack{x>2\\ y<4}} f(x,y)d\sigma$

$= \iint\limits_{\triangle} e^{-y}d\sigma$（其中 $\triangle$ 是如图 2-22 阴影部分所示的三角形）

$= \int_2^4 dx\int_x^4 e^{-y}dy = \frac{1}{e^2} - \frac{3}{e^4}.$

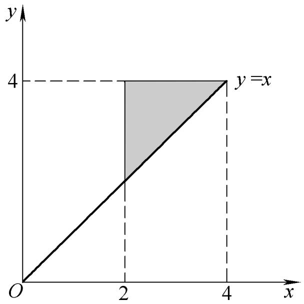

图　2-22

附注　关于 $f_X(x)$ 的以下计算是错误的：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}(x>0).$$

这一点应注意，关于 $f_Y(y)$ 的计算也有同样说法.

(23)（Ⅰ）由于 $EX = 0\cdot\theta^2 + 1\cdot 2\theta(1-\theta) + 2\cdot\theta^2 + 3\cdot(1-2\theta) = 3-4\theta$，

并且，样本值的平均值 $\bar{x} = \frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$，

所以，由矩估计法，令 $EX = \bar{x}$，即 $3-4\theta = 2$ 得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$.

（Ⅱ）由题设知 $Y \sim B(n, \hat{\theta}^2) = B\left(n, \frac{1}{16}\right)$. 当 n 充分大时，由中心极限定理（具体是棣莫弗-拉普拉斯定理）得

$$P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{Y - \frac{n}{16}}{\sqrt{n\times\frac{1}{16}\times\frac{15}{16}}} \leqslant \frac{y-\frac{n}{16}}{\frac{\sqrt{15n}}{16}}\right)$$

$$\overset{\text{近似}}{\sim} \int_{-\infty}^{\frac{y-\frac{n}{16}}{\sqrt{15n}/16}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

因此，所求的参数为 $\mu = \frac{n}{16}$，$\sigma^2 = \frac{15n}{16^2}$.

附注　计算关于随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的概率问题时，总是引入标准化随机变量 $X^\circ = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $X^\circ \sim N(0, 1)$（标准正态分布）. 于是 X 的分布函数

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\text{（其中 }\Phi(u)\text{ 是标准正态分布函数）},$$

即

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

由此可知，当 $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 时，$X \sim N(a, b^2)$. 本题中的参数就是如此得到的.

模拟试题(三)详解

一、选择题

答案

(1)	(B)	(2)	(A)	(3)	(B)	(4)	(A)
(5)	(B)	(6)	(B)	(7)	(B)	(8)	(B)

(1) $f(x)=x|e^x-1|\cdot|x-1|$ 的可能不可导点为 $x=0$，1.

由于在点 $x=0$ 的某个去心邻域内，$f(x)=-x|x|\cdot\left|\dfrac{e^x-1}{x}\right|(x-1)=-x|x|\cdot\dfrac{e^x-1}{x}(x-1)$，而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[-|x|\cdot\dfrac{e^x-1}{x}(x-1)\right]=0$，所以$f(x)$在点 $x=0$ 处可导.

由于在点 $x=1$ 的某个邻域内，$f(x)=x(e^x-1)|x-1|$，

而$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[x(e^x-1)\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}\right]$不存在，所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不可导.因此本题选(B).

附注 应记住函数$|x-x_0|$在点 x_0 处不可导，但函数$(x-x_0)|x-x_0|$在点 x_0 处可导.

(2) 由于 $\max\{e^{-t},e^t\}=\begin{cases}e^{-t}, & t<0,\\ e^t, & t\geqslant0.\end{cases}$所以

$$F(x)=\int_0^x\max\{e^{-t},e^t\}\,dt=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt, & x<0,\\ \displaystyle\int_0^x e^t dt, & x\geqslant0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant0.\end{cases}\quad \text{因此选(A).}$$

附注 同样可以计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}\,dt$，具体如下：

由于 $\min\{e^{-t},e^t\}=\begin{cases}e^t, & t\leqslant0,\\ e^{-t}, & t>0,\end{cases}$所以

$$\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}\,dt=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^t dt, & x\leqslant0,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt, & x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0,\\ 2-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

(3) 由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n(-1<x\leqslant1)$ 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(x-a)^n$ 的收敛域为 $a-1<x\leqslant a+1$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(x-a)^n$ 在点 $x=a+1$ 处收敛，而 $x>a+1$ 发散.

所以由题设得 $a+1=0$，即 $a=-1$. 因此选(B).

附注　记住 $\ln(1+x)$，$\ln(1-x)$的麦克劳林展开式，即

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n(-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n(-1\leqslant x<1),$$

对计算幂级数的收敛域与和函数等是十分有用的.

(4) 容易看到 $y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$是 $y''+py'+qy=0$ 的特解，从而，$\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$($C_1$，$C_2$ 是任意常数)是该微分方程的通解，所以

$$p=-[(-1+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})]=2,\ q=(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})=2.$$

此外，由题设知 e^x 是 $y''+py'+qy=f(x)$，即 $y''+2y'+2y=f(x)$的特解，所以

$$f(x)=(\mathrm{e}^x)''+2(\mathrm{e}^x)'+2\mathrm{e}^x=5\mathrm{e}^x.$$

因此选(A).

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 由 $\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$是 $y''+py'+qy=0$ 的特解知，$\mathrm{e}^{-x}\cos x$，$\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 都是该微分方程的特解且它们线性无关，所以通解为 $\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$($C_1$，$C_2$ 是任意常数).

(Ⅱ) 由于微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$有解 $y_2=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\cos x$，其中，$\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的特解，所以由线性微分方程解的构造知，e^x 是 $y''+py'+qy=f(x)$的解.

如果能够一下子看出以上两点，本题必能快速获解.

(5) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，所以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即②正确.

由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 都有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，所以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 也是$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即④正确. 因此选(B).

附注　$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 未必是$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，例如$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系$(0,1)^{\mathrm{T}}$，但它不是$\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以(A)与(D)都不能选.

$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 也未必是 $\boldsymbol{B}^*$ 的基础解系，例如$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，但它不是$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 这是因为$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$的秩 $1<3-1$，所以$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*$的秩为 0. 从而$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 无基础解系. 因此(C)不能选.

(6) 由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4$

$$=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

所以，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-4&0\\-1&\lambda&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0$($\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵)有解 $\lambda=-2，2，3$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值为 -2，因此选(B).

附注 题解中，由于注意到 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，它们的三次方与四次方分别左乘、右乘于 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 表明，对 $\boldsymbol{B}$ 施行三次“交换第一、二行”的初等变换后，再施行四次“交换第二、三列”的初等变换，所以很快获解.

(7) 记 $C_i=\{$第 i 次取球取到的是白球$\}(i=1，2)$，则

$$A=\overline{C}_1C_2，B=\overline{C}_1C_2\cup C_1C_2，$$

所以，$P(A)=P(\overline{C}_1C_2)=P(\overline{C}_1)P(C_2\mid\overline{C}_1)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$，

$$P(B)=P(\overline{C}_1C_2)+P(C_1C_2)=P(\overline{C}_1C_2)+P(C_1)P(C_2\mid C_1)=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{7}.$$

因此选(B).

附注 本题有两点值得注意：

(Ⅰ) A 与 B 这两个随机事件是有区别的.

(Ⅱ) 随机事件$\{$第 i 次取球取到的是白球$\}(i=1，2，3)$的概率是相等的，都为$\frac{3}{7}$.

(8) $E(\overline{X}+S^2)=E(\overline{X})+E(S^2)=EX+DX,$ (1)

其中 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$(由于 $xf(x)$ 是奇函数)，

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$=E(T^2)$(其中 T 是服从参数为 1 的指数分布,即它的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\0, & t\leqslant 0\end{cases})$$

$$=D(T)+(ET)^2=1+1=2.$$

将它们代入式(1) 得 $E(\overline{X}+S^2)=0+2=2$. 因此选(B).

附注　应记住以下结论：

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，其平均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则

$$E(\overline{X})=EX,E(S^2)=DX.$$

二、填空题

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}-\dfrac{1}{3}$

$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2(1+x)}-\dfrac{1}{3}=0.$

由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to0}\left[e^{\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}}-2\right]\\&=\lim_{x\to0}\left[e^{\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}}-1\right]-1\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}-1=0-1=-1.\end{aligned}$$

附注　题解中先计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}$，这是为了确定 $\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}$ 在 $x\to0$ 时是无穷小的，从而可以利用 $e^u-1\sim u(u\to0)$ 化简 a 的计算.

