2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学（一）

名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题

难易匹配真题

符合命题趋势

不止是模拟，更接近实战

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（一）名师精选全真模拟冲刺题 10 套

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学一”考试的学生．书中包含了10套精心设计的模拟试题，题目难度稍高于考研真题．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的解答部分，不仅给出详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的相关教学人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（一）名师精选．全真模拟冲刺题10套/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015.5

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978－7－111－48611－4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ.①013－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第269302号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫
版式设计：霍永明　责任校对：张莉娟
封面设计：路恩中　责任印制：刘　岚
北京京丰印刷厂印刷
2015年4月第2版·第1次印刷
184mm×260mm·13印张·314千字
0 001—3 000册
标准书号：ISBN 978－7－111－48611－4
定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
010-88379203	金 书 网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

前　　言

深入地读完我们编写的 2016 全国硕士研究生入学统一考试备考用书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行 10 场“实战演习”——认真、独立地做完 10 套模拟试题(各套模拟试题的难度稍高于考研真题)，作为最后的冲刺.

书中的 10 套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的题目新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这 10 套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的词语指明了与本题有关的概念、方法等值得注意的考点．当然，我们在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看解答，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进发. 使用本书的实践表明：弄通模拟试题，不想拿高分都难.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，也欢迎考生们对本书提出宝贵意见，可发邮件到 cqh-shuxue@ gmail. com，非常感谢!

北京邮电大学教授
陈启浩

目　　录

模拟试题（一）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上

（A）处处可导.　　　　（B）恰好有一个不可导点.

（C）恰好有两个不可导点.　　　　（D）至少有三个不可导点.

[　　]

（2）设函数 $F(x)=\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\,\mathrm{d}t$，则 $F''(x)$ 为

（A）$4\sin 4x$.　　（B）$4\cos 4x$.　　（C）$-4\cos 4x$.　　（D）$-4\sin 4x$.

[　　]

（3）设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内具有二阶连续偏导数，且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则以下结论不正确的是

（A）当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值.

（B）当 $C>0$，$AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值.

（C）当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

（D）当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

[　　]

（4）设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ z\geqslant 0\}$（其中 $R>0$）和 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$，则下列四式中正确的是

（A）$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}x\,\mathrm{d}v$.　　（B）$\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}y\,\mathrm{d}v$.

（C）$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}z\,\mathrm{d}v$.　　（D）$\iiint\limits_{\Omega}xyz\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\,\mathrm{d}v$.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶可逆矩阵，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^*\\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$ 等于

（A）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{A}\\ 3\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}\\ \frac{1}{4}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{B}\\ 3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}\\ \frac{1}{4}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

[　　]

（6）已知矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 及 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则

（A）$t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　（B）$t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

（C）$t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　（D）$t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

[　　]

（7）在 10 件产品有 4 件一等品，6 件二等品. 现从中任取两次，每次取一件，取后不放回，已知其中至少有一件是一等品，则两件都是一等品的概率 p 为

（A）$\dfrac{1}{5}$.　　（B）$\dfrac{2}{5}$.　　（C）$\dfrac{3}{5}$.　　（D）$\dfrac{4}{5}$.

[　　]

（8）设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且同服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，即它的概率密度同为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则对任意实数 x，下列结论中正确的为

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x\neq0)$，则方程 $f(x)=0$ 的实根个数为________.

（10）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\,dx$，则定积分 $\int_0^1 f(x)\,dx=$ ________.

（11）设 $z=f(e^x,\ x^2+y^2)$，其中二元函数 $f(u,\ v)$ 可微，且 $y=y(x)$ 是由方程 $e^x+\sin y=x$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dz}{dx}=$ ________.

（12）微分方程 $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$ 的通解为________.

（13）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 4 阶矩阵，它们相似，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -2，-1，1，2，则行列式 $|\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_4|=$ ________.

（14）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ Y 的概率分布为 $P(Y=0)=\dfrac{1}{3}$,

$P(Y=1)=\dfrac{2}{3}$，则 $E(X^3+2Y^2)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+y=5\mathrm{e}^{2x}+2\sin x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 由递推式 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)(n=1, 2, \cdots)$确定，求

(Ⅰ) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(Ⅱ) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}x^n$ 的收敛域.

(17)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + x + 3y\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴围成的平面图形，求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导，且 $0 < f(x) < 1$ 及 $f'(x) \neq 1$，证明：存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f(\xi) = \xi$.

(19)(本题满分 10 分)

设二元函数$f(x, y)$在点$(0, 0)$的某个邻域内有定义，且$f(0, 0)=0$，$f_x'(0, 0)=3$，$f_y'(0, 0)=-1$. 记曲面$z=f(x, f(x, y))$在点$(0, 0)$处的切平面为π，求曲线积分

$$\oint_C xy\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z,$$

其中C是π与曲面S：$z=\frac{3}{4}-x^2-y^2$的交线，且从z轴正向看去，C是逆时针的.

(20)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=1,\\x_1-2x_2+x_3=2,\\ax_1+bx_2+cx_3=0\end{cases}$有两个不同的解，且$a$为系数矩阵的秩. 求(Ⅰ)的通解及向量$\boldsymbol{\xi}=(a, b, c)^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\eta}_1=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$下的坐标.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\ (c \geqslant 2)$ 与 $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ 中有且仅有一个是正定二次型，求常数 c，并用可逆线性变换将正定二次型化为规范形以及用正交变换将非正定二次型化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设有随机变量 X 与 Y，其中 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且在 $Y = y$ 的条件下，X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 求 DX 及 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $Z = XY$，其中随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}(\lambda > 0)$，$Y$ 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

. 又设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是来自 Z 的一个简单随机样本的观测值. 求 Z 的未知参数 λ 的最大似然估计值.

模拟试题（二）

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $y=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$，则 $y^{(10)}$ 为

（A）$\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.　　（B）$\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

（C）$\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.　　（D）$\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

[　　]

（2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=$

（A）$\dfrac{3}{4}$.　　（B）$-\dfrac{1}{4}$.　　（C）$-\dfrac{3}{4}$.　　（D）$\dfrac{1}{4}$.

[　　]

（3）设二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1$，$f_y'(0,0)=2$，$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

（A）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

（B）$df(x,y)\big|_{(0,0)}=dx+2dy$.

（C）$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{(0,0)}=\cos\alpha+2\sin\alpha$.

（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负向的方向导数为 -1.

[　　]

（4）分别记函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的余弦级数与正弦级数之和函数为 $s_1(x)$ 与 $s_2(x)(-\infty<x<+\infty)$，则 $s_1(-3)+s_2(6)$ 为

（A）-2.　　（B）0.　　（C）1.　　（D）2.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*$ 等于

（A）$\boldsymbol{A}$.　　（B）$\boldsymbol{A}^*$.　　（C）$|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　（D）$|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.

[　　]

（6）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，则下列选项中为正定矩阵的是

（A）$\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$.　　（B）$\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$.

（C）$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.　　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N\left(2\mu,\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$. 记 $p_1=P(X\geqslant\mu-\sigma)$，$p_2=P\left(Y\leqslant 2\mu+\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$，则

(A) $p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\dfrac{1}{2}<p_1<p_2$.

(C) $p_2<\dfrac{1}{2}<p_1$.　　(D) $p_1=p_2>\dfrac{1}{2}$.

[　　]

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则统计量 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

(A) $\dfrac{1}{n}\sigma$，$\dfrac{2}{n}\sigma^4$.　　(B) $\dfrac{1}{n}\sigma^2$，$\dfrac{4}{n}\sigma^4$.

(C) σ^2，$\dfrac{2}{n}\sigma^4$.　　(D) σ^2，$\dfrac{4}{n}\sigma^4$.

[　　]

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)\arctan\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}=$__________.

(10) 定积分 $\int_0^1\arctan\dfrac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x=$__________.

(11) 点 $(0,0,0)$ 到曲面 S：$z=(x-1)^2+y^2$ 在点 $(2,1,2)$ 处切平面 π 的距离 $d=$__________.

(12) 设曲面 S：$z=1-(x^2+y^2)\ (-3\leqslant z\leqslant 1)$，则曲面积分

$$\iint\limits_{S(\text{上侧})}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&4\\1&2&-1&1\\-3&2&2&1\end{pmatrix}$，则矩阵 $(\boldsymbol{A}^2)^*$ 的秩 $=$__________.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则随机变量 $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)=$__________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot (n+1)!}$ 的和.

（16）（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x \sqrt{1+\cos x}} \mathrm{d}x$.

(17)(本题满分 10 分)

证明：$c\geqslant\dfrac{1}{2}$时有$\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})<e^{cx^2}(-\infty<x<+\infty)$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，曲面$S(t)$为半球$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2,z\geqslant 0\}$的表面，它在$xOy$平面上的投影为$D(t)$，$D(t)$的边界曲线为$L(t)$，并设对$t>0$，有

$$\oint_{L(t)}f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s+\oiint_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma.$$

求$f(t)(t\geqslant 0)$的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

已知 $\int_{0,0}^{(t,t^2)} f(x,y)\mathrm{d}x + x\cos y\mathrm{d}y = t^2$,其中二元函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,求 $f(x,y)$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, 求使矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解的常数 a, b, c 以及该方程的所有解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是 3 阶正交矩阵)，使得二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，并写出该标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求(Ⅰ) DX；(Ⅱ)概率 $P\left(X^2+Y^2\leqslant 1\ \middle|\ Y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 $Z=\ln X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，其中 μ，σ^2 是未知参数，又设 Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本. 求 EX 的最大似然估计量.

模拟试题（三）

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}, & -\pi<x<0\\ x^2+x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 的可去间断点个数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

[　　]

（2）当函数 $f(x)=x\ln(x+a)-\dfrac{1}{e}$ 仅有的单调减少区间是 $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$ 时，a 的值为

（A）-2.　　（B）-1.　　（C）0.　　（D）1.

[　　]

（3）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=f'(0)=0$，记

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x du\int_0^u f(t)\,dt, & x\leqslant 0,\\ \int_{-x}^0 \ln(1+f(x+t))\,dt, & x>0,\end{cases}$$

则 $F''(0)$ 为

（A）1.　　（B）$\dfrac{1}{2}$.　　（C）$\dfrac{1}{3}$.　　（D）0.

[　　]

（4）设函数 $f(x)=x-1\,(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2},$$

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为

（A）$(-1,\ 1)$.　　（B）$[-1,\ 1)$.　　（C）$(-1,\ 1]$.　　（D）$[-1,\ 1]$.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶反对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*$ 不为零矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 n 为奇数的

（A）充分而非必要条件.　　（B）必要而非充分条件.

（C）充分必要条件.　　（D）既非充分又非必要条件.

[　　]

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)$ 为

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4　　(D) 5.

[　　]

(7) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则以下结论不正确的是

(A) X 与 Y 相互独立.

(B) $EY=2$.

(C) X 在 $Y=y$ 条件下的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\mathrm{e}^{-x}$.

(D) 关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

[　　]

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $X\sim N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $Z=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2$ 的方差 $D(Z)$ 为

(A) 4.　　(B) 3.　　(C) 2.　　(D) 1.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=$ __________.

(10) 设函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ x\ln x, & x>1,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & |x|\leqslant 1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 则 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\mathrm{d}x=$ __________.

(11) 设二元函数 $f(u, v)$ 具有连续偏导数，且在点 $(1, 0)$ 的充分小邻域内有

$$f(u, v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2}).$$

记 $g(x, y)=f(\mathrm{e}^y, x+y)$，则 $\mathrm{d}g(x, y)\big|_{(0,0)}=$ __________.

(12) 设 $f(x, y)$ 是连续的二元函数，则二次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

在直角坐标系中先 x 后 y 的二次积分为__________.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}^*\end{pmatrix}^{-1}=$

__________.

(14) 设随机变量 X，Y 的概率密度同为 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}t^2, & 0<t<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 已知事件 $A=\{X>a\}$，$B=\{Y>a\}$ 相互独立，且 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，则常数 $a=$ ________.

三、解答题： 15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

分别求 $a=1$ 与 $a=2$ 时微分方程

$$y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$$

的通解.

(16) (本题满分 10 分)

设二元函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y,\\ z(x,0)=x,\\ z(0,y)=y^2.\end{cases}$ 求曲面 S：$z=z(x,y)$ $(x>0)$ 上的点 $P(x_0,y_0,z_0)$，使得 S 在点 P 处的切平面与平面 π：$x+y-z=1$ 平行.

(17)(本题满分 10 分)

设二重积分 $\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 在直角坐标系中的被积函数为 $f(x,\ y)$，其中 $D=\left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$. 求 $f(x,\ y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设 Ω 是由 yOz 平面上直线 $z=0$，$z=2$ 以及曲线 $y^2-(z-1)^2=1$ 围成的平面图形绕 z 轴旋转一周而成的立体，求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$.

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组(A):$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 3,\ 5)^{\mathrm{T}}$ 与向量组(B):$\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,\ 4,\ a)^{\mathrm{T}}$ 等价,

(Ⅰ)求常数 a;

(Ⅱ)对上述 a 的值,求(A)由(B)的线性表示式.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵）使二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. 求

(Ⅰ) 常数 a 及 f 的标准形；

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}^*$ 能否正交相似对角化？如果能，写出使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$；如果不能，说明理由.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度

$$f(x, y)=\begin{cases}Ax^2y, & (x, y)\in G=\{(x, y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1\},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求常数 A 及 $D(2X+3Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^2, & x>\alpha>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设 Z_1，Z_2，…，Z_n 是来自总体 $Z=X^2$ 的简单随机样本，求未知参数 α 的最大似然估计量.

模拟试题（四）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，$x_0 \neq 0$，$f(x_0) \neq 0$，且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则

（A）$f''(x_0) = 0$.

（B）$(x_0, -f(x_0))$ 是曲线 $y = -f(x)$ 的拐点.

（C）$(-x_0, f(-x_0))$ 不是曲线 $y = f(-x)$ 的拐点.

（D）$(-x_0, -f(x_0))$ 不是曲线 $y = -f(-x)$ 的拐点.

[　　]

（2）设定积分 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\,dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)\,dx, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)\,dx$，则有

（A）$I_1 < I_2$.　（B）$I_1 < I_3$.　（C）$I_3 < I_2$.　（D）$I_3 < 1$.

[　　]

（3）设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 则有

（A）$f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.　（B）$f''_{xy}(0, 0) > f''_{yx}(0, 0)$.

（C）$f''_{xy}(0, 0) < f''_{yx}(0, 0)$.　（D）$f''_{xy}(0, 0)$ 与 $f''_{yx}(0, 0)$ 至少有一个不存在.

[　　]

（4）设 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上连续的偶函数，积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x)\,dv$ 在 $[0, 1]$ 上的定积分表示为

（A）$\int_0^1 2\pi(1 + x^2)f(x)\,dx$.　（B）$\int_0^1 2\pi(1 - x)f(x)\,dx$.

（C）$\int_0^1 2\pi(1 + x)f(x)\,dx$.　（D）$\int_0^1 2\pi(1 - x^2)f(x)\,dx$.

[　　]

（5）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, -4, 1, 1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 5, 4, t+2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = (-2, -8, 2, t)^T$ 有以下结论：

①$t = 2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

②$t = 2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

③$t = 3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

④$t=3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.
则正确结论为

(A) ①③.　　(B) ②③.　　(C) ①④.　　(D) ②④.

[　　]

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&-b-1\\1&0&0\end{pmatrix}$都可相似对角化，则

(A) $a=-b=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $a=b=\dfrac{1}{2}$.

(C) $a=-b=-\dfrac{1}{2}$.　　(D) $a=b=-\dfrac{1}{2}$.

[　　]

(7) 设连续型随机变量 X，Y 满足 $P(X\geqslant 0, Y\geqslant 0)=\dfrac{3}{7}$，$P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\dfrac{4}{7}$，则概率 $P(\max\{X, Y\}\cdot X\geqslant 0)$ 为

(A) $\dfrac{6}{7}$.　　(B) $\dfrac{5}{7}$.

(C) $\dfrac{4}{7}$.　　(D) $\dfrac{3}{7}$.

[　　]

(8) 设总体 $X\sim N(0, \sigma^2)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_9 是来自 X 的简单随机样本，记它的均值为 $\overline{X}$，则使 $P(1<\overline{X}<3)$ 为最大的 σ 值是

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{\ln 3}}$.　　(B) $\dfrac{4}{\sqrt{\ln 3}}$.

