

2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

# 考研数学(一)

真题精讲与热点分析(2006~2015)

考研辅导名师 陈启浩 编著

名师权威解析  
高频考点强化  
备考必做真题



真题都一样，解答真不一样



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



全国硕士研究生入学统一考试备考用书

# 2016 考研数学 (一)

## 真题精讲与热点分析 (2006 ~ 2015)

考研辅导名师      陈启浩    编著



机械工业出版社

本书是全国硕士研究生入学统一考试备考用书. 主要包括 2006 年到 2015 年十年的考研数学一的真题及其精讲, 以及对考试热点问题的分析.

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学一”的同学阅读, 也可作为教师的参考书.

### 图书在版编目 (CIP) 数据

2016 考研数学 (一) 真题精讲与热点分析: 2006 ~ 2015/陈启浩编著. —2 版. —北京: 机械工业出版社, 2015. 3

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-49525-3

I. ①②… II. ①陈… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 044701 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 汤 嘉 责任编辑: 汤 嘉

封面设计: 责任印制:

印刷厂印刷

2015 年 4 月第 2 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 14.25 印张 · 351 千字

0001— 册

标准书号: ISBN 978-7-111-49525-3

定价: 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: 010-88361066

机工官网: [www.cmpbook.com](http://www.cmpbook.com)

读者购书热线: 010-68326294

机工官博: [weibo.com/cmp1952](http://weibo.com/cmp1952)

010-88379203

金书网: [www.golden-book.com](http://www.golden-book.com)

封面无防伪标均为盗版

教育服务网: [www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)

# 全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由考研辅导名师陈启浩教授编写的全国硕士研究生入学统一考试备考用书。

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学一考试的包括四本书，分别是：

《2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》（简称《真题精讲》）

《2016 考研数学（一）典型题 660》（简称《典型题 660》）

《2016 考研数学（一）高分突破 135》（简称《高分突破》）

《2016 考研数学（一）名师精选全真模拟冲刺题 10 套》（简称《全真模拟》）

本套系列丛书是在陈启浩教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶。

本套系列丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率。这套书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书。

机械工业出版社

# 前 言

参加考研的同学，一定要认真练习近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题。因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息。

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2006 年至 2015 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》一书。本书由三部分组成：

- A. 十年真题（单独成册）
- B. 十年真题精讲
- C. 热点分析

“十年真题精讲”是对每一道真题通过“分析”“精讲”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精讲”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别。

“热点分析”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的经常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试。

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用。在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精讲和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力。

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 [cqhshuxue@gmail.com](mailto:cqhshuxue@gmail.com)，非常感谢！

编 者

# 目 录

## 全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

### 前言

#### A 十年真题

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	2
2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	6
2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	9
2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	12
2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	16
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	19
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	22
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	26
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	29
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题 .....	33

#### B 十年真题精讲

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	2
2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	18
2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	33
2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	48
2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	64
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	78
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	93
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	109
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	122
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 .....	137

#### C 热点分析

一、高等数学 .....	153
1. 未定式极限的计算 .....	153
2. 数列极限存在准则的应用 .....	160
3. 零点定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理与积分中值定理的综合应用 .....	163
4. 定积分的计算 .....	166
5. 二重积分与三重积分的计算 .....	172
6. 格林公式和高斯公式 .....	179
7. 幂级数的收敛域与和函数的计算 .....	184
8. 二阶常系数线性微分方程的求解 .....	187
二、线性代数 .....	191
9. 向量组的线性相关性的判定 .....	191

---

10. 线性方程组解的结构与求解 .....	194
11. 矩阵的特征值与特征向量的计算 .....	197
12. 二次型化标准形与规范形的方法 .....	201
<b>三、概率论与数理统计</b> .....	207
13. 各类随机事件概率的计算 .....	207
14. 各种概率密度的计算 .....	210
15. 常用样本统计量分布的计算 .....	213
16. 点估计量的计算与评判 .....	216
<b>参考文献</b> .....	221

# A 十年真题

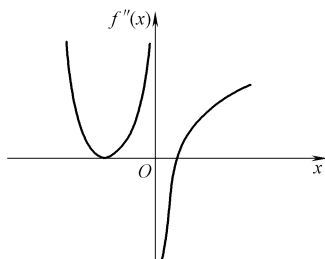


## 2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求.)

(1) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 其 2 阶导函数  $f''(x)$  的图形如下图所示, 则曲线  $y=f(x)$  的拐点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



[      ]

(2) 设  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$  是 2 阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的一个特解, 则

- (A)  $a = -3, b = 2, c = -1$ . (B)  $a = 3, b = 2, c = -1$ .  
(C)  $a = -3, b = 2, c = 1$ . (D)  $a = 3, b = 2, c = 1$ .

[      ]

(3) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $x = \sqrt{3}$  与  $x = 3$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  的

- (A) 收敛点, 收敛点. (B) 收敛点, 发散点.  
(C) 发散点, 收敛点. (D) 发散点, 发散点.

[      ]

(4) 设  $D$  是第一象限中曲线  $2xy = 1$ ,  $4xy = 1$  与直线  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$  围成的平面区域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$

- (A)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ . (B)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ .  
(C)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$ . (D)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$ .

[      ]

(5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ , 集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  有无

无穷多个解的充分必要条件为

(A)  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ .

(B)  $a \notin \Omega, d \in \Omega$ .

(C)  $a \in \Omega, d \notin \Omega$ .

(D)  $a \in \Omega, d \in \Omega$ .

[ ]

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Py$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $P = (e_1, e_2, e_3)$ . 若  $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为

(A)  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ .

(B)  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ .

(C)  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ .

(D)  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

[ ]

(7) 若  $A, B$  为任意两个随机事件, 则

(A)  $P(AB) \leq P(A)P(B)$ .

(B)  $P(AB) \geq P(A)P(B)$ .

(C)  $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ .

(D)  $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ .

[ ]

(8) 设随机变量  $X, Y$  不相关, 且  $EX = 2, EY = 1, DX = 3$ , 则  $E[X(X + Y - 2)] =$

(A)  $-3$ .

(B)  $3$ .

(C)  $-5$ .

(D)  $5$ .

[ ]

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

(10)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx =$  \_\_\_\_\_.

(11) 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^z + xyz + x + \cos x = 2$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $\Omega$  是由平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标平面所围成的空间区域, 则

$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz =$  \_\_\_\_\_.

(13)  $n(n \geq 3)$  阶行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(1, 0; 1, 1; 0)$ , 则  $P(XY - Y < 0) =$

\_\_\_\_\_.

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 解应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$ . 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  是等价无穷小, 求  $a, b, k$  值.

(16) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零, 若对任意的  $x_0 \in I$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$  及  $x$  轴所围成的区域  $D$  的面积为 4, 且  $f(0) = 2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数  $f(x, y) = x + y + xy$ , 曲线  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ , 求  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的最大方向导数.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 设函数  $u(x), v(x)$  可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(II) 设函数  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导,  $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ , 写出  $f(x)$  的求导公式.

(19) (本题满分 10 分)

已知曲线  $L$  的方程为  $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$  起点为  $A(0, \sqrt{2}, 0)$ , 终点为  $B(0, -\sqrt{2}, 0)$ ,

计算曲线积分  $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz$ .

(20) (本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是 3 维向量空间  $\mathbb{R}^3$  的一个基,  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$ ,  $\beta_2 = 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ .

(I) 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是  $\mathbb{R}^3$  的一个基;

(II) 当  $k$  为何值时, 存在非零向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标相同, 并求出所有的  $\xi$ .

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(I) 求  $a, b$  的值.

(II) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

对  $X$  进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记  $Y$  为观测次数.

( I ) 求  $Y$  的概率分布;

( II ) 求  $EY$ .

(23) ( 本题满分 11 分 )

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\theta$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自该总体的简单随机样本.

( I ) 求  $\theta$  的矩估计量.

( II ) 求  $\theta$  的最大似然估计量.

## 2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求.)

(1) 下列曲线有渐近线的是

- (A)  $y = x + \sin x$ . (B)  $y = x^2 + \sin x$ .  
(C)  $y = x + \sin \frac{1}{x}$ . (D)  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$ .

[     ]

(2) 设函数  $f(x)$  具有 2 阶导数,  $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , 则在区间  $[0, 1]$  上

- (A) 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$ . (B) 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$ .  
(C) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$ . (D) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$ .

[     ]

(3) 设  $f(x)$  是连续函数, 则  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx =$

- (A)  $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ .  
(B)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$ .  
(C)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$ .  
(D)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ .

[     ]

(4) 若  $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbf{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$ , 则  $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$

- (A)  $2 \sin x$ . (B)  $2 \cos x$ . (C)  $2\pi \sin x$ . (D)  $2\pi \cos x$ .

[     ]

(5) 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

- (A)  $(ad - bc)^2$ . (B)  $-(ad - bc)^2$ . (C)  $a^2 d^2 - b^2 c^2$ . (D)  $b^2 c^2 - a^2 d^2$ .

[     ]

(6) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是 3 维向量, 则对任意常数  $k, l$ , 向量  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关是向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的

- (A) 必要而非充分条件. (B) 充分而非必要条件.  
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

[ ]

(7) 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $P(B)=0.5$ ,  $P(A-B)=0.3$ , 则  $P(B-A)=$

- (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

[ ]

(8) 设连续型随机变量  $X_1$  与  $X_2$  相互独立, 且方差均存在,  $X_1$  与  $X_2$  的概率密度分别为  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$ , 随机变量  $Y_1$  的概率密度为  $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$ , 随机变量  $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ , 则

- (A)  $EY_1 > EY_2$ ,  $DY_1 > DY_2$ . (B)  $EY_1 = EY_2$ ,  $DY_1 = DY_2$ .  
(C)  $EY_1 = EY_2$ ,  $DY_1 < DY_2$ . (D)  $EY_1 = EY_2$ ,  $DY_1 > DY_2$ .

[ ]

## 二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 曲面  $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$  在点  $(1, 0, 1)$  处的切平面方程为\_\_\_\_\_.

(10) 设  $f(x)$  是周期为 4 的可导奇函数, 且  $f'(x)=2(x-1)$ ,  $x \in [0, 2]$ , 则  $f(7)=$ \_\_\_\_\_.

(11) 微分方程  $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$  满足条件  $y(1)=e^3$  的解为  $y=$ \_\_\_\_\_.

(12) 设  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $y+z=0$  的交线, 从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分  $\oint_L zdx + ydz =$ \_\_\_\_\_.

(13) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  的负惯性指数是 1, 则  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_.

(14) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  是未知参数,  $X_1,$

$X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 若  $c \sum_{i=1}^n X_i^2$  是  $\theta^2$  的无偏估计, 则  $c=$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数  $y=f(x)$  由方程  $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$  确定, 求  $f(x)$  的极值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z=f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(z + e^x \cos y)e^{2x}$ . 若

$f(0)=0, f'(0)=0$ , 求  $f(u)$  的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

设  $\Sigma$  为曲面  $z=x^2+y^2 (z \leq 1)$  的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

(I) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

(II) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  收敛.

(20) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组  $Ax=0$  的一个基础解系;

(II) 求满足  $AB=E$  的所有矩阵  $B$ .

(21) (本题满分 11 分)

证明  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率分布为  $P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$ , 在给定  $X=i$  的条件下, 随机变量  $Y$  服从均匀分布  $U(0, i) (i=1, 2)$ .

(I) 求  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ ;

(II) 求  $EY$ .

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的分布函数为  $F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  其中  $\theta$  是未知参数且大于零,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(I) 求  $EX$  与  $E(X^2)$ ;

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_n$ ;

(III) 是否存在实数  $a$ , 使得对任何  $\varepsilon > 0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$ ?

## 2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求.)

(1) 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$ , 其中  $k, c$  为常数, 且  $c \neq 0$ , 则

- (A)  $k=2, c=-\frac{1}{2}$ . (B)  $k=2, c=\frac{1}{2}$ .  
(C)  $k=3, c=-\frac{1}{3}$ . (D)  $k=3, c=\frac{1}{3}$ .

[ ]

(2) 曲面  $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$  在点  $(0, 1, -1)$  处的切平面方程为

- (A)  $x - y + z = -2$ . (B)  $x + y + z = 0$ .  
(C)  $x - 2y + z = -3$ . (D)  $x - y - z = 0$ .

[ ]

(3) 设  $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$ ,  $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$ , 令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ ,

则  $S\left(-\frac{9}{4}\right) =$

- (A)  $\frac{3}{4}$ . (B)  $\frac{1}{4}$ . (C)  $-\frac{1}{4}$ . (D)  $-\frac{3}{4}$ .

[ ]

(4) 设  $L_1: x^2 + y^2 = 1$ ,  $L_2: x^2 + y^2 = 2$ ,  $L_3: x^2 + 2y^2 = 2$ ,  $L_4: 2x^2 + y^2 = 2$  为四条逆时针方向的平面曲线, 记  $I_i = \oint_{L_i} \left( y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left( 2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i=1, 2, 3, 4)$ , 则  $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

- (A)  $I_1$ . (B)  $I_2$ . (C)  $I_3$ . (D)  $I_4$ .

[ ]

(5) 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 若  $AB=C$ , 且  $B$  可逆, 则

- (A) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $A$  的行向量组等价.  
(B) 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价.  
(C) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $B$  的行向量组等价.  
(D) 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $B$  的列向量组等价.

[ ]

(6) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件为



(A)  $a=0, b=2$ .(B)  $a=0, b$  为任意常数.(C)  $a=2, b=0$ .(D)  $a=2, b$  为任意常数.

[ ]

(7) 设  $X_1, X_2, X_3$  是随机变量, 且  $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$ ,  $P_i = P(-2 \leq X_i \leq 2) (i=1, 2, 3)$ , 则

(A)  $P_1 > P_2 > P_3$ .(B)  $P_2 > P_1 > P_3$ .(C)  $P_3 > P_2 > P_1$ .(D)  $P_1 > P_3 > P_2$ .

[ ]

(8) 设随机变量  $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$ , 给定  $a(0 < a < 0.5)$ , 常数  $c$  满足  $P(X > c) = a$ , 则  $P(Y > c^2) =$

(A)  $a$ .(B)  $1-a$ .(C)  $2a$ .(D)  $1-2a$ .

[ ]

## 二、填空题(第 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设函数  $y=f(x)$  由方程  $y-x=e^{x(l-y)}$  确定, 则  $\lim_{n \rightarrow 0} n \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$  \_\_\_\_\_.

(10) 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解  $y =$  \_\_\_\_\_.

(11) 设  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \end{cases} (t \text{ 为参数}),$  则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$  \_\_\_\_\_.

(12)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(13) 设  $A = (a_{ij})$  是 3 阶非零矩阵,  $|A|$  为  $A$  的行列式,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式. 若  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j=1, 2, 3)$ , 则  $|A| =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设随机变量  $Y$  服从参数为 1 的指数分布,  $a$  为常数且大于零, 则  $P(Y \leq a+1 | Y > a) =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题(第 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

计算  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ , 其中  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$ .

(16) (本题满分 10 分)

设数列  $\{a_n\}$  满足条件:  $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$ .  $S(x)$  是幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数.

(I) 证明:  $S''(x) - S(x) = 0$ ;

(II) 求  $S(x)$  的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$  的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数  $f(x) = [-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) = 1$ , 证明:

(I) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ .

(II) 存在  $\eta \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

(19) (本题满分 10 分)

设直线  $L$  过  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$  两点, 将  $L$  绕  $z$  轴旋转一周得到曲面  $\Sigma$ ,  $\Sigma$  与平面  $z = 0$ ,  $z = 2$  所围成的立体为  $\Omega$ .

(I) 求曲面  $\Sigma$  的方程;

(II) 求  $\Omega$  的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 并求所有矩阵  $C$ .

(21) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ ,

$$\text{记 } \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型  $f$  对应的矩阵为  $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ ;

(II) 若  $\alpha, \beta$  正交且均为单位向量, 证明  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  令随机变量  $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$

(I) 求  $Y$  的分布函数;

(II) 求概率  $P(X \leq Y)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中  $\theta$  为未知参数且大于零,  $X_1,$

$X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(I) 求  $\theta$  的矩估计量;

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量.

## 2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求.)

(1) 曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  的渐近线条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[ ]

(2) 设函数  $y(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ , 其中  $n$  是正整数, 则  $y'(0) =$

- (A)  $(-1)^{n-1}(n-1)!$ . (B)  $(-1)^n(n-1)!$ .  
(C)  $(-1)^{n-1}n!$ . (D)  $(-1)^nn!$ .

[ ]

(3) 如果函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在, 则  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微.

(B) 若极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在, 则  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微.

(C) 若  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微, 则极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在.

(D) 若  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微, 则极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在.

[ ]

(4) 设  $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$  ( $k = 1, 2, 3$ ), 则有

- (A)  $I_1 < I_2 < I_3$ . (B)  $I_3 < I_2 < I_1$ . (C)  $I_2 < I_3 < I_1$ . (D)  $I_2 < I_1 < I_3$ .

[ ]

(5) 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意常

数, 则下列向量组线性相关的为

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ . (C)  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ . (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

[ ]

(6) 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $P$  为 3 阶可逆矩阵, 且  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^{-1}AQ =$

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  (C)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  (D)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  [ ]

(7) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则  $P(X < Y) =$

(A)  $\frac{1}{5}$ . (B)  $\frac{1}{3}$ . (C)  $\frac{2}{5}$ . (D)  $\frac{4}{5}$ . [ ]

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

(A) 1. (B)  $\frac{1}{2}$ . (C)  $-\frac{1}{2}$ . (D) -1. [ ]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 若函数  $f(x)$  满足方程  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  及  $f''(x) + f(x) = 2e^x$ , 则  $f(x) =$

\_\_\_\_\_.

(10)  $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(11)  $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , 则  $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$

\_\_\_\_\_.

(13) 设  $\mathbf{x}$  为三维单位列向量,  $\mathbf{E}$  为三阶单位矩阵, 则矩阵  $\mathbf{E} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  的秩为

\_\_\_\_\_.

(14) 设  $A, B, C$  是随机事件,  $A$  与  $C$  互不相容,  $P(AB) = \frac{1}{2}$ ,  $P(C) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(AB | \bar{C}) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

证明  $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1)$ .

(16) (本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$  的极值.

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$  的收敛域及和函数.

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线  $L: \begin{cases} x=f(t), \\ y=\cos t \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$ , 其中函数  $f(t)$  具有连续导数, 且  $f(0)=0$ ,  $f'(t) > 0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ . 若曲线  $L$  的切线与  $x$  轴交点到切点的距离恒为 1, 求函数  $f(t)$  的表达式, 并求曲线  $L$  与  $x$  轴、 $y$  轴为边界的无界区域的面积.

(19) (本题满分 10 分)

已知  $L$  是第一象限中从点  $(0, 0)$  沿圆周  $x^2 + y^2 = 2x$  到点  $(2, 0)$ , 再沿圆周  $x^2 + y^2 = 4$  到点  $(0, 2)$  的曲线段, 计算曲线积分

$$J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy.$$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 计算行列式  $|A|$ ;

(II) 当实数  $a$  为何值时, 方程组  $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$  有无穷多解, 并求其通解.

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ 及二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (A^T A) \mathbf{x} \text{ 的秩为 } 2.$$

(I) 求实数  $a$  的值;

(II) 求正交变换  $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ , 它将  $f$  化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求  $P(X=2Y)$ ;

(II) 求  $\text{Cov}(X-Y, Y)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立且分别服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  与  $N(\mu, 2\sigma^2)$ , 其中  $\sigma$

是未知参数且  $\sigma > 0$ . 设  $Z = X - Y$ .

( I ) 求  $Z$  的概率密度  $f(z, \sigma^2)$ ;

( II ) 设  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  为来自总体  $Z$  的简单随机样本, 求  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$ ;

( III ) 证明  $\hat{\sigma}^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计量.

## 2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求.)

(1) 曲线  $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$  的拐点是

- (A) (1, 0). (B) (2, 0). (C) (3, 0). (D) (4, 0).

[ ]

(2) 设数列  $\{a_n\}$  单调减少,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 无界, 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的收敛域为

- (A)  $(-1, 1]$ . (B)  $[-1, 1)$ . (C)  $[0, 2)$ . (D)  $(0, 2]$ .

[ ]

(3) 设函数  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $f(x) > 0$ ,  $f'(0) = 0$ , 则函数  $z = f(x) \ln f(y)$  在点  $(0, 0)$  处取得极小值的一个充分条件是

- (A)  $f(0) > 1$ ,  $f''(0) > 0$ . (B)  $f(0) > 1$ ,  $f''(0) < 0$ .  
(C)  $f(0) < 1$ ,  $f''(0) > 0$ . (D)  $f(0) < 1$ ,  $f''(0) < 0$ .

[ ]

(4) 设  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$ ,  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$ ,  $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ , 则  $I, J, K$  的大小关系是

- (A)  $I < J < K$ . (B)  $I < K < J$ . (C)  $J < I < K$ . (D)  $K < J < I$ .

[ ]

(5) 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第 2 列加到第 1 列得矩阵  $B$ , 再交换  $B$  的第 2 行与第 3

行得单位矩阵, 记  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A =$

- (A)  $P_1 P_2$ . (B)  $P_1^{-1} P_2$ . (C)  $P_2 P_1$ . (D)  $P_2 P_1^{-1}$ .

[ ]

(6) 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  是 4 阶矩阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 若  $(1, 0, 1, 0)^T$  是方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 则  $A^*x = 0$  的基础解系可为

- (A)  $\alpha_1, \alpha_3$ . (B)  $\alpha_1, \alpha_2$ . (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

[ ]

(7) 设  $F_1(x), F_2(x)$  为两个分布函数, 其相应的概率密度  $f_1(x), f_2(x)$  是连续函数, 则必为概率密度的是

- (A)  $f_1(x)f_2(x)$ . (B)  $2f_2(x)F_1(x)$ .  
(C)  $f_1(x)F_2(x)$ . (D)  $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ .

[ ]

(8) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $EX$  与  $EY$  存在, 记  $U = \max\{X, Y\}$ ,  $V = \min\{X, Y\}$ , 则  $E(UV) =$

- (A)  $EU \cdot EV$ . (B)  $EX \cdot EY$ . (C)  $EU \cdot EY$ . (D)  $EX \cdot EV$ .

[ ]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 曲线  $y = \int_0^x \tan t dt$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) 的弧长  $s =$  \_\_\_\_\_.

(10) 微分方程  $y' + y = e^{-x} \cos x$  满足条件  $y(0) = 0$  的解为  $y =$  \_\_\_\_\_.

(11) 设函数  $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ , 则  $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $z = x + y$  的交线, 从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分  $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$  \_\_\_\_\_.

(13) 若二次曲面的方程  $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$  经正交变换化为  $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(\mu, \mu, \sigma^2, \sigma^2, 0)$ , 则  $E(XY^2) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x-1}}$ .

(16) (本题满分 9 分)

设函数  $z = f(xy, yg(x))$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 函数  $g(x)$  可导且在  $x=1$  处取得极值  $g(1)=1$ , 求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ .

(17) (本题满分 10 分)

求方程  $k \arctan x - x = 0$  不同实根的个数, 其中  $k$  为参数.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 证明: 对任意的正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$  成立.

(II) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$  ( $n=1, 2, \cdots$ ), 证明数列  $\{a_n\}$  收敛.

(19) (本题满分 11 分)

已知函数  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且  $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$ , 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$



计算二重积分  $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$ .

(20) (本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示.

(I) 求  $a$  的值;

(II) 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

(21) (本题满分 11 分)

$A$  为三阶实对称矩阵,  $A$  的秩为 2, 即  $r(A)=2$ , 且  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

求 (I)  $A$  的特征值与特征向量;

(II) 矩阵  $A$ .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1	$Y$	-1	0	1
$P$	1/3	2/3	$P$	1/3	1/3	1/3

且  $P(X^2 = Y^2) = 1$ .

(I) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

(II) 求  $Z = XY$  的概率分布;

(III) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

(23) (本题满分 11 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu_0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 其中  $\mu_0$  已知,  $\sigma^2 > 0$  未知,  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$ ;

(II) 计算  $E(\hat{\sigma}^2)$  和  $D(\hat{\sigma}^2)$ .

## 2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合试题要求.)

(1) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

- (A) 1. (B) e. (C)  $e^{a-b}$ . (D)  $e^{b-a}$ .

[ ]

(2) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$  确定, 其中  $F$  为可微函数, 且  $F'_2 \neq 0$ ,

则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A)  $x$ . (B)  $z$ . (C)  $-x$ . (D)  $-z$ .

[ ]

(3) 设  $m, n$  均是正整数, 则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  的收敛性

- (A) 仅与  $m$  的取值有关. (B) 仅与  $n$  的取值有关.  
(C) 与  $m, n$  的取值都有关. (D) 与  $m, n$  的取值都无关.

[ ]

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

- (A)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ . (B)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ .  
(C)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ . (D)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ .

[ ]

(5) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $E$  为  $m$  阶单位矩阵. 若  $AB = E$ , 则

- (A) 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = m$ . (B) 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = n$ .  
(C) 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = m$ . (D) 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = n$ .

[ ]

(6) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ . 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

[ ]

$$(7) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases} \text{ 则 } P(X=1) =$$

$$(A) 0. \quad (B) \frac{1}{2}. \quad (C) \frac{1}{2} - e^{-1}. \quad (D) 1 - e^{-1}.$$

[ ]

(8) 设  $f_1(x)$  为标准正态分布的概率密度,  $f_2(x)$  为  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则  $a, b$  应满足

$$(A) 2a + 3b = 4. \quad (B) 3a + 2b = 4. \\ (C) a + b = 1. \quad (D) a + b = 2.$$

[ ]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

$$(9) \text{ 设 } \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1 + u^2) du, \end{cases} \text{ 则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(11) 已知曲线  $L$  的方程为  $y = 1 - |x|$  ( $x \in [-1, 1]$ ), 起点为  $(-1, 0)$ , 终点为  $(1, 0)$ , 则曲线积分  $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ , 则  $\Omega$  的形心的纵坐标  $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设  $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$ . 若由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  生成的向量空间的维数为 2, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P(X=k) = \frac{C}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 则  $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(第 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$  的通解.

(16) (本题满分 10 分)

求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值.

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由;

(II) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设  $P$  为椭球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$  上的动点, 若  $S$  在点  $P$  处的切平面与  $xOy$  面垂直, 求点  $P$  的轨迹  $C$ , 并计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$ , 其中  $\Sigma$  是椭球面  $S$  位于曲线  $C$  上方的部分.

(20) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . 已知线性方程组  $Ax = b$  存在两个不同的解.

(I) 求  $\lambda, a$ ;

(II) 求方程组  $Ax = b$  的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 且  $Q$  的第 3 列为  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ .

(I) 求矩阵  $A$ ;

(II) 证明  $A + E$  为正定矩阵, 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数  $A$  及条件概率密度  $f_Y|_X(y|x)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率分布为

$X$	1	2	3
$P$	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	$\theta^2$

其中参数  $\theta \in (0, 1)$  未知. 以  $N_i$  表示来自总体  $X$  的简单随机样本 (样本容量为  $n$ ) 中等于  $i$  的个数 ( $i = 1, 2, 3$ ). 试求常数  $a_1, a_2, a_3$ , 使  $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$  为  $\theta$  的无偏估计量, 并求  $T$  的方差.

## 2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合试题要求.)

(1) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  是等价无穷小, 则

(A)  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ .

(B)  $a = 1, b = \frac{1}{6}$ .

(C)  $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ .

(D)  $a = -1, b = \frac{1}{6}$ .

[      ]

(2) 如右图所示, 正方形  $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  被其对角线划分为四个区域  $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$ ,  $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$ , 则  $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

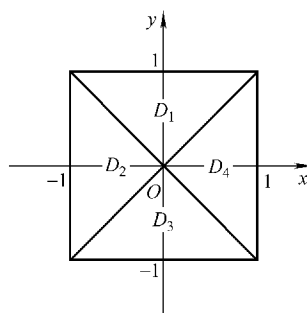
(A)  $I_1$ .

(B)  $I_2$ .

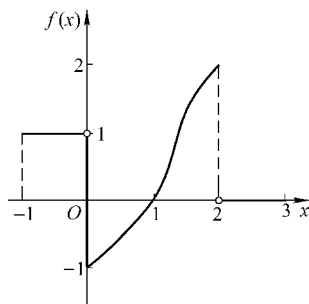
(C)  $I_3$ .

(D)  $I_4$ .

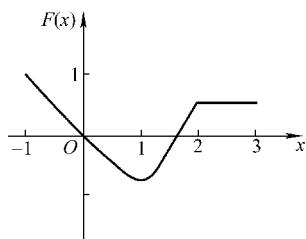
[      ]



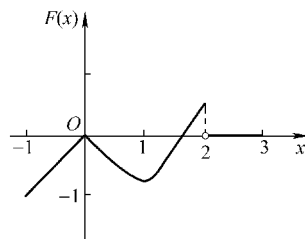
(3) 设函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 3]$  上的图形为



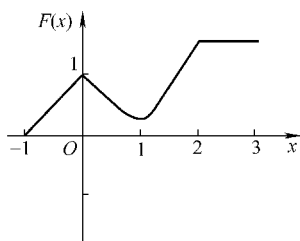
则函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的图形为



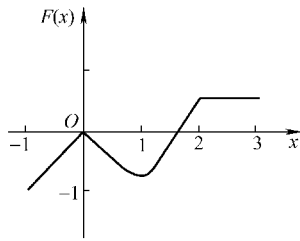
(A)



(B)



(C)



(D)

[ ]

(4) 设有两个数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则

(A) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

(B) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  发散.

(C) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  收敛.

(D) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  发散.

[ ]

(5) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是 3 维向量空间  $\mathbf{R}^3$  的一组基, 则由基  $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$  到基  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  的过渡矩阵为

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

(C)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

(D)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

[ ]

(6) 设  $A, B$  均为 2 阶矩阵,  $A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵, 若  $|A| = 2, |B| = 3$ , 则分块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵为

(A)  $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}.$

(B)  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$

(C)  $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}.$

(D)  $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}.$

[ ]

(7) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布的分布函数, 则  $EX =$

- (A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

[ ]

(8) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X$  服从标准正态分布  $N(0, 1)$ ,  $Y$  的概率分布为  $P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$ . 记  $F_Z(z)$  为随机变量  $Z=XY$  的分布函数, 则函数  $F_Z(z)$  的间断点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[ ]

## 二、填空题(第9~14小题, 每小题4分, 共24分.)

(9) 设函数  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数,  $z=f(x, xy)$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^x$ , 则非齐次方程  $y'' + ay' + by = x$  满足条件  $y(0)=2, y'(0)=0$  的解为  $y =$  \_\_\_\_\_.

(11) 已知曲线  $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$ , 则  $\int_L x ds =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , 则  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$  \_\_\_\_\_.

(13) 若3维列向量  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha^T \beta = 2$ , 其中  $\alpha^T$  为  $\alpha$  的转置, 则矩阵  $\beta \alpha^T$  的非零特征值为\_\_\_\_\_.

(14) 设  $X_1, X_2, \dots, X_m$  为来自二项分布总体  $B(n, p)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别为样本均值和样本方差. 若  $\bar{X} + kS^2$  为  $np^2$  的无偏估计量, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题(第15~23小题, 共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分9分)

求二元函数  $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$  的极值.

(16) (本题满分9分)

设  $a_n$  为曲线  $y = x^n$  与  $y = x^{n+1} (n=1, 2, \dots)$  所围成区域的面积, 记  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ , 求  $S_1$  与  $S_2$  的值.

(17) (本题满分11分)

椭圆面  $S_1$  由椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  绕  $x$  轴旋转而成, 圆锥面  $S_2$  由过点  $(4, 0)$  且与椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  相切的直线绕  $x$  轴旋转而成.

(I) 求  $S_1$  及  $S_2$  的方程;

(II) 求  $S_1$  与  $S_2$  之间的立体体积.

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ ;

(II) 证明: 若函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 在  $(0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 则  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

(19) (本题满分 10 分)

计算曲面积分  $I = \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$  的外侧.

(20) (本题满分 11 分)

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(I) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1$ ,  $A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2, \xi_3$ ;

(II) 对 (I) 中的任意向量  $\xi_2, \xi_3$ , 证明  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(I) 求二次型  $f$  的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以  $X, Y, Z$  分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求  $P(X=1 | Z=0)$ ;

(II) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中参数  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本.

(I) 求参数  $\lambda$  的矩估计量;

(II) 求参数  $\lambda$  的最大似然估计量.



## 2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 设函数  $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$ , 则  $f'(x)$  的零点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[ ]

(2) 函数  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$  在点  $(0, 1)$  处的梯度等于

- (A)  $i$ . (B)  $-i$ . (C)  $j$ . (D)  $-j$ .

[ ]

(3) 在下列微分方程中, 以  $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$  ( $C_1, C_2, C_3$  为任意常数) 为通解的是

- (A)  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ . (B)  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$ .  
(C)  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ . (D)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ .

[ ]

(4) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  为数列, 下列命题正确的是

- (A) 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛. (B) 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛.  
(C) 若  $\{f(x_n)\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  收敛. (D) 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  收敛.

[ ]

(5) 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵. 若  $A^3 = O$ , 则

- (A)  $E - A$  不可逆,  $E + A$  不可逆. (B)  $E - A$  不可逆,  $E + A$  可逆.  
(C)  $E - A$  可逆,  $E + A$  可逆. (D)  $E - A$  可逆,  $E + A$  不可逆.

[ ]

(6) 设  $A$  为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程

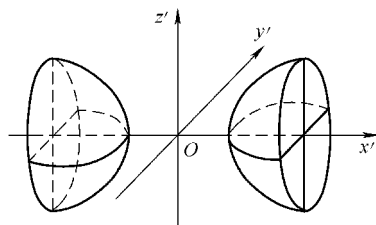
$$(x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

在正交变换下的标准方程的图形如右图所示, 则  $A$  的正特征值的个数为

- (A) 0. (B) 1.  
(C) 2. (D) 3.

[ ]

(7) 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 且  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $Z = \max\{X, Y\}$  的分布函数为



- (A)  $F^2(x)$ . (B)  $F(x)F(y)$ .  
 (C)  $1 - [1 - F(x)]^2$ . (D)  $[1 - F(x)][1 - F(y)]$ .

[ ]

(8) 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 4)$ , 且相关系数  $\rho_{XY} = 1$ , 则

- (A)  $P(Y = -2X - 1) = 1$ . (B)  $P(Y = 2X - 1) = 1$ .  
 (C)  $P(Y = -2X + 1) = 1$ . (D)  $P(Y = 2X + 1) = 1$ .

[ ]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 微分方程  $xy' + y = 0$  满足条件  $y(1) = 1$  的解是  $y =$  \_\_\_\_\_.

(10) 曲线  $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程是 \_\_\_\_\_.

(11) 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$  在  $x = 0$  处收敛, 在  $x = -4$  处发散, 则幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$  的收敛域为 \_\_\_\_\_.

(12) 设曲面  $\Sigma$  是  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  的上侧, 则  $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy =$  \_\_\_\_\_.

(13) 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为线性无关的 2 维列向量,  $A\alpha_1 = 0$ ,  $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , 则  $A$  的非零特征值为 \_\_\_\_\_.

(14) 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的泊松分布, 则  $P(X = E(X^2)) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$ .

(16) (本题满分 9 分)

计算曲线积分  $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$ , 其中  $L$  是曲线  $y = \sin x$  上从点  $(0, 0)$  到点  $(\pi, 0)$  的一段.

(17) (本题满分 11 分)

已知曲线  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5, \end{cases}$  求  $C$  上距离  $xOy$  面最远的点和最近的点.

(18) (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  是连续函数,

(I) 利用定义证明函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  可导, 且  $F'(x) = f(x)$ ;

(II) 当  $f(x)$  是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数  $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$  也是以 2 为周期的周期函数.

(19) (本题满分 11 分)

将函数  $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$  展开成余弦级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  的和.

(20) (本题满分 10 分)

设  $\alpha, \beta$  为 3 维列向量, 矩阵  $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ , 其中  $\alpha^T, \beta^T$  分别是  $\alpha, \beta$  的转置. 证明:

(I) 秩  $r(A) \leq 2$ ;

(II) 若  $\alpha, \beta$  线性相关, 则秩  $r(A) < 2$ .

(21) (本题满分 12 分)

设  $n$  元线性方程组  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式  $|A| = (n+1)a^n$ ;

(II) 当  $a$  为何值时, 该方程组有唯一解, 并求  $x_1$ ;

(III) 当  $a$  为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  的概率分布为  $P(X=i) = \frac{1}{3} (i = -1, 0, 1)$ ,  $Y$  的概

率密度为  $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  记  $Z = X + Y$ .

(I) 求  $P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right)$ ;

(II) 求  $Z$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明  $T$  是  $\mu^2$  的无偏估计量;

(II) 当  $\mu=0, \sigma=1$  时, 求  $DT$ .

## 2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1 ~ 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.)

(1) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是

- (A)  $1 - e^{\sqrt{x}}$ .      (B)  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ .      (C)  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ .      (D)  $1 - \cos \sqrt{x}$ .

[      ]

(2) 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  的渐近线的条数为

- (A) 0.      (B) 1.      (C) 2.      (D) 3.

[      ]

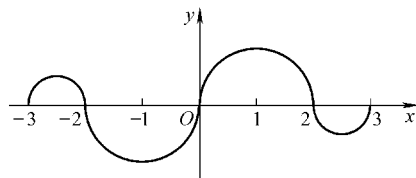
(3) 如下图所示, 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2]$ ,  $[2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2, 0]$ ,  $[0, 2]$  上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则下列结论正确的是

(A)  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ .

(B)  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$ .

(C)  $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ .

(D)  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$ .



[      ]

(4) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 下列命题错误的是

(A) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ .

(B) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$ .

(C) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.

(D) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.

[      ]

(5) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $f''(x) > 0$ , 令  $u_n = f(n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则下列结论正确的是

(A) 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛.

(B) 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散.

- (C) 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛. (D) 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散.

[ ]

(6) 设曲线  $L: f(x, y)=1$  ( $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数) 过第二象限内的点  $M$  和第四象限内的点  $N$ ,  $\Gamma$  为  $L$  上从点  $M$  到点  $N$  的一段弧, 则下列积分小于零的是

- (A)  $\int_{\Gamma} f(x, y) dx$ . (B)  $\int_{\Gamma} f(x, y) dy$ .  
(C)  $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ . (D)  $\int_{\Gamma} f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$ .

[ ]

(7) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是

- (A)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ . (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ .  
(C)  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ . (D)  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$ .

[ ]

(8) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  与  $B$

- (A) 合同, 且相似. (B) 合同, 但不相似.  
(C) 不合同, 但相似. (D) 既不合同, 也不相似.

[ ]

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

- (A)  $3p(1-p)^2$ . (B)  $6p(1-p)^2$ . (C)  $3p^2(1-p)^2$ . (D)  $6p^2(1-p)^2$ .

[ ]

(10) 设随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且  $X$  与  $Y$  不相关,  $f_X(x), f_Y(y)$  分别表示  $X, Y$  的概率密度, 则在  $Y=y$  的条件下,  $X$  的条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$  为

- (A)  $f_X(x)$ . (B)  $f_Y(y)$ . (C)  $f_X(x)f_Y(y)$ . (D)  $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$ .

[ ]

二、填空题 (第 11 ~ 16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(11)  $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $f(u, v)$  为二元可微函数,  $z = f(x^y, y^x)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_.

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$  的通解为  $y =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设曲线  $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$ , 则  $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS =$  \_\_\_\_\_.

(15) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为 \_\_\_\_\_.

(16) 在区间  $(0, 1)$  中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于  $\frac{1}{2}$  的概率为

三、解答题(第 17 ~ 24 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 11 分)

求函数  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$  在区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$  上的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy,$$

其中  $\Sigma$  为曲面  $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的上侧.

(19) (本题满分 11 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值,  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

(20) (本题满分 10 分)

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  内收敛, 其和函数  $y(x)$  满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(I) 证明  $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$ ;

(II) 求  $y(x)$  的表达式.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + a x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ , 且  $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$  是  $A$  的属于  $\lambda_1$  的一个特征向量. 记  $B = A^5 - 4A^3 + E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的特征向量, 并求  $B$  的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵  $B$ .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

( I ) 求  $P(X > 2Y)$ ;

( II ) 求  $Z = X + Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

(24) ( 本题满分 11 分 )

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中参数  $\theta (0 < \theta < 1)$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  是样本均值.

( I ) 求参数  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ ;

( II ) 判断  $4\bar{X}^2$  是否为  $\theta^2$  的无偏估计量, 并说明理由.

## 2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、填空题(第 1~6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 微分方程  $y' = \frac{y(1-x)}{x}$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$  的下侧, 则  $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy$   
=  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 点  $(2, 1, 0)$  到平面  $3x + 4y + 5z = 0$  的距离  $d = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为二阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则  $|B| =$   
 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布, 则  $P(\max\{X, Y\} \leq 1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(第 7~14 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.)

(7) 设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  处的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分, 若  $\Delta x > 0$ , 则

(A)  $0 < dy < \Delta y$ . (B)  $0 < \Delta y < dy$ . (C)  $\Delta y < dy < 0$ . (D)  $dy < \Delta y < 0$ .

[ ]

(8) 设  $f(x, y)$  为连续函数, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  等于

(A)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(B)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(C)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(D)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

[ ]

(9) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛.

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛.

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$  收敛.

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  收敛.

[ ]

(10) 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ . 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$



在约束条件  $\varphi(x, y)=0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若  $f'_x(x_0, y_0)=0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0)=0$ .  
 (B) 若  $f'_x(x_0, y_0)=0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .  
 (C) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0)=0$ .  
 (D) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

[ ]

(11) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均为  $n$  维列向量,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 下列选项正确的是

- (A) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关.  
 (B) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关.  
 (C) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关.  
 (D) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关.

[ ]

(12) 设  $A$  为三阶矩阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第 1 列的  $-1$  倍加

到第 2 列得  $C$ , 记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则

- (A)  $C = P^{-1}AP$ . (B)  $C = PAP^{-1}$ .  
 (C)  $C = P^TAP$ . (D)  $C = PAP^T$ .

[ ]

(13) 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(B) > 0$ ,  $P(A|B)=1$ , 则必有

- (A)  $P(A \cup B) > P(A)$ . (B)  $P(A \cup B) > P(B)$ .  
 (C)  $P(A \cup B) = P(A)$ . (D)  $P(A \cup B) = P(B)$ .

[ ]

(14) 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y$  服从正态分布  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且

$$P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1),$$

则必有

- (A)  $\sigma_1 < \sigma_2$ . (B)  $\sigma_1 > \sigma_2$ . (C)  $\mu_1 < \mu_2$ . (D)  $\mu_1 > \mu_2$ .

[ ]

三、解答题(第 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ , 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

(16) (本题满分 12 分)

设数列  $\{x_n\}$  满足  $0 < x_1 < \pi$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

(I) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限;

(II) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ .

(17) (本题满分 12 分)

将函数  $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$  展开成  $x$  的幂级数.

(18) (本题满分 12 分)

设函数  $f(u)$  在  $(0, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ ;

(II) 若  $f(1)=0$ ,  $f'(1)=1$ , 求函数  $f(u)$  的表达式.

(19) (本题满分 12 分)

设在上半平面  $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$  内, 函数  $f(x, y)$  具有连续偏导数, 且对任意的  $t > 0$  都有  $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ . 证明: 对  $D$  内的任意分段光滑的有向简单闭曲线  $L$ , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

(20) (本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解

(I) 证明方程组系数矩阵  $A$  的秩  $r(A)=2$ ;

(II) 求  $a, b$  的值及方程组的通解.

(21) (本题满分 9 分)

设三阶实对称矩阵  $A$  的各行元素之和均为 3, 向量  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $Ax = 0$  的两个解.

(I) 求  $A$  的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵  $Q$  和对角矩阵  $\Lambda$ , 使得  $Q^T A Q = \Lambda$ .

(22) (本题满分 9 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

令  $Y = X^2$ ,  $F(x, y)$  为二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数. 求:

(I)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ;

(II)  $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ .

(23) (本题满分 9 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中  $\theta$  是未知参数 ( $0 < \theta < 1$ ).  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 记  $N$  为样本值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中小于 1 的个数. 求  $\theta$  的最大似然估计量.

## **B 十年真题精讲**

## 2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

#### (1) C

**分析** 从  $f''(x)$  的零点与不存在点入手, 确定曲线  $y=f(x)$  的拐点个数.

**精解** 由于  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f''(x)$  仅有两个零点  $x_1$  和  $x_2$  (其中  $x_1 < 0 < x_2$ ) 以及  $f''(0)$  不存在, 所以  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$  和  $(0, f(0))$  都是曲线  $y=f(x)$  的可能拐点.

由于在点  $x=x_1$  的两侧邻近,  $f''(x)$  不变号; 在点  $x=x_2$  与点  $x=0$  的两侧邻近,  $f''(x)$  都变号, 故曲线  $y=f(x)$  有且仅有拐点  $(x_2, f(x_2))$  和  $(0, f(0))$ .

因此本题选(C).

**附注** 设函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则曲线  $y=f(x)$  的拐点可按以下步骤计算:

(1) 计算  $f''(x)$ , 并寻找  $f''(x)$  的零点与不存在点, 设为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

(2) 如果在点  $x_i$  两侧邻近,  $f''(x_i)$  变号, 则  $(x_i, f(x_i))$  是曲线  $y=f(x)$  的一个拐点; 否则不是曲线  $y=f(x)$  的拐点 ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

#### (2) A

**分析** 先由  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$  确定

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1)$$

的两个线性无关的特解, 由此算出  $a, b$ . 此外  $y = xe^x$  是

$$y'' + ay' + by = ce^x \quad (2)$$

的一个特解, 由此可算出  $c$ .

**精解** 由  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}e^x + xe^x$  知, 式(1)有两个线性无关特解  $e^{2x}$  与  $e^x$ , 即  $\lambda = 2, 1$  是式(1)的特征方程

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (3)$$

的两个根, 从而  $a = -(2+1) = -3$ ,  $b = 2 \times 1 = 2$ .

将  $a = -3, b = 2$  代入式(2)得

$$y'' - 3y' + 2y = ce^x \quad (4)$$

由于  $xe^x$  是式(4)的一个特解, 所以有

$$(xe^x)'' - 3(xe^x)' + 2(xe^x) = ce^x,$$

即

$$(x+2)e^x - 3(x+1)e^x + 2xe^x = ce^x.$$

由此得到  $c = -1$ .

因此本题选(A).

**附注** 由  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$  知,  $e^{2x}, e^x$  或  $xe^x$  都有可能是式(1)的两个线性无关的特解. 如果  $e^x, xe^x$  是式(1)的两个特解, 则  $\frac{1}{2}e^{2x}$  是式(2)的特解, 这是不可能的. 故题解中首

先确定式(1)有两个线性无关特解  $e^{2x}$ ,  $e^x$ .

(3) B

**分析** 从考虑幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的收敛区间入手.

**精解** 引入幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ . (1)

由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  在点  $x=2$  处条件收敛, 可知式(1)的收敛半径为  $|2-1|=1$ , 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n(x-1)^n \quad (2)$$

收敛半径为 1. 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-1)^n$  在  $(0, 2)$  内收敛, 在  $[0, 2]$  外发散. 由此可知  $x=\sqrt{3}$  与  $x=3$  分别是式(2)的收敛点与发散点.

因此本题选(B).

**附注** 应记住以下结论:

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 则其逐项求导或逐项积分后的幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$  的收敛半径仍为  $R$ .

(4) B

**分析** 先画出  $D$  的概图, 然后用极坐标(先  $r$  后  $\theta$ )表示  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ .

**精解**  $D$  如图 B-15-1 的阴影部分所示, 所以在极坐标系下,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \end{aligned}$$

因此本题选(B).

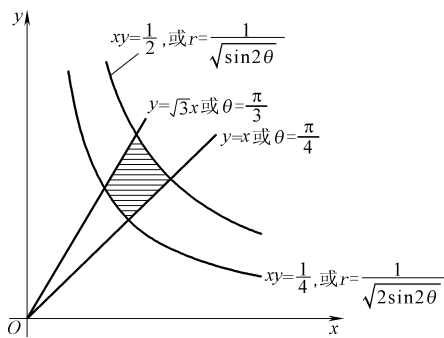


图 B-15-1

**附注** 对于二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 如果  $D$  是角域的一部分, 通常都利用极坐标计算这个二重积分, 即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

这里特别要注意的是  $dx dy = r dr d\theta$ , 而不是  $dx dy = dr d\theta$ .

(5) D

分析  $Ax=b$  有无穷多解的充分必要条件为  $r(\bar{A})=r(A)<3$ , 因此对  $Ax=b$  的增广矩阵  $A$  施行初等行变换即可得到正确选项.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \bar{A}=(A:b) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 3 & a^2-1 & d^2-1 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{array} \right). \end{aligned}$$

由此可知,  $Ax=b$  有无穷多解的充分必要条件  $r(\bar{A})=r(A)<3$ , 即为  $a=1$  或  $a=2$ , 并且  $d=1$  或  $d=2$ .

因此本题选(D).

**附注** 应记住非齐次线性方程组  $Ax=b$  (其中  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $b$  是  $m$  维列向量, 增广矩阵为  $\bar{A}$ ) 关于解的结论:

$Ax=b$  有无穷多解的充分必要条件是  $r(\bar{A})=r(A)<n$ ;

$Ax=b$  有唯一解的充分必要条件是  $r(\bar{A})=r(A)=n$ ;

$Ax=b$  无解的充分必要条件是  $r(\bar{A})>r(A)$ .

(6) A

分析 设  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$  (其中,  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $A$  是 3 阶实对称矩阵), 则由  $Ae_1 = 2e$ ,  $Ae_2 = e_2$ ,  $Ae_3 = -e_3$  即可算出对角矩阵  $Q^T A Q$ , 从而得到在正交变换  $x = Qy$  下的标准形.

$$\text{精解} \quad \text{由于 } P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \text{ 所以有}$$

$$Ae_1 = 2e_1, Ae_2 = e_2, Ae_3 = -e_3$$

从而

$$Ae_1 = 2e_1, A(-e_3) = -(-e_3), Ae_2 = e_2. \text{ 因此}$$

$$(e_1, -e_3, e_2)^T A (e_1, -e_3, e_2) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

故  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ .

因此本题选(A).

**附注** 本题也可解答如下:

$$\text{由于 } (e_1, e_2, e_3)^T A (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \text{ 此外,}$$

$$(e_1, e_2, e_3) \xrightarrow{\text{互换第2、3列}} (e_1, e_3, e_2) \xrightarrow{\text{第2列乘以}(-1)} (e_1, -e_3, e_2),$$

$$\text{即} (e_1, -e_3, e_2) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,  $Q^T A Q = (e_1, -e_3, e_2)^T A (e_1, -e_3, e_2)$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T (e_1, e_2, e_3)^T A (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此, 在正交变换  $x = Qy$  下,  $f(x_1, x_2, x_3)$  的标准形为  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ .

(7) C

分析 利用  $P(AB) \leq P(A)$ ,  $P(AB) \leq P(B)$  即可得正确选项.

精解 由于  $P(AB) \leq P(A)$ ,  $P(AB) \leq P(B)$ , 所以

$$2P(AB) \leq P(A) + P(B), \text{ 即 } P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

因此本题(C).

**附注** 由上解答已证明选项(D)是不正确的. 下面用例子说明选项(A), (B)也是不正确的.

例1 设  $A=B$ , 且  $P(A) = \frac{1}{2}$ , 则  $P(AB) = P(A) = \frac{1}{2}$ , 但  $P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ , 所以选项(A)不正确.

例2 设  $AB = \emptyset$ ,  $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(AB) = 0$ , 而  $P(A)P(B) = \frac{1}{9}$ , 所以选项(B)也不正确.

(8) D

分析 首先算出  $E(XY)$ , 然后利用随机变量数字特征的性质, 计算  $E[X(X+Y-2)]$ .

精解 由于  $X$  与  $Y$  不相关, 所以  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , 即

$$E(XY) = EX \cdot EY = 2 \times 1 = 2,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E[X(X+Y-2)] &= E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2EX \\ &= DX + (EX)^2 + E(XY) - 2EX \\ &= 3 + 2^2 + 2 - 2 \times 2 = 5. \end{aligned}$$

因此本题选(D).



**附注** 设  $X, Y$  是随机变量, 则  $X$  与  $Y$  不相关时,  $Cov(x, y) = 0$ , 但  $X$  与  $Y$  未必相互独立.

## 二、填空题

(9)  $-\frac{1}{2}$

**分析** 对分子  $\ln \cos x$  用等价无穷小代替, 即可得所给极限的值.

**精解** 由于  $x \rightarrow 0$  时,

$$\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2,$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

**附注** 本题也可用洛必达法则计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(10)  $\frac{\pi^2}{4}$

**分析** 利用奇、偶函数在对称区间上的积分性质计算所给的定积分.

**精解** 由于  $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$  是奇函数,  $|x|$  是偶函数, 所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

**附注** 应记住以下公式: 对  $a > 0$ , 有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 是奇函数,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

如果  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则以上公式对  $a = +\infty$  也成立.

(11)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 1 - \sin x}{xy + e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy + e^z}$

**分析** 首先算出  $z|_{(0,1)} \stackrel{\text{记}}{=} z_0$ , 然后对所给方程两边求全微分, 并将  $x=0, y=1$  及  $z=z_0$  代入即得  $dz|_{(0,1)}$ .

**精解** 将  $x=0, y=1$  代入所给方程得

$$e^{z(0,1)} + 0 \times 1 \times z(0,1) + 0 + \cos 0 = 2,$$

即  $e^{z(0,1)} = 1$ , 所以  $z(0,1) = 0$ .

对所给方程两边求全微分得

$$e^z dz + yz dx + xz dy + xy dz + dx - \sin x dx = 0,$$

于是  $dz|_{(0,1)} = dz|_{(0,1,0)} = dx$ .

**附注**  $z = z(x, y)$  是隐函数. 由题解中的计算可知,

$$dz = -\frac{yz + 1 - \sin x}{xy + e^z} dx - \frac{xz}{xy + e^z} dy,$$

所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 1 - \sin x}{xy + e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy + e^z}.$

$$(12) \quad \frac{1}{4}$$

**分析** 利用积分区域的对称性可得  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 由此可以快速算出  $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz$ .

$$\text{精解} \quad \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} x dx dy dz + 2 \iiint_{\Omega} y dx dy dz + 3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz. \quad (1)$$

由于  $\iiint_{\Omega} (x - y) dx dy dz$  的积分区域  $\Omega$  关于平面  $x = y$  对称, 在对称点处  $x - y$  的值互为相反数, 所以  $\iiint_{\Omega} (x - y) dx dy dz = 0$ , 从而  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz$ . 同样可知,  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz, \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ .

将它们代入式(1)得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz \\ &= 6 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{1-x-y} z dz \quad (\text{其中 } D_{xy} = \{(x, y) \mid x + y < 1, x \geq 0, y \geq 0\} \\ &\quad \text{是 } \Omega \text{ 在 } xOy \text{ 平面上的投影}) \\ &= \iint_{D_{xy}} 3(1-x-y)^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 3(1-x-y)^2 dy \\ &= \int_0^1 -\left.(1-x-y)^3\right|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**附注** 题解中有两点值得注意:

(I) 利用积分区域的对称性将  $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz$  化简为  $6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 通常有以下公式:

设积分区域  $\Omega$  有某种对称性, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 在对称点处的值互为相反数,} \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 在对称点处的值彼此相等,} \end{cases}$$

其中  $\Omega_1$  是  $\Omega$  按其对称性划分成的两部分之一.