(10) 由于 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$，所以

$$f^{(5)}(x)=\frac{1}{3}\left[(-1)^5\frac{5!}{(x-1)^6}-(-1)^5\frac{5!}{(x+2)^6}\right]=\frac{5!}{3}\left[\frac{1}{(x+2)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right].$$

从而 $f^{(5)}(0)=\dfrac{5!}{3}\left(\dfrac{1}{2^6}-1\right)=-\dfrac{315}{8}.$

附注　$f^{(5)}(0)$ 也可以利用麦克劳林公式计算：

由于 $f(x)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}\right)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{1-x}\right)$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\cdots-\left(\frac{x}{2}\right)^5+o(x^5)\right]+[1+x+\cdots+x^5+o(x^5)]\right\}\\&=-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}-1\right)x^5+o(x^5),\end{aligned}$$

所以，$f^{(5)}(0)=5!\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^6}-1\right)=-\dfrac{315}{8}.$

(11) 方程两边对 x 求偏导数得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(xy)\cdot y+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

所以，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\cos(xy)+z^2}{1+xz}$.

附注 如果要同时计算 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，则从对方程两边求全微分入手，具体如下：

$$\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\cos(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\mathrm{d}z=-\frac{yz\cos(xy)+z^2}{1+xz}\mathrm{d}x-\frac{xz\cos(xy)}{1+xz}\mathrm{d}y,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\cos(xy)+z^2}{1+xz},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz\cos(xy)}{1+xz}$.

(12) 由于 $\frac{P}{Q(P)}\frac{\mathrm{d}Q(P)}{\mathrm{d}P}=\varepsilon_p=0.2$，所以由增益函数 $R(P)=PQ(P)$ 得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}R(P)}{\mathrm{d}P}\right|_{Q=100\,000}&=\left[Q(P)+P\frac{\mathrm{d}Q(P)}{\mathrm{d}P}\right]_{Q=100\,000}\\&=\left\{Q(P)+Q(P)\left[\frac{P}{Q(P)}\frac{\mathrm{d}Q(P)}{\mathrm{d}P}\right]\right\}_{Q=100\,000}\\&=100\,000+100\,000\times0.2=120\,000,\end{aligned}$$

即当需求量为 100 000 件时，价格每增加 1 元会使产品收益增加 120 000 元.

附注 要记住函数弹性的定义，并理解它在经济学上的意义.

(13) 由于 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{B}^*)$, (1)

其中，由 $r(\boldsymbol{A})=1$，即 $r(\boldsymbol{A})$等于 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 -1 知 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$；由 $r(\boldsymbol{B})=2$，即 $r(\boldsymbol{B})$小于 $\boldsymbol{B}$ 的阶数 -1 知 $r(\boldsymbol{B}^*)=0$. 将它们代入式(1)得

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=1+0=1.$$

附注 应记住以下公式：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是它的伴随矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(14) $P(\max\{X,Y\}\leqslant1)=P(X\leqslant1,Y\leqslant1)$

$$=P(X\leqslant1)P(Y\leqslant1)=\left(\int_{-\infty}^{1}f(t)\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2=(1-\mathrm{e}^{-1})^2.$$

附注 应记住以下公式：

设随机变量 X、Y 相互独立，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$与 $F_Y(y)$，则

$Z_1=\max\{X,\ Y\}$的分布函数 $F_{Z_1}(z)=F_X(z)F_Y(z)$；

$Z_2=\min\{X,\ Y\}$的分布函数 $F_{Z_2}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$.

三、解答题

(15) $\int \frac{1}{\sin x\cos x\ \sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{\csc^2 2x-\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}2x}{\sin^2 2x}=-\int \frac{1}{\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\cot 2x$$

$$=-\ln\left(\cot 2x+\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}\right)+C.$$

附注　可考虑类似的不定积分$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$，解答如下：

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)-$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

(16) 由于$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2}{x^2}(1-\cos x)=1$，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0^+}\cos x^2=1,$$

即　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，所以$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$内连续.

由于$-\frac{\pi}{2}<x<0$时，

$$f'(x)=2\cdot\frac{x\sin x-2(1-\cos x)}{x^3}=2\sin x\cdot\frac{x-2\tan\frac{x}{2}}{x^3}>0,$$

$0<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$时，

$$f'(x)=\frac{x\cos x^2-\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{\int_0^x(\cos t^2-2t^2\sin t^2-\cos t^2)\mathrm{d}t}{x^2}<0,$$

此外，由$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{2x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=0$$

知$f'(0)=0$，因此$f(x)\left(-\frac{\pi}{2}<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$仅有极大值$f(0)=1$，无极小值，

(17) 由$f'_x=2x$，$f'_y=2y$知方程组$\begin{cases}f'_x=0,\\f'_y=0\end{cases}$在$D$的内部无解，即$f(x,y)$在$D$的内部无可能极值点. 下面计算$f(x,y)$在$D$的边界$C$：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$上的最值.

记$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda[(x-1)^2+(y-1)^2-2]$，则

$$F'_x=2x+2\lambda(x-1),\quad F'_y=2y+2\lambda(y-1).$$

于是，由拉格朗日乘数法令

$$\begin{cases}F'_x=0,\\F'_y=0,\\(x-1)^2+(y-1)^2=2,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}(1+\lambda)x-\lambda=0,\\(1+\lambda)y-\lambda=0,\\(x-1)^2+(y-1)^2=2,\end{cases}$$

解此方程组得$x=y=0$，$x=y=2$. 由于

$$f(0,0)=0,\ f(2,2)=8,$$

所以，$f(x,y)$在C上的最小值，即在D上的最小值为$f(0,0)=0$，在C上的最大值，即在D上的最大值为$f(2,2)=8$.

附注 二元连续函数在闭区域上的最值计算方法见模拟试题(一)的(17)小题详解中的附注.

(18) 由于$x\to0$时

$$x^2\tan^2\frac{x}{2}\sim\frac{1}{4}x^4,$$

$$1-(1+x)^{\sin^3x}=-[\mathrm{e}^{\sin^3x\ln(1+x)}-1]\sim-\sin^3x\ln(1+x)\sim-x^4,$$

所以，$\alpha=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\tan^2\frac{x}{2}}{1-(1+x)^{\sin^3x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{-x^4}=-\dfrac{1}{4}.$

考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$. 由于

$$\lim_{n\to0}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1,$$

所以上述幂级数的收敛半径为1，从而收敛区间为$(-1,1)$，记其和函数为$S(x)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)(-1<x<1),$$

所以，$$S(x)=S(0)-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t=-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t$$

$$= -\left[t\ln(1-t)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{-t}{1-t}\mathrm{d}t\right]$$

$$= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)(-1<x<1),$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} = -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)(-1<x<1).$$

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sin^{n+1}\alpha = [-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)]\Big|_{x=\sin\alpha=-\sin\frac{1}{4}}$$

$$= \sin\frac{1}{4}\ln\left(1+\sin\frac{1}{4}\right) - \sin\frac{1}{4} + \ln\left(1+\sin\frac{1}{4}\right).$$

附注　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的和函数 $S(x)$ 也可以用以下方法计算：在$(-1,1)$内有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n} - \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}x^{m}$$

$$= -x\ln(1-x) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}x^{m} + x$$

$$= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.$$

(19)
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}\frac{2y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\sigma, \tag{1}$$

其中，
$$\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}\sigma = \int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (2x-x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}, \tag{2}$$

$$\iint\limits_{D_2}\frac{2y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{2r\sin\theta}{r^2+1}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r-\arctan r)\Big|_0^{2\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\arctan(2\cos\theta)\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(2\cos\theta)\cdot\mathrm{d}2\cos\theta$$

$$= 2 + [\arctan(2\cos\theta)\cdot 2\cos\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{1+4\cos^2\theta}\mathrm{d}2\cos\theta$$

$$= 2 - 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln(1+4\cos^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5. \tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3}+2-2\arctan 2+\frac{1}{2}\ln 5 = \frac{10}{3}-2\arctan 2+\frac{1}{2}\ln 5.$$

附注 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 也可计算如下：

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}\frac{2y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\sigma,\\ &= \iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}-xy\right)\mathrm{d}\sigma, \end{aligned}\tag{4}$$

其中，$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2,\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D_2}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}-xy\right)\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\left(\frac{2r\sin\theta}{r^2+1}-r^2\sin\theta\cos\theta\right)r\mathrm{d}r\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r-\arctan r)\Big|_0^{2\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\arctan(2\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{2}{3}\\
&= 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(2\cos\theta)\,\mathrm{d}2\cos\theta-\frac{2}{3}\\
&= \frac{4}{3}+\arctan(2\cos\theta)2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{1+4\cos^2\theta}\mathrm{d}2\cos\theta\\
&= \frac{4}{3}-2\arctan 2-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+4\cos^2\theta}\mathrm{d}(1+4\cos^2\theta)\\
&= \frac{4}{3}-2\arctan 2-\frac{1}{2}\ln(1+4\cos^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{4}{3}-2\arctan 2+\frac{1}{2}\ln 5.\end{aligned}\tag{6}$$

将式(5)、式(6)代入式(4)得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{10}{3}-2\arctan 2+\frac{1}{2}\ln 5.$$

(20)(Ⅰ)方程组(A)的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & a+4 & -5 & 6\\ -1 & -2 & a & -3\end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & a & -7 & 0\\ 0 & 0 & a+1 & 0\end{array}\right).$$

由于方程组(A)有无穷多解，所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) < 3$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是方程组(A)的系数矩阵)，从而有 $a+1=0$，即 $a=-1$.