(C) $\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$.　　(D) $\dfrac{8}{\sqrt{\ln 3}}$.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)=(\sin x^3)^3+\ln\cos x$，则 $f^{(4)}(0)=$__________.

(10) 微分方程 $x^2y''-xy'=\ln x$ 的通解为__________.

(11) 定积分 $\int_{-1}^{1}(|x|\mathrm{e}^{-x}+\sin x^3+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x=$__________.

(12) 设 $\oint_C(x^2+4y^2+xy)\,\mathrm{d}s=\dfrac{7\pi}{8}$(其中，$C$：$x^2+y^2=ax$，$a>0$)，则 $a=$__________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关 3 维列向量组. 已知

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为__________.

(14) 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱，然后从乙箱中任取 3 件产品，则其中的

次品数的平均值为__________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)^2}, & \dfrac{1}{2}<x<1,\\ A, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处在连续，求 A 的值.

(16)(本题满分 10 分)

证明：方程 $xe^{2x}-2x-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2=0$ 在 $(0,\ 1)$ 内有且仅有一个实根.

(17)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(u, v)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微，且 $f(1, 1)=1$，$f_u'(1, 1)=2$，$f_v'(1, 1)=3$，以及 $\varphi(x)=f(x, f(x, x))$ 是单调函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\right|_{x=1}$(其中，$\varphi^{-1}$ 是 φ 的反函数).

(18)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n(2n+1)}x^{2n+1}$ 的和函数为 $s(x)$，求反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}s^2(x)\,\mathrm{d}x$.

(19)(本题满分 10 分)

求满足微分方程$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=x$以及$y(0)=1$与$y'(0)=1+\frac{\pi}{2}$的函数$y(x)$，并求$y(x)$$(-1\leqslant x\leqslant 1)$的傅里叶级数展开式.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&0&a-3\end{pmatrix}$有零特征值，且存在矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&3\\3&4&8\\b+1&c-2&-3\end{pmatrix}$，使得矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解. 求常数$a$，$b$，$c$以及该方程的所有解.

(21)(本题满分 11 分)

设向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$线性表示，但表示式不是唯一的.

(Ⅰ)求常数 a 及线性表示式的一般形式;

(Ⅱ)对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 以及上述求得的 a，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，并求此标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $Z=2X-Y$，求 DZ 和 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $Z=XY$，其中随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\sigma^2)$，Y 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

. 又设 Z_1，Z_2，…，Z_n 是来自总体 Z 的一个简单随机样本，求参数 σ^2 的矩估计量.

模拟试题（五）

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}$的极大值与极小值分别为

（A）1，－1.　　　　（B）－1，1.

（C）不存在，－1.　　　　（D）1，不存在.

[　　]

（2）设函数$f(x)$在点x_0处连续，且在点x_0的去心邻域内二阶可导，在点x_0的左侧邻近单调增加且图形是凹的，在点x_0右侧邻近单调减少且图形是凸的，则以下结论不正确的是

（A）$f(x)$在点x_0处不可导.　　　　（B）$f(x)$在点x_0处可导.

（C）$f(x_0)$是$f(x)$的极大值.　　　　（D）$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

[　　]

（3）二元函数$f(x, y)$在点$(0, 0)$处可微的一个充分条件是

（A）$f(x, y)$在点$(0, 0)$处连续.

（B）$f_x'(0, 0)$与$f_y'(0, 0)$都存在.

（C）$\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x, 0)=f_x'(0, 0)$及$\lim\limits_{y\to 0}f_y'(0, y)=f_y'(0, 0)$.

（D）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x, y)-f(0, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

[　　]

（4）已知$y_1=x\ln x$，$y_2=x\ln x+x$，$y_3=2x\ln x-x$是某个二阶齐次线性微分方程的三个特解，则这个微分方程为

（A）$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=0$.　　　　（B）$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y=0$.

（C）$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-2y=0$.　　　　（D）$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y=0$.

[　　]

（5）设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$是n维非零列向量，记$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}$，且$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则线性方程组

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$有无穷多解.　　　　（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$有唯一解.

（C）$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$有非零解.　　　　（D）$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$只有零解.

（6）设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与$\boldsymbol{A}$合同且相似的矩阵是

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设随机变量 X 服从指数分布，它的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则随机变量 $Y=\max\left\{X, X^2, \frac{1}{2}\right\}$ 的分布函数是

(A) 连续的.　　(B) 只有一个间断点.

(C) 只有两个间断点.　　(D) 多于两个间断点.

[　　]

(8) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{(X_1+X_2+X_5+X_6)^2}{(X_3+X_4-X_7-X_8)^2}$ 服从

(A) $F(4, 2)$.　　(B) $F(4, 4)$.　　(C) $F(1, 1)$.　　(D) $F(2, 4)$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=e-1$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ __________.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leq 1, \\ \ln x, & x>1, \end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^{\pi} e^{2f(x)}\sin x dx=$ __________.

(11) 设二元函数 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$，其中 $\varphi(u, v)$ 具有二阶偏导数，且满足 $\varphi''_{uv}+\dfrac{1}{y}\varphi''_{vv}=0$，则 $z''_{xy}=$ __________.

(12) 微分方程 $y''+2y'+y=2e^{-x}+x$ 的通解为__________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且其列向量组线性无关；$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，则 $r(\boldsymbol{B}^*)=$ __________.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)=\begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则 $D(X+Y^2)=$ __________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(t)=\begin{cases}2t^2+\sin t, & t<0,\\ y(t), & t\geqslant 0,\end{cases}$ 其中 $y=y(t)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=\mathrm{e}^{-t}$ 满足 $y(0)=0$ 的解. 求 $f''(t)$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是正值连续函数，满足 $f(x)\cdot\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\sin x$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 上的平均值.

(17)(本题满分 10 分)

设二元函数 $u=u(x,\ y)$ 具有 2 阶连续偏导数，且满足 $u''_{xx}=u''_{yy}$，$u(x,\ 2x)=x$，$u_x'(x,\ 2x)=x^2$，又设 D 是由半圆 $x^2+z^2=1(z\geqslant 0)$，曲线 $z=u''_{xx}(x,\ 2x)$，$z=u''_{xy}(x,\ 2x)$ 围成的平面图形. 求 D 的面积.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 二阶可导，满足 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，且对任意 $x\geqslant 0$，有

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)>0.$$

证明：对任意 $x>0$ 有 $f(x)>3e^{2x}-2e^{3x}$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$, 其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是锥面 S_1: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 S_2: $x^2+y^2=ax\,(a>0)$ 所截下的有限部分.

(20)(本题满分 11 分)

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,\ 0,\ 8)^{\mathrm{T}}$, 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, $b=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 求线性方程组 $2b^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+b^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$ 的通解.

（21）（本题满分 11 分）

设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$，求使二次型 $f_1(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f_2(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$）都化为标准形的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Q}$ 为 3 阶正交矩阵)，并写出它们的标准形.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -2<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 求

（Ⅰ）随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度 $\varphi(y)$；

（Ⅱ）$E(|Y-X^4|)$.

(23) 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，其中 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$ $(\theta>0)$. 求当 n 无限增大时，未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 所近似服从的分布.

模拟试题（六）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=x(x-2)^2|x(x-2)|$ 的 2 阶不可导点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(2) 下列等式中不正确的是

(A) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$.　　(B) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{2n}\right)^2$.

(C) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$.　　(D) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[　　]

(3) 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的三个 2 阶偏导数 $f''_{xx}(x,y)$，$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 存在，则必有

(A) $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

(B) $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

(C) $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(D) $f'_x(x,y_0)$ 在点 x_0 处可微.

[　　]

(4) 设 $\boldsymbol{\Omega}=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则以下各式正确的是

(A) $\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=1$.

(B) $\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=0$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega_1}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v$（$\boldsymbol{\Omega}_1$ 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的第一卦限部分）.

(D) $\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\tan(3x)\mathrm{d}v$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解的

(A) 必要而非充分条件.　　(B) 充分而非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

[　　]

(6) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^4$ 的最小特征值为

(A) -1.　　　　(B) -2.

(C) 1.　　　　(D) 2.

[　　]

(7) 设随机变量 X, Y 相互独立, 概率密度都为 $f(t)$, 则随机变量 $Z=X-2Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

(A) $f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f\left(\frac{z-x}{2}\right)dx$.　　　　(B) $f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f\left(\frac{x-z}{2}\right)dx$.

(C) $f_Z(z)=2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(2(z-x))dx$.　　　　(D) $f_Z(z)=2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(2(x-z))dx$.

[　　]

(8) 设 X_1, X_2, …, X_n 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $Y=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2$ 的数学期望为

(A) $\frac{1}{n}\sigma^4$.　　　　(B) $\frac{2}{n}\sigma^4$.

(C) $\frac{1+n}{n}\sigma^4$.　　　　(D) $\frac{2+n}{n}\sigma^4$.

[　　]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续, 则常数 $a=$__________.

(10) 设二元函数 $f(u,v)$ 可微, 则 $\frac{\partial}{\partial x}f\left(e^{xy},\cos\frac{1}{x}\right)=$__________.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n}{2}\pi}\frac{1}{2^n}\right]=$__________.

(12) 设 2 阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

则 2 阶非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=e^x\cos x$ 应具有的特解形式为__________.

(13) 设 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^*=$__________.

(14) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 p $(0<p<1)$, 记 A 为"此人第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标"这一事件, 又记 X 为服从参数是 $P(A)$ 的 0-1 分布的随机变量, 则 $E(X^2)=$__________.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 及 $f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}(n=1,2,\cdots)$,求

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}f_n(x).$$

(17)(本题满分 10 分)

已知二元连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y+\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$,$g(x,y)$ 满足 $g'_x(x,y)=g'_y(x,y)=1$ 及 $g(0,0)=0$. 求二重积分 $\iint\limits_D f(\sqrt{x},g(x,y))\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线 $x=y^2$ 及直线 $x=1$ 围成的平面图形.

(18)(本题满分 10 分)

设曲线 $L:\begin{cases} x=\sin z, \\ y=0. \end{cases}$

(Ⅰ)求曲线积分 $\int_{\widehat{OA}}(\mathrm{e}^z\sin x+x-z)\mathrm{d}z+(\mathrm{e}^z\cos x-z)\mathrm{d}x$,其中,$\widehat{OA}$ 是由原点沿曲线 L 到点 $A(0,0,\pi)$ 的有向曲线;

(Ⅱ)记由曲线 $L(0\leqslant z\leqslant\pi)$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面(外侧)为 Σ,求曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内 2 阶可导，且$f'_{+}(a)>0$，$f(b)=0$. 此外存在$c\in(a, b)$，使得$f(c)=0$，$f'(c)<0$. 证明：存在$\xi\in(a, b)$，使得$f''(\xi)=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(b, 3, 5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3, 4, b)^{\mathrm{T}}$线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，求常数$a$，$b$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，求对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3 y - x y^3), & |x| < 1, \ |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求(Ⅰ)随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅱ)随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

(23)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

(其中,$\theta\in(0,1)$是未知参数).以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 X_1,X_2,…,X_n 中取值等于 i 的个数($i=1,2,3$),求常数 a_1,a_2,a_3,使得 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量.

(Ⅱ)当 $n=300$,$\theta=0.5$ 时,用中心极限定理计算上述样本中取值等于 2 的 N_2 的概率 $P(N_2>80)$.(标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的值:$\Phi(0.57)=0.7157$,$\Phi(0.67)=0.7486$,$\Phi(0.77)=0.7794$.)

模拟试题（七）

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

[　　]

（2）设 $F(x) = \int_0^x \max\{e^{-t}, e^t\}dt$，则

（A）$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, x < 0, \\ e^x - 1, x \geqslant 0. \end{cases}$　　（B）$F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, x < 0, \\ e^x - 1, x \geqslant 0. \end{cases}$

（C）$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} < 0, \\ 1 - e^x \geqslant 0. \end{cases}$　　（D）$F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, x < 0, \\ 1 - e^x, x \geqslant 0. \end{cases}$

[　　]

（3）设$\{a_n\}$是单调减少收敛于零的正项数列，则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，下列结论正确的是

（A）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散.

（B）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛.

（C）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛.

（D）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

[　　]

（4）设 Σ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4(z \geqslant 0)$ 的上侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+2)dydz + zdxdy$ 等于

（A）$2\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{4 - y^2 - z^2}dydz$.

（B）$2\iint\limits_{D_{yz}} (\sqrt{4 - y^2 - z^2} + 2)dydz + \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$.

（C）$2\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{4 - y^2 - z^2}dydz + \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$.

（D）$\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$.

其中 D_{xy},D_{yz} 分别是 Σ 在 xOy 平面与 yOz 平面的投影.

[ ]

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,则

(A) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示,且表示式是唯一的.

(B) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示,但表示式不是唯一的.

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵以及以下命题:

① $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值.

② $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

③ $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

④ $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}_n)=n-n_i$.

则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是

(A) ①②. (B) ②③. (C) ②④. (D) ①④.

[ ]

(7) 下列命题中不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上服从均匀分布,则 X 与 Y 相互独立.

(B) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}ab\mathrm{e}^{-(ax+by)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\text{(其中,}a,b\text{ 都是正数)},$$

则 X 与 Y 相互独立.

(C) 设二维随机变量 (X,Y) 在圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上服从均匀分布(其中,R 是正数),则 X,Y 相互独立.

(D) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自同一总体的简单随机样本,则随机变量 $X=f_1(X_1,X_2)$,$Y=f_2(X_3,X_4)$(其中,f_1,f_2 都是连续函数) 相互独立.

[ ]

(8) 设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$,它们相互独立,又设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自 X 和 Y 的简单随机样本,记

$$Z=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\text{(其中,}\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j\text{)},$$

则 DZ 为

(A) σ^2. (B) $\dfrac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}$.

(C) $\dfrac{\sigma^4}{n_1+n_2-2}$. (D) $\dfrac{2\sigma^4}{n_1+n_2-2}$.

[ ]

二、填空题： 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，则极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$________.

(10) 设函数 $z=f(x+y, yg(x))$，其中，f 具有 2 阶连续偏导数，曲线 $w=g(x)$ 在点 (0, 1) 处的切线方程为 $w=1+x$，且 $f(u, v)$ 的各阶偏导数在 $u=v$ 处的值都为 1，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=$__________.

(11) 曲面 $z=x^2+y^2$ 被上半球面 $x^2+y^2+z^2=2$ $(z\geqslant 0)$ 截下的有限部分 Σ 的面积为________________.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-2x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ 其余弦级数与正弦级数的和函数分别为 $s_1(x)$ 与 $s_2(x)$，则 $s_1(-1)$ 与 $s_2\left(\dfrac{5}{2}\right)$分别为_________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 2 阶与 4 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，即它们的概率密度都为 $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $P(\max\{X, Y\}\leqslant 1)=$________.

三、解答题： 15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续导数，且满足

$$y(x)=1+x+2\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

(16)(本题满分 10 分)

求三元函数 $f(x,\ y,\ z)=2x+2y+x^2+y^2-z^2$ 在 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

(17)(本题满分 10 分)

证明：当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$2\sin x+\tan x>3x$.

(18)(本题满分 10 分)

设 $\alpha=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\tan\dfrac{x}{2}}{1-(1+x)^{x\sin^2\sqrt{x}}}$,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^{n-1}\alpha$ 的和 .

(19)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I = \int_C \frac{1}{x^2 + y^2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$,

其中,C 为曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) - a\pi, \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

(20)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(A) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3 \end{cases}$ 有无穷多解.

(Ⅰ)求常数 a 的值.

(Ⅱ)对上述算得的 a 值,求方程组(A)与(B)$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$ 有公共解时的 λ 值及公共解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，其秩为 2，且满足

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}^*$；

(Ⅱ) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（其中，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵)，使得二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 成为标准形，并写出该标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (U, V) 的概率密度为

$$f(u, v) = \begin{cases} 1, & 0 < u < 1,\ 0 < v < 2u, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

又设 X 与 Y 都是离散型随机变量，其中 X 只取 -1，0，1 三个值，Y 只取 -1，1 两个值，且 $EX = 0.2$，$EY = 0.4$，$P(X = -1, Y = 1) = P(X = 1, Y = -1) = P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{3}P\left(V \leqslant \frac{1}{2} \middle| U \leqslant \frac{1}{2}\right)$. 求

(Ⅰ) (X, Y) 的概率分布.