(II) 题解中的  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$  按“先后二”计算的, 它也可按“先二后一”计算:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^1 z dz \iint_{D_z} z dx dy \quad (\text{其中, } D_z = \{(x, y) \mid x+y \leq 1-z, x \geq 0, y \geq 0\} \text{ 是 } \Omega \text{ 的立} \\ &\quad \text{坐标为 } z \in [0, 1] \text{ 的截面在 } xOy \text{ 平面的投影}). \\ &= \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2}(1-z)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (z-2z^2+z^3) dz \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

(13)  $2^{n+1} - 2$

分析 记  $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$ , 将  $D_n$  按第一行展开得到一个递推式.

由此即可得到  $D_n$  的值.

**精解** 将  $D_n$  按第一行展开得

$$D_n = 2D_{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2.$$

由此递推式得

$$\begin{aligned}D_n &= 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 \\ &= 2^2(2D_{n-3} + 2) + 2^2 + 2 = 2^3 D_{n-3} + 2^3 + 2^2 + 2 \\ &= \cdots = 2^{n-3} D_3 + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2 \\ &= 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2 \\ &= \frac{2^{n+1} - 2}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2\end{aligned}$$

**附注**  $D_n$  也可以用数学归纳法计算.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 + 2^2 + 2 = 2^4 - 2,$$

$$\begin{aligned}D_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 2^5 - 2,\end{aligned}$$

由此可得  $D_n = 2^n + 2^{n-1} + 2 \cdots + 2 = \frac{2^{n+1} \cdot 2}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2.$

现用数学归纳法证明式(1).

当  $n=3, 4$  时, 式(1)正确.

设  $n=m$  时, 式(1)正确, 即  $D_m = 2^{m+1} - 1$ , 则将  $D_{m+1}$  按第一行展开得

$$\begin{aligned} D_{m+1} &= 2D_m + 2 \cdot (-1)^{m+2} \cdot (-1)^m = 2D_m + 2 \\ &= 2(2^{m+1} - 2) + 2 = 2^{(m+1)+1} - 2, \end{aligned}$$

即  $n=m+1$  时, 式(1)正确. 因此对  $n=3, 4, \dots$ , 式(1)正确.

$$(14) \quad \frac{1}{2}$$

分析 由  $(X, Y)$  的概率密度为  $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]}$  知

$$P(XY - Y < 0) = P((X-1)Y < 0) = \iint_{(x-1)y < 0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]} dx dy$$

由此即可算得这个概率.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad P(XY - Y < 0) &= \iint_{(x-1)y < 0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]} dx dy \\ &= \iint_{x_1 y_1 < 0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)} dx_1 dy_1 \left( \text{令} \begin{cases} x_1 = x-1 \\ y_1 = y \end{cases} \right) \\ &= P(X_1 Y_1 < 0) \quad (\text{其中 } (X_1, Y_1) \sim N(0, 0; 1, 1; 0)) \\ &= P((X_1, Y_1) \in \text{第II象限}) + P((X_1, Y_1) \in \text{第IV象限}). \quad (1) \end{aligned}$$

容易知道  $(X_1, Y_1)$  落在  $x_1 O y_1$  平面的各个象限的概率彼此相等, 所以  $P((X_1, Y_1) \in \text{第II象限}) = P((X_1, Y_1) \in \text{第IV象限}) = \frac{1}{4}$ . 将它们代入式(1)得

$$P(XY - Y < 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

附注 本题也可以按以下方法计算

由  $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$  知,  $X$  与  $Y$  相互独立, 且

$$X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1),$$

故  $X-1 \sim N(0, 1)$ , 且  $X-1$  与  $Y$  相互独立, 因此

$$\begin{aligned} P(XY - Y < 0) &= P((X-1)Y < 0) \\ &= P(X-1 < 0, Y > 0) + P(X-1 > 0, Y < 0) \\ &= P(X-1 < 0)P(Y > 0) + P(X-1 > 0)P(Y < 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 三、解答题

$$(15) \quad a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$$

分析 写出  $f(x)$  的带佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式, 即可由  $f(x) \sim kx^3 (x \rightarrow 0)$  求出  $a, b, k$  的值.

**精解** 由于  $f(x) = x + a\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + bx[x + o(x^2)]$

$$= (1+a)x + \left(-\frac{1}{2}a+b\right)x^2 + \frac{1}{3}ax^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0),$$

所以由  $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{kx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a)x + \left(-\frac{1}{2}a+b\right)x^2 + \frac{1}{3}ax^3 + o(x^3)}{kx^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a)x + \left(-\frac{1}{2}a+b\right)x^2}{kx^3} + \frac{a}{3k}$$

得  $\begin{cases} 1+a=0, \\ -\frac{1}{2}a+b=0, \\ a=3k, \end{cases} \quad \text{即 } a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}.$

**附注** 本题也可以按以下方法计算:

由  $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{kx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3}$

$$\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} \quad (1)$$

得  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x\right) = 0$ , 即  $1+a=0$ , 所以  $a=-1$ .

将  $a=-1$  代入式(1)得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{-1}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + (1+x)(b \sin x + bx \cos x)}{(1+x) \cdot 3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b \sin x + bx \cos x + bx \sin x + bx^2 \cos x}{3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b(x \sin x + x^2 \cos x)}{3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} + \frac{2b}{3k} \\ &\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2b \cos x - bx \sin x}{6kx} + \frac{2b}{3k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2b \cos x}{6kx} + \frac{2b}{3k}. \end{aligned} \quad (2)$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2b \cos x) = 0$ , 即  $b = -\frac{1}{2}$ . 将它代入式(2)得

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6kx} - \frac{1}{3k} = -\frac{1}{3k}, \quad \text{即 } k = -\frac{1}{3}.$$

$$(16) \quad f(x) = \frac{8}{4-x} (x \in I)$$

**分析** 画出曲线  $y=f(x)$  及  $D$  的图形, 由此得到  $f(x)$  的微分方程. 解此微分方程算出  $f(x)$  的表达式.

**精解** 由于  $f'(x) > 0 (x \in I)$ , 所以  $y=f(x)$  的图形如图 B-15-16 所示.  $y=f(x)$  在点  $C(x_0, f(x_0))$  处的切线方程为  $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ , 记该切线与  $x$  轴的交点为  $B$ , 则点  $B$  的横坐标为  $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ .

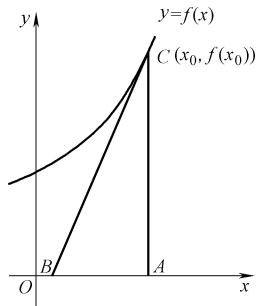


图 B-15-16

**证** 记直线  $x=x_0$  与  $x$  轴的交点为  $A$ , 则点  $A$  的横坐标为  $x_0$ . 于是  $D$  即为图中的  $\triangle ABC$ , 它的面积为

$$\frac{1}{2}f(x_0) \left[ x_0 - \left( x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right) \right] = \frac{f^2(x_0)}{2f'(x_0)}.$$

由题设得  $\frac{f^2(x_0)}{2f'(x_0)} = 4$ , 即  $\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} = \frac{1}{8}$ .

由于  $x_0$  是  $I$  上任意的点, 于是有微分方程  $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{8}$ . 它的通解数  $-\frac{1}{y} = \frac{1}{8}x + C$ . 将  $y(0) = f(0) = 2$  代入上式得  $C = -\frac{1}{2}$ . 所以有

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad y = \frac{8}{4-x}.$$

由此得到  $f(x)$  的表达式为  $f(x) = \frac{8}{4-x} (x \in I)$ .

**附注** 画曲线  $y=f(x)$  的图形时, 应注意题设  $f'(x) > 0 (x \in I)$ .

(17) 3

**分析** 本题实质上是计算  $|\text{grad}f(x, y)|$  在约束条件  $x^2 + y^2 + xy = 3$  下的最大值, 可采用拉格朗日乘数法.

**精解**  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处的最大方向导数为

$$\begin{aligned} |\text{grad}f(x, y)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right| \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{(1+y)^2 + (1+x)^2} \\ &= \sqrt{2+2x+2y+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

于是,  $f(x, y)$  在  $C$  上的最大方向导即为  $\varphi(x, y) = 2+2x+2y+x^2+y^2$  在约束条件  $x^2+y^2+xy=3$  下的最大值  $M$  的平方根.

现用拉格朗日乘数法计算  $M$ .

记  $g(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3) = 2 + 2x + 2y + x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$ ,

则  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2 + 2x + \lambda(2x + y)$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} = 2 + 2y + \lambda(2y + x)$ .

由拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ x^2 + y^2 + xy = 3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2 + 2x + \lambda(2x + y) = 0, \\ 2 + 2y + \lambda(2y + x) = 0, \\ x^2 + y^2 + xy = 3. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

式(1) - 式(2)得  $(x - y)(2 + \lambda) = 0$ , 所以  $y = x$  或  $\lambda = -1$ .

将  $y = x$  代入式(3)得  $x = -1, 1$ , 对应地  $y = -1, 1$ .

将  $\lambda = -2$  代入式(1)或式(2)得  $y = 1 - x$ . 将它代入式(3)得  $x^2 - x - 2 = 0$ , 即  $x = -1, 2$ , 对应地  $y = 2, -1$ .

于是,  $g$  的可能极值点为  $M_1 = (-1, -1)$ ,  $M_2 = (1, 1)$ ,  $M_3 = (-1, 2)$ ,  $M_4 = (2, -1)$ .

由于  $\varphi|_{M_1} = 0$ ,  $\varphi|_{M_2} = 8$ ,  $\varphi|_{M_1} = \varphi|_{M_4} = 9$ , 所以  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的最大方向导数为  $|\mathbf{grad}f(x, y)||_{M_3} = |\mathbf{grad}f(x, y)||_{M_4} = \sqrt{9} = 3$ .

**附注** 应记住, 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处方向导数的最大值为  $|\mathbf{grad}f(x, y)|$ . 于是

计算  $f(x, y)$  方向导数最大值, 就是计算  $|\mathbf{grad}f(x, y)|$  的最大值 (无条件极值问题);

计算  $f(x, y)$  方向导数在曲线  $C$  上的最大值, 就是计算  $|\mathbf{grad}f(x, y)|$  在曲线  $C$  的方程为约束条件下的最大值 (条件极值).

$$(18) \quad f'(x) = u_1'(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n'(x).$$

**分析** (I) 利用导数定义证明, 并注意当某个函数在点  $x$  处可导时, 必在点  $x$  处连续.

(II) 利用(I)的结论写出  $f'(x)$ .

**精解** (I) 由于  $u(x), v(x)$  可导, 所以有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x),$$

并且  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$  (可导必连续), 因此

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

(II) 利用(I)得到的结论得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{u_1(x) \cdot [u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)]\}' \\ &= u_1'(x)[u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x)] + u_1(x)\{u_2(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)]\}' \\ &= u_1'(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)\{u_2'(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)] + u_2(x)[u_3(x)\cdots u_n'(x)]\}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_1'(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)]' \\
&= \cdots \\
&= u_1'(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n'(x).
\end{aligned}$$

**附注** 应记住高等数学中一些重要定理、公式的证明.

$$(19) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

**分析** 将  $L$  的方程改写成参数方程, 并确定起、终点的参数, 然后将参数方程代入所给的曲线积分, 将其转化成定积分, 计算之, 即得  $I$  的值.

**精解** 由于  $L$  在  $xOy$  平面上的投影  $L_1: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 (x \geq 0)$ , 起、终点分别为  $(0, \sqrt{2})$  与  $(0, -\sqrt{2})$ , 参数方程为  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ , 其起、终点参数分别为  $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ . 所以  $L$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t, \text{ 其起、终点的参数分别为 } \frac{\pi}{2} \text{ 与 } -\frac{\pi}{2}. \\ z = \cos t, \end{cases}$$

将  $L$  的参数方程代入  $I$  得

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} [(\sqrt{2}\sin t + \cos t)(-\sin t) + (\cos^2 t - \cos^2 t + \sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\cos t + (\cos^2 t + 2\sin^2 t)(-\sin t)] dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{2}\sin^2 t + \sin t \cos t - \sin t - \sin^3 t) dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -\sqrt{2}\sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

**附注** 由于  $L$  是平面  $z=x$  上的曲线, 所以  $I$  也可用以下方法计算:

$$\begin{aligned}
I &= \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz \\
&\stackrel{z=x \text{ 代入}}{=} \int_{L_1} (y+x)dx + ydy + (x^2 + y^2)dx \quad (\text{其中 } L_1 \text{ 如题解中所示}) \\
&= \int_{L_1} d\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + (y+y^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{(0,\sqrt{2})}^{(0,-\sqrt{2})} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\sin t + 2\sin^2 t)(-\sin t) dt \\
&= -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

(20) **分析** (I) 只要证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关即可.

(II) 设  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标为  $x_1, x_2, x_3$ , 则由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



入手, 确定  $k$  的值, 并求出所有的  $x_1, x_2, x_3$ .

精解 (I) 由

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

知,  $|(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix}$ . 由于  $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \neq 0$  (这是因为

为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是一个基, 它们线性无关), 并且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以  $|(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| \neq 0$ , 即  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关, 从而是  $\mathbf{R}^3$  的一个基.

(II) 设  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标为  $x_1, x_2, x_3$ , 即

$$\xi = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3, \quad (2)$$

则由题设得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{式(1)代入}),$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{由此得到齐次线性方程组}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

要使  $\xi$  存在, 必须式(3)有非零解, 因此  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0$ , 即  $k=0$ .

将  $k=0$  代入式(3)得  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ , 它的通解为

$(x_1, x_2, x_3)^T = c(1, 0, -1)^T$ , 即  $x_1 = c, x_2 = 0, x_3 = -c$ . 将它的代入式(2), 得所有的  $\xi$  为  $\xi = c\alpha_1 - c\alpha_3$ , 其中  $c$  是任意常数.

附注 当确认  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是一个基以后, 式(1)中的矩阵  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$  称为从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵.

(21) 分析 (I) 利用矩阵相似性质确定  $a, b$ .

(II) 将(I)中算得的  $a$  值代入  $A$  后, 将其相似对角化, 即可得到  $P$ .

精解 (I) 由于  $A \sim B$ , 所以有

$$\begin{cases} \text{tr}A = \text{tr}B, \\ |A| = |B|, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 3 + a = 2 + b, \\ -3 + 2a = b. \end{cases}$$

由此得到  $a=4, b=5$ .

$$(II) \text{ 将 } a=2 \text{ 代入 } A \text{ 得 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } |\lambda E_3 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 3 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 3 & 3 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 (\lambda - 5) \end{aligned}$$

知,  $A$  有特征值  $\lambda=5, 1$  (二重).

设  $A$  的对应  $\lambda=5$  的特征向量为  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$ , 则  $\alpha$  满足

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

它有基础解系  $(-1, -1, 1)^T$ , 故可取  $\alpha = (-1, -1, 1)^T$ .

设  $A$  的对应  $\lambda=1$  的特征向量为  $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$ , 则  $\beta$  满足

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

它有基础解系  $(2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T$ , 故可取  $\beta = \beta_1 = (2, 1, 0)^T, \beta = \beta_2 = (-3, 0, 1)^T$ .

$$\text{于是, 可逆矩阵 } P = (\alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 即为所求, 它使得 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

**附注** 设  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  相似, 则  $A$  与  $B$  有相同的特征多项式. 特别有  $\text{tr}A = \text{tr}B$ ,  $|A| = |B|$ . 此外,

当  $A$  可逆时,  $B$  也可逆, 且  $A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*$ ;

当  $A$  可相似对角化时,  $B$  也可相似对角化;

当  $P^{-1}AP = B$  (其中  $P$  是  $n$  阶可逆矩阵) 时, 如果  $\xi$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $P^{-1}\xi$  是  $B$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量.

(22) 分析 (I) 先算出  $p = P(X > 3)$ , 然后计算  $P(Y = k) (k = 1, 2, \dots)$ , 即得  $Y$  的概率分布.

(II) 按数学期望定义计算  $EY$ .

$$\text{精解 (I) 由于 } p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} f(x) dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = -2^{-x} \Big|_3^{+\infty} = \frac{1}{8},$$

所以, 对  $k=2, 3, \dots$ , 有

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P\{\text{在 } k \text{ 次独立观测中, 前 } k-1 \text{ 次观察, } \{X>3\} \text{ 恰好出现一次,} \\ &\quad \text{而第 } k \text{ 次观察, } \{X>3\} \text{ 出现}\} \\ &= P\{\text{在 } k-1 \text{ 次观察中 } \{X>3\} \text{ 恰好出现一次}\} \cdot P(X>3) \\ &= C_{k-1}^1 p(1-p)^{k-2} \cdot p = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}, \end{aligned}$$

所以,  $Y$  的概率分布为

$$P(Y=k) = \frac{1}{64}(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \quad (k=2, 3, \dots), \quad (1)$$

式(II)由式(1)得

$$EY = \sum_{k=2}^{\infty} kP(Y=k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{64}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}. \quad (2)$$

引入幂级数  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{64}k(k-1)x^{k-2}$ , 记其在  $(0, 1)$  内的和函数为  $s(x)$ , 则

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{64}k(k-1)x^{k-2} = \frac{1}{64} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} x^k \\ &= \frac{1}{64} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{1}{64} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{x^2}{1-x} \right) = \frac{1}{32(1-x)^3}. \end{aligned}$$

所以  $EY = s\left(\frac{7}{8}\right) = 16$ .

**附注** 顺便计算  $DY$ .

$$\begin{aligned} DY &= E(Y^2) - (EY)^2 = E(Y^2) - 256 \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k^2 P(Y=k) - 256 = \frac{1}{64} \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} - 256 \\ &= \frac{1}{64} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} - \frac{1}{64} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} - 256 \\ &= \frac{1}{64} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} - 16 - 256 \\ &= \frac{1}{64} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^3}{dx^3} x^{k+1} \right) \Big|_{x=\frac{7}{8}} - 272 \\ &= \frac{1}{64} \left( \frac{d^3}{dx^3} \sum_{k=2}^{\infty} x^{k+1} \right) \Big|_{x=\frac{7}{8}} - 272 \\ &= \frac{1}{64} \left( \frac{x^3}{1-x} \right)^{(3)} \Big|_{x=\frac{7}{8}} - 272 \\ &= \frac{1}{64} \left[ \frac{1 - (1-x^3)}{1-x} \right]^{(3)} \Big|_{x=\frac{7}{8}} - 272 \\ &= \frac{1}{64} \left( \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \right)^{(3)} \Big|_{x=\frac{7}{8}} - 272 \\ &= \frac{1}{64} \cdot \frac{6}{(1-x)^4} \Big|_{x=\frac{7}{8}} - 272 = 384 - 272 = 112. \end{aligned}$$

(23) 分析 (I) 按矩估计法计算.

(II) 按最大似然估计法计算.

精解 (I)  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_{\theta}^1 x \cdot \frac{1}{1-\theta} dx = \frac{1}{2}(1+\theta).$

按矩估计法, 令  $EX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\text{记}}{=} \bar{X}$ , 即  $\frac{1}{2}(1+\theta) = \bar{X}$ , 得  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$ .

(II) 设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观测值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \\ = \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然,  $L$  的最大值只能在  $\theta \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$  内取到, 所以  $L$  可以化简为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{(1-\theta)^n},$$

即

$$\ln L = -n \ln(1-\theta), \quad \theta \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1.$$

由于  $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{1-\theta} > 0$ , 所以  $L$  是  $\theta$  的单调增加函数, 故  $L$  的最大值在  $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

处取到. 因此,  $\theta$  的最大似然估计值为  $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 从而  $\theta$  的最大似然估计量为  $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

**附注** 应熟练掌握计算未知参数点估计的两种方法: 矩估计法与最大似然估计法.

## 2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

(1) C

**分析** 从计算非铅直渐近线入手.

**精解** 对选项(C), 由于

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} = 1,$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

所以, 曲线  $y = x + \sin \frac{1}{x}$  有渐近线  $y = x$ .

因此本题选(C).

**附注** 对于曲线  $y = y(x)$ , 如果极限

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} \text{ 与 } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - ax]$$

都存在, 则该曲线有非铅直渐近线  $y = ax + b$ .

(2) D

**分析** 利用  $f(x)$  在  $[0, x]$  与  $[x, 1]$  ( $x \in [0, 1]$ ) 上的拉格朗日中值定理证明.

**精解** 对  $x \in (0, 1)$ , 由

$$f(x) = f(0) + f'(\xi_1)x \quad (\xi_1 \in (0, x)),$$

$$f(x) = f(1) + f'(\xi_2)(x - 1) \quad (\xi_2 \in (x, 1))$$

得  $f(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x + [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]x(1 - x)$

$$= g(x) - f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1)x(1 - x) \quad (\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)).$$

于是, 当  $f''(x) \geq 0$  ( $x \in (0, 1)$ ) 时, 有  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in (0, 1)$ ).

此外由于  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1)$ . 所以有  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ).

因此本题选(D).

**附注** 当  $f''(x) > 0$  ( $x \in [0, 1]$ ) 时, 曲线段  $y = f(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) 是凹的, 而  $y = g(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) 的图形是连接曲线段的两个端点  $(0, f(0))$  与  $(1, f(1))$  的线段, 它位于曲线段的上方, 故有  $f(x) \geq g(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ), 且仅在点  $x = 0, 1$  处取等号; 当  $f''(x) \geq 0$  ( $x \in [0, 1]$ ) 时, 只能推出  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ), 而取等号处不限于点  $x = 0$  与  $x = 1$ .

(3) D

**分析** 画出所给二次积分对应的二重积分的积分区域  $D$ , 然后写出先  $y$  后  $x$  次序的二次积分即可.

**精解** 由于  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$

$$= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma,$$

其中,  $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y, 0 \leq y \leq 1\}$

$$= \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} +$$

$$\left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

记  $\stackrel{\text{记}}{=} D_1 + D_2$  (见图 B-14-1),

所以,  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

因此本题选(D).

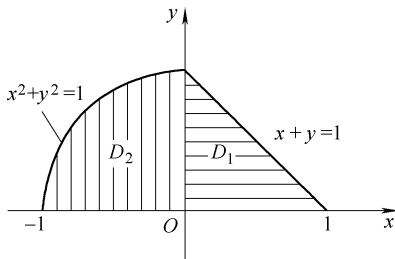


图 B-14-1

**附注 (I)** 当要由一个二次积分写出与其相等的另一个二次积分时, 应首先画出所给二次积分对应的二重积分的积分区域.

**(II)** 由于题解中的  $D_1$  与  $D_2$  都是角域的一部分, 故宜采用极坐标.

(4) **A**

**分析** 记  $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ , 并计算它的最小值点  $(a_1, b_1)$ , 即可得  $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ .

**精解** 由于

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x - 2ax \cos x - 2bx \sin x + 2ab \sin x \cos x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left[ x^2 + \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} b^2 (1 - \cos 2x) - 2bx \sin x \right] dx \\ &= \frac{2}{3} \pi^3 + a^2 \pi + b^2 \pi - 4b\pi, \end{aligned}$$

所以  $\frac{\partial f}{\partial a} = 2\pi a$ ,  $\frac{\partial f}{\partial b} = 2\pi(b-2)$ . 从而由  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{cases}$  得  $f(a, b)$  的唯一可能极值点  $(0, 2)$ , 且由

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \right)^2 \Big|_{a=0, b=2} = 4\pi^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \Big|_{a=0, b=2} = 2\pi > 0$$

知  $(0, 2)$  是  $f(a, b)$  的最小值点. 所以  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 2$ , 从而

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x = 2 \sin x,$$

因此本题选(A).

**附注** 本题实为计算  $f(a, b)$  的最小值点. 由于  $f(a, b)$  只有唯一的极小值点  $(0, 2)$ , 所以它即为最小值点.

(5) B

分析 按第1行展开即可

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} \\ &= -a(ad^2 - bcd) + b(acd - bc^2) = -(ad - bc)^2. \end{aligned}$$

因此本题选(B).

附注 本题可按任一行(列)展开.

(6) A

分析 按向量组线性无关的定义进行推理.

精解 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则对常数  $\lambda_1, \lambda_2$  有

$$\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0}, \text{ 即 } \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (\lambda_1k + \lambda_2l)\alpha_3 = \mathbf{0}$$

时, 必有  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . 因此知  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关.

但反之未必成立, 例如  $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0)^T$ , 则  $\alpha_1 + k\alpha_3 = \alpha_1, \alpha_2 + l\alpha_3 = \alpha_2$  线性无关, 但  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  却线性相关.

因此本题选(A).

附注 本题的必要性也可证明如下:

设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性无关的三维列向量组, 则由

$$(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & l & 1 \end{pmatrix}$$

及矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & l & 1 \end{pmatrix}$  可逆知  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3, \alpha_3$  线性无关, 从而  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关.

(7) B

分析 利用随机事件概率计算公式, 先算出  $P(A)$ , 再计算  $P(B-A)$ .

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \text{由 } 0.3 &= P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = 0.5P(A) \end{aligned}$$

得  $P(A) = 0.6$ , 所以

$$P(B-A) = P(B) - P(AB) = P(B)(1 - P(A)) = 0.2.$$

因此本题选(B).

附注 随机事件概率的减法公式是

$$P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

当  $B \subseteq A$  时,  $P(A-B) = P(A) - P(B)$ .

## (8) D

**分析** 用随机变量的数学期望与方差的计算公式计算  $EY_1$  与  $DY_1$ , 用随机变量的数学期望与方差的性质计算  $EY_2$  与  $DY_2$ , 然后比较大小.

**精解** 由  $EY_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)] dy = \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{2}EX_2$  以及

$$EY_2 = E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] = \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{2}EX_2$$

知

$$EY_1 = EY_2.$$

由于  $E(Y_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)] dy = \frac{1}{2}E(X_1^2) + \frac{1}{2}E(X_2^2)$ ,

$$\begin{aligned} E(Y_2^2) &= E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right]^2 = \frac{1}{4}[E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2EX_1 \cdot EX_2]^2 \\ &\leq \frac{1}{4}[E(X_1^2) + E(X_2^2) + (EX_1)^2 + (EX_2)^2] \\ &\leq \frac{1}{4}[E(X_1^2) + E(X_2^2) + E(X_1^2) + E(X_2^2)] \\ &= \frac{1}{2}E(X_1^2) + \frac{1}{2}E(X_2^2) \end{aligned}$$

所以,  $DY_2 = E(Y_2^2) - (EY_2)^2 \leq E(Y_1^2) - (EY_1)^2 = DY_1$ .

因此本题选(D).

**附注** 随机变量  $X$  的方差  $DX$  定义为  $DX = E(X - E(X))^2$ , 但通常用公式  $DX = E(X^2) - (EX)^2$  计算.

## 二、计算题

(9)  $2x - y - z = 1$ 

**分析** 先算出  $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ ,  $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$ , 然后按公式写出所要求的切平面方程.

**精解** 由于  $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = [2x(1 - \sin y) - y^2 \cos x] \big|_{(1,0)} = 2$ ,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = -x^2 \cos y + 2y(1 - \sin x) \big|_{(1,0)} = -1,$$

所以所求的切平面方程为

$$2(x - 1) - (y - 0) - (z - 1) = 0, \text{ 即 } 2x - y - z = 1.$$

**附注** 曲面  $F(x, y, z) = 0$  ( $F(x, y, z)$  具有连续偏导数) 在其上的点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

特别地, 曲面  $z = f(x, y)$  ( $f(x, y)$  具有连续偏导数) 在其上的点  $(x_0, y_0, z_0)$  (其中  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ) 处的切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$



(10)  $f(x) = 1$ **分析** 先算出  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上的表达式, 然后利用  $f(x)$  是周期的奇函数算出  $f(7)$ .**精解** 由于  $f(x)$  是奇函数, 所以  $f(0) = 0$ . 于是

$$f(x) = f(0) + \int_0^x 2(t-1)dt = x^2 - 2x \quad (x \in [0, 2]).$$

由于  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数, 所以

$$f(7) = f(-1) = -f(1) = 1$$

**附注** 顺便写出  $f(x)$  在  $[0, 4]$  (即一个周期) 上的表达式.

由  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$  知,  $x \in [-2, 0)$  时,  $f(x) = -[(-x)^2 - 2(-x)] = -x^2 - 2x$ . 从而当  $x \in [2, 4]$  时,  $f(x) = f(x-4) = -(x-4)^2 - 2(x-4) = -x^2 + 6x - 8$ . 因此

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in [0, 2], \\ -x^2 + 6x - 8, & x \in (2, 4]. \end{cases}$$

(11)  $y = xe^{2x+1}$ **分析** 改写成齐次方程后求解.**精解** 所给微分方程可以改写成

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}. \quad (\text{齐次方程})$$

令  $y = ux$ , 则上列微分方程成为

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

由此得到  $\ln u - 1 = Cx$ . 将  $y(1) = e^3$ , 即  $u|_{x=1} = e^3$  代入得  $C = 2$ , 所以  $y = xe^{2x+1}$ .

**附注** 齐次方程是一阶微分方程中较常见的类型. 通常作变量代换  $y = ux$ , 可将它转换成可分离变量的微分方程, 然后求得通解.

(12)  $\pi$ **分析** 先写出  $L$  的参数方程, 然后将所给的曲线积分转换成定积分并计算之.**精解** 由于  $L$  在  $xOy$  平面上的投影的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$  所以  $L$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = -\sin t, \end{cases} \quad \text{起点与终点的参数分别为 } t=0, 2\pi. \text{ 于是}$$

$$\int_L zdx + ydz = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin t \cos t) dt = \pi.$$

**附注** 本题也可用斯托克斯公式将曲线积分转换成曲面积分计算, 具体如下:记  $\Sigma$  为平面  $y+z=0$  上的由  $L$  围成的一块, 其方向与  $L$  的方向符合右手法则, 则

$$\begin{aligned}\int_L z dx + y dz &= \iint_{\Sigma(\text{上侧})} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \Big|_{z=-y} d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} d\sigma = \pi.\end{aligned}$$

(13)  $a \in [-2, 2]$

**分析** 用配平方的方法将  $f(x_1, x_2, x_3)$  转换成标准形, 即可确定  $a$  的取值范围.

**精解** 由于

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= [x_1^2 + 2ax_1x_3 + (ax_3)^2] - [x_2^2 - 4x_2x_3 + (2x_3)^2] + (4 - a^2)x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + (4 - a^2)y_3^2\end{aligned}$$

(其中  $\begin{cases} y_1 = x_1 + ax_3, \\ y_2 = x_2 - 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x_1 = y_1 - ay_3, \\ x_2 = y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$  是可逆线性变换), 所以, 当  $f(x_1, x_2, x_3)$

的负惯性指数为 1 时,  $a$  应满足  $4 - a^2 \geq 0$ , 故  $a$  的取值范围为  $[-2, 2]$ .

**附注** 对二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  进行可逆线性变换, 不改变其矩阵的秩, 也不改变其正惯性指数(或负惯性指数)的值.

$$(14) \quad C = \frac{2}{S_n}$$

**分析** 先计算  $E(X^2)$ , 然后用统计量的无偏性定义计算  $c$ .

$$\text{精解} \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_{\theta}^{2\theta} x^2 \cdot \frac{2x}{3\theta^2} dx = \frac{5}{2}\theta^2.$$

所以, 由  $c \sum_{i=1}^n X_i^2$  是  $\theta^2$  的无偏估计量得

$$\theta^2 = E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = cnE(X^2) = \frac{5}{2}cn\theta^2, \text{ 即 } c = \frac{2}{5n}.$$

**附注** 评判总体  $X$  分布中的未知参数  $\theta$  的估计量  $\hat{\theta}$  的常用标准是:

(I) 无偏性 如果  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计量.

(II) 有效性 如果  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  都是  $\theta$  的无偏估计量, 则当  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$  时, 称  $\hat{\theta}_1$  是较  $\hat{\theta}_2$  有效的估计量.

### 三、解答题

$$(15) \quad \frac{1}{2}$$

**分析** 由于分子中出现积分变上限函数, 所以先用洛必达法则计算所给的未定式极限.

**精解**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x}{2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$$

令  $u = \frac{1}{x}$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1 - u}{u^2}$$

洛必达法则

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{2u} = \frac{1}{2}.$$

**附注** 本题是  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限, 由于分子是积分上限函数, 因此首先应该使用洛必达法则, 去掉其中的积分运算. 类似的问题可在本丛书的《典型题 660》第二章第六部分或《高分突破》01 中找到.

(16) 极小值  $f(1) = -2$ , 无极大值

**分析** 先利用隐函数求导方法计算  $\frac{dy}{dx}$ , 然后计算  $f(x)$  的极值.

**精解** 所给方程两边对  $x$  求导得

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2xy}{3y^2 + 2xy + x^2} \quad (\text{由于 } y(0) \neq 0, \text{ 所以分母不为零}).$$

$$\text{由 } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 得 } y^2 + 2xy = 0, \text{ 即 } y = -2x (y = 0, \text{ 舍去}).$$

将  $y = -2x$  代入所给方程得  $x = 1, y = -2$ , 由于

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=-2}} = -\frac{\left(2y \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \frac{dy}{dx}\right)(3y^2 + 2xy + x^2) - (y^2 + 2xy) \left(6y \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 2x\right)}{(3y^2 + 2xy + x^2)^2} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=-2}}$$

$$= \frac{4}{9} > 0,$$

所以  $y = f(x)$  只有唯一极小值  $f(1) = -2$ , 无极大值.

**附注** 计算由方程  $F(x, y) = 0$  确定的隐函数  $y = f(x)$  的极值时, 总是先利用隐函数求导方法算出  $\frac{dy}{dx}$ , 然后再根据显函数求极值的方法计算  $f(x)$  的极值.

隐函数求极值问题在《高分突破》06 中可以找到典型的例子.

(17)  $f(u) = \frac{1}{4}e^{2u} - \frac{1}{4}e^{-2u} - u$

**分析** 先计算  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , 并利用它们满足的等式得到关于  $f(u)$  的微分方程, 然后求解该微分方程得到  $f(u)$  的表达式.

**精解** 由  $dz = f'(u)[e^x \cos y dx + (-e^x \sin y) dy]$  (其中  $u = e^x \cos y$ )

得  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)(-e^x \sin y).$

所以, 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x} \cos^2 y + f'(u)e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} \sin^2 y - f'(u)e^x \cos y.$$

从而由所给等式得

$$f''(u)e^{2x} = 4[f(u) + u]e^{2x},$$

即

$$f''(u) - 4f(u) = 4u. \quad (1)$$

由于  $f''(u) - 4f(u) = 0$  有通解  $F = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u}$ , 以及  $f''(u) - 4f(u) = 4u$  有特解  $f^* = -u$ , 所以式(1)的通解为

$$f(u) = F + f^* = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - u, \quad (2)$$

且

$$f'(u) = 2C_1 e^{2u} - 2C_2 e^{-2u} - 1. \quad (3)$$

将  $f(0) = f'(0) = 0$  代入式(2)、式(3)得  $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = -\frac{1}{4}$ . 将它们代入式(2)得

$$f(u) = \frac{1}{4}e^{2u} - \frac{1}{4}e^{-2u} - u.$$

**附注** 本题是二阶偏导数计算与求解二阶常系数线性微分方程的综合题. 应熟练掌握一、二阶偏导数的计算和二阶常系数线性微方程的解法, 《高分突破》19 中有与本题非常相似的例题:

例 19.11 设函数  $f(u)$  具有二阶连续偏导数, 且  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 2$ , 又  $z = f(e^y \cos x)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2y}z$ . 求  $f(u)$  的表达式.

(18)  $-4\pi$

**分析** 在曲面  $\Sigma$  上添加一块平面  $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ , (下侧) 然后利用高斯公式计算曲面积分  $I$ .

**精解** 由于

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1 (\text{内侧闭曲面})} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy - \\ &\quad \iint_{\Sigma_1} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \\ &= - \iint_{\Sigma + \Sigma_1 (\text{外侧闭曲面})} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \\ &\stackrel{\text{高斯公式}}{=} - \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial (x-1)^3}{\partial x} + \frac{\partial (y-1)^3}{\partial y} + \frac{\partial (z-1)}{\partial z} \right] dv \end{aligned}$$

(其中  $\Omega$  是由  $\Sigma + \Sigma_1$  围成的空间, 即  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ )

$$= - \iiint_{\Omega} [3(x^2 + y^2) - 6(x + y) + 7] dv$$

$$= - \iiint_{\Omega} [3(x^2 + y^2) + 7] dv$$

(由于  $\Omega$  关于平面  $x = 0$  对称, 在对称点处  $x$  的值互为相反数, 所以  $\iiint_{\Omega} x dv = 0$ , 同理  $\iiint_{\Omega} y dv = 0$ )

$$= - \int_0^1 dz \iint_{D_z} [3(x^2 + y^2) + 7] d\sigma$$

(其中  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z\}$  立坐标为  $z (0 \leq z \leq 1)$  的平面位于  $\Omega$  内的部分)

$$= - \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} (3r^2 + 7) r dr = -4\pi.$$

**附注** 关于坐标的曲面积分  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$  (其中  $P, Q, R$  都具有连续偏导数), 常用高斯公式计算.

当  $\Sigma$  是闭曲面(外侧)时, 应用高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \quad (\Omega \text{ 是由 } \Sigma \text{ 围成的立体}). \end{aligned}$$

当  $\Sigma$  不是闭曲面时, 适当添加一块曲面  $\Sigma_1$ , 使得  $\Sigma + \Sigma_1$  是闭曲面(不妨设其为外侧, 当  $\Sigma + \Sigma_1$  为内侧时, 则  $\iint_{\Sigma + \Sigma_1(\text{内侧})} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{\Sigma + \Sigma_1(\text{外侧})} P dydz + Q dzdx + R dxdy$ ), 然后应用高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dxdy - \iint_{\Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iiint_{\Omega_1} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv - \iint_{\Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dxdy \quad (\text{其中 } \Omega_1 \text{ 是由 } \Sigma + \Sigma_1 \text{ 围成的立体}). \end{aligned}$$

利用高斯公式计算非闭曲面上的关于坐标的曲面积分方法可在《高分突破》15 中找到, 在其中还有与本题相似的例题.

(19)

**分析** (I) 利用  $\cos a_n - a_n = \cos b_n$  推出  $a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$ . 由此即可证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(II) 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  是正项级数, 所以用比较法判定它是收敛的.

**精解** (I) 由  $\cos a_n - a_n = \cos b_n$  得  $\cos a_n - \cos b_n = a_n$ , 即

$$2\sin \frac{b_n - a_n}{2} \sin \frac{a_n + b_n}{2} = a_n$$

由此得到  $b_n - a_n > 0$ , 即  $0 < a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$ . 于是由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛推得的  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{(II)} \text{ 由于 } \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} = \frac{(1 - \cos b_n) - (1 - \cos a_n)}{b_n} \\ &< \frac{2\sin^2 \frac{b_n}{2}}{b_n} + \frac{2\sin^2 \frac{a_n}{2}}{b_n} \\ &< \frac{1}{2}b_n + \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1}{2}a_n < \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}a_n < b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

所以, 由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 知正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  收敛.

**附注** 题解中充分利用题设条件:  $\cos a_n - a_n = \cos b_n (n = 1, 2, \dots)$ , 这一点值得注意.

(20)

**分析** (I) 对矩阵  $A$  施行初等行变换化为阶梯形矩阵, 求出方程组  $AX = 0$  的一个基础解系.

(II) 用解矩阵方程的方法算出满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ .

**精解** (I) 由于

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以方程组  $AX = 0$  的一个基础解系为  $(-1, 2, 3, 1)^T$ .

(II) 记  $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  (其中  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  都是 4 维列向量), 则  $AB = E$

即为三个方程组  $A\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{由于 } (A : E) &= \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right),$$

所以  $A\beta_1 = \mathbf{0}$  的基础解系为  $(-1, 2, 3, 1)^T$ ,  $A\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  有特解  $(2, -1, -1, 0)^T$ , 从而

$A\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  的通解为

$$\beta_1 = C_1(-1, 2, 3, 1)^T + (2, -1, -1, 0)^T = (-C_1 + 2, 2C_1 - 1, 3C_1 - 1, C_1)^T.$$

同样可得

$$\beta_2 = (-C_2 + 6, 2C_2 - 3, 3C_2 - 4, C_2)^T,$$

$$\beta_3 = (-C_3 - 1, 2C_3 + 1, 3C_3 + 1, C_3)^T.$$

因此满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$  为

$$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} -C_1 + 2 & -C_2 + 6 & -C_3 - 1 \\ 2C_1 - 1 & 2C_2 - 3 & 2C_3 + 1 \\ 3C_1 - 1 & 3C_2 - 4 & 3C_3 + 1 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix},$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  都是任意常数.

**附注** 本题(II)是矩阵方程的求解.

矩阵方程

$$AX = B$$

(\*)

的解法如下:

当  $A$  可逆时,  $X = A^{-1}B$ .

当  $A$  不可逆时, 对式(\*)的增广矩阵  $(A : B)$  施行初等行变换, 成为  $(C : D)$  (其中  $C$  是阶梯形矩阵, 且每个非零行的最靠左边的非零元素都为 1). 由此可以算出  $Ax = \mathbf{0}$  的一个基础解系  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ , 记  $\gamma = C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + \dots + C_r\xi_r$  ( $C_1, C_2, \dots, C_r$  是任意常数), 也可以算各个方程组  $Ax = \beta_1, Ax = \beta_2, \dots, Ax = \beta_l$  (其中  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  是  $B$  的所有列向量) 的特解  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ , 则

$$X = (\gamma + \gamma_1, \gamma + \gamma_2, \dots, \gamma + \gamma_l) \quad (C_1, C_2, \dots, C_l \text{ 都是任意常数}).$$

在《典型题 660》第六章第三部分和《高分突破》21 中可以找到多个与本题十分相似的求解矩阵方程的例题.

(21)

分析 只要证明矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  和矩阵  $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  都可相似对角

化, 且它们具有相同的对角形矩阵即可.

**精解** 记  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 则由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

知,  $A$  有特征值  $\lambda = n$ ,  $0$  ( $n-1$  重).

$A$  是实对称矩阵, 必可相似对角化, 且

$$A \sim \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

知,  $B$  有特征值  $\lambda = n$ ,  $0$  ( $n-1$  重).

设  $B$  的对应  $\lambda = n$  的特征向量为  $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ , 则

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & n & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & -(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

故可取  $\alpha = \eta_1 = (1, 2, \cdots, n)^T$ .

设  $B$  的对应  $\lambda = 0$  的特征向量为  $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ , 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

显然  $b_n = 0$ ,  $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$  可以任取, 故取  $\beta$  为

$$\eta_2 = (1, 0, 0, \cdots, 0, 0)^T,$$

$$\eta_3 = (0, 1, 0, \cdots, 0, 0)^T,$$

$$\vdots$$

$$\eta_n = (0, 0, 0, \cdots, 1, 0)^T,$$

于是,  $B$  有  $n$  个线性无关的特征向量  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ , 所以  $B$  可相似对角化, 且

$$B \sim \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$



因此  $A$  与  $B$  相似.

**附注** 应当注意: 当两个  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  有相同的特征值时, 它们未必相似; 但是当  $A$  与  $B$  有相同的特征值, 且都有  $n$  个线性无关的特征向量时, 它们必相似.

本题实际上是  $n$  阶矩阵相似对角化问题.  $n$  阶矩阵可相似对角化的充分条件及其计算方法在《典型题 660》第六章第七部分中有详细叙述和多个典型例题.

(22)

**分析** (I) 先写出在  $(0, a)$  上服从均匀分布的随机变量  $U$  的分布函数, 然后按分布函数的定义计算  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ .

(II) 利用(I)算出  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ , 然后按数学期望计算公式计算  $EY$ .

**精解** (I) 设  $U \sim U(0, a)$ , 则  $U$  的分布函数  $F(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ \frac{u}{a}, & 0 < u < a, \\ 1, & u \geq a. \end{cases}$

所以,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X=1)P(Y \leq y | X=1) + P(X=2)P(Y \leq y | X=2)$

$$= \frac{1}{2} [P(Y \leq y | X=1) + P(Y \leq y | X=2)]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y, & 0 < y < 1, \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{2}y, & 0 < y < 2, \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

(II) 由结论(I)可知,  $Y$  的概率密度  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq y < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$$\text{所以 } EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}.$$

**附注** 顺便计算  $DY$ :

由于  $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y^2 dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y^2 dy = \frac{5}{6}$ , 所以

$$DY = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{13}{48}.$$

在《高分突破》24 中可以找到与本题(I)类似的例题.

(23)

分析 (I) 先算出  $X$  的概率密度  $f(x; \theta)$ , 然后按公式计算  $EX$  与  $E(X^2)$ .

(II) 按最大似然估计法计算  $\hat{\theta}_n$ .

(III) 利用大数定律证明存在实数  $\alpha$ .

精解 (I) 由于  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  所以

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{\theta}} \\ &= - \left[ x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\theta}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2(\frac{\theta}{2})}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = - \int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\frac{x^2}{\theta}} \\ &= - \left( x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx^2 \right) \\ &= - \theta e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} = \theta. \end{aligned}$$

(II) 设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数为

$$L(\theta) = \frac{2^n}{\theta^n} (x_1 x_2 \cdots x_n) e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

即  $\ln L(\theta) = \ln[2^n (x_1 x_2 \cdots x_n)] - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$ , 于是由  $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$ , 即  $-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 =$

0 得  $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

因此  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ .

(III) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是来自总体的简单随机样本(其容量为  $\infty$ ), 则随机变量序列  $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$  独立同分布, 且  $E(X_i^2) = E(X^2) = \theta (i=1, 2, \dots)$ . 于是由辛钦大数定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \theta \mid < \varepsilon\right) = 1,$$

因此存在实数  $\alpha = \theta$ , 对任何  $\varepsilon > 0$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \alpha| \geq \varepsilon) = 0.$$

**附注** (I) 最大似然估计法是计算总体分布未知参数的点估计量重要的方法之一, 应熟练掌握. 在《典型题 660》第八章第三部分及《高分突破》29 中都可以找到与本题(II)类似的例题.

(II) 对于题中的(III), 也可由切比雪夫不等式直接证明.

取  $\alpha = \theta$ , 则由切比雪夫不等式得

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \alpha\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{由于 } D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n}D(X^2) = \frac{1}{n}\{E(X^4) - [E(X^2)]^2\}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x; \theta) dx - \theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x^4 \cdot \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx - \frac{\theta^2}{n} = -\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x^4 d e^{-\frac{x^2}{\theta}} - \frac{\theta^2}{n}$$

$$= -\frac{1}{n}\left(x^4 e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 4x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx\right) - \frac{\theta^2}{n}$$

$$= \frac{2\theta}{n}\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx - \frac{\theta^2}{n}$$

$$= -\frac{2\theta}{n}\int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\frac{x^2}{\theta}} - \frac{\theta^2}{n}$$

$$= -\frac{2\theta}{n}\left(x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dX^2\right) - \frac{\theta^2}{n}$$

$$= -\frac{2\theta^2}{n}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2\theta^2}{n} - \frac{\theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{n},$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)}{\varepsilon^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)^2 = 0$ , 从而存在实数  $\alpha = \theta$ , 使得对任何  $\varepsilon > 0$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \alpha| \geq \varepsilon) = 0.$$

## 2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

(1) D

**分析** 对  $k=2, 3$  计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k}$ , 确定正确选项.

**精解** 由题中的选项知  $k=2$  或  $3$ , 并且由

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2} &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(1+x^2)} = 0\end{aligned}$$

知  $k=2$  不合题意.

$$\begin{aligned}\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以,  $k=3, c=\frac{1}{3}$ .

因此本题选(D).

**附注** 由四个选项可知  $k=2$  或  $3$ , 然后用洛必达法则计算对应的  $\frac{0}{0}$  型未定式极限, 是本题获解的关键.

(2) A

**分析** 算出所给曲面在点  $(0, 1, -1)$  处的法向量, 即得该点处的切平面方程.

**精解** 记  $F(x, y, z) = x^2 + \cos(xy) + yz + x$ , 则

$$\begin{aligned}dF &= 2x dx - \sin(xy)(y dx + x dy) + z dy + y dz + dx \\ &= [2x - y \sin(xy) + 1] dx + [z - x \sin(xy)] dy + y dz,\end{aligned}$$

所以

$$F'_x(0, 1, -1) = [2x - y \sin(xy) + 1] \big|_{(0, 1, -1)} = 1,$$

$$F'_y(0, 1, -1) = [z - x \sin(xy)] \big|_{(0, 1, -1)} = -1,$$

$$F'_z(0, 1, -1) = y \big|_{(0, 1, -1)} = 1,$$

它们即为曲面  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(0, 1, -1)$  处的法向量的三个分量, 所以在该点处的切平面方程为

$$1 \cdot (x - 0) + (-1)(y - 1) + 1 \cdot (z + 1) = 0, \text{ 即 } x - y + z = -2.$$

因此本题选(A).

**附注** 由于需要计算  $F'_x, F'_y, F'_z$ , 所以从计算  $dF$  入手比较快捷.

(3) C

**分析**  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$  是函数  $f(x) (0 \leq x \leq 1)$  作奇延拓后的傅里叶级数, 于是利用狄利克雷收敛定理计算  $S\left(-\frac{9}{4}\right)$ .

**精解** 正弦级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$  可以理解为函数  $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right| (0 < x \leq 1)$  的奇延拓  $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -1 < x < 0 \end{cases}$  的傅里叶级数, 所以  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$  是以 2 为周期的周期函数, 从而由狄利克雷收敛定理得

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{9}{4}\right) &= S\left(-\frac{9}{4} + 2\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) \quad \left(x = -\frac{1}{4} \text{ 是 } F(x) \text{ 的连续点}\right) \\ &= F\left(-\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此本题选(C).

**附注** 应记住狄利克雷收敛定理:

设  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上只有有限个第一类间断点和有限个极值点, 则  $f(x)$  的傅里叶级数的和函数  $S(x)$  是以  $2l$  为周期的周期函数, 其中在一个周期  $[-l, l]$  上有

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & x \in (-l, l), \\ \frac{1}{2}[f((-l)^+) + f(l^-)], & x = -l, l. \end{cases}$$

(4) D

**分析** 利用格林公式将  $I_i (i=1, 2, 3, 4)$  转换成二重积分, 然后比较这四个二重积分的大小, 即可得到  $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ .

**精解** 对  $i=1, 2, 3, 4$ , 记由  $L_i$  围成的平面闭区域为  $D_i$ , 其第一象限部分为  $D'_i$ , 则由格林公式得

$$\begin{aligned} I_i &= \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6}\right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) dy = \iint_{D_i} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma \\ &= 4 \iint_{D'_i} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma \end{aligned}$$

(由于  $D_i$  既关于  $x$  轴对称, 也关于  $y$  轴对称, 并且  $1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$  在对称点处的值彼此相等)

由于  $1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$  在  $D'_1$  内部为正, 且  $D'_1 \subset D'_4$ , 所以  $\iint_{D'_1} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma < \iint_{D'_4} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma$ , 即  $I_1 < I_4$ .

由于  $1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$  仅在  $D'_4$  内部为正, 且  $D'_4 \subset D'_2$ , 所以  $\iint_{D'_4} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma > \iint_{D'_2} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma$ .

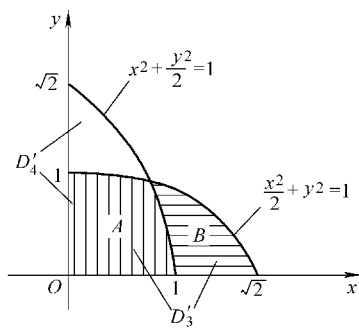


图 B-13-1

$$\iint_{D'_2} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma, \text{ 即 } I_4 > I_2.$$

下面比较  $I_4$  与  $I_3$  的大小. 由  $D'_4$  与  $D'_3$  的图形(图 B-13-1)

$$\begin{aligned} & \iint_{D'_4} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma > \iint_A \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma \\ & > \iint_A \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma + \iint_B \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma \quad (\text{因为在 } B \text{ 上 } 1 - x^2 - \frac{y^2}{2} < 0) \\ & = \iint_{D'_3} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) d\sigma, \text{ 即 } I_4 > I_3. \end{aligned}$$

由以上计算知  $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$ .

因此本题选(D).

**附注** 注意函数  $1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$  仅在  $D'_4$  内取正值, 是本题不必通过计算二重积分的值即可确定  $I_4$  较  $I_1, I_2, I_3$  大的关键, 学习和掌握这种比较二重积分的方法.

### (5) B

**分析** 利用两个向量组等价的定义确定正确的选项.

**精解** 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  (其中  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $A$  的列向量组),  $C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  (其中  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  是  $C$  的列向量组),  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ , 则由  $AB = C$  得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n),$$

即

$$\gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n,$$

$$\gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n,$$

$$\vdots$$

$$\gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n.$$

由此可知,  $C$  的列向量组可由  $A$  的列向量组线性表示.

由  $B$  可逆得,  $CB^{-1} = A$ , 因此同样可知  $A$  的列向量组可由  $C$  的列向量组线性表示. 由此得到, 矩阵  $C$  的列向量组与  $A$  的列向量组等价.

因此本题选(B).

**附注** 两个向量组 I 与 II 等价的定义是: 如果 I 与 II 可相互线性表示, 则称 I 与 II 等价.

(6) B

**分析** 利用两个实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式, 即可得到正确选项.

**精解**

记  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为三阶单位矩阵, 则  $A, B$  都是三阶实对称矩阵,

且  $A$  的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -a & -1 \\ -2a & \lambda - b & -a \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda[\lambda^2 - (2+b)\lambda + (2b - 2a^2)], \end{aligned}$$

而  $B$  的特征多项式为  $\lambda(\lambda - 2)(\lambda - b) = \lambda[\lambda^2 - (2+b)\lambda + 2b]$ .

显然  $\lambda[\lambda^2 - (2+b)\lambda + (2b - 2a^2)] = \lambda[\lambda^2 - (2+b)\lambda + 2b]$  的充分必要条件是  $2b - 2a^2 = 2b$ , 即  $a = 0$ ,  $b$  为任意常数.

从而  $A \sim B$  的充分必要条件是  $a = 0$ ,  $b$  为任意常数.

因此本题选(B).

**附注** 以下结论值得注意.

设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 则它们相似的必要而非充分条件是  $A, B$  具有相同的特征多项式;

设  $A, B$  都是  $n$  阶实对称矩阵, 则它们相似的充分必要条件是  $A, B$  具有相同的特征多项式.

(7) A

**分析** 将  $X_2, X_3$  标准化即可得到  $P_1, P_2, P_3$  的大小关系.

**精解** 记标准正态分布函数为  $\Phi(x)$ , 则

$$P_1 = P(-2 \leq X_1 \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1,$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P(-2 \leq X_2 \leq 2) = P\left(-\frac{2}{2} \leq \frac{X_2}{2} \leq \frac{2}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 < 2\Phi(2) - 1 = P_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P(-2 \leq X_3 \leq 2) = P\left(-\frac{2-5}{3} \leq \frac{X_3-5}{3} \leq \frac{2-5}{3}\right) \\ &= \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) \end{aligned}$$

$$< \Phi(-1) < \Phi(1) - \Phi(-1) \quad (\text{由图 B-13-2 可得})$$

$$= P_2.$$

由此得到

$$P_1 > P_2 > P_3.$$

因此本题选(A).