(Ⅱ)当 $a=-1$ 时，方程组(A)与(B)组成的方程组化简后为

$$(\mathrm{C})\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=6, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+\lambda x_2=1. \end{cases}$$

对方程组(C)的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}$ 施行初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7-3\lambda \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{7}-3\lambda \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{21}-\lambda \end{array}\right).$$

由此可知，方程(A)与(B)有公共解，即方程组(C)有解时，$r(\boldsymbol{C})=r(\overline{\boldsymbol{C}})$(其中 $\boldsymbol{C}$ 是方程组(C)的系数矩阵)，因此所求的 $\lambda=\frac{43}{21}$，并且此时的公共解 $x_1=-\frac{18}{7}$，$x_2=3$，$x_3=-\frac{3}{7}$.

附注　设方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$，(其中 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 分别是 $m_1\times n$ 与 $m_2\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，分别是 m_1 维与 m_2 维列向量)，则这两个方程组有公共解的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2 \end{cases}$$

有解.

(21) 由 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵知，$\boldsymbol{A}^*$ 也是三阶实对称矩阵. 由题设知 $\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\mu_1=-1$，$\mu_3=1$，且它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-1$，因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值除 $\mu_1=\frac{|A|}{\lambda_1}=-1$，$\mu_3=\frac{|A|}{\lambda_3}=1$ 外，还有 $\mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1$，记它对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，

则它分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，于是有

$$\begin{cases} a_1 \quad -a_3=0, \\ a_1 \quad +a_3=0, \end{cases}$$

其基础解系为$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，故可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的对应 λ_i 的特征向量即为 $\boldsymbol{A}^*$ 的对应μ_i 的特征向量$(i=1,2,3)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 对应 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$.

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$(正交矩阵)，则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2,$$

且
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$ 所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^* &= \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

附注　题解中有以下三点值得注意：

(Ⅰ) 当用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)将二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵)化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

时，λ_1，λ_2，…，λ_n 必都为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，从而

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}\boldsymbol{A},\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|.$$

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\mu = \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的对应 μ 的特征向量.

（Ⅲ）$\boldsymbol{A}^*$ 也可计算如下：

由于 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

因此，由 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可得 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（22）（Ⅰ）由于(U, V)关于 U 的边缘概率密度为

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v = \begin{cases} \int_0^{2u}\mathrm{d}v, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2u, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

所以，
$$P\left(V \leqslant \frac{1}{2} \,\middle|\, U \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(U \leqslant \frac{1}{2},\ V \leqslant \frac{1}{2}\right)}{P\left(U \leqslant \frac{1}{2}\right)}, \tag{1}$$

其中，
$$\begin{aligned}
P\left(U \leqslant \frac{1}{2}, V \leqslant \frac{1}{2}\right) &= \iint\limits_{\substack{u \leqslant \frac{1}{2} \\ v \leqslant \frac{1}{2}}} f(u,v)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}\sigma\text{（其中 }\Delta\text{ 如图 3-22 的带阴影梯形所示）}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16},$$

$$P\left(U \leqslant \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_U(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}} 2u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}.$$

将它们代入式(1)得

$$\frac{1}{3}P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=0.25.$$

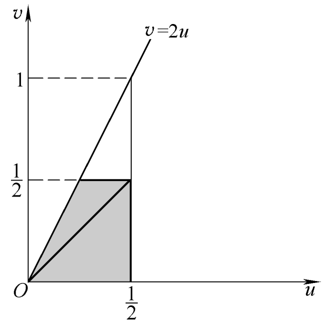

图 3-22

于是，$P(X=-1,\ Y=1)=P(X=1,\ Y=-1)=P(X=0,\ Y=1)=0.25$.

记$(X,\ Y)$的概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	p_1	0.25
0	p_2	0.25
1	0.25	p_3

则$\begin{cases} p_1+p_2+p_3+0.75=1, \\ (-1)\cdot(p_1+0.25)+0\cdot(p_2+0.25)+1\cdot(0.25+p_3)=0.2, \\ (-1)\cdot(p_1+p_2+0.25)+1\cdot(0.25+0.25+p_3)=0.4, \end{cases}$

即$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=0.25, \\ -p_1+p_3=0.2, \\ -p_1-p_2+p_3=0.15. \end{cases}$ 解此方程组得 $p_1=0$，$p_2=0.05$，$p_3=0.2$.

因此，$(X,\ Y)$的概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	0	0.25
0	0.05	0.25
1	0.25	0.2

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,\ Y)=E(XY)-EX\cdot EY$,

其中，
$$\begin{aligned} E(XY) &= (-1)\times(-1)\times 0+(-1)\times 1\times 0.25+ \\ &\quad 0\times(-1)\times 0.05+0\times 1\times 0.25+ \\ &\quad 1\times(-1)\times 0.25+1\times 1\times 0.2 \\ &= -0.3, \end{aligned}$$

所以，$\mathrm{Cov}(X,\ Y) = -0.3-0.2\times 0.4 = -0.38$.

附注　本题是连续型随机变量与离散型随机变量结合的综合题，需计算许多量值，因此对题目审视后应确定计算各个量值的先后顺序：

先计算 $P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)$，为此需先算出关于 U 的边缘概率密度 $f_U(u)$；然后确定 (X,Y) 的概率分布表，将已知的概率填入，对未知的概率用 p_1，p_2，p_3 等表示，并利用已知条件逐一确定这些未知概率；最后根据 (X,Y) 的概率分布算出 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(23) 由于关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_\theta^{+\infty}\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\,\mathrm{d}y, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，$\int_\theta^{+\infty}\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\,\mathrm{d}y=-\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\Big|_{y=\theta}^{y=+\infty}=\frac{3}{\theta^3}x^2$，

所以，$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{\theta^3}x^2, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{3}{\theta^3}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\theta$，所以由矩估计法，令 $EX=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，即 $\frac{3}{4}\theta=\overline{X}$. 由此得到 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{4}{3}\overline{X}$.

于是，
$$\begin{aligned}D(\hat{\theta})&=D\left(\frac{4}{3}\overline{X}\right)=\frac{16}{9}D\overline{X}=\frac{16}{9n}DX\\&=\frac{16}{9n}[E(X^2)-(EX)^2]=\frac{16}{9n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\,\mathrm{d}x-\frac{9}{16}\theta^2\right]\\&=\frac{16}{9n}\int_0^\theta\frac{3}{\theta^3}x^4\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\theta^2=\frac{16}{15n}\theta^2-\frac{1}{n}\theta^2=\frac{1}{15n}\theta^2.\end{aligned}$$

附注 要记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X(具有数学期望与方差)的简单随机样本，则它的均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 与方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$ 满足 $E(\overline{X})=EX$，$D(\overline{X})=\frac{1}{n}DX$，$E(S^2)=D(X)$.

模拟试题(四)详解

一、选择题

答案

(1)	(D)	(2)	(D)	(3)	(B)	(4)	(A)
(5)	(B)	(6)	(D)	(7)	(B)	(8)	(C)

(1)
$$y^{(n)}=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]^{(n)}=-\left[\left(\frac{1}{x+1}\right)'\right]^{(n)}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{n+1}$$
$$=-(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}=(-1)^n\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.$$

所以选(D).

附注 应记住公式

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!\ a^n}{(ax+b)^{n+1}}\quad(a\neq 0).$$

(2) 由于$f''_{xx}(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_x(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$，所以由$f''_{xy}(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处存在知，$f'_x(x,y_0)$在点$x_0$处可微．因此选(D).