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

（23）（本题满分 11 分）

设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}, & 0<x<\theta,\ \theta<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，θ 是未知参数，又设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）计算 θ 的矩估计量$\hat{\theta}$，并判断$\hat{\theta}$是否为无偏估计量.

（Ⅱ）求 $D(\hat{\theta})$.

模拟试题（八）

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$，则 $y^{(n)}$ 为

（A）$(-1)^n\dfrac{n!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^n}-\dfrac{1}{(n+2)^n}\right]$.

（B）$(-1)^n\dfrac{n!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(n+2)^{n+1}}\right]$.

（C）$(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$.

（D）$(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+2}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+2}}\right]$.

[ ]

（2）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^2x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x$,

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^7x)\mathrm{d}x$,则它们大小次序为

（A）$M<N<P$.　　（B）$N<M<P$.

（C）$P<M<N$.　　（D）$P<N<M$.

[ ]

（3）微分方程 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$ 应有的特解形式为

（A）$a\cos\ln x+b\sin\ln x$;　　（B）$(a\cos\ln x+b\sin\ln x)\ln x$.

（C）$ax\cos\ln x$.　　（D）$bx\sin\ln x$.

[ ]

（4）收敛半径 $R=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的

（A）充分而非必要条件.　　（B）必要而非充分条件.

（C）充分必要条件.　　（D）既非必要又非充分条件.

[ ]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，且存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则

（A）$\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\alpha$.

（B）$\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $(\boldsymbol{P}^*)^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

（C）$\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(D) $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及对应的特征向量$(\boldsymbol{P}^*)^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

[ ]

(6) 设有 n 维列向组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m(m\leqslant n)$,记矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$,则下列命题不正确的是

(A) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时,(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩.

(B) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时,(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(C) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩.

(D) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

[ ]

(7) 袋内有 7 个球,其中 4 个红球,3 个白球. 现不放回地取球,每次取 1 个,记

$$A=\{第二次取球才取到白球\},$$
$$B=\{第二次取球取到的是白球\},$$

则它们的概率分别为

(A) $P(A)=P(B)=\dfrac{2}{7}$.　　(B) $P(A)=\dfrac{2}{7},P(B)=\dfrac{3}{7}$.

(C) $P(A)=P(B)=\dfrac{3}{7}$.　　(D) $P(A)=\dfrac{3}{7},P(B)=\dfrac{2}{7}$.

[ ]

(8) 设 $X\sim N(a,\sigma^2)$,$Y\sim N(b,\sigma^2)$,且相互独立. 现分别从总体 X 和 Y 各抽取容量为 9 和 11 的简单随机样本,记它们的方差为 S_X^2 和 S_Y^2,并记 $S_{12}^2=\dfrac{1}{2}(S_X^2+S_Y^2)$,$S_{XY}^2=\dfrac{1}{18}(8S_X^2+10S_Y^2)$,则上述四个统计量 S_X^2,S_Y^2,S_{12}^2 和 S_{XY}^2 中方差最小者为

(A) S_X^2.　　(B) S_Y^2.　　(C) S_{12}^2.　　(D) S_{XY}^2.

[ ]

二、填空题: 9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且满足

$$\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t=f(x)-\mathrm{e}^{5x},$$

则 $f''(0)=$ ______.

(10) 设二元可微函数 $z=z(x,y)$ 是由方程$\int_y^z\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+xy+yz=0$ 确定,则$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$ ______.

(11) 设有曲面 $S:x^2+y^2+z^2=x$,平面 $\pi_1:x-y-\dfrac{1}{2}z=2$ 和 $\pi_2:x-y-z=2$,则垂直于 π_1 与 π_2 的 S 的切平面方程为______.

(12) 设 C 是正向椭圆 $4x^2+y^2=8x$,则曲线积分$\oint_C\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=$ ______.

(13) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$,则 3 阶行列式 $\left|\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$ ______.

(14) 设 X 是离散型随机变量,其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

Y 是连续型随机变量,其概率密度为 $\varphi(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 记 $a=P(X=1)$,则概率 $P(Y\geqslant a)=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$,分别求 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 与 V_y.

(16)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^n}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ n 为大于 1 的正整数. 分别计算使 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续与可微的最小 n 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right)$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\tan(x_n-1)}-e^{\sin(x_n-1)}}{(x_n-1)^3}.$$

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设对于半空间 $x>0$ 内任意光滑有向闭曲面 S,都有

$$\oiint\limits_{S} xf(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

其中,函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内具有连续的导数,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

(20)(本题满分 11 分)

设方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有解$(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$和$(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}$,其中,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的秩为3,且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$都是4维列向量,求方程组$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$的通解,其中,矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

(21)(本题满分 11 分)

设$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2b&0\\0&a&1\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵$\boldsymbol{B}$(实对称矩阵),并计算$\boldsymbol{B}$有特征值$\lambda=0,1,4$时常数a,b的值.

(Ⅱ)对上述算得的a,b值,用正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$是正交矩阵,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$)将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他,\end{cases}$求

(Ⅰ)(X,Y)的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)(y>0)$.

(Ⅱ)概率$P(X>2|Y>4)$和$P(X>2|Y=4)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$.

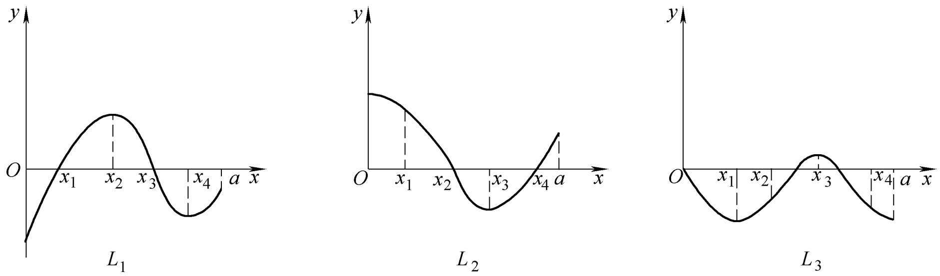
(Ⅰ)试利用总体X的简单随机样本值3,1,3,0,3,1,2,3,求θ的矩估计值$\hat{\theta}$.

(Ⅱ)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X(其未知参数θ为(Ⅰ)中确定的$\hat{\theta}$)的简单随机样本,则由中心极限定理知,当n充分大时,取值为2的样本个数Y近似地服从正态分布,求此正态分布的两个参数μ和σ^2.

模拟试题（九）

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\ a]$ 上可导，则曲线 L_1，L_2，L_3：



L_1　　L_2　　L_3

与 $y=f(x)$，$y=f'(x)$，$y=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的对应关系为

（A）L_1，L_2，L_3.　　（B）L_1，L_3，L_2.

（C）L_2，L_3，L_1.　　（D）L_3，L_1，L_2.

[　　]

（2）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上连续的奇函数，则

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.　　（B）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

（C）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，其值必为零.　　（D）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，其值不为零.

[　　]

（3）已知曲面 S：$x^2+2y^2+3z^2=1\ (y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$，平面区域 D：$x^2+2y^2\leqslant 1\ (x\geqslant 0)$，则

（A）$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　（B）$\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（C）$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　（D）$\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[　　]

（4）设 $y_1=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\sin x$，$y_2=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 是2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的两个解，则 $f(x)$ 为

（A）$5\mathrm{e}^x$.　　（B）e^{3x}.

（C）e^x.　　（D）e^{-x}.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实矩阵，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，则方程组①$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，③$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以及④$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 中，仍以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 为基础解系的是

(A) ①②.　　(B) ②④.

(C) ③④.　　(D) ①③.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件为

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(B) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(C) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同(多重特征值按一个计算).

(D) 分别以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Y=X^2$ 和二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 则 $F(1, 4)$ 等于

(A) $\dfrac{1}{4}$.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.

(C) $\dfrac{3}{4}$.　　(D) 1.

[　　]

(8) 设随机变量 $t\sim t(n)$, 对 $\alpha\in(0, 1)$, $t_\alpha(n)$ 为满足 $P(t>t_\alpha(n))=\alpha$ 的实数, 则满足 $P(|t|\leqslant b)=\alpha$ 的 b 等于

(A) $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$.　　(B) $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.

(C) $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$.　　(D) $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)$.

[　　]

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由微分方程 $x^2y'+y+x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ 及 $y(1)=0$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为________.

(10) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 且 $f_x'(0, 0)=1$, $f_y'(0, 0)=-1$, 则极限 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(2t, 0)+f(0, \sin t)-2f(t, t)}{t}=$________.

(11) 记 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为抛物面 $z=x^2+y^2(z\leqslant1)$ 的下侧, 则曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(12) 函数 $f(x)=\sin^2x$ 的麦克劳林展开式为________.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & \lambda & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 及 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 它们满足 $r(\boldsymbol{B})=2$, $r(\boldsymbol{AB})=1$, 则 $\lambda=$________.

(14) 设 A，B，C 是相互独立事件，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=P(C)=0.5$，则

$$P(A-C\mid AB\cup C)=\underline{\qquad\qquad}.$$

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)=\varphi(\psi(x))$，其中

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ \sin x, & |x|>1, \end{cases}\quad \psi(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\leqslant 2, \\ \cos x, & |x|>2, \end{cases}$$

求 $y''(x)$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^x\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\ (x\geqslant 0)$，求由曲线 $y=f(x)$ 及 x 轴围成的平面图形面积.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ 1, & x<0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 求曲线积分 $\int_C f(x)g(y-x)\,ds$，其中，C 是正方形 $|x|+|y|=1$.

(18)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n}x^{2n}(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的和函数为 $s(x)$. 求

(Ⅰ) $s(x)$ 的表达式;

(Ⅱ) 函数 $f(x)=e^x s(x)(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的最值.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组 . 已知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

问 a 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化?

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是3 阶实对称矩阵)经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)化为标准形 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 又设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$(其中，$\boldsymbol{\alpha}=(1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$).

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{A}$.

(Ⅱ) 求可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$(其中，$\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$)，将$f(x_1, x_2, x_3)$化为规范形.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 是连续型的，它的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$随机变量 Y 是离散型的，它的分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅰ) 当 X 与 Y 相互独立时，求 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

(Ⅱ) 求 $\mathrm{Cov}(X, X^2)$.

(23)(本题满分 11 分)

对某个目标独立重复射击，直到命中为止．现对目标进行 $n(n \geqslant 1)$ 轮这样射击，各轮射击次数分别为 k_1，k_2，…，k_n，求命中率 p 的矩估计值与最大似然估计值.

模拟试题（十）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)}$的

（A）可去间断点.　　（B）跳跃间断点.

（C）无穷间断点.　　（D）第二类间断点，但不是无穷间断点.

[　　]

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\,(x\in(-\infty,+\infty))$ 是 $f(x)$ 为偶函数的

（A）充分而非必要条件.　　（B）必要而非充分条件.

（C）充分必要条件.　　（D）既非充分又非必要条件.

[　　]

（3）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\dfrac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\,(\alpha>-1)$

（A）绝对收敛.　　（B）条件收敛.

（C）发散.　　（D）收敛或发散与 α 取值有关.

[　　]

（4）记 $I_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\,(i=1,2,3)$，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1\},$$
$$D_3=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\leqslant 1\},$$

则 I_1，I_2，I_3 的大小满足

（A）$I_1<I_2=I_3$.　　（B）$I_2=I_3<I_1$.

（C）$I_2<I_3=I_1$.　　（D）$I_3<I_2=I_1$.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶实对称矩阵，如果 $(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}})$ 的标准形应形如

（A）$a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$.　　（B）$b_1y_1^2+b_2y_2^2$.

（C）$c_1y_1^2$.　　（D）$d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2+d_4y_4^2$.

（其中，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，d_1，d_2，d_3，d_4 都是非零常数）.

[　　]

(6) 设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times l$ 矩阵,$\boldsymbol{X}$ 是 $n\times l$ 未知矩阵),则该方程有无穷多解的充分必要条件是

(A) $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$; (B) $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$.

(C) $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$; (D) $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$.

[ ]

(7) 设 X,Y 是随机变量,其中 $X\sim N(1,1)$,概率密度为 $f_1(x)$;Y 的概率密度为 $f_2(y)=\begin{cases}e^{-(y-1)}, & y\geqslant 1,\\ 0, & y<1,\end{cases}$ 记 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x<1,\\ bf_2(x), & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则当 $f(x)$ 是概率密度时,a,b 应满足

(A) $a+\dfrac{1}{2}b=1$. (B) $\dfrac{1}{2}a+b=1$.

(C) $a+\dfrac{1}{2}b=0$. (D) $\dfrac{1}{2}a+b=0$.

[ ]

(8) 设 X_1,X_2,$\cdots$,X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中,参数 μ,σ^2 未知. 记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则假设 H_0:$\mu=0$ 的 t 检验使用的统计量为

(A) $\dfrac{n\overline{X}}{Q}$. (B) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{Q}$.

(C) $\dfrac{\sqrt{n(n-1)}\,\overline{X}}{Q}$. (D) $\dfrac{Q}{\sqrt{n(n-1)}\,\overline{X}}$.

[ ]

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $f(x)=\cos^2x$ 的二阶麦克劳林公式(带拉格朗日型余项)为________.

(10) 对 $a>0$,定积分 $\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx=$________.

(11) 微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解为________.

(12) 设 $f(x,y)$ 是二元连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$ 在直角坐标系下的二次积分(先 y 后 x)为________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}_3$,记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3$,则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 关于 $\boldsymbol{E}_3$,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^2$ 表示式为________.

(14) 设 X_1,X_2,$\cdots$,X_5 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本,且统计量 $\dfrac{a(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布,则正的常数 $a=$________.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2+x-1}{x\sin\dfrac{x}{6}}, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}.$$

(16)(本题满足 10 分)

设$f''(x)$不变号，且曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的曲率圆为$x^2+y^2=2$，证明函数$f(x)$在$(1,2)$内无极值点但有唯一零点.

(17)(本题满分 10 分)

设 $a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=\frac{7}{2}$，$a_{n+1}=-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n\ (n\geqslant 2)$，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$,并求定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}s(x)\,\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 在(0，1)内的实根个数.

(19)(本题满分 10 分)

记曲面积分 $\iint\limits_S x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(其中，$S$ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的第一卦限部分上侧)的值为 A，求满足 $f(0)=A$，$f'(0)=-A$ 的 2 阶可导函数 $f(x)$，使得 $y[f(x)+3\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是某个二元函数的全微分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 4 维列向量组，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 已知方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ -\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$$

有无穷多解.

(Ⅰ)求常数 a 的值.

(Ⅱ)对求得的 a 值，计算方程组的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$可相似对角化.

(Ⅰ)求常数 a 的值.

(Ⅱ)对(Ⅰ)中求得的 a 值，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(Ⅰ)求随机变量 $U=\max\{X,\ Y\}$ 的概率密度 $\varphi(u)$.

(Ⅱ)求概率 $P(U\leqslant EU)$.

(23)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本均值与方差，求

(Ⅰ) $E(\overline{X}^2 S^4)$.

(Ⅱ) $D(\overline{X}^2)$.

模拟试题(一)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	D	C	C	B	C	A	A

(1) 当 $|x|\leqslant 1$ 时，由 $1\leqslant\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leqslant\sqrt[n]{2}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=|x|^3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left|\dfrac{1}{x}\right|^{3n}}=|x|^3$，所以

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$ 上可导，但由

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0，\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

知，$f(x)$ 在点 $x=1$ 处不可导. 此外，由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处也不可导. 因此选（C）.

附注 由于 $f(x)$ 是由数列极限确定的，所以要讨论它的可导性，首先要通过数列极限计算，确定 $f(x)$ 的解析表达式.

(2) 由于 $F(x)=\displaystyle\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=2x-t}\int_0^{2x}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$，所以

$$F'(x)=2\cos^2 2x，F''(x)=-4\sin 4x.$$

因此选（D）.

附注 要计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{\varphi(x)}f(t,x)\,\mathrm{d}t$ 时，首先应将被积函数中的 x 移到积分号外，或移到积分限中去.

(3) 由于当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0, y_0)$ 可能是极值，也可能不是极值，所以选项(C)不正确. 因此选(C).