**附注** 计算服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的随机变量  $X$  的概率等问题时, 总是将  $X$  标准化:  $X^0 = \frac{X-\mu}{\sigma}$ , 则  $X^0 \sim N(0, 1)$ .

(8) C

**分析** 利用  $Y = X^2$  即可得到  $P(Y > c^2)$  的值.

**精解** 由  $X \sim t(n)$  知, 当  $a \in (0, 0.5)$  时满足  $P(X > c) = a$  的  $c > 0$ .

由于  $Y = X^2$ , 所以

$$\begin{aligned} P(Y > c^2) &= P(X^2 > c^2) = P(X > c) + P(X < -c) \\ &= 2P(X > c) = 2a. \end{aligned}$$

因此本题选(C).

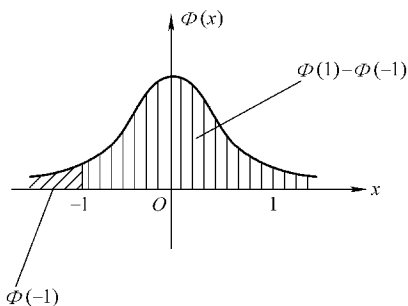


图 B-13-2

**附注**  $Y = X^2$  的证明.

由于  $Y \sim F(1, n)$ , 所以存在相互独立的随机变量  $\xi$  与  $\eta$ , 其中  $\xi \sim N(0, 1)$ ,  $\eta \in \chi^2(n)$ , 使得  $Y = \frac{\xi^2}{\eta/n} = \left( \frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}} \right)^2$ . 显然  $\frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}} \sim t(n)$ . 它即为  $X$ , 所以  $Y = X^2$ .

## 二、填空题

(9) 1

**分析** 利用隐函数求导方法算出  $f'(0)$ , 由此即可由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = f'(0)$  得到要求的极限值.

**精解** 由所给方程得  $f(0) = 1$ , 即  $x = 0$  时,  $y = 1$ . 所给方程两边对  $x$  求导得

$$y' - 1 = e^{x(1-y)} [(1-y) - xy'].$$

将  $x = 0, y = 1$  代入上式得

$$f'(0) = y'(0) = 1.$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0) = 1.$$

**附注** 由于由导数定义知, 所给极限为  $f'(0)$ , 所以在隐函数求导时, 不必算出  $f'(x)$  的表达式, 只需算出  $f'(0)$  即可. 这样可使计算快捷些.

(10)  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}$

**分析** 只要确定对应的二阶常系数齐次线性微分方程的通解即可.

**精解** 由于  $y_1, y_2, y_3$  是所给的二阶常系数非齐次线性微分方程的解, 所以  $y_1 - y_3 = e^{3x}$ ,  $y_2 - y_3 = e^x$  是对应的齐次线性微分方程的两个线性无关的特解, 从而它的通解为  $Y =$



$C_1 e^{3x} + C_2 e^x$ . 因此所给的二阶常系数非齐次线性微分方程的通解为

$$y = Y + y_3 = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}.$$

**附注** 顺便算出题中的二阶常系数非齐次线性微分方程.

显然对应的齐次线性微分方程的特征方程有根 1, 3, 所以特征方程为  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ . 从而二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y'' - 4y' + 3y = f(x).$$

将它的特解  $-x e^{2x}$  代入式(1)得  $f(x) = x e^{2x}$ .

所以, 所求的二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y'' - 4y' + 3y = x e^{2x}.$$

(11)  $\sqrt{2}$

**分析** 先用参数方程求导方法算出  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , 然后将  $t = \frac{\pi}{4}$  代入即可.

**精解** 由于  $\frac{dy}{dx} = \frac{(t \sin t + \cos t)'}{(\sin t)'} = t$ , 所以

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t'}{(\sin t)'} = \frac{1}{\cos t}.$$

$$\text{从而 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left. \frac{1}{\cos t} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

**附注** 由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , 表示的函数  $y = y(x)$  的二阶导数应按公式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} \text{ 或 } \frac{d \left( \frac{dy}{dx} \right)}{dx}$$

计算.

(12)  $\ln 2$

**分析** 由于所给的无穷区间上的反常积分收敛, 所以可按分部积分法计算.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \ln x d \frac{1}{1+x} \\ &= - \left[ \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx \right] = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx \\ &= \left. \ln \frac{x}{1+x} \right|_1^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

**附注** 以上计算中, 将  $+\infty$  代入  $x$  中应理解为  $x \rightarrow +\infty$  取极限, 例如,  $\left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x} - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_{x=1} = 0 - 0 = 0.$$

(13) -1

分析 由题设  $A_{ij} = -a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$  知  $A$  的伴随矩阵  $A^* = -A^T$ . 由此可算得  $|A|$ .精解 由题设  $A_{ij} + a_{ij} = 0$  得  $A_{ij} = -a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ , 所以

$$A^* = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = -A^T.$$

从而由  $|A^*| = |A|^{3-1} = |A|^2$  得

$$|-A^T| = |A|^2, \text{ 即 } (-1)^3 |A| = |A|^2.$$

由此得到  $|A| = 0$  或  $-1$ .若  $|A| = 0$ , 则  $-AA^T = AA^* = |A|E = O$ , 则有  $A = O$ , 与题设矛盾, 故  $|A| = -1$ .附注 对于  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^*$ , 应记住以下常用的性质:(i)  $A^*A = AA^* = |A|E_n$  ( $E_n$  是  $n$  阶单位矩阵);(ii)  $A^* = |A|A^{-1}$  (当  $A$  可逆时);(iii)  $|A^*| = |A|^{n-1}$  ( $n > 1$ );(iv)  $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$  ( $\lambda$  是常数);(v)  $(A^T)^* = (A^*)^T$ ;(vi)  $(AB)^* = B^*A^*$  ( $B$  为  $n$  阶矩阵).(14)  $1 - \frac{1}{e}$ 分析 利用条件概率公式计算  $P(Y \leq a+1 | Y > a)$ .

$$\begin{aligned} \text{精解 } P(Y \leq a+1 | Y > a) &= \frac{P(Y \leq a+1, Y > a)}{P(Y > a)} \\ &= \frac{P(a < Y \leq a+1)}{P(Y > a)} \\ &= \frac{\int_a^{a+1} e^{-y} dy}{\int_a^{+\infty} e^{-y} dy} \quad (\text{由于 } y \text{ 的概率密度为 } f(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}) \\ &= \frac{e^{-a} - e^{-a-1}}{e^{-a}} = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

附注 应记住六种常用随机变量的概率分布或概率密度以及数学期望与方差.

## 三、解答题

(15)  $-4\ln 2 + 8 - 2\pi$ 分析 由于  $f(x)$  是积分上限函数, 所以应使用分部积分法计算所给的定积分(必要时需结合使用换元积分法).

$$\begin{aligned} \text{精解 } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 f(x) d2\sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x}f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x}f'(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 2\sqrt{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} dx \\
&= -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx = -4 \int_0^1 \ln(1+x) d\sqrt{x} \\
&\stackrel{\text{令 } t = \sqrt{x}}{=} -4 \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \\
&= -4 \left[ t \ln(1+t^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt \right] \\
&= -4 \ln 2 + 8 \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\
&= -4 \ln 2 + 8 - 8 \arctan t \Big|_0^1 \\
&= -4 \ln 2 + 8 - 2\pi.
\end{aligned}$$

**附注** 当定积分的被积函数中有积分上限函数的因子时,总是先用分部积分法,去掉被积函数中的积分运算.

$$(16) \quad s(x) = e^{-x} + 2e^x \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

**分析** (I) 先确定幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域,然后在收敛域内对  $S(x)$  求二阶导数,证明  $S''(x) - S(x) = 0$ .

(II) 确定  $S(0)$ ,  $S'(0)$ , 然后求解 (I) 中得到的微分方程, 即得  $S(x)$  的表达式.

**精解** (I) 由题设得到

$$\begin{aligned}
a_0 &= 3, a_2 = \frac{3}{2!}, \cdots, a_{2n} = \frac{3}{(2n)!}, \cdots, \\
a_1 &= 1, a_3 = \frac{1}{3!}, \cdots, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, \cdots,
\end{aligned}$$

$$\text{所以, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n)!} x^{2n}$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  对任意实数  $x$  都收敛, 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ , 即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in (-\infty, +\infty)) \quad (1)$$

对  $x \in (-\infty, +\infty)$  有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad (2)$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

$$\begin{aligned}
\text{于是, } S''(x) - S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n] x^n
\end{aligned}$$

$= 0$  (利用  $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$ , 即  $a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}$   
 $n \geq 0$ )).

(II) 由(I)得到,  $S(x)$  满足二阶常系数齐次线性微分方程

$$S''(x) - S(x) = 0,$$

它的通解为

$$S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x, \quad (3)$$

且

$$S'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x. \quad (4)$$

由式(1)、式(2)得  $S(0) = a_0 = 3$ ,  $S'(0) = a_1 = 1$ . 将它们代入式(3)、式(4)得

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 1 = -C_1 + C_2, \end{cases}$$

即  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ .

将它们代入式(3)得  $S(x) = e^{-x} + 2e^x (x \in (-\infty, +\infty))$ .

**附注**  $S(x)$  也可以按以下方法快捷计算:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n \\ &= 2e^x + e^{-x} \quad (x \in (-\infty, +\infty)). \end{aligned}$$

(17)

**分析** 先算函数  $f(x, y)$  的所有驻点, 然后判断它们是否为极值点, 由此即可得到  $f(x, y)$  的极值.

**精解**  $f(x, y)$  的定义域为  $xOy$  平面, 在其上具有二阶连续偏导数, 且

$$f'_x = \left(x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}, \quad f'_y = \left(1 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y},$$

$$\text{由 } \begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} x^2 + y + \frac{x^3}{3} = 0, \\ 1 + y + \frac{x^3}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \text{ 和 } \left(1, -\frac{4}{3}\right).$$

$$\text{由 } f''_{xx} = \left(2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}, \quad f''_{yy} = \left(2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}, \quad f''_{xy} = \left(x^2 + 1 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y},$$

$$\begin{aligned} \Delta &= f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \\ &= \left[ \left(2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right) \cdot \left(2 + y + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^2 + 1 + y + \frac{x^3}{3}\right)^2 \right] e^{2(x+y)} \end{aligned}$$

得  $\Delta\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = -2e^{-\frac{10}{3}} < 0$ , 以及

$$f''_{xx}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{1}{3}} > 0, \Delta\left(1, -\frac{4}{3}\right) = 2e^{-\frac{2}{3}} > 0,$$

所以,  $f(x, y)$  仅有极小值  $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{-\frac{1}{3}}$ , 无极大值(注意: 点  $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$  不是  $f(x, y)$  的极值点).

**附注** 应熟练掌握二元函数的极值计算方法.

(18)

**分析** (I) 由于  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 所以可利用拉格朗日中值定理证明本小题.

(II) 由(I)及  $f'(x)$  是偶函数知,  $f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$ , 于是对辅助函数

$F(x) = e^x[f'(x) - 1]$  在  $[-1, 1]$  上应用罗尔定理即可证明本小题.

**精解** (I) 由于  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 所以存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi)(1-0) = f(1) - f(0)$ , 即

$$f'(\xi) = 1 - f(0). \quad (1)$$

由于  $f(x)$  是奇函数, 所以有  $f(0) = -f(0)$ , 由此得到  $f(0) = 0$ . 将它代入式(1)得证, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ .

(II) 由  $f(x)$  是可导的奇函数知  $f'(x) (x \in [-1, 1])$  是偶函数, 所以由(I)知存在  $\xi \in (0, 1)$  和  $-\xi \in (-1, 0)$ , 使得  $f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$ .

作辅助函数  $F(x) = e^x[f'(x) - 1]$ , 则  $F(x)$  在  $[-\xi, \xi]$  上可导, 且  $F(-\xi) = F(\xi) (=0)$ , 所以由罗尔定理知, 存在  $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ , 使得  $F'(\eta) = 0$ , 即  $e^\eta[f''(\eta) + f'(\eta) - 1] \big|_{x=\eta} = 0$ . 由此证得存在  $\eta \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

**附注** (II) 中的辅助函数  $F(x)$  是按以下方法作出的:

将欲证的等式  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$  中的  $\eta$  改为  $x$  得

$$f''(x) + f'(x) = 1, \text{ 即 } [f'(x) - 1]' + [f'(x) - 1] = 0.$$

解此以  $f'(x) - 1$  为未知函数的一阶微分方程得

$$f'(x) - 1 = Ce^{-\int dx} = Ce^{-x}, \text{ 即 } e^x[f'(x) - 1] = C.$$

故令辅助函数为  $F(x) = e^x[f'(x) - 1]$ .

本题的证明方法见《高分突破》04.

(19) (0, 0, 1.4)

**分析** (I) 写出  $L$  的参数方程后, 即可得旋转曲面  $\Sigma$  的方程.

(II) 记  $\Omega$  的形心为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 则由  $\Omega$  的对称性知  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , 而  $\bar{z}$  可按以下公式计算:

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv}.$$

**精解** (I)  $L$  的方程为

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0}, \text{ 即 } \begin{cases} x = -t + 1, \\ y = t, \\ z = t. \end{cases}$$

$L$  绕  $z$  轴旋转一周所得旋转曲面  $\Sigma$  的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (-t + 1)^2 + t^2, \\ z = t, \end{cases}$$

消去参数  $t$ ,  $\Sigma$  的方程成为  $x^2 + y^2 = 2z^2 - 2z + 1$ .

(II) 由(I)知  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2z^2 - 2z + 1, 0 \leq z \leq 2\}$ , 记  $\Omega$  的形心为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

则  $\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv}$ . 由于  $\Omega$  关于平面  $x = 0$  对称, 在对称点处  $x$  的值互为相反数, 所以  $\iiint_{\Omega} x dv = 0$ , 从而  $\bar{x} = 0$ . 同样可得  $\bar{y} = 0$ . 下面计算  $\bar{z}$ :

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv}, \quad (1)$$

其中  $\iiint_{\Omega} dv = \int_0^2 dz \iint_{D_z} dv$  (其中  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2z^2 - 2z + 1\}$  是  $\Omega$  的竖坐标为  $z \in [0, 2]$

的截面在  $xOy$  平面的投影)

$$= \int_0^2 \pi(2z^2 - 2z + 1) dz = \frac{10}{3}\pi,$$

$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_0^2 dz \iint_{D_z} z dv = \int_0^2 z \cdot \pi(2z^2 - 2z + 1) dz = \frac{14}{3}\pi.$$

将它们代入式(1)得

$$\bar{z} = \frac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{10}{3}\pi} = 1.4.$$

因此  $\Omega$  的形心坐标为  $(0, 0, 1.4)$ .

**附注** 要学会计算不在  $xOz$  平面或  $yOz$  平面上的直线绕  $z$  轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

本题是综合题, 有关计算方法见《高分突破》13.

(20)

**分析** 设  $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , 将它代入  $AC - CA = B$  转化成四元线性方程组, 由该方程组有解算出  $a, b$  的值, 并解该方程组得到所有的  $C$ .

**精解** 设  $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , 则  $AC - CA = B$  成为

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

所以,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  满足非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, & (1) \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, & (2) \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, & (3) \\ x_2 - ax_3 = b. & (4) \end{cases}$$

由所给矩阵方程有解知, 上述方程组有解, 因此

$$\text{式(1) + 式(4) 得 } b = 0,$$

$$\text{式(1) + 式(2) + 式(3) } \cdot a \text{ 得 } 1 + a = 0, \text{ 即 } a = -1.$$

将  $a = -1, b = 0$  代入式(1) ~ 式(4)得

$$(I) \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

显然它与方程组

$$(II) \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

同解. (II) 的导出组的基础解系为  $(1, -1, 1, 0)^T, (1, 0, 0, 1)^T$ , 此外 (II) 有特解  $(1, 0, 0, 0)^T$ , 所以 (II) 的通解, 即 (I) 的通解为

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4)^T &= C_1(1, -1, 1, 0)^T + C_2(1, 0, 0, 1)^T + (1, 0, 0, 0)^T \\ &= (C_1 + C_2 + 1, -C_1, C_1, C_2)^T. \end{aligned}$$

因此, 所有的  $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + 1 & -C_1 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$  (其中  $C_1, C_2$  是任意常数).

**附注** 本题采用的将矩阵方程转换成线性方程组的方法, 是求解矩阵方程的常用方法.

(21)

**分析** (I) 将  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3)\alpha$ ,  $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = (x_1, x_2, x_3)\beta$  代入  $f(x_1, x_2, x_3)$ , 即可证明它的矩阵为  $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ .

(II) 本小题只要证明: 当  $\alpha, \beta$  是正交单位向量组时, 构造正交矩阵  $Q$ , 使得在正交变换  $x = Qy$  ( $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$ ) 下,  $f$  的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$  即可.

**精解** (I) 由于  $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , 所以二

次型  $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2$  的矩阵为  $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} = \alpha\alpha^T$  (实对称矩阵).

同样可知, 二次型  $(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$  的矩阵为  $\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$  (实对称矩阵).

所以, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵为  $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$  (实对称矩阵).

(II) 当  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  是正交单位向量组时, 必可以找到与  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  都正交的单位向量  $\boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, c_3)$ , 记  $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ , 则  $\boldsymbol{Q}$  是正交矩阵. 记

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{x} \text{ (其中 } \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \text{)},$$

即  $\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \\ y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \end{cases}$  则在正交变换  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$  下, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形  $2y_1^2 + y_2^2$ , 即  $f(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}} 2y_1^2 + y_2^2$ .

附注 (i) 当  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^T$  时,

$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}$  为数, 而  $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$  是三阶实对称矩阵, 且

$$r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 为非零向量时,} \\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 为零向量时.} \end{cases}$$

(ii) 要熟练掌握二次型化标准形的有关理论与方法.

(22)

分析 (I) 画出  $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$  对应的函数  $y = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$  的图形, 然后用分布函数定义计算  $Y$  的分布函数.

(II) 由  $Y$  的定义知  $\{X \leq Y\} = \{X < 2\}$ , 由此即可得到  $P(X \leq Y)$ .

精解 (I) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ , 即  $\int_0^3 \frac{1}{a} x^2 dx = 1$  得  $a = 9$ , 所以  $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$F(y) = P(Y \leq y). \quad (1)$$

记  $y = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$  则它的图形如图 B-13-3 所示. 由图可得

当  $y < 1$  时,  $P(Y \leq y) = P(\emptyset) = 0$ ;

当  $1 \leq y < 2$  时,  $P(Y \leq y) = P(\{1 < x \leq y\} \cup \{X \geq 2\})$

$$= P(1 < X \leq y) + P(X > 2)$$

$$= \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx + \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{27}(y^3 + 18);$$

当  $y \geq 2$  时,  $P(Y \leq y) = P(\Omega) = 1$ .



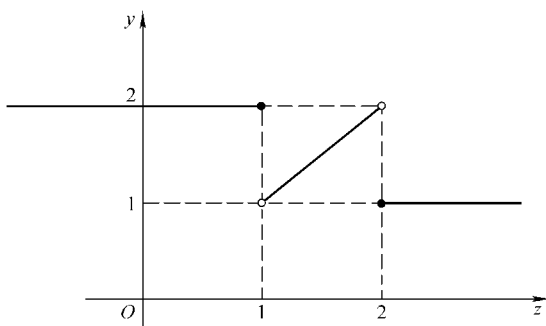


图 B-13-3

将以上计算代入式(1)得

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{1}{27}(y^3 + 18), & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

(II) 由于  $\{X \leq Y\} = \{X \leq 2\}$ , 所以

$$P(X \leq Y) = P(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27}.$$

**附注** 在计算  $F(y)$  与  $P(X \leq Y)$  时应充分利用  $y = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$  的图形.

应熟练掌握用分布函数定义计算随机变量函数的分布函数方法.

(23)

**分析** 用矩估计法与最大似然估计法计算  $\theta$  的矩估计量与最大似然估计量.

**精解** (I) 由于  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx$

$$= \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}} d\left(-\frac{\theta}{x}\right) = \theta e^{-\frac{\theta}{x}} \Big|_0^{+\infty} = \theta,$$

所以由矩估计法, 令  $EX = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 即  $\theta = \bar{X}$  得  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X}$ .

(II) 记  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数为

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x_1^3} e^{-\frac{\theta}{x_1}} \cdot \frac{\theta^2}{x_2^3} e^{-\frac{\theta}{x_2}} \cdots \frac{\theta^2}{x_n^3} e^{-\frac{\theta}{x_n}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

显然  $L(\theta)$  的最大值只能在  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  上取到, 所以可简化似然函数为

$$L(\theta) = \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

取对数得,  $\ln L(\theta) = \ln \frac{1}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} + 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i},$

对  $\theta$  求导得

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

于是由  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$  得  $\theta$  的最大似然估计值为  $\frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ ,

所以,  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ .

**附注** 应熟练掌握总体未知参数的矩估计法与最大似然估计法.

## 2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

#### (1) C

**分析** 分别确定曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  的竖直和非铅直渐近线的条数即可.

**精解**  $y$  在点  $x = -1, 1$  处无定义, 但

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \infty,$$

所以, 所给曲线只有一条铅直渐近线  $x = 1$ . 此外, 由

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{(x^2 - 1)x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$$

知, 所给曲线只有一条非铅直渐近线  $y = 1$  (它为水平渐近线).

因此本题选(C).

**附注** 斜渐近线  $y = ax + b$  的计算公式是  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax)$  (当以上某个极限不存在时应考虑  $x \rightarrow +\infty$  与  $x \rightarrow -\infty$  时的极限).

#### (2) A

**分析** 按导数定义计算  $y'(0)$ .

**精解** 由于  $y(0) = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} y'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} (e^{2x} - 2)(e^{3x} - 3) \cdots (e^{nx} - n) \\ &= 1 \cdot (-1)(-2) \cdots [-(n-1)] = (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

因此本题选(A).

**附注** 用以下方法也可计算  $y'(0)$ :

$$\begin{aligned} \text{由于 } y'(x) &= \{ (e^x - 1) [(e^{2x} - 2)(e^{3x} - 3) \cdots (e^{nx} - n)] \}' \\ &= e^x (e^{2x} - 2)(e^{3x} - 3) \cdots (e^{nx} - n) + (e^x - 1) [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)]', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } y'(0) &= 1 \cdot (-1)(-2) \cdots [-(n-1)] + 0 \cdot [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)]' \Big|_{x=0} \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

#### (3) B

**分析** 逐一考虑选项的正确性, 直到获得正确选项为止.

**精解** 对选项(A), 设  $f(x, y) = |x| + |y|$ , 则它在点  $(0, 0)$  处连续, 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}}$

$\frac{f(x, y)}{|x| + |y|} = 1$ , 则由  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)}$  不存在知,  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不可微. 所以(A)不能选.

对选项(B), 由  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在, 且  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续知,  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时,

$$f(x, y) = f(0, 0) + o(x^2 + y^2) = f(0, 0) + 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

即此时,  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微.

因此本题选(B).

**附注** 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微的定义如下:

设函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内有定义. 如果

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

其中  $A, B$  是常数, 则称  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微.

(4) **D**

**分析** 画出函数  $y = e^{x^2} \sin x$  在  $[0, 3\pi]$  上的概图, 就可由定积分的几何意义得到正确选项.

**精解** 函数  $y = e^{x^2} \sin x$  在  $[0, 3\pi]$  上的概图如图 B-12-1 所示, 由图可知,

$$I_1 = D_1 \text{ 的面积,}$$

$$I_2 = D_1 \text{ 的面积} - D_2 \text{ 的面积,}$$

$$I_3 = D_1 \text{ 的面积} - D_2 \text{ 的面积} + D_3 \text{ 的面积.}$$

于是有  $I_2 < I_1$ . 此外, 由  $D_3$  的面积  $> D_2$  的面积知  $I_3 > I_1$ , 所以有

$$I_2 < I_1 < I_3.$$

因此本题选(D).

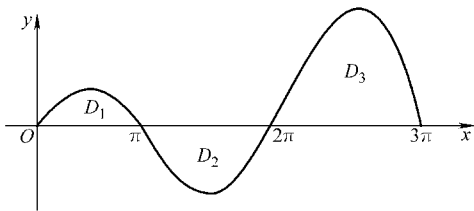


图 B-12-1

**附注**  $D_3$  的面积  $> D_2$  的面积可从图中看出, 也可证明如下:

$$\begin{aligned} D_3 \text{ 的面积} &= \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x \, dx \stackrel{\text{令 } t = x - \pi}{=} \int_{\pi}^{2\pi} -e^{(t+\pi)^2} \sin t \, dt \\ &> \int_{\pi}^{2\pi} -e^{t^2} \sin t \, dt = D_2 \text{ 的面积.} \end{aligned}$$

(5) **C**

**分析** 只要在  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  中找到三个向量, 以它们为列的矩阵的行列式为零即可.

**精解** 由于

$$|(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0,$$

所以, 向量组  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

因此本题选(C).

**附注** 判别  $n$  个  $n$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的线性相关性的快捷方法是, 构造矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则

当  $|A| = 0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关;

当  $|A| \neq 0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.

(6) B

**分析** 利用  $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  即可算出  $Q^{-1}AQ$ .

**精解** 由于  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以, } Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此本题选(B).

**附注** 本题也可用以下方法快捷计算:

由  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  知,  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda = 1$  的两个线性无关的特征向量,

所以  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2$  也是  $A$  的对应特征值  $\lambda = 1$  的两个线性无关的特征向量, 因此, 对于  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$  有

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7) A

**分析** 写出  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ , 然后计算  $\iint_{x \leq y} f(x, y) d\sigma$  即可.

**精解**  $X$  与  $Y$  的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

所以, 由  $X$  与  $Y$  相互独立得  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4e^{-x} \cdot e^{-4y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{由此得到, } P(X < Y) &= \iint_{x < y} f(x, y) d\sigma = \iint_{0 \leq x < y} 4e^{-x} \cdot e^{-4y} d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} 4e^{-x} \cdot e^{-4y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} (-e^{-4y}) \Big|_{y=x}^{y=+\infty} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

因此本题选(A).

**附注** 设  $(X, Y)$  是连续型随机变量,  $D$  是平面区域, 要计算概率  $P((X, Y) \in D)$ , 应先确定二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ , 然后计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ .

(8) **D**

**分析** 两段木棒的长度分别为  $X$  与  $1 - X$ , 其中  $X \sim U(0, 1)$ , 由此即可算出两段木棒长度的相关系数.

**精解** 设其中一段木棒长为  $X$ , 则  $X \sim U(0, 1)$ , 且另一段木棒长为  $Y = 1 - X$ , 容易知道

$$D(Y) = D(1 - X) = D(X) = \frac{1}{12} \neq 0,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, 1 - X) = \text{Cov}(X, -X) = -DX.$$

$$\text{所以, 两段木棒长度的相关系数 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = -1.$$

因此本题选(D).

**附注** 本题可按以下结论快捷算得  $\rho_{XY} = -1$ .

设  $X, Y$  是随机变量, 如果存在常数  $a, b$ , 使得  $P(Y = aX + b) = 1$ , 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & \text{当 } a > 0 \text{ (此时称 } X \text{ 与 } Y \text{ 正向关)}, \\ -1, & \text{当 } a < 0 \text{ (此时称 } X \text{ 与 } Y \text{ 负相关)}. \end{cases}$$

## 二、填空题

(9)  **$f(x) = e^x$**

**分析** 从求解二阶常系数齐次线性微分方程  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  入手求  $f(x)$  的表达式.

**精解**  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  是二阶常系数齐次线性微分方程, 它的特征方程  $r^2 + r - 2 = 0$  有根  $r = 1, -2$ , 所以通解为

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \quad (1)$$

将式(1)代入  $f''(x) + f(x) = 2e^x$  得

$$2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x,$$

所以  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , 将它们代入式(1)得  $f(x) = e^x$ .

**附注** 本题也可以按以下方法计算  $f(x)$  的表达式:

由  $f''(x) + f(x) = 2e^x$  得  $f''(x) = 2e^x - f(x)$ . 将它代入  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  得

$$f'(x) - 3f(x) = -2e^x \quad (\text{一阶线性微分方程}),$$

它的通解为

$$f(x) = e^{3x}(C + e^{-2x}) = Ce^{3x} + e^x. \quad (2)$$

将式(2)代入  $f''(x) + f(x) = 2e^x$  得  $C = 0$ . 将它代入式(2)得  $f(x) = e^x$ .

$$(10) \quad \frac{1}{2}\pi$$

**分析** 先令  $t = x - 1$ , 将积分区间转换成对称区间  $[-1, 1]$ , 然后积分.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx & \stackrel{\text{令 } t = x - 1}{=} \int_{-1}^1 (t + 1) \sqrt{1 - t^2} dt \\ & = \int_{-1}^1 t \sqrt{1 - t^2} dt + \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt \\ & = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt \quad (\text{由于 } t \sqrt{1 - t^2} \text{ 是奇函数, } \sqrt{1 - t^2} \text{ 是偶函数}) \\ & = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

**附注** 本题解答有两点值得注意.

(i) 令  $t = x - 1$  使积分区间转换成对称区间  $[-1, 1]$ , 然后利用对称区间上的定积分性质计算;

$$(ii) \text{ 利用定积分的几何意义得 } \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{4}\pi.$$

以上两点, 使得本题计算十分快捷.

$$(11) \quad \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

**分析** 记  $u = xy + \frac{z}{y}$ , 为了计算  $\text{grad} u$ , 需算出  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ , 因此从计算  $du$  入手.

$$\text{精解} \quad \text{由于 } du = d(xy) + d\frac{z}{y} = xdy + ydx + \frac{ydz - zdy}{y^2}$$

$$= ydx + \left(x - \frac{z}{y^2}\right)dy + \frac{1}{y}dz,$$

所以  $\frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{z}{y^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y}$ . 因此

$$\begin{aligned} \text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} &= \text{grad} u \Big|_{(2,1,1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(2,1,1)} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(2,1,1)} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(2,1,1)} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

**附注** 当要同时计算三元可微函数  $f(x, y, z)$  的三个偏导数时, 总是从计算全微分  $df$  入手, 特别是当  $f$  是  $x, y, z$  的三元复合函数时, 采用这一方法将使计算快捷.

$$(12) \quad \frac{\sqrt{3}}{12}$$

**分析** 记  $\Sigma$  在  $xOy$  平面上的投影为  $D$ , 则  $D = \{(x, y) \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ . 本题可从将所给的曲面积分转换成  $D$  上的二重积分入手.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \iint_{\Sigma} y^2 dS &= \iint_D y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \Big|_{z=1-x-y} d\sigma \\ &= \sqrt{3} \iint_D y^2 d\sigma = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y^2 dy \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

**附注** 本题改为  $\iint_{\Sigma^+} y^2 dx dy$  ( $\Sigma^+$  是  $\Sigma$  的上侧), 也是很容易计算的:

$$\iint_{\Sigma^+} y^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{12}.$$

$$(13) \quad 2$$

**分析**  $E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  可相似对角化, 写出它的对角矩阵即可算出  $E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  的秩.

**精解**  $E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  是实对称矩阵, 所以可相似于对角矩阵  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ , 其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

是  $E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  的特征值. 显然  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T) = 2$ . (1)

此外, 由  $(E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T)^2 = E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  知  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  都能取值 0 或 1. 因此由式(1)知,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  中只有一个为 0, 其余两个都为 1, 不妨设  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , 则

$$E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

从而  $E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T$  的秩为 2.

**附注**  $\text{tr}(E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T) = 2$  的证明如下:

记  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , 则  $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ , 所以

$$E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & 1 - x_2^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{pmatrix}.$$

由此可得  $\text{tr}(E - \mathbf{x}\mathbf{x}^T) = (1 - x_1^2) + (1 - x_2^2) + (1 - x_3^2) = 3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2$  (其中  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\mathbf{x}\|^2 = 1$ ).



$$(14) \quad \frac{3}{4}$$

分析 利用条件概率计算公式求  $P(AB | \bar{C})$ .

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad P(AB | \bar{C}) &= \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{1 - P(C)} \\ &= \frac{P(AB)}{1 - P(C)} \quad (\text{由 } A, C \text{ 互不相容知 } AC = \emptyset, \text{ 所以 } ABC = \emptyset, \text{ 故 } P(ABC) = 0) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

附注 题解中利用了多个概率计算公式, 其中特别是

$$P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC).$$

### 三、解答题

(15)

$$\begin{aligned} \text{分析} \quad \text{由于 } x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} &= x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \\ &\geq x \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2, \end{aligned}$$

所以, 只要证明  $x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2 \geq 0 (x \in (-1, 1))$  即可.

精解 当  $x \in [0, 1)$  时有  $\ln \frac{1+x}{1-x} - x \geq 0$ . 为了证明这一不等式, 作辅助函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - x$ , 则  $f(x)$  在  $[0, 1)$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} - 1 = \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0,$$

所以在  $[0, 1)$  上  $f(x) \geq f(0)$ , 即  $\ln \frac{1+x}{1-x} - x \geq 0$ . 从而  $x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2 \geq 0$ .

由于上述不等式左边是偶函数, 因此  $x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2 \geq 0$  在  $(-1, 1)$  上成立. 由此推得

$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0 \quad (-1 < x < 1),$$

$$\text{即} \quad x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1).$$

附注 不先化简而直接证明题中不等式是比较复杂的, 故对它作两次化简:

(i) 将欲证的不等式  $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0 (-1 < x < 1)$  左边的函数缩小成  $x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2$ , 故只要证明  $x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2 \geq 0 (-1 < x < 1)$  即可.

(ii) 将  $x$  限制在  $[0, 1)$  上, 则  $x \ln \frac{1+x}{1-x} - x^2 \geq 0$  又可进一步化简为  $\ln \frac{1+x}{1-x} - x \geq 0$ .

有关不等式证明的快捷方法见《高分突破》05.

(16)

**分析** 按二元函数极值计算方法计算.

**精解** 由于  $f'_x = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ ,  $f'_y = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ ,

所以由  $\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 1-x^2 = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$  得  $f(x, y)$  的可能极值点为  $(1, 0)$  和  $(-1, 0)$ .

由  $A = f''_{xx} = (-3x + x^3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ ,

$B = f''_{xy} = -(1-x^2)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ ,

$C = f''_{yy} = -x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

可知,  $A|_{(1,0)} = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$ ,  $A|_{(-1,0)} = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0$ ,

$(AC - B^2)|_{(1,0)} = -2e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)e^{-\frac{1}{2}} > 0$ ,  $(AC - B^2)|_{(-1,0)} = 2e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} > 0$ .

因此  $f(x, y)$  有极大值  $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$ , 极小值  $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$ .

**附注** 设  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数,  $(x_0, y_0)$  是它的可能极值点, 且记  $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ , 则  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  的极小值点(极大值点)的充分条件是

$$AC - B^2 > 0 \text{ 与 } A > 0 (A < 0).$$

(17)

**分析** 用缺项幂级数的收敛域计算方法计算所给幂级数的收敛域, 然后将所给幂级数表示成两个幂级数之和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n},$$

且分别计算这两个幂级数的和函数.

**精解** 记  $u(x) = \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3}{2(n+1) + 1} x^{2n+2}}{\frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}} = |x|^2,$$

所以, 所给幂级数的收敛区间为  $\{x \mid |x|^2 < 1\} = (-1, 1)$ . 当  $x = -1, 1$  时, 所给幂级数都成为

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1}$ , 它的通项极限不为零, 所以发散. 因此, 所给幂级数的收敛域为  $(-1, 1)$ .

在  $(-1, 1)$  内, 记所给幂级数的和函数为  $s(x)$ , 则

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n + 1} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}$$

记为

$$\stackrel{\text{记为}}{=} s_1(x) + s_2(x). \quad (1)$$

在  $(-1, 1)$  内,

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n+1})' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' \\ &= \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

在  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  上,

$$\begin{aligned} s_2(x) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \right) \\ &= \frac{1}{x} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$s(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

此外, 由  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$  知,  $x=0$  时,  $s(x)=3$ .

$$\text{因此, } s(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 3, & x=0. \end{cases}$$

**附注**  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  上的  $s_2(x)$  也可以按以下方法计算:

$$\begin{aligned} s_2(x) &= \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n} dt = \frac{2}{x} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt \\ &= \frac{2}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

有关幂级数收敛域与和函数的计算方法见《高分突破》16.

(18)

**分析** 写出  $L$  的切线方程, 建立关于  $f(t)$  的微分方程, 求解得到  $f(t)$ . 由此即可算得题中无界区域的面积.

**精解** 由于  $L$  在点  $(x, y) = (f(t), \cos t)$  (即  $L$  上对应参数为  $t$  的点) 处的切线方程为

$$Y - \cos t = \frac{dy}{dx} \Big|_t [X - f(t)],$$

即

$$Y - \cos t = \frac{-\sin t}{f'(t)}[X - f(t)],$$

所以它与  $x$  轴的交点为  $\left(\frac{\cos t}{\sin t}f'(t) + f(t), 0\right)$ , 因此由题设得

$$\left[\frac{\cos t}{\sin t}f'(t) + f(t) - f(t)\right]^2 + (0 - \cos t)^2 = 1,$$

即

$$[f'(t)]^2 = \tan^2 t - \sin^2 t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

于是, 由  $f'(t) > 0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$  得

$$f'(t) = \sqrt{\tan^2 t - \sin^2 t} = \sec t - \cos t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

从而  $f(t) = f(0) + \int_0^t (\sec t - \cos t) dt = \ln |\sec t + \tan t| - \sin t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ .

显然, 当  $t \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$  时,  $x = f(t) = \ln |\sec t + \tan t| - \sin t \rightarrow +\infty$ . 故位于曲线  $L$ ,  $x$  轴与  $y$  轴之间的区域是无界区域, 记它为  $G$ , 则

$$\begin{aligned} G \text{ 的面积} &= \int_0^{+\infty} y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot df(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (\sec t - \cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**附注** 顺便画出  $L$  的概图.

$L$  通过点  $(0, 1)$ .

$$\text{由} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{f'(t)} = -\frac{\sin t}{\sec t - \cos t} = -\cot t < 0 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

知曲线  $L$  对应的函数单调减少.

$$\text{由} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\csc^2 t}{\sec t - \cos t} > 0 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

知, 曲线  $L$  是凹的. 因此  $L$  如图 B-12-2 所示,  $G$  如图中阴影部分所示.

本题是综合题, 有关内容与方法见《高分突破》09, 18.

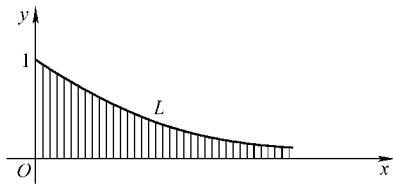


图 B-12-2

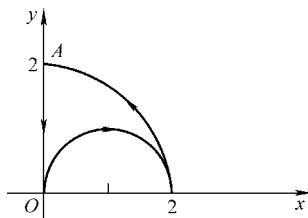


图 B-12-3

(19)

**分析** 画出  $L$  的图形, 然后用格林公式计算曲线积分  $J$ .**精解**  $L$  如图 B-12-3 所示, 由图可知,

$$\begin{aligned}
 J &= \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\
 &= \oint_{L+\overline{AO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{\overline{AO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy, \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } \oint_{L+\overline{AO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy &\stackrel{\text{格林公式}}{=} \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + x - 2y) - \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y) \right] d\sigma \\
 &\quad (\text{其中 } D \text{ 是由闭曲线 } L + \overline{AO} \text{ 围成的闭区域}) \\
 &= \iint_D d\sigma = \frac{\pi}{2}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\overline{AO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy = \int_2^0 -2y dy = 4. \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$J = \frac{\pi}{2} - 4.$$

**附注** 关于坐标的曲线积分  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , 当  $L$  不是闭曲线时, 适当添上一段曲线  $L_1$ , 使得  $L + L_1$  是闭曲线(不妨设为正向), 由此即可使用格林公式快捷计算  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ :

$$\begin{aligned}
 \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \oint_{L+L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\
 &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \right) d\sigma - \int_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,
 \end{aligned}$$

其中  $D$  是由  $L + L_1$  围成的闭区域.

关于坐标曲线积分的快捷计算方法见《高分突破》14.

(20)

**分析** (I) 按第一行展开计算行列式  $|A|$ .

(II) 令  $|A| = 0$ , 算出的  $a$  值中, 能使  $\overline{A} = (A : \beta)$  与  $A$  的秩相等的  $a$  值即为所求. 然后计算对应的方程组  $Ax = \beta$  的通解.

$$\text{精解 (I) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第一行展开}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(II) 由  $|A| = 0$ , 即  $1 - a^4 = 0$  得  $a = 1, -1$ .

当  $a = 1$  时, 对方程组  $Ax = \beta$  的增广矩阵  $\bar{A}$  施行初等行变换:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right), \end{aligned}$$

由此可知, 此时  $r(\bar{A}) > r(A)$ . 所以  $a = 1$  不是所求.

当  $a = -1$  时, 对方程组  $Ax = \beta$  的增广矩阵  $\bar{A}$  施行初等行变换:

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

由此可知, 此时  $r(\bar{A}) = r(A) = 3 < 4$ , 方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解. 因此所求的  $a = -1$ . 由于此时方程组  $Ax = \beta$  与方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

同解. 方程组(1)的导出组  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$  的通解为  $C(1, 1, 1, 1)^T$ , 此外, 方程组

(1)有特解  $(0, -1, 0, 0)^T$ , 所以当  $a = -1$  时, 方程组  $Ax = \beta$  的通解为

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = C(1, 1, 1, 1)^T + (0, -1, 0, 0)^T \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数}).$$

**附注** 题解中值得注意的是: 使  $|A| = 0$  的  $a$  未必都能使方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解, 需对方程  $|A| = 0$  的根作一一检验, 检验它们是否满足  $r(\bar{A}) = r(A) < 4$ .

本题计算的有关方法见《高分突破》21.

(21)

分析 (I) 由  $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$  算出  $a$  的值.(II) 对(I)中算出的  $a$ , 将对称矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  正交相似化, 即  $\mathbf{Q}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$  (对角矩阵), 由此可得, 正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  及  $f$  的标准形.

精解 (I) 由于

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\mathbf{A}^T \mathbf{A}| &= 2(1+a^2)(3+a^2) - (1-a)^2(1+a^2) - 2(1-a)^2 \\ &= 2(1+a^2)(3+a^2) - (1-a)^2(3+a^2) \\ &= (1+a)^2(3+a^2). \end{aligned}$$

于是, 由  $f(x_1, x_2, x_3)$  的秩为 2, 即  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  的秩为 2 得  $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$ , 所以

$$(1+a)^2(3+a^2) = 0.$$

由此得到  $a = -1$ .(II) 当  $a = -1$  时,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

记  $\mathbf{E}$  为 3 阶单位矩阵, 则由

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \end{aligned}$$

得  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda = 0, 2, 6$ .设对应  $\lambda = 0$  的特征向量为  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^T$ , 则  $\boldsymbol{\alpha}$  满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

显然该方程组有解  $\boldsymbol{\alpha} = (-1, -1, 1)^T$ .设对应  $\lambda = 2$  的特征向量为  $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)^T$ , 则  $\boldsymbol{\beta}$  满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

显然该方程组有解  $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1, 0)^T$ .

设对应  $\lambda = 6$  的特征向量为  $\gamma = (c_1, c_2, c_3)^T$ , 则  $\gamma$  应与  $\alpha, \beta$  正交,

$$\text{故有 } \begin{cases} \alpha \cdot \gamma = 0, \\ \beta \cdot \gamma = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -c_1 - c_2 + c_3 = 0, \\ -c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

显然该方程组有解  $\gamma = (1, 1, 2)^T$ .

由于  $\alpha, \beta, \gamma$  两两正交, 现将它们单位化:

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

$$\xi_2 = \frac{\beta}{\|\beta\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T,$$

$$\xi_3 = \frac{\gamma}{\|\gamma\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

记  $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  (正交矩阵), 则正交变换

$$x = Qy \quad (\text{其中 } y = (y_1, y_2, y_3)^T)$$

使得  $f = 2y_2^2 + 6y_3^2$  (标准形).

**附注** 要熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法.

本题的有关计算方法见《高分突破》23.

(22)

**分析** (I) 由  $\{X=2Y\} = \{X=0, Y=0\} \cup \{X=2, Y=1\}$  可以得到  $P(X=2Y)$ .

(II) 由于  $\text{Cov}(X-Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - DY$ , 所以只要算出  $\text{Cov}(X, Y)$  与  $DY$  即可.

**精解** (I) 由于  $\{X=2Y\} = \{X=0, Y=0\} \cup \{X=2, Y=1\}$ , 且  $\{X=0, Y=0\}$  与  $\{X=2, Y=1\}$  互不相容, 所以

$$P(X=2Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=2, Y=1) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

$$(II) \text{Cov}(X-Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - DY, \quad (1)$$

其中  $\text{Cov}(X, Y) = 0 \times 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times \frac{1}{4} +$

$$\begin{aligned} & 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times 0 + \\ & 2 \times 0 \times \frac{1}{12} + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times \frac{1}{12} \\ & = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (2)$$

此外, 关于  $Y$  的边缘概率分布为

$Y$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以,  $DY = E(Y^2) - (EY)^2 = \left(0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3}\right) - \left(0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}\right)^2$

$$= \frac{2}{3}. \quad (3)$$



将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\text{Cov}(X - Y, Y) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.$$

**附注** 由题解知  $\text{Cov}(X - Y, Y) = 0$ , 但  $X - Y$  与  $Y$  却不是相互独立的, 检验如下: 由于

$$P(X - Y = 0, Y = 2) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{12},$$

$$P(X - Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{3},$$

$$P(Y = 2) = \frac{1}{3},$$

所以,  $P(X - Y = 0, Y = 2) \neq P(X - Y = 0)P(Y = 2)$ . 因此  $X - Y$  与  $Y$  不相互独立.

本题是综合题, 有关内容及方法见《高分突破》27.

(23)

**分析** (I) 确定  $Z$  所服从的分布即可得到  $f(z, \sigma^2)$ .

(II) 先写出似然函数  $L(\sigma^2)$ , 然后计算它的最大值点, 即得到  $\hat{\sigma}^2$ .

(III) 计算  $E(\hat{\sigma}^2)$  即可判定  $\hat{\sigma}^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计量.

**精解** (I) 由  $X$  与  $Y$  相互独立知  $Z = X - Y$  服从正态分布, 且由  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  和  $Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$  知

$$EZ = EX - EY = \mu - \mu = 0,$$

$$DZ = DX + DY = \sigma^2 + 2\sigma^2 = 3\sigma^2.$$

所以  $Z \sim N(0, 3\sigma^2)$ , 由此得到  $f(z, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}} \quad (-\infty < z < +\infty)$ .

(II) 记简单随机样本  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  的样本值为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 则似然函数为

$$\begin{aligned} L(\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma}} e^{-\frac{z_1^2}{6\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma}} e^{-\frac{z_2^2}{6\sigma^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma}} e^{-\frac{z_n^2}{6\sigma^2}} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \right)^n (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{6} \sum_{i=1}^n z_i^2 (\sigma^2)^{-1}}, \end{aligned}$$

即

$$\ln L(\sigma^2) = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \right)^n - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n z_i^2 \cdot (\sigma^2)^{-1}.$$

令  $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = 0$  得  $-\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n z_i^2 \cdot \frac{-1}{\sigma^4} = 0$ , 即

$$\sigma^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

因此,  $\sigma^2$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$ .

(III) 由于  $E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2\right) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(Z_i^2)$

$$= \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n [DZ_i + (EZ_i)^2]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3n} \cdot n[ DZ + (EZ)^2 ] \\
 &= \frac{1}{3}(3\sigma^2 + 0) = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

所以,  $\hat{\sigma}^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计量.

**附注** 要熟练掌握服从二维正态分布的随机变量  $(X, Y)$  的性质:

(i) 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

(ii) 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $X$  与  $Y$  相互独立的充分必要条件是  $\rho = 0$ .

(iii) 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$  (其中  $a, b$  是不全为零的常数).

(iv) 设  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且相互独立, 则  $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$  (其中  $a, b$  是不全为零的常数), 且  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0)$ .

本题的有关内容及方法见《高分突破》29.

## 2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

(1) C

**分析** 计算  $y$  的二阶导数, 然后按拐点的充分条件判别.

**精解** 由  $y = (x-1)[(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4] \stackrel{\text{记}}{=} (x-1)\varphi_1(x)$  得  $y''(1) = 2\varphi_1'(1) \neq 0$ , 所以(A)不能选. 同样可知, (B)不能选. 现在考虑选项(C):

则  $y = (x-3)^3[(x-1)(x-2)^2(x-4)^4] \stackrel{\text{记}}{=} (x-3)^3\varphi(x)$  (其中  $\varphi(3) > 0$ ),  
 $y'' = 6(x-3)\varphi(x) + 6(x-3)^2\varphi'(x) + (x-3)^3\varphi''(x).$

显然,  $y''(3) = 0$ , 且由  $y'' \sim 6(x-3)\varphi(x)$  ( $x \rightarrow 3$ ) 知, 在点  $x=3$  的两侧邻近  $y''$  有不同符号, 所以由拐点的充分条件知  $(3, 0)$  是所给曲线的拐点.

因此本题选(C).

**附注** 本题还可利用几何方法快捷求解. 由于

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$y$	+	0	-	0	-	0	+	0	+

所以, 曲线  $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$  的概图如图 B-11-1 所示.

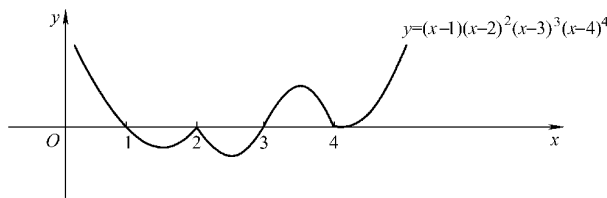


图 B-11-1

由图可知,  $(3, 0)$  是所给曲线的拐点.

(2) C

**分析** 按幂级数收敛域概念排除其中三个不正确选项即可.

**精解** 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的收敛域中心为点  $x=1$ , 所以排除选项(A)、(B). 此外, 由题设数列  $\{S_n\}$  无界知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(2-1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 即点  $x=2$  不属于收敛域, 所以选项(D)也应排除.

因此本题选(C).

**附注** (i) 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  的收敛域可按以下方法计算:

如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  的收敛区间为  $(-\infty, +\infty)$ , 则收敛域也为  $(-\infty, +\infty)$ ;

如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  仅在点  $x = x_0$  处收敛, 则收敛域为  $\{x_0\}$ ;

如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  的收敛区间为  $(x_0 - R, x_0 + R)$  ( $R$  是某个正数), 则收敛域为该区间及其收敛端点.

(ii) 点  $x = 0$  处, 所给幂级数收敛的证明:

由于  $\{a_n\}$  单调减少收敛于零, 所以  $\{a_n\}$  是正项数列, 从而当  $x = 0$  时, 所给幂级数成为交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ . 由莱布尼茨定理知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛, 即  $x = 0$  是所给幂级数的收敛点.

(3) A

**分析** 利用二元函数取极小值的充分条件排除其中三个不正确的选项即可.

**精解** 由于  $z'_x(0, 0) = f'(x) \ln f(y) \big|_{x=y=0} = f'(0) \ln f(0) = 0$ ,  $z'_y(0, 0) = f(x) \cdot \frac{f'(y)}{f(y)} \bigg|_{x=y=0} = f(0) \cdot \frac{f'(0)}{f(0)} = 0$ , 所以点  $(0, 0)$  是二元函数  $z$  的驻点. 于是  $z$  在点  $(0, 0)$  处取得极小值的充分条件是

$$\begin{cases} z''_{xx}(0, 0) > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} z''_{xx}(0, 0) \cdot z''_{yy}(0, 0) - [z''_{xy}(0, 0)]^2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

由式(1)  $z''_{xx}(0, 0) = f''(x) \ln f(y) \big|_{x=y=0} = f''(0) \ln f(0) > 0$  知应排除选项(B)、(C). 此外有

$$\begin{aligned} z''_{xy}(0, 0) &= f'(x) \cdot \frac{f'(y)}{f(y)} \bigg|_{x=y=0} = 0, \\ z''_{yy}(0, 0) &= f(x) \cdot \frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{f^2(y)} \bigg|_{x=y=0} = f''(0), \end{aligned}$$

将它们及  $z''_{xx}(0, 0) = f''(0) \ln f(0)$  代入式(2)得

$$f''(0) \ln f(0) \cdot f''(0) > 0.$$

由此可知, 选项(D)应排除.

因此本题选(A).

**附注** 设二元函数  $f(x, y)$  在其驻点  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内具有二阶连续偏导数, 则  $f(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  的一个极小值(极大值)的充分条件是

$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 (f''_{xx}(x_0, y_0) < 0), \\ f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0. \end{cases}$$

(4) B

**分析** 由于  $I, J, K$  都是  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上的收敛的反常积分或定积分, 所以只要比较被积函数在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上的大小即可.

**精解** 由于对  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  有

$$\sin x < \cos x < \cot x,$$

所以由  $\ln u$  是单调增加函数知

$$\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x,$$

于是,  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$ , 即  $I < K < J$ .

因此本题选(B).

**附注** 当  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续时, 如果  $f(x) < g(x) (x \in (a, b))$ , 则  $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$ .

当  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $(a, b]$  上连续时, 如果  $x = a$  是  $f(x)$  与  $g(x)$  的瑕点, 但  $\int_a^b f(x) dx$  与  $\int_a^b g(x) dx$  都收敛, 并且  $f(x) < g(x) (x \in (a, b))$ , 则  $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$ .

(5) **D**

**分析** 写出对应初等变换的初等矩阵, 并进行运算即可.

**精解** 由题设知

$$AP_1 = B, P_2B = E \quad (E \text{ 是三阶单位矩阵}),$$

所以  $A = BP_1^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1} = P_2P_1^{-1}$  (由于  $P_2^{-1} = P_2$ ).

因此本题选(D).

**附注** 应熟记矩阵初等变换与初等矩阵之间的对应关系.

(6) **D**

**分析** 确定  $r(A^*)$  的值, 从中选取线性无关向量个数为  $4 - r(A^*)$  选项.

**精解** 由于方程组  $Ax = 0$  的基础解系中只有一个解向量, 所以  $r(A) = 4 - 1$ . 从而  $r(A^*) = 1$ . 因此方程组  $A^*x = 0$  的基础解系中应包含有 3 个线性无关的解向量, 故选项(A)、(B)都可排除.

此外, 由  $(1, 0, 1, 0)^T$  是方程组  $Ax = 0$  的解知  $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ , 即  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 所以选项(C)也应排除.

因此本题选(D).

**附注** 应记住以下的结论:

设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n - 1, \\ 0, & r(A) < n - 1. \end{cases}$$

本题是综合题, 有关内容与方法见《高分突破》21.

(7) **D**

**分析** 利用连续型随机变量的分布函数的导数为概率密度这一结论即可.

**精解**  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  都为分布函数时,  $F_1(x)F_2(x)$  也是分布函数, 且它是可导函数, 所以, 其导数  $\frac{d}{dx}[F_1(x)F_2(x)] = \frac{dF_1(x)}{dx}F_2(x) + \frac{dF_2(x)}{dx}F_1(x) = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$  是概率密度.