附注 当题中所给的三个二阶偏导数在点(x_0,y_0)处连续时，选项(A)，(B)，(C)都正确，但仅假定这三个二阶偏导数在点(x_0,y_0)处存在，未必能推出这三个选项正确．

(3) 记$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$，则$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且$\{a_n\}$单调减少并且收敛于零，所以所给级数收敛．但是由于$-1<\alpha<0$时，由$a_n>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{n}}x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}(\alpha+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}(n=1,2,\cdots)$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$发散，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，从而所给级数条件收敛．因此选(B).

附注 由莱布尼茨定理判定交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$(其中$\{a_n\}$是正项数列)为收敛时，其可能是绝对收敛，也可能是条件收敛．为了确定它们，必须考虑正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性．

(4) 欲使$\lambda y_1+\mu y_2$是$y'+p(x)y=q(x)$的解，必须

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

即$\lambda[y'_1+p(x)y_1]+\mu[y'_2+p(x)y_2]=q(x)$．由此得到

$$(\lambda+\mu)q(x)=q(x)\text{(这里利用}y_1,\ y_2\text{是}y'+p(x)y=q(x)\text{的两个特解)},$$

即

$$\lambda+\mu=1(\text{由于 } q(x) \text{ 不恒为零}). \tag{1}$$

此外，欲使 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，与上同样可得

$$\lambda-\mu=0. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$. 因此选(A).

附注　应记住一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解公式：

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right).$$

其中，不定积分都表示被积函数的一个原函数.

(5) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件为

$$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n.$$

因此选(B).

附注　应记住：对矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 来说，$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$，$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$，以及 $r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$ 分别是该矩阵方程有唯一解，有无穷多解，以及无解的充分必要条件.

(6) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形. 因此选(D).

附注　(Ⅰ) 选项(A)是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的必要条件而不是充分条件，而选项(B)，(C)既不是必要条件，也不是充分条件.

(Ⅱ) 两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有两种：

(ⅰ) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的正、负特征值分别相等(当某个特征值有 k 重时，按 k 个计算)；

(ⅱ) 以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形.

(7) 由于 $f(x)$ 是概率密度，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$a\int_{-\infty}^{1}f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_{1}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1. \tag{1}$$

由 $f_1(x)$ 是 $X\sim N(1,1)$ 的概率密度知，$\int_{-\infty}^{1}f_1(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

由 $f_2(x)$ 是 Y 的概率密度知 $\int_{1}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1$. 将它们代入式(1)得 $\frac{1}{2}a+b=1$. 因此选(B).

附注　题解中利用了以下结论：

(Ⅰ) 设 $X\sim N(a,\sigma^2)$，则它的概率密度 $f(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(x-a)}, & x\geqslant a,\\ 0, & x<a\end{cases}(\lambda>0)$，则

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$$

(8) 由于 $EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$，所以，当$(4-a)S^2-2a\overline{X}^2$ 为$\frac{1}{\lambda^2}$的无偏估计量时，a 必须满足

$$E[(4-a)S^2-2a\overline{X}^2]=\frac{1}{\lambda^2},$$

其中，
$$\begin{aligned}E[(4-a)S^2-2a\overline{X}^2]&=(4-a)E(S^2)-2aE(\overline{X}^2)\\&=(4-a)D(X)-2a[D(\overline{X})+(E\overline{X})^2]\\&=(4-a)\frac{1}{\lambda^2}-2a\left[\frac{1}{n}D(X)+(EX)^2\right]\\&=(4-a)\frac{1}{\lambda^2}-2a\left(\frac{1}{n\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right).\end{aligned}\tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得

$$(4-a)\frac{1}{\lambda^2}-2a\left(\frac{1}{n\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{1}{\lambda^2}，即\ a=\frac{3n}{3n+2}.$$

因此选(C).

附注 要记住以下的结论.

设 X_1，X_2，…，$X_n(n>1)$是来自总体 X(数学期望 EX 与方差 DX 都存在)的简单随机样本，记其均值为$\overline{X}$，方差为 S^2，即 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则

$$E(\overline{X})=EX,\ D(\overline{X})=\frac{1}{n}DX,\ E(S^2)=DX.$$

二、填空题

(9)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ 0, & x>0,\end{cases}\tag{1}$$

此外，由$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}}}$，

其中，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$，

所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}=e^{\frac{1}{2}},\tag{2}$$

于是由式(1)，式(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+e^{nx}}+(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}\right]=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{2}}, & x<0,\\ \frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}}, & x=0,\\ e^{\frac{1}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

附注　由于极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{nx}}$与 x 取值有关，所以应分 $x<0$，$x=0$ 以及 $x>0$ 三种情况计算这个极限.

(10)　$$\int\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}dx\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}-\int\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt=-\arcsin\frac{t}{2}+C$$

$$=-\arcsin\frac{1}{2x}+C.$$

附注　本题是无理函数积分，也可以令 $2x=\sec t$ 进行计算：

$$\int\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{2}\sec t\tan t}\cdot\frac{1}{2}\sec t\tan t dt$$

$$=\int dt=t+C=\arccos\frac{1}{2x}+C.$$

(11)　$\dfrac{\partial}{\partial x}f(e^{xy},\ \sin x^2)=f_u'\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}e^{xy}+f_v'\cdot\dfrac{d}{dx}\sin x^2=ye^{xy}\cdot f_u'+2x\cos x^2\cdot f_v'.$

附注　计算多元复合函数的偏导数时，应先画出该函数与自变量之间的复合关系图，例如本题的关系图为

$$z=f(e^{xy},\ \sin x^2)=f(u,\ v)\begin{cases}u\begin{cases}x\\ y\end{cases}\\ v-x\end{cases}$$

(12) 记 $u_n(x)=\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}}x^{2n+2}}{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n+1)}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}(n+2)}\right]x^2=\frac{e}{e}\cdot1\cdot x^2=x^2,$$

所以，所给幂级数的收敛区间为$\{x\mid x^2<1\}=(-1,\ 1)$.

当 $x=-1$，1 时，所给幂级数成为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right]=\dfrac{1}{e}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$发散. 从而所给幂级数的收敛域为$(-1,\ 1)$.

附注　所给幂级数是缺项幂级数. 对于缺项幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域可按以下步骤计算：

(Ⅰ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$,设其值为 $R(x)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛区间为 $\{x\mid R(x)<1\}\xlongequal{\text{记}}(-a,a)$.

(Ⅱ) 确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 $x=-a,a$ 处的收敛性,即判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(-a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 的收敛性,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $(-a,a)$ 及收敛的点 $x=-a$ 或 $x=a$.

(13) 由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-3\leqslant r(\boldsymbol{AB})$ 得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$, 所以

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&\lambda&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&\lambda&3\\0&2&2\end{vmatrix}=2(\lambda-3)=0.$$

因此 $\lambda=3$.

附注 应记住关于矩阵秩的以下两个不等式:

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times l$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}.$$

(14) $P(A-C\mid AB\cup C)=\dfrac{P((A-C)(AB\cup C))}{P(AB\cup C)}$,

其中,
$$\begin{aligned}&P((A-C)(AB\cup C))=P(A\overline{C}(AB\cup C))\\&=P(AB\overline{C})=P(A)P(B)(1-P(C))=0.1,\\&P(AB\cup C)=P(AB)+P(C)-P(ABC)\\&=P(A)P(B)+P(C)-P(A)P(B)P(C)=0.6.\end{aligned}$$

所以 $P(A-C\mid AB\cup C)=\dfrac{0.1}{0.6}=\dfrac{1}{6}$.

附注 对于比较复杂的随机事件概率, 总是利用简单随机事件概率和概率计算公式计算, 概率计算公式主要有:

设 A, B 都是事件, 则

$P(\overline{A})=1-P(A)$; (逆概公式)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. (加法公式)

特别当 A, B 互不相容时, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

$$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A), & P(A)>0,\\P(B)P(A\mid B), & P(B)>0.\end{cases}\text{(乘法公式)}$$

设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 是一个完全事件组, 则当 $P(A_i)>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$时, 对任意随机事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).\text{(全概率公式)}$$

三、解答题

(15) 由于 $\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}=\varphi'(\psi(0))=\varphi'(0)$,

且
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$
所以，
$$\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}=\varphi'(0)=1.$$
$$[\varphi(\psi(x))]'\Big|_{x=0}=\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}\cdot\psi'(x)\Big|_{x=0}$$
$$=\psi'(0)\text{(这里利用以上的计算结果 }\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}=1\text{)}.$$
由于
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^x}{x}=1,$$
所以，
$$[\varphi(\psi(x))]'\Big|_{x=0}=\psi'(0)=1.$$

附注　题解中，以下两点值得注意：

(Ⅰ) $\varphi(x)$与$\psi(x)$都是分段函数，但现在仅计算在点 $x=0$ 处的复合函数的导数，所以不必写出复合函数的具体表达式.