附注 （C）的不正确性可用下列例子说明：

设 $f_1(x, y)=x^3+y^3$，记 $(x_0, y_0)=(0, 0)$，则 $f_x'(x_0, y_0)=f_y'=(x_0, y_0)=0$，且 $AC-B^2=0$. 此时，$f(x_0, y_0)=0$ 不是 $f(x, y)$ 的极值.

设 $f_2(x, y)=x^4+y^4$，记 $(x_0, y_0)=(0, 0)$，则 $f_x'(x_0, y_0)=f_y'(x_0, y_0)=0$，且 $AC-B^2=0$. 此时，$f(x_0, y_0)=0$ 是 $f(x, y)$ 的极值(极小值).

(4) 由于 Ω 关于 xOy 平面对称，也关于 yOz 平面对称，且被积函数 z 在对称点处的值不变，所以 $\displaystyle\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_1}z\mathrm{d}v$. 因此选（C）.

附注　设三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$. 如果 V 具有某种对称性,且 $f(x,y,z)$ 在对称点处的值彼此相等(或互为相反数),则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v\left(\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 0\right),$$

其中 V_1 是 V 按上述的对称性划分成的两部分之一.

(5) 由于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^* \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & |2\boldsymbol{A}|(2\boldsymbol{A})^{-1} \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 8(2\boldsymbol{A}^{-1}) \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$,

所以,$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^* \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & ((3\boldsymbol{B})^{-1})^{-1} \\ (8(2\boldsymbol{A})^{-1})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B} \\ \frac{1}{4}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 因此选 (B).

附注　题解中应用了以下公式(应记住):

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}(n\geqslant 2)$, $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$ (k 是常数).

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是 m, n 阶可逆矩阵,则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(6) 由题设知 $r(\boldsymbol{P}) + r(\boldsymbol{Q}) \leqslant 3$. 由于当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{Q}) = 2$,所以此时 $r(\boldsymbol{P}) \leqslant 1$. 此外,由 $\boldsymbol{P}$ 是非零矩阵知,$r(\boldsymbol{P}) \geqslant 1$. 从而 $r(\boldsymbol{P}) = 1$. 因此选 (C).

附注　本题也可按以下方法计算:

当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = 2$,所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含 $3-2=1$ 个线性无关的解向量. 从而由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$ 知,非零矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 的线性无关列向量个数为 1,即得 $r(\boldsymbol{P}) = r(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}) = 1$.

(7) 记 $A_1 = \{$第一次取到的是一等品$\}$,

$A_2 = \{$第二次取到的是一等品$\}$,

则　$p = P(A_1A_2 \mid A_1\cup A_2) = \dfrac{P(A_1A_2(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}$,其中

$$P(A_1A_2(A_1\cup A_2)) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2\mid A_1) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{2}{15},$$

$$P(A_1\cup A_2) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1) = 1 - \frac{6}{10}\times\frac{5}{9} = \frac{2}{3},$$

所以 $p = \dfrac{1}{5}$. 因此选 (A).

附注　题解中的 $P(A_1\cup A_2)$ 也可按加法公式计算:

$$\begin{aligned} P(A_1\cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10}\times\frac{4}{9} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

显然,它没有题解中的计算简捷.

(8) 由于$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{\lambda}, D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n\lambda^2}$, 所以由列维—林德柏格中心极限定理得

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}}\leqslant x\right)=\Phi(x).$$

因此选(A).

附注 列维—林德柏格中心极限定理是：

设X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立同分布的随机变量序列，它们的数学期望都为μ，方差都为σ^2，则对任意实数x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x),$$

其中，$\Phi(x)$是标准正态分布函数.

二、填空题

(9) 由于$f(0)=0$；$x<0$时，$f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}>0$；$x>0$时，$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}>0$，所以方程$f(x)=0$的实根个数为1.

附注 题解中应注意的是$\sqrt{x^2}\neq x$，而$\sqrt{x^2}=|x|$.

(10) 记$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+2A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x,\text{即 }A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+2A.$$

所以，$$A=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\sin x=-\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\right)=1-\frac{\pi}{2}.$$

于是 $f(x)=x+2-\pi$，从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2-\pi)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}-\pi.$$

附注 本题获解的关键，是注意到$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$是常数.

(11) 由$\mathrm{e}^x+\sin y=x$得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\mathrm{e}^x}{\cos y}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'_u(u,v)\mathrm{e}^x+f'_v(u,v)\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\quad(\text{其中 }u=\mathrm{e}^x,\ v=x^2+y^2)$$

$$=\mathrm{e}^xf'_u(u,v)+\frac{2(x\cos y+y-y\mathrm{e}^x)}{\cos y}f'_v(u,v).$$

附注　计算$\frac{dy}{dx}$时，要注意 y 是 x 的函数，而$\frac{dy}{dx}$可由方程 $e^x+\sin y=x$ 两边对 x 求导得到.

(12) 由于所给微分方程可以改写成

$$(x\cos y\mathrm{d}y+\sin y\mathrm{d}x)+(\cos x\mathrm{d}y-y\sin x\mathrm{d}x)=0,$$

即　$\mathrm{d}(x\sin y+y\cos x)=0$.　　因此通解为 $x\sin y+y\cos x=C$.

附注　对于微分方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$，有时将 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y$，经适当转换后分成若干组，使各组分别是某个二元函数的全微分，由此得到所给微分方程的通解. 本题就是按此方法求解的，十分快捷.

(13) 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 -2，-1，1，2，从而 $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值

$$\frac{|\boldsymbol{B}|}{-2}=-2,\ \frac{|\boldsymbol{B}|}{-1}=-4,\ \frac{|\boldsymbol{B}|}{1}=4,\ \frac{|\boldsymbol{B}|}{2}=2,\text{由此可知 }\boldsymbol{B}^*\sim\begin{pmatrix}-2&&&\\&-4&&\\&&4&\\&&&2\end{pmatrix}.$$

所以
$$|\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_4|=\left|\begin{pmatrix}-2&&&\\&-4&&\\&&4&\\&&&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\right|=45.$$

附注　题解有两点值得注意：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，有特征值 λ，则 $\boldsymbol{A}^*$ 对应有特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$.

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是相似的 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_n|$.

(14) 由于 $E(X^3+2Y^2)=E(X^3)+2E(Y^2)$，其中

$$\begin{aligned}E(X^3)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^3\cdot 2e^{-2x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{d}e^{-2x}\\&=-\left(x^3e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2e^{-2x}\mathrm{d}x\right)=\frac{3}{2}E(X^2)\\&=\frac{3}{2}[DX+(EX)^2]=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

$$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

所以，$E(X^3+2Y^2)=\frac{3}{4}+2\times\frac{2}{3}=\frac{25}{12}$.

附注　在 $E(X^3)$ 的计算中，对于 $\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2e^{-2x}\mathrm{d}x$ 不必再作积分计算，这是因为它可由 $\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2e^{-2x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=E(X^2)=DX+(EX)^2$ 直接得到.

三、解答题

(15) 由于 $y''+y=0$ 的特征方程的根为 $\lambda=-i$，i，所以它的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 此外，所给微分方程

$$y''+y=5e^{2x}+2\sin x \tag{1}$$

应有特解 $y^*=Ae^{2x}+x(B_1\cos x+B_2\sin x)$. 将它代入式(1)得

$$5Ae^{2x}-2B_1\sin x+2B_2\cos x=5e^{2x}+2\sin x.$$

由此得到 $A=1$，$B_1=-1$，$B_2=0$. 所以，$y^*=e^{2x}-x\cos x$，从而式(1)的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}-x\cos x$.

附注 应记住常系数线性微分方程的解法.

(16)(Ⅰ) 显然$\{a_n\}$是正项数列，且由

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(a_n+a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{a_n\cdot a_n\cdot\dfrac{1}{a_n^2}}=1\ (n=1,2,\cdots)$知，$\{a_n\}$有下界. 此外，由

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)-a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n^2}-a_n\right)\leqslant 0\quad(n=1,2,\cdots)$$

知，$\{a_n\}$单调不增. 从而由数列极限存在准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记为 a. 对递推式两边取极限得 $a=\dfrac{1}{3}\left(2a+\dfrac{1}{a^2}\right)$，所以 $a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(Ⅱ) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{a_n}{2^n}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，所以所给幂级数的收敛半径 $R=2$.

当 $x=2$，-2 时，所给幂级数分别为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，显然它们的通项极限都不为零，所以所给幂级数在点 $x=2$，-2 处都是发散的，故收敛域为$(-1,1)$.

附注 计算幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域步骤如下：

(Ⅰ) 计算$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛半径，记为 R.

(Ⅱ) 当 $R=+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域为$(-\infty,+\infty)$；当 $R=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域为$\{0\}$；当 R 为正数时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域为$(-R,R)$ 与其收敛端点之并集.

(17) 记 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+x+3Ay$. 于是有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\left(\frac{1}{2}x^2y+x\right)\mathrm{d}\sigma+3A\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2y+x\right)\mathrm{d}y+3A\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}y\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{7}+\frac{3}{10}A.\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{20}{49}$. 从而 $f(x, y)=\frac{1}{2}x^2y+x+\frac{60}{49}y$.

由于在 D 内，$f'_x=xy+1>0$，$f'_y=\frac{1}{2}x^2+\frac{60}{49}>0$，所以 f 的最值只能在 D 的边界 C_1：$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，$C_2$：$x=1$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$ 及 C_3：$y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上取到.

在 C_1 上，$f(x, y)=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，故最大值为 1，最小值为 0.

在 C_2 上，$f(x, y)=\frac{169}{98}y+1$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$，故最大值为 $\frac{267}{98}$，最小值为 1.

在 C_3 上，$f(x, y)=\frac{1}{2}x^4+\frac{60}{49}x^2+x \xlongequal{\text{记}} \varphi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. 由于在 $(0, 1)$ 上，$\varphi'(x)=2x^3+\frac{120}{49}x+1>0$，所以 $f(x, y)$ 在 C_3 上的最大值为 $\varphi(1)=\frac{267}{98}$，最小值为 $\varphi(0)=0$.

因此，$f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 $\frac{267}{98}$，最小值为 0.

附注　二元连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最值计算步骤如下：

第一步　计算 $f(x, y)$ 在 D 的内部的可能极值点，记为

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots,\ (x_n, y_n).$$

第二步　计算 $f(x, y)$ 在 D 的边界 C 上的最大值与最小值，分别记为 M_1 与 m_1，则 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为

$$M=\max\{f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2),\ \cdots,\ f(x_n, y_n),\ M_1\};$$

最小值为

$$m=\min\{f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2),\ \cdots,\ f(x_n, y_n),\ m_1\}.$$

(18) 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且

$$F(0)F(1)=f(0)[f(1)-1]<0,$$

所以由零点定理知，存在 $\xi\in(0, 1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.　　(1)

下面用反证法证明 ξ 的唯一性. 设另有 $\eta\in(0, 1)$，使得 $f(\eta)=\eta$，不妨设 $\eta<\xi$，则

$$f(\xi)-f(\eta)=\xi-\eta.$$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\theta\in(\eta, \xi)\subset(0, 1)$，使得

$$f'(\theta)(\xi-\eta)=\xi-\eta,\ \text{即}\ f'(\theta)=1.$$

这与题设 $f'(x)\neq 1(x\in[0, 1])$ 矛盾. 因此满足式(1)的 ξ 是唯一的.

附注　唯一性问题，往往用反证法证明. 本题就是如此.

(19) 由于
$$z'_x(0, 0)=f'_x(0, 0)+f'_y(0, 0)\cdot f'_x(0, 0)=0,$$
$$z'_y(0, 0)=f'_y(0, 0)\cdot f'_y(0, 0)=1,$$

所以，π 的方程为 $z'_x(0, 0)(x-0)+z'_y(0, 0)(y-0)-(z-0)=0$，即 $z=y$.

于是，C 的方程为 $\begin{cases} z=\frac{3}{4}-x^2-y^2, \\ z=y. \end{cases}$

由此得到

$$\oint_C xy\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z=\oint_{C_1}xy\mathrm{d}x+(1-y^2)\mathrm{d}y\begin{pmatrix}\text{其中},C_1\text{ 是 }C\text{ 在 }xOy\text{ 平面的投影},\\ \text{它的方程为 }x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_{D_1}-x\mathrm{d}\sigma=0\begin{pmatrix}\text{其中},D_1\text{ 是由 }C_1\text{ 围成的圆},\text{它关于 }y\text{ 轴对称},\\ \text{且被积函数 }-x\text{ 在对称点处的值互为相反数}\end{pmatrix}.$$

附注 在计算关于坐标的曲线积分 $\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 时，用 C 的方程消去 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 中的一个积分变量，例如消去 z，则所给的曲线积分化简为 $\int_{C_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y$（其中 C_{xy} 是 C 在 xOy 平面的投影），于是通过它的计算即得 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$.

这是比较快捷的方法，本题的曲线积分就是按此法计算的.

(20) 由于 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\1&-2&1&2\\a&b&c&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\0&-3&3&1\\0&b-a&c+2a&-a\end{array}\right)$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\0&1&-1&-\dfrac{1}{3}\\0&b-a&c+2a&-a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\dfrac{4}{3}\\0&1&-1&-\dfrac{1}{3}\\0&0&a+b+c&-\dfrac{4}{3}a+\dfrac{1}{3}b\end{array}\right),$$

所以由题设知，$\begin{cases}a+b+c=0,\\ -\dfrac{4}{3}a+\dfrac{1}{3}b=0,\\ a=2\end{cases}$ 即 $a=2$，$b=8$，$c=-10$. 此时所给方程组与 (Ⅱ) $\begin{cases}x_1\qquad-x_3=\dfrac{4}{3},\\ \qquad x_2-x_3=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 同解. (Ⅱ)的导出组的基础解系为 $C(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，此外(Ⅱ)有特解 $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3},0\right)^{\mathrm{T}}$，所以(Ⅰ)的通解为

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=C(1,1,1)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},0\right)^{\mathrm{T}}\quad(\text{其中 }C\text{ 是任意常数}).$$

对上述算得的 a，b，c 知，$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}$. (1)

设 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 y_1，y_2，y_3，则

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

比较式(1)与式(2)得

$$\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)^{-1}\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\16\\-8\end{pmatrix}.$$

所以，所求的坐标为 26，16，-8.

附注　由所给方程组有两个不同解可得，这个方程组对应的齐次线性方程有非零解，所以系数矩阵的秩$\leqslant 2$，此外由系数矩阵本身可知，其秩$\geqslant 2$. 因此系数矩阵的秩$=2$. 从而有

$$\begin{cases}a+b+c=0,\\-\dfrac{4}{3}a+\dfrac{1}{3}b=0,\\a=2.\end{cases}$$

(21) 由于 $g(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1-x_2)^2+3x_2^2+x_3^2$ 在 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2,\\y_2=\sqrt{3}x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 即可逆线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2,\\x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2,\\x_3=y_3\end{cases}$ 下成为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$，所以 $g(x_1,\ x_2,\ x_3)$是正定二次型，其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

由于$f(x_1,\ x_2,\ x_2)$是非正定二次型，所以，它的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&c\end{pmatrix}$$

的顺序主子式不全为正，故有 $c\leqslant 2$. 从而由题设 $c\geqslant 2$ 得 $c=2$. 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

由于 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0$，1，3.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则它满足

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，\text{即}\begin{cases}a_1\qquad +a_3=0,\\ \qquad a_2+a_3=0,\end{cases}$$

可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}$，即 $\boldsymbol{\xi}=(-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}=(b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$，则它满足

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，\text{即}\begin{cases}\qquad\qquad b_3=0,\\ b_1+b_2+b_3=0,\end{cases}$$

可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}$，即 $\boldsymbol{\eta}=(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\zeta}=(c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi})=0,\\ (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-c_1-c_2+c_3=0,\\ \quad c_1-c_2\qquad =0,\end{cases}$$

可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\zeta}$，即 $\boldsymbol{\zeta}=(1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

显然，$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\zeta}$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}^0=\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}^0=\frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\zeta}^0=\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\eta}^0, \boldsymbol{\xi}^0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$(正交矩阵)，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$）将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $z_2^2+3z_3^3$.

附注 由于 $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{B}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$($\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵)为正定二次型的充分必要条件是它的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的顺序主子式都大于零. 故当题中 $f(x_1, x_2, x_3)$ 不是正定二次型时，它的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&c\end{pmatrix}$ 的顺序主子式 1，$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}|=c-2$ 不全大于零，于是有 $c\leqslant 2$.