因此本题选(D).

**附注** 应记住以下结论:

如果  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  都是分布函数, 则  $F_1(x)F_2(x)$  也是分布函数.

(8) **B**

**分析** 利用初等数学知识推出  $UV = XY$  即可得正确选项.

**精解** 由于  $U = \frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$ ,  $V = \frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$ , 所以

$$UV = \frac{1}{4}[(X+Y)^2 - (X-Y)^2] = XY.$$

由此得到  $E(UV) = E(XY) = EX \cdot EY$ .

因此本题选(B).

**附注** 要记住题解中使用的初等数学公式: 对任意实数  $a, b$  有

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|),$$

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

## 二、填空题

(9)  **$\ln(\sqrt{2}+1)$**

**分析** 利用平面曲线弧长的计算公式计算即可.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln \left| \sec x + \tan x \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

**附注** 记住以下的平面曲线弧长计算公式:

设曲线方程为  $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} (t_0 \leq t \leq t_1)$ , 则它的弧长  $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ .

设曲线方程为  $y=f(x) (x_0 \leq x \leq x_1)$ , 则它的弧长  $s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$ .

设曲线方程为  $r=r(\theta) (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$ , 则它的弧长  $s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$ .

(10)  **$y = e^x \sin x$**

**分析** 利用一阶线性微分方程通解公式算出通解, 然后用  $y(0)=0$  确定其中的任意常数.

**精解** 由一阶线性微分方程通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int dx} (C + \int e^{-x} \cos x \cdot e^{\int dx} dx) \\ &= e^{-x} (C + \int e^{-x} \cos x \cdot e^x dx) \\ &= e^{-x} (C + \int \cos x dx) = e^{-x} (C + \sin x), \end{aligned}$$

将  $y(0)=0$  代入上式得  $C=0$ . 所以满足  $y(0)=0$  的解为  $y=e^{-x} \sin x$ .

**附注** 一阶线性微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的通解公式为

$$y = e^{-\int p(x) dx} (C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx),$$

其中出现的不定积分都取原函数.

(11) 4

**分析** 先将  $y=2$  代入  $F(x, y)$ , 然后利用积分上限函数求导计算  $F(x, 2)$  的二阶导数.

**精解**  $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \left. \frac{d^2 F(x, 2)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{2x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt \right|_{x=0}$

$$= \left. \frac{d}{dx} \left( \frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right) \right|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{(1+4x^2)x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 4.$$

**附注** 由于本题是计算点  $(0, 2)$  处的  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ , 所以可先将  $y=2$  代入  $F(x, y)$ , 然后计算  $\left. \frac{d^2 F(x, 2)}{dx^2} \right|_{x=0}$ , 这样比先算出  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}$ , 再将  $x=0, y=2$  代入快捷, 同样利用定义计算  $\left. \frac{d}{dx} \left( \frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right) \right|_{x=0}$  比先算出  $\left. \frac{d}{dx} \left( \frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right) \right|_{x=0}$ , 再将  $x=0$  代入快捷.

(12)  $\pi$

**分析** 将曲线  $L$  写成参数方程, 把所给的曲线积分转换成定积分.

**精解** 由于  $L$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \cos t + \sin t, \end{cases}$  其中, 起点参数  $t = -\pi$ , 终点参数  $t = \pi$ ,

所以

$$\begin{aligned} \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos t (\cos t + \sin t) (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t (-\sin t + \cos t) ] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos^2 t \sin t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t + \cos^2 t - \frac{1}{2} \sin^3 t) dt \\ &= -\int_0^{\pi} \sin^2 t d \sin t + \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \pi. \end{aligned}$$

**附注** 参数  $t$  取为  $-\pi$  到  $\pi$ , 是为了便于后面的定积分计算.

(13) 1

**分析** 利用二次型  $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz$  的矩阵与  $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$  正交相似, 即可求出  $a$ .

**精解** 记  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz$ , 则它的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

正交相似, 所以  $|A| = 0$ , 即  $a = 1$ .

**附注** 设  $A$  是实对称矩阵, 则  $A$  可正交对角化, 也可合同对角化. 当  $A$  与对角矩阵正交相似时, 对角矩阵的对角线上元素都是  $A$  的特征值; 当  $A$  与对角矩阵合同时, 对角矩阵的对角线上元素未必是  $A$  的特征值.

(14)  $\mu(\sigma^2 + \mu^2)$ 

**分析** 由  $\rho = 0$  知服从正态分布的  $(X, Y)$  中的  $X$  与  $Y$  相互独立, 由此即可算出  $E(XY^2)$ .

**精解** 由于  $(X, Y) \sim N(\mu, \mu, \sigma^2, \sigma^2, 0)$  (注意  $\rho = 0$ ), 所以  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X$  与  $Y$  都服从  $N(\mu, \sigma^2)$ . 从而  $E(XY^2) = EX \cdot E(Y^2) = EX[DY + (EY)^2] = \mu(\sigma^2 + \mu^2)$ .

**附注** 二维正态分布的以下性质是常用的, 应记住:

(i) 当  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  时,  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

(ii) 当  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  时,  $X$  与  $Y$  相互独立的充分必要条件是  $\rho = 0$ .

(iii) 当  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $a, b$  是不全为零的常数时,  $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ .

(iv) 当  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ,  $a, b$  是不全为零的常数时,  $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$ .

### 三、解答题

(15)  $e^{-\frac{1}{2}}$ 

**分析** 利用公式  $A^B = e^{B \ln A}$ , 将所给的  $1^\infty$  型未定式极限转成计算  $\frac{0}{0}$  型未定式极限, 然后

综合运用等价无穷小代替和洛必达法则计算这个  $\frac{0}{0}$  型未定式极限即可.

**精解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right], \quad (1)$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ 1 + \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right]}{x}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\
 &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1+x)} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

将它代入式(1)得  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}} = e^{-\frac{1}{2}}$ .

**附注** 本题主要计算  $\frac{0}{0}$  型未定式极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]$ . 题解中, 是综合应用等价无穷小代替与洛必达法则进行快捷计算的. 有关内容见《高分突破》01.

(16)

**分析** 先计算  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , 然后由  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{d}{dy} \left[ \frac{\partial z(1, y)}{\partial x} \right] \Big|_{y=1}$  计算  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ .

**精解** 由  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot y + f'_2 \cdot yg'(x)$  得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z(1, y)}{\partial x} &= f'_1(y, yg(1)) \cdot y + f'_2(y, yg(1)) \cdot yg'(1) \\
 &= f'_1(y, y)y \quad (\text{利用 } g(1) = 1, g'(1) = 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以, } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \frac{d}{dy} \left[ \frac{\partial z(1, y)}{\partial x} \right] \Big|_{y=1} = \frac{d}{dy} [f'_1(y, y)y] \Big|_{y=1} \\
 &= [f''_{11}(y, y)y + f''_{12}(y, y)y + f'_1(y, y)] \Big|_{y=1} \\
 &= f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1) + f'_1(1, 1).
 \end{aligned}$$

**附注** 由于本题是计算在点  $(1, 1)$  处的  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , 所以在算出  $\frac{\partial z}{\partial x}$  后将  $x=1$  代入, 使得计算  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$  成为计算  $f'_1(y, y)y$  在点  $y=1$  处的导数, 这样做快捷些.

回忆第(11)题也是类似处理的.

(17)

**分析** 记  $f(x) = k \arctan x - x$ , 然后由零点定理及函数单调性, 按  $k$  的值讨论方程  $f(x) = 0$  的实根个数.

**精解** 记  $f(x) = k \arctan x - x$ , 显然不论  $k$  取何值,  $x=0$  都是方程  $f(x) = 0$  的实根.

由于  $f(x)$  是连续的奇函数, 因此可从计算方程  $f(x) = 0$  在  $(0, +\infty)$  上的不同实根个数入手.

由于  $f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{(k-1)-x^2}{1+x^2}$ , 所以

当  $k-1 \leq 0$ , 即  $k \leq 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调减少, 于是  $f(x) < f(0) = 0 (x \in (0, +\infty))$ . 由此可知, 此时方程  $f(x) = 0$  在  $(0, +\infty)$  上无实根.

当  $k-1 > 0$ , 即  $k > 1$  时,

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & 0 < x < \sqrt{k-1}, \\ = 0, & x = \sqrt{k-1}, \\ < 0, & x > \sqrt{k-1}. \end{cases}$$

于是, 对  $x \in (0, \sqrt{k-1}]$ , 由  $f(x) > f(0)$  知, 方程  $f(x) = 0$  在  $(0, \sqrt{k-1}]$  上无实根; 对  $x \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$ ,  $f'(x) < 0$ , 并且  $f(\sqrt{k-1}) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , 即

$$f(\sqrt{k-1}) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0,$$

所以由零点定理的推广形式及函数单调性知, 此时方程  $f(x) = 0$  在  $(\sqrt{k-1}, +\infty)$  上有唯一实根, 记为  $x_0$ .

综上所述, 在  $k \leq 1$  时, 方程  $f(x) = 0$  仅有实根  $x = 0$ ; 在  $k > 1$  时方程  $f(x) = 0$  有三个不同实根  $-x_0, 0, x_0$ .

**附注** 本题用几何方法求解十分快捷, 具体如下:

显然,  $k = 0$  时, 所给方程仅有实根  $x = 0$ .

当  $k \neq 0$  时, 所给方程成为  $\arctan x = \frac{1}{k}x$ , 记  $y = \arctan x$ ,  $y = \frac{1}{k}x$ , 则这两条曲线交点个数即为  $\arctan x = \frac{1}{k}x$  的实根个数.

由于  $(\arctan x)' \Big|_{x=0} = 1$ , 所以, 当  $\frac{1}{k} \geq 1$ , 即  $k \leq 1 (k \neq 0)$  时, 两曲线的相对位置如图 B-11-2a 所示. 由图可知, 此时两曲线仅有交点  $(0, 0)$ ; 当  $\frac{1}{k} < 1$ , 即  $k > 1$  时, 两曲线的相对位置如图 B-11-2b 所示, 由图可知, 此时两曲线有三个不同交点.

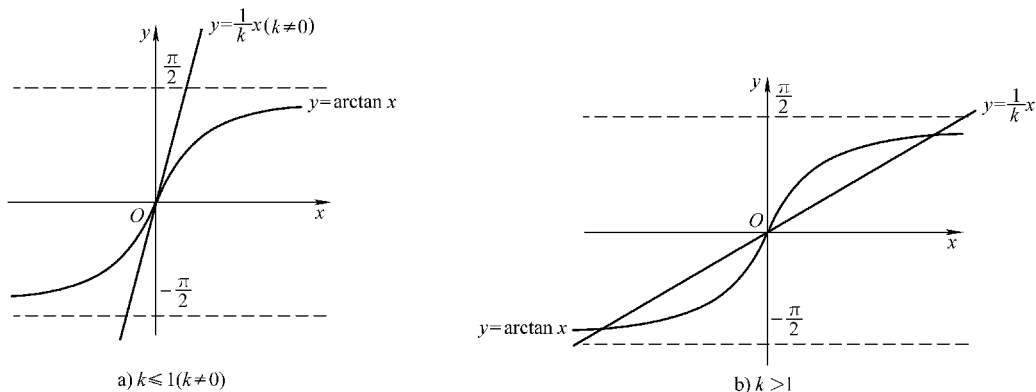


图 B-11-2

综上所述, 当  $k \leq 1$  时, 所给方程仅有一个实根; 当  $k > 1$  时, 所给方程有三个不同实根.

本题是综合题, 有关内容见《高分突破》05.

(18)

**分析** 先用拉格朗日中值定理证明( I )中的不等式, 然后利用数列极限存在准则 II 证明( II ).

**精解** ( I )对函数  $\ln(1+x)$  在  $\left[0, \frac{1}{n}\right] (n=1, 2, \dots)$  上应用拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $[\ln(1+x)]' \big|_{x=\xi} \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1+0)$ , 即

$$\frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

于是有  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$ ,  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1+0} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ , 即

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

( II ) 对  $n=1, 2, \dots$ , 由

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right] \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \quad (\text{利用( I )}) \end{aligned}$$

以及  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

$$\begin{aligned} &> \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \quad (\text{利用( I )}) \\ &= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \end{aligned}$$

知  $\{a_n\}$  单调减少有下界. 因此由数列极限存在准则 II 知,  $\{a_n\}$  收敛.

**附注** 判别数列极限存在, 有两个准则, 它们是

**准则 I** 设有数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$ , 它们满足  $y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, \dots)$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

**准则 II** 单调不减有上界或单调不增有下界数列必有极限.

本题是综合题, 有关内容和方法见《高分突破》02.

(19)

**分析** 运用定积分的分部积分法、二重积分与二次积分的转换计算本题.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad I &= \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy f''_{xy}(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 xy df'_x(x, y) = \int_0^1 \left[ xy f'_x(x, y) \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 x f'_x(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 x f'_x(x, 1) dx - \int_0^1 dx \int_0^1 x f'_x(x, y) dy \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^1 x f'_x(x, y) dy \quad (\text{由 } f(x, 1) = 0 \text{ 知 } f'_x(x, 1) = 0, \text{ 从而 } \int_0^1 x f'_x(x, 1) dx = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 dy \int_0^1 x f'_x(x, y) dx \\
&= - \int_0^1 dy \int_0^1 x df(x, y) \\
&= - \int_0^1 x f(x, y) \Big|_{x=0}^{x=1} dy + \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \\
&= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \quad (\text{由于 } f(1, y) = 0 \text{ 知 } \int_0^1 x f(1, y) dy = 0) \\
&= \iint_D f(x, y) dx dy = a.
\end{aligned}$$

**附注** 本题的积分区域是正方形, 所以二重积分与二次积分的转换、二次积分积分次序更换都很简单.

(20)

**分析** 可用矩阵方程解本题.

**精解** (I) 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示, 所以矩阵方程

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

无解, 其中  $X$  是 3 阶未知矩阵, 从而

$$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) < r(\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (1)$$

对增广矩阵  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  施行初等行变换

$$\begin{aligned}
(\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \\
&\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
&\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right),
\end{aligned}$$

所以由式(1)得  $a=5$ .

(II) 为了确定  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  关于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性表示式, 构造矩阵方程

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad (\text{其中 } Y \text{ 是 3 阶未知矩阵}). \quad (2)$$

对式(2)的增广矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  (将  $a=5$  代入)施行初等行变换:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \\
&\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

所以  $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . 故  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ .

**附注** 求解矩阵方程是计算向量组之间线性表示式的有效方法. 如果  $A$  是可逆矩阵, 则矩阵方程  $AX=B$  可直接获解

$$X = A^{-1}B.$$

对于本题的  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 由于

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

可逆, 且其逆矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 所以

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

故  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ .

本题的有关内容与计算方法见《高分突破》21.

(21)

**分析** (I) 按所给条件, 利用特征值与特征向量概念, 计算  $A$  的特征值与特征向量. 计算时要利用实对称矩阵对应不同特征值的特征向量正交的性质.

(II) 利用(I)将  $A$  正交相似对角化即可得到  $A$ .

**精解** (I) 由题设  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 即

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

知,  $A$  有特征值  $\lambda = -1, 1$ , 对应的特征向量分别为  $C_1(1, 0, -1)^T$ ,  $C_2(1, 0, 1)^T$  (其中  $C_1, C_2$  是任意非零常数).

由于  $r(A) = 2$ , 所以  $A$  的另一个特征值为  $\lambda = 0$ , 记它对应的特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ , 则它与  $(1, 0, -1)^T$ ,  $(1, 0, 1)^T$  都正交, 即满足

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

该方程组的基础解系为  $(0, 1, 0)^T$ . 所以  $\lambda = 0$  对应的特征向量为  $C_3(0, 1, 0)^T$  ( $C_3$  是任意非零常数).

(II) 由于  $A$  的对应特征值  $\lambda = -1, 1, 0$  的特征向量  $(1, 0, -1)^T$ ,  $(1, 0, 1)^T$  和  $(0, 1, 0)^T$  两两正交, 现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 1, 0)^T.$$

$$\text{记 } \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则 } \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**附注** 在第(II)小题中也可以由  $A$  的对应特征值  $\lambda = -1, 1, 0$  的三个特征向量为列向量构成矩阵  $P$ , 即记

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 且 } \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由  $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$  得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

本题是综合题, 有关内容和方法见《高分突破》22.

(22)

**分析** (I) 利用题设  $P(X^2 = Y^2) = 1$ , 即  $P(X=0, Y=-1) = P(X=0, Y=1) = P(X=1, Y=0) = 0$  及  $(X, Y)$  的边缘概率分布计算  $(X, Y)$  的概率分布.

(II) 利用(I)中算得的  $(X, Y)$  的概率分布, 计算  $Z$  的概率分布.

(III) 利用  $(X, Y)$  的概率分布和  $\rho_{XY}$  的计算公式计算  $\rho_{XY}$ .

**精解** (I) 由  $P(X^2 = Y^2) = 1$  及  $Y$  的概率分布得表如下:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$p_1$	0
1	$p_2$	0	$p_3$
$P \cdot j$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

由表可知,  $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ , 所以  $(X, Y)$  的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(II)  $Z$  可能取的值有 -1, 0, 1, 且

$$P(Z = -1) = P(X=1, Y=-1) = \frac{1}{3},$$

$$P(Z = 1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3},$$

$$P(Z = 0) = 1 - P(Z = -1) - P(Z = 1) = \frac{1}{3}.$$

因此  $Z$  的概率分布可如下表所示

$Z$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(III) 由于  $EX = \frac{2}{3}$ ,  $DX = \frac{2}{9}$ ;  $EY = 0$ ,  $DY = \frac{2}{3}$ , 所以由

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = E(XY) = EZ = 0$$

得

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = 0.$$

**附注** 本题表明虽然  $X$  与  $Y$  不相关, 但  $X$  与  $Y$  不独立.

通常, 当具有正方差的随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立时, 必不相关; 但反之未必正确, 而当  $(X, Y)$  服从二维正态分布时,  $X$  与  $Y$  相互独立的充分必要条件为  $X$  与  $Y$  不相关.

(23)

**分析** (I) 用最大似然估计法计算  $\hat{\sigma}^2$ .

(II) 计算统计量  $\hat{\sigma}^2$  的数学期望与方差时, 首先确定它的分布.

**精解** (I) 设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则最大似然函数为

$$\begin{aligned} L(\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_2-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_n-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}, \end{aligned}$$

所以,  $\ln L(\sigma^2) = \ln\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$ , 且

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = 0 \text{ 得 } -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0.$$

解此方程得  $\hat{\sigma}^2$  的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2.$$

因此, 最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2.$$

(II) 容易看到,  $\frac{n \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \sim \chi^2(n)$ , 所以由服从  $\chi^2(n)$  的随机变量的数字特征知

$$E\left(\frac{n \hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = n, \text{ 即 } \frac{n}{\sigma^2} E(\hat{\sigma}^2) = n, \text{ 所以 } E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2.$$

$$D\left(\frac{n \hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = 2n, \text{ 即 } \frac{n^2}{\sigma^4} D(\hat{\sigma}^2) = 2n, \text{ 所以 } D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

**附注** 以下结论是有用的, 应记住.

(i) 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $X$  的一个简单随机样本, 则

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n), \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1), \text{ 其中 } \bar{X} \text{ 是样本均值};$$

(ii) 设  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $EX = n$ ,  $DX = 2n$ .

本题是综合题, 其有关内容和方法见《高分突破》29.



## 2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

(1) C

**分析** 利用重要极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  的推广形式  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$  ( $k$  为常数).

**精解** 
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{-a}{x}\right)^x \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x} \\&= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-a}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x} = \frac{1}{e^{-a} \cdot e^b} = e^{a-b}.\end{aligned}$$

因此本题选(C).

**附注** 本题是  $1^\infty$  型未定式极限. 通常这种极限用以下方法计算:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}, \\ \text{其中 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\&= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\&= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{x}}{\frac{1}{x}} = a - b.\end{aligned}$$

所以, 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = e^{a-b}.$$

显然, 这种方法没有直接利用  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$  简单. 此题表明, 对  $1^\infty$  型未定式极限计算能利用重要极限及其推广形式的应尽量利用, 使计算简捷些.

(2) B

**分析** 为计算  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ , 从计算所给方程两边的全微分入手.

**精解** 对所给方程两边求全微分得

$$F_1' d\left(\frac{y}{x}\right) + F_2' d\left(\frac{z}{x}\right) = 0,$$

即

$$F_1' \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} + F_2' \cdot \frac{xdz - zdz}{x^2} = 0.$$

整理后得

$$dz = \frac{yF_1' + zF_2'}{xF_2'}dx - \frac{F_1'}{F_2'}dy,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yF_1' + zF_2'}{xF_2'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_1'}{F_2'}.$$

从而

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF_1' + zF_2'}{F_2'} + y \left( -\frac{F_1'}{F_2'} \right) = z.$$

因此本题选(B).

**附注** 要同时计算二元复合函数或隐函数的两个偏导数时, 可从计算全微分入手.

### (3) D

**分析** 所给的反常积分是无界函数的反常积分, 有瑕点  $x=1$  和可能瑕点  $x=0$ . 于是应分别考虑  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  和  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  (注意: 被积函数在积分区间上是非负的).

**精解** 对于  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ , 当  $\frac{2}{m} - \frac{1}{n} \geq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{m} - \frac{1}{n}}$  存在, 所以此时  $x=0$  不是瑕点, 即  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  是定积分, 可以理解成收敛的反常积分; 当  $\frac{2}{m} - \frac{1}{n} < 0$  时,  $x=0$  是瑕点, 此时有  $0 < \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$  (对任意正整数  $m, n$ , 都有  $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$ ), 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ x^{\frac{1}{n} - \frac{2}{m}} \cdot \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \right] = 1$ , 所以此时该反常积分收敛. 由上可知, 对任意正整数  $m, n$ ,  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  收敛.

对于  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ , 由于对任意正整数  $m, n$  都有  $0 < \frac{1}{2m} < 1$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2m}} \cdot \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[n]{(1-x)^{\frac{1}{2}} \ln^2(1-x)} = 0,$$

即对于任意正整数  $m, n$ , 该反常积分收敛.

因此本题选(D).

**附注** 应记住无界函数反常积分收敛性的判别法则:

设函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ . 如果存在常数  $0 < q < 1$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x)$  存在, 则反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛; 如果  $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)f(x)$  为正数或无穷大, 则反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

(4) D

分析 利用连续函数的积分和式的极限判定正确选项.

$$\begin{aligned}
 \text{精解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.
 \end{aligned}$$

因此本题选(D).

附注 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

(积分和式)

(5) A

分析 利用矩阵秩公式  $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$  判定正确选项.精解 由  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$  知

$$m = r(\mathbf{E}) = r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}. \quad (1)$$

由此可知,  $r(\mathbf{A}) \geq m, r(\mathbf{B}) \geq m$ .另由  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  分别为  $m \times n$  与  $n \times m$  矩阵知

$$r(\mathbf{A}) \leq m, r(\mathbf{B}) \leq m. \quad (2)$$

由式(1), 式(2)得  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = m$ .

因此本题选(A).

附注 应记住以下关于矩阵秩的公式:

(i) 设  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$ .(ii) 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是  $m \times n$  矩阵, 则  $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$ .(iii) 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  分别是  $m \times n$  与  $n \times m$  矩阵, 则

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n \leq r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

(6) D

分析 利用实对称矩阵  $\mathbf{A}$  可相似对角化, 从而只要根据题设条件确定  $\mathbf{A}$  的特征值即可.精解 由  $\mathbf{A}$  为 4 阶实对称矩阵知  $\mathbf{A}$  可相似对角化, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  是  $A$  的特征值. 由  $A$  满足  $A^2 + A = O$  知这些特征值是方程  $\lambda^2 + \lambda = 0$  的根, 于是  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  只可能为 0 或 -1. 由于  $r(A) = 3$ , 所以这些特征值中有且仅有一个为 0, 其余均为 -1.

因此本题选(D).

**附注** 应记住以下两个结论:

(i) 实对称矩阵不仅可以相似对角化, 而且可以正交相似对角化与合同对角化.

(ii) 当  $n$  阶矩阵满足  $f(A) = O$  (其中  $f(A)$  是  $A$  的多项式) 时,  $A$  的特征值只可能是方程  $f(\lambda) = 0$  的根.

(7) C

**分析** 利用随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$  的性质  $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$  即可算出  $P(X = a)$ .

**精解** 由分布函数性质知

$$P(X=1) = F(1) - F(1^-) = (1 - e^{-1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}.$$

因此本题选(C).

**附注** 本题的随机变量  $X$  既不是离散型的 (因为  $y = F(x)$  的图形不是阶梯形的), 也不是连续型的 (因为  $F(x)$  不是连续函数).

(8) A

**分析** 利用概率密度  $f(x)$  的性质  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  及标准正态分布概率密度和均匀分布概率密度的性质确定正确选项.

**精解** 由  $f(x)$  是概率密度得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \text{ 即 } a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^{+\infty} f_2(x) dx = 1. \quad (1)$$

由于  $f_1(x)$  是标准正态分布的概率密度, 所以  $\int_{-\infty}^0 f_1(x) dx = \frac{1}{2}$ ;

由于  $f_2(x)$  是  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度, 所以  $\int_0^{+\infty} f_2(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}$ .

将它们代入式(1)得  $\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = 1$ , 即  $2a + 3b = 4$ .

因此本题选(A).

**附注** 应记住以下结论:

(i) 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的概率密度为  $f(x)$ , 则  $\int_{-\infty}^{\mu} f(x) dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$ , 特别当

$$\mu=0 \text{ 时有 } \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

(ii) 设  $X \sim U(a, b)$ , 则当  $[c, d] \subseteq [a, b]$  时,  $P(X \in [c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$ .

## 二、填空题

(9) 0

**分析** 由参数方程求导方法算出  $\frac{dy}{dx} = y'_x(t)$  后, 用导数定义计算  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'_x(t) - y'_x(0)}{x(t) - x(0)}.$$

**精解** 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} \int_0^t \ln(1+u^2) du}{\frac{d}{dt} e^{-t}} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2) \stackrel{\text{记}}{=} y'_x(t),$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'_x(t) - y'_x(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-e^t \ln(1+t^2)}{e^{-t} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+t^2)}{e^{-t} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{-t} = 0. \end{aligned}$$

**附注** 算出  $y'_x(t) = \frac{dy}{dx}$  后, 用  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'_x(t) - y'_x(0)}{x(t) - x(0)}$  (即导数定义) 计算  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$  比较快捷.

(10)  $-4\pi$

**分析** 先令  $t = \sqrt{x}$  后再用分部积分法计算.

**精解** 
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx &\stackrel{\text{令 } t = \sqrt{x}}{=} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot 2t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 \sin t dt \\ &= 2 \left( t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} t \sin t dt \right) = 4 \int_0^{\pi} t \cos t dt \\ &= 4 \left( t \cos t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t dt \right) = -4\pi. \end{aligned}$$

**附注** 要熟练掌握定积分的换元积分法与分部积分法.

(11)  $\frac{2}{3}$

**分析** 添上线段  $\overline{BA}$ , 使  $L^- + \overline{BA}$  是正向闭曲线, 然后应用格林公式计算所给的曲线积分, 其中点  $B(-1, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $L^-$  是  $L$  的反向曲线.

**精解**  $L$  如图 B-10-1 所示. 所以

$$\int_L xy dx + x^2 dy = - \int_{L^-} xy dx + x^2 dy$$

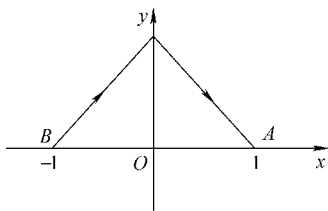


图 B-10-1

$$= - \left( \oint_{L^- + \overline{BA}} xy dx + x^2 dy - \int_{\overline{BA}} xy dx + x^2 dy \right), \quad (1)$$

其中,  $\oint_{L^- + \overline{BA}} xy dx + x^2 dy = \iint_D (2x - x) d\sigma$  ( $D$  是由  $L^- + \overline{BA}$  围成的闭区域)

$$= \iint_D x d\sigma = 0 \quad (\text{由于 } D \text{ 关于 } y \text{ 轴对称, } x \text{ 在对称点处的值互为相反数}),$$

$$\int_{\overline{BA}} xy dx + x^2 dy = 0 \quad (\text{由于 } \overline{BA} \text{ 在直线 } y = 0 \text{ 上}).$$

$$\text{将它们代入式(1)得 } \int_L xy dx + x^2 dy = 0.$$

**附注** 平面上关于坐标的曲线积分, 常用格林公式作快捷计算, 有关内容见《高分突破》14.

$$(12) \quad \frac{2}{3}$$

**分析** 按形心坐标计算公式计算.

**精解**

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z d\sigma}{\iiint_{\Omega} d\sigma}, \quad (1)$$

其中  $\iiint_{\Omega} d\sigma = \int_0^1 dz \iint_{D_z} d\sigma$  (其中  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z\}$  是  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$  平面的投影)

$$= \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2},$$

$$\iiint_{\Omega} z d\sigma = \int_0^1 dz \iint_{D_z} z d\sigma = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{将它们代入式(1)得 } \bar{z} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

**附注** 由于  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面是圆, 被积函数与  $x, y$  无关, 所以  $\iiint_{\Omega} d\sigma$  与  $\iiint_{\Omega} z d\sigma$  都按“先后一”方法计算.

$$(13) \quad 6$$

**分析**  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  生成的空间维数为 2 表明  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ , 由此计算  $a$  的值.

$$\text{精解 记 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}, \text{ 则由题设知 } r(A) = 2.$$

对  $A$  施行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}.$$

于是, 由  $r(A) = 2$  得  $a = 6$ .

**附注** 向量空间维数的概念是:

设  $V$  是向量空间. 如果存在  $n$  个线性无关向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 使得  $V$  中的任一向量都可由这一向量组线性表示, 则称  $V$  的维数为  $n$ .

(14) 2

**分析** 先利用  $X$  的概率分布性质算出  $C$ , 然后由  $E(X^2) = DX + (EX)^2$  计算  $E(X^2)$ .

**精解** 由  $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$ , 即  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} = 1$  得  $Ce = 1$ , 所以  $C = e^{-1}$ . 因此  $X$  的概率分布为  $P(X = k) = \frac{1}{k!} e^{-1} (k = 0, 1, \dots)$ , 即  $X \sim \pi(1)$ . 从而

$$E(X^2) = DX + (EX)^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

**附注** 应该记住服从参数为  $\lambda$  的泊松分布  $\pi(\lambda)$  的随机变量  $X$  的数学期望与方差:  $EX = DX = \lambda$ .

### 三、解答题

(15)

**分析** 先计算对应的齐次线性微分方程的通解  $Y$ , 再计算所给微分方程的一个特解  $y^*$ , 则其通解为  $y = Y + y^*$ .

**精解** 所给微分方程是二阶常系数非齐次线性微分方程, 它对应的齐次线性微分方程的特征方程  $r^2 - 3r + 2 = 0$  的根为 1 与 2, 所以齐次线性微分方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

所给微分方程有特解

$$y^* = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x, \quad (1)$$

显然,  $(y^*)' = [ax^2 + (2a + b)x + b]e^x$ ,  $(y^*)'' = [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b]e^x$ .

将它们代入所给的微分方程得

$$[ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b] - 3[ax^2 + (2a + b)x + b] + 2(ax^2 + bx) = 2x,$$

即

$$-2ax + 2a - b = 2x.$$

比较  $x$  同次幂系数得  $a = -1$ ,  $b = -2$ . 将它们代入式(1)得

$$y^* = (-x^2 - 2x)e^x = -x(x + 2)e^x.$$

因此, 所给微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x + 2)e^x.$$

**附注** 应熟练掌握二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

(其中  $p, q$  是常数,  $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$  或  $[P_l(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x]e^{\alpha x}$ , 这里  $P_m(x)$ ,  $P_l(x)$ ,  $Q_n(x)$  分别是  $m, l, n$  次多项式)的通解计算方法.

(16)

**分析** 对积分上限函数求导, 算出  $f(x)$  的所有驻点, 然后列表确定  $f(x)$  的单调区间与极值.

**精解**  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 在其上  $f(x)$  可导, 且由

$$f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt$$

$$\text{得 } f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + x^2 e^{-x^4} \cdot 2x - x^2 e^{-x^4} \cdot 2x = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

由此得到  $f(x)$  的驻点为  $-1, 0, 1$ . 据此列表如下:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

由表可知  $f(x)$  的单调减少区间为  $(-\infty, -1]$  和  $[0, 1]$ , 单调增加区间为  $[-1, 0]$  和  $[1, +\infty)$ ,  $f(x)$  的极小值为  $f(-1) = f(1) = 0$ , 极大值为

$$f(0) = \int_1^0 (0 - t) e^{-t^2} dt = \int_0^1 t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}).$$

**附注** 要计算  $\int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  的导数, 必须先将  $x$  从被积函数中移走, 故需将  $\int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  改写成  $x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt$  后再求导数.

本题是综合题, 其有关内容与方法见《高分突破》05.

(17)

**分析** (I) 由于两个定积分的积分区间相同, 所以只要比较在  $(0, 1)$  内  $[\ln(1+t)]^n$  与  $t^n (n=1, 2, \dots)$  的大小即可.

(II) 利用(I)的结论和数列极限存在准则 I, 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**精解** (I) 由于对  $n=1, 2, \dots, \lim_{t \rightarrow 0^+} |\ln t| [\ln(1+t)]^n = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n |\ln t| = 0$ , 所以  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  可以理解为连续函数  $|\ln t| [\ln(1+t)]^n$  与  $t^n |\ln t|$  (它们在  $t=0$  处值都取为 0) 在  $[0, 1]$  上的定积分, 所以只要比较  $[\ln(1+t)]^n$  与  $t^n$  在  $(0, 1)$  上的大小.

当  $0 < t < 1$  时,  $0 < \ln(1+t) < t$ , 所以对  $n=1, 2, \dots$  有

$$[\ln(1+t)]^n < t^n,$$

于是有

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|.$$

从而, 对  $n=1, 2, \dots$  有

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

(II) 由(I)的证明知, 对  $n=1, 2, \dots$  有



$$0 < \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \int_0^1 t^n |\ln t| dt &= - \int_0^1 t^n \ln t dt = - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t dt^{n+1} \\ &= - \frac{1}{n+1} \left( t^{n+1} \ln t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^{n+1} \cdot \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

所以式(1)即为

$$0 < \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \frac{1}{(n+1)^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\text{且有 } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

于是, 由数列极限存在准则 I 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt = 0.$$

**附注** 本题(II)也可以不利用(I)的证明结果, 直接计算, 具体如下:

由于, 对于  $n = 1, 2, \dots$  有

$$0 < \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \ln^2 2 \int_0^1 |\ln t| dt,$$

$$\text{并且 } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2 2 \int_0^1 |\ln t| dt = 0 \quad (\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2 2 = 0, \int_0^1 |\ln t| dt \text{ 是收敛的反常积分}),$$

所以, 由数列极限存在准则 I 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt = 0.$$

本题是综合题, 其有关内容与方法见《高分突破》02.

(18)

**分析** 先用缺项幂级数收敛域计算方法算出所给幂级数的收敛域, 然后利用幂级数在收敛域上可逐项积分或求导性质计算其和函数.

**精解** 由于所给幂级数是缺项幂级数, 所以计算收敛域应利用正项级数比值判别法.

记  $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ , 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} x^2 = x^2$$

知, 所给幂级数的收敛区间为  $\{x \mid x^2 < 1\} = (-1, 1)$ .

当  $x = -1, 1$  时, 所给幂级数都成为交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ . 由交错级数的莱布尼茨定理知此交错级数收敛. 因此所给幂级数的收敛域为  $[-1, 1]$ .

对任意  $x \in [-1, 1]$ , 记  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的和函数为  $s(x)$ , 则

$$s(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2} dt$$

$$= x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t^2)^{n-1} dt = x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x \arctan x.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \arctan x \quad (x \in [-1, 1]).$$

**附注** 本题的和函数也可由逐项求导得到.

对任意  $x \in [-1, 1]$ , 记  $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ , 则两边求导得

$$s_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2},$$

所以, 对  $x \in [-1, 1]$ ,  $s_1(x) = s_1(0) + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$  (由于  $s_1(0) = 0$ ), 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \arctan x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

本题的有关内容及方法见《高分突破》16.

(19)

**分析** 先计算轨迹  $C$ , 然后确定  $\Sigma$  在  $xOy$  平面的投影  $D_{xy}$ , 于是将所给曲面积分转换成  $D_{xy}$  上的二重积分, 算出  $I$ .

**精解** 要求轨迹  $C$ , 只要求出点  $P$  的坐标所满足的方程. 故记  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , 则它满足  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - y_0 z_0 = 1$ .

此外, 记  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1$ , 则  $S$  在点  $P$  的法向量为

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)) = (2x_0, 2y_0 - z_0, 2z_0 - y_0),$$

而  $xOy$  平面的法向量为  $(0, 0, 1)$ . 所以, 由  $S$  在点  $P$  处的切平面与  $xOy$  平面垂直得  $(2x_0, 2y_0 - z_0, 2z_0 - y_0) \cdot (0, 0, 1) = 0$ , 即  $x_0, y_0, z_0$  还满足  $2z_0 - y_0 = 0$ .

因此点  $P$  的坐标满足

$$\begin{cases} 2z_0 - y_0 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - y_0 z_0 = 1. \end{cases}$$

故  $C$  的方程为  $\begin{cases} 2z - y = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 2z - y = 0, \\ x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1. \end{cases}$

记  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y)$ , 则对  $S$  方程两边求全微分得

$$2x dx + (2y - z) dy + (2z - y) dz = 0.$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y-2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-z}{y-2z},$$

并且  $\Sigma$  在  $xOy$  平面的投影为  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1\}$ , 因此

$$\iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS = \iint_{D_{xy}} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \bigg|_{z=z(x,y)} d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{y - 2z}\right)^2 + \left(\frac{2y - z}{y - 2z}\right)^2} \Big|_{z=z(x,y)} d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \cdot \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} \Big|_{z=z(x,y)} d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} (x + \sqrt{3}) d\sigma = \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} d\sigma \\
&\quad (\text{由于 } D_{xy} \text{ 关于 } y \text{ 轴对称, } x \text{ 在对称点处的值互为相反数, 所以 } \iint_{D_{xy}} x d\sigma = 0) \\
&= \sqrt{3} \times \pi \times 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi.
\end{aligned}$$

**附注** 关于面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  (其中,  $\Sigma: z = z(x, y)$ ), 总是将它化为二重积分计算, 即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma,$$

其中,  $D_{xy}$  是  $\Sigma$  在  $xOy$  平面的投影. 因此本题在计算  $\iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$  之前, 先要算出

$D_{xy}$ , 为此题解中将  $C$  的方程转化为  $\begin{cases} 2z - y = 0, \\ x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, \end{cases}$  这样  $\Sigma$  成为  $S$  的被柱面  $x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$  所截

下的一块, 于是  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1\}$ .

本题是综合题, 有关内容和方法见《高分突破》15.

(20)

**分析** (I) 由  $Ax = b$  有两个不同解知,  $r(\bar{A}) = r(A) < 3$  ( $\bar{A}$  是  $Ax = b$  的增广矩阵), 由此可以算出  $\lambda, a$ .

(II) 将(I)算得的  $\lambda, a$  代入  $Ax = b$ , 计算它的通解.

**精解** (I) 由  $Ax = b$  有两个不同解知

$$r(\bar{A}) = r(A) < 3.$$

对  $\bar{A} = (A : b)$  施行初等行变换:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & | & a \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & | & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & | & a \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & | & a - \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 & | & a - \lambda + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

由此可知,  $\lambda, a$  必须满足  $\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0, \\ 1 - \lambda^2 = 0, \\ a - \lambda + 1 = 0, \end{cases}$  即  $\lambda = -1, a = -2$ .

(II) 当  $\lambda = -1$ ,  $a = -2$  时,  $Ax = b$  的增广矩阵为

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

所以,  $Ax = b$  与方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2}, \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

同解. 式(1)对应的齐次线性方程组有基础解系  $(1, 0, 1)^T$ . 此外, 式(1)有特解  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T$  所以, 式(1), 即  $Ax = b$  的通解为

$$(x_1, x_2, x_3)^T = C(1, 0, 1)^T + \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T.$$

**附注** 应熟练地掌握非齐次线性方程组有解的充分必要条件及求非齐次线性方程组通解的方法.

$n$  元非齐次线性方程组  $Ax = b$  有唯一解的充分必要条件是  $r(\bar{A}) = r(A) = n$  (其中  $\bar{A} = (A : b)$  是增广矩阵), 有无穷多解的充分必要条件是  $r(\bar{A}) = r(A) < n$ .

本题的有关内容和方法见《高分突破》21.

(21)

**分析** (I) 由  $f$  的标准形知  $A$  有特征值  $\lambda = 1$  (二重) 和  $\lambda = 0$ , 利用实对称矩阵性质及题设算出  $Q$ , 从而得到  $A$ .

(II) 算出  $A + E$  的所有特征值即可证明它为正定矩阵.

**精解** (I) 由  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$  知, 实对称矩阵  $A$  有特征值  $\lambda = 1$  (二重) 和  $0$ , 且对应特征值  $0$  的特征向量为  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ .

设对应特征值  $\lambda = 1$  的特征向量为  $(a, b, c)^T$ , 则由实对称矩阵的性质 (对应不同特征值的特征向量正交) 得

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T \cdot (a, b, c)^T = 0, \text{ 即 } a + c = 0.$$

该方程的基础解系为  $(0, 1, 0)^T$  和  $(-1, 0, 1)^T$ . 所以, 可取对应特征值  $\lambda = 1$  的特征向量为  $(0, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$ .

于是,  $A$  有 3 个两两正交的特征向量

$$\xi_1 = (0, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 0, 1)^T, \xi_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T.$$

将它们单位化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\xi}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T.$$

$$\text{记 } \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则 } \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \text{ 由此得到}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(II) 显然  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$  是实对称矩阵.

由于  $\boldsymbol{A}$  的特征值为  $\lambda = 1$  (二重) 和  $0$ , 所以  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$  的特征值为

$$\mu = 1 + 1 = 2 \text{ (二重) 和 } 1 + 0 = 1,$$

即  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$  的特征值全大于零.

因此  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$  是正定矩阵.

**附注** 设有二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$  ( $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\boldsymbol{A}$  是  $n$  阶实对称矩阵), 则以下两点值得注意:

(i) 当利用正交变换  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{y}$  ( $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ) 将  $f$  化为标准形  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  时,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  都是  $\boldsymbol{A}$  的特征值;

(ii) 当利用可逆线性变换  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P} \boldsymbol{y}$  将  $f$  化为标准形  $f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$  时,  $d_1, d_2, \dots, d_n$  未必是  $\boldsymbol{A}$  的特征值.

本题为综合题, 其有关内容和方法见《高分突破》23.

(22)

**分析** 先算出关于  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x)$ , 然后计算  $A$  与  $f_{Y|X}(y|x)$ .

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \text{由于 } f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy \\ &= A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A e^{-x^2} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} A e^{-x^2}, \end{aligned}$$

所以由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$  得  $\sqrt{\pi} A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$ , 即  $A\pi = 1$ , 因此  $A = \frac{1}{\pi}$ .

将  $A = \frac{1}{\pi}$  代入  $f(x, y)$  及  $f_X(x)$  得

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty),$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

所以对  $x \in (-\infty, +\infty)$  有

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} \quad (-\infty < y < +\infty). \end{aligned}$$

**附注** 在题解中有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = \sqrt{\pi}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

它们是利用概率论的有关结论得到的, 具体计算如下:

由于  $e^{-(y-x)^2} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}}$ , 其中  $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} \quad (-\infty < y < +\infty)$  是随

机变量  $U \sim N\left(x, \frac{1}{2}\right)$  的概率密度, 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} dy = \sqrt{\pi} \cdot 1 = \sqrt{\pi}.$$

同样可以得到  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

本题的有关内容和方法见《高分突破》26.

(23)

**分析** 注意题中的  $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$ ,  $N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2)$ ,  $N_3 \sim B(n, \theta^2)$ , 且  $N_1 + N_2 + N_3 = n$ , 即可算得  $a_1, a_2, a_3$  的值及  $DT$ .

**精解** 由于  $N_1, N_2, N_3$  分别服从  $B(n, 1-\theta)$ ,  $B(n, \theta-\theta^2)$  和  $B(n, \theta^2)$ , 所以, 使得  $T$  为  $\theta$  的无偏估计量, 必须满足:

$$\begin{aligned} ET &= E(a_1 N_1 + a_2 N_2 + a_3 N_3) = a_1 EN_1 + a_2 EN_2 + a_3 EN_3 \\ &= a_1 n(1-\theta) + a_2 n(\theta-\theta^2) + a_3 n\theta^2 \\ &= na_1 + n(-a_1 + a_2)\theta + n(-a_2 + a_3)\theta^2 = \theta, \end{aligned}$$

即

$$na_1 + n(-a_1 + a_2)\theta + n(-a_2 + a_3)\theta^2 = \theta.$$

比较上式两边关于  $\theta$  的同次幂系数得

$$na_1 = 0, \quad n(-a_1 + a_2) = 1, \quad n(-a_2 + a_3) = 0,$$

所以,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{n}$ ,  $a_3 = \frac{1}{n}$ .

将以上  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  的值代入  $T$  得

$$T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3) = \frac{1}{n}(n - N_1) = 1 - \frac{1}{n}N_1,$$

所以

$$DT = D\left(1 - \frac{1}{n}N_1\right) = \frac{1}{n^2}DN_1 = \frac{1}{n^2} \cdot n(1 - \theta)\theta = \frac{1}{n}\theta(1 - \theta).$$

**附注** 题解中有两点值得注意:

( i ) 从  $X$  的概率分布, 可以推出  $N_1 \sim B(n, 1 - \theta)$ ,  $N_2 \sim B(n, \theta - \theta^2)$ ,  $N_3 \sim B(n, \theta^2)$ .

( ii )  $N_2$  与  $N_3$  未必相互独立, 所以在计算  $DT$  时, 必须将  $N_2 + N_3$  换成  $n - N_1$ .

## 2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

(1) A

**分析** 由所给的四个选项可知, 本题可在  $a, b$  都不为零的情形下考虑.

**精解** 由于  $f(x) = x - \sin ax = x - \left[ ax - \frac{1}{3!}(ax)^3 + o(x^4) \right] = (1-a)x + \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^4) \sim (1-a)x + \frac{1}{6}a^3x^3 \quad (x \rightarrow 0),$

$$g(x) = x^2 \ln(1-bx) \sim x^2(-bx) = -bx^3 \quad (x \rightarrow 0),$$

所以当  $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow 0)$  时,

$$\begin{cases} 1-a=0, \\ \frac{1}{6}a^3 = -b, \end{cases} \text{ 即 } a=1, b=-\frac{1}{6}.$$

因此本题选(A).

**附注** 寻找  $x \rightarrow x_0$  时函数  $h(x)$  的等价无穷小的步骤为

(i) 作变量代换  $t = x - x_0$ , 按以下方法寻找  $\varphi(t) = h(t + x_0)$  在  $t \rightarrow 0$  时的等价无穷小:

(a) 利用常用函数在  $t \rightarrow 0$  时的等价无穷小:

$$\sin t \sim t, \arcsin t \sim t, \tan t \sim t, \arctan t \sim t,$$

$$\ln(1+t) \sim t, e^t - 1 \sim t, (1+t)^\mu - 1 \sim \mu t (\mu \neq 0), 1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2.$$

(b) 利用常用函数的麦克劳林公式:  $t \rightarrow 0$  时

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + o(t^n),$$

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}t^{2n-1} + o(t^{2n}),$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + o(t^{2n+1}),$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}t^n + o(t^n),$$

$$(1+t)^\mu = 1 + \mu t + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}t^n + o(t^n).$$

(ii) 在上述  $\varphi(t)$  的等价无穷小中令  $t = x - x_0$ , 即得  $x \rightarrow x_0$  时  $h(x)$  的等价无穷小.

(2) A

**分析** 利用积分区域的对称性, 确定  $I_k$  为正, 为负或为零 ( $k=1, 2, 3, 4$ ), 由此即可得到正确选项.

**精解** 在  $D_1$  上,  $y \cos x \geq 0$  (仅在点  $(0, 0)$  处取等号), 所以  $I_1 = \iint_{D_1} y \cos x dx dy > 0$ .  $D_2, D_4$



都关于  $x$  轴对称, 在对称点处  $y \cos x$  互为相反数, 所以  $I_2 = \iint_{D_2} y \cos x dx dy = 0$ ,

$$I_4 = \iint_{D_4} y \cos x dx dy = 0.$$

在  $D_3$  上,  $y \cos x \leq 0$  (仅在点  $(0, 0)$  处取等号), 所以  $I_3 = \iint_{D_3} y \cos x dx dy < 0$ .

因此本题选(A).

**附注** 在计算二重积分或比较两个二重积分大小时, 总是先按积分区域  $D$  的对称性化简二重积分. 对于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 则在以下 3 种情况下:

(i) 当  $D$  关于  $x$  轴对称, 且  $f(x, y)$  在对称点  $(x, y)$  与  $(x, -y)$  处的值互为相反数(或彼此相等)时;

(ii) 当  $D$  关于  $y$  轴对称, 且  $f(x, y)$  在对称点  $(x, y)$  与  $(-x, y)$  处的值互为相反数(或彼此相等)时;

(iii) 当  $D$  关于直线  $y=x$  对称, 且  $f(x, y)$  在对称点  $(x, y)$  与  $(y, x)$  处的值互为相反数(或彼此相等)时.

$$\text{均有 } \iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

$$\left( \iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, D_1 \text{ 是 } D \text{ 按其对称性划分成的两部分之一} \right).$$

(3) **D**

**分析** 按积分上限函数的性质排除其中三个不正确选项即可.

**精解** 当  $-1 \leq x < 0$  时,  $F(x) = \int_0^x dt = x < 0$ , 所以选项(A)、(C)应排除.

$f(x)$  在  $[0, 3]$  上除点  $x=2$  是第一类间断点外, 处处连续, 即  $f(x)$  在  $[0, 3]$  上可积, 从而  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0, 3]$  上连续, 所以选项(B)也应排除.

因此本题选(D).

**附注** 积分上限函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  具有以下性质:

(i) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

(ii) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F'(x) = f(x)$ .

(4) **C**

**分析** 从正项级数入手考虑.

**精解** 考虑选项(C).

当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛时,  $\{|b_n|\}$  必有界; 此外由题设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  知  $\{a_n\}$  有界. 所以存在  $M > 0$ , 使得

$$|b_n| \leq M, |a_n| \leq M \quad (n=1, 2, \dots).$$

于是有  $|a_n^2 b_n^2| = |a_n|^2 |b_n| \cdot |b_n| \leq M^3 |b_n|$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 从而根据正项级数收敛性的比较判别法知, 由  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛得到  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  收敛.

因此本题选(C).

**附注** 对于抽象的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的收敛性判别, 往往使用比较判别法.

此时需对  $u_n$  作适当放大与缩小, 寻找一个正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  (作为比较级数):

如果存在收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 使得  $u_n \leq v_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

如果存在发散的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 使得  $v_n \leq u_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(5) A

**分析** 同时算出  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到  $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$  和到  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  的过渡矩阵, 就可得到  $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$  到  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  的过渡矩阵.

$$\text{精解 由 } \left( \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ 得}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \left( \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left( \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由此得到所求的过渡矩阵为 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

因此本题选(A).

**附注** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  是  $n$  维向量空间  $\mathbf{R}^n$  的两组基, 则称满足  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$  的  $n$  阶矩阵  $A$  为由基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  到基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵.  $A$  是可逆矩阵,  $A^{-1}$  即为由基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  到基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的过渡矩阵.

(6) B

**分析** 通过  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  与选项中的矩阵相乘, 判定正确选项.

**精解** 记  $C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ , 则  $|C| = |A| |B| = 6$ , 先考虑选项(A).

$$\begin{aligned} \text{由于 } C \begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2AA^* & O \\ O & 3BB^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2|A|E_2 & O \\ O & 3|B|E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } E_2 \text{ 是 } 2 \text{ 阶单位矩阵}) \\ &= \begin{pmatrix} 4E_2 & O \\ O & 9E_2 \end{pmatrix} \neq 6E_4 = |C|E_4 \quad (\text{其中 } E_4 \text{ 是 } 4 \text{ 阶单位矩阵}). \end{aligned}$$

所以排除选项(A), 再考虑选项(B).

$$\begin{aligned} \text{由于 } C \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3AA^* & O \\ O & 2BB^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3|A|E_2 & O \\ O & 2|B|E_2 \end{pmatrix} = 6E_4 = |C|E_4. \end{aligned}$$

所以  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵是  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$ .

因此本题选(B).

**附注** 记住以下公式是有用的.

设  $M_1, M_2$  都是方阵, 则

$$\begin{pmatrix} M_1 & O \\ O & M_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |M_2| M_1^* & O \\ O & |M_1| M_2^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} O & M_1 \\ M_2 & O \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & |M_1| M_2^* \\ |M_2| M_1^* & O \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_1 & P \\ O & M_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |M_2| M_1^* & -M_1^* P M_2^* \\ O & |M_1| M_2^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_1 & O \\ Q & M_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |M_2| M_1^* & O \\ -M_2^* Q M_1^* & |M_1| M_2^* \end{pmatrix}.$$

(7) C

**分析** 先算出  $X$  的概率密度, 然后计算  $EX$ .**精解** 设  $X$  的概率密度为  $f(x)$ , 标准正态分布的概率密度为  $\varphi(x)$ , 则

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = 0.3\Phi'(x) + 0.7\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.3\varphi(x) + 0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx + 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) dx \\ &= 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) dx \stackrel{\text{令 } t = \frac{x-1}{2}}{=} 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\varphi(t) \cdot 2dt \\ &= 1.4 \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t) dt + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \\ &= 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0.7. \end{aligned}$$

因此本题选(C).

**附注** 由于  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-\infty < x < +\infty)$ , 所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx = 0.$$

(8) B

**分析** 按分布函数的定义计算  $F_Z(z)$ .**精解**  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(XY \leq z)$ 

$$= P(Y=0)P(XY \leq z | Y=0) + P(Y=1)P(XY \leq z | Y=1)$$

$$= \frac{1}{2}P(0 \leq z | Y=0) + \frac{1}{2}P(X \leq z | Y=1)$$

$$= \frac{1}{2}P(0 \leq z) + \frac{1}{2}P(X \leq z) \quad (\text{其中 } P(0 \leq z | Y=0) = P(0 \leq z) \text{ 是显然的,}$$

$$P(X \leq z | Y=1) = P(X \leq z) \text{ 是由于 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立})$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} + \frac{1}{2}\Phi(z) \quad (\text{其中 } \Phi(x) \text{ 是 } N(0, 1) \text{ 的分布函数, 是连续}$$

函数).

由此可知,  $F_Z(z)$  只有一个间断点.

因此本题选(B).