(Ⅱ) $\varphi'(\psi(x))$与$[\varphi(\psi(x))]'$是两个不同的概念，应予以区分.

(16) 由于$\int_0^x f(x-t,\ y)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u$(其中 $u=x-t$)，所以所给等式成为
$$f(x,\ y)=y+\int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u.$$
由此可得$f(0,\ y)=y$，$f'_x(x,\ y)=f(x,\ y)$，所以$f(x,\ y)=ye^x$. 于是
$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{x}f(x,y^2)\mathrm{d}\sigma&=\iint_D\sqrt{x}\cdot y^2e^x\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\sqrt{x}e^x\cdot y^2\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}e^x\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}\int_0^1x^2e^x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1x^2\mathrm{d}e^x=\frac{2}{3}\left(x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1xe^x\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{2e}{3}-\frac{4}{3}\int_0^1x\mathrm{d}e^x=\frac{2e}{3}-\frac{4}{3}\left(xe^x\Big|_0^1-\int_0^1e^x\mathrm{d}x\right)\\&=-\frac{2e}{3}+\frac{4}{3}(e-1)=\frac{2e}{3}-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

附注　我们多次求解过方程 $y(x)=\int_0^x g(x,\ y(t))\mathrm{d}t+h(x)$(其中，$g$，$h$ 都是已知的连续函数)，题中所给的
$$f(x,y)=y+\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$$
也是同种类型的方程(但其中的未知函数是二元函数$f(x,\ y)$)，因此可用同样的方法求解，

只需用求偏导数代替求导数即可.

(17) 由题设"A 市场的价格对 B 市场的价格弹性为 2"得

$$\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}p_2}=2,\ 即\ p_1=kp_2^2.$$

将 $p_1\Big|_{p_2=1}=\frac{3}{16}$ 代入上式得 $k=\frac{3}{16}$，所以 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$.

总利润函数为

$$\begin{aligned}L(p_1,\ p_2)&=q_1p_1+q_2p_2-C\\&=(3-0.5p_1)p_1+(2-3p_2)p_2-5-2\left[3-0.5p_1+\frac{41}{12}(2-3p_2)\right]\\&=-0.5p_1^2+4p_1-3p_2^2+\frac{45}{2}p_2-\frac{74}{3}.\end{aligned}$$

于是本题即为在约束条件 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$ 下，计算 $L(p_1,\ p_2)$ 的最大值问题，故采用拉格朗日乘数法.

作拉格朗日函数

$$\begin{aligned}F(p_1,\ p_2)&=L(p_1,\ p_2)+\lambda\left(p_1-\frac{3}{16}p_2^2\right)\\&=-0.5p_1^2+4p_1-3p_2^2+\frac{45}{2}p_2-\frac{74}{3}+\lambda\left(p_1-\frac{3}{16}p_2^2\right),\end{aligned}$$

且令 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial p_1}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial p_2}=0,\\ p_1-\dfrac{3}{16}p_2^2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-p_1+4+\lambda=0, & (1)\\ -6p_2+\dfrac{45}{2}-\dfrac{3}{8}\lambda p_2=0, & (2)\\ p_1-\dfrac{3}{16}p_2^2=0. & (3)\end{cases}$

由式(1)，式(3)得 $\lambda=p_1-4=\frac{3}{16}p_2^2-4$，代入式(2)得

$$-6p_2+\frac{45}{2}-\frac{3}{8}\left(\frac{3}{16}p_2^2-4\right)p_2=0,$$

即 $p_2^3+64p_2-320=0$，或 $(p_2-4)(p_2^2+4p_2+80)=0$，所以 $p_2=4$，代入式(3)得 $p_1=3$.

由以上计算，$L(p_1,\ p_2)$ 在约束条件 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$ 下有唯一的可能极值点，而根据问题的实际意义知，在约束条件 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$ 下，$L(p_1,\ p_2)$ 必有最大值. 因此，A 市场产品售价为 3，B 市场产品售价为 4 时，总利润最大.

附注 (Ⅰ)要弄清一个变量 y 对另一个变量 x 的弹性 ε 的概念：

$$\varepsilon=\frac{x}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

(Ⅱ)要熟练掌握计算多元函数条件极值的拉格朗日乘数法.

(18) 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{b}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续,在 $(0,b)$ 内可导,且

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)-\frac{1}{b}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+\frac{x}{b}f(x)\\&=\frac{b-x}{b}f(x)-\frac{1}{b}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+\frac{2x}{b}f(x)\\&=\frac{1}{b}\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+\frac{2x}{b}f(x)>0\end{aligned}$$

(由于 $f(u)$ 单调减少,所以 $f(x)-f(t)\geqslant 0$,且仅在 $t=x$ 处取等号,所以 $\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t>0$,此外 $\frac{2x}{b}f(x)\geqslant 0$),

即函数 $F(x)$ 在 $[0,\ b]$ 上单调增加, 所以

$$F(a)>F(0)=0,\text{即}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(0<a<b<1).$$

附注 以下是证明定积分不等式的常用方法:

将某个定积分的上限及与此上限相同的字母都换成 x, 转化为函数不等式, 然后用导数方法证明这个函数不等式, 由此推得所给的定积分不等式.

(19)(Ⅰ)由于 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n(x\in(-1,1])$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x^2)^n=x\ln(1+x^2),$$

且其成立范围为 $[-1,\ 1]$.

由此可知, 和函数 $S(x)=x\ln(1+x^2)$, 它的定义域为 $[-1,\ 1]$.

(Ⅱ)记 $F(x)=S(x)-\frac{1}{2}$, 则 $F(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 上连续, 在 $(-1,\ 1)$ 内可导且

$$F'(x)=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}>0,$$

此外, $F(-1)=-\ln 2-\frac{1}{2}<0$, $F(1)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$, 所以方程 $F(x)=0$, 即 $S(x)=\frac{1}{2}$ 在 $[-1,\ 1]$ 有且仅有一个实根.

附注 题解中有以下两点值得注意:

(Ⅰ)题中利用公式 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n(-1<x\leqslant 1)$ 计算幂级数的和函数,并确定和函数的定义域, 十分快捷.

(Ⅱ)当函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 $(a,\ b)$ 内至少有一个实根;

当函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续, 在 $(a,\ b)$ 内单调, 且 $f(a)f(b)<0$ 时, 方程 $f(x)=0$ 在 $(a,\ b)$ 内有且只有一个实根.

(20)(Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}$，即

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{B}.$$

由 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$ （$\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵）

$$=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-(1+\lambda)&0\\-1&\lambda&-1\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&\lambda&-1\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&-(1+a)&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-(1+a)]$$

知，方程 $f(\lambda)=0$ 不可能有三重根．这是因为，如有三重根，则

$$(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-(1+a)]=(\lambda+1)^3,$$

但 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=(\lambda+1)^2$ 是不可能的．所以只需考虑方程 $f(\lambda)=0$ 有二重根的情形：

(1) $\lambda=-1$ 是方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根，则 $\lambda=-1$ 必是 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 的根，由此推出 $a=1$．于是

$r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$的秩 $=1=3-2$(即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=-1$ 重数之差)，

所以此时 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化，由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化．

(2) $\lambda=-1$ 不是方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根，则 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 有二重根．由此推出 $a=-\dfrac{5}{4}$. 此时方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根为 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. 于是

$r(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&-1\\-1&\frac{1}{2}&-1\\-1&\frac{5}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$的秩 $=2\neq3-2$(即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 重数之差)，

所以此时 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化．

综上所述，$a=-\dfrac{5}{4}$时，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化．

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有下列两种：

(Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i(即特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根)都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$(其中 n_i 是 λ_i 的重数, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵).

本题的求解, 就是从利用(Ⅱ)入手的.

(21)(Ⅰ)由题设知, $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$, 从而与 λ_1 对应的 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 $\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=1$, 所以由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 知 $\mu_1=1$ 对应的 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. 由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$, 则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交, 即

$$b_1+b_2-b_3=0.$$

故可取 $\boldsymbol{\beta}$ 为这个方程的基础解系, 即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交化:

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)}{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2)}\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\eta}_3}{\|\boldsymbol{\eta}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

它们是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量, 于是所求的正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

由于
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix},$$

所以, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{2}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{2}{\sqrt3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）$f(x_1, x_2, x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为

$$2y_1^2-y_2^2-y_3^2,$$

令$\begin{cases}z_1=\sqrt2 y_1,\\ z_2=y_2,\\ z_3=y_3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt2}z_1,\\ y_2=z_2,\\ y_3=z_3,\end{cases}$ 或 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$，则

$$2y_1^2-y_2^2-y_3^2=z_1^2-z_2^2-z_3^2\text{（规范形）}.$$

从而，$f(x_1, x_2, x_3)$在可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$$

下，化为规范形，即

$$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2.$$

附注 （Ⅰ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(Ⅱ)要熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法及由正交变换与标准形计算二次型矩阵的方法.