(22) 由于 $f(x, y)=\begin{cases}f_Y(y)f_{X|Y}(x|y), & f_Y(y)>0, f_{X|Y}(x|y)>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}5y^4\cdot\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<y<1, 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 15x^2y\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{15}{2}(x^2-x^4), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是由　$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\dfrac{15}{2}(x^2-x^4)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{8}$ 得

$$DX=E(X^2)+(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x+\left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot\frac{15}{2}(x^2-x^4)\mathrm{d}x+\frac{25}{64}=\frac{3}{7}+\frac{25}{64}=\frac{367}{448}.$$

此外, 由 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 5y^5\mathrm{d}y=\dfrac{5}{6}$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E(XY)-EX\cdot EY\\ &=\iint\limits_{xOy\text{平面}}xyf(x,y)\mathrm{d}\sigma-\frac{5}{8}\times\frac{5}{6}\\ &=\iint\limits_{\Delta}xy\cdot 15x^2y\mathrm{d}\sigma-\frac{25}{48}\quad(\text{其中 }\Delta=\{(x,y)\mid 0<x<y<1\})\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 15x^3y^2\mathrm{d}y-\frac{25}{48}=\frac{15}{28}-\frac{25}{48}=\frac{5}{336}.\end{aligned}$$

附注　当已知 $f_Y(y)$, $f_{X|Y}(x|y)$ 时, 可按以下公式计算 $f(x, y)$:

$$f(x, y)=\begin{cases}f_Y(y)f_{X|Y}(x|y), & f_Y(y)>0, f_{X|Y}(x|y)>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

同样当已知 $f_X(x)$, $f_{Y|X}(y|x)$ 时, 可按以下公式计算 $f(x, y)$:

$$f(x, y)=\begin{cases}f_X(x)f_{Y|X}(y|x), & f_X(x)>0, f_{Y|X}(y|x)>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(23) 记 Z 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned}F(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\ &=P(Y=-1)P(X\geqslant -z\mid Y=-1)+P(Y=1)P(X\leqslant z\mid Y=1)\\ &=\frac{1}{2}P(X\geqslant -z)+\frac{1}{2}P(X\leqslant z)\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\int_{-z}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x; & z\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\int_0^z\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x, & z>0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以，Z 的概率密度为

$$f(z)=\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda \mathrm{e}^{\lambda z}, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}, & z>0\end{cases}=\frac{1}{2}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda |z|}\ (-\infty<z<+\infty).$$

由此得到似然函数

$$\begin{aligned}L(\lambda)&=\frac{1}{2}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda|z_1|}\cdot\frac{1}{2}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda|z_2|}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda|z_n|}\\&=\frac{1}{2^n}\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|},\end{aligned}$$

即 $$\ln L(\lambda)=\ln\frac{1}{2^n}+n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}|z_i|.$$

上式两边对 λ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}|z_i|,$$

于是由$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=0$ 得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|}$.

附注 应熟练掌握参数点估计的两种方法：矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(二)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	A	D	B	C	A	D	C

(1) 由于 $y=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right),$$

所以，$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left[(-1)^{10}\frac{10!}{(x-1)^{11}}+(-1)^{10}\frac{10!}{(x+1)^{11}}-2(-1)^{10}\frac{10!}{x^{11}}\right]$

$$=\frac{10!}{2(x-1)^{11}}+\frac{10!}{2(x+1)^{11}}-\frac{10!}{x^{11}}.$$ 因此选（C）.

附注 应记住公式：对于 $a\neq 0$，

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,|\cos x|\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3}{4}.$$ 因此选（A）.

附注 题解中应注意的是：在$\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$上，$\sqrt{1-\sin^2x}\neq\cos x$，而应$\sqrt{1-\sin^2x}=|\cos x|$.

(3) 由于 x 轴负向的方向余弦为$(\cos\pi,\sin\pi)$，所以方向导数为

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{f(0+r\cos\pi,\ 0+r\sin\pi)-f(0,0)}{r}=-\lim_{r\to 0^+}\frac{f(-r,0)-f(0,0)}{-r}=-f_x'(0,0)=-1.$$

因此选（D）.

附注 由于$f(x,y)$的偏导数仅在点$(0,0)$处存在，所以选项(A)，(B)及(C)都未必正确.

(4) 由于$f(x)$的余弦级数是 $F_1(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ f(-x), & -2\leqslant x<0\end{cases}$的傅里叶级数，所以它的和函数 $s_1(x)$是以 4 为周期的，于是

$$s_1(-3)=s_1(-3+4)=s_1(1)=\frac{1}{2}[f(1^-)+f(1^+)]=\frac{1}{2}[1+(-1)]=0.$$

由于$f(x)$的正弦级数是 $F_2(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ -f(-x), & -2<x<0\end{cases}$的傅里叶级数，所以它的和函

数 $s_2(x)$ 是以 4 为周期的，于是

$$s_2(6)=s_2(2+4)=s_2(2)=\frac{1}{2}[F_2(2^-)+F_2((-2)^+)]=\frac{1}{2}(-2+2)=0.$$

由此得到 $s_1(-3)+s_2(6)=0$. 因此选（B).

附注 应记住：计算 $f(x)(0\leqslant x\leqslant a)$ 的余弦级数(正弦级数)时，应将 $f(x)$ 作偶延拓(奇延拓)，即考虑函数

$$F_1(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant a,\\ f(-x), & -a\leqslant x<0\end{cases}\quad \left(F_2(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x\leqslant a,\\ 0, & x=0,\\ -f(x), & -a<x<0\end{cases}\right).$$

（5）对于 $n>2$ 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^*)^*&=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\\&=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

因此选（C).

附注 当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，本题结论仍成立. 这是因为，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 另一方面，当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{O}$ 时，有 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$ 或 0，即 $r(\boldsymbol{A}^*)<n-1$ 从而 $r((\boldsymbol{A}^*)^*)=0$. 由此得到$(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{O}$. 故仍有

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

（6）由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵知 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是实矩阵，并且，由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 得$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=\boldsymbol{A}^*$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 也是对称的，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 也是实对称矩阵. 此外由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 全为正的知，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}$，$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}$，…，$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}$也全为正的. 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵. 同样可得 $\boldsymbol{B}^*$ 是正定矩阵.

于是对于任意 $\boldsymbol{x}$(n 维非零列向量)，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}>0$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}>0$，由此可知

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{x}>0,$$

即 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$ 是正定矩阵. 因此选（A).

附注 应记住以下结论：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$ 都是正定矩阵，但 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$ 未必是正定矩阵.

（7）由题设知$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\frac{Y-2\mu}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，所以

$$p_1=P(X\geqslant\mu-\sigma)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geqslant-1\right)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant1\right)>\frac{1}{2},$$

$$p_2=P\left(Y\leqslant2\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)=P\left(\frac{Y-2\mu}{\sigma/\sqrt{2}}\leqslant1\right).$$

故有 $p_1=p_2>\frac{1}{2}$. 因此选（D).

附注　由$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$知　$P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 0\right)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\geqslant 0\right)=\dfrac{1}{2}$. 所以有

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right)>\frac{1}{2}.$$

(8) 由于$Y=\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2$，其中由$X_1$，$X_2$，…，$X_n$相互独立，且$\dfrac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$知，$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，所以

$$EY=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2,\qquad DY=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

因此选(C).

附注　应记住以下结论：

设ξ_1，ξ_2，…，ξ_n是相互独立且都服从$N(0,1)$的随机变量，则$\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sim\chi^2(n)$，且$E\eta=n,D\eta=2n$.

二、填空题

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)\arctan\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)\arctan\dfrac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}$,

其中，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$，$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0$.

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)\arctan\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}=-\dfrac{1}{6}\times 0=0$.

附注　由$x\to 0$时，x是无穷小，$\left|\arctan\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0$. 类似地有$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(10) $\displaystyle\int_0^1\arctan\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1(\arctan 1-\arctan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\arctan x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$

附注　应记住初等数学公式：

$$\arctan\frac{a+x}{1-ax}=\arctan a+\arctan x,$$

$$\arctan\frac{a-x}{1+ax}=\arctan a-\arctan x.$$

(11) 由于 $z_x'(2,1)=2$，$z_y'(2,1)=2$，所以 π 的方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-2)=0，即\ 2x+2y-z-4=0.$$

因此点(0，0，0)到 π 的距离

$$d=\frac{|2x+2y-z-4|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\Bigg|_{(0,0,0)}=\frac{4}{3}.$$

附注 在平面上，点(x_0,y_0)到直线 $ax+by+c=0$ 的距离为

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Bigg|_{(x_0,y_0)};$$

在空间中，点(x_0,y_0,z_0)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}.$$

(12) 记平面 $z=-3$ 被曲面 S 截下部分为 S_1(下侧)，则

$$\iint\limits_{S(上侧)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma(外侧)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1(下侧)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\Sigma=S+S_1),$$

其中 $\iint\limits_{\Sigma(外侧)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{高斯公式} \iiint\limits_{\Omega}(3x+1)\mathrm{d}v$($\Omega$ 是由 Σ 围成的立体)

$$=\iiint\limits_{\Omega}3x\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v\ \left(由于\ \Omega\ 关于\ yOz\ 平面对称，而被积函数\ 3x\ 在对称点处的值互为相反数，所以，\iiint\limits_{\Omega}3x\mathrm{d}v=0\right)$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_{-3}^{1-(x^2+y^2)}\mathrm{d}z\quad(其中\ D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}\ 是\ \Omega\ 在\ xOy\ 平面上的投影)$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[4-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma \xlongequal{极坐标} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r=8\pi,$$

$$\iint\limits_{S_1(下侧)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}-3\mathrm{d}x\mathrm{d}y(由于\ S_1\ 的方程为\ z=-3)$$

$$=12\pi.$$

所以，$\iint\limits_{S(上侧)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi-12\pi=-4\pi.$

附注 由于 S 不是闭曲线，所以需添一块 S_1，使得 S 与 S_1 组成闭曲面(而且方向为外侧)后，才可以应用高斯公式，这是计算关于坐标的曲面积分的常用方法.

(13) 由于

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&4\\1&2&-1&1\\-3&2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&4\\1&2&-1&1\\-3&2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&-5&-1\\-14&4&10&2\\-4&0&0&6\\-1&6&-7&17\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}7&-2&-5&-1\\0&0&0&0\\4&0&0&6\\-1&6&-7&17\end{pmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{A}^2)=3$，从而 $r[(\boldsymbol{A}^2)^*]=1$.

附注　本题是利用以下公式(应记住)计算的：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(14) $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$,

其中，$y\leqslant 0$ 时，$P(X^2\leqslant y)=0$；

$y>0$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=P(0\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$

$$=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}x\mathrm{d}x, & 0<y\leqslant 1,\\ \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{y}}(2-x)\mathrm{d}x, & 1<y\leqslant 4,\\ \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x, & y>4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0<y\leqslant 1,\\ -1+2\sqrt{y}-\frac{1}{2}y, & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$$

所以 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}y, & 0<y\leqslant 1,\\ -1+2\sqrt{y}-\frac{1}{2}y, & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$

附注　$F_Y(y)$也可以按以下方法计算：

记 $g(x)=x^2$，则 $g(x)$ 在 $\{x\mid f(x)\neq 0\}=(0,2)$ 内单调增加，记它的反函数为 $x=h(y)$，则 $h(y)=\sqrt{y}$，$h'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}(0<y<4)$. 所以

$$Y\text{ 的概率密度 } f_Y(y)=\begin{cases} f(h(y))\left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & 0<y<4,\\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y\leqslant 1,\\ (2-\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & 1<y<4,\\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0<y\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{2}, & 1<y<4,\\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{因此 } F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(u)\,\mathrm{d}u=\begin{cases} 0, & y\leqslant 0,\\ \displaystyle\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}u, & 0<y\leqslant 1,\\ \displaystyle\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}u+\int_1^y\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u, & 1<y\leqslant 4,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,\mathrm{d}u, & y>4 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}y, & 0<y\leqslant 1,\\ -1+2\sqrt{y}-\dfrac{1}{2}y, & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4. \end{cases}$$

三、解答题

(15) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)-(n+1)+2}{2^n\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right]$$

$$=\frac{7}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-4=\frac{7}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-4.$$

附注 利用常用函数 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$，$(1+x)^\mu$ 的麦克劳林级数计算级数和是经常采用的方法. 本题是利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=\mathrm{e}^x(-\infty<x<+\infty)$ 计算所给级数之和.

(16) $$\int\frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\csc\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\tan\frac{x}{2}\csc\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right| + C.$$

附注 应记住以下积分公式:

$$\int\sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int\csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

(17) 对于 $x\in(-\infty, +\infty)$有

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots\right) + \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \cdots\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n} + \cdots.$$

于是由$\frac{1}{(2n)!}\leqslant\frac{1}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}$ ($n=0, 1, 2, \cdots$,且仅当 $n=0, 1$ 时取等号)知,$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$. 由此可知,当 $c\geqslant\frac{1}{2}$时,由 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\leqslant\mathrm{e}^{cx^2}$得证

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) < \mathrm{e}^{cx^2}(-\infty < x < +\infty).$$

附注 本题还可用反证法证明仅当 $c\geqslant\frac{1}{2}$时,$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) < \mathrm{e}^{cx^2}$在$(-\infty, +\infty)$上才成立. 具体如下:

设存在 $c_0 < \frac{1}{2}$,使得$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) < \mathrm{e}^{c_0x^2}(-\infty < x < +\infty)$, (1)

则

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{c_0x^2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}{x^2} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to0}\frac{2c_0x\mathrm{e}^{c_0x^2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{2x}$$

$$= c_0 - \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x} \xlongequal{\text{洛必达法则}} c_0 - \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$= c_0 - \frac{1}{2} < 0.$$

故存在实数 x_0,使得 $\mathrm{e}^{c_0x_0^2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x_0} + \mathrm{e}^{-x_0}) < 0$,即$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x_0} + \mathrm{e}^{-x_0}) > \mathrm{e}^{cx_0^2}$. 这与式(1)矛盾. 因此仅当 $c\geqslant\frac{1}{2}$时,$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) < \mathrm{e}^{cx^2}$在$(-\infty < x < +\infty)$上才成立.

(18) 由于 $D(t)=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$, $L(t)=\{(x, y)\mid x^2+y^2=t^2\}$, $S(t)=S(t)$ 的半球面部分 $+S(t)$ 的底面部分 $\xlongequal{\text{记}} S_1+S_2$, 所以

$$\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} f(t^2)t\cdot t\,\mathrm{d}\theta=2\pi t^2 f(t^2),$$

$$\oiint_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S\xlongequal{S(t)\text{ 方程代入}}$$

$$t^2\cdot 2\pi t^2+\iint_{D(t)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma\xlongequal{\text{极坐标}}2\pi t^4+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=2\pi t^4+\frac{1}{2}\pi t^4=\frac{5}{2}\pi t^4,$$

$$\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r.$$

于是由题设得 $2\pi t^2 f(t^2)+\frac{5}{2}\pi t^4=2\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r$,即

$$t^2 f(t^2)+\frac{5}{4}t^4=\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r.$$

上式两边对 t 求导得

$$f'(t^2)+\frac{1}{2t^2}f(t^2)=-\frac{5}{2},\ \text{即} f'(u)+\frac{1}{2u}f(u)=-\frac{5}{2}(\text{其中 } u=t^2),$$

所以, $f(u)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2u}\mathrm{d}u}\left(C-\int\frac{5}{2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2u}\mathrm{d}u}\mathrm{d}u\right)=\frac{C}{\sqrt{u}}-\frac{5}{3}u$,即

$$f(t)=\frac{C}{\sqrt{t}}-\frac{5}{3}t.$$

由于 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 所以 $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)$ 存在, 因此 $C=0$. 从而

$$f(t)=-\frac{5}{3}t\quad(t\geqslant 0).$$

附注 题解中值得注意的是常数 C 的确定, 即利用 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 推出 $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)$ 存在, 从而 $C=0$.