**附注** 对于题中的随机变量  $X$  与  $Y$ , 同样可以考虑  $F_U(u)$  的间断点, 其中  $F_U(u)$  是随机变量  $U = X + Y$  的分布函数.

## 二、填空题

$$(9) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{uu}'' + 2yf_{uv}'' + y^2 f_{vv}'' , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf_{vv}'' + f_v' + xyf_{vv}''$$

分析 先计算  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , 再计算  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

精解 由  $\frac{\partial z}{\partial x} = f_u'(x, xy) + yf_v'(x, xy)$  得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{uv}''(x, xy) \cdot x + f_v'(x, xy) + yf_{vv}''(x, xy) \cdot x \\ &= xf_{vv}''(x, xy) + f_v'(x, xy) + xyf_{vv}''(x, xy). \end{aligned}$$

附注 如果要计算的是  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , 而不只是  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , 则宜采用以下方法快捷计算:

$$\begin{aligned} \text{因为 } d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= d[f_u'(x, xy) + yf_v'(x, xy)] \\ &= df_u'(x, xy) + d[yf_v'(x, xy)] \\ &= f_{uu}''dx + f_{uv}''d(xy) + f_v'dy + ydf_v' \\ &= f_{uu}''dx + f_{uv}''(ydx + xdy) + f_v'dy + y[f_{uv}''dx + f_{vv}''(ydx + xdy)] \\ &= (f_{uu}'' + 2yf_{uv}'' + y^2 f_{vv}'')dx + (xf_{vv}'' + f_v' + xyf_{vv}'')dy, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{uu}'' + 2yf_{uv}'' + y^2 f_{vv}'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf_{vv}'' + f_v' + xyf_{vv}''.$$

$$(10) \quad y = -xe^x + 2 + x$$

分析 先由所给的条件确定常数  $a, b$ , 然后计算非齐次微分方程满足初始条件的特解.

精解 微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的特征方程  $r^2 + ar + b = 0$  有二重根  $r = 1$ , 所以  $a = -2$ ,  $b = 1$ . 于是所给的非齐次微分方程

$$y'' - 2y' + y = x \quad (1)$$

有特解

$$y^* = A + Bx.$$

将它代入式(1)得  $A = 2, B = 1$ , 所以  $y^* = 2 + x$ . 从而式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = (C_1 + C_2x)e^x + 2 + x, \quad (2)$$

且

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2x)e^x + 1.$$

将  $y(0) = 2, y'(0) = 0$  代入得

$$\begin{cases} C_1 + 2 = 2, \\ C_1 + C_2 + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{即 } C_1 = 0, C_2 = -1.$$

代入式(2)得所求的解  $y = -xe^x + 2 + x$ .

附注 应熟练掌握二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

(其中  $p, q$  是常数,  $f(x)$  为  $e^{\alpha x}P_n(x)$  或  $e^{\alpha x}[Q_m(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$ ,  $P_n(x), Q_m(x), R_l(x)$  分别是  $n, m, l$  次多项式)的通解的计算方法.

(11)  $\frac{13}{6}$ 

分析 利用关于弧长平面曲线积分的计算公式计算.

$$\begin{aligned}
 \text{精解} \quad \int_L x ds &= \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4x^2) \\
 &= \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.
 \end{aligned}$$

**附注** 关于弧长的(平面)曲线积分都按以下公式转化成定积分后计算: 设  $f(x, y)$  是连续函数, 曲线  $L$  是光滑曲线, 则

(i) 当  $L: y = y(x) (a \leq x \leq b)$  时,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

(ii) 当  $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, (t_0 \leq t \leq t_1)$  时,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

(iii) 当  $L: r = r(\theta) (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$  时,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(12)  $\frac{4}{15}\pi$ 

**分析** 由于  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$  平面的投影为圆, 并且被积函数与  $x, y$  无关, 所以采用“先二后一”方法计算所给的重积分.

**精解** 由于  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$  平面的投影为  $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$ , 所以

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_{-1}^1 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{-1}^1 z^2 \pi (1 - z^2) dz = 2\pi \int_0^1 (z^2 - z^4) dz = \frac{4}{15}\pi.$$

**附注** 当  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$  平面的投影为圆, 对于三重积分  $\iiint_{\Omega} f(z) dx dy dz$  往往采用“先二后一”方法计算, 但本题也可采用球面坐标计算, 具体如下:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &\stackrel{\text{球面坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \\
 &= 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}\pi.
 \end{aligned}$$

(13) 2

分析 通过计算  $A^2$  算出  $A = \beta \alpha^T$  的非零特征值.

**精解** 记  $A = \beta\alpha^T$ , 则  $A^2 = (\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T) = \beta(\alpha^T\beta)\alpha^T = 2\beta\alpha^T = 2A$ . 设  $A$  的特征值为  $\lambda$ , 则  $\lambda$  满足  $\lambda^2 = 2\lambda$ . 于是  $A = \beta\alpha^T$  的非零特征值为 2.

**附注** 设  $\xi, \eta$  都是  $n$  维非零列向量, 且  $\xi^T\eta = a \neq 0$ . 记  $A = \eta\xi^T$ , 则以下结论是有用的:

(i)  $r(A) = 1$ ;

(ii)  $A$  只有一个非零特征值  $\lambda = a$ .

(14) -1

**分析** 利用  $E\bar{X} = np$ ,  $E(S^2) = np(1-p)$ , 由无偏估计量的定义计算  $k$  的值.

**精解** 由无偏估计量的定义知, 要使  $\bar{X} + kS^2$  为  $np^2$  的无偏估计量, 必须满足

$$E(\bar{X} + kS^2) = np^2, \text{ 即 } E(\bar{X}) + kE(S^2) = np^2. \quad (1)$$

记总体为  $X$ , 则  $X \sim B(n, p)$ , 所以

$$E(\bar{X}) = E(X) = np, \quad E(S^2) = D(X) = np(1-p).$$

将它们代入式(1)得

$$np + knp(1-p) = np^2, \text{ 即 } k = -1.$$

**附注** 应记住以下结论:

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个简单随机样本, 其均值为  $\bar{X}$ , 方差为  $S^2$ , 则

$$E\bar{X} = EX, \quad D\bar{X} = \frac{DX}{n}, \quad ES^2 = DX.$$

### 三、解答题

(15)

**分析** 先计算  $f(x, y)$  的驻点, 然后判断各个驻点是否为极值点.

**精解**  $f(x, y)$  的定义域为上半平面  $y > 0$ , 在其中  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且

$$f'_x = 2x(2 + y^2), \quad f'_y = 2x^2y + 1 + \ln y,$$

$$f''_{xx} = 2(2 + y^2), \quad f''_{xy} = 4xy, \quad f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x(2 + y^2) = 0, \\ 2x^2y + 1 + \ln y = 0, \end{cases} \text{ 得 } x = 0, y = \frac{1}{e} \left( \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ 是 } f(x, y) \text{ 的唯一驻点} \right).$$

$$\text{由于 } f''_{xx} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + y^2) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0,$$

$$[f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2] \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = \left[ 2(2 + y^2) \cdot \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right) - (4xy)^2 \right] \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0,$$

所以  $f(x, y)$  有极小值  $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ , 无极大值.

**附注** 应熟练掌握二元函数极值的计算方法, 有关内容与方法见《高分突破》11.

(16)

**分析** 先算  $a_n$  的表达式, 然后用级数和的概念或幂级数方法计算  $S_1$  与  $S_2$  的值.

**精解** 对于  $n = 1, 2, \dots$ , 曲线  $y = x^n$  与  $y = x^{n+1}$  的交点横坐标为  $x = 0$  和  $x = 1$ . 由平面图形面积计算公式得

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\begin{aligned}
\text{所以, } S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}. \\
S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots = 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \Big|_{x=1} = 1 - \ln(1+x) \Big|_{x=1} \\
&\quad \left( \text{由于 } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n, -1 < x \leq 1 \right) \\
&= 1 - \ln 2.
\end{aligned}$$

**附注** 收敛数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的和  $S$ , 有以下两种常用计算方法:

(i) 计算部分和数列  $S_n = \sum_{i=1}^n u_i (n=1, 2, \cdots)$  的极限, 即  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

(ii) 构造幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ , 算出它的和函数  $f(x)$ . 如果  $x=1$  在  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$  的成立范围内, 则  $S = f(1)$ .

本题是综合题, 其有关内容和方法见《高分突破》16.

(17)

**分析** (I) 按旋转曲面方程写出  $S_1$  的方程, 为了写出  $S_2$  的方程先确定切线方程.

(II) 先确定产生  $S_1$  与  $S_2$  之间立体的平面图形, 然后按旋转体体积计算公式计算这个立体的体积.

**精解** (I)  $S_1$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2+z^2}{3} = 1$ .

为计算  $S_2$  的方程, 先算出椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的过点  $(4, 0)$  的切线  $l$  的方程.

设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则  $l$  的斜率为  $-\frac{3x_0}{4y_0}$ , 故  $l$  的方程为

$$y - y_0 = -\frac{3x_0}{4y_0}(x - x_0). \quad (1)$$

由于  $l$  通过点  $(4, 0)$ , 所以  $(x_0, y_0)$  满足  $-y_0 = -\frac{3x_0}{4y_0}(4 - x_0)$ , 即  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = x_0$ . (2)

此外,  $(x_0, y_0)$  在椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  上, 所以满足  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ . (3)

由式(2)、式(3)得  $x_0 = 1, y_0 = \pm \frac{3}{2}$ . 将它们代入式(1)得  $l$  的方程为



$$y = -\frac{1}{2}(x-4) \text{ 和 } y = \frac{1}{2}(x-4).$$

显然它们关于  $x$  轴对称, 所以  $S_2$  为它们中任一绕  $x$  轴旋转而成的曲面, 其方程为

$$\frac{(x-4)^2}{4} - y^2 - z^2 = 0.$$

(II)  $S_1$  与  $S_2$  之间的立体即为图 B-09-1 中所示的阴影部分绕  $x$  轴旋转而成的旋转体, 它的体积

$$V = V_1 - V_2, \quad (4)$$

其中,  $V_1$  是  $\triangle ABC$  (其中  $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(1, \frac{3}{2})$ ) 绕  $x$  轴旋转而成的圆锥体体积, 所以

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \left( \frac{3}{2} \right)^2 \cdot 3 = \frac{9}{4} \pi.$$

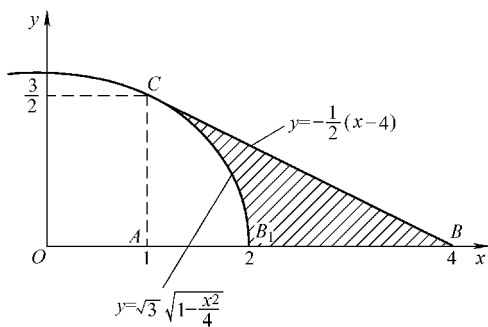


图 B-09-1

$V_2$  是曲边三角形  $AB_1C$  (其中  $B_1(2, 0)$ ) 绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积, 所以

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left( \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right)^2 dx = 3\pi \int_1^2 \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{5}{4} \pi.$$

将它们代入式(4)得

$$V = \frac{9}{4} \pi - \frac{5}{4} \pi = \pi.$$

**附注** 题解中以下两点值得注意:

(i) 计算曲线的切线方程时, 如果切点未知, 则总是先确定切点的坐标.

(ii) 本题计算的是图中阴影部分绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积, 计算它绕  $y$  轴旋转而成的旋转体体积  $V_y$  的方法为

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \left\{ \int_1^4 x \left[ -\frac{1}{2}(x-4) \right] dx - \int_1^2 x \cdot \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx \right\} \\ &= 2\pi \left[ \int_1^4 \left( 2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + 2\sqrt{3} \int_1^2 \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} d\left( 1 - \frac{x^2}{4} \right) \right] \\ &= 2\pi \left( \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \right) = 6\pi. \end{aligned}$$

本题是综合题, 其有关内容和方法见《高分突破》09.

(18)

**分析** (I) 作辅助函数  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ , 并对它在  $[a, b]$  上应用罗尔定理即可.

(II) 利用拉格朗日中值定理, 按右导数定义证明  $f'_+(0)$  存在且为  $A$ .

**精解** (I) 记  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可

导, 且  $F(a)=F(b)(=f(a))$ , 所以由罗尔定理知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ , 即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

(II) 由题设知, 对任意  $x \in (0, \delta)$ ,  $f(t)$  在  $[0, x]$  上连续, 在  $(0, x)$  内可导, 所以由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi \in (0, x)$ , 使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \text{ 即 } \frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(\xi).$$

由于  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\xi \rightarrow 0^+$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A. \text{ 由此可知, } f'_+(0) \text{ 存在且为 } A.$$

**附注** 本题(II)可以推广为:

设  $f(x)$  在点  $x=c$  处连续, 在  $(c, c+\delta)(\delta>0)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)=A$ , 则  $f'_+(c)=A$ ;

设  $f(x)$  在点  $x=c$  处连续, 在  $(c-\delta, c)(\delta>0)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)=B$ , 则  $f'_-(c)=B$ .

这一推广有以下的应用:

设分段函数  $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0, \\ f_2(x), & x > x_0, \end{cases}$  其中  $f(x)$  在点  $x=x_0$  处连续,  $f_1(x)(x < x_0)$  可导,

$f_2(x)(x > x_0)$  可导, 当已算得  $f'_1(x)(x < x_0)$  和  $f'_2(x)(x > x_0)$  时,  $f(x)$  在点  $x_0$  处的可导性可按以下方法判别:

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_1(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_2(x)$  都存在且相等, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  (或  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'_1(x)$ ).

本题(II)是综合题, 其有关内容与方法见《高分突破》03, 04.

(19)

**分析** 考虑应用高斯公式计算所给的曲面积分  $I$ .

**精解** 由于  $\Sigma$  是闭曲面, 可考虑应用高斯公式计算所给的曲面积分  $I$ , 记

$$P(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q(x, y, z) = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{则 } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

由于  $P, Q, R$  在  $\Sigma$  的内部点  $(0, 0, 0)$  处不连续, 所以不能直接应用高斯公式计算  $I$ , 需作小球面  $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$  ( $\varepsilon$  是充分小正数, 使得  $\Sigma_1$  完全位于  $\Sigma$  的内部), 方向为内侧, 记位于有向曲面  $\Sigma$  与  $\Sigma_1$  之间的空间为  $\Omega$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \oint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{其中, } \oint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right] dv \\
&= \iiint_{\Omega} 0 dv = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zxdy}{\varepsilon^3} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{\Sigma_1^-} xdydz + ydzdx + zxdy \quad (\text{其中 } \Sigma_1^- \text{ 是 } \Sigma_1 \text{ 的反向曲面, 即 } \Sigma_1^- \text{ 的方向是外侧}) \\
&\stackrel{\text{高斯公式}}{=} -\frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_1} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv \quad (\text{其中 } \Omega_1 \text{ 是由 } \Sigma_1^- \text{ 围成的空间, 即 } x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2) \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = -4\pi.
\end{aligned} \tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得  $I = 4\pi$ .

**附注** 要应用高斯公式计算曲面积分  $\oiint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$ ,

$P, Q, R$  必须在  $\Sigma$  围成的空间闭区域  $\Omega$  上具有连续的偏导数, 如果在  $\Omega$  内部的某点  $(x_0, y_0, z_0)$  处, 这一条件不成立, 可如本题那样引入辅助曲面, 把点  $(x_0, y_0, z_0)$  排除在外后再应用高斯公式.

本题的有关内容和方法见《高分突破》15.

(20)

**分析** (I) 解非齐次线性方程组算得所有的  $\xi_2, \xi_3$ .

(II) 计算  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  的行列式, 判定  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

**精解** (I) 对增广矩阵  $(A \vdots \xi_1)$  施行初等行变换:

$$\begin{aligned}
(A \vdots \xi_1) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \\
&\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

记  $\xi_2 = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则  $A\xi_2 = \xi_1$  与方程组

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

同解, 式(1)对应的导出组的基础解系为  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$ , 式(1)有特解  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$ ,

所以  $\xi_2 = C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T = \left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}, C\right)^T$  ( $C$  为任意

常数).

$$\text{由于 } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 对增广矩阵 } (A^2 \mid \xi_1)$$

$$\text{施行初等行变换: } (A^2 \mid \xi_1) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

记  $\xi_3 = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 则  $A^2 \xi_3 = \xi_1$  与方程

$$y_1 + y_2 = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

同解, 式(2)对应的导出组的基础解系为  $(-1, 1, 0)^T$  和  $(0, 0, 1)^T$ , 式(2)有特解  $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T$ , 所以,  $\xi_3 = C_1 (-1, 1, 0)^T + C_2 (0, 0, 1)^T + \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T = \left(-C_1 - \frac{1}{2}, C_1, C_2\right)^T$  ( $C_1, C_2$  是任意常数).

(II) 因为对于任意  $C, C_1, C_2$  有

$$\begin{aligned} |(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| &= \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}C - \frac{1}{2} & -C_1 - \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}C + \frac{1}{2} & C_1 \\ -2 & C & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}C - \frac{1}{2} & -C_1 - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & C & C_2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}C - \frac{1}{2} \\ -2 & C \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

所以,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

**附注 (i)** 应熟练掌握非齐次线性方程组求解方法.

**(ii)** 要判定  $n$  个  $n$  维列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的线性相关性, 如果这  $n$  个向量的元素是具体的数字, 其快捷方法是构造矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 当  $|A| \neq 0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关; 当  $|A| = 0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关.

本题是综合题, 其有关内容与方法见《高分突破》16.

(21)

**分析 (I)** 写出  $f$  的矩阵  $A$ , 然后由  $|\lambda E - A|$  ( $E$  是 3 阶单位矩阵) 算出  $A$  的所有特征值.

**(II)** 令  $A$  的最小特征值为零, 即得  $a$  的值.

$$\text{精解 (I)} f \text{ 的矩阵 } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}, \text{ 则由}$$

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a & \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - a) [(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 2] = (\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 2)
 \end{aligned}$$

知  $A$  有特征值  $a-2, a, a+1$  (由小到大排列).

(II) 由  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$  知  $A$  的正惯性指数为 2, 负惯性指数为 0, 所以  $A$  有两个正特征值和一个零特征值, 从而  $a-2=0$ , 即  $a=2$ .

**附注** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  (其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{A}$  是实对称矩阵) 的规范形是唯一的, 即其中的正平方项个数  $p$  (正惯性指数) 与负平方项个数  $q$  (负惯性指数) 由  $f$  唯一确定.

$p$  即为  $A$  的正特征值个数,  $q$  即为  $A$  的负特征值个数.

本题的有关内容和计算方法见《高分突破》23.

(22)

**分析** (I) 用条件概率公式  $P(X=1|Z=0) = \frac{P(X=1, Z=0)}{P(Z=0)}$  计算  $P(X=1|Z=0)$ .

(II) 先确定  $(X, Y)$  所有可能取的值, 然后计算  $(X, Y)$  取各个值的概率即得  $(X, Y)$  的概率分布.

**精解** (I) 由于  $P(X=1|Z=0) = \frac{P(X=1, Z=0)}{P(Z=0)}$ ,

其中,  $P(Z=0) = P\{\text{两次取球都是从 1 个红球、2 个黑球中取的}\} = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ,

$$P(X=1, Z=0) = P\{\text{取到 1 个红球 1 个黑球}\} = C_1^2 \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}.$$

将它们代入式(1) 得  $P(X=1|Z=0) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{9}$ .

(II)  $X, Y$  全部可能取的值都为 0, 1, 2, 且

$$P(X=0, Y=0) = P\{\text{取到 2 个白球}\} = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$P(X=0, Y=1) = P\{\text{取到 1 个黑球 1 个白球}\} = C_2^1 \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=0, Y=2) = P\{\text{取到 2 个黑球}\} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$P(X=1, Y=0) = P\{\text{取到 1 个红球 1 个白球}\} = C_2^1 \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1, Y=1)=P\{\text{取到 1 个红球 1 个黑球}\} = C_2^1 \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9},$$

$$P(X=1, Y=2)=0,$$

$$P(X=2, Y=0)=P\{\text{取到 2 个红球}\} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$P(X=2, Y=1)=P(X=2, Y=2)=0,$$

所以,  $(X, Y)$  的概率分布可用表表示如下:

X \ Y	Y		
	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

**附注** 计算二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的概率分布的步骤如下:

(i) 确定  $(X, Y)$  全部可能取的值;

(ii) 计算  $(X, Y)$  取各组值的概率, 此时往往需用计算随机事件概率的各种方法.

本题是综合题, 其有关内容和计算方法见《高分突破》24.

(23)

**分析** (I) 先计算  $EX$ , 然后令样本均值  $\bar{X}=EX$  得到  $\lambda$  的矩估计量 (其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ).

(II) 作似然函数  $L(\lambda)$ , 计算使它取最大值的  $\lambda$  即可.

**精解** (I)  $X$  的数学期望

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda E(T^2) \quad (\text{其中 } T \sim E(\lambda), \text{ 它的数学期望 } ET = \frac{1}{\lambda}, \text{ 方差 } DT = \frac{1}{\lambda^2}) \\ &= \lambda [DT + (ET)^2] = \lambda \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

令  $EX = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 即  $\frac{2}{\lambda} = \bar{X}$ . 按矩估计法得  $\lambda$  的矩估计量  $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$ .

(II) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数为

$$L(\lambda) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \begin{cases} \lambda^2 x_1 e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda^2 x_2 e^{-\lambda x_2} \cdots \lambda^2 x_n e^{-\lambda x_n}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然,  $L(\lambda)$  的最大值应在  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  上取到, 所以  $L(\lambda)$  可简记为

$$L(\lambda) = \lambda^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n) e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0,$$

由于

$$\ln L(\lambda) = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n).$$

所以由  $\frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = 0$ , 即  $\frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$  得  $\lambda = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{x}}$  (其中  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ).

因此, 由最大似然估计法知  $\lambda$  的最大似然估计量为  $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$ .

**附注** 要熟练掌握总体未知参数的两种估计法: 矩估计法与最大似然估计法.

## 2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

(1) B

**分析** 先由积分上限函数求导算出  $f'(x)$ , 然后计算它的零点个数.

**精解** 由于  $f'(x) = \ln(2+x^2) \cdot 2x = 2x \ln(1+x^2)$ , 它的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 所以  $f'(x)$  仅有零点  $x=0$ .

因此本题选(B).

**附注** 本题的点  $x=0$  是函数  $f(x)$  的最小值点.

(2) A

**分析** 先算出  $f'_x(0, 1)$  与  $f'_y(0, 1)$ , 然后由函数梯度定义可得  $f(x, y)$  在点  $(0, 1)$  处的梯度.

$$\begin{aligned}\text{精解 } f'_x(0, 1) &= \left. \frac{d}{dx} f(x, 1) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \arctan x \right|_{x=0} = \left. \frac{1}{1+x^2} \right|_{x=0} = 1, \\ f'_y(0, 1) &= \left. \frac{d}{dy} f(0, y) \right|_{y=1} = \left. \frac{d0}{dy} \right|_{y=1} = 0.\end{aligned}$$

所以  $\text{grad}f(x, y) \Big|_{(0,1)} = f'_x(0, 1)\mathbf{i} + f'_y(0, 1)\mathbf{j} = \mathbf{i}$ .

因此本题选(A).

**附注** 梯度定义如下:

设函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有连续偏导数, 则

$$\text{grad}f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = f'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{j}.$$

设函数  $f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  有连续偏导数, 则

$$\begin{aligned}\text{grad}f(x, y, z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= (f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0)) \\ &= f'_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f'_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

(3) D

**分析** 先利用常系数齐次线性微分方程的通解形式与其特征方程之间的一一对应关系写出特征方程, 由此即可以判定正确的选项.

**精解** 对于三阶常系数齐次线性微分方程, 当其有通解

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

时, 该微分方程的特征方程有特征根  $r=1, -2i$  和  $2i$ , 所以特征方程为

$$(r-1)(r+2i)(r-2i)=0, \text{ 即 } r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0.$$

由此可得对应的微分方程为  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ .

因此本题选(D).

**附注** 应熟记二阶或三阶常系数齐次线性微分方程的特征方程与其通解形式之间存在的一一对应关系.



## (4) B

**分析** 由于要考虑抽象数列的收敛性, 并且其中有单调有界等条件, 因此宜利用数列极限存在准则 II, 判定正确选项.

**精解** 当  $\{x_n\}$  单调时, 由  $f(x)$  单调有界知数列  $\{f(x_n)\}$  单调有界, 因此由数列极限存在准则 II 知  $\{f(x_n)\}$  收敛.

因此本题选(B).

**附注** 数列极限存在准则 II 是:

设数列  $\{x_n\}$  单调不减或单调不增且有界, 则  $\{x_n\}$  收敛, 或者说, 当  $\{x_n\}$  单调有界时,  $\{x_n\}$  收敛.

## (5) C

**分析** 由  $A^3 = O$ , 按可逆矩阵定义判定正确选项.

**精解** 由  $A^3 = O$  得  $E - A^3 = E$ , 即  $(E - A)(E + A + A^2) = E$ , 所以  $E - A$  可逆.

由  $A^3 = O$  得  $E + A^3 = E$ , 即  $(E + A)(E - A + A^2) = E$ , 所以  $E + A$  可逆.

因此本题选(C).

**附注** 本题也可从  $A$  的特征值入手求解:

设  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则由  $A^3 = O$  知  $\lambda$  满足  $\lambda^3 = 0$ , 从而  $\lambda = 0$ , 即  $A$  的特征值全为零, 因此  $E - A$  与  $E + A$  的特征值都为 1. 由此推得  $E - A$  与  $E + A$  都可逆.

## (6) B

**分析** 先写出题图中所示曲面的方程, 然后由惯性定理推出  $A$  的正特征值个数.

**精解** 由题图可知, 二次曲面  $(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$  在正交变换下的标准形为

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

由惯性定理知,  $A$  的正特征值个数为 1.

因此本题选(B).

**附注**  $x'Oy'$  平面的双曲线  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面方程为

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2 + z'^2}{b^2} = 1,$$

其图形与题图中的图形相类似, 所以题图中的曲面方程为  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ .

## (7) A

**分析** 按随机变量  $Z$  的分布函数定义确定正确选项.

**精解** 记  $Z$  的分布函数为  $F_Z(x)$ , 则

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P(\max\{X, Y\} \leq x) \\ &= P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = F^2(x). \end{aligned}$$

因此本题选(A).

**附注** 应记住以下结论:

设  $X, Y$  独立同分布, 且  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $U = \max\{X, Y\}$  与  $V = \min\{X, Y\}$  的分布函数分别为  $F^2(x)$  与  $1 - [1 - F(x)]^2$ .

(8) **D**

**分析** 排除其中三个不正确选项即可.

**精解** 由  $\rho_{XY} = 1$  知  $X$  与  $Y$  正相关, 因此选项(A)、(C)排除.

如果  $Y = 2X - 1$ , 则  $EY = E(2X - 1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ , 这不符合  $Y \sim N(1, 4)$ , 所以选项(C)也应排除.

因此本题选(D).

**附注** 这里给出选项(D)为正确项的证明:

$$\begin{aligned} 1 &\geq P(Y = 2X + 1) = P(Y - 2X - 1 = 0) = P(Y - 2X - E(Y - 2X) = 0) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(|Y - 2X - E(Y - 2X)| < \varepsilon) \\ &\geq 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{D(Y - 2X)}{\varepsilon^2} \quad (\text{利用切比雪夫不等式}) \end{aligned}$$

由于  $D(Y - 2X) = DY + 4DX - 4\text{Cov}(X, Y) = DY + 4DX - 4\rho_{XY}\sqrt{DX \cdot DY} = 4 + 4 - 4 \times 1 \times 2 = 0$ , 代入上式得  $1 \geq P(Y = 2X + 1) \geq 1$ , 所以,  $P(Y = 2X + 1) = 1$ .

## 二、填空题

(9)  $y = \frac{1}{x}$

**分析** 将所给微分方程改写成  $(xy)' = 0$  即可.

**精解** 所给微分方程可以改写成  $(xy)' = 0$ , 所以它的通解为

$$xy = C.$$

将  $y(1) = 1$  代入上式得  $C = 1$ , 所以所求的解为  $y = \frac{1}{x}$ .

**附注** 所给微分方程也可以改写成  $y' + \frac{1}{x}y = 0$  (一阶齐次线性微分方程), 它的通解为

$$y = Ce^{-\int \frac{1}{x} dx} = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x}. \text{ 由此可以得到满足 } y(1) = 1 \text{ 的解为 } y = \frac{1}{x}.$$

(10)  $y = x + 1$

**分析** 由隐函数求导算出  $y'(0)$ , 由此即可得到所求的切线方程.

**精解** 所给方程两边对  $x$  求导得

$$\cos(xy)(y + xy') + \frac{1}{y-x}(y' - 1) = 1.$$

将  $x = 0, y = 1$  代入得  $y'(0) = 1$ , 所以所求的切线方程为

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0), \text{ 即 } y = x + 1.$$

**附注** 关于曲线  $y = y(x)$  的切线方程计算:

(i) 当已知切点  $(x_0, y_0)$  (其中  $y_0 = y(x_0)$ ) 时, 只要算出  $y'(x_0)$  即得到切线方程

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

(ii) 当未知切点时, 先根据所给条件算出切点, 然后按(i)的方法写出切线方程.

(11)

**分析** 作变量代换, 将  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$  转换成  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t+2)^n$ , 然后按所给条件确定所求的收敛域.

**精解** 令  $t+2 = x-3$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t+2)^n.$$

由题设知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t+2)^n$  的收敛域为  $-2 < t+2 \leq 2$ , 从而幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$  的收敛域为  $-2 < x-3 \leq 2$ , 即  $(1, 5]$ .

**附注** 当幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  的收敛半径  $R$  为正数时, 收敛域为收敛区间  $(x_0 - R, x_0 + R)$  及其收敛的端点.

(12)  $4\pi$

**分析** 可考虑用高斯公式计算.

**精解** 由  $\Sigma$  不是闭曲面, 所以不能直接应用高斯公式计算所给的曲面积分, 为此添上  $\Sigma_1$ , 它是  $xOy$  平面上的圆域:  $x^2 + y^2 \leq 4$ , 方向为下侧. 于是  $\Sigma + \Sigma_1$  是有向闭曲面, 方向为外侧, 并且

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\ &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy - \iint_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x^2}{\partial z} \right] dv$

(其中  $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$  是由  $\Sigma + \Sigma_1$  围成的空间闭区域)

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} ydv = 0 \quad (\text{由于 } \Omega \text{ 关于平面 } y=0 \text{ 对称, 且 } y \text{ 在对称点处的值互为相反数, 所以 } \iiint_{\Omega} ydv \\ &= 0), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2dxdy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr \\ &= -2 \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \theta d\theta = -2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = -4\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = 0 - (-4\pi) = 4\pi.$$

**附注** 对于有向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$ , 如果  $\Sigma$  不是闭曲面, 可以如本题一样, 添加一块曲面  $\Sigma_1$ , 使得  $\Sigma + \Sigma_1$  是外侧有向闭曲面, 然后应用高斯公式计算.

(13) 1

**分析** 按矩阵特征值定义计算  $A$  的非零特征值.

**精解** 由题设  $A\alpha_1 = 0 = 0 \cdot \alpha_1$ , 所以  $\lambda = 0$  是  $A$  的特征值. 此外对  $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$  的两边都左乘矩阵  $A$  得

$$A^2\alpha_2 = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = A\alpha_2, \text{ 即 } A(A\alpha_2) = A\alpha_2. \quad (1)$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 所以  $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ . 从而由式(1)知  $A$  有特征值  $\lambda = 1$ .

由于  $A$  是 2 阶矩阵, 所以  $A$  的非零特征值为  $\lambda = 1$ .

**附注** 由题解可知,  $A$  的对应  $\lambda = 0$  的所有特征向量为  $C_1\alpha_1$  ( $C_1$  是任意非零常数), 对应  $\lambda = 1$  的所有特征向量为  $C_2(2\alpha_1 + \alpha_2)$  ( $C_2$  是任意非零常数).

(14)  $\frac{1}{2e}$

**分析** 按泊松分布的概率分布与数字特征计算.

**精解** 由于  $E(X^2) = DX + (EX)^2 = 1 + 1 = 2$ , 所以

$$P(X = E(X^2)) = P(X = 2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

**附注** 要熟记以下结论:

当  $X \sim \pi(\lambda)$  时,  $X$  的概率分布为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

并且  $EX = DX = \lambda$ .

### 三、解答题

(15)

**分析** 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式, 用等价无穷小代替进行求解.

$$\text{精解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}. \quad (1)$$

$$\text{由于 } \sin x - \sin(\sin x) \stackrel{\text{令 } t = \sin x}{=} t - \sin t = t - \left( t - \frac{1}{3!}t^3 + o(t^4) \right) \sim \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{6}\sin^3 x \sim \frac{1}{6}x^3,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

**附注** 式(1)右边极限也可使用洛必达法则计算:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cos x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^2} \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{x^2} \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

本题的解题方法见《高分突破》01.

(16)

**分析** 考虑用格林公式计算所给的曲线积分.

**精解** 记点  $A(\pi, 0)$ , 用  $\widehat{OA}$  表示  $L$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy &= \int_{\widehat{OA}} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy \\
 &= - \int_{\widehat{AO}} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy \\
 &= - \oint_{\widehat{AO} + \overline{OA}} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy + \\
 &\quad \int_{\overline{OA}} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy, \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \oint_{\widehat{AO} + \overline{OA}} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy \stackrel{\text{格林公式}}{=} \iint_D \left\{ \frac{\partial [2(x^2 - 1)y]}{\partial x} - \frac{\partial \sin 2x}{\partial y} \right\} d\sigma$$

(其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$  是由  $\widehat{AO} + \overline{OA}$  围成的闭区域)

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D 4xy d\sigma = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} 4xy dy \\
 &= \int_0^\pi 2x \sin^2 x dx = \int_0^\pi x(1 - \cos 2x) dx \\
 &= \int_0^\pi x \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = x \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx \\
 &= \pi^2 - \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} \pi^2, \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\overline{OA}} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy \\
 &= \int_0^\pi \sin 2t dt \quad (\text{由于 } \overline{OA}: \begin{cases} x = t, \\ y = 0, \end{cases} \text{ 起点 } O \text{ 的参数为 } t = 0, \text{ 终点 } A \text{ 的参数为 } t = \pi) \\
 &= 0. \tag{3}
 \end{aligned}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy = -\frac{1}{2}\pi^2.$$

**附注** 平面上有向闭曲线的关于坐标的曲线积分, 常用格林公式作快捷计算. 平面上有向非闭曲线的关于坐标的曲线积分, 也可以用格林公式作快捷计算, 此时, 只要适当添上一段曲线, 使积分曲线为闭曲线即可.

本题的有关内容与方法见《高分突破》14.

(17)

**分析** 用拉格朗日乘数法计算  $C$  上的到  $xOy$  平面最远点和最近点.

**精解**  $C$  上任一点  $(x, y, z)$  到  $xOy$  平面的距离为  $|z|$ . 本题即为计算函数  $z^2$  在约束条件  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$  和  $x + y + 3z - 5 = 0$  下的最大值点与最小值点. 采用拉格朗日乘数法求解.

$$\text{记 } F(x, y, z) = z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5),$$

则

$$F'_x = 2\lambda x + \mu, \quad F'_y = 2\lambda y + \mu, \quad F'_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu.$$

由拉格朗日乘数法, 令

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_z = 0, \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2\lambda x + \mu = 0, \\ 2\lambda y + \mu = 0, \\ 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0, \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix}$$

由式(1)、式(2)得  $x = y$ , 将它代入式(4)和式(5)得

$$x = -5, y = -5, z = 5 \text{ 或 } x = 1, y = 1, z = 1.$$

由几何意义知, 曲线  $C$  上存在距离  $xOy$  平面最远的点和最近的点, 因此它们分别为点  $(-5, -5, 5)$  和点  $(1, 1, 1)$ .

**附注** 本题也可按二元函数条件极值计算.

由于在  $C$  上,  $z^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , 此外  $C$  在  $xOy$  平面上的投影为

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{5-x-y}{3}\right)^2 = 0,$$

因此, 本题只要利用拉格朗日乘数法计算  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  在约束条件  $x^2 + y^2 - 2\left(\frac{5-x-y}{3}\right)^2 = 0$  下的最大值点与最小值点即可.

本题的有关内容和方法见《高分突破》11.

(18)

**分析** (I) 按导数定义只要证明对任意  $x$ , 有  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$  即可.

(II) 证明对任意  $x$ , 有  $G(x+2) = G(x)$  即可.

**精解** (I) 对任意  $x$ , 有

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \xrightarrow{\text{积分中值定理}} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x}$$

( $\xi$  是介于  $x$  与  $x + \Delta x$  之间的实数, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\xi \rightarrow x$ )  $= f(\xi)$ , 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

由此可知  $F(x)$  可导, 且  $F'(x) = f(x)$ .

(II) 对任意  $x$ , 有

$$\begin{aligned} G(x+2) &= 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \\ &= 2 \left[ \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+2} f(t) dt \right] - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \\ &= 2 \left[ \int_0^x f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt \right] - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \end{aligned}$$

(由于  $f(t)$  是以 2 为周期的周期函数, 所以, 对任意  $x$  有  $\int_x^{x+2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$ )

$$= 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt = G(x),$$

所以,  $G(x)$  是以 2 为周期的周期函数.

**附注** 设  $\varphi(x)$  是以  $T(T>0)$  为周期的周期函数, 且是连续函数, 则它的以下的定积分性质应记住:

$$(i) \text{ 对任意实数 } a, \int_a^{a+T} \varphi(x) dx = \int_0^T \varphi(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x) dx.$$

$$(ii) \text{ 对任意整数 } n, \int_0^{nT} \varphi(x) dx = n \int_0^T \varphi(x) dx.$$

$$(iii) \int_0^x \varphi(t) dt \text{ 是以 } T \text{ 为周期的周期函数的充分必要条件是 } \int_0^T \varphi(x) dx = 0.$$

(19)

**分析** 先算出  $f(x)$  的余弦级数  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ , 然后由狄利克雷收敛定理确定  $f(x) =$

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  的成立范围, 由此算出  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  的和.

**精解** 由于  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left( x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} \pi^2,$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} (1-x^2) d \sin nx = \frac{2}{\pi n} \left[ (1-x^2) \sin nx \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} x d \cos nx = -\frac{4}{\pi n^2} \left[ x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2} (n=1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

所以,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 - \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi). \quad (1)$$

由式(1)知  $f(0) = 1 - \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2}$ , 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{4} \left[ f(0) - 1 + \frac{1}{3}\pi^2 \right] = \frac{1}{4} \left( 1 - 1 + \frac{1}{3}\pi^2 \right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

**附注** 这里指出式(1)成立范围为  $[0, \pi]$  的来由:

要将  $f(x)$  展开成余弦级数, 首先应将  $f(x)$  偶延拓为  $F(x)$ , 式(1)右边是  $F(x)$  的傅里叶级数. 由狄利克雷收敛定理知

$$F(x) = 1 - \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2} \cos nx$$

的成立范围为  $[-\pi, \pi]$ , 因此式(1)的成立范围为  $[0, \pi]$ .

(20)

**分析** (I) 利用矩阵秩的有关公式证明  $r(A) \leq 2$ .

(II) 利用  $\alpha, \beta$  线性相关化简  $A$  后再计算它的秩.

**精解** (I) 由于  $r(\alpha\alpha^T) \leq \min\{r(\alpha), r(\alpha^T)\} \leq 1$ , 同理可知  $r(\beta\beta^T) \leq 1$ , 所以

$$r(A) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 2.$$

(II) 当  $\alpha, \beta$  线性相关时, 存在常数  $k$ , 使得  $\beta = k\alpha$ . 于是

$$A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T = (1 + k^2)\alpha\alpha^T,$$

从而  $r(A) = r(\alpha\alpha^T) \leq 1 < 2$ .

**附注** 应记住以下不等式:

设  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 则  $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$ .

设  $A, B$  分别是  $s \times n$  与  $n \times m$  矩阵, 则

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

(21)

**分析** (I) 利用行列式性质将  $|A|$  化为上三角形行列式后算出  $|A|$ .

(II) 由  $|A| \neq 0$  算出  $Ax = b$  有唯一解的  $a$  值, 并由克莱姆法则算出  $x_1$ .

(III) 由  $|A| = 0$  算出  $Ax = b$  有无穷多解的  $a$  值, 将求得的  $a$  值代入  $Ax = b$  即可得到通解.

**精解** (I)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n} \\
&= \cdots = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} \\
&= 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n.
\end{aligned}$$

(II) 当  $a \neq 0$  时,  $|A| \neq 0$ , 所以此时方程组  $Ax = b$  有唯一解, 且由克莱姆法则得

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{|A_1|}{(n+1)a^n}, \quad (1)$$

$$\text{其中 } |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = na^{n-1}. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$x_1 = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}.$$

(III) 当  $a = 0$  时, 方程组  $Ax = b$  成为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

它与方程组  $\begin{cases} x_2 = 1, \\ x_3 = 0, \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$  同解. 此时  $x_1$  可任意取值, 所以方程组(3)有无穷多解, 其通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } c \text{ 是任意常数}).$$

**附注** 以下两点值得注意:

(i)  $n$  阶行列式  $D_n$  通常有两种计算方法: 利用行列式性质将  $D_n$  化为三角形行列式; 按一行或一列展开  $D_n$ .

(ii) 从同解方程组(它是十分简单的方程组)直接可得方程组(3)有无穷多解, 并获得通解.

(22)

**分析** (I) 由  $P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right) = P\left(X+Y \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right)$  及已知条件可以算出要求的条件概率.

(II) 先算出  $Z$  的分布函数, 然后计算它的概率密度.

$$\begin{aligned} \text{精解 (I)} \quad P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right) &= P\left(Y \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) \quad (\text{利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{由于 } Y \sim U(0, 1)). \end{aligned}$$

(II) 先计算  $Z$  的分布函数  $F_Z(z)$ , 然后求导得到它的概率密度  $f_Z(z)$ .

$$\text{由于 } Y \text{ 的分布函数 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases} \text{ 所以有}$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X = -1)P(Z \leq z \mid X = -1) + P(X = 0)P(Z \leq z \mid X = 0) + \\ &\quad P(X = 1)P(Z \leq z \mid X = 1) \\ &= P(X = -1)P(X + Y \leq z \mid X = -1) + P(X = 0)P(X + Y \leq z \mid X = 0) + \\ &\quad P(X = 1)P(X + Y \leq z \mid X = 1) \\ &= \frac{1}{3}[P(Y \leq z + 1 \mid X = -1) + P(Y \leq z \mid X = 0) + P(Y \leq z - 1 \mid X = 1)] \\ &= \frac{1}{3}[P(Y \leq z + 1) + P(Y \leq z) + P(Y \leq z - 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} [F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \begin{cases} 0, & z+1 < 0, \\ z+1, & 0 \leq z+1 \leq 1, \\ 1, & z+1 > 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z-1 < 0, \\ z-1, & 0 \leq z-1 \leq 1, \\ 1, & z-1 > 1 \end{cases} \right] \\
&= \frac{1}{3} \begin{cases} 0, & z < -1, \\ z+1, & -1 \leq z < 0, \\ 1+z, & 0 \leq z < 1, \\ 1+z, & 1 \leq z \leq 2, \\ 3, & z > 2, \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < -1, \\ \frac{1}{3}(1+z), & -1 \leq z \leq 2, \\ 1, & z > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

从而

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

**附注** 由于  $Z = X + Y$  是离散型随机变量  $X$  与连续型随机变量  $Y$  之和, 所以要计算  $Z$  的概率密度应先计算  $Z$  的分布函数.

本题是综合题, 有关内容和方法见《高分突破》25.

(23)

**分析** (I) 计算  $ET$ , 证明  $T$  是  $\mu^2$  的无偏估计量.

(II) 利用  $X \sim \chi^2(k)$  的  $DX = 2k$ , 算出  $DT$ .

**精解** (I) 由于

$$ET = E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n}E(S^2) = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 - \frac{1}{n}E(S^2), \quad (1)$$

其中  $D\bar{X} = \frac{1}{n}\sigma^2$ ,  $E\bar{X} = \mu$ ,  $E(S^2) = \sigma^2$ . 将它们代入式(1)得

$$ET = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \mu^2.$$

所以,  $T$  是  $\mu^2$  的无偏估计量.

(II) 当  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  时,  $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ , 所以  $n\bar{X}^2 = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}} \sim \chi^2(1)$ , 此外  $(n-1)S^2 \sim \chi^2$

$(n-1)$ , 并且由  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立知  $n\bar{X}^2$  与  $\frac{1}{n}S^2$  相互独立, 所以

$$\begin{aligned}
DT &= D(\bar{X}^2) + D\left(\frac{1}{n}S^2\right) = \frac{1}{n^2}D(n\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2(n-1)^2}D[(n-1)S^2] \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

**附注** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 则它的均值  $\bar{X}$  和方差  $S^2$  有以下性质:

( i )  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ,  $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ , 并且  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立.

( ii )  $E\bar{X} = \mu$ ,  $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ ,  $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ .

( iii )  $E(S^2) = \sigma^2$ ,  $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ .

本题是综合题, 其有关内容与方法见《高分突破》28, 29.

## 2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、选择题

#### (1) B

分析 利用  $x \rightarrow 0$  时的常用等价无穷小寻找  $\sqrt{x}$  的等价无穷小.

精解 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$  知  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ .

因此本题选(B).

附注 应熟记以下的常用等价无穷小:

$x \rightarrow 0$  时,

$\sin x \sim x$ ,  $\tan x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $\arctan x \sim x$ ,

$\ln(1+x) \sim x$ ,  $e^x - 1 \sim x$ ,  $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0)$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ .

#### (2) D

分析 分别确定所给曲线的铅直渐近线和非铅直渐近线的条数, 得到正确选项.

精解 由于仅当  $x \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow \infty$ , 所以  $x=0$  是曲线的唯一铅直渐近线.

由于  $a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{x} = 1$ ,

$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - a_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} + x + \ln(1+e^{-x}) - x \right] = 0$ ,

所以曲线有非铅直渐近线  $y=x$  (斜渐近线).

由于  $a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \right] = 0$ ,

$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right] = 0$ ,

所以曲线还有非铅直渐近线  $y=0$  (水平渐近线).

因此本题选(D).

附注 对曲线  $y=y(x)$ , 如果极限

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} \text{ 与 } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - ax] \quad (1)$$

都存在, 则直线  $y=ax+b$  是曲线  $y=y(x)$  的非铅直渐近线.

如果  $a$  或  $b$  不存在, 则应对式(1)分别考虑  $x \rightarrow +\infty$  和  $x \rightarrow -\infty$  的极限.

#### (3) C

**分析** 由  $f(x)$  是奇函数知  $F(x)$  是偶函数, 所以只要根据定积分的几何意义算出  $F(2)$ ,  $F(3)$  即可判定正确选项.

**精解** 记区间  $[0, 2]$  上、 $[2, 3]$  下的半圆分别为  $D_1, D_2$ , 则

$$F(2) = \int_0^2 f(t) dt = D_1 \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\pi,$$

$$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = D_1 \text{ 的面积} - D_2 \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi = \frac{3}{8}\pi.$$

此外, 由  $f(x)$  是奇函数知  $F(x)$  是偶函数, 所以

$$F(-3) = F(3) = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}F(2).$$

因此本题选 (C).

**附注** 记住以下结论:

设  $f(x)$  是连续函数, 则当  $f(x)$  是奇函数(偶函数)时,  $\int_0^x f(t) dt$  是偶函数(奇函数).

(4) **D**

**分析** 利用函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续, 排除其中三个正确命题即可.

**精解** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在知  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . 于是由  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续得  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 以及  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在. 所以选项 (A)、(C) 都应排除.

此外, 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在知  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = 0$ . 于是由  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续得  $2f(0) = 0$ , 即  $f(0) = 0$ . 所以选项 (B) 也应排除.

因此本题选 (D).

**附注** 记住下列结论:

设函数  $g(x)$  在点  $x_0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = A$ , 则  $g(x_0) = 0$ ,  $g'(x_0) = A$ .

(5) **D**

**分析** 由于条件中有  $f''(x) > 0$ , 所以  $f'(x)$  单调增加, 因此可以从考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$  入手.

**精解** 对  $f(x)$  在  $[n, n+1]$  上应用拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi_n \in (n, n+1)$ , 使得

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)(n+1 - n) = f'(\xi_n)(n=1, 2, \cdots).$$

由于  $f''(x) > 0$ , 所以,  $f'(\xi_n) \geq f'(\xi_1)$ , 因此, 当  $u_1 < u_2$  时, 有

$$u_{n+1} - u_n \geq u_2 - u_1 > 0 (n=1, 2, \cdots).$$

由此得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) \neq 0$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$  发散, 所以  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n = u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$  的极限不存在, 即  $\{u_n\}$  发散.

因此本题选 (D).

**附注** 本题如题解那样通过证明获得正确的结论是比较困难的, 对选择题可通过举例排除其中三个不正确的选项来获得正确选项, 具体如下:

函数  $f_1(x) = -\sqrt{x}$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_3(x) = x^2$  在  $(0, +\infty)$  上都有大于零的二阶导数.

对  $f_1(x)$  有  $u_1 = -1 > -\sqrt{2} = u_2$ , 但  $\{u_n\} = \{-\sqrt{n}\}$  发散, 排除选项(A).

对  $f_2(x)$  有  $u_1 = 1 > \frac{1}{2} = u_2$ , 但  $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$  收敛, 排除选项(B).

对  $f_3(x)$  有  $u_1 = 1 < 4 = u_2$ , 但  $\{u_n\} = \{n^2\}$  发散, 排除选项(C).

因此本题选(D).

本题是综合题, 其有关内容及计算方法见《高分突破》05.

### (6) B

**分析** 注意到  $\int_{\Gamma} f(x, y) dy = \int_{\Gamma} dy$  即可得到正确选项.

**精解** 记点  $M, N$  的坐标分别为  $(x_M, y_M)$  和  $(x_N, y_N)$ , 则由  $y_M > 0, y_N < 0$  得

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dy = \int_{y_M}^{y_N} dy = y_N - y_M < 0.$$

因此本题选(B).

**附注** 计算曲线积分时, 要注意被积函数中的变量必满足积分曲线方程. 利用这一点往往可以化简要求的曲线积分.

对于曲面积分也有相似的说法.

### (7) A

**分析** 按向量组线性相关定义判断正确选项.

**精解** 对选项(A), 由于

$$1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) + 1 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) + 1 \cdot (\alpha_3 - \alpha_1) = 0,$$

所以,  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$  线性相关.

因此本题选(A).

**附注** 选项(B)、(C)、(D)的向量组都线性无关, 可按以下快捷方法证明: 由于

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 且}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ , 所以  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关. 同样可证  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$  线性无关,  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$  线性无关.

### (8) B

**分析** 由于  $A$  是实对称矩阵, 所以可从计算  $A$  的特征值入手.

**精解** 记  $E$  为 3 阶单位矩阵, 则由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2 = 0$$

得  $A$  的特征值为 0, 3(二重). 此外, 容易看到  $B$  的特征值为 0, 1(二重).

由此可知  $A$  与  $B$  的特征值不全相同, 所以不相似. 但是  $A$  与  $B$  的正特征值个数、负特征值个数分别相等. 所以  $A$  与  $B$  合同.

因此本题选(B).

**附注** (i)  $n$  阶实对称矩阵  $A$  与  $B$  相似必合同, 但合同未必相似.

(ii)  $n$  阶实对称矩阵  $A$  与  $B$  相似的充分必要条件是  $A$  与  $B$  有相同的特征多项式; 合同的充分必要条件是二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  与  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$  (其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ) 有相同的规范形.

(9) C

**分析** 随机事件{第 4 次射击恰好第 2 次命中目标}是相互独立随机事件{前 3 次射击恰好有一次命中目标}与{第 4 次射击命中目标}之积, 由此即可算出要求的概率.

**精解** 记  $A = \{\text{第 4 次射击恰好为第 2 次命中目标}\},$

$B = \{\text{前 3 次射击恰好有一次命中目标}\},$

$C = \{\text{第 4 次射击命中目标}\},$

则  $P(A) = P(BC) = P(B)P(C) = C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2.$

因此本题选(C).

**附注** 顺便可以考虑与本题相关的一个问题, 即计算某人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的条件下, 第 1 次命中目标的是第 3 次射击的概率.

记  $D = \{\text{第 1 次命中目标的是第 3 次射击}\},$  则所求的概率为

$$P(D|A) = \frac{P(DA)}{P(A)} = \frac{(1-p)^2 p^2}{3p^2(1-p^2)} = \frac{1}{3}.$$

(10) A

**分析** 由条件概率密度计算公式即可确定正确选项.

**精解** 由于  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且  $X$  与  $Y$  互不相关, 所以  $X$  与  $Y$  相互独立. 从而  $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x).$

因此本题选(A).

**附注** 由于本题的  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 所以对任何  $y$  有  $f_Y(y) \neq 0$ , 从而对任何  $y$ ,  $f_{X|Y}(x|y)$  都有意义.

二、填空题

(11)  $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$



**分析** 先令  $t = \frac{1}{x}$ , 然后用分部积分法计算.

$$\begin{aligned}\text{精解} \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx & \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t d e^t \\ & = t e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} - (e - e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

**附注** 换元积分法与分部积分法是定积分的两种基本的计算方法, 应熟练掌握, 有时将它们结合起来使用, 能使计算更加快捷.

$$(12) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} f'_u + y^x \ln y f'_v$$

**分析** 按二元复合函数求偏导数方法计算.

$$\begin{aligned}\text{精解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= f'_u \cdot \frac{\partial x^y}{\partial x} + f'_v \cdot \frac{\partial y^x}{\partial x} \\ &= y x^{y-1} f'_u + y^x \ln y f'_v.\end{aligned}$$

**附注** 如果要同时计算  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , 则可从计算  $dz$  入手:

$$\begin{aligned}\text{由} \quad dz &= f'_u du + f'_v dv = f'_u dx^y + f'_v dy^x \\ &= f'_u (y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy) + f'_v (y^x \ln y dx + x y^{x-1} dy) \\ &= (y x^{y-1} \cdot f'_u + y^x \ln y \cdot f'_v) dx + (x^y \ln x \cdot f'_u + x y^{x-1} \cdot f'_v) dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{得} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= y x^{y-1} \cdot f'_u + y^x \ln y \cdot f'_v, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^y \ln x \cdot f'_u + x y^{x-1} \cdot f'_v.\end{aligned}$$

$$(13) \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$$

**分析** 先计算所给微分方程对应的齐次线性微分方程的通解  $Y$ , 然后计算所给的非齐次线性微分方程的一个特解  $y^*$ . 由此得到要求的通解  $y = Y + y^*$ .

**精解** 所给微分方程

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x} \quad (1)$$

对应的齐次线性微分方程

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (2)$$

的特征方程为  $r^2 - 4r + 3 = 0$ , 它的根为  $r = 1, 3$ , 所以式(2)的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

式(1)有特解为  $y^* = A e^{2x}$ , 将它代入式(1)得

$$4A e^{2x} - 8A e^{2x} + 3A e^{2x} = 2e^{2x}, \text{ 即 } A = -2.$$

所以  $y^* = -2e^{2x}$ . 因此式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}.$$

**附注** 如果将所给微分方程改为

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, \quad (3)$$

则对应的齐次线性微分方程的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ . 此外式(3)有特解  $y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}$ , 将它代入式(3)得  $A = 1$ . 所以  $y^* = x^2e^{2x}$ . 从而式(3)的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + x^2e^{2x}.$$

$$(14) \quad \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

**分析** 先利用  $\Sigma$  的对称性化简所给的曲面积分, 然后计算.

$$\text{精解} \quad \oint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \oint_{\Sigma} x dS + \oint_{\Sigma} |y| dS. \quad (1)$$

由于  $\Sigma$  关于  $yOz$  平面对称, 在对称点处  $x$  的值互为相反数, 所以  $\oint_{\Sigma} x dS = 0$ , 由于  $\Sigma$  关于三个坐标平面都对称, 在对称点处  $|y|$  的值彼此相等, 所以

$$\oint_{\Sigma} |y| dS = 8 \iint_{\Sigma_1} y dS \quad (\text{其中 } \Sigma_1: x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 是 } \Sigma \text{ 的第一卦限部分}).$$

将它们代入式(1)得

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} (x + |y|) dS &= 8 \iint_{\Sigma_1} y dS \\ &= 8 \iint_{D_{xy}} y \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \Big|_{z=1-x-y} d\sigma \end{aligned}$$

(其中  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  是  $\Sigma_1$  在  $xOy$  平面的投影)

$$= 8\sqrt{3} \iint_{D_{xy}} y d\sigma = 8\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy = 4\sqrt{3} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

**附注** 计算关于面积的曲面积分时, 总是先按曲面的对称性进行化简, 这种快捷计算方法见《高分突破》15.

$$(15) \quad 1$$

**分析** 只要算出矩阵  $A^3$ , 即可得到  $A^3$  的秩.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad \text{由于 } A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以  $A^3$  的秩为 1.