(22)(Ⅰ)由于 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)$,

其中,
$$\begin{aligned}P(Z\leqslant z)&=P(XY\leqslant z)\\&=P(Y=-1)P(XY\leqslant z\mid Y=-1)+P(Y=0)P(XY\leqslant z\mid Y=0)+\\&\quad P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1)\\&=\frac{1}{3}[P(X\geqslant -z)+P(0\leqslant z)+P(X\leqslant z)]\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-z}^{+\infty}e^{-x}dx, & z<0,\\ \dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}dx+1+\int_0^z e^{-x}dx\right), & z\geqslant 0\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^z, & z<0,\\ 1-\dfrac{1}{3}e^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以,$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^z, & z<0,\\ 1-\dfrac{1}{3}e^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-EX\cdot E(X^2)$,

其中,$EX=1$,$E(X^2)=D(X)+(EX)^2=1+1^2=2$,

$$\begin{aligned}E(X^3)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)dx=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^3de^{-x}\\&=-\left(x^3e^{-x}\Big|_0^{+\infty}-3\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx\right)\\&=3\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx\\&=3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=3E(X^2).\end{aligned}$$

所以,$\mathrm{Cov}(X,X^2)=3E(X^2)-E(X^2)=2E(X^2)=4.$

附注　由于 $Z=XY$ 是连续型随机变量与离散型随机变量之积,所以要计算它的分布函数应从定义出发,即从计算概率

$$P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)$$

入手.

(23)(Ⅰ)由于 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立,所以 $\overline{X}^2$ 与 S^4 相互独立,因此

$$E(\overline{X}^2S^4)=E(\overline{X}^2)E(S^4),\tag{1}$$

其中,由 $E(\overline{X})=EX=0$,$D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{1}{n}$ 得

$$E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+(E\overline{X})^2=\frac{1}{n}+0=\frac{1}{n}.\tag{2}$$

由$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$知 $E(S^2)=\frac{1}{n-1}E((n-1)S^2)=\frac{1}{n-1}\cdot(n-1)=1$，$D(S^2)=\frac{1}{(n-1)^2}D((n-1)S^2)=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n-1}$，所以

$$E(S^4)=D(S^2)+[E(S^2)]^2=\frac{2}{n-1}+1^2=\frac{n+1}{n-1}. \tag{3}$$

将式(2)，式(3)代入式(1)得

$$E(\overline{X}^2S^4)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{n+1}{n(n-1)}.$$

(Ⅱ) $D(\overline{X}^2)=E(\overline{X}^4)-[E(\overline{X}^2)]^2=E(\overline{X}^4)-\frac{1}{n^2}$, (4)

其中，由于$\overline{X}\sim N\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$，所以

$$\begin{aligned}E(\overline{X}^4)&=\int_{-\infty}^{+\infty}t^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{n}}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\cdot\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{令 } u=\frac{t}{\sqrt{1/n}}}\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\\&=-\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-3\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right]\\&=\frac{3}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{3}{n^2}E(U^2)(\text{其中 } U\sim N(0,1))\\&=\frac{3}{n^2}[DU+(EU)^2]=\frac{3}{n^2}.\end{aligned} \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)得

$$D(\overline{X}^2)=\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{2}{n^2}.$$

附注 应记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则 $X\sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，并且

$$E(\overline{X})=\mu,\ D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S^2)=\sigma^2,\ D(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

模拟试题(五)详解

一、选择题

答案

(1)	(C)	(2)	(A)	(3)	(D)	(4)	(B)
(5)	(C)	(6)	(A)	(7)	(A)	(8)	(D)

(1) 由 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续及 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$ 知 $f(1)=f'(1)=0$. 于是，由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)>f'(1)=0(x>1)$，且 $f(x)>f(1)=0(x>1)$. 从而，当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调增加且大于零. 因此选(C).

附注 应记住以下结论：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$，则

$$f(x_0)=0, f'(x_0)=A.$$

(2) 对 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 两边关于 y 积分得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x), \tag{1}$$

特别有

$$z'_x(x,0)=\varphi(x). \tag{2}$$

对 $z(x, 0)=x^2$ 两边关于 x 求导得

$$z'_x(x,0)=2x. \tag{3}$$

于是，由式(2)，式(3)得 $\varphi(x)=2x$，将它代入式(1)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+2x.$$

从而，上式两边关于 x 积分得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2+\psi(y), \tag{4}$$

特别有 $z(0, y)=\psi(y)$，故由题设 $z(0, y)=y$ 得 $\psi(y)=y$. 将它代入式(4)得 $z(x, y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2+y$. 因此选(A).

附注 在不定积分中，对 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \quad (\text{其中 } C \text{ 是任意常数}).$$

对 $g(x, y)$ 关于 x 的原函数 $G_1(x, y)$ 有

$$\int g(x,y)\mathrm{d}x=G_1(x,y)+\varphi(y)(\text{其中 } \varphi(y) \text{ 是 } y \text{ 的任意函数}),$$

同样，对 $g(x, y)$ 关于 y 的原函数 $G_2(x, y)$ 有

$$\int g(x,y)\mathrm{d}y=G_2(x,y)+\psi(x)(\text{其中 } \psi(x) \text{ 是 } x \text{ 的任意函数}).$$

(3) 由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}x, \tag{1}$$

即
$$2\iint_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma + \iint_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint (a+b)\mathrm{d}\sigma = \pi(a+b),$$

所以 $\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{2}(a+b)$. 因此本题选(D).

附注 式(1)证明如下：

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，函数 $\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)} - \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}$ 在对称点 (x,y) 与 (y,x) 处的值互为相反数，所以

$$\iint_D \left[\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)} - \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\right]\mathrm{d}\sigma = 0,$$

从而
$$\iint_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 考虑选项(B). 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$ 矛盾，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一发散. 因此选(B).

附注 可用例子说明选项(A)、(C)及(D)都不能选.

设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，所以(A)不能选.

设 $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，所以(C)不能选.

设 $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n = \frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以(D)不能选.

(5) 显然，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}_0$ 可使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{x}_0$ 也是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 反之，设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解 $\boldsymbol{\xi}$，则

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}, \text{即} (\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\xi}) = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{A\xi}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是实向量知 b_1，b_2，…，b_n 都是实数. 于是由式(1)得

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 0, \text{从而 } b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0, \text{即 } \boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{0}.$$

由此可知，$\boldsymbol{\xi}$ 也是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

因此选(C).

附注　题解中，在实数范围里证明了以下结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程，由此也推得 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

这结论可推广为：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵，则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

(6) 由题 $r(\boldsymbol{A}^*)=4-3=1$，从而 $r(\boldsymbol{A})=4-1=3$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有且仅有三个不为零. 由此推得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准形应形如 $a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$($a_1, a_2, a_3$ 全不为零). 因此选(A).

附注　题解中利用了以下两个结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, r(\boldsymbol{A})=n,\\1, r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可正交相似对角化，且对角矩阵的对角线上元素都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(7) 记 X 的分布函数为 $G(x)$，则

$$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{a}, & 0<x<a,\\ 1, & x\geqslant a,\end{cases}$$

记 Z 的分布函数为 $F(z)$，则

$$\begin{aligned}F(z)&=P(Z\leqslant z)=P(\max\{X,Y\}\leqslant z)\\&=P(X\leqslant z, Y\leqslant z)\\&=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)(\text{由于 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立})\\&=G^2(z)(\text{由于 } X \text{ 与 } Y \text{ 有相同的分布函数 } G(z))\\&=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{z}{a}\right)^2, & 0<z<a,\\ 1, & z\geqslant a.\end{cases}\end{aligned}$$

所以 Z 的概率密度

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2z}{a^2}, & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此选(A).

附注　顺便指出，选项(B)，(D)分别是随机变量 $\min\{X, Y\}$ 的概率密度与分布函数.