(19) 由于 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x+x\cos y\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关,所以有

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial(x\cos y)}{\partial x}=\cos y. \tag{1}$$

于是, $f(x,y)=\int\cos y\,\mathrm{d}y=\sin y+\varphi(x)$. 将它代入 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x+x\cos y\,\mathrm{d}y=t^2$ 得

$$\begin{aligned}t^2&=\int_{(0,0)}^{(t,t^2)}[\sin y+\varphi(x)]\,\mathrm{d}x+x\cos y\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(t,t^2)}\mathrm{d}(x\sin y)+\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\&=(x\sin y)\Big|_{(0,0)}^{(t,t^2)}+\int_0^t\varphi(x)\,\mathrm{d}x=t\sin t^2+\int_0^t\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即 $\int_0^t\varphi(x)\,\mathrm{d}x=t^2-t\sin t^2$. 两边对 t 求导得

$$\varphi(t)=2t-\sin t^2-2t^2\cos t^2.$$

从而，$f(x,y)=\sin y+2x-\sin x^2-2x^2\cos x^2$.

附注　由表达式$\int_{(0,0)}^{(t,t^2)}f(x,y)\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y$可知，该曲线积分与积分路径无关，因此有式（1）.

（20）使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，必须

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}).$$

由于 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\text{（以下同）}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&2&2&0&4&-2\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right),$$

所以，使式(1)成立的 a，b，c 满足$\begin{cases}a-1=0,\\b-2=0,\\c-1=0,\end{cases}$即 $a=1$，$b=2$，$c=1$.

当 $a=1$，$b=2$，$c=1$ 时，所给的矩阵方程与

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\tag{1}$$

同解. 记 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$，则式(1)等价于以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

式(2)的通解为$(x_{11},x_{21},x_{31})^{\mathrm T}=C_1(-1,-1,1)^{\mathrm T}+(1,0,0)^{\mathrm T}=(-C_1+1,-C_1,C_1)^{\mathrm T}$,

式(3)的通解为$(x_{12},x_{22},x_{32})^{\mathrm T}=C_2(-1,-1,1)^{\mathrm T}+(2,2,0)^{\mathrm T}=(-C_2+2,-C_2+2,C_2)^{\mathrm T}$,

式(4)的通解为$(x_{13},x_{23},x_{33})^{\mathrm T}=C_3(-1,-1,1)^{\mathrm T}+(1,-1,0)^{\mathrm T}=(-C_3+1,-C_3-1,C_3)^{\mathrm T}$.

所以，式(1)，即所给矩阵方程的所有解为

$$\boldsymbol X=\begin{pmatrix}-C_1+1&-C_2+2&-C_3+1\\-C_1&-C_2+2&-C_3-1\\C_1&C_2&C_3\end{pmatrix}\quad(\text{其中 }C_1,\ C_2,\ C_3\text{ 为任意常数}).$$

附注 （Ⅰ）设矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol B$(其中$\boldsymbol A$，$\boldsymbol B$分别为$m\times n$，$m\times l$矩阵)，则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol B\text{ 有解的充分必要条件为 }r(\boldsymbol A\,\vdots\,\boldsymbol B)=r(\boldsymbol A).$$

特别，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol B$有唯一解的充分必要条件$r(\boldsymbol A\,\vdots\,\boldsymbol B)=r(\boldsymbol A)=n$；$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol B$有无穷多解的充分必要条件是$r(\boldsymbol A\,\vdots\,\boldsymbol B)=r(\boldsymbol A)<n$.

（Ⅱ）当矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol B$有解时，可按以下方法求解：

如果$\boldsymbol A$可逆(此时$m=n$)，则$\boldsymbol X=\boldsymbol A^{-1}\boldsymbol B$；

如果$\boldsymbol A$不可逆，则如题解中那样，将$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol B$表示成若干个线性方程组，然后逐一计算各个方程组的通解，即可得到$\boldsymbol X$.

(21) 由 $\boldsymbol A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&2\\1&2\end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

所以，$\boldsymbol A$有特征值-1，2，它们对应的特征向量分别为$\boldsymbol\xi_1=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol\xi_2=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm T}$. 由于$r(\boldsymbol A)=2$，所以$\boldsymbol A$还有特征值0，设它对应的特征向量为$\boldsymbol\xi_3=(a,\ b,\ c)^{\mathrm T}$，则由$\boldsymbol A$是实对称矩阵知$\boldsymbol\xi_3$满足

$$\begin{cases}(\boldsymbol\xi_3,\ \boldsymbol\xi_1)=0,\\(\boldsymbol\xi_3,\ \boldsymbol\xi_2)=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}a\qquad -c=0,\\a+b+c=0,\end{cases}$$

取它的基础解系为$\boldsymbol\xi_3$，即$\boldsymbol\xi_3=(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm T}$.

显然，$\boldsymbol\xi_1$，$\boldsymbol\xi_2$，$\boldsymbol\xi_3$是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol\eta_1=\frac{\boldsymbol\xi_1}{\|\boldsymbol\xi_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt2}\right)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol\eta_2=\frac{\boldsymbol\xi_2}{\|\boldsymbol\xi_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\ \frac{1}{\sqrt3},\ \frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol\eta_3=\frac{\boldsymbol\xi_3}{\|\boldsymbol\xi_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\ -\frac{2}{\sqrt6},\ \frac{1}{\sqrt6}\right)^{\mathrm T}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$（正交矩阵），则正交变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$化为标准形 $-y_1^2+2y_2^2$.

附注　应熟练掌握用正交变换或可逆线性变换(即配平方法)将二次型化为标准形的方法.

(22) 记(X, Y)关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为$f_X(x)$与$f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\leqslant y\leqslant 2.\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(Ⅰ) 由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=\frac{13}{18}$ 得

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\,\mathrm{d}x-\left(\frac{13}{18}\right)^2$$

$$=\int_0^1 x^2\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{13}{18}\right)^2=\frac{17}{30}-\left(\frac{13}{18}\right)^2=\frac{73}{1620}.$$

(Ⅱ) $P\left(X^2+Y^2\leqslant 1 \mid Y\geqslant\frac{1}{2}\right)=\dfrac{P\left(X^2+Y^2\leqslant 1, Y\geqslant\frac{1}{2}\right)}{P\left(Y\geqslant\frac{1}{2}\right)}$,

其中　$P\left(X^2+Y^2\leqslant 1, Y\geqslant\frac{1}{2}\right)=\iint\limits_D\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}\sigma\quad\left(D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant\frac{1}{2}\right\}\right)$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{6}x(1-x^2) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{3}{128} - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\xlongequal{令\ x = \sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta) d\theta + \frac{3}{128} - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{64} + \frac{3}{128}.$$

附注 题解中需注意的是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy \right) dy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

而不是$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy \right) dy (0 \leqslant x \leqslant 1)$. 对$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$ 也有同样的说法.

(23) 设 Z 的简单随机样本 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 的观察值为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，则似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\mu)^2}$$

取对数得

$$\ln L = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu)^2.$$

所以有

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu),$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu)^2.$$

由最大似然估计法，令

$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0, \end{cases}$ 得 μ, σ^2 的最大似然估计值分别为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \xlongequal{记} \bar{z}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$, 所以 μ, σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xlongequal{记} \bar{Z}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2.$$

由于 $EX = E(e^Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz \xlongequal{令\ t = \frac{z-\mu}{\sigma}} e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma t - \frac{t^2}{2}} dt$

$$= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2},$$

所以,由最大似然估计量的不变性得 EX 的最大似然估计量为

$$\widehat{EX}=\mathrm{e}^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma^2}}=\mathrm{e}^{\bar{Z}+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2}.$$

附注　(Ⅰ) 应记住,设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本,则

$$\mu\text{ 的矩估计量}=\mu\text{ 的最大似然估计量 }\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xlongequal{\text{记}}\bar{X},$$

$$\sigma^2\text{ 的矩估计量}=\mu\text{ 的最大似然估计量}\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

(Ⅱ) 最大似然估计量的不变性是:

设 θ 是未知参数, θ 的函数 $u=u(\theta)$ 有单值反函数, 则当 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计量时, $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计量.

模拟试题(三)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	C	D	D	C	D	C	A

(1) 在$(-\pi,0)$内$f(x)$仅有间断点$x=-\dfrac{\pi}{2}$. 由于

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1-\dfrac{\pi}{8}\right)}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=-\frac{2}{\ln\left(1-\dfrac{\pi}{8}\right)},$$

所以$x=-\dfrac{\pi}{2}$是$f(x)$的可去间断点.

在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内$f(x)$无间断点. 此外，由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin 2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}=\frac{1}{e-1}\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{\dfrac{1}{4}x}=\frac{8}{e-1}\neq0=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

所以$x=0$不是$f(x)$的可去间断点.

由此可知，$f(x)$的可去间断点数为1. 因此选(B).

附注 寻找分段函数的间断点，除各个分段区间内的间断点外，还应通过考虑函数在分段点处的连续性，确定它是否为间断点.

(2) $a=-2$，-1时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$上无定义，所以选项(A)，(B)应排除. 当$a=0$时，$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{e}$，且在$(0,+\infty)$上，由

$$f'(x)=\ln x+1\begin{cases}<0, & 0<x<\dfrac{1}{e},\\ =0, & x=\dfrac{1}{e},\\ >0, & x>\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

知，$f(x)$的单调减少区间仅为$\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$. 因此选(C).

附注　本题是对选项逐一检验，直到得到正确的选项为止. 这是求解单项选择题的常用方法之一.

(3) 当 $x<0$ 时，$F'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

当 $x>0$ 时，由 $F(x)=\int_{-x}^0\ln(1+f(x+t))\,\mathrm{d}t\xlongequal{令\ u=x+t}\int_0^x\ln(1+f(u))\,\mathrm{d}u$

得　$F'(x)=\ln(1+f(x))$. 此外，由

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}F'(x)=\lim_{x\to0^-}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}F'(x)=\lim_{x\to0^+}\ln(1+f(u))=\ln(1+f(0))=0$$

知 $F'(0)=0$. 所以由

$$F''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0,$$

$$F''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+f(x))}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$$

得 $F''(0)=0$. 因此选 (D).

附注　题解中 $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}F'(x)$ 与 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F'(x)$ 是根据以下结论：

设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，在 $(-\delta,0)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi'(x)$ 存在，则 $\varphi'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\varphi'(x)$；

设函数 $\psi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\psi'(x)$ 存在，则 $\psi'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\psi'(x)$.

第二个结论是2009年考研真题，第一个结论的证明与第二个相似. 因此上述这些结论都可作为定理用于解题.

(4) 由于 $a_0=\dfrac{2}{2}\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x=0$,

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{4}{\pi^2n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2} x^{2k-1}$.

记 $u_k = \dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2} x^{2k-1}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{u_{k+1}}{u_k} \right| = |x|^2$. 所以当 $|x| <1$ 时 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^2} x^{2k-1}$ 收敛;当 $|x|>1$ 时,$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^2} x^{2k-1}$ 发散. 此外,当 $x=-1,1$ 时,$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^2} x^{2k-1}$ 分别成为 $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^2}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^2}$,它们都是收敛级数. 于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^2} x^{2k-1}$ 的收敛域为 $[-1,1]$,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$,因此选 (D).

附注 缺项幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域可按以下步骤计算：

第一步计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$，设其为 $A(x)$；

第二步解不等式 $A(x)<1$，设其解为 $-a<x<a$；

第三步考虑 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在点 $x=-a,a$ 处的收敛性,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $(-a,a)$ 与收敛的端点的并集.

(5) 由 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (-\boldsymbol{A})^* = (-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$ 知，n 为奇数时，有 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^*$. 即 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵. 反之，当 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵，即 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^*$ 时，由以上计算得 $(-1)^{n-1}=1$，即 n 为奇数.

所以 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 n 为奇数的充分必要条件，因此选(C).

附注 对于 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n-1$. 因此 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}) = n$ 或 $n-1$.

(6) 由于 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以存在 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是，$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3) = r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{P}) = r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3| \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

所以 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3) = r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3) = 3$.

同样有 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3) = r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0，\text{但 } \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3 \text{ 的 2 阶子式} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3) = r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3) = 2$.

从而 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3) + r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3) = 5$. 因此选 (D).

附注　本题也可按以下方法计算：

$$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)=r\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3\end{array}\right),$$

其中 $\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$,

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=5$.

(7) 由关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ 关于 Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 知 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$，所以 X 与 Y 相互独立，从而

$$f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此可知选项（C）不正确. 因此选（C）.

附注　题解中，实际上已给出选项（A），（D）都正确. 选项（B）也是正确的，这是因为关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 所以 $EY=2$.

(8) 由题设知，X_1，X_2，X_3，X_4 相互独立，且

$$E(X_1-2X_2)=0,\quad D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=20,$$
$$E(3X_3-4X_4)=0,\quad D(3X_3-4X_4)=9D(X_3)+16D(X_4)=100.$$

于是 $\dfrac{1}{\sqrt{20}}(X_1-2X_2)\sim N(0,1)$，$\dfrac{1}{\sqrt{100}}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)$，且它们相互独立，所以，$\dfrac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\dfrac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2)$. 从而 $D(Z)=4$. 因此选（A）.

附注　设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n),\text{且 }EY=n,DY=2n;$$

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1),\text{且 }EZ=n-1,DY=2(n-1),$$

其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

二、填空题

(9) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$,

其中，$|(-1)^n\sin n|<1(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=e^0=1.$$

附注 设 $\alpha(x)$ 是有界函数，$\beta(x)$ 是某个极限过程中的无穷小，则在这个极限过程中有

$$\lim\alpha(x)\beta(x)=0.$$

(10) 由于 $x\in[-1,1]$ 时，$\psi(x)=(x-1)^2$，显然 $x\in[-1,0)$ 时，$\psi(x)>1$；$x\in[0,1]$ 时，$\psi(x)\leqslant 1$，所以

$$\varphi(\psi(x))=\begin{cases}\psi(x)\ln\psi(x), & x\in[-1,0),\\ 1-\psi(x), & x\in[0,1]\end{cases}=\begin{cases}(1-x^2)\ln(1-x)^2, & x\in[-1,0),\\ 1-(x-1)^2, & x\in[0,1].\end{cases}$$

于是 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))dx=\int_{-1}^{0}(1-x)^2\ln(1-x)^2dx+\int_0^1[1-(x-1)^2]dx$,其中

$$\int_{-1}^{0}(1-x)^2\ln(1-x)^2dx=-\frac{2}{3}\left[(1-x)^3\ln(1-x)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(1-x)^2dx\right]=\frac{16}{3}\ln2-\frac{14}{9},$$

$$\int_0^1[1-(x-1)^2]dx=1-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$

所以，$\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))dx=\left(\frac{16}{3}\ln2-\frac{14}{9}\right)+\frac{2}{3}=\frac{16}{3}\ln2-\frac{8}{9}.$

附注 平时应练习分段函数的复合运算.

(11) 由题设 $f(u,v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2})=-(u-1)-2(v-0)+o(\sqrt{(u-1)^2+(v-0)^2})$ 知

$$f(1,0)=0,\ f'_u(1,0)=-1,\ f'_v(1,0)=-2.$$

记 $u=e^y$，$v=x+y$，则 $g(x,y)=f(u,v)$，且

$$g'_x(x,y)=f'_v(u,v),\ g'_y(x,y)=f'_u(u,v)e^y+f'_v(u,v).$$

所以 $dg(x,y)\big|_{(0,0)}=g'_x(0,0)dx+g'_y(0,0)dy=f'_v(1,0)dx+[f'_u(1,0)+f'_v(1,0)]dy=-2dx-3dy$.

附注 本题获解的关键是由 $f(u,v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2})$ 得到 $f'_u(1,0)=-1$，$f'_v(1,0)=-2$.

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中

$$D=\left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ 1\leqslant r\leqslant-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

D 是由曲线Ⅰ:$r=1\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,Ⅱ:$r=-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$及Ⅲ:$\theta=0$ 围成.