附注 顺便考虑  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$ , 它可快捷计算如下:

由于  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} E_4 + A$ , 所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 &= (E_4 + A)^3 = E_4 + 3A + 3A^2 + A^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(16) \quad \frac{3}{4}$$

分析 设两个数为  $X, Y$ , 则它们是相互独立的随机变量, 且都在  $(0, 1)$  内服从均匀分布.

精解  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$  其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 所

以所求的概率为

$$\begin{aligned} P\left(|X - Y| < \frac{1}{2}\right) &= P((X, Y) \in D_1) \quad \left(\text{其中 } D_1 = \left\{(x, y) \mid |x - y| < \frac{1}{2}\right\}\right) \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D \cap D_1} d\sigma \quad \left(\text{其中 } D \cap D_1 \text{ 如图 B-07-1 阴影部分所示, 其面积为 } = \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

附注 “在区间  $(0, 1)$  内随机地取两个数”, 表明这两个数  $X, Y$  相互独立, 且都在  $(0, 1)$  内服从均匀分布

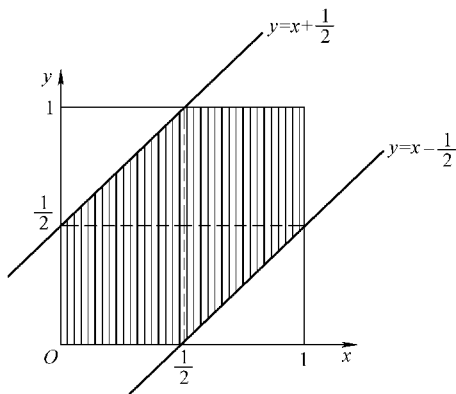


图 B-07-1

## 三、解答题

(17)

**分析** 先计算  $f(x, y)$  在  $D$  的内部的所有可能极值和  $D$  的边界上的最值, 然后将这些值进行比较即得  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值和最小值.

**精解** 因为  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x^2y$ , 所以由

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x - 2xy^2 = 0, \\ 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

得  $f(x, y)$  在  $D$  的内部的可能极值点为  $(\sqrt{2}, 1)$ ,  $(-\sqrt{2}, 1)$ , 所以  $f(x, y)$  在  $D$  的内部的可能极值为

$$f(\sqrt{2}, 1) = f(-\sqrt{2}, 1) = 2.$$

以下考虑  $f(x, y)$  在  $D$  的边界上的最值:

$D$  的边界由两部分组成,  $L_1: y=0 (-2 \leq x \leq 2)$  和  $L_2: x^2 + y^2 = 4, 0 \leq y \leq 2$ .

$f(x, y)|_{L_1} = x^2$ , 它在  $[-2, 2]$  上的最大值为  $4 (=f(\pm 2, 0))$ , 最小值为  $0 (=f(0, 0))$ .

$f(x, y)|_{L_2} = 4 + y^2[1 - (4 - y^2)] = y^4 - 3y^2 + 4 = \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ , 它在  $[0, 2]$  上的最大值为  $8 (=f(0, 2))$ , 最小值为  $\frac{7}{4} \left(=f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ .

因此  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值  $= \max\{2, 4, 8\} = 8$ , 最小值  $= \min\left\{2, 0, \frac{7}{4}\right\} = 0$ .

**附注** 二元连续函数  $g(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ , 它们的计算步骤:

(i) 计算  $g(x, y)$  在  $D$  的内部的所有可能极值点, 设为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 算出对应的函数值(即可能极值)  $g(x_1, y_1), g(x_2, y_2), \dots, g(x_n, y_n)$ .

(ii) 计算  $g(x, y)$  在  $D$  的边界上的最大值  $M_1$  与最小值  $m_1$  (有时这一最大值与最小值可以用计算条件极值方法算出, 此时  $D$  的边界曲线方程即为约束条件).

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad M &= \max\{g(x_1, y_1), g(x_2, y_2), \cdots, g(x_n, y_n), M_1\}, \\ m &= \min\{g(x_1, y_1), g(x_2, y_2), \cdots, g(x_n, y_n), m_1\}. \end{aligned}$$

本题的有关内容和方法见《高分突破》11.

(18)

**分析** 由于  $\Sigma$  不是闭曲面, 所以不能直接应用高斯公式计算所给的曲面积分, 为此添上  $\Sigma_1$ , 它是  $xOy$  平面上的椭圆域:  $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$ , 方向为下侧, 然后考虑应用高斯公式.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad & \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydx dy \\ &= \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydx dy - \iint_{\Sigma_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydx dy, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{其中, } \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydx dy \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(2zy)}{\partial y} + \frac{\partial(3xy)}{\partial z} \right) d\sigma$$

(其中  $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\}$  是由曲面  $\Sigma + \Sigma_1$  围成的闭区域)

$$= \iiint_{\Omega} 3z d\sigma = 3 \int_0^1 z dz \iint_{D_z} d\sigma$$

(其中  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 - z\}$ )

$= \{(x, y) \mid \frac{x^2}{1-z} + \frac{y^2}{4(1-z)} \leq 1\}$  是  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$  平面的投影)

$$= 3 \int_0^1 z \cdot \pi \cdot \sqrt{1-z} \cdot \sqrt{4(1-z)} dz = 6\pi \int_0^1 (z - z^2) dz = \pi, \quad (2)$$

$$\iint_{\Sigma_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydx dy = -3 \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1} xydx dy = 0$$

(由于椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$  关于  $x$  轴对称, 在对称点处  $xy$  的值互为相反数).

(3)

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydx dy = \pi.$$

**附注** 对于有向曲面  $\Sigma$  上的关于坐标的曲面积分  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$ , 如果  $\Sigma$  不是闭曲面, 可以如本题一样, 添加一块曲面  $\Sigma_1$ , 使得  $\Sigma + \Sigma_1$  是外侧有向曲面, 然后考虑应用高斯公式, 快捷地算得所给的曲面积分. 有关内容和方法见《高分突破》15.

(19)

**分析** 作辅助函数  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则欲证问题转化为证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ . 显然需两次应用罗尔定理.

**精解** 显然,  $F(a)=F(b)(=0)$ , 此外存在  $c, d \in (a, b)$ , 使得  $f(c)=g(d)=M(f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值). 如果  $c \neq d$ , 则  $F(c)=f(c)-g(c) \geq 0$ ,  $F(d)=f(d)-g(d) \leq 0$ , 于是由零点定理的推广形式知存在  $\eta \in [c, d]$  或  $[d, c]$ , 使得  $F(\eta)=0$ . 如果  $c=d$ , 则可取  $\eta=c$ .

由此可知, 在  $[a, b]$  上有不同的三点  $a, \eta, b$ , 使得  $F(a)=F(\eta)=F(b)$ , 并且  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 所以对  $F(x)$  分别在  $[a, \eta]$  和  $[\eta, b]$  上应用罗尔定理知, 存在  $\xi_1 \in (a, \eta)$  和  $\xi_2 \in (\eta, b)$ , 使得  $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$ . 此外  $F'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上连续, 在  $(\xi_1, \xi_2)$  内可导, 所以再由罗尔定理知存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使得  $F''(\xi)=0$ .

**附注** (i) 零点定理有各种推广形式, 例如:

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a)f(b) \leq 0$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi)=0$ ;

设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, +\infty)$ , 使得  $f(\xi)=0$ .

(ii) 罗尔定理也有推广形式, 例如:

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$  (其中  $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ ), 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi)=0$ ;

设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$  ( $a < \xi_1 < \xi_2 < b$ ), 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi)=0$ .

本题的有关方法见《高分突破》04.

(20)

**分析** (I) 将  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  代入所给微分方程, 然后比较  $x$  的同次幂系数即可.

(II) 先根据 (I) 得到的递推式及所给的初始条件确定各个  $a_n$  的值, 然后计算  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数得  $y(x)$  的表达式.

**精解** (I)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛, 所以对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  可以逐项求导数及二阶导数, 故有

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

将它们代入  $y'' - 2xy' - 4y = 0$  得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即  $2a_2 - 4a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2na_n - 4a_n] x^n = 0$ .

比较上式等号两边关于  $x$  的同次幂的系数得

$$2a_2 - 4a_0 = 0, \quad (1)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+2)a_n = 0 \quad (n=1, 2, \cdots). \quad (2)$$

于是得证

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1}a_n \quad (n=1, 2, \cdots). \quad (3)$$

(II) 由  $y(0)=0$  得  $a_0=0$ . 将它代入式(1)得  $a_2=0$ . 于是由式(3)得  $a_{2n}=0 (n=2, 3, \cdots)$ .

由  $y'(0)=1$  得  $a_1=1=\frac{1}{0!}$ . 于是由式(3)得

$$a_3 = \frac{2}{1+1}a_1 = \frac{1}{1!},$$

$$a_5 = \frac{2}{3+1}a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} = \frac{1}{2!},$$

$$a_7 = \frac{2}{5+1}a_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{3!},$$

$$\vdots$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{n!},$$

$$\vdots$$

$$\text{从而 } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = xe^{x^2}.$$

**附注** 微分方程的幂级数求解可按以下步骤进行:

(i) 设未知函数  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 将它代入所给微分方程和初始条件确定系数  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ .

(ii) 将系数  $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$  代入幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则它的和函数即为该微分方程的满足初始条件的解.

(21)

**分析** 将所给方程组与方程联立构成新的线性方程组, 由此, 问题变成新线性方程组有解时计算  $a$  的值及所有解.

**精解** 由所给方程组及方程构造线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1. \end{cases} \quad (1)$$

对它的增广矩阵  $\bar{A}$  施行初等行变换:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1) & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \\ 0 & 0 & a-1 & -(a-1) \end{array} \right). \end{aligned}$$

由于式(1)有解(即所给方程组与方程有公共解), 所以  $r(\bar{A})=r(A)$  ( $A$  是式(1)的系数矩阵). 由此得到  $(a-1)(a-2)=0$ , 即  $a=1, 2$ .

当  $a=1$  时, 式(1)与方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

同解. 所以式(1)的解, 即所求的公共解为

$$(x_1, x_2, x_3)^T = C(-1, 0, 1)^T \quad (C \text{ 是任意常数}).$$

当  $a=2$  时, 式(1)与方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

同解, 所以式(1)的解, 即所求的公共解为

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 1, -1)^T.$$

**附注** 线性方程组

$$A_1 x = b_1 \text{ 与 } A_2 x = b_2$$

(其中  $A_1, A_2$  分别是  $m_1 \times n$  与  $m_2 \times n$  矩阵)有公共解的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases} A_1 x = b_1, \\ A_2 x = b_2 \end{cases}$$

有解.

本题的有关内容与方法见《高分突破》21.

(22)

**分析** (I) 记  $f(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 1$ , 则  $B$  的所有特征值为  $\mu_1 = f(\lambda_1)$ ,  $\mu_2 = f(\lambda_2)$ ,  $\mu_3 = f(\lambda_3)$ . 并且只要算出  $A$  的特征向量, 即能得到  $B$  的所有特征向量.

(II) 由于  $B$  与对角矩阵正交相似, 由此即可算出  $B$ .

**精解** (I) 由  $B = A^5 - 4A^3 + E$ , 记  $f(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 1$ , 所以由  $A$  的特征值为 1, 2, -2 得  $B$  的全部特征值为  $\mu = f(1) = -2$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(-2) = 1$ .

$B$  的对应  $\mu = -2$  的全部特征向量为  $C\alpha_1 = C(1, -1, 1)^T$  (其中  $C$  是任意非零常数).

设  $B$  的对应  $\mu = 1$  (二重) 的特征向量为  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则由  $A$  是实对称矩阵知  $B$  是



实对称矩阵, 所以有

$$\alpha_1 \cdot x = 0, \text{ 即 } x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

它的基础解系为  $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$ , 所以  $B$  的对应  $\mu = 1$  的全部特征向量为

$$C_1(1, 1, 0)^T + C_2(-1, 0, 1)^T = (C_1 - C_2, C_1, C_2)^T,$$

其中  $C_1, C_2$  是任意不全为零常数.

(II) 为了构造正交矩阵  $Q$ , 将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  正交化, 实际上只要将  $\alpha_2, \alpha_3$  正交化即可:

$$\eta_2 = \alpha_2 = (1, 1, 0)^T,$$

$$\eta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)} \eta_2$$

$$= (-1, 0, 1)^T + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T,$$

将  $\alpha_1, \eta_2, \eta_3$  单位化:

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

$$\text{记 } Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则 } Q^T B Q = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} B &= Q \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

附注  $B$  也可以按与  $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  相似的方法计算, 具体如下:

记  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ , 所以只要算出  $P^{-1}$  即可得

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

但是, 在计算实对称矩阵  $B$  时, 以构造正交矩阵  $Q$ , 并由  $B = Q \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} Q^T$  计算  $B$  为宜.

应熟练掌握实对称矩阵的正交相似对角化方法.

(23)

分析 (I) 对  $f(x, y)$  在  $D_1 = \{(x, y) \mid x > 2y\}$  上积分即可得到  $P(X > 2Y)$ .

(II) 利用公式  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$  计算  $f_Z(z)$ .

精解 (I) 记  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $D_1 = \{(x, y) \mid x > 2y\}$ , 则  $D \cap D_1$  如图 B-07-2a 阴影部分所示. 于是

$$\begin{aligned} P(X > 2Y) &= P((X, Y) \in D_1) \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D \cap D_1} (2-x-y) d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} (2-x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left( x - \frac{5}{8}x^2 \right) dx = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

$$(II) f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } f(x, z-x) &= \begin{cases} 2-x-(z-x), & 0 < x < 1, 0 < z-x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2-z, & 0 < x < 1, x < z < x+1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \end{aligned}$$

即  $f(x, z-y)$  仅在图 B-07-2b 阴影部分取值为  $2-z$ , 在  $xOz$  平面的其他部分都取值为零, 所以由图可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z (2-z) dx, & 0 < z < 1, \\ \int_{z-1}^1 (2-z) dx, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} z(2-z), & 0 < z < 1, \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

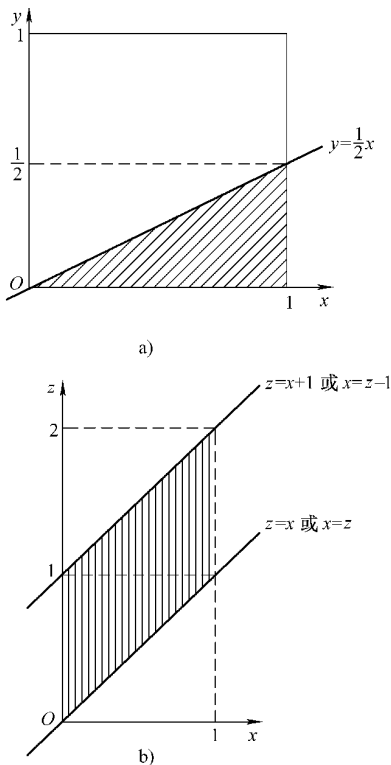


图 B-07-2

**附注** 应记住以下结论:

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$ , 则  $Z = aX + bY + c$  ( $a, b, c$  是常数) 的概率密度为

$$\text{当 } b \neq 0 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z - ax - c}{b}\right) \frac{1}{|b|} dx;$$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z - by - c}{a}, y\right) \frac{1}{|a|} dy.$$

特别有

$$Z_1 = X + Y \text{ 的概率密度 } f_{Z_1}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy;$$

$$Z_2 = X - Y \text{ 的概率密度 } f_{Z_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x - z) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + y, y) dy.$$

(24)

**分析** (I) 计算  $EX$ , 令  $EX = \bar{X}$  算出  $\theta$  的矩估计量.

(II) 计算  $E(4\bar{X}^2)$  即可得知  $4\bar{X}^2$  是否为  $\theta^2$  的无偏估计量.

**精解** (I) 因为  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{1}{2\theta} dx + \int_\theta^1 x \cdot \frac{1}{2(1-\theta)} dx$

$$= \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}(1 + \theta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta.$$

所以, 由矩估计法令  $EX = \bar{X}$ , 即  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta = \bar{X}$ . 解出  $\theta$ , 即得  $\theta$  的矩估计量为

$$\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}.$$

(II) 由  $E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D\bar{X} + (E\bar{X})^2] = \frac{4}{n}DX + 4(EX)^2$

$$= \frac{4}{n}DX + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta\right)^2$$

$$= \frac{4}{n}DX + \frac{1}{4} + \theta + \theta^2 > \theta^2$$

(由于  $D(X) \geq 0, \theta > 0$ ) 知  $E(4\bar{X}^2)$  不是  $\theta^2$  的无偏估计量.

**附注** 题解中不必算出  $DX$  的值, 现在作为练习具体计算  $DX$ :

$$DX = E(X^2) - (EX)^2, \quad (1)$$

其中  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{1}{2\theta} dx + \int_\theta^1 x^2 \cdot \frac{1}{2(1-\theta)} dx$

$$= \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{6}(1 + \theta + \theta^2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{3}\theta^2,$$

$$(EX)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\theta^2.$$

将它们代入式(1)得

$$DX = \frac{5}{48} - \frac{1}{12}\theta + \frac{1}{12}\theta^2.$$

本题是综合题, 有关内容和方法见《高分突破》29.

## 2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

### 一、填空题

(1) 2

分析 用等价无穷小代替计算所给极限.

精解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$

附注 等价无穷小代替是计算  $\frac{0}{0}$  型未定式极限的常用方法之一, 以下的等价无穷小应熟记:  $x \rightarrow 0$  时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0), 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

(2)  $y = Cxe^{-x}$

分析 所给微分方程是变量可分离微分方程.

精解 所给微分方程可改写为

$$\frac{dy}{y} = \left( \frac{1}{x} - 1 \right) dx,$$

两边积分得

$$\ln y = \ln x - x + \ln C,$$

所以, 所给微分方程的通解为

$$y = Cxe^{-x}.$$

附注 要熟练掌握四类一阶微分方程的求解方法:

变量可分离微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程(包括伯努利方程)和全微分方程.

(3)  $2\pi$

分析 添上一块曲面后应用高斯公式快捷计算所给的曲面积分.

精解 记  $\Sigma_1$  为平面  $z=1$  位于  $\Sigma$  之内的那一块, 方向为上侧, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy \\ &= \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy - \iint_{\Sigma_1} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\oiint_{\Sigma + \Sigma_1} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy$

$$\stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial[3(z-1)]}{\partial z} \right\} dv \quad (\text{其中 } \Omega \text{ 是由闭曲面 } \Sigma + \Sigma_1 \text{ 围成的空间区域})$$

$$= 6 \iiint_{\Omega} dv = 6 \int_0^1 dz \iint_{D_z} d\sigma \quad (\text{其中 } D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\} \text{ 是 } \Omega \text{ 的竖坐标为 } z \text{ 的截面在 } xOy \text{ 平面的投影})$$

$$= 6 \int_0^1 \pi z^2 dz = 2\pi, \quad (2)$$

$$\iint_{\Sigma_1} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = 0 \quad (\text{由于 } \Sigma_1 \text{ 位于平面 } z=1 \text{ 上}). \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = 2\pi.$$

**附注** 对于有向曲面  $\Sigma$  上的关于坐标的曲面积分  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ , 如果  $\Sigma$  不是闭曲面, 可以如本题一样, 添加一块曲面  $\Sigma_1$ , 使  $\Sigma + \Sigma_1$  是外侧有向闭曲面, 然后应用高斯公式, 便可快捷地算得所给的曲面积分.

本题的有关内容和方法见《高分突破》15.

(4)  $\sqrt{2}$

**分析** 用点到平面的距离公式计算.

**精解** 根据点到平面的距离公式得

$$d = \frac{|3x + 4y + 5z|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} \Big|_{(2,1,0)} = \sqrt{2}.$$

**附注** (i) 点  $M(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离公式为

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Big|_M.$$

(ii) 点  $M(x_0, y_0, z_0)$  到空间直线  $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$  的距离公式为

$$d = \frac{|(l, m, n) \times (a - x_0, b - y_0, c - z_0)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

(5) 2

**分析** 按公式  $|MN| = |M| \cdot |N|$  (其中  $M, N$  都是  $n$  阶矩阵) 计算.

**精解** 所给等式可以改写成

$$B(A - E) = 2E,$$

所以  $|B| \cdot |A - E| = 4$ , 其中

$$|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\text{因此 } |B| = \frac{4}{2} = 2.$$

**附注** 关于  $n$  阶矩阵的行列式有以下性质(应熟记):

设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 则

$$(i) |kA| = k^n |A| \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$(ii) |A^T| = |A|.$$

$$(iii) |AB| = |A| |B|.$$

$$(iv) \text{ 设 } A \text{ 是可逆矩阵, 则 } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

$$(v) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } |A^*| = |A|^{n-1} (A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵}).$$

$$(vi) \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|, \quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^n |A| |B|.$$

$$(6) \quad \frac{1}{9}$$

**分析** 利用  $\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \{X \leq 1, Y \leq 1\}$  计算所给的概率.

**精解**  $P(\max\{X, Y\} \leq 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1)P(Y \leq 1)$  (利用  $X$  与  $Y$  相互独立)

$$= [P(X \leq 1)]^2 = [P(0 \leq X \leq 1)]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad (\text{由于 } X \sim U[0, 3])$$

$$= \frac{1}{9}.$$

**附注** 顺便计算概率  $P\{\min(X, Y) \leq 1\}$ :

$$\begin{aligned} P\{\min(X, Y) \leq 1\} \\ &= 1 - P(\min\{X, Y\} > 1) = 1 - P(X > 1, Y > 1) \\ &= 1 - P(X > 1)P(Y > 1) = 1 - [P(X > 1)]^2 = 1 - [P(1 < X \leq 3)]^2 \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

## 二、选择题

(7) A

**分析** 画出  $y=f(x)$  的概图, 然后按  $\Delta y, dy$  的几何表示选择正确选项.

**精解** 由  $f'(x) > 0$  和  $f''(x) > 0$  可得函数  $y=f(x)$  的概图如图 B-06-1 所示, 其中  $MT$  是曲线  $y=f(x)$  在点  $M(x_0, f(x_0))$  的切线, 于是当  $\Delta x > 0$  时,

$$dy = \overline{AB}, \quad \Delta y = \overline{AC}.$$

由图可知,  $0 < dy < \Delta y$ .

因此本题选(A).

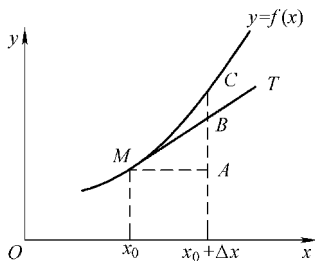


图 B-06-1

**附注** 本题是利用  $\Delta y$  与  $dy$  的几何解释获解的, 也可以用分析方法求解, 具体如下: 当  $\Delta x > 0$  时有

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi) \Delta x \quad (\text{其中 } \xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)) \\ &> f'(x_0) \Delta x \quad (\text{由于 } f''(x) > 0) \\ &= dy > 0 \quad (\text{由于 } f'(x_0) > 0).\end{aligned}$$

(8) C

**分析** 按所给的二次积分画出对应的二重积分的积分区域, 然后写出对应的关于“先  $x$  后  $y$ ”或“先  $y$  后  $x$ ”的二次积分.

**精解** 
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \iint_D f(x, y) d\sigma, \quad (1)$$

其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ , 如图 B-06-2 阴影部分所示.

对式(1)的二重积分采用“先  $x$  后  $y$ ”方法积分得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \\ = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.\end{aligned}$$

因此本题选(C).

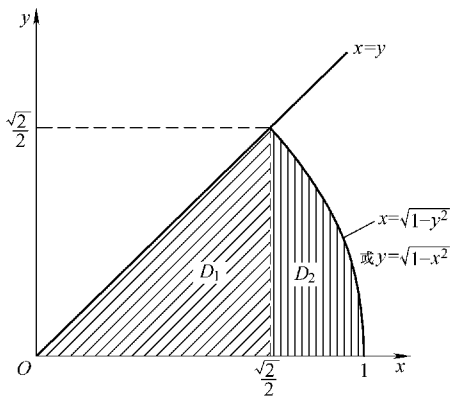


图 B-06-2

**附注** 设  $f(x, y)$  是连续函数, 要更换关于它的二次积分的积分次序或更换关于它的二次积分的坐标系, 重要的是确定相对应的二重积分的积分区域  $D$ .

例如, 要将本题的  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  转换成“先  $y$  后  $x$ ”的二次积分, 则需将  $D$  划分成  $D_1$  与  $D_2$  (图 B-06-2), 其中

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq y \leq x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.\end{aligned}$$

(9) D

分析 根据收敛级数性质判定正确选项.

精解 由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_{n+1}$  都收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  收敛.

因此本题选(D).

附注 应记住收敛级数的基本性质.

(10) D

分析 用二元函数条件极值的拉格朗日乘数法判定正确选项.

精解  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y)=0$  下的极值点可用拉格朗日乘数法计算. 故作拉格朗日函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

则  $(x_0, y_0)$  满足

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0) = 0, \\ F'_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

其中  $\lambda_0$  是对应  $(x_0, y_0)$  的  $\lambda$ . 消去其中的  $\lambda_0$  得

$$f'_x(x_0, y_0) \varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0) = 0.$$

由此可知, 当  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$  时, 由于  $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 必有  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

因此本题选(D).

附注 设  $f(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$  都是可微函数, 则  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y)=0$  下的极值点  $(x_0, y_0)$  满足方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

但满足上述方程组的点  $(x_0, y_0)$  未必是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y)=0$  下的极值点, 只是可能极值点.

(11) A

分析 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是抽象的向量组, 所以其线性相关性的判定应从定义入手.

精解 先考虑选项(A)的正确性.

由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关知, 存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = \mathbf{0}.$$

从而存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得  $k_1 A \alpha_1 + k_2 A \alpha_2 + \dots + k_s A \alpha_s = A(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s) = A \mathbf{0} = \mathbf{0}$ , 所以  $A \alpha_1, A \alpha_2, \dots, A \alpha_s$  线性相关.

因此本题选(A).

附注 这里顺便指出, 当  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关时,  $A \alpha_1, A \alpha_2, \dots, A \alpha_s$  可能线性无关, 也可能线性相关, 即  $A \alpha_1, A \alpha_2, \dots, A \alpha_s$  的线性相关性与  $A$  有关.

(12) B



**分析** 写出初等变换对应的初等矩阵即可.

**精解** 由题意得

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P A P^{-1} \quad (\text{由于 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

因此本题选(B).

**附注** 应记住  $m \times n$  矩阵  $A$  的每一个初等变换对应的初等矩阵:

$A$  的每个初等行变换所对应的初等矩阵是对  $m$  阶单位矩阵作相应的初等行变换而成的矩阵;  $A$  的每个初等列变换所对应的初等矩阵是对  $n$  阶单位矩阵作相应的初等列变换而成的矩阵.

每个  $n$  阶初等矩阵都是可逆矩阵, 其逆矩阵是对  $n$  阶单位矩阵施行与此初等矩阵对应初等变换的逆变换(例如交换第  $i$  行与第  $j$  行的逆变换是交换第  $i$  行与第  $j$  行; 第  $i$  行乘上不为零常数  $c$  的逆变换是第  $i$  行乘上  $\frac{1}{c}$ ; 第  $i$  行乘以常数  $k$  加到第  $j$  行的逆变换是第  $i$  行乘以  $-k$  加到第  $j$  行. 对初等列变换也有同样的说法).

(13) C

**分析** 利用加法公式和乘法公式判定正确选项.

**精解** 由随机事件概率的加法公式与乘法公式得

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(B)P(A|B) \\ &= P(A) + P(B) - P(B) \cdot 1 = P(A). \end{aligned}$$

因此本题选(C).

**附注** (i) 要熟记随机事件概率计算中的以下公式:

逆概公式  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

加法公式  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , 特别当  $A$  与  $B$  互不相容时,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

减法公式  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ , 特别当  $B \subset A$  时,  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ .

乘法公式  $P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B|A), & P(A) > 0, \\ P(B)P(A|B), & P(B) > 0. \end{cases}$

全概率公式  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$ , 其中  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  的一个划分, 且  $P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ .

(ii) 本题  $P(A \cup B) = P(A)$  的以下证明是错误的.

由  $P(A|B) = 1$  知,  $B$  发生时,  $A$  必发生, 于是  $B \subset A$ . 由此得到  $P(A \cup B) = P(A)$ . 其错误在于开头的一句话是不正确的.

(14) A

**分析** 引入  $X, Y$  的标准化随机变量即可判定正确选项.

**精解** 记  $X^0 = \frac{X - \mu_1}{\sigma_1}$ ,  $Y^0 = \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}$ , 则标准化随机变量  $X^0$  与  $Y^0$  都服从标准正态分布  $N(0, 1)$ . 于是有

$$\begin{aligned} P\left(\left|X^0\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right) &= P\left(\frac{|X - \mu_1|}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}\right) = P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1) \\ &= P\left(\frac{|Y - \mu_2|}{\sigma_2} < \frac{1}{\sigma_2}\right) = P\left(\left|Y^0\right| < \frac{1}{\sigma_2}\right), \end{aligned}$$

所以,  $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$ , 即  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

因此本题选(A).

**附注** 对于服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的随机变量  $X$ , 在考虑它的有关概率问题时, 总需将它标准化, 即引入  $X^0 = \frac{X - \mu}{\sigma}$ , 则  $X^0 \sim N(0, 1)$ .

### 三、解答题

(15)

**分析** 利用极坐标和积分区域的对称性计算所给的二重积分.

$$\text{精解 } I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy + \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1 + r^2} r dr \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + r^2} d(1 + r^2) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2, \\ \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy &= 0 \end{aligned}$$

(由于  $D$  关于  $x$  轴对称, 在对称点处  $\frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$  的值互为相反数, 所以  $\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 0$ ).

将它们代入式(1)得

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

**附注** 在计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  时, 应按积分区域  $D$  的对称性进行化简. 常见的区域对称性有:

(i)  $D$  关于  $x$  轴(或  $y$  轴)对称, 则  $f(x, y)$  在对称点  $(x, y)$  与  $(x, -y)$  (或  $(x, y)$  与  $(-x, y)$ ) 处的值, 互为相反数时,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ; 彼此相等时,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$  ( $D_1$  是按对称性将  $D$  划分成的两部分之一).

(ii)  $D$  关于原点对称, 则  $f(x, y)$  在对称点  $(x, y)$  与  $(-x, -y)$  处的值, 互为相反数时,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ; 彼此相等时,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$  ( $D_1$  是按对称性将  $D$  划分

成的两部分之一).

(iii)  $D$  关于直线  $y=x$  对称, 则  $f(x, y)$  在对称点  $(x, y)$  与  $(y, x)$  处的值, 互为相反数时,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ; 彼此相等时  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$  ( $D_1$  是按对称性将  $D$  划分成的两部分之一).

本题的有关内容和方法见《高分突破》12.

(16)

**分析** (I) 由于  $\{x_n\}$  是由递推式定义的, 所以用数列极限存在准则 II 确定  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求出该极限.

(II) 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则只要算出  $\lim_{x \rightarrow A} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ , 即可得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$  的值.

**精解** (I) 当  $x \in (0, \pi)$  时,  $\sin x < x$ , 所以对  $n = 1, 2, \dots$  有

$$0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi,$$

即  $\{x_n\}$  单调减少有下界, 所以由数列极限存在准则 II 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 记其为  $A$ , 则  $A \in [0, \pi)$ . 令  $n \rightarrow \infty$  对递推式  $x_{n+1} = \sin x_n$  两边取极限得  $A = \sin A$ . 显然该方程在  $[0, \pi)$  上仅有解  $A = 0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

$$(II) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}.$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow 0$ , 所以考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{x^2}}, \quad (1)$$

其中,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

**附注** 对于  $1^\infty$  型未定式极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$  (这里  $x_0$  可以为  $\infty$ ), 除可直接应用重要公式

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$  或其推广形式  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$  外, 其快捷计算步骤如下:

(i) 由  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$ , 将计算  $1^\infty$  型未定式极限转换成计算  $\frac{0}{0}$  型未定式极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$ .

(ii) 使用重要极限公式、等价无穷小代替及洛必达法则计算  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$ , 设其值为  $A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^A$ .

本题是综合题, 有关内容及方法见《高分突破》01, 02.

(17)

**分析** 先将  $f(x)$  分成部分分式, 然后利用  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  或  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$  展开.

$$\begin{aligned} \text{精解 } f(x) &= \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{2-x} - \frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n - (-1)^n \right] x^n. \end{aligned} \quad (1)$$

由于  $\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n$  的成立范围为  $(-2, 2)$ ,  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$  的成立范围为

$(-1, 1)$ , 所以式(1)的成立范围为  $(-1, 1)$ .

**附注** 将初等函数  $f(x)$  展开成关于  $x$  的幂级数通常使用间接法, 其步骤如下:

(i) 将  $f(x)$  表示成常用函数 (即  $e^{ax}$ ,  $\sin ax$ ,  $\cos ax$ ,  $(1+ax)^\alpha$ ,  $\ln(1+ax)$ ) 的线性组合 (其中组合的系数可以是常数, 也可以是  $x$  的正整数次幂), 或常用函数的原函数, 或导数.

(ii) 将各个常用函数用它们的麦克劳林展开式代入, 经过幂级数的代数运算或逐项求导、逐项积分得到  $f(x)$  的关于  $x$  的幂级数.

(iii) 确定  $f(x)$  等于上述幂级数的成立范围.

本题的有关内容与方法见《高分突破》17.

(18)

**分析** (I) 对  $z$  求二阶偏导数, 并将它们代入  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  即可证明  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ .

(II) 用降阶方法求解微分方程  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ .

**精解** (I) 记  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f'(u) \cdot \frac{x}{u},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(u) \cdot \frac{x^2}{u^2} + f'(u) \cdot \frac{u - x \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2} \\ &= f''(u) \cdot \frac{x^2}{u^2} + f'(u) \cdot \frac{u^2 - x^2}{u^3},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\text{同样可得} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot \frac{y^2}{u^2} + f'(u) \cdot \frac{u^2 - y^2}{u^3}.\quad (2)$$

将式(1)、式(2)代入  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  得

$$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0.\quad (3)$$

(II) 式(3)可以改写成

$$uf''(u) + f'(u) = 0, \text{ 即 } [uf'(u)]' = 0,$$

$$\text{所以} \quad uf'(u) = C_1.\quad (4)$$

令  $u=1$  得  $C_1 = f'(1) = 1$ , 代入式(4)得

$$uf'(u) = 1, \text{ 即 } f'(u) = \frac{1}{u}.$$

$$\text{所以} \quad f(u) = \ln u + C_2.\quad (5)$$

令  $u=1$  得  $C_2 = f(1) = 0$ , 代入式(5)得

$$f(u) = \ln u \quad (u > 0).$$

**附注** 微分方程  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$  也可以按如下方法求解.

记  $p = f'(u)$ , 则上述微分方程降阶为一阶线性微分方程

$$p' + \frac{1}{u}p = 0,$$

它的通解为  $p = C_1 e^{-\int \frac{1}{u} du} = \frac{C_1}{u}$ . 将  $p|_{u=1} = f'(1) = 1$  代入得  $C_1 = 1$ . 所以有  $p = \frac{1}{u}$ , 即  $f'(u) = \frac{1}{u}$ . 于是  $f(u) = \ln u + C_2$ . 将  $f(1) = 0$  代入得  $C_2 = 0$ . 因此  $f(u) = \ln u \quad (u > 0)$ .

(19)

**分析** 由于  $L$  是正向闭曲线, 所以对  $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy$  应用格林公式证明其值为零.

**精解** 记由  $L$  围成的有界闭区域为  $G$ , 则  $G \subset D$ , 且由格林公式得

$$\begin{aligned}& \oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy \\ &= \iint_G \left\{ \frac{\partial [-xf(x, y)]}{\partial x} - \frac{\partial [yf(x, y)]}{\partial y} \right\} d\sigma\end{aligned}$$

$$= - \iint_G [2f(x, y) + xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y)] d\sigma. \quad (1)$$

$f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$  的两边对  $t$  求导得

$$xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y).$$

上式中令  $t=1$  得

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y). \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = - \iint_G [2f(x, y) - 2f(x, y)] d\sigma = 0.$$

**附注** 本题表明平面上关于坐标的曲线积分  $\int_C yf(x, y) dx - xf(x, y) dy$  与路径无关 (其中  $C$  是  $D$  内任意分段光滑曲线), 或者说, 在  $D$  内,  $yf(x, y) dx - xf(x, y) dy$  是某个函数的全微分.

(20)

**分析** (I) 由所给条件可知所给方程组对应的齐次线性方程组至少有两个线性无关的解, 由此可得  $r(\mathbf{A})=2$ .

(II) 利用  $r(\mathbf{A})=2$  可确定  $a, b$  的值, 将  $a, b$  值代入所给方程组后计算通解.

**精解** (I) 由系数矩阵直接可知

$$r(\mathbf{A}) \geq 2. \quad (1)$$

此外, 由于所给的非齐次线性方程组有三个线性无关的解, 记为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 则  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$  是对应的导出组 (即齐次线性方程组) 的解, 并且它们线性无关, 所以导出组的基础解系至少包含两个线性无关的解. 由此知

$$r(\mathbf{A}) \leq 4 - 2 = 2. \quad (2)$$

由式(1)、式(2)得  $r(\mathbf{A})=2$ .

(II) 对  $\mathbf{A}$  施行初等行变换:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2a & -5+4a+b \end{pmatrix}.$$

于是由  $r(\mathbf{A})=2$  得  $\begin{cases} 4-2a=0, \\ -5+4a+b=0, \end{cases}$  即  $a=2, b=-3$ .

将以上算得的  $a, b$  值代入所给的非齐次线性方程组的增广矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$ , 并对  $\bar{\mathbf{A}}$  施行初等行变换得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

由此可知, 导出组有基础解系

$$(-2, 1, 1, 0)^T, (4, -5, 0, 1)^T.$$

此外, 非齐次线性方程组有特解  $(2, -3, 0, 0)^T$ , 所以它的通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = C_1(-2, 1, 1, 0)^T + C_2(4, -5, 0, 1)^T + (2, -3, 0, 0)^T,$$

其中  $C_1, C_2$  是任意常数.

**附注** 有非零解的  $n$  元齐次线性方程组  $Ax=0$  的基础解系包含的解的个数  $r=n-r(A)$ . 由此可得

$$r(A)=n-r.$$

要熟记这一结论, 并且要熟练地掌握求解非齐次线性方程  $Ax=b$  的通解的方法.

本题是综合题, 其有关内容与计算方法见《高分突破》21.

(21)

**分析** (I) 由题设可得  $A$  的特征值为  $\lambda=3, 0$  (二重) 及对应特征向量.

(II) 将不同特征值对应的特征向量正交单位化得到正交矩阵  $Q$ , 而  $A = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ .

**精解** (I) 由于  $A$  的各行元素之和均为 3, 所以有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此  $\lambda=3$  是  $A$  的特征值, 它对应的所有特征向量为  $C\xi = C(1, 1, 1)^T$  (其中  $C$  是任意非零常数).

由于  $\alpha_1, \alpha_2$  是线性方程组  $Ax=0$  的两个解, 所以有

$$A\alpha_1=0 \cdot \alpha_1, A\alpha_2=0 \cdot \alpha_2.$$

因此,  $\lambda=0$  是  $A$  的 (二重) 特征值, 其对应的所有特征向量为

$$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 = C_1(-1, 2, -1)^T + C_2(0, -1, 1)^T \text{ (其中 } C_1, C_2 \text{ 是不全为零的任意常数)}.$$

(II) 由 (I) 可知,  $A$  有线性无关的特征向量  $\xi, \alpha_1, \alpha_2$ , 为了计算  $Q$ , 需将它们正交单位化:

正交化: 由于  $\xi$  与  $\alpha_1, \alpha_2$  正交, 所以只要将  $\alpha_1, \alpha_2$  正交化即可, 即

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (0, -1, 1)^T - \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)^T = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T.$$

$$\text{单位化: } \varepsilon_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

所以, 所求的正交矩阵  $Q = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ,

对角矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ , 它们使得  $Q^T A Q = A$  成立.

**附注** 将题中的“向量  $\alpha_1 = (-1, 2, 1)^T$  和  $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $Ax = 0$  的两个解“改成” $\eta_1, \eta_2$  是线性方程组  $Ax = 0$  的两个线性无关解”, 同样可解本题(实际上, 只要利用  $\eta_1, \eta_2$  应与  $\xi = (1, 1, 1)^T$  正交即可).

本题是综合题, 其有关内容和计算方法见《高分突破》22, 23.

(22)

**分析** (I) 先按定义计算  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ , 然后求导得到  $f_Y(y)$ .

(II) 按分布函数定义计算  $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$  的值.

**精解** (I) 由于  $Y = X^2$  对应的函数为  $y = x^2$ , 它在  $f_X(x) \neq 0$  的区间  $(-1, 2)$  内不是单调函数, 所以应从计算  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$  入手计算  $f_Y(y)$ .

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y), \quad (1)$$

其中, 当  $y < 0$  时,  $P(X^2 \leq y) = 0$ ;

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时, } P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx.$$

由此可知, 当  $0 \leq y < 1$  时,

$$P(X^2 \leq y) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}\sqrt{y};$$

当  $1 \leq y < 4$  时,

$$P(X^2 \leq y) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y};$$

当  $y \geq 4$  时,

$$P(X^2 \leq y) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^2 \frac{1}{4} dx = 1.$$

将以上计算代入式(1)得

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1 \leq y < 4, \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}$$



$$\text{所以, } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{dF_Y(y)}{dy}, & 0 < y < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) \quad F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4\right) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right) \\ &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, -2 \leq X \leq 2\right) \\ &= P\left(-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f_X(x) dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**附注**  $f_Y(y)$  可以用快捷方法计算, 具体如下:

记  $y = g(x) = x^2$ , 则  $y = g(x)$  在  $f_X(x) \neq 0$  的区间  $(-1, 2)$  内的单调区间为  $(-1, 0)$  和  $(0, 2)$ . 在  $(-1, 0)$  内,  $y = g(x)$  可导, 反函数  $x = h_1(y) = -\sqrt{y} (0 < y < 1)$ ,  $h_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$ ; 在  $(0, 2)$  内,  $y = g(x)$  可导, 反函数  $x = h_2(y) = \sqrt{y} (0 < y < 4)$ ,  $h_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ . 所以

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} f_X[h_1(y)] |h_1'(y)|, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} + \begin{cases} f_X[h_2(y)] |h_2'(y)|, & 0 < y < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

这里的快捷算法见《高分突破》25.

(23)

**分析** 先作似然函数  $L(\theta)$ , 然后用最大似然估计法计算  $\theta$  的最大似然估计量.

**精解** 似然函数  $L(\theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta)$  的最大值只能在  $0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 2$  的区域内取到, 所以它可简记为

$$L(\theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N},$$

取对数得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta),$$

所以

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta}.$$

令  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ , 即  $\frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0$ . 解此方程得  $\theta = \frac{N}{n}$ . 所以, 由最大似然估计法知  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$ .

**附注** 顺便考虑以下两个问题:

(i)  $\theta$  的矩估计量

由于

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_0^1 x\theta dx + \int_1^2 x(1-\theta) dx = \frac{3}{2} - \theta.$$

令  $EX = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 即  $\frac{3}{2} - \theta = \bar{X}$ . 解此方程得  $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$ . 所以由矩估计法知  $\theta$  的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}.$$

容易知道  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$  是无偏估计量.

(ii)  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$  的无偏性.

容易知道  $N \sim B(n, \theta)$ , 所以

$$E \hat{\theta} = \frac{1}{n} EN = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta.$$

因此, 最大似然估计量  $\hat{\theta}$  是无偏的.

应熟练掌握总体未知参数的矩估计量与最大似然估计量的计算方法.

## C 热点分析

纵观近十年的全国硕士研究生入学统一考试试题,会发现有些知识点在考题中每每出现,连续地或间断地,单独地或综合地.这就是考试热点.

这里分高等数学、线性代数、概率论与数理统计,对有关热点问题中较复杂部分进行一些讨论,供考生参考.

## 一、高等数学

### 1. 未定式极限的计算

函数极限计算中,最主要的内容是未定式极限计算.

未定式极限共有以下七种类型:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

其中最常考的是  $\frac{0}{0}$  型和  $1^\infty$  型.

#### 1.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的计算方法

设  $\lim f(x)=0$ ,  $\lim g(x)=0$ , 则称  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  为  $\frac{0}{0}$  型未定式极限, 它可按以下步骤计算:

(1) 化简  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ . 常用的有以下五种方法:

a. 消去  $f(x)$  与  $g(x)$  的公因子.

b. 分子或分母有理化.

c. 当  $x \rightarrow x_0 (x_0 \neq 0)$  或  $x \rightarrow \infty$  时, 分别作变量代换  $t = x - x_0$  或  $t = \frac{1}{x}$ .

d. 由极限运算法则算出其中非未定式部分的极限.

e. 对  $f(x)$  与  $g(x)$  作等价无穷小代替, 常用等价无穷小有:  $x \rightarrow 0$  时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x,$$

$$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0), 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

通过如上化简后,  $\frac{0}{0}$  型未定式极限  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  就变得十分简单, 往往可以用极限运算法直接算出.

(2) 如果  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  不易作如上所述的化简, 则可考虑使用  $\frac{0}{0}$  型洛必达法则或对  $f(x)$  或  $g(x)$  应用麦克劳林公式, 特别当  $f(x)$  或  $g(x)$  是积分上限函数时, 必须首先应用洛必达法则, 以消去积分运算.

常用函数的麦克劳林公式是:  $x \rightarrow 0$  时,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n),$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

特别地,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

例 1.1 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\ln(1 - \sin x) + (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}.$$

精解 (1) 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式极限. 由于  $x \rightarrow 0$  时,

$$e - e^{\cos x} = -e(e^{\cos x - 1} - 1) \sim -e(\cos x - 1) \sim \frac{e}{2}x^2,$$

$$\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2.$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e.$$

(2) 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\ln(1 - \sin x) + (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\ln(1 - \sin x) + (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{\ln(1 + x)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\ln(1 - \sin x) + (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} + \\ &\quad \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$  (由于  $x \rightarrow 0$  时  $\frac{1 - \cos x}{x}$  是无穷小,  $\sin \frac{1}{x}$  在点  $x = 0$  的去心邻域内有界).

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1 - \sin x) + (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{3}{2}.$$

**例 1.2** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin x^4}.$$

**精解** (1) 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式极限. 由于

$$[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x = 2 \cos \frac{x + \sin x}{2} \sin \frac{x - \sin x}{2} \sin x,$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{x + \sin x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x - \sin x}{2}}{x^3} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x - \sin x}{2}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(2) 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\ &\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x}}{2x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan^2 x + \tan x}{(1 + \tan x)x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{\tan^2 x}{x} + \frac{\tan x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{4}(0 + 1) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 1.3 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[ \int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos \sqrt{x})};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} \quad (\text{其中 } f(x) \text{ 连续, 且 } f(0) \neq 0).$$

精解 (1) 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式极限.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[ \int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[ \int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{\frac{1}{2}x^2} \\ & \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan(1+t) dt}{x} \\ & \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(1+x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(2) 所给极限是  $\frac{0}{0}$  型未定式极限.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} \xrightarrow{\text{对分母积分变量令 } u = x-t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + f(x)} = 1 - \frac{f(0)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} + f(0)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1) 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} = 1 - \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

## 1.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的计算方法

设  $\lim f(x) = \infty$ ,  $\lim g(x) = \infty$ , 则称  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  为  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限, 它有以下两种计算方法:

(1) 利用  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ , 或变量代换将所给的  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  转换成  $\frac{0}{0}$  型未定式极限, 然后按  $\frac{0}{0}$  型未定式极限计算方法计算. 特别当未定式的极限过程是  $x \rightarrow +\infty$  时, 往往利用  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$  ( $\alpha$  是正数) 可快捷获得计算结果.

(2) 如果  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  比较容易计算, 则可用  $\frac{\infty}{\infty}$  型洛必达法则计算  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**例 1.4** 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}.$$

**精解** (1) 所给极限是  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限.

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  知  $x \rightarrow +\infty$  时,  $e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x$  中的  $\frac{2}{\pi} x \arctan x$  可以忽略, 同样  $e^x + x$  中的  $x$  可以忽略, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

(2) 所给极限是  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 - \ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式极限} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 - \ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln x} - 1 \right) = -1.
 \end{aligned}$$

### 1.3 $0 \cdot \infty$ 型和 $\infty - \infty$ 型未定式极限的计算方法

设  $\lim f(x) = 0$ ,  $\lim g(x) = \infty$ , 则称  $\lim f(x)g(x)$  为  $0 \cdot \infty$  型未定式极限.

设  $\lim f(x) = \infty$ ,  $\lim g(x) = \infty$ , 则称  $\lim [f(x) - g(x)]$  为  $\infty - \infty$  型未定式极限.

这两种未定式极限可以利用代数运算或变量代换转换成  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式极限, 然后按相关方法计算.

**例 1.5** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right] x.$$

**精解** (1) 所给极限是  $\infty - \infty$  型未定式.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式极限} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x \cdot \cos x)(x - \sin x \cdot \cos x)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^3} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达法则}} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2} = \frac{4}{3}.$$

(2) 所给极限是  $0 \cdot \infty$  型未定式极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right] x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e}{\frac{1}{x}} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式极限} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1} - 1}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+t)}{t} - 1}{t} \\
&= e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} \\
&= e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{2t(1+t)} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

#### 1.4 $0^0$ , $1^\infty$ 及 $\infty^0$ 型未定式极限的计算方法

设  $\lim f(x)=0$ ,  $\lim g(x)=0$ , 则称  $\lim [f(x)]^{g(x)}$  为  $0^0$  型未定式极限.

设  $\lim f(x)=1$ ,  $\lim g(x)=\infty$ , 则称  $\lim [f(x)]^{g(x)}$  为  $1^\infty$  型未定式极限.

设  $\lim f(x)=\infty$ ,  $\lim g(x)=0$ , 则称  $\lim [f(x)]^{g(x)}$  为  $\infty^0$  型未定式极限.

这三种幂指函数型未定式极限都可按以下步骤计算:

(1) 将幂指函数指数化, 即  $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ , 则

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)};$$

(2) 按  $0 \cdot \infty$  型未定式极限计算方法计算  $\lim g(x) \ln f(x)$ , 如果它为  $A$ , 则

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^A.$$

**例 1.6** 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^x-1}}.$$

**精解** (1) 所给极限是  $0^0$  型未定式极限.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)},$$

其中  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

$$\xrightarrow{\text{令 } t = \frac{\pi}{2} - \arctan x} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\ln \cot t} \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ 型未定式极限} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-\csc^2 t}{\cot t}} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \cos t \cdot \frac{\sin t}{t} \right) = - (1 \times 1) = -1.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}.$

(2) 所给极限是  $1^\infty$  型未定式极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)},$$

其中,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)$  ( $0 \cdot \infty$  型未定式极限)

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2t + \cos t)}{t} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式极限} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\sin 2t + \cos t - 1)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t - (1 - \cos t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 2. \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^2$ .

(3) 所给极限是  $\infty^0$  型未定式极限.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^x - 1} \right) \ln \ln x},$$

其中,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^x - 1} \right) \ln \ln x$  ( $0 \cdot \infty$  型未定式极限)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{\ln \ln x}} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式极限} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{1}{\ln \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{\ln \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x} = 0, \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^x - 1}} = e^0 = 1$ .

## 2. 数列极限存在准则的应用

当数列极限不易用运算法则和函数极限计算时, 往往使用极限存在准则进行计算.

数列极限有以下两个存在准则:

**数列极限存在准则 I** 设数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$ , 如果它们满足  $y_n \leq x_n \leq z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

**注** 在利用数列极限存在准则 I 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  时, 可以通过适当缩小与放大  $x_n$ , 寻找数列  $\{y_n\}$  与  $\{z_n\}$ .

**数列极限存在准则 II** 设数列  $\{x_n\}$  单调不减有上界或单调不增有下界, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

**注** 当  $\{x_n\}$  由递推式  $x_1, x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 定义时, 往往使用这一准则, 并且当证得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在时, 记其极限为  $A$ , 对所给递推式两边令  $n \rightarrow \infty$  取极限得  $A = f(A)$ . 解此方程所得  $A$  的值, 即为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的值.

**例 2.1** 计算下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ 其中 } a_n = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}; n = 1, 2, \cdots;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \text{ 其中 } u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt, n = 1, 2, \cdots.$$

**精解** (1) 由于  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$  不是某个函数的积分和式, 现对它作适当缩小与放大得

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} < a_n < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}},$$

并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$  (由于  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}}$  是函数  $2^x$  在  $[0, 1]$  上的积分和式),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

所以由数列极限存在准则 I 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\ln 2}$ .

(2) 容易看到

$$0 < u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq (\ln 2)^n \int_0^1 |\ln t| dt \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2)^n \int_0^1 |\ln t| dt = 0$  (因为  $\int_0^1 |\ln t| dt$  是收敛的反常积分), 所以, 由数列极限存在准则 I 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**例 2.2** 证明:

$$(1) 1 - 2t^2 < \cos 2t < 1 \quad (0 < t \leq 1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

**精解** (1) 对  $t \in (0, 1]$ , 显然有  $\cos 2t < 1$ , 下面证  $1 - 2t^2 < \cos 2t$ .

记  $f(t) = \cos 2t - (1 - 2t^2)$ , 则它在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导且

$$f'(t) = -2\sin 2t + 4t = 2(2t - \sin 2t) > 0,$$

所以, 对于  $t \in (0, 1]$  有  $f(t) > f(0) = 0$ , 即  $1 - 2t^2 < \cos 2t$ .