(8) 由于 $\dfrac{8}{\sigma^2}S_X^2\sim\chi^2(8)$，$\dfrac{10}{\sigma^2}S_Y^2\sim\chi^2(10)$，所以

$$D(S_X^2)=\frac{\sigma^4}{8^2}D\left(\frac{8}{\sigma^2}S_X^2\right)=\frac{\sigma^4}{64}\times 2\times 8=\frac{1}{4}\sigma^4,$$

$$D(S_Y^2)=\frac{\sigma^4}{10^2}D\left(\frac{10}{\sigma^2}S_Y^2\right)=\frac{\sigma^4}{10^2}\times 2\times 10=\frac{1}{5}\sigma^4,$$

并且

$$D(S_{12}^2)=\frac{1}{4}[D(S_X^2)+D(S_Y^2)]=\frac{9}{80}\sigma^4,$$

$$D(S_{XY}^2)=\frac{1}{18^2}[64D(S_X^2)+100D(S_Y^2)]=\frac{1}{9}\sigma^4.$$

所以，四个统计量中方差最小者为 S_{XY}^2，因此选(D).

附注 记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ E(S^2)=\sigma^2,\ D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

二、填空题

(9) 由 $\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t=f(x)-\mathrm{e}^{5x}$ 得

$$f(0)=1,\ 5f(x)-2=f'(x)-5\mathrm{e}^{5x}\ \text{以及}\ f'(0)=8,$$

所以有

$$\frac{f'(x)-8}{x}=\frac{5[f(x)-f(0)]+5(\mathrm{e}^{5x}-1)}{x}.$$

令 $x\to 0$，由上式得

$$f''(0)=5f'(0)+5\times 5=65.$$

附注 本题也可解答如下：由于

$$5f(x)-2=f'(x)-5\mathrm{e}^{5x},\text{即}\ y'-5y=-2+5\mathrm{e}^{5x}(\text{其中}\ y=f(x)),$$

所以，

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{5x}\left[C+\int(-2+5\mathrm{e}^{5x})\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x\right]\\&=\mathrm{e}^{5x}\left[C+\int(-2\mathrm{e}^{-5x}+5)\mathrm{d}x\right]\\&=\mathrm{e}^{5x}\left(C+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5x}+5x\right).\end{aligned}$$

将 $y|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C=\frac{3}{5}$，所以

$$y=\mathrm{e}^{5x}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5x}+5x\right)=\frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}+\frac{2}{5}+5x\mathrm{e}^{5x},$$

$$y'=8\mathrm{e}^{5x}+25x\mathrm{e}^{5x},$$

$$y''=65\mathrm{e}^{5x}+125x\mathrm{e}^{5x}.$$

由此得到 $f''(0)=y''|_{x=0}=65$.

(10) 显然，$x=y=0$ 时，所给方程成为 $\int_0^z\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=0$，从而 $z(0,0)=0$. 此外，所给方程两边对 x 求偏导数得

$$\mathrm{e}^{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+y+y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \text{即}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{\mathrm{e}^{z^2}+y},\ \text{且}\frac{\partial z(0,0)}{\partial x}=0.$$

从而
$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left.\left(\frac{\partial z(0,\ y)}{\partial x}\right)\right|_{y=0}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial z(0,\ y)}{\partial x}-\dfrac{\partial z(0,\ 0)}{\partial x}}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{-y}{\mathrm{e}^{z^2(0,y)}+y}-0}{y}$$
$$=-\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{z^2(0,y)}+y}=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

附注 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$也可以由$\frac{\partial z}{\partial x}$对 y 求偏导数算出$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，然后将 $x=y=0$ 代入计算得到．但题解中由$\frac{\partial z}{\partial x}$按定义计算$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$更加快捷些．

(11) 由于$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}$,
$$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}>\frac{1}{n^2+2n}(1+2+\cdots+n)$$
$$=\frac{n+1}{2(n+2)}(n=1,\ 2,\ \cdots),$$
并且，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$，所以由数列极限存在准则 I 知
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

附注 数列极限存在准则 I 是：

设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$以及$\{z_n\}$满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，且
$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=A,$$
则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$

(12) 由于 y_1 与 y_2 是 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的特解，所以其通解为 $Y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 此外，$y''+py'+qy=0$ 对应的特征方程有根 $1+\mathrm{i}$ 与 $1-\mathrm{i}$，从而
$$p=-[(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})]=-2,\ q=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2.$$
由于 $y''+py'+qy=\cos x$，即 $y''-2y'+2y=\cos x$ 应有特解
$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$
将它代入这个非齐次线性微分方程得
$$(A-2B)\cos x+(2A+B)\sin x=\cos x,$$
于是有$\begin{cases}A-2B=1,\\2A+B=0,\end{cases}$ 即 $A=\frac{1}{5}$，$B=-\frac{2}{5}$，因此 $y^*=\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$. 从而这个非齐次线性微分方程的通解为
$$y=Y+y^*=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x.$$

附注 本题获解的关键是，由 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的特解确定其通解及方程中的系数 p，q 的值．它们都是按二阶常系数齐次线性微分方程的解的性质得到的．

(13) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，此外对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 的两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，所以由 $|\boldsymbol{A}|<0$ 得 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$，
所以，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|\,|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，即

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

附注 题中的 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵．正交矩阵有以下性质：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵，则

$|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1；

$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组与列向量组都是正交单位向量组；

$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{*}$ 都是正交矩阵；

$\boldsymbol{AB}$ 是正交矩阵．

(14) 由于存在常数 a，$b(b\neq0)$，使得 $P(Y=a+bX)=1$. 所以

$$\rho=\begin{cases}1, & b>0,\\ -1, & b<0,\end{cases}\ \text{即}\ \rho=\frac{b}{|b|}.$$

附注 关于随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ 的性质：

(Ⅰ) $|\rho|\leqslant1$；

(Ⅱ) $|\rho|=1$ 的充分必要条件是，存在常数 a，$b(b\neq0)$，使得

$$P(Y=a+bX)=1,$$

且当 $b>0$ 时 $\rho=1$，$b<0$ 时 $\rho=-1$.

三、解答题

(15) $y(0)=1$，此处，

由 $y(x)=1+x+2x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$y'=1+2\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t=1+y^2-y^2(0)=y^2,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)=-1$，从而 $\frac{1}{y}=-x+C$. 将 $y(0)=1$ 代入得 $C=1$. 因此 $y=\frac{1}{1-x}$. 从而 $y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

附注 对 $\int_0^x(x-t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 求导时，必须首先将被积函数中的 x 提到积分号之外，故将它改写成

$$x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

(16) 由于 $I(a)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint\limits_{D_1+D_2}(x+2x^2y)\mathrm{d}\sigma\ (D_1+D_2,\text{如图 5-16 阴影部分所示})$$

$$= 2\iint_{D_1} x\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

(这是由于 D_1 与 D_2 关于 x 轴对称，在对称点处 x 的值彼此相等，而 $2x^2y$ 的值互为相反数，故

$$\iint_{D_1+D_2} x\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} x\mathrm{d}\sigma, \iint_{D_1+D_2} 2x^2y\mathrm{d}\sigma = 0),$$

所以，$I(a) = 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_{\sqrt{ax-x^2}}^a x\mathrm{d}y = 2\int_0^a x(a - \sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^a ax\mathrm{d}x - 2\int_0^a x\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= a^3 - 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(t+\frac{a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\mathrm{d}t\left(\text{其中 } t = x - \frac{a}{2}\right)$$

$$= a^3 - a\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\mathrm{d}t = a^3 - a\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \left(1-\frac{\pi}{8}\right)a^3.$$

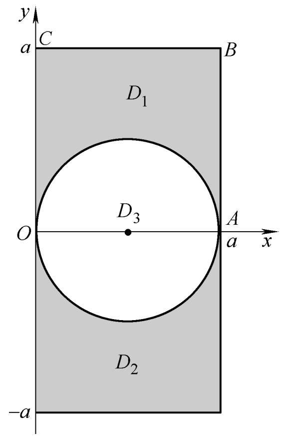

图 5-16

附注 $\iint_{D_1} x\mathrm{d}\sigma$ 也可计算如下：

$$\iint_{D_1} x\mathrm{d}\sigma = \iint_S x\mathrm{d}\sigma - \iint_{D_3} x\mathrm{d}\sigma,$$

其中，S 是正方形 $OABC = \{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a\}$，

$D_3 = \{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{ax-x^2}\} = \{(r, \theta) \mid 0\leqslant r\leqslant a\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$. 所以

$$\iint_{D_1} x\mathrm{d}\sigma = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a x\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{16}\right)a^3.$$

(17) 由于 $a_n = -\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n-1} = (-1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)a_{n-2}$

$$= \cdots = (-1)^{n-2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdots\frac{4}{3}a_2$$

$$= (-1)^{n-2}\frac{7}{6}(n+1) = (-1)^n\frac{7}{6}(n+1)\ (n=3, 4, \cdots),$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

由于 $x = -1, 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n$ 分别成为

$$\frac{13}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7}{6}(n+1)\text{ 与 }\frac{5}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1),$$

它们都是发散的,因此$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域为$(-1,1)$. 对任意$x\in(-1,1)$有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n\\&=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=3}^{\infty}(-x)^{n+1}\\&=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4}{1+x}\right)\\&=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)\\&=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{7}{6(x+1)^2}.\end{aligned}$$

附注 计算幂级数的和函数$S(x)$时,应先算出该幂级数的收敛域,即确定$S(x)$的定义域.