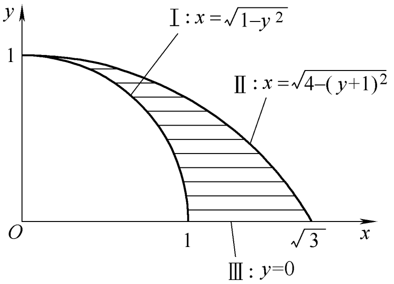
显然Ⅰ的方程为 $x=\sqrt{1-y^2}(0\leqslant y\leqslant1)$. 由于Ⅱ的方程可改写成

$$r^2=-r\sin\theta+\sqrt{3r^2+r^2\sin^2\theta},\ 即\ x^2+y^2+y=\sqrt{3x^2+4y^2},$$

或者,$x^2+y^2+2y-y=\sqrt{3x^2+4y^2}$,两边平方后得

$$(x^2+y^2+2y)^2-(2y+3)(x^2+y^2+2y)+3\cdot2y=0,$$

即$(x^2+y^2)(x^2+y^2+2y-3)=0$. 由此得到Ⅱ的方程为 $x^2+y^2+2y=3$,即 $x=\sqrt{4-(y+1)^2}(0\leqslant y\leqslant1)$. Ⅲ的方程为 $y=0$. 于是 D 如图答 3-12 阴影部分所示,所以有



图答　3-12

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

上式右边即为所求的先 x 后 y 的二次积分.

附注　对某个二次积分 I,要改变它的积分次序或积分坐标系,总是先写出与 I 相对应的二重积分,然后再将这个二重积分转化为所要求的二次积分.

(13) $$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}^*\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}&\boldsymbol{O}\\-(\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}&(\boldsymbol{C}^*)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\-\dfrac{1}{|\boldsymbol{C}|}\boldsymbol{CBA}&\dfrac{1}{|\boldsymbol{C}|}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:c}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\hdashline-\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

附注　这里利用了分块矩阵的求逆公式:

设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{D}$ 都是可逆矩阵,则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}&\boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

同样有,
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BD}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

(14) 由题设知 $P(A)=P(B)$,于是由 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$得

$$2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4},\text{ 即 }P(A)=\frac{1}{2}\left(\text{舍去了 }P(A)=\frac{3}{2}\right). \tag{1}$$

由此可知 $0<a<2$ $\left(\text{这是因为，如果 }a\leqslant 0\text{，则 }P(A)=1\text{，这与 }P(A)=\frac{1}{2}\text{矛盾；如果 }a\geqslant 2\text{，}\right.$ $\left.\text{则 }P(A)=0\text{，这也与 }P(A)=\frac{1}{2}\text{矛盾}\right)$. 于是由式(1)得

$$\frac{1}{2}=P(A)=\int_a^2\frac{3}{8}t^2\mathrm{d}t=1-\frac{1}{8}a^3,\text{即 }a=\sqrt[3]{4}.$$

附注 根据题设推出 $P(A)=P(B)$ 以及 $0<a<2$ 是本题获解的关键.

三、解答题

(15) 所给微分方程 $y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$ (1)

对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax\,(C_1,\ C_2\text{ 是任意常数}).$$

当 $a=1$ 时，式(1)有特解

$$y^*=x(A_1\sin x+B_1\cos x)+(A_2\sin 2x+B_2\cos 2x).$$

将它代入 $a=1$ 时的式(1)得

$$2A_1\cos x-2B_1\sin x-3A_2\sin 2x-3B_2\cos 2x=\sin x+2\cos 2x.$$

由此得到 $A_1=0$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$A_2=0$，$B_2=-\frac{2}{3}$. 故

$$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x.$$

因此，当 $a=1$ 时，式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x.$$

当 $a=2$ 时，式(1)有特解

$$y^*=A_1\sin x+B_1\cos x+x(A_2\cos 2x+B_2\sin 2x).$$

代入 $a=2$ 时的式(1)得

$$3A_1\sin x+3B_1\cos x-4A_2\sin 2x+4B_2\cos 2x=\sin x+2\cos 2x.$$

由此得到 $A_1=\frac{1}{3}$，$B_1=0$，$A_2=0$，$B_2=\frac{1}{2}$. 故

$$y^*=\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{2}x\sin 2x.$$

因此，当 $a=2$ 时，式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{2}x\sin 2x.$$

附注 设有 2 阶线性微分方程

$$y''+ay'+by=\mathrm{e}^{\alpha x}(a_1\cos\beta x+b_1\sin\beta x) \tag{*}$$

(其中 a，b，a_1，b_1，α，β 都是常数)，则式(*)有特解

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),$$

其中 $k=\begin{cases}0, & \text{当 } \alpha+\mathrm{i}\beta \text{ 是方程 } \lambda^2+a\lambda+b=0 \text{ 的 0 重根},\\ 1, & \text{当 } \alpha+\mathrm{i}\beta \text{ 是方程 } \lambda^2+a\lambda+b=0 \text{ 的 1 重根},\end{cases}$ 常数 A, B 可由 y^* 代入式(*)确定.

(16) 由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\int(x+y)\mathrm{d}y=xy+\dfrac{1}{2}y^2+\varphi(x)$. (1)

$z(x,0)=x$ 两边对 x 求偏导数得 $\dfrac{\partial z(x,0)}{\partial x}=1$，将它与由式(1)得到的 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=0}=\varphi(x)$ 比较得 $\varphi(x)=1$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+1. \tag{2}$$

由此得到 $z=\int\left(xy+\dfrac{1}{2}y^2+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+\psi(y)$. (3)

式(3)中令 $x=0$，则由 $z(0,y)=y^2$ 得 $\psi(y)=y^2$. 代入式(3)得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2. \tag{4}$$

由式(2)得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=x_0y_0+\dfrac{1}{2}y_0^2+1$，由式(4)得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0y_0+2y_0$. 于是由曲面 S：$z=z(x,y)(x>0)$ 的在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面与 π 平行得

$$\frac{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}{1}=\frac{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}{1}=\frac{-1}{-1}, \text{ 即}\begin{cases}x_0y_0+\dfrac{1}{2}y_0^2+1=1,\\ \dfrac{1}{2}x_0^2+x_0y_0+2y_0=1.\end{cases}$$

解此方程组 $x_0=\sqrt{2}$，$y_0=0$ 代入式(4)得 $z_0=\sqrt{2}$. 因此所求的点 $P=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

附注 题解中应注意的是：

由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，而不是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+C$. 同样，由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+1$ 得 $z=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+\psi(y)$，而不是 $z=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2+C$. 上述的 C 都为任意常数.

(17) 由于

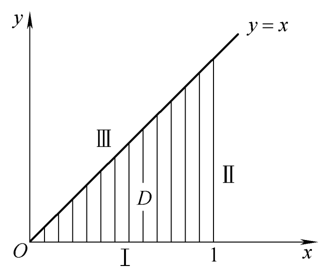
$$\begin{aligned}\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta&=\iint_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2+y^2}$. 此外

$$\begin{aligned}D&=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}\\&=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant x\},\end{aligned}$$

如图答 3-17 阴影部分所示. 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1-x^2+2y^2}{\sqrt{1-x^2+y^2}},$$



图答 3-17

所以$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$在 D 的内部无解，即 $f(x, y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

D 有边界Ⅰ：$y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$，Ⅱ：$x=1(0\leqslant y\leqslant 1)$ 以及Ⅲ：$y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

在Ⅰ上，$f(x, y)\equiv 0(0\leqslant x\leqslant 1)$，所以它的最大值与最小值都为 0.

在Ⅱ上，$f(x, y)=y^2(0\leqslant y\leqslant 1)$，所以它的最大值为 1，最小值为 0.

在Ⅲ上，$f(x, y)=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，所以它的最大值为 1，最小值为 0.

因此 $f(x, y)$ 在 D 的边界上，即在 D 上的最大值为 1，最小值为 0.

附注 题解时应注意的是，$f(x, y)$ 在极坐标系中的表达式 $r\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}$，而不是 $r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}$.

(18) Ω 的侧面方程为 $x^2+y^2-(z-1)^2=1$，所以

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D_z=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1+(z-1)^2\}$ 是 Ω 的水平截面(其立坐标 z)在 xOy 平面的投影. 所以

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v&=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+(z-1)^2}}r^2\cdot r\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^2\frac{1}{4}[1+(z-1)^2]\,\mathrm{d}z\xlongequal{令 t=z-1}\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}(1+t^2)^2\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^1(1+2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t=\frac{28}{15}\pi.\end{aligned}$$

附注 Ω 的水平截面是圆，所以对三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$ 用“先二后一”的方法计算.

(19) 记 $u_n(x)=\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)x^{2n+2}}{\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)x^{2n}}=|x|^2.$$

所以，所给幂级数在 $|x|<1$ 时收敛，$|x|>1$ 时发散，此外，在 $x=-1$，1 时，所给幂级数都成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$，它是发散级数.

因此，所给幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

由于
$$\begin{aligned}s(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\end{aligned}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}-x\right)$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}-1$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}-1$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n}\right]-1$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}[-\ln(1-x)+\ln(1+x)]-1$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln\frac{1+x}{1-x}-1\quad(x\in(-1,0)\cup(0,1)),$$

且 $s(0)=0$，所以，

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln\dfrac{1+x}{1-x}-1, & x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

附注　本题利用以下公式，快捷地算得幂级数的和函数：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n}\quad(-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}\quad(-1\leqslant x<1).$$

(20)(Ⅰ)由(A)与(B)等价知，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$. 由于

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&1&4\end{vmatrix}\neq 0,$$ 即 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=3$，所以

$r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=3$，即 $0\neq|(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=a-5$. 由此得到 $a\neq 5$.

(Ⅱ)当 $a\neq 5$ 时，由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2\ \vdots\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&-1&-1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&-1&-1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\dfrac{2a-14}{a-5}&\dfrac{-a+7}{a-5}&-1\\0&1&0&\dfrac{-a+3}{a-5}&\dfrac{a-4}{a-5}&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$$

知，(A)由(B)的线性表示式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{2a-14}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{-a+3}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2+\dfrac{2}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3,\\ \boldsymbol{\alpha}_2=\dfrac{-a+7}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{a-4}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2-\dfrac{1}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3,\\ \boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2.\end{cases}\tag{1}$$

附注 将初等行变换后的矩阵 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\dfrac{2a-14}{a-5}&\dfrac{-a+7}{a-5}&-1\\0&1&0&\dfrac{-a+3}{a-5}&\dfrac{a-4}{a-5}&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$ 的列向量由左至右顺序记为 $\boldsymbol{\beta}_1'$，$\boldsymbol{\beta}_2'$，$\boldsymbol{\beta}_3'$；$\boldsymbol{\alpha}_1'$，$\boldsymbol{\alpha}_2'$，$\boldsymbol{\alpha}_3'$，容易看到

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1'=\dfrac{2a-14}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1'+\dfrac{-a+3}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2'+\dfrac{2}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3',\\ \boldsymbol{\alpha}_2'=\dfrac{-a+7}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1'+\dfrac{a-4}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2'-\dfrac{1}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3'\\ \boldsymbol{\alpha}_3'=-\boldsymbol{\beta}_1'+2\boldsymbol{\beta}_2'.\end{cases}\tag{2}$$

由于“**初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系**”(记住这一结论)，因此由式(2)直接得到式(1)，即(A)由(B)线性表示式.

(A)由(B)的线性表示式也可以用以下方法计算：

记 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，则由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}$$

得

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 2-\frac{2}{a-5} & -1+\frac{4}{a-5} & -\frac{2}{a-5} \\ -1-\frac{1}{a-5} & 1+\frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} \\ \frac{1}{a-5} & -\frac{2}{a-5} & \frac{1}{a-5} \end{pmatrix}.$$

于是 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 2-\frac{2}{a-5} & -1+\frac{4}{a-5} & -\frac{2}{a-5} \\ -1-\frac{1}{a-5} & 1+\frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} \\ \frac{1}{a-5} & -\frac{2}{a-5} & \frac{1}{a-5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} \frac{2a-14}{a-5} & \frac{-a+7}{a-5} & -1 \\ \frac{-a+3}{a-5} & \frac{a-4}{a-5} & 2 \\ \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} & 0 \end{pmatrix},$$

它即为式(1).

(21)(Ⅰ)由于$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，记它对应的特征值为 λ，则有

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & -a \\ -4 & -a & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0,\text{ 即}\begin{cases} \lambda-2=0, \\ 1+2(\lambda-3)-a=0, \\ -4-2a+\lambda=0. \end{cases}$$

解此方程组得 $\lambda=2$，$a=-1$.

将 $a=-1$ 代入 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)=0,$$

它的根除 $\lambda_1=\lambda=2$ 外，还有 $\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$，所以，$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$的标准形为 $2y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

由于 $\boldsymbol{A}^*$ 是实对称矩阵，所以它能化为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$. 由于 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-20$，$\mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-8$，$\mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=10$，所以

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-20 & & \\ & -8 & \\ & & 10\end{pmatrix}.$$

由题设知，$\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda_2=5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(u_1,\ u_2,\ u_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=0. \tag{1}$$

由于 $\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & -9 & -9\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，式(1)与$\begin{cases}u_2+u_3=0,\\ u_1+u_2=0\end{cases}$同解，它的基础解系为$(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，故取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(v_1,\ v_2,\ v_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_1)=0,\\ (\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_2)=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}v_1+2v_2+v_3=0,\\ v_1-v_2+v_3=0,\end{cases}$$

它的基础解系为$(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，故取 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$. 显然，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 是正交向量组. 现将其单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\ \frac{2}{\sqrt6},\ \frac{1}{\sqrt6}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\ -\frac{1}{\sqrt3},\ \frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1^0,\ \boldsymbol{\xi}_2^0,\ \boldsymbol{\xi}_3^0)$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求的正交矩阵.

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，且有特征值 λ 及与之对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\mu=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$. 所以当 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵时，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 也是对角矩阵，且对角线上的元素都是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

(22) 由 $\displaystyle\iint\limits_{xOy\text{平面}}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=1$，即$\displaystyle\iint\limits_{G}Ax^2y\,\mathrm{d}\sigma=1$ 得

$$A=\frac{1}{\displaystyle\iint\limits_{G}x^2y\,\mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}x^2y\,\mathrm{d}y}=\frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)\,\mathrm{d}x}=\frac{21}{4},$$

所以，$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & (x,\ y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$D(2X+3Y)=E[(2X+3Y)^2]-[E(2X+3Y)]^2,$$

其中 $\displaystyle E[(2X+3Y)^2]=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(2x+3y)^2f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_G (2x+3y)^2 \cdot \frac{21}{4}x^2 y \mathrm{d}\sigma = \frac{21}{4}\iint_G (4x^4 y + 12x^3 y^2 + 9x^2 y^3)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{21}{4}\cdot 2\iint_{G_1}(4x^4 y + 9x^2 y^3)\mathrm{d}\sigma \left(\begin{array}{l}\text{由于 } G \text{ 关于 } y \text{ 轴对称}, 4x^4 y + 9x^2 y^3 \text{ 在对} \\ \text{称点处的值彼此相等, 而 } 12x^3 y^2 \text{ 的值互} \\ \text{为相反数}, D_1 \text{ 是 } D \text{ 的第一象限部分}\end{array}\right)$$

$$= \frac{21}{2}\int_0^1 \left(2x^4 y^2 + \frac{9}{4}x^2 y^4\right)\Big|_{y=x^2}^{y=1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{21}{2}\int_0^1 \left(\frac{9}{4}x^2 + 2x^4 - 2x^8 - \frac{9}{4}x^{10}\right)\mathrm{d}x = \frac{2506}{165},$$

$$E(2X+3Y) = \iint_{xOy\text{平面}} (2x+3y)f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_G (2x+3y)\cdot\frac{21}{4}x^2 y \mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{21}{4}\iint_G (2x^3 y + 3x^2 y^2)\mathrm{d}\sigma = \frac{21}{4}\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 (2x^3 y + 3x^2 y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{21}{4}\int_{-1}^1 (x^3 y^2 + x^2 y^3)\Big|_{y=x^2}^{y=1}\mathrm{d}x = \frac{21}{2}\int_0^1 (x^2 - x^8)\mathrm{d}x = \frac{7}{3}.$$

于是，$D(2X+3Y) = \frac{2506}{165} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{4921}{477}.$

附注　应记住随机变量 X 的方差计算公式：

$$DX = E(X^2) - (EX)^2$$

(23) 由于 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases}\frac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 记 $z = x^2$，则它在 $f(x)\neq 0$ 的区间$(\alpha, +\infty)$上单调增加，反函数 $x = h(z) = \sqrt{z}(z>\alpha^2)$，于是 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} f(h(z))\,|\,h'(z)\,|\,, & z>\alpha^2, \\ 0, & \text{其他}\end{cases} = \begin{cases}\frac{\alpha^2}{z^2}, & z>\alpha^2, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

记样本观察值为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$(由于现在是计算最大似然估计量，可认为它们都大于 α^2)，故有似然函数为

$$L(\alpha^2) = \frac{\alpha^2}{z_1^2}\cdot\frac{\alpha^2}{z^2}\cdots\frac{\alpha^2}{z_1^2} = \frac{(\alpha^2)^n}{z_1^2 z_2^2\cdots z_n^2}.$$

由于 $\frac{\mathrm{d}L(\alpha^2)}{\mathrm{d}\alpha^2} = \frac{n(\alpha^2)^{n-1}}{z_1^2 z_2^2\cdots z_n^2} > 0$，所以 α^2 的最大似然估计值为 $\min\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$. 从而 α^2 的最大似然计量为$\widehat{\alpha^2} = \min\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}$.