(2) 由(1)中已证的不等式知

$$\frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1 - 2t^2}{4t^2} dt < \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt < \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{4t^2} dt,$$

$$\text{其中 } \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1 - 2t^2}{4t^2} dt = \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{n} \left( \frac{1}{4t} + \frac{1}{2}t \right) \Big|_{\frac{1}{n}}^1$$

$$= -\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{4} (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{4t^2} dt = -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} (n \rightarrow \infty).$$

所以, 由数列极限存在准则 I 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}$ .

**例 2.3** 求下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 其中  $\{x_n\}$  是由递推式  $0 < x_1 < \pi$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 定义的数列;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ , 其中  $\{x_n\}$  是(1)中定义的数列.

**精解** (1) 由于  $\{x_n\}$  是由递推式定义的, 所以宜用数列极限存在准则 II 求解.

由  $x_1 \in (0, \pi)$  知  $\{x_n\}$  是正项数列 (容易看到  $x_n < 1$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ),

$$x_{n+1} = \sin x_n < x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

即  $\{x_n\}$  单调减少有下界, 所以由数列极限存在准则 II 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 记为  $A$ , 则  $A \in [0, 1)$ .

在递推式  $x_{n+1} = \sin x_n$  的两边令  $n \rightarrow \infty$  取极限得  $A = \sin A$ . 显然在  $[0, 1)$  上该方程仅有解  $A = 0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(2) 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ ,

所以将上式右边的  $x_n$  换为  $x$ , 得  $1^\infty$  型未定式极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right)},$$

其中,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right]}{x^2} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式极限} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$ . 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$ .

**例 2.4** (1) 证明: 对任意的正整数  $n$ ,  $\frac{1}{n+1} < \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$  成立;

(2) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 证明数列  $\{a_n\}$  收敛.

**精解** (1)  $\ln(1+x)$  在  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 所以存在  $\xi \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ,

使得

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \ln(1+0) = [\ln(1+x)]' \Big|_{x=\xi} \left( \frac{1}{n} - 0 \right),$$

即

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n}.$$

所以由  $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{1+\xi} < 1$  得  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} (n=1, 2, \dots)$ .

(2) 现用数列极限存在准则 II 证明  $\{a_n\}$  收敛.

对  $n=1, 2, \dots$ , 由

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \quad (\text{利用(1)}), \end{aligned}$$

以及  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

$$\begin{aligned} &> \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \end{aligned}$$

知  $\{a_n\}$  单调减少有下界. 因此由数列极限存在准则 II 知  $\{a_n\}$  收敛.

### 3. 零点定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理与积分中值定理的综合应用

#### 3.1 零点定理

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)f(b) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi)=0$ .

注 零点定理有各种推广形式, 例如:

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)f(b) \leq 0$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi)=0$ .

设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, +\infty)$ , 使得  $f(\xi)=0$ .

#### 3.2 罗尔定理

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a)=f(b)$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi)=0$ .

注 罗尔定理有各种推广形式, 例如:

设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 在  $(a, +\infty)$  上可导, 且  $f(a)=\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则存在  $\xi \in (a, +\infty)$ , 使得  $f'(\xi)=0$ .

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且对于  $a < c < b$  有  $f(a)=f(c)=f(b)$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi)=0$ .

#### 3.3 拉格朗日中值定理

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

### 3.4 积分中值定理

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ .

**注** 积分中值定理有以下的推广形式:

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上可积且不变号, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ .

**例 3.1** 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0)=0, f(1)=1$ , 证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi)=1-\xi$ ;
- (2) 存在不同的两点  $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$ .

**精解** (1) 记  $F(x)=f(x)-1+x$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且

$$F(0)F(1)=(-1) \times 1 = -1 < 0,$$

所以, 由零点定理知存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(\xi)=0$ , 即  $f(\xi)=1-\xi$ .

(2)  $\xi$  将  $[0, 1]$  划分成两个小区间  $[0, \xi]$  和  $[\xi, 1]$ , 且  $f(x)$  在这两个小区间上都满足拉格朗日中值定理条件, 所以由拉格朗日中值定理知, 存在  $\eta_1 \in (0, \xi)$  和  $\eta_2 \in (\xi, 1)$ , 使得

$$f'(\eta_1) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}, f'(\eta_2) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi},$$

所以, 存在不同的两点  $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ , 使得

$$f'(\eta_1)f'(\eta_2) = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1.$$

**例 3.2** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0)=0$  及  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . 证明存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$ .

**精解** 将欲证等式中的  $\xi$  改为  $x$  得

$$xf(x) - \int_0^x f(t) dt = 0.$$

当  $x \in (0, 1]$  时, 上式可以改写成

$$\frac{xf(x) - \int_0^x f(t) dt}{x^2} = 0, \text{ 即 } \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right]' = 0.$$

由此得  $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = C$ . 故作辅助函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然,  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $F(1)=F(0)(=0)$ . 所以由罗尔定理知, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ , 即  $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$ .

**例 3.3** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导. 证明下列结论:

(1) 当  $f(x)$  满足  $f(0)=f(2)=0$ ,  $f'_+(0)f'_-(2) > 0$  时, 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi)=0$ .

(2) 当  $f(x)$  满足  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} \cos \pi x} \frac{f(x)}{x} = 0$  和  $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$  时, 存在  $\eta \in (0, 2)$ , 使得  $f''(\eta)=0$ .

**精解** (1) 由题设  $f'_+(0)f'_-(2) > 0$  可设  $f'_+(0) > 0$ ,  $f'_-(2) > 0$  (当  $f'_+(0) < 0$ ,  $f'_-(2) < 0$  同样可证). 于是由左、右导数的定义得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > 0.$$

由此可知, 存在  $x_1, x_2 \in (0, 2)$  ( $x_1 < x_2$ ), 使得

$$f(x_1) > f(0) = 0, \quad f(x_2) < f(2) = 0.$$

于是由零点定理知, 存在  $x_3 \in (x_1, x_2) \subset (0, 2)$ , 使得  $f(x_3)=0$ .

由此可知,  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $f(0)=f(x_3)=f(2)$  ( $0 < x_3 < 2$ ), 于是分别在  $[0, x_3]$  和  $[x_3, 2]$  上应用罗尔定理知, 存在  $\xi_1 \in (0, x_3)$  和  $\xi_2 \in (x_3, 2)$ , 使得  $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ .

由于  $f'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足罗尔定理条件, 因此存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi)=0$ .

(2) 由题设  $0 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} \cos \pi x} \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f'(x)}{-\pi \sin \pi x} = -\frac{1}{\pi} f'\left(\frac{1}{2}\right)$  得  $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ . 另外, 由

积分中值定理知, 存在  $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 使得  $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(x_1)$ . 由题设  $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$  得  $f(x_1)=f(2)$ . 于是,  $f(x)$  在  $[x_1, 2]$  上满足罗尔定理条件, 所以存在  $\eta_1 \in (x_1, 2) \subset \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , 使得  $f'(\eta_1)=0$ .

由此可知,  $f'(x)$  在  $\left[\frac{1}{2}, \eta_1\right]$  上连续, 在  $\left(\frac{1}{2}, \eta_1\right)$  内可导, 且  $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\eta_1)$ , 所以由罗尔定理知, 存在  $\eta \in \left(\frac{1}{2}, \eta_1\right) \subset (0, 2)$ , 使得  $f''(\eta)=0$ .

**例 3.4** 设函数  $\varphi(x)$  具有二阶导数, 且满足  $\varphi(2) > \varphi(1)$ ,  $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$ , 证明存在  $\xi \in (1, 3)$ , 使得  $\varphi''(\xi) < 0$ .

**精解** 由于  $\varphi(x)$  在  $[1, 2]$  上可导, 所以由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi_1 \in (1, 2)$ , 使得  $\varphi(2) - \varphi(1) = \varphi'(\xi_1)(2 - 1)$ . 由  $\varphi(2) > \varphi(1)$  得  $\varphi'(\xi_1) > 0$ .

由积分中值定理知, 存在  $x_1 \in [2, 3]$ , 使得  $\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(x_1)$ . 于是由题设知  $\varphi(2) > \varphi(x_1)$  (由此可知  $2 < x_1$ ).  $\varphi(x)$  在  $[2, x_1]$  上可导, 由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi_2 \in (2, x_1)$ , 使得

$$\varphi(x_1) - \varphi(2) = \varphi'(\xi_2)(x_1 - 2),$$

所以, 由  $\varphi(2) > \varphi(x_1)$ ,  $2 < x_1$  得  $\varphi'(\xi_2) < 0$ .

在  $[\xi_1, \xi_2]$  上,  $\varphi'(x)$  可导, 所以由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$ , 使得  $\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1) = \varphi''(\xi)(\xi_2 - \xi_1)$ , 即



$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$

**例 3.5** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f'(c)=0$ . 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}.$$

**精解** 先将欲证等式中的  $\xi$  换成  $x$  得

$$f'(x) - \frac{1}{b-a}f(x) = -\frac{f(a)}{b-a},$$

显然这个以  $f(x)$  为未知函数的一阶线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int \frac{1}{b-a} dx} \left[ C + \int -\frac{f(a)}{b-a} e^{\int \frac{1}{b-a} dx} dx \right] \\ &= e^{\frac{x}{b-a}} \left[ C + f(a) e^{-\frac{x}{b-a}} \right] \\ &= C e^{\frac{x}{b-a}} + f(a). \end{aligned}$$

即  $[f(x) - f(a)] e^{-\frac{x}{b-a}} = C$ , 所以作辅助函数

$$F(x) = [f(x) - f(a)] e^{-\frac{x}{b-a}}.$$

显然  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F(a)=0$ . 当  $F(c)=0$  时,  $F(x)$  在  $[a, c]$  上满足罗尔定理条件, 所以存在  $\xi \in (a, c) \subset (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ .

下面证明在  $F(c) \neq 0$  时也存在使得  $F'(\xi)=0$  的  $\xi$ .

当  $F(c) \neq 0$  时,  $F(x)$  在  $[a, c]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 因此, 存在  $\xi_1 \in (a, c)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c) - F(a)}{c - a} = \frac{F(c)}{c - a}.$$

在  $[\xi_1, c]$  上,  $F'(x)$  连续, 且

$$F'(\xi_1)F'(c) = \frac{F(c)}{c-a} \cdot \frac{-F(c)}{b-a} = -\frac{F^2(c)}{(c-a)(b-a)} < 0,$$

所以, 由零点定理知, 存在  $\xi \in (\xi_1, c) \subset (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ .

综上所述, 不论  $F(c)=0$  还是  $F(c) \neq 0$ , 都存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ , 即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}.$$

#### 4. 定积分的计算

定积分计算的基础是定积分基本性质、基本积分公式及牛顿-莱布尼茨公式, 还应掌握一些计算方法, 以快捷地算出定积分.

##### 4.1 换元积分法

如果  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(u(x)) du(x)$ , 则作变量代换  $t = u(x)$  得  $\int_{u(a)}^{u(b)} g(t) dt$ , 由此当它容易计算时, 就算得  $\int_a^b f(x) dx$ .

如果  $\int_a^b f(x) dx$  不能作上述处理时, 则作适当的变量代换  $x = \varphi(t)$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ , 因此当右边定积分较易计算时, 就可算出  $\int_a^b f(x) dx$ .

此外, 有时对  $I = \int_a^b f(x) dx$  作适当的变量代换, 得到关于  $I$  的一个方程, 解此方程得到  $I = \int_a^b f(x) dx$  的值; 或者将  $\int_a^b f(x) dx$  表示成  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ , 对其中一个, 例如  $\int_a^c f(x) dx$  作变量代换而产生一个新的定积分与  $\int_c^b f(x) dx$  抵消, 从而算出  $\int_a^b f(x) dx$ .

#### 4.2 分部积分法

将  $f(x) dx$  适当地写成  $u(x) dv(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dv(x) \xrightarrow{\text{分部积分法}} u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

如果  $\int_a^b v(x) du(x)$  较易计算, 则可算出  $\int_a^b f(x) dx$ .

有时, 对  $I = \int_a^b f(x) dx$  连续使用若干次分部积分法后得到关于  $I$  的一个方程, 解此方程得到  $I = \int_a^b f(x) dx$  的值; 或者将  $I$  表示成  $\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$ , 对其中之一, 例如  $\int_a^b f_1(x) dx$  施行分部积分法产生的一个新的定积分与  $\int_a^b f_2(x) dx$  抵消, 由此算得  $I = \int_a^b f(x) dx$  的值.

此外, 分部积分法往往与换元积分法相结合, 有效地计算定积分.

#### 4.3 利用奇、偶函数和周期函数的定积分性质计算

设  $f(x)$  是  $[-a, a]$  上的连续函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 是奇函数时,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 是偶函数时.} \end{cases}$$

设  $f(x)$  是连续函数, 且以  $T (T > 0)$  为周期的周期函数, 则

$$\int_a^{T+a} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \quad (a \text{ 是任意常数}),$$

$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx = n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \quad (n \text{ 为整数}).$$

**例 4.1** 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx;$$

$$(2) \int_1^3 f(x-2) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x(\arctan x + e^x), & x < 0, \\ xe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{精解} \quad (1) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx & \stackrel{\text{令 } t = \sqrt{x}}{=} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot 2t dt \\
 & = 2 \int_0^{\pi} t^2 d \sin t = 2 \left( t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \sin t dt \right) \\
 & = 4 \int_0^{\pi} t d \cos t = 4 \left( t \cos t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t dt \right) \\
 & = -4\pi - 4 \sin t \Big|_0^{\pi} = -4\pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_1^3 f(x-2) dx & \stackrel{\text{令 } t = x-2}{=} \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 t(\arctan t + e^t) dt + \int_0^1 t e^{-t} dt \\
 & = \int_{-1}^0 t \arctan t dt + \int_{-1}^1 t e^{-|t|} dt \\
 & = \int_{-1}^0 t \arctan t dt \quad (\text{由于 } t e^{-|t|} \text{ 是奇函数, 所以 } \int_{-1}^1 t e^{-|t|} dt = 0) \\
 & = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \arctan t dt^2 \\
 & = \frac{1}{2} \left( t^2 \arctan t \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{t^2}{1+t^2} dt \right) \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left( 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\
 & = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (t - \arctan t) \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{8} + \left( -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

例 4.2 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 e^x \left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx;$$

$$(2) \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 1+x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{精解} \quad (1) \int_0^1 e^x \left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx & = \int_0^1 e^x \cdot \frac{(1+x^2) - 2x}{(1+x^2)^2} dx \\
 & = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx - \int_0^1 e^x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \\
 & = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx + \int_0^1 e^x d \frac{1}{1+x^2} \\
 & \stackrel{\text{对第二个定积分施行分部积分法}}{=} \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx + \frac{e^x}{1+x^2} \Big|_0^1 - \\
 & \quad \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx \\
 & = \frac{1}{2} e - 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 1+x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx & = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 x \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
 & = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 x e^{x+\frac{1}{x}} d \left( x + \frac{1}{x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 x de^{x+\frac{1}{x}} \\
 &\quad \text{对第二个定积分施行分部积分法} \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + xe^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
 &= \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}.
 \end{aligned}$$

**例 4.3** 求下列定积分:

$$(1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx;$$

$$(2) I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx.$$

**精解** (1)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx$

$$\begin{aligned}
 &\quad \text{令 } t = \frac{\pi}{2} - x \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot t)^{\sqrt{2}}} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot x)^{\sqrt{2}}} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} dx = \frac{\pi}{2} - I,
 \end{aligned}$$

即  $I = \frac{\pi}{2} - I$ , 所以  $I = \frac{\pi}{4}$ .

$$\begin{aligned}
 (2) I &= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx \\
 &\quad \text{令 } t = 6 - x \\
 &= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+t)}}{\sqrt{\ln(3+t)} + \sqrt{\ln(9-t)}} dt \\
 &= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx \\
 &= \int_2^4 dx - \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx \\
 &= 2 - I,
 \end{aligned}$$

即  $I = 2 - I$ . 所以  $I = 1$ .

**例 4.4** 计算定积分  $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ .

**精解**  $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x de^x$

$$= e^x \cos^2 x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi} \sin 2x de^x \\
&= e^{\pi} - 1 + \left( e^x \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx \right) \\
&= e^{\pi} - 1 - 2 \int_0^{\pi} e^x (2 \cos^2 x - 1) dx \\
&= e^{\pi} - 1 - 4 \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx + 2 \int_0^{\pi} e^x dx \\
&= e^{\pi} - 1 - 4I + 2e^{\pi} - 2 = 3e^{\pi} - 3 - 4I,
\end{aligned}$$

即  $I = 3e^{\pi} - 3 - 4I$ . 所以  $I = \frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$ .

**例 4.5** 计算下列定积分:

- (1)  $\int_{-1}^0 (x+1) \sqrt{1-x-x^2} dx$ ;  
 (2)  $\int_0^{4\pi} (\sin^{10} x \cos^8 x + \sin x \sin 2x \sin 4x) dx$ .

**精解** (1)  $\int_{-1}^0 (x+1) \sqrt{1-x-x^2} dx$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{令 } t = x + \frac{1}{2}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(t + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt \quad (\text{由于 } t \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} \text{ 是奇函数, 所以 } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt = 0; \\
&\quad \text{由于 } \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} \text{ 是偶函数, 所以 } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt \\
&\quad = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} dt) \\
&\stackrel{\text{令 } t = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin u}{=} \frac{5}{4} \int_0^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} \cos^2 u du = \frac{5}{8} \int_0^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} (1 + \cos 2u) du \\
&= \frac{5}{8} (u + \sin u \cos u) \Big|_0^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{8} \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(2)  $\int_0^{4\pi} (\sin^{10} x \cos^8 x + \sin x \sin 2x \sin 4x) dx$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^{10} x \cos^8 x + \sin x \sin 2x \sin 4x) dx \quad (\text{由于 } \sin^{10} x \cos^8 x \text{ 与 } \sin x \sin 2x \sin 4x \text{ 都是} \\
&\quad \text{以 } 2\pi \text{ 为周期的函数}) \\
&= 4 \int_0^{\pi} \sin^{10} x \cos^8 x dx \quad (\text{由于 } \sin^{10} x \cos^8 x \text{ 是偶函数, 所以 } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{10} x \cos^8 x dx = \\
&\quad 2 \int_0^{\pi} \sin^{10} x \cos^8 x dx; \text{ 由于 } \sin x \sin 2x \sin 4x \text{ 是奇函数, 所}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{以 } \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 4x dx = 0) \\
& = 4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^8 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{10} x \cos^8 x dx \right) \\
& \quad \text{对第二个定积分令 } t = x - \frac{\pi}{2} \\
& \quad \underline{\underline{= 4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^8 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t \sin^8 t dt \right)}} \\
& = 4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^8 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x \sin^8 x dx \right) \\
& = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^8 x dx \\
& = \frac{1}{2^6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 2x dx \stackrel{\text{令 } u = 2x}{=} \frac{1}{2^7} \int_0^{\pi} \sin^8 u du \\
& = \frac{1}{2^7} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du \quad (\sin^8 u \text{ 是以 } \pi \text{ 为周期的周期函数}) \\
& = \frac{1}{2^6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du = \frac{1}{2^6} \times \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{2^{14}}.
\end{aligned}$$

**例 4.6** 计算下列定积分:

$$(1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^8 x}{1 + e^{-x}} dx;$$

$$(2) \int_{-2}^2 x \cos x \ln(1 + e^x) dx.$$

**精解** (1) 积分区间是对称的, 但被积函数是非奇非偶函数, 因此将它表示为

$$\frac{\sin^8 x}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\left[ \frac{\sin^8 x}{1 + e^{-x}} + \frac{\sin^8(-x)}{1 + e^{-(-x)}} \right]}_{\text{偶函数}} + \underbrace{\left[ \frac{\sin^8 x}{1 + e^{-x}} - \frac{\sin^8(-x)}{1 + e^{-(-x)}} \right]}_{\text{奇函数}} \right\},$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^8 x}{1 + e^{-x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin^8 x}{1 + e^{-x}} + \frac{\sin^8(-x)}{1 + e^{-(-x)}} \right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx = \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{2^8}.
\end{aligned}$$

(2) 积分区间是对称的, 但被积函数是非奇非偶函数, 因此将它表示为

$$\begin{aligned}
x \cos x \ln(1 + e^x) &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[ x \cos x \ln(1 + e^x) + (-x) \cos(-x) \ln(1 + e^{-x}) \right]}_{\text{偶函数}} + \\
&\quad \frac{1}{2} \underbrace{\left[ x \cos x \ln(1 + e^x) - (-x) \cos(-x) \ln(1 + e^{-x}) \right]}_{\text{奇函数}},
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^2 x \cos x \ln(1 + e^x) dx \\
&= \int_0^2 [x \cos x \ln(1 + e^x) + (-x) \cos(-x) \ln(1 + e^{-x})] dx \\
&= \int_0^2 x^2 \cos x dx = \int_0^2 x^2 d \sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \sin x \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 x \sin x dx \\
&= 4 \sin 2 + 2 \int_0^2 x d \cos x \\
&= 4 \sin 2 + 2 \left( x \cos x \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos x dx \right) \\
&= 2 \sin 2 + 4 \cos 2.
\end{aligned}$$

## 5. 二重积分与三重积分的计算

### 5.1 二重积分的计算方法

设  $f(x, y)$  是有界闭区域  $D$  上的连续函数, 则二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  可按以下步骤计算:

(1) 画出  $D$  的简图, 根据  $D$  的对称性, 化简  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  :

当  $D$  具有某种对称性时, 如果  $f(x, y)$  在对称点处的值互为相反数, 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ; 如果  $f(x, y)$  在对称点处的值彼此相等, 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$  (其中  $D_1$  是  $D$  按对称性划分成的两部分之一).

记化简后的二重积分仍为  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ .

(2) 根据  $D$  将二重积分转换成二次积分:

如果  $D = \{(x, y) | y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$  ( $X$ -型), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy;$$

如果  $D = \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$  ( $Y$ -型), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx;$$

如果  $D$  是以原点为顶点的角域  $\{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi\}$ , 用极坐标计算, 此时

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

如果  $D$  不是上述三种形式的积分区域, 则用若干条与  $y$  轴平行的直线(或与  $x$  轴平行的直线, 或从原点出发的射线)将  $D$  划分成若干小块, 使每一块为  $Y$ -型(或  $X$ -型, 或角域), 然后把每一小块上的二重积分化为二次积分.

(3) 计算二次积分

例如, 对于  $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ , 先将  $x$  看做  $[a, b]$  上的某个固定点计算定积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \stackrel{\text{记}}{=} \varphi(x), \text{ 然后再计算定积分 } \int_a^b \varphi(x) dx.$$

**例 5.1** 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D \max\{xy, 1\} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(2)  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$  及  $f(x, y) =$

$$\begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

**精解** (1) 曲线  $xy=1$  将  $D$  分成  $D_1$  与  $D_2$  两部分(如图 C-5-1 所示), 并且, 在  $D$  上

$$\max\{xy, 1\} = \begin{cases} xy, & (x, y) \in D_2, \\ 1, & (x, y) \in D_1, \end{cases}$$

所以  $\iint_D \max\{xy, 1\} d\sigma$

$$= \iint_{D_1} d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma$$

$$= \iint_D d\sigma + \iint_{D_2} (xy - 1) d\sigma$$

$$= 4 + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 (xy - 1) dy$$

$$= 4 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( \frac{1}{2} xy^2 - y \right) \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=2} dx$$

$$= 4 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 2x - 2 + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{19}{4} + \ln 2.$$

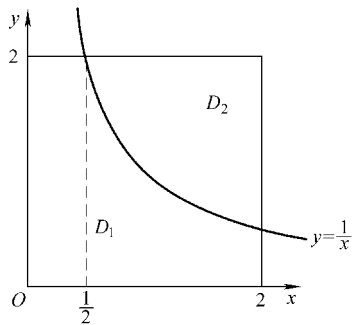


图 C-5-1

(2) 用直线  $x+y=1$  将  $D$  划分成  $D_1$  与  $D_2$  两部分(如图 C-5-2 所示), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} x^2 d\sigma + \iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{12} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sec\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{12} + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

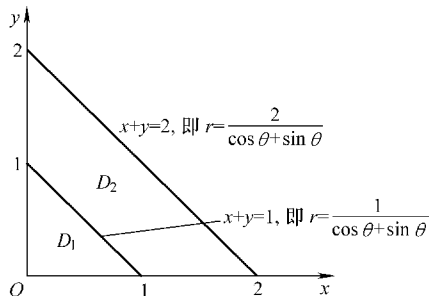


图 C-5-2



例 5.2 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ ;

(2)  $\iint_D xy[1+x^2+y^2] d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x > 0, y > 0\}$ ,  $[u]$  表示不

超过  $u$  的最大整数;

(3)  $\iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$ , 其中  $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ .

精解 (1)  $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} d\sigma = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} d\sigma$ ,

其中  $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} d(1+r^2) = \frac{\pi}{2} \ln 2$ ,

$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} d\sigma = 0$  (由于  $D$  关于  $x$  轴对称,  $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$  在对称点处的值互为相反数).

因此  $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} d\sigma = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 0 = \frac{\pi}{2} \ln 2$ .

(2) 用圆  $x^2 + y^2 = 1$  将  $D$  划分成  $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$  与  $D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x > 0, y > 0\}$ , 则在  $D$  上,  $xy[1+x^2+y^2] = \begin{cases} xy, & (x, y) \in D_1, \\ 2xy, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$  所以

$$\begin{aligned} \iint_D xy[1+x^2+y^2] d\sigma &= \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} 2xy d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot r dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} 2r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot r dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta &= \iint_D r \sin \theta \sqrt{1-r^2(2\cos^2 \theta - 1)} r dr d\theta \\ &\stackrel{\text{直角坐标}}{=} \iint_D y \sqrt{1-[2x^2-(x^2+y^2)]} dx dy \\ &= \iint_D y \sqrt{1+y^2-x^2} dx dy, \end{aligned}$$

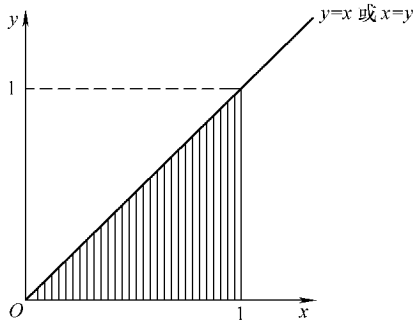


图 C-5-3

其中  $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$

$= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$  (如图 C-5-3 阴影部分所示), 所以

$$\begin{aligned}
 \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta &= \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1-x^2+y^2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1-x^2+y^2} d(1-x^2+y^2) \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
 &\stackrel{\text{令 } x = \sin t}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

**例 5.3** 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (x-y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$ ;

(2)  $\iint_D \sqrt{|x-|y||} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ .

**精解** (1)  $D$  如图 C-5-4 阴影部分所示, 它是角域的一部分, 所以用极坐标计算所给的二重积分:

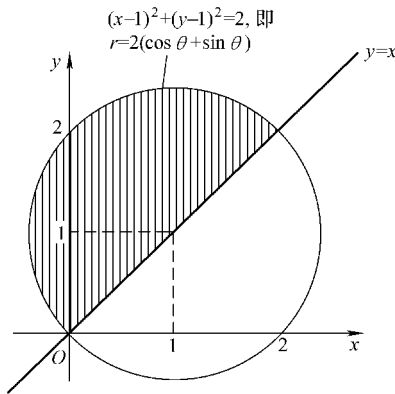


图 C-5-4

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x-y) d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\cos \theta + \sin \theta)} r(\cos \theta - \sin \theta) r dr \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot 8(\cos \theta + \sin \theta)^3 d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \theta + \sin \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} (\cos \theta + \sin \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}.$$

(2) 由于  $D$  关于  $x$  轴对称,  $\sqrt{|x - |y||}$  在对称点处的值彼此相等, 所以

$$\iint_D \sqrt{|x - |y||} d\sigma = 2 \iint_{D_1} \sqrt{|x - y|} d\sigma, \text{ 其中 } D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\} \text{ 是 } D \text{ 的上半平面部分, 如图 C-5-5 所示. 用直线 } y=x \text{ 将 } D_1 \text{ 划分成 } D_2 \text{ 与 } D_3 \text{ 两部分(其中 } D_2, D_3 \text{ 分别位于直线上方与下方), 则}$$

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{|x - |y||} d\sigma \\ &= 2 \left( \iint_{D_2} \sqrt{y - x} d\sigma + \iint_{D_3} \sqrt{x - y} d\sigma \right) \\ &= 2 \left( \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y - x} dx + \int_0^1 dy \int_y^2 \sqrt{x - y} dx \right) \\ &= 2 \int_0^1 \left[ -\frac{2}{3} (y - x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}^{x=y} + \frac{2}{3} (x - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=y}^{x=2} \right] dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 \left[ y^{\frac{3}{2}} + (2 - y)^{\frac{3}{2}} \right] dy = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

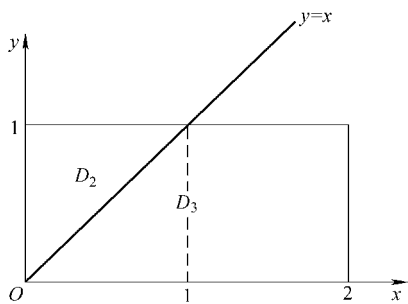


图 C-5-5

## 5.2 三重积分的计算

设  $f(x, y, z)$  是空间有界闭区域  $\Omega$  上的连续函数, 则三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  可按以下步骤计算:

(1) 根据  $\Omega$  的对称性, 化简  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ .

当  $\Omega$  具有某种对称性时, 如果  $f(x, y, z)$  在对称点处的值互为相反数, 则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$ ; 如果  $f(x, y, z)$  在对称点处的值彼此相等, 则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv$  (其中  $\Omega_1$  是  $\Omega$  按对称性划分成的两部分之一).

化简后的三重积分仍记为  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ .

(2) 根据  $\Omega$  将三重积分转换成一个定积分与一个二重积分.

这里有“先一后二”和“先二后一”两种转换方法.

例如,  $\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$  (其中  $D_{xy}$  是  $\Omega$  在  $xOy$  平面的投影), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (\text{“先一后二”}).$$

又例如,  $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, c \leq z \leq d\}$  (其中  $D_z$  是  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$

平面的投影), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma \text{ (“先二后一”).}$$

此外, 当  $\Omega$  是角域的一部分  $\{(r, \theta, \varphi) \mid r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi), \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$  时, 用球面坐标计算, 此时

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr.$$

(3) 计算以上各式右边的积分.

例如, 对于  $\iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ , 先将  $(x, y)$  看做  $D_{xy}$  上的某个固定点, 计算定积分  $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \stackrel{\text{记}}{=} \varphi(x, y)$ , 然后计算二重积分  $\iint_{D_{xy}} \varphi(x, y) d\sigma$ .

**例 5.4** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dv$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z=xy$  及平面  $y=x, x=1$  和  $y=0, z=0$  围成的立体.

**精解**  $\Omega$  是曲顶柱体, 其曲顶为  $z=xy$ , 底面  $D_{xy}$  是  $xOy$  平面上由直线  $y=x, y=0, x=1$  围成的三角形, 母线与  $z$  轴平行, 所以

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dv &= \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz \\ &= \frac{1}{4} \iint_{D_{xy}} x^5 y^6 d\sigma = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^6 dy \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

**例 5.5** 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ;

(2)  $\iiint_{\Omega} (z^2 + xy) dv$ , 其中  $\Omega$  是球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  与  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$  的公共部分.

**精解** (1) 用球面坐标计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \times \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\pi} \times \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \iiint_{\Omega} (z^2 + xy) dv = \iiint_{\Omega} z^2 dv + \iiint_{\Omega} xy dv. \quad (1)$$

由于  $\Omega$  关于  $yOz$  平面对称,  $xy$  在对称点处的值互为相反数, 所以

$$\iiint_{\Omega} xy dv = 0. \quad (2)$$

下面计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dv$ . 由于球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$  的交线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z = 1. \end{cases}$  它位于平面  $z = 1$  上, 故用平面  $z = 1$  将  $\Omega$  划分成  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  两部分, 其中  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  分别位于平面  $z = 1$  的上方与下方, 且

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4 - z^2, 1 \leq z \leq 2\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4z - z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dv &= \iiint_{\Omega_1} z^2 dv + \iiint_{\Omega_2} z^2 dv \\ &= \int_1^2 dz \iint_{D'_z} z^2 d\sigma + \int_0^1 dz \iint_{D''_z} z^2 d\sigma \\ &\quad (\text{其中 } D'_z \text{ 与 } D''_z \text{ 分别为 } \Omega_1 \text{ 与 } \Omega_2 \text{ 的竖坐标为 } z \text{ 的截面在 } xOy \text{ 平面的投影}) \\ &= \pi \int_1^2 z^2 (4 - z^2) dz + \pi \int_0^1 z^2 (4z - z^2) dz = \frac{59}{15} \pi. \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iiint_{\Omega} (z^2 + xy) dv = \frac{59}{15} \pi.$$

**例 5.6** 设  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , 求三重积分

$$\iiint_{\Omega} \left[ e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \tan(x+y+z) \right] dv.$$

**精解**

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} \left[ e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \tan(x+y+z) \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dv + \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dv \xrightarrow{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^3} r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 e^{r^3} r^2 dr \\ &= 2\pi \times 2 \times \frac{1}{3} (e - 1) = \frac{4\pi}{3} (e - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

下面计算  $\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv$ .

由于  $\pi: x+y+z=0$  是通过原点的平面, 所以  $\Omega$  关于  $\pi$  对称. 设  $\Omega$  上的点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  与  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  互为对称点, 则  $\overline{M_0 M_1}$  的中点

$$\left( \frac{1}{2}(x_0 + x_1), \frac{1}{2}(y_0 + y_1), \frac{1}{2}(z_0 + z_1) \right)$$

位于  $\pi$  上, 所以有

$$\frac{1}{2}(x_0 + x_1) + \frac{1}{2}(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}(z_0 + z_1) = 0, \text{ 即 } x_0 + y_0 + z_0 = -(x_1 + y_1 + z_1).$$

由此可知  $\tan(x+y+z)$  在对称点处的值互为相反数, 因此

$$\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv = 0. \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iiint_{\Omega} \left[ e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \tan(x+y+z) \right] dv = \frac{4\pi}{3}(e-1).$$

## 6. 格林公式和高斯公式

### 6.1 格林公式

设  $D$  是以光滑或分段光滑闭曲线  $C$  为边界的平面闭区域, 函数  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  在  $D$  上有连续的偏导数, 则

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma,$$

其中左边的曲线积分是沿  $C$  的正向.

关于坐标的平面曲线积分, 往往可用格林公式作快捷计算.

**注 (i)** 如果  $\Gamma$  不是闭曲线, 则计算  $\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  时, 可以适当添上一曲线  $\gamma$ , 使得  $\Gamma + \gamma$  构成闭曲线 (不妨设其为正向), 则可如下那样应用格林公式计算  $\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \oint_{\Gamma+\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma - \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (\text{其中 } D_1 \text{ 是由 } \Gamma + \gamma \text{ 围成的闭区域}). \end{aligned}$$

**(ii)** 当  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  或  $\frac{\partial P}{\partial y}$  在闭区域  $D$  的内部有不连续点  $(x_0, y_0)$  时, 则计算  $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  ( $C$  是  $D$  的正向边界) 时, 可以作一位于  $D$  内部的、包围点  $(x_0, y_0)$  的闭曲线  $C_0$  (方向为负向), 于是

$$\begin{aligned} & \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \oint_{C+C_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{C_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma - \int_{C_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (\text{其中 } D_2 \text{ 是由 } C + C_0 \text{ 围成的闭区域}). \end{aligned}$$

**例 6.1** 求以下的曲线积分:

(1)  $\int_L xy dx + x^2 dy$ , 其中  $L: y = 1 - |x| (x \in [-1, 1])$ , 起点  $A(-1, 0)$ , 终点  $B(1, 0)$ ;

(2)  $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y| + x^2}$ , 其中  $C: |x| + |y| = 1$  (正向).

**精解** (1)  $\int_L xydx + x^2dy = - \int_{L^-} xydx + x^2dy$  ( $L^-$  是  $L$  的反向曲线)

$$\begin{aligned} &= - \left( \oint_{L^- + \overline{AB}} xydx + x^2dy - \int_{\overline{AB}} xydx + x^2dy \right) \\ &= - \oint_{L^- + \overline{AB}} xydx + x^2dy + \int_{\overline{AB}} xydx + x^2dy. \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\oint_{L^- + \overline{AB}} xydx + x^2dy \xrightarrow{\text{格林公式}} \iint_D \left[ \frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial (xy)}{\partial y} \right] d\sigma$

( $D$  是由正向闭曲线  $L^- + \overline{AB}$  围成的  $\triangle ABC$ , 如图 C-6-1 所示)

$= \iint_D x d\sigma = 0$  (由于  $D$  关于  $y$  轴对称,  $x$  在对称点处的值互

为相反数, 所以  $\iint_D x d\sigma = 0$ ),

$\int_{\overline{AB}} xydx + x^2dy = 0$  (由于  $\overline{AB}$  位于  $x$  轴上, 其上各点的  $y = 0$ ).

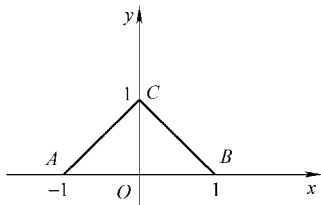


图 C-6-1

将它们代入式(1)得  $\int_L xydx + x^2dy = 0$ .

(2) 由于被积函数中的  $(x, y) \in C$ , 即满足  $|x| + |y| = 1$ , 所以有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y| + x^2} &= \oint_C \frac{1}{1 + x^2} dx + \frac{1}{1 + x^2} dy \\ &\xrightarrow{\text{格林公式}} \iint_D \left[ \frac{\partial \left( \frac{1}{1 + x^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \frac{1}{1 + x^2} \right)}{\partial y} \right] d\sigma \quad (\text{其中 } D \text{ 是由 } C \text{ 围成的区域}) \\ &= \iint_D -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} d\sigma = 0 \quad (D \text{ 关于 } y \text{ 轴对称, } -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} \text{ 在对称点处的值互为相反数}). \end{aligned}$$

**例 6.2** 计算曲线积分  $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $C$  是以点  $(1, 0)$  为中心、 $R$  ( $R > 1$ ) 为半径的正向圆周.

**精解** 记由  $C$  围成的闭区域为  $D$ , 则  $\frac{x}{4x^2 + y^2}, -\frac{y}{4x^2 + y^2}$  在  $D$  内有不连续点  $(0, 0)$ . 因此作负向闭曲线  $C_\varepsilon: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  (其中  $\varepsilon$  是充分小的正数, 它使  $C_\varepsilon$  位于  $D$  的内部), 于是

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_{C+C_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} - \int_{C_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2},$$

其中,  $\oint_{C+C_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{格林公式}} \iint_D \left[ \frac{\partial \left( \frac{x}{4x^2 + y^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( -\frac{y}{4x^2 + y^2} \right)}{\partial y} \right] d\sigma$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left[ \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} - \frac{-4x^2 + y^2}{(4x^2 + y^2)^2} \right] d\sigma = 0, \\
\int_{C_\varepsilon} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int x dy - y dx \quad (\text{由 } C_\varepsilon \text{ 上的点满足 } 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2, \text{ 或用参数方程表示为}) \\
&\quad \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t, \\ y = \varepsilon \sin t, \end{cases} \text{ 起点、终点参数分别为 } t = 0, t = -2\pi) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{-2\pi} \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \cos^2 t + \varepsilon^2 \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} (-2\pi) = -\pi.
\end{aligned}$$

将它们代入式(1)得  $I = \pi$ .

## 6.2 高斯公式

设空间闭区域  $\Omega$  由光滑或分块光滑的闭曲面  $\Sigma$  围成, 函数  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  具有连续的偏导数, 则

$$\oint_{\Sigma(\text{外侧})} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\sigma.$$

关于坐标的曲面积分, 往往可用高斯公式作快捷计算.

**注 (i)** 如果  $S$  不是闭曲面, 则计算  $\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$  时, 可以适当添上一块曲面  $S_0$ , 使得  $S + S_0$  构成闭曲面 (不妨设其为外侧), 于是可如下那样应用高斯公式计算  $\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$ :

$$\begin{aligned}
&\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\
&= \oint_{S+S_0} P dydz + Q dzdx + R dxdy - \iint_{S_0} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\
&= \iiint_{\Omega_1} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv - \iint_{S_0} P dydz + Q dzdx + R dxdy,
\end{aligned}$$

其中  $\Omega_1$  是由  $S + S_0$  围成的空间闭区域.

**(ii)** 当  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  在空间有界闭区域  $\Omega$  内有不连续点  $(x_0, y_0, z_0)$  时, 则计算  $\oint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$  (其中  $\Sigma$  是  $\Omega$  的边界的外侧闭曲面) 时, 可以作一位于  $\Omega$  内部的、包围点  $(x_0, y_0, z_0)$  的闭曲面  $\Sigma_0$  (方向为内侧), 于是

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\
&= \oint_{\Sigma+\Sigma_0} P dydz + Q dzdx + R dxdy - \iint_{\Sigma_0} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\
&= \iiint_{\Omega_2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv - \iint_{\Sigma_0} P dydz + Q dzdx + R dxdy.
\end{aligned}$$



其中,  $\Omega_2$  是由  $\Sigma + \Sigma_0$  围成的空间闭区域.

**例 6.3** 计算曲面积分  $\oint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx - z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是由曲线  $L: \begin{cases} y^2 - z^2 = 1, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周而成的旋转曲面与平面  $z = -1, z = 1$  围成的空间闭区域  $\Omega$  的边界曲面外侧.

**精解** 旋转曲面方程为  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , 所以

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, -1 \leq z \leq 1\},$$

其中  $D_z$  是  $\Omega$  的竖坐标为  $z$  的截面在  $xOy$  平面上的投影, 即

$$D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \oint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx - z dx dy & \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} \right] dv \\ & = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 - 1) dv = \int_{-1}^1 dz \iint_{D_z} [3(x^2 + y^2) - 1] d\sigma \\ & = \int_{-1}^1 dz \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z^2+1}} (3r^2 - 1) r dr \right] \\ & = 2\pi \int_{-1}^1 \left( \frac{3}{4} z^4 + z^2 + \frac{1}{4} \right) dz = 4\pi \int_0^1 \left( \frac{3}{4} z^4 + z^2 + \frac{1}{4} \right) dz = \frac{44\pi}{15}. \end{aligned}$$

**例 6.4** 求下列曲面积分:

- (1)  $\iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$  的上侧;  
 (2)  $\oint_{\Sigma} \frac{x dydz + y dzdx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$  的外侧.

**精解** (1) 记  $xOy$  平面的位于  $\Sigma$  之内的部分(方向为下侧)为  $\Sigma_0$ , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dx dy \\ & = \oint_{\Sigma + \Sigma_0} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dx dy - \iint_{\Sigma_0} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dx dy, \quad (1) \end{aligned}$$

其中  $\oint_{\Sigma + \Sigma_0} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dx dy$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(2x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(2y^3)}{\partial y} + \frac{\partial[3(z^2 - 1)]}{\partial z} \right\} dv \\ & = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dv \\ & = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_0^{1-x^2-y^2} 6(x^2 + y^2 + z) dz \quad (\text{其中 } D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

即为不带方向的  $\Sigma_0$ )

$$= \iint_{D_{xy}} 6 \left[ (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) + \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^2 \right] d\sigma$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 6 \left[ r^2(1-r^2) + \frac{1}{2}(1-r^2)^2 \right] r dr \\ & = 6\pi \int_0^1 (r-r^5) dr = 2\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_0} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1) dxdy \\ & = - \iint_{D_{xy}} -3 dxdy = 3 \times \pi \times 1^2 = 3\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1) dxdy = 2\pi - 3\pi = -\pi. \\ (2) \text{ 由于 } & \frac{\partial \left[ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ & \frac{\partial \left[ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{\partial y} = \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ & \frac{\partial \left[ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

有不连续点  $(0, 0, 0) \in \Omega$  ( $\Omega$  是由  $\Sigma$  围成的空间), 所以作  $\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ , 其中,  $\varepsilon$  是充分小的正数, 使得内侧曲面  $\Sigma_\varepsilon$  位于  $\Omega$  内部. 于是

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = \oint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \oint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\oint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega_1} \left[ \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \right] dv \\ & = \iiint_{\Omega_1} 0 dv = 0 \quad (\text{其中 } \Omega_1 \text{ 是由 } \Sigma + \Sigma_\varepsilon \text{ 围成的空间闭区域}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = \frac{1}{\varepsilon^3} \oint_{\Sigma_\varepsilon} xdydz + ydzdx + zdx dy \quad (\text{由于被积函数的 } x, y, z \text{ 满足 } \Sigma_\varepsilon \text{ 的方程}) \\ & = -\frac{1}{\varepsilon^3} \oint_{\Sigma_\varepsilon^-} xdydz + ydzdx + zdx dy \quad (\Sigma_\varepsilon^- \text{ 是 } \Sigma_\varepsilon \text{ 的反向曲面, 它的方向为外侧}) \\ & \xrightarrow{\text{高斯公式}} -\frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_\varepsilon} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = -\frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_\varepsilon} 3 dv = -\frac{3}{\varepsilon^3} \times \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = -4\pi. \end{aligned} \quad (6)$$

将式(5)、式(6)代入式(4)得

$$\oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 - (-4\pi) = 4\pi.$$

## 7. 幂级数的收敛域与和函数的计算

### 7.1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域的计算方法

收敛域不为  $\{0\}$  的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域可按以下步骤计算:

(1) 用以下方法算出  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间:

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ) 存在为  $\rho$ , 则当  $\rho \neq 0$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ ; 当  $\rho = 0$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $(-\infty, +\infty)$ .

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ) 不存在 (例如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  是缺项幂级数) 时, 将  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  理解成  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  (其中对  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $u_n(x)$  不恒为零), 然后计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$ ), 如果它们为  $\rho(x)$ , 则收敛区间为  $\{x \mid \rho(x) < 1\}$ .

(2) 由收敛区间计算收敛域:

当  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $(-\infty, +\infty)$  时, 收敛域也为  $(-\infty, +\infty)$ .

当  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $(-R, R)$  ( $R > 0$ ) 时, 考虑  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在点  $x = -R, R$  处的收敛性, 将其中的收敛点并入收敛区间即得收敛域.

**例 7.1** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^n$  的收敛域.

**精解** 记  $a_n = \frac{n}{2^n + (-3)^n}$ , 则

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}}}{\frac{n}{2^n + (-3)^n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n} \right] = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以, 所给幂级数的收敛区间为  $\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) = (-3, 3)$ .

当  $x = -3, 3$  时, 所给幂级数分别为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} \cdot (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}.$$

由于这两个级数的通项极限都不为零, 所以发散. 因此所给幂级数的收敛域为  $(-3, 3)$ .

## 7.2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数的计算方法

幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数可以按以下方法计算:

(1) 对  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  进行适当的代数运算(例如, 将  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的各项同乘以一个常数或  $x^k$ , 或者提出一个常数或  $x^k$ , 这里  $k$  为正整数), 或作适当的变量代换, 使其成为常用函数(指  $e^{ax}$ ,  $\sin ax$ ,  $\cos ax$ ,  $\ln(1+ax)$ ,  $(1+ax)^\mu$ , 这里  $a, \mu$  都是常数)的麦克劳林级数, 从而求得  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数. 有时将  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  表示成几个幂级数之和, 然后对每个幂级数都作以上处理, 由此算得  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数.

(2) 对  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在收敛区间内进行求导数或二阶导数, 或在收敛域上积分, 即

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)', \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' \text{ 或 } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt,$$

使其成为某个常用函数的麦克劳林级数, 然后通过积分、二次积分或求导算得  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数.

**例 7.2** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!} x^n$  的收敛域与和函数.

**精解**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1) + n + 1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\stackrel{\text{令 } t = \frac{x}{2}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

$$= t^2 \sum_{\substack{m=0 \\ (m=n-2)}}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m + t \sum_{\substack{m=0 \\ (m=n-1)}}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

$$= (t^2 + t + 1)e^t$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{x}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

所以, 所给幂级数的收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ , 和函数  $S(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{x}{2}}$ .

**例 7.3** 求下列幂级数的收敛域与和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right] x^{2n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} x^{2n}.$$

**精解** (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right] x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}.$  (1)

显然,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = -\frac{-x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} (-1 < x < 1).$  (2)

此外, 对  $x \in (-1, 1)$ , 记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n},$$

则  $S''(x) = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n} \right]'' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} (x^{2n})''$   
 $= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2},$

所以,  $S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(t) dt = \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan x,$

$$\begin{aligned} S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x 2 \arctan t dt \\ &= 2t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= 2x \arctan x - \ln(1+x^2). \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right] x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2) (-1 < x < 1).$$

(2) 记  $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} x^{2n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot x^2 = x^2,$$

所以, 所给幂级数的收敛区间为  $(-1, 1)$ . 由于  $x = -1, 1$  时, 所给幂级数都为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ , 收敛. 因此收敛域为  $[-1, 1]$ .

对  $x \in [-1, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} x^{2n} &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} dt \\
 &= x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= x \arctan x.
 \end{aligned}$$

## 8. 二阶常系数线性微分方程的求解

设二阶常系数线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 是常数}, f(x) \text{ 是已知函数}), \quad (*)$$

它对应的齐次线性微分方程为

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (**)$$

式(\*\*)的通解  $Y$  可按它的特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  计算.

当  $f(x)$  是  $P_l(x)e^{\alpha x}$ , 或  $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x]$  (其中  $P_l(x), P_m(x), Q_n(x)$  分别是  $l, m, n$  次多项式), 或它们的线性组合时, 则可按有关公式算出式(\*)的一个特解  $y^*$ . 此时式(\*)的通解为

$$y = Y + y^*.$$

**例 8.1** 求微分方程  $y'' + a^2y = \sin x$  的通解, 其中  $a > 0$ .

**精解** 所给的常系数线性微分方程对应的齐次线性微分方程的特征方程为

$$r^2 + a^2 = 0, \quad (1)$$

故有特征根  $r = -ia, ia$ . 从而齐次线性微分方程的通解为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

下面计算所给微分方程的特解. 由于所给微分方程的右端  $\sin x = e^{0x}[0 \cdot \cos(1 \cdot x) + 1 \cdot \sin(1 \cdot x)]$ , 所以应分以下两种情形计算所给微分方程的特解  $y^*$ :

当  $a \neq 1$  时,  $0 + 1 \times i = i$  不是特征方程(1)的根, 所以

$$y^* = A \cos x + B \sin x.$$

将它代入所给的微分方程得  $A = 0, B = \frac{1}{a^2 - 1}$ , 所以此时  $y^* = \frac{1}{a^2 - 1} \sin x$ .

当  $a = 1$  时,  $0 + 1 \times i = i$  是特征方程(1)的根, 所以

$$y^* = x(A_1 \cos x + B_1 \sin x).$$

将它代入所给的微分方程得  $A_1 = -\frac{1}{2}, B_1 = 0$ , 所以此时  $y^* = -\frac{1}{2}x \cos x$ .

于是, 当  $a \neq 1$  时, 所给微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2 - 1} \sin x;$$

当  $a = 1$  时, 所给微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x.$$

**例 8.2** 设函数  $y = y(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $y' \neq 0, x = x(y)$  是  $y = y(x)$  的反函数, 它满足微分方程

$$\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left( \frac{dx}{dy} \right)^3 = 0,$$

求满足  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \frac{3}{2}$  的解  $y = y(x)$ .

**精解** 所给微分方程不是常系数的, 因此将  $y$  看做未知函数,  $x$  看做自变量, 改换这个微分方程.

$$\frac{dx}{dy} = \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-1}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-1} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-1} \left( \frac{dx}{dy} \right) = -\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-3}.$$

将它代入所给微分方程得

$$-\frac{d^2y}{dx^2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-3} + (y + \sin x) \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-3} = 0,$$

$$\text{即} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = \sin x \quad (\text{二阶常系数线性微分方程}). \quad (1)$$

式(1) 对应的齐次线性微分方程有通解

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

此外, 式(1) 有特解  $y^* = A \cos x + B \sin x$ . 将它代入式(1) 得  $A = 0$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ , 所以  $y^* = -\frac{1}{2} \sin x$ . 因此式(1) 的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x,$$

且

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x.$$

于是, 由  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \frac{3}{2}$  得  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = -1$ . 因此满足  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \frac{3}{2}$  的微分方程的解为

$$y(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

**例 8.3** 求微分方程  $y'' + y' - 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$  的通解.

**精解** 所给微分方程是二阶常系数线性微分方程, 但右端函数不是  $e^{\alpha x} P_l(x)$  或  $e^{\alpha x} [Q_m(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x]$  (其中  $P_l(x)$ ,  $Q_m(x)$ ,  $R_n(x)$  分别是  $l$ 、 $m$ 、 $n$  次多项式) 形式, 所以它的特解  $y^*$  不能用常规方法计算. 因此用降阶法求解.

由于  $y'' + y' - 2y = (y'' + 2y') - (y' + 2y) = (y' + 2y)' - (y' + 2y)$ , 所以令  $u = y' + 2y$ , 则所给微分方程成为一阶线性微分方程

$$u' - u = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

它的通解为

$$u = e^{-\int -dx} \left( C_1 + \int \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot e^{\int -dx} dx \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^x \left( C_1 + \int \frac{1}{1+e^x} dx \right) = e^x \left[ C_1 - \int \frac{1}{1+e^{-x}} d(1+e^{-x}) \right] \\
 &= e^x [C_1 - \ln(1+e^{-x})],
 \end{aligned}$$

即

$$y' + 2y = e^x [C_1 - \ln(1+e^{-x})].$$

它的通解, 即所给微分方程的通解为

$$\begin{aligned}
 y &= e^{-\int 2dx} \{ C_2 + \int e^x [C_1 - \ln(1+e^{-x})] e^{\int 2dx} dx \} \\
 &= e^{-2x} \{ C_2 + \int e^{3x} [C_1 - \ln(1+e^{-x})] dx \}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中, } \int e^{3x} [C_1 - \ln(1+e^{-x})] dx &= \frac{1}{3} \int [C_1 - \ln(1+e^{-x})] de^{3x} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ e^{3x} [C_1 - \ln(1+e^{-x})] - \int e^{3x} \cdot \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{3} e^{3x} [C_1 - \ln(1+e^{-x})] - \frac{1}{3} \int \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}} dx \\
 &= \frac{1}{3} e^{3x} [C_1 - \ln(1+e^{-x})] - \frac{1}{3} \int \left( e^{2x} - e^x + 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} e^{3x} [C_1 - \ln(1+e^{-x})] - \frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} \ln(1+e^{-x}) \quad (2)
 \end{aligned}$$

(以上计算中的不定积分不必加任意常数).