(18)(Ⅰ)作辅助函数

$$F(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

显然它在$[0,1]$上可导,且$F(0)=F(1)(=0)$,所以由罗尔定理知存在$\xi\in(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$,即$f(\xi)(1-\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

(Ⅱ)记$G(x)=f(x)(1-x)-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t$. 由(Ⅰ)的证明知方程$G(x)=0$在$(0,1)$有实根$\xi$,此外,由题设得

$$G'(x)=f'(x)(1-x)-2f(x)>0\ (x\in(0,1)),$$

即函数$G(x)$在$(0,1)$内单调增加,所以方程$G(x)=0$在$(0,1)$内的实根是唯一的,即(Ⅰ)中的ξ是唯一的.

附注 (Ⅰ)的证明中,辅助函数$F(x)$是按以下方法得到的:

首先将欲证等式中的ξ改为x得

$$f(x)(1-x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

记 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则上式成为

$$\varphi'(x)(1-x)-\varphi(x)=0,\text{即 }\varphi'(x)=\frac{1}{1-x}\varphi(x).$$

解此微分方程得

$$\varphi(x)=C\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x}=\frac{C}{1-x},$$

即 $(1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=C$. 所以所作辅助函数为$F(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(19)总成本函数$C(x)=0.8x+400$,所以总利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)-T(x)$$
$$=\begin{cases}29x-\dfrac{1}{4}x^2-400, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 491-0.85x, & x>60.\end{cases}$$

显然 $L(x)$ 在$(0,+\infty)$上连续且

$$L'(x)=\begin{cases}29-\dfrac{1}{2}x, & 0<x<60,\\ -0.85, & x>60,\end{cases}$$

所以 $L(x)$ 的最大值,在$[0,+\infty)$上的唯一极值点 $x=58$ 处取到,值为 $L(58)=441$. 于是当该厂月产量 $x=58$ 件时,总利润 $L(x)$ 最大,其值为 441 万元.

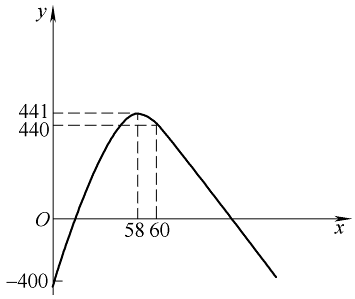

图 5-19

附注 $y=L(x)$ 的图形如图 5-19 所示.

(20)(Ⅰ)由于所给方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$$

即 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

于是,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,即$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$是可逆矩阵得所给方程组的同解方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

对式(1)的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\-1&1&a&1\\0&1&1&2\end{array}\right)$$

施行初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&a-1&2\\0&1&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&0&a-2&0\\0&1&1&2\end{array}\right). \tag{2}$$

所以,当所给方程组有无穷多解时,$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$(其中,$\boldsymbol{A}$ 是式(1)的系数矩阵),于是由式(2)知 $a-2=0$,即 $a=2$.

(Ⅱ)当 $a=2$ 时,式(1),即所给方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1\quad -x_3=1,\\ \quad x_2+x_3=2\end{cases} \tag{3}$$

同解,它对应的导出组通解为 $C(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,且式(3)有特解$(1,2,0)^{\mathrm{T}}$. 所以,式(3),即所给方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C(1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,2,0)^{\mathrm{T}}(C\text{ 是任意常数}).$$

附注 本题获解的关键是,根据 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,将所给的方程组化简为同解方程组(1).

(21)(Ⅰ)记$\boldsymbol{E}$为三阶单位矩阵，则由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -a & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2$$

知，$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda=-2$，6(二重)，所以$\boldsymbol{A}$可相似对角化时，必有

$$r(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1, \tag{1}$$

其中，$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}$.

因此满足式(1)的$a=0$，即$\boldsymbol{A}$可相似对角化时，$a=0$.

(Ⅱ)$a=0$时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$，所以

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2+6x_3^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

记$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$(实对称矩阵)，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -5 & 0\\ -5 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-6)(\lambda-7),$$

所以，$\boldsymbol{B}$有特征值$\lambda=-3$，6，7.

设对应$\lambda=-3$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}$满足

$$\begin{pmatrix}-5 & -5 & 0\\ -5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，\text{即}\begin{cases}a_1+a_2=0,\\ a_3=0.\end{cases}$$

于是取$\boldsymbol{\alpha}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

设对应$\lambda=6$的特征向量为$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\beta}$满足

$$\begin{pmatrix}4 & -5 & 0\\ -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，\text{即}\begin{cases}4b_1-5b_2=0,\\ -5b_1+4b_2=0.\end{cases}$$

于是取$\boldsymbol{\beta}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{\beta}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

设对应$\lambda=7$的特征向量为$\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\gamma}$与$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$都正交，即

$$\begin{cases}-c_1+c_2=0,\\ c_3=0.\end{cases}$$

于是取$\boldsymbol{\gamma}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{\gamma}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$为正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\beta}=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则所求的正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

它将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 化为标准形 $-3y_1^2+6y_2^2+7y_3^2$.

附注　用正交变换将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 化为标准形，首先要将该二次型表示成 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵)，这是本题获解的关键．此外应熟练掌握用正交变换化二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$(其中 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵)为标准形的方法．

(22)
$$\begin{aligned}E(Z^2)&=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(\min\{x,y\})^2f(x,y)\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint\limits_{0<x<y}(\min\{x,y\})^2x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint\limits_{0<x<y}x^2\cdot x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^y x^3\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}y^4\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}y^4\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}\\
&=-\frac{1}{4}\left(y^4\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty}-4\int_0^{+\infty}y^3\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\\
&=\int_0^{+\infty}y^3\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=-\int_0^{+\infty}y^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}\\
&=-\left(y^3\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty}-3\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\\
&=3\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\\
&=3E(T^2)\left(\text{其中,随机变量 }T\text{ 的概率密度为 }\varphi(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\right)\\
&=3[DT+(ET)^2]=3(1+1^2)=6.\end{aligned}$$

附注　由于在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<y\}$ 上，$(\min\{x,y\})^2=x^2$，所以，用定义计算数学期望 $E(Z^2)$. 这里顺便计算 EZ 与 DZ：

$$\begin{aligned}EZ&=\iint\limits_{xOy\text{平面}}\min\{x,y\}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint\limits_{0<x<y}\min\{x,y\}x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_{0<x<y} x \cdot x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} y^3\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} y^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(y^3\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty} - 3\int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)$$
$$= \int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = E(T^2) = DT + (ET)^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

$DZ = E(Z^2) - (EZ)^2 = 6 - 2^2 = 2.$

(23)(Ⅰ)X 的数学期望

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot (1+\theta)x^\theta \cdot \mathrm{d}x = \frac{1+\theta}{2+\theta}.$$

根据矩估计法,令

$$EX = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\text{,即}\frac{1+\theta}{2+\theta} = \overline{X}.$$

解此方程得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}.$

(Ⅱ)记 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则它的似然函数

$$L(\theta) = \begin{cases}(1+\theta)x_1^\theta \cdot (1+\theta)x_2^\theta \cdot \cdots \cdot (1+\theta)x_n^\theta, & 0 < x_1,x_2,\cdots,x_n < 1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $L(\theta)$ 的最大值只能在 $0 < x_1,x_2,\cdots,x_n < 1$ 内取到,所以可化简似然函数为

$$L(\theta) = (1+\theta)^n(x_1x_2\cdots x_n)^\theta, 0 < x_1,x_2,\cdots,x_n < 1.$$

取对数 $\ln L(\theta) = n\ln(1+\theta) + \theta\ln(x_1x_2\cdots x_n)$,则由

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \ln(x_1x_2\cdots x_n) = 0$$

得
$$\theta = -\frac{n}{\ln(x_1x_2\cdots x_n)} - 1(0 < x_1,x_2,\cdots,x_n < 1).$$

所以,θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)} - 1.$

附注 应熟练掌握总体未知参数点估计的两种方法:矩估计法与最大似然估计法.