将式(2)代入式(1)得

$$y = \frac{1}{3} C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} e^x \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{3} e^{-2x} \ln(1+e^{-x}).$$

**例 8.4** 求满足下列方程的可微函数  $f(x)$ :

$$x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt.$$

**精解** 为消去积分运算, 所给方程两边对  $x$  求导得

$$\begin{aligned}
 1 &= f(x) + \frac{d}{dx} \int_0^x t f(t-x) dt \\
 &= f(x) + \frac{d}{dx} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du \quad (\text{其中 } u = t-x) \\
 &= f(x) + \frac{d}{dx} \int_{-x}^0 u f(u) du + \frac{d}{dx} \left[ x \int_{-x}^0 f(u) du \right] \\
 &= f(x) - x f(-x) + \int_{-x}^0 f(u) du + x f(-x) = f(x) + \int_{-x}^0 f(u) du,
 \end{aligned}$$

即

$$1 = f(x) + \int_{-x}^0 f(u) du. \quad (1)$$

两边对  $x$  求导得

$$f'(x) = -f(-x), \quad (2)$$



且  $f'(-x) = -f(x)$ .

于是有  $f''(x) = f'(-x) = -f(x)$ , 即  $f''(x) + f(x) = 0$ . (3)

故  $f(x)$  满足二阶常系数齐次线性微分方程(3), 它的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

且  $f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ .

将  $f(0) = 1$  (由式(1) 得到) 和  $f'(0) = -1$  (由式(2) 得到) 代入以上两式得

$$C_1 = 1, C_2 = -1,$$

所以,  $f(x) = \cos x - \sin x$ .

## 二、线性代数

### 9. 向量组的线性相关性的判定

#### 9.1 向量组线性相关与线性无关的判定

判定向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关与线性无关可以按定义进行, 即如果存在一组不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , 使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_s \alpha_s = \mathbf{0} \quad (*)$$

成立, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关; 如果仅当  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  全为零时, 式(\*)才成立, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

判定向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关与线性无关还可以从计算秩  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  入手, 即向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关(线性无关)的充分必要条件是  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$  ( $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ ).

#### 9.2 向量(或向量组)可否由另一个向量组线性表示的判定

设向量  $\beta$  及向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  (它们的维数与  $\beta$  相同), 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示的充分必要条件是  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$ .

设向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  与向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  (它们的维数与  $\beta_1$  相同), 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示的充分必要条件是  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ .

显然, 当向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示时有

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s);$$

当向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  与向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  等价(即可相互线性表示)时有

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

**例 9.1** 计算下列各题:

(1) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 且

$$\beta_1 = (k-1)\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = -\alpha_1 - (1+k)\alpha_2 + (1-k)\alpha_3,$$

求使向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关的  $k$  的值.

(2) 已知向量组(I):  $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3)^T, \alpha_3 = (1, -1, a+2)^T$  和向量组(II):  $\beta_1 = (1, 2, a+3)^T, \beta_2 = (2, 1, a+6)^T, \beta_3 = (2, 1, a+4)^T$ , 求使(I)与(II)等价的  $a$  的值.

**精确** (1) 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以使  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关的  $k$  的值应满足  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$ , 即为

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ -1 & -(1+k) & 1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = (2-k)(k^2-2) \neq 0.$$

所以  $k \neq 2$ , 且  $k \neq \pm\sqrt{2}$ .

(2) 由 (I) 与 (II) 等价知

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

对  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  施行初等行变换得

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以  $r(\text{II})=3$ .

对  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  施行初等行变换得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$$

所以, 由  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\text{II})=3$ , 得  $a+1 \neq 0$ , 从而  $a \neq -1$ .

**例 9.2** (1) 设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示, 求  $a$  的值.

(2) 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 2, 4)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 3, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (2, 1, a+2, 4)^T$ ,  $\alpha_4 = (2, -1, 3, a+7)^T$ ,  $\beta_1 = (3, -1, a+6, a+11)^T$ ,  $\beta_2 = (0, 1, 2, a)^T$ . 如果  $\beta_1$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示, 但  $\beta_2$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示, 求  $a$  的值.

**精解** (1) 由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示知

$$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) < r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (1)$$

对  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  施行初等行变换:

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以, 由式(1)得  $a-5=0$ , 即  $a=5$  (此时  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=2$ ,  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=3$ ).

(2) 由  $\beta_1$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示知

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1); \quad (2)$$

由  $\beta_2$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示知

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) < r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_2). \quad (3)$$

对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2)$ 施行初等行变换:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 & a+6 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & a+7 & a+11 & a \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 & a & 2 \\ 0 & -4 & -4 & a-1 & a-1 & a \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 & a-5 & a+4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

所以, 由式(2)得  $a \neq 3$ ; 由式(3)得  $a = 3, 5$ . 综合上述两种情形知,  $\beta_1$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示,  $\beta_2$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示时,  $a = 5$ .

**例 9.3** (单项选择题) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均为  $n$  维列向量,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则下列命题正确的是

- (A) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关.
- (B) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关.
- (C) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关.
- (D) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关.

[ ]

**精解** 用定义判定正确的选项.

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则存在一组不全为零的常数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , 使得  $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_s\alpha_s = \mathbf{0}$ , 从而

$$\lambda_1 A\alpha_1 + \lambda_2 A\alpha_2 + \dots + \lambda_s A\alpha_s = A(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_s\alpha_s) = \mathbf{0},$$

所以  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关.

因此本题选(A).

**例 9.4** (单项选择题) 设  $A, B$  为满足  $AB = \mathbf{O}$  的任意两个非零矩阵, 则必有

- (A)  $A$  的列向量组线性相关,  $B$  的行向量组线性相关.
- (B)  $A$  的列向量组线性相关,  $B$  的列向量组线性相关.
- (C)  $A$  的行向量组线性相关,  $B$  的行向量组线性相关.
- (D)  $A$  的行向量组线性相关,  $B$  的列向量组线性相关.

[ ]

**精解** 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是  $A$  的列向量组), 由于  $B \neq \mathbf{O}$ , 所以不

妨设

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

中的第 1 列是非零列, 则由  $AB = O$  知, 存在不全为零的数  $b_{11}, b_{21}, \cdots, b_{s1}$ , 使得

$$b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{s1}\alpha_s = \mathbf{0}.$$

由此推出  $A$  的列向量组线性相关.

由  $AB = O$  得  $B^T A^T = O$ . 同样可证  $B^T$  的列向量组线性相关, 即  $B$  的行向量组线性相关.

因此本题选(A).

**例 9.5** (单项选择题) 设向量组(I):  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  可由向量组(II):  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  线性表示, 则

- (A) 若(I)线性无关, 则  $r \leq s$ .
- (B) 若(I)线性相关, 则  $r > s$ .
- (C) 若(II)线性无关, 则  $r \leq s$ .
- (D) 若(II)线性相关, 则  $r > s$ .

[ ]

**精解** 设(I)线性无关, 则  $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$ . 于是由(I)可由(II)线性表示知  $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \leq s$ . 由此推得  $r \leq s$ .

因此本题选(A).

**例 9.6** (单项选择题) 设  $n$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m < n)$  线性无关, 则  $n$  维列向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$  也线性无关的充分必要条件是

- (A) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$  线性表示.
- (B) 向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性表示.
- (C) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$  等价.
- (D) 矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$  与矩阵  $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$  等价.

[ ]

**精解** 由于两个  $n \times m$  矩阵  $A$  与  $B$  等价的充分必要条件是  $r(A) = r(B)$ , 故从选项(D)入手考虑.

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$  线性无关的充分必要条件是  $r(B) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = m$ . 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关, 所以上述的充分必要条件是  $r(A) = r(B)$ , 即  $n \times m$  矩阵  $A$  与  $B$  等价.

因此本题选(D).

## 10. 线性方程组解的结构与求解

### 10.1 齐次线性方程组解的结构

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则

(1) 当  $r(A) = n$  时, 齐次线性方程组  $Ax = \mathbf{0}$  只有零解.

(2) 当  $r(A) < n$  时, 齐次线性方程组  $Ax = \mathbf{0}$  有非零解. 记此时基础解系为  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r} (r = r(A))$ , 则通解为

$$x = C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + \cdots + C_{n-r} \eta_{n-r} \quad (C_1, C_2, \cdots, C_{n-r} \text{ 是任意常数}).$$

### 10.2 非齐次线性方程组解的结构

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $b$  是  $m$  维非零列向量(称  $\bar{A} = (A \mid b)$  为增广矩阵), 则

(1) 当  $r(\bar{A}) > r(A)$  时, 非齐次线性方程组  $Ax = b$  无解.

(2) 当  $r(\bar{A}) = r(A) = n$  时, 非齐次线性方程组  $Ax = b$  有唯一解.

(3) 当  $r(\bar{A}) = r(A) < n$  时, 非齐次线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解, 此时通解为  $x = C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + \cdots + C_{n-r} \eta_{n-r} + x^*$  (其中  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$  是  $Ax = b$  的导出组  $Ax = 0$  的基础解系,  $r = r(A)$ ,  $x^*$  是  $Ax = b$  的一个特解,  $C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}$  是任意常数).

**例 10.1** (单项选择题) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 则对线性方程组  $(AB)x = 0$ , 下列结论必成立的是

- (A) 当  $n > m$  时, 仅有零解. (B) 当  $n > m$  时, 必有非零解.  
(C) 当  $m > n$  时, 仅有零解. (D) 当  $m > n$  时, 必有非零解.

[ ]

**精解**  $(AB)x = 0$  是  $m$  元齐次线性方程组. 因为  $r(AB) \leq \min\{m, n\}$ , 所以  $m > n$  时,  $r(AB) \leq n < m$ . 从而  $(AB)x = 0$  必有非零解.

因此本题选(D).

**例 10.2** (单项选择题) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\alpha$  是  $n$  维列向量. 若秩  $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$ , 则线性方程组

- (A)  $Ax = \alpha$  必有无穷多个解. (B)  $Ax = \alpha$  必有唯一解.  
(C)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  仅有零解. (D)  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  必有非零解.

[ ]

**精解** 由于题设中给出  $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$ , 所以从考虑  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  入手.

由于  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  是  $n+1$  元齐次线性方程组. 于是由  $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A) \leq n < n+1$  知

$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  必有非零解.

因此本题选(D).

**例 10.3** (单项选择题) 设  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* \neq O$ , 若  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的四个互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系

- (A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.  
(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

[ ]

**精解** 由于  $\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1, \xi_4 - \xi_1$  都是  $Ax = 0$  的解, 所以  $r(A) \leq n-1$ . 于是由  $r(A^*)$

$$= \begin{cases} n, & r(\mathbf{A})=n, \\ 1, & r(\mathbf{A})=n-1, \text{ 知 } r(\mathbf{A}^*)=1 \text{ (由于 } \mathbf{A}^* \neq \mathbf{O} \text{ 知 } r(\mathbf{A}^*) \neq 0), \text{ 所以 } r(\mathbf{A})=n-1. \text{ 从而 } \mathbf{Ax} \\ 0, & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

$=\mathbf{0}$  的基础解系中仅含一个非零解向量.

因此本题选(B).

例 10.4 (1) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解. 证明方程组的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的秩  $r(\mathbf{A})$  为 2, 并求  $a, b$  的值.

(2) 设三阶矩阵  $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ , 且它的列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解, 求  $\lambda$  的值, 并证明  $|\mathbf{B}|=0$ .

**精解** (1) 由于所给的非齐次线性方程组有三个线性无关的解, 记为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 则  $\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1$  都是导出组的解, 且线性无关, 即导出组的基础解系中至少含有两个解向量, 于是有

$$r(\mathbf{A}) \leq 4 - 2 = 2.$$

此外, 由所给方程组知  $r(\mathbf{A}) \geq 2$ . 因此  $r(\mathbf{A})=2$ .

对  $\mathbf{A}$  施行初等行变换

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2(2-a) & -5+4a+b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是由  $r(\mathbf{A})=2$  得  $\begin{cases} 2(2-a)=0, \\ -5+4a+b=0, \end{cases}$  解此方程组得  $a=2, b=-3$ .

(2) 由于  $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$  的列向量是所给的齐次线性方程组之解, 所以该齐次线性方程组有非零解, 从而  $r(\mathbf{A}) < 3$ , 即  $|\mathbf{A}|=0$  (其中,  $\mathbf{A}$  是所给齐次线性方程组的系数矩阵).

$$\text{由于 } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(\lambda - 1), \text{ 所以 } \lambda = 1.$$

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即  $r(A)=2$ . 因此所给方程组的基础解系中只包含一个解向量, 从而  $B$  的列向量组线性相关, 因此  $|B|=0$ .

**例 10.5** 已知三阶矩阵  $A$  的第 1 行是  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c$  不全为零, 矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$  ( $k$  为常数), 且  $AB=O$ , 求线性方程组  $Ax=0$  的通解.

**精解** 由  $AB=O$  知,  $B$  的每一个列向量都是  $Ax=0$  的解.

由  $AB=O$  得  $r(A) + r(B) - 3 \leq 0$ , 即  $r(A) + r(B) \leq 3$ .

(1) 当  $k \neq 9$  时,  $r(B)=2$ , 所以  $r(A) \leq 1$ , 但  $A$  的第 1 行是非零行, 所以  $r(A) \geq 1$ . 从而  $r(A)=1$ . 由此可知  $Ax=0$  的通解

$$x = C_1(1, 2, 3)^T + C_2(3, 6, k)^T \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

(2) 当  $k=9$  时,  $r(B)=1$ , 所以  $r(A)=2$  或 1.

当  $r(A)=2$  时, 通解为  $x = C(1, 2, 3)^T$  ( $C$  为任意常数).

当  $r(A)=1$  时,

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时  $Ax=0$  与方程  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  同解 (其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ), 设  $a \neq 0$  (当  $b$  或  $c$  不为零时也可同样考虑), 因此此时的通解

$$x = C_3 \left( -\frac{b}{a}, 1, 0 \right)^T + C_4 \left( -\frac{c}{a}, 0, 1 \right)^T \quad (\text{其中 } C_3, C_4 \text{ 是任意常数}).$$

## 11. 矩阵的特征值与特征向量的计算

设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则  $A$  的特征值是方程  $|\lambda E - A| = 0$  ( $E$  是  $n$  阶单位矩阵) 的根, 而  $(\lambda E - A)x = 0$  的非零解是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量.

$A$  的特征值与特征向量有以下性质:

(1) 对应  $A$  的不同特征值的特征向量线性无关.

(2)  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  之和为  $\text{tr} A$ , 之积为  $|A|$ .

(3) 设  $\lambda, \xi$  分别是  $A$  的特征值及其对应的特征向量, 则  $f(A)$  有特征值  $f(\lambda)$  及其对应的特征向量  $\xi$ , 其中  $f(\lambda)$  是  $\lambda$  的多项式.

(4) 当  $A$  可逆时,  $A$  的特征值全不为零. 设  $\lambda, \xi$  分别是  $A$  的特征值及其对应的特征向量, 则  $A^{-1}$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}$  及其对应的特征向量  $\xi$ ;  $A^*$  有特征值  $\frac{|A|}{\lambda}$  及其对应的特征向量  $\xi$ .

(5) 设  $\lambda, \xi$  分别是  $A$  的特征值及其对应的特征向量, 则  $P^{-1}AP$  有特征值  $\lambda$  及其对应的特征向量  $P^{-1}\xi$ .

利用特征值与特征向量的性质, 往往能快捷地计算矩阵式的特征值与特征向量.



**例 11.1** 设三阶矩阵  $A$  满足  $|A - 2E| = 0$ ,  $|A + 2E| = 0$ ,  $|2A - 3E| = 0$  ( $E$  是三阶单位矩阵), 求  $A$  的行列式.

**精解** 由  $|A - 2E| = 0$ , 即  $|2E - A| = 0$  得 2 是  $A$  的特征值.

由  $|A + 2E| = 0$ , 即  $|-2E - A| = 0$  得 -2 是  $A$  的特征值.

由  $|2A - 3E| = 0$  即  $\left|\frac{3}{2}E - A\right| = 0$  得  $\frac{3}{2}$  是  $A$  的特征值.

由此算得三阶矩阵  $A$  的 3 个特征值, 所以

$$|A| = 2 \times (-2) \times \frac{3}{2} = -6.$$

**例 11.2** 已知二阶矩阵  $A$  及 2 维列向量  $x$  满足  $A^2x + 2Ax - 3x = 0$ , 且  $x$  与  $Ax$  线性无关, 求  $A$  的全部特征值与特征向量.

**精解** 由题设  $A^2x + 2Ax - 3x = (A + 3E)(A - E)x$  ( $E$  是二阶单位矩阵)

$$= (-3E - A)(x - Ax)$$

$$= (E - A)(-Ax - 3x)$$

$$= 0$$

知, 二阶矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda = -3, 1$ , 并且由  $x$  与  $Ax$  线性无关知  $x - Ax \neq 0$ , 所以对应  $\lambda = -3$  的特征向量为  $C_1(x - Ax)$ ; 同理可知  $-Ax - 3x \neq 0$ , 所以对应  $\lambda = 1$  的特征向量为  $C_2(-Ax - 3x)$ , 其中  $C_1, C_2$  都是任意非零常数.

**例 11.3** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = P^{-1}A^*P$ , 求  $B + 2E$  的特征值与特征向量, 其中  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵,  $E$  是三阶单位矩阵.

**精解** 由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2$  知  $A$  的特征值为  $\lambda = 7, 1$

(二重).

设对应  $\lambda = 7$  的特征向量为  $\alpha_1 = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则  $\alpha_1$  满足

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

由于  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以,  $\alpha_1 = C_1(1, 1, 1)^T = (C_1, C_1, C_1)^T$  ( $C_1$  是任意非零常数).

设对应  $\lambda = 1$  的特征向量为  $\alpha_2 = (y_1, y_2, y_3)$ , 则由  $A$  是实对称矩阵知

$$\alpha_2 \cdot \alpha_1 = 0, \quad \text{即} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

所以,  $\alpha_2 = C_2(-1, 1, 0)^T + C_3(-1, 0, 1)^T = (-C_2 - C_3, C_2, C_3)^T$  ( $C_2, C_3$  是不全为零的任意常数).

于是  $A^*$  的特征值为  $\mu = \frac{|A|}{7} = 1$ ,  $\frac{|A|}{1} = 7$  (二重) 对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ .

由此可得  $B$  的特征值为  $\mu = 1, 7$  (二重), 对应的特征向量分别为

$$\beta_1 = P^{-1}\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1(0, 1, 1)^T,$$

$$\beta_2 = P^{-1}\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 - C_3 \\ -C_2 - C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_2(1, -1, 0)^T + C_3(-1, -1, 1)^T.$$

因此,  $B + 2E$  的特征值  $\nu = 1 + 2 = 3$ ,  $7 + 2 = 9$  (二重), 对应的特征向量分别为

$$\beta_1 = C_1(0, 1, 1)^T, \beta_2 = C_2(1, -1, 0)^T + C_3(-1, -1, 1)^T.$$

**例 11.4** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$ , 其行列式  $|A| = -1$ , 又伴随矩阵  $A^*$  有一个特

征值  $\lambda$ , 属于  $\lambda$  的特征向量  $\alpha = (-1, -1, 1)^T$ , 求  $a, b, c, \lambda$  的值.

**精解** 由题设可知,  $\frac{|A|}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}$  是  $A$  的特征值, 其对应的特征向量为  $\alpha$ , 所以有

$$\left(-\frac{1}{\lambda}E - A\right)\alpha = 0 \quad (E \text{ 是 } 3 \text{ 阶单位矩阵}),$$

$$\text{即} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} - a & 1 & -c \\ -5 & -\frac{1}{\lambda} - b & -3 \\ -1 + c & 0 & -\frac{1}{\lambda} + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{由此得到} \quad \begin{cases} \frac{1}{\lambda} + a - 1 - c = 0, \\ 5 + \frac{1}{\lambda} + b - 3 = 0, \\ 1 - c - \frac{1}{\lambda} + a = 0, \end{cases}$$

$$\text{化简后得} \begin{cases} -a+1+c=\frac{1}{\lambda}, \\ -2-b=\frac{1}{\lambda}, \\ a+1-c=\frac{1}{\lambda}, \end{cases} \quad \text{即 } a=c, b=-3, \lambda=1.$$

$$\text{再由 } |A| = -1, \text{ 即 } \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a-3 = -1, \text{ 得 } a=c=2. \text{ 因此所求的 } a=2, b=-3, c=2, \lambda=1.$$

**例 11.5** 设  $A$  是三阶实对称矩阵.

(1) 当秩  $r(A)=2$ , 且  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  时, 求  $A$  的所有特征值与特征向量;

(2) 当  $A$  的各行元素之和均为 3, 且向量  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $Ax=0$  的两个解时, 求  $A$  的所有特征值与特征向量.

**精解** (1) 由题设得

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} -\alpha_1,$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} \alpha_2,$$

所以  $A$  有特征值  $\lambda = -1, 1$ , 它们对应的所有特征向量分别为

$$C_1(-\alpha_1) = C_1(1, 0, -1)^T, C_2\alpha_2 = C_2(1, 0, 1)^T,$$

其中,  $C_1, C_2$  都是任意非零常数.

由于  $r(A)=2$ , 即  $|A|=0$ , 所以  $A$  还有一个特征值为 0, 设它对应的特征向量为  $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则由  $A$  是实对称矩阵知

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

由此得到  $\alpha_3 = C_3(0, 1, 0)^T$  ( $C_3$  是任意非零常数).

(2) 由  $A$  的各行元素之和均为 3 知,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 即  $A$  有特征值  $\lambda = 3$ , 其对应的特征

向量为  $\xi_1 = C_1(1, 1, 1)^T$  ( $C_1$  是任意非零常数).

由  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $Ax=0$  的两个解, 知

$$A\alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1, \quad A\alpha_2 = 0 \cdot \alpha_2,$$

即  $A$  有特征值  $\lambda = 0$  (二重, 这是因为  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关), 且其对应的特征向量为

$$\xi_2 = C_2\alpha_1 + C_3\alpha_2 = (-C_2, 2C_2 - C_3, -C_2 + C_3) \quad (\text{其中 } C_2, C_3 \text{ 是任意不全为零的常数}).$$

## 12. 二次型化标准形与规范形的方法

设  $n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  (其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶实对称矩阵).

### 12.1 二次型化标准形

二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  化标准形有两种方法:

#### (1) 正交变换法

通过正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  (其中  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $\mathbf{Q}$  是  $n$  阶正交矩阵), 将  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  化为标准形  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ .

这里的  $\mathbf{Q}$  和  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (它们都是  $\mathbf{A}$  的特征值) 可从  $\mathbf{A}$  正交相似对角化中算出, 即

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

#### (2) 可逆线性变换法

通过可逆线性变换  $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$  (其中  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $\mathbf{C}$  是  $n$  阶可逆矩阵), 将  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  化为标准形  $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$ .

这里的  $\mathbf{C}$  和  $d_1, d_2, \dots, d_n$  可从  $\mathbf{A}$  合同对角化中算出, 即  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ . 具

体可对  $f$  进行配方得  $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ .

### 12.2 二次型化规范形

将二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  化为规范形的步骤如下:

(1) 将二次型  $f$  化为标准形, 设为  $f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \dots + c_n y_n^2$ .

(2) 当  $c_1 > 0$  时, 令  $z_1 = \sqrt{c_1} y_1$ ; 当  $c_1 < 0$  时, 令  $z_1 = \sqrt{-c_1} y_1$ ; 当  $c_1 = 0$  时, 令  $z_1 = y_1$ . 对其余变量也同样考虑. 如此即得  $f$  的规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \dots - z_{p+q}^2 + 0 \cdot z_{p+q+1}^2 + \dots + 0 \cdot z_n^2.$$

其中  $p$  称为  $f$  的正惯性指数,  $q$  称为  $f$  的负惯性指数, 显然  $p + q = r(\mathbf{A})$ .

**惯性定理** 任意二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  总可以经过适当的可逆线性变换化成规范形, 其规范形是唯一的, 与所选的可逆线性变换无关, 即正平方项个数  $p$ , 负平方项个数  $q$  由  $f$  唯一确定.

**例 12.1** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $\mathbf{A}$  是三阶实对称矩阵), 在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  ( $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $\mathbf{Q}$  是正交矩阵) 下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 且  $\mathbf{Q}$  的第 3 列为  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ , 求  $f(x_1, x_2, x_3)$ .

**精解** 实际上只要算出  $\mathbf{A}$  即可.

由题设知  $A$  有特征值为  $\lambda = 1$  (二重) 和  $\lambda = 0$ , 且对应  $\lambda = 0$  的特征向量为  $\xi_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ , 于是由  $A$  是实对称矩阵知, 对应  $\lambda = 1$  的特征向量  $\alpha = (a, b, c)^T$  应满足

$$\xi_3 \cdot \alpha = 0, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c = 0.$$

从而可取  $\alpha = \xi_1 = (0, 1, 0)^T$  和  $\alpha = \xi_2 = (-1, 0, 1)^T$ .

显然  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  两两正交, 现将它们单位化:

$$\varepsilon_1 = \xi_1 = (0, 1, 0)^T,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,$$

$$\varepsilon_3 = \xi_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T.$$

$$\text{于是 } Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 并且}$$

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } A &= Q \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以所求的  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3$ .

**例 12.2** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

(1) 求  $f$  的矩阵的所有特征值;

(2) 若  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

**精解** (1) 由于  $f$  的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix},$$

所以由  $|\lambda E - A|$  (其中  $E$  是三阶单位矩阵)

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a-1) \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 [\lambda - (a-1)] - 2(\lambda - a) \\ &= [\lambda - (a-2)](\lambda - a)[\lambda - (a+1)] = 0 \end{aligned}$$

得  $A$  的特征值为  $a-2, a, a+1$  (由小到大排列).

(2) 由  $f$  的规范形是  $y_1^2 + y_2^2$ , 所以  $A$  有两个正特征值和一个零特征值, 从而  $a-2=0$ , 即  $a=2$ .

**例 12.3** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$  的秩为 2.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求正交变换  $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ , 把  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形;

(3) 求方程  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解.

**精解** (1)  $f$  的秩即为它的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的秩, 所以由题设知  $r(A) = 2$ .

从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8a = 0, \text{ 由此得到 } a = 0.$$

(2) 将  $a=0$  代入  $A$  得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

记 3 阶单位矩阵为  $E$ , 则由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda = 0, 2$  (二重).

记对应  $\lambda = 0$  的特征向量为  $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3)^T$ , 则它满足

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 即 } \begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

所以可取  $\xi_1 = (1, -1, 0)^T$ .

设对应  $\lambda = 2$  的特征向量为  $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3)^T$ , 则由  $A$  是实对称矩阵知

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = 0, \text{ 即 } b_1 - b_2 = 0,$$

所以可以取  $\xi_2 = \alpha_2 = (1, 1, 0)^T$ ,  $\xi_3 = \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ .

显然,  $\xi_1, \alpha_2, \alpha_3$  两两正交, 现将它们单位化:

$$\varepsilon_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T,$$

$$\varepsilon_3 = \alpha_3 = (0, 0, 1)^T.$$

$$\text{记 } Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则 } x = Qy \text{ (其中 } y = (y_1, y_2, y_3)^T \text{) 将 } f(x_1,$$

$x_2, x_3)$  化为标准形, 即  $f = 2y_2^2 + 2y_3^2$ .

(3) 由(2)知  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  即为  $2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$ . 由此得到

$$y_1 = k \text{ (任意常数)}, y_2 = y_3 = 0.$$

$$\text{因此由 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 得 } f(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ 的解为 } x_1 =$$

$$c, x_2 = -c, x_3 = 0 \left( \text{这里 } c = \frac{k}{\sqrt{2}} \right).$$

**例 12.4** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$ .

(1) 经正交变换  $x = Qy$  (其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $Q$  是正交矩阵) 化成标准形  $f = y_2^2 + 2y_3^2$ , 求常数  $\alpha, \beta$ ;

(2) 经可逆线性变换  $x = Py$  (其中  $P$  是可逆矩阵) 化为标准形  $f = y_2^2 + 2y_3^2$ , 求常数  $\alpha, \beta$ .

**精解** 记  $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$  的矩阵为  $A$ , 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 经正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  后  $f = y_2^2 + 2y_3^2$  知  $A$  有特征值  $\lambda = 0, 1, 2$ . 于是有

$$\begin{cases} |0 \cdot E - A| = 0, \\ |1 \cdot E - A| = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

其中  $E$  是 3 阶单位矩阵.

由式(1)得  $(\alpha - \beta)^2 = 0$ , 即  $\alpha = \beta$ .

$$\text{由式(2)} \quad \begin{vmatrix} 0 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -1 & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{这里已把 } \beta = \alpha \text{ 代入}) \text{ 得 } \alpha = 0.$$

因此所求的  $\alpha, \beta$  均为零.

(2) 经过可逆线性变换  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  后  $f = y_2^2 + 2y_3^2$  知  $A$  的秩为 2 (此时,  $A$  未必有特征值  $\lambda = 0, 1, 2$ ). 于是对  $A$  施行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & \beta - \alpha \\ 0 & \beta - \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

知  $\beta - \alpha = 0$  且  $1 - \alpha^2 \neq 0$ , 即  $\alpha = \beta$ , 但它们都不能为  $-1$  及  $1$ .

**例 12.5** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_2$  ( $b > 0$ ) 经正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  (其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $\mathbf{Q}$  是 3 阶正交矩阵) 后化为标准形  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ , 其中  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 4$ .

(1) 求常数  $a, b$  的值;

(2) 用可逆线性变换将  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为规范形, 并求出这个可逆线性变换.

**精解** (1)  $f$  的矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是它的特征值, 于是由题设知

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} A = a + 2 + (-2) = 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = -2(2a - b^2) = 4, \end{cases} \quad \text{由此可得 } a = 1, b = 2 \text{ (利用 } b > 0 \text{)}.$$

(2) 将  $a = 1, b = 2$  代入  $f(x_1, x_2, x_3)$ , 并对它配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 \\ &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 2x_2^2 - 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$



于是令  $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = \sqrt{2}x_2, \\ y_3 = \sqrt{2}x_3, \end{cases}$  则  $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$  (规范形), 并且所求的可逆线性变换

$$\text{为} \begin{cases} x_1 = y_1 - \sqrt{2}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3. \end{cases}$$

### 三、概率论与数理统计

#### 13. 各类随机事件概率的计算

随机事件的概率通常应用以下公式计算:

(1) 逆事件概率公式(逆概公式)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

(2) 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

特别当  $A, B$  互不相容时,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC),$$

特别当  $A, B, C$  两两互不相容时,  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ .

(3) 减法公式

$$P(A - B) = P(A) - P(AB),$$

特别当  $B \subset A$  时,  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ .

(4) 乘法公式

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B|A), & P(A) > 0, \\ P(B)P(A|B), & P(B) > 0. \end{cases}$$

(5) 全概率公式

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是与事件  $B$  有关的完全事件组, 且  $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 则

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

但是在考题中出现的往往是计算由随机变量表示的随机事件的概率, 此时不仅需应用以上的公式, 更需要利用随机变量的分布函数、概率分布(或概率密度).

**例 13.1** 有 10 个相同的罐子, 其中有 3 个罐子都装有 1 个黑球 1 个红球, 有 6 个罐子都装有 2 个黑球 2 个红球, 有 1 个罐子装有 9 个红球 1 个黑球(球除颜色外, 其余相同). 现任取一个罐子, 再从这个罐子中任取一球, 结果发现取出的是红球, 求这个红球是从装有 10 个球的罐子中取出的概率.

**精解** 记  $A = \{\text{任取一球是红球}\},$

$B_1 = \{\text{任取的罐子是装有 2 个球的}\},$

$B_2 = \{\text{任取的罐子是装有 4 个球的}\},$

$B_3 = \{\text{任取的罐子是装有 10 个球的}\},$

则要求的概率为

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3A)}{P(A)} = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)},$$

其中,  $B_1, B_2, B_3$  是与  $A$  有关的完全事件组, 且  $P(B_1) = \frac{3}{10}, P(B_2) = \frac{6}{10}, P(B_3) = \frac{1}{10}$ , 所以由

全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{50}. \end{aligned}$$

$$\text{因此, 所求的概率为 } P(B_3|A) = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{9}{10}}{\frac{27}{50}} = \frac{1}{6}.$$

**例 13.2** 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ . 记

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生,} \end{cases}$$

求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布.

**精解** 本题实际上是计算随机事件概率的问题.

$X, Y$  都只能取 0 和 1 两个值, 且

$$P(X=1, Y=1) = P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

$$P(X=1, Y=0) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=0, Y=1) = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - \frac{1}{12}, \quad (1)$$

其中, 由  $P(AB) = P(B)P(A|B)$  得  $\frac{1}{12} = P(B) \times \frac{1}{2}$ , 即  $P(B) = \frac{1}{6}$ . 将它代入式(1)得

$$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$P(X=0, Y=0) = 1 - P(X=1, Y=1) - P(X=1, Y=0) - P(X=0, Y=1)$$

$$= 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

因此,  $(X, Y)$  的概率分布为

$\begin{matrix} & Y \\ X \end{matrix}$		0	1
		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
0		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

**例 13.3** 设随机变量  $X \sim U[-1, 3]$ , 求随机变量  $Y = X^2$  的分布函数  $F_Y(y)$ .

**精解**  $X$  的概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-1, 3] \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  按定义计算  $F_Y(y)$ , 所以本题实际上

是计算随机事件概率的问题.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$ . 下面计算概率  $P(X^2 \leq y)$ .

当  $y < 0$  时,  $P(X^2 \leq y) = P(\emptyset) = 0$ .

当  $y \geq 0$  时,  $P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ , 于是

当  $0 \leq y < 1$  时,  $P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} \sqrt{y}$ ;

当  $1 \leq y < 9$  时,  $P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(\sqrt{y} + 1)$ ;

当  $y \geq 9$  时,  $P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^3 \frac{1}{4} dx = 1$ .

$$\text{因此 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{2}\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{4}(\sqrt{y} + 1), & 1 \leq y < 9, \\ 1, & y \geq 9. \end{cases}$$

**例 13.4** 计算下列各题:

(1) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  的概率分布为  $P(X=i) = \frac{1}{3} (i = -1, 0, 1)$ ,  $Y$  的概率密度为  $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 记  $Z = X + Y$ , 求概率  $P\left(Z^2 \leq \frac{1}{2}, X=0\right)$ .

(2) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求概率  $P\left(\frac{1}{2}X^2 \leq Y\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{精解 } (1) P\left(Z^2 \leq \frac{1}{2}, X=0\right) &= P\left((X+Y)^2 \leq \frac{1}{2}, X=0\right) = \frac{1}{3} P\left(Y^2 \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right) \\ &= \frac{1}{3} P\left(Y^2 \leq \frac{1}{2}\right) \quad (\text{由于 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \\ &= \frac{1}{3} P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq Y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f_Y(y) dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-y} dy = \frac{1}{3} (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}). \end{aligned}$$

(2) 记  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $D_1 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}x^2 \leq y\}$ , 则  $D \cap D_1$  如图 C-13-1 的阴影部分所示.

所以

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}X^2 \leq Y\right) &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D \cap D_1} (2 - x - y) d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^1 (2 - x - y) dy \end{aligned}$$

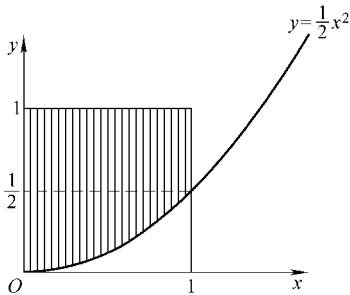


图 C-13-1

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}(2-x-y)^2 \Big|_{\frac{1}{2}x^2}^1 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left(2-x-\frac{1}{2}x^2\right)^2 - (1-x)^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(3-2x-2x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4\right) dx = \frac{49}{60}.
\end{aligned}$$

**例 13.5** 设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $G$  上服从均匀分布, 其中  $G$  是由  $x$  轴,  $y$  轴以及直线  $y = 2x + 1$  围成的三角形. 求条件概率  $P\left(-\frac{1}{8} < X \leq 0 \mid Y = \frac{1}{2}\right)$ .

**精解** 先算出  $(X, Y)$  的条件概率密度  $f_X\left(x \mid \frac{1}{2}\right)$ . 为此画出  $G$  的图形如图 C-13-2 阴影部分所示. 由于  $(X, Y)$  的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

特别地,  $f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 4, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

此外,  $f_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{1}{2}\right) dx = \int_{-\frac{1}{4}}^0 4 dx = 1$ ,

所以  $f_X\left(x \mid \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_Y\left(\frac{1}{2}\right)} = f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 4, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  因此

$$P\left(-\frac{1}{8} < X \leq 0 \mid Y = \frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{8}}^0 f\left(x, \frac{1}{2}\right) dx = \int_{-\frac{1}{8}}^0 4 dx = \frac{1}{2}.$$

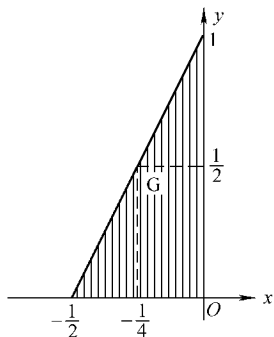


图 C-13-2

## 14. 各种概率密度的计算

### 14.1 一维连续型随机变量的概率密度计算

设  $X$  是连续型随机变量,  $f(x)$  与  $F(x)$  是它的概率密度与分布函数, 则

$$f(x) = \begin{cases} \frac{dF(x)}{dx}, & \text{在 } F(x) \text{ 的可导点处,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

### 14.2 二维连续型随机变量的各种概率密度的计算

设  $(X, Y)$  是二维连续型随机变量,  $f(x, y)$  与  $F(x, y)$  是它的概率密度与分布函数, 则

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \text{在 } F(x, y) \text{ 可二阶偏导的点处,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$(X, Y)$  的边缘概率密度:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

$(X, Y)$  的条件概率密度:

对  $f_Y(y) \neq 0$  的任意  $y$  有  $f_X\left(x \mid y\right) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ ,

对  $f_X(x) \neq 0$  的任意  $x$  有  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ .

**例 14.1** 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求  $Y = X^2$  的概率密度.

**精解** 先计算  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ , 然后求导算出  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ .

按分布函数的定义  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$ .

当  $y < 0$  时,  $P(X^2 \leq y) = P(\emptyset) = 0$ ;

当  $y \geq 0$  时,  $P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ . 于是

$$\text{当 } 0 \leq y < 1 \text{ 时, } P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} \sqrt{y};$$

$$\text{当 } 1 \leq y < 4 \text{ 时, } P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{y};$$

$$\text{当 } y \geq 4 \text{ 时, } P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^2 \frac{1}{4} dx = 1.$$

$$\text{因此, } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4} \sqrt{y}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{y}, & 1 \leq y < 4, \\ 1, & y \geq 4, \end{cases} \quad \text{从而 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

**例 14.2** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求: (1)  $(X, Y)$  的边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ ;

(2) 随机变量  $Z = 2X - Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

**精解** (1) 记  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 2x\}$  (如图 C-14-1 阴影部分所示), 则  $f(x, y)$  仅在  $D$  上取值为 1, 在  $xOy$  平面的其他部分取值为 0. 于是

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}y, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

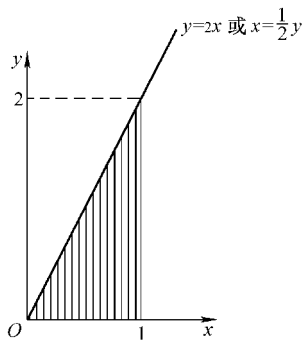


图 C-14-1

(2)  $Z = 2X - Y$  的概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx,$$

其中  $f(x, 2x - z) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < 2x - z < 2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < z < 2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$

所以,  $f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\frac{1}{2z}}^1 dx, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}z, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$

**例 14.3** 设在随机变量  $Y = y \in (0, 1)$  的条件下, 随机变量  $X$  的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

而  $Y$  的概率密度为  $f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 求  $X$  的概率密度  $f_X(x)$ .

**精解** 先算出  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ , 然后再计算  $f_X(x)$ .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{y^3} \cdot 5y^4, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 15x^2y, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

所以,  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^1 15x^2y dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{15}{2}x^2(1 - x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$

**例 14.4** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} xe^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求随机变量  $U = \max\{X, Y\}$  的概率密度  $f(u)$ .

**精解** 记  $U$  的分布函数为  $F(u)$ , 则

$$\begin{aligned} F(u) &= P(U \leq u) = P(\max\{X, Y\} \leq u) \\ &= P(X \leq u, Y \leq u) = \iint_{D_u} \varphi(x, y) d\sigma, \end{aligned}$$

其中  $D_u = \{(x, y) | x \leq u, y \leq u\}$ . 此外, 记  $D = \{(x, y) | 0 < x < y\}$ . 于是

当  $u \leq 0$  时,  $\iint_{D_u} \varphi(x, y) d\sigma = 0$ .

当  $u > 0$  时,  $\iint_{D_u} \varphi(x, y) d\sigma = \iint_{D_u \cap D} xe^{-y} d\sigma$  (其中  $D_u \cap D = \{(x, y) | 0 < x < y \leq u\}$ )

$$\begin{aligned} &= \int_0^u dx \int_x^u xe^{-y} dy = \int_0^u x(e^{-x} - e^{-u}) dx \\ &= \int_0^u xe^{-x} dx - \frac{1}{2}u^2 e^{-u}, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } F(u) = \begin{cases} \int_0^u x e^{-x} dx - \frac{1}{2} u^2 e^{-u}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{因此, } f(u) = \begin{cases} \frac{d}{du} \left( \int_0^u x e^{-x} dx - \frac{1}{2} u^2 e^{-u} \right), & u > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} u^2 e^{-u}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

### 15. 常用样本统计量分布的计算

#### 15.1 常用分布

##### (1) 正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$  是以  $\mu, \sigma^2$  为参数的正态分布, 当  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  时,  $EX = \mu, DX = \sigma^2$ .

##### (2) $\chi^2$ 分布

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立且都服从  $N(0, 1)$  的随机变量, 则

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n) \quad (\text{即自由度为 } n \text{ 的 } \chi^2 \text{ 分布}), \text{ 并且 } EY = n, DY = 2n.$$

##### (3) $t$ 分布

设随机变量  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$  (即自由度为  $n$  的  $t$  分布).

##### (4) $F$ 分布

设随机变量  $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$  (即自由度为  $n_1, n_2$  的  $F$  分布).

#### 15.2 常用样本统计量分布的计算

##### (1) 一个正态总体情形

设简单随机样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{样本均值}), S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{样本方差}), \text{ 则 } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ 即}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1), \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$



(2) 两个正态总体情形

设简单随机样本  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  分别来自相互独立正态总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2, \quad S_w^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2],$$

则 
$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

**例 15.1** 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自总体  $X \sim N(0, 2^2)$  的简单随机样本, 并且统计量  $U = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2 \sim \chi^2(n)$  ( $a > 0, b > 0$ ), 求常数  $a, b$  及自由度  $n$  之值.

**精解** 由于  $U$  只有两个平方项, 所以  $n = 2$ , 下面计算  $a, b$  之值.

按  $\chi^2$  分布的定义, 要使  $U \sim \chi^2(2)$ , 必须  $\sqrt{a}(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 1)$ ,  $\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 1)$ . 于是,

$$\text{由 } D[\sqrt{a}(X_1 - 2X_2)] = a(4 + 4 \times 4) = 20a = 1 \text{ 得 } a = \frac{1}{20},$$

$$\text{由 } D[\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4)] = b(9 \times 4 + 16 \times 4) = 100b = 1 \text{ 得 } b = \frac{1}{100}.$$

**例 15.2** 设  $X_1, X_2, \dots, X_9$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 记

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2,$$

求统计量  $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$  所服从的分布.

**精解** 由于  $E[\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)] = \sqrt{2}(EY_1 - EY_2) = \sqrt{2}(\mu - \mu) = 0$ ,

$$D[\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)] = 2(DY_1 + DY_2) \quad (\text{由于 } Y_1 \text{ 与 } Y_2 \text{ 相互独立})$$

$$= 2\left(\frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3}\right) = \sigma^2.$$

所以 
$$\frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

由于  $S^2$  是样本  $X_7, X_8, X_9$  的方差, 所以  $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ . 此外,  $\frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma}$  与  $\frac{2S^2}{\sigma^2}$  相互独立

(这是由于  $Y_1, Y_2$  都与  $S^2$  相互独立).

因此, 由  $t$  分布定义得  $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma} \bigg/ \sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}} \sim t(2)$ .

**例 15.3** 设  $X_1, X_2, \dots, X_{15}$  是来自总体  $(0, 2^2)$  的简单随机样本, 求统计量  $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)}$  所服从的分布.

**精解** 由于  $\frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2) \sim \chi^2(10)$ ,  $\frac{1}{4}(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2) \sim \chi^2(5)$ , 所以由  $F$  分布定义得

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)} = \frac{\frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2)/10}{\frac{1}{4}(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)/5} \sim F(10, 5).$$

**例 15.4** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$  是来自总体  $X \sim N(0, 1)$  的简单随机样本, 记  $Y_i = X_i - \bar{X} (\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 求:

(1) 求统计量  $Y_1$  所服从的分布;

(2) 统计量  $Y_1$  与  $Y_n$  的协方差  $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$ .

**精解** (1) 由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且都服从  $N(0, 1)$ , 所以

$$Y_1 = X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

服从正态分布.

$$\text{由于 } EY_1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)EX_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n EX_i = 0,$$

$$DY_1 = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1\right] + D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}(n-1) = \frac{n-1}{n}.$$

因此,  $Y_1 \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\right)$ .

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{Cov}(Y_1, Y_n) &= \text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X}) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_n) - \text{Cov}(X_1, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, X_n) + \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\ &= 0 - 2\text{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) + D\bar{X} \\ &= -2\text{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n}X_1\right) + \frac{1}{n} \\ &= -\frac{2}{n}DX_1 + \frac{1}{n} = -\frac{2}{n} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

**例 15.5** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本, 记  $T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$  (其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ), 求统计量  $T$  的方差.

**精解** 由  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立知  $\bar{X}^2$  与  $\frac{1}{n}S^2$  相互独立, 所以

$$DT = D(\bar{X}^2) + D\left(\frac{1}{n}S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2}D(S^2). \quad (1)$$

其中, 由  $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$  知  $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$ , 从而有  $(\sqrt{n}\bar{X})^2 \sim \chi^2(1)$ , 因此

$$D(\bar{X}^2) = D\left[\frac{1}{n} \cdot (\sqrt{n}\bar{X})^2\right] = \frac{1}{n^2} \cdot 2 = \frac{2}{n^2}; \quad (2)$$

由  $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$  知

$$D(S^2) = D\left[\frac{1}{n-1} \cdot (n-1)S^2\right] = \frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2] = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n-1}. \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$DT = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

## 16. 点估计量的计算与评判

### 16.1 点估计量的计算

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\theta$  是总体的未知参数.

#### (1) 矩估计量的计算方法

$\theta$  的矩估计量通常按以下方法计算:

计算  $EX$ , 并令  $EX = \bar{X}$ , 由此算出的  $\theta$ , 即为  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ .

#### (2) 最大似然估计量的计算方法

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 构造似然函数

$$L(\theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)\cdots f(x_n; \theta) \quad (\text{其中 } f(x_i; \theta) \text{ 是 } X_i \text{ 的概率密度}).$$

对  $\ln L(\theta)$  求导, 且令  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ , 解此方程得到  $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 将其中的  $x_1,$

$x_2, \dots, x_n$  对应地换成  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 即算得  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}$ .

### 16.2 点估计量常用的评判标准

#### (1) 无偏性

设  $\hat{\theta}$  是总体未知参数  $\theta$  的估计量, 如果  $E\hat{\theta} = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计量.

#### (2) 有效性

设  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  是总体未知参数  $\theta$  的两个无偏估计量, 如果  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ , 则称  $\hat{\theta}_1$  是比  $\hat{\theta}_2$  有效的估计量.

**例 16.1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu_0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 其中  $\mu_0$  已知,  $\sigma^2 > 0$  未知.  $\bar{X}$  与  $S^2$  分别表示样本均值和样本方差.

(1) 求参数  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$ ;

(2) 计算  $E(\hat{\sigma}^2)$  和  $D(\hat{\sigma}^2)$ .

**精解** (1) 总体的概率密度为  $f(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} (-\infty < x < +\infty)$ , 记样本的观

察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数为

$$\begin{aligned} L(\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_2-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_n-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \ln L(\sigma^2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2.$$

$$\text{由此得到 } \frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2.$$

令  $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = 0$  得  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$ . 从而  $\sigma^2$  的最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2.$$

(2) 由于  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \sim \chi^2(n)$ , 所以

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} E\left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \cdot n = \sigma^2, \\ D(\hat{\sigma}^2) &= D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2\right] = \frac{\sigma^4}{n^2} D\left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2\right] = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}. \end{aligned}$$

**例 16.2** 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数  $\lambda$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求参数  $\lambda$  的矩估计量;

(2) 求参数  $\lambda$  的最大似然估计量.

**精解** (1)  $X$  的数学期望为

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \lambda) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda E(T^2) \quad (\text{其中 } T \sim E(\lambda)) \\ &= \lambda [DT + (ET)^2] = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

令  $EX = \bar{X}$ , 即  $\frac{2}{\lambda} = \bar{X}$ . 由此得到  $\lambda$  的矩估计量为  $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$ .

(2) 记  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= f(x_1; \lambda) f(x_2; \lambda) \cdots f(x_n; \lambda) \\ &= \begin{cases} \lambda^2 x_1 e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda^2 x_2 e^{-\lambda x_2} \cdots \lambda^2 x_n e^{-\lambda x_n}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n) \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \end{aligned}$$

显然  $L(\lambda)$  只能在  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  时才能取到最大值, 所以可以化简  $L(\lambda)$  为

$$L(\lambda) = \lambda^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n) e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

即

$$\ln L(\lambda) = 2n \ln \lambda + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\text{由此可得} \quad \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\text{令} \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = 0 \text{ 得 } \lambda = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{X}} \left( \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right), \text{ 因此 } \lambda \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}.$$

**例 16.3** 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\theta (0 < \theta < 1)$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  是样本均值.

(1) 求  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ ;

(2) 判断  $4\bar{X}^2$  是否为  $\theta^2$  的无偏估计量.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad (1) \quad EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 x \cdot \frac{1}{2(1-\theta)} dx \\ &= \frac{\theta}{4} + \frac{1+\theta}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

$$\text{令 } EX = \bar{X} \text{ 得 } \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta = \bar{X}, \text{ 所以 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ 由于 } E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D\bar{X} + (E\bar{X})^2]$$

$$\begin{aligned} &= 4 \left[ \frac{1}{n} DX + (EX)^2 \right] = \frac{4}{n} DX + 4 \left( \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4}{n} DX + \frac{1}{4} + \theta + \theta^2 > \theta^2 \quad (\text{因为 } DX \geq 0). \end{aligned}$$

所以,  $4\bar{X}^2$  不是  $\theta^2$  的无偏估计量.

**例 16.4** 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  是未知参数. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $X$  的一个简单随机样本, 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}$ , 并求  $E\hat{\theta}$ .

**精解** 记样本的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 作似然函数

$$L(\theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x_1-\theta)}, & x_1 \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \cdot \begin{cases} 2e^{-2(x_2-\theta)}, & x_2 \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \cdots \cdot \begin{cases} 2e^{-2(x_n-\theta)}, & x_n \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\theta}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然  $L(\theta)$  的最大值只能在  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \theta$  处取到, 所以可化简  $L(\theta)$  为

$$L(\theta) = 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\theta}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq \theta,$$

显然它是  $\theta$  的单调增加函数, 在  $\theta = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  处取最大值. 从而  $\theta$  的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \stackrel{\text{记}}{=} X_{(1)}.$$

由于  $X$  的分布函数为  $F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  所以  $X_{(1)}$  的分布函数

$$F_{(1)}(x; \theta) = 1 - [1 - F(X; \theta)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

因此,  $X_{(1)}$  的概率密度为

$$f_{(1)}(x; \theta) = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{从而 } E\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{(1)}(x; \theta) dx = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 2ne^{-2n(x-\theta)} dx$$

$$\stackrel{\text{令 } t = x - \theta}{=} \int_0^{+\infty} (t + \theta) \cdot 2ne^{-2nt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t \cdot 2ne^{-2nt} dt + \theta \int_0^{+\infty} 2ne^{-2nt} dt$$

$$= ET + \theta \quad (\text{其中 } T \sim E(2n))$$

$$= \frac{1}{2n} + \theta.$$

**例 16.5** 设总体  $X$  的分布函数为  $F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中参数  $\alpha > 0$ ,

$\beta > 1$  均未知. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  是该样本的均值.

(1) 当  $\alpha = 1$  时, 求  $\beta^2$  的矩估计量;

(2) 当  $\beta = 2$  时, 求  $\alpha$  的最大似然估计量, 并判别它的无偏性.

**精解**  $X$  的概率密度为

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha^\beta \beta x^{-(\beta+1)}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 当  $\alpha = 1$  时,  $f(x; 1, \beta) = \begin{cases} \beta x^{-(\beta+1)}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  所以

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; 1, \beta) dx = \int_1^{+\infty} \beta x^{-\beta} dx = \frac{\beta}{\beta - 1}.$$

令  $EX = \bar{X}$ , 即  $\frac{\beta}{\beta - 1} = \bar{X}$ . 解此方程得  $\beta = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - 1}$ . 从而  $\beta^2$  的矩估计量为  $\hat{\beta}^2 = \left( \frac{\bar{X}}{\bar{X} - 1} \right)^2$ .

(2) 当  $\beta = 2$  时,  $f(x; \alpha, 2) = \begin{cases} 2\alpha^2 x^{-3}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$  记样本的观察值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似

然函数

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \begin{cases} 2\alpha^2 x_1^{-3}, & x_1 \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \cdot \begin{cases} 2\alpha^2 x_2^{-3}, & x_2 \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \cdots \begin{cases} 2\alpha^2 x_n^{-3}, & x_n \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2^n \alpha^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-3}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

显然  $L(\alpha)$  的最大值只能在  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \alpha$  上取到, 所以可化简似然函数为

$$L(\alpha) = 2^n \alpha^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-3}, x_1, x_2, \dots, x_n \geq \alpha.$$

容易知道  $L(\alpha)$  是单调增加函数, 所以当  $\alpha = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  时  $L(\alpha)$  取最大值.

因此,  $\alpha$  的最大似然估计量  $\hat{\alpha} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

下面考虑  $\hat{\alpha}$  的无偏性.

$$\beta = 2 \text{ 时, } F(x; \alpha, 2) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

所以  $\hat{\alpha}$  的分布函数为

$$F_{\hat{\alpha}}(y) = 1 - [1 - F(y; \alpha, 2)]^n = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{2n}, & y \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

从而  $\hat{\alpha}$  的概率密度为

$$f_{\hat{\alpha}}(y) = \begin{cases} \frac{2n\alpha^{2n}}{y^{2n+1}}, & y \geq \alpha, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由于  $E\hat{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\hat{\alpha}}(y) dy = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{2n\alpha^{2n}}{y^{2n}} dy = \frac{2n}{2n-1} \cdot \alpha \neq \alpha$ , 所以  $\hat{\alpha}$  不是  $\alpha$  的无偏估计量.

## 参 考 文 献

- [1] 同济大学应用数学系. 高等数学: 上册[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学: 下册[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [3] 同济大学应用数学系. 工程数学——线性代数[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [4] 盛骤, 等. 概率论与数理统计[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [5] 陈启浩, 等. 高等数学精讲精练[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.
- [6] 陈治中. 线性代数精讲精练[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.
- [7] 陈启浩. 概率论与数理统计精讲精练[M]. 2 版. 北京: 北京师范大学出版社, 2010.