由最大似然值估计量的不变性得 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\widehat{\alpha^2}} = \sqrt{\min\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}}.$$

附注　本题也可计算如下：

由于 X 的概率密度 $f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且 X 有简单随机样本值 $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \cdots, \sqrt{z_n}$ (它们都大于 α)，所以有似然函数

$$L(\alpha)=\frac{2\alpha^2}{z_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{2\alpha^2}{z_2^{\frac{3}{2}}}\cdots\frac{2\alpha^2}{z_n^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^n}{(z_1z_2\cdots z_n)^{\frac{3}{2}}}\alpha^{2n}.$$

于是由 $\dfrac{\mathrm{d}L(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\dfrac{2^n\cdot 2n}{(z_1z_2\cdots z_n)^{\frac{3}{2}}}\alpha^{2n-1}>0$ 知，α 的最大似然估计值为 $\min\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}=\sqrt{\min\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}}$. 所以 α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}=\sqrt{\min\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}}$.

模拟试题(四)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	B	C	D	C	A	A	C

(1) 由$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点知，$(x_0, -f(x_0))$是曲线$y=-f(x)$的拐点. 因此选(B).

附注 实际上，$(-x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(-x)$的拐点，$(-x_0, -f(x_0))$是曲线$y=-f(-x)$的拐点.

(2) 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin(\sin x)\leqslant \sin x$(仅在点$x=0$处取等号)，$\cos(\sin x)\geqslant \cos x$(仅在点$x=0$处取等号)，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x = 1, \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = 1.$$

故有$I_1<I_3$. 因此选(B)

附注 选项(A)是不正确的，这是由于

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\sin x) - \sin(\cos x)]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x) - \sin(\cos x)]\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\sin x) - \sin(\cos x)]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x) - \sin(\cos x)]\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\cos t) - \sin(\sin t)]\mathrm{d}t \\
&\qquad \left(\text{其中 } x = \frac{\pi}{2} - t\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x) - \sin(\cos x)]\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\cos x) - \sin(\sin x)]\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

即$I_1 = I_2$.

(3) 当$(x, y)\neq(0, 0)$时，

$$f'_x(x, y) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

并且 $f'_x(0, 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=0,$

$$f'_y(0, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0, y)-f(0, 0)}{y}=0,$$

所以，$f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\frac{-y^5}{y^4}}{y}=-1$，

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^5}{x}}{x}=1,$$

故 $f''_{xy}(0,0)<f''_{yx}(0,0)$. 因此选（C）.

附注 在已算出 $f'_x(x,y)$ 时，可按以下方法快捷算出 $f'_y(x,y)$：

当 $\varphi(y,x)=-\varphi(x,y)$ 时，$\varphi'_y(x,y)=-\varphi'_x(y,x)$.

因此本题有 $f'_y(x,y)=-f'_x(y,x)=-\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{x与y互换}=\dfrac{x^5-4x^2y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.

（4）$\displaystyle\iiint_\Omega f(x)\,\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\iint_{D_x}f(x)\,\mathrm{d}\sigma$ （其中 $D_x=\{(y,z)\mid y^2+z^2\leqslant1-x^2\}$ 是 Ω 的横坐标为 $x(-1\leqslant x\leqslant1)$ 截面在 yOz 平面的投影）

$$=\int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2\pi(1-x^2)f(x)\,\mathrm{d}x.$$ 因此选（D）.

附注 由于 Ω 的横坐标为 x 的截面为圆，所以对所给的三重积分采用“先二后一”方法进行计算.

（5）由于 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\2&-4&5&-8\\3&1&4&2\\3&1&t+2&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&4&-5&8\\0&4&t-7&t+6\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-2&-1&-4\\4&-5&8\\4&t-7&t+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&2&4\\0&-7&0\\0&t-9&t-2\end{vmatrix}=14(t-2),$$

所以，$t=2$ 时，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；$t=3$ 时，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|\neq0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 由此可知，结论①④正确，因此选（C）.

附注 确定 n 个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性相关性的好方法是计算行列式 $D=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|$. 如果 $D=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；如果 $D\neq0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

（6）由 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-a&\lambda-1&-b\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1$（二重），$\lambda=-1$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，所以 $r(1\cdot\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})=3-2=1$，即

$$r\begin{pmatrix}1&0&-1\\-a&0&-b\\-1&0&1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&0&-1\\-a&0&-b\\0&0&0\end{pmatrix}=1,\ 从而 -a=b. \tag{1}$$

用 $-b-1$ 代替 b，$\boldsymbol{A}$ 就成为 $\boldsymbol{B}$，所以由 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化得

$$-a=-b-1. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$. 因此选（A）.

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条有较多种，其中常用的有：

设 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ_1，λ_2，…，λ_s，它们的重数分别为 n_1，n_2，…，$n_s(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化充分必要条件为

$$r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n-n_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

（7）由 $P(X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\frac{4}{7}$ 得

$$P(X\geqslant 0,\ Y<0)=P(X\geqslant 0)-P(X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)=\frac{1}{7},$$

$$P(X<0,\ Y\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)-P(X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)=\frac{1}{7},$$

$$P(X\leqslant 0,\ Y\leqslant 0)=1-P(X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)-P(X\geqslant 0,\ Y<0)-P(X<0,\ Y\geqslant 0)=\frac{2}{7},$$

所以

$$\begin{aligned}P(\max\{X,\ Y\}\cdot X\geqslant 0)&=P(\max\{X,\ Y\}\geqslant 0,\ X\geqslant 0)+P(\max\{X,\ Y\}\leqslant 0,\ X\leqslant 0)\\&=P(X\geqslant 0)P(\max\{X,\ Y\}\geqslant 0\mid X\geqslant 0)+P(X\leqslant 0,\ Y\leqslant 0,\ X\leqslant 0)\\&=P(X\geqslant 0)+P(X\leqslant 0,\ Y\leqslant 0)=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}.\end{aligned}$$

因此选（A）.

附注　题解中有两点值得注意

（Ⅰ）由于 X，Y 是连续型随机变量，所以 $P(X\leqslant 0,\ Y\leqslant 0)=P(X<0,\ Y<0)$.

（Ⅱ）由于 $X\geqslant 0$ 时，必有 $\max\{X,\ Y\}\geqslant 0$，所以 $P(\max\{X,\ Y\}\geqslant 0\mid X\geqslant 0)=1$.

（8）由题设知 $\overline{X}\sim N\left(0,\ \frac{\sigma^2}{9}\right)$，所以

$$P(1<\overline{X}<3)=P\left(\frac{3}{\sigma}<\frac{\overline{X}-0}{\frac{\sigma}{3}}<\frac{9}{\sigma}\right)=\int_{\frac{3}{\sigma}}^{\frac{9}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\xlongequal{\text{记}}f(\sigma).$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\sigma}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{81}{2\sigma^2}}\left(-\frac{9}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{2\sigma^2}}\left(-\frac{3}{\sigma^2}\right)\\&=-\frac{3}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}e^{-\frac{9}{2\sigma^2}}(3e^{-\frac{36}{\sigma^2}}-1)\begin{cases}>0, & 0<\sigma<\frac{6}{\sqrt{\ln 3}},\\=0, & \sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}},\\<0, & \sigma>\frac{6}{\sqrt{\ln 3}},\end{cases}\end{aligned}$$

所以，使得 $P(1<\overline{X}<2)$ 为最大的 $\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$. 因此选(C).

附注 应记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $\mu=EX$，$\sigma^2=DX$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$（样本均值），$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

$$E\overline{X}=\mu,\ D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},\ E(S^2)=\sigma^2,$$

于是，当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，并且 $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

二、填空题

(9) 由于$(\sin x^3)^3$ 是奇函数，所以它在点 $x=0$ 处的 4 阶导数为 0.

由于

$$(\ln\cos x)'=-\tan x,\ (\ln\cos x)''=(-\tan x)'=-\sec^2x,$$
$$(\ln\cos x)^{(3)}=(-\sec^2x)'=-2\sec^2x\tan x,$$

所以，$(\ln\cos x)^{(4)}\Big|_{x=0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\ln\cos x)^{(3)}-(\ln\cos x)^{(3)}\Big|_{x=0}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sec^2x\tan x}{x}=-2.$

从而，$f^{(4)}(0)=0+(-2)=-2.$

附注 设$f(x)$在点 $x=0$ 处任意阶可导，则

当$f(x)$是奇函数时，$f^{(2k)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$；

当$f(x)$是偶函数时，$f^{(2k+1)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$.

(10) 令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln x$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

将它们代入所给微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t. \tag{1}$$

式(1)的齐次方程的通解为$\overline{Y}=C_1+C_2\mathrm{e}^{2t}$. 式(1)有特解 $y^*=t(A+Bt)$，将它代入式(1)得 $A=B=-\frac{1}{4}$，即 $y^*=t\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right)=-\frac{1}{4}(t+t^2)$，所以式(1)的通解为

$$y=\overline{Y}+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{4}(t+t^2).$$

从而所求的通解为 $y=C_1+C_2x^2-\frac{1}{4}(\ln x+\ln^2x)$.

附注 $x^2y''+axy'+by'=f(x)$是 2 阶欧拉方程，令 $x=\mathrm{e}^t$ 可转化成 2 阶常系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(a-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+by=f(\mathrm{e}^t).$$

(11) $\int_{-1}^{1}(|x|\mathrm{e}^{-x}+\sin x^3+\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{0}-x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}-\int_{0}^{1}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}+\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(x\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)-\left(x\mathrm{e}^{-x}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)+\frac{\pi}{2}=2-\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{\pi}{2}.$$

附注　利用定积分几何意义，有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\text{上半单位圆的面积}=\frac{\pi}{2}.$$

(12) 由于 C 关于 x 轴对称，在对称点处 xy 互为相反数，所以 $\oint_C xy\mathrm{d}s=0$. 此外，C 的极坐标方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta,\\ y=\dfrac{a}{2}\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$. 因此

$$\oint_C(x^2+4y^2+xy)\mathrm{d}s=\oint_C(x^2+4y^2)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2+4\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2\right]\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{3}{8}\cos2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{7}{8}\pi a^3.$$

于是，由题得 $\frac{7}{8}\pi a^3=\frac{7}{8}\pi$，从而 $a=1$.

附注　利用曲线 C 的对称性，可以化简关于弧长的曲线积分的计算：

设 $f(x,y)$ 连续，曲线 C 具有某种对称性，则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 在对称点处的值互为相反数},\\ 2\int_{C_1}f(x,y)\mathrm{d}s, & \text{当 } f(x,y) \text{ 在对称点处的值彼此相等},\end{cases}$$

其中 C_1 是 C 按其所具有的对称性被划分成的两部分之一.

(13) 由题设得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且式(1)可以表示为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

由 $|\lambda E_3-B| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$ 知，B 的最大特征值为 2，从而 A 的最大特征值为 2.

附注 设 A 与 B 都是 n 阶矩阵，如果它们相似，则

（Ⅰ）$|A|=|B|$.

（Ⅱ）$r(A)=r(B)$，从而 A 与 B 等价.

（Ⅲ）A，B 有相同的特征值.

（Ⅳ）$A^*\sim B^*$.

（Ⅴ）当 A 可逆时，B 也可逆，且 $A^{-1}\sim B^{-1}$.

（14）记 $X=\{$乙箱中的次品数$\}$，

$Y=\{$从乙箱中取出的次品数$\}$，

则
$$P(Y=1)=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)+P(X=2)P(Y=1\mid X=2)+P(X=3)$$
$$P(Y=1\mid X=3)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}\cdot\frac{C_1^1C_5^2}{C_6^3}+\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}\cdot\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}+\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{207}{400},$$
$$P(Y=2)=P(X=2)P(Y=2\mid X=2)+P(X=3)P(Y=2\mid X=3)$$
$$=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}\cdot\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}+\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{45}{400},$$
$$P(Y=3)=P(X=3)P(Y=3\mid X=3)=\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{400}.$$

所以，所求的平均值 $=EY=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)+2\cdot P(Y=2)+3\cdot P(Y=3)$
$$=\frac{207}{400}+\frac{90}{400}+\frac{3}{400}=\frac{3}{4}.$$

附注 由于 Y 可能取的值为 0，1，2，3，所以
$$EY=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)+2\cdot P(Y=2)+3\cdot P(Y=3).$$
但是，在具体计算时，$P(Y=0)$ 是不必算出的.

三、解答题

（15）由 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处左连续知，
$$A=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)^2\sin\pi x}\xlongequal{令\ t=1-x}\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t^2\sin\pi t}$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{t^3}\xlongequal{洛必达法则}\frac{1}{\pi}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos\pi t}{3t^2}$$
$$=\frac{1}{3\pi}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(\pi t)^2}{t^2}=\frac{\pi}{6}.$$

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ)作变量代换，将 $x\to1^-$ 转换成 $t\to0^+$.

(Ⅱ)对$\frac{0}{0}$型未定式极限$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t^2\sin\pi t}$在应用洛必达法则前，先用等价无穷小代替，将未定式极限简化为$\frac{1}{\pi^2}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{t^3}$.

(16)记$f(x)=xe^{2x}-2x-\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则$f(x)$在$[0,1]$上连续，且

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2+\sin x+x,$$
$$f''(x)=4e^{2x}+4xe^{2x}+\cos x+1>0\quad(x\in(0,1)),$$

所以由$f'(0)f'(1)=(-1)\times(3e^2-1+\sin1)<0$知，存在唯一的$x_0\in(0,1)$，使得

$$f'(x)\begin{cases}<0, & x\in(0,x_0),\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x\in(x_0,1).\end{cases}$$

于是$f(x)<f(0)=-1<0(x\in[0,x_0])$，即方程$f(x)=0$在$[0,x_0]$上无实根. 由于$f(x_0)f(1)=f(x_0)\left(e^2-2-\cos1+\frac{1}{2}\right)<0$，且$f(x)$在$(x_0,1)$内单调增加，所以方程$f(x)=0$在$(x_0,1)$内有且仅有一个实根.

综上所述，方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

附注　由于$f'(x)$在$(0,1)$内是变号的，所以不能由$f(0)f(1)<0$确定方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根. 因此需进一步分析，即考虑$f''(x)$. 本题就是按此思路求解的.

(17)由$\varphi(x)$单调知，它的反函数$\varphi^{-1}(x)$存在，于是由$\varphi(x)$可导得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)dt&=\varphi^{-1}(\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx}\\&=x[f'_u(x,f(x,x))+f'_v(x,f(x,x))(f'_u(x,x)+f'_v(x,x))],\end{aligned}$$

从而$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)dt\Big|_{x=1}&=f'_u(1,1)+f'_v(1,1)[f'_u(1,1)+f'_v(1,1)]\\&=f'_u(1,1)+f'_v(1,1)(2+3)=2+3(2+3)=17.\end{aligned}$$

附注　题解中应注意的是：$\varphi^{-1}(\varphi(x))=x$.

(18)由于

$$\begin{aligned}s(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1}=\sqrt2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^{2n+1}\\&=\sqrt2\sin\frac{x}{\sqrt2}\quad(-\infty<x<+\infty),\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{+\infty} e^{-x}s^2(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot 2\sin^2 \frac{x}{\sqrt{2}}dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}(1-\cos\sqrt{2}x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{2}xdx, \quad (1)$$

其中, $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$,此外由

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{2}xdx = -\int_0^{+\infty}\cos\sqrt{2}xde^{-x} = -\left(e^{-x}\cos\sqrt{2}x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\sqrt{2}\sin\sqrt{2}xdx\right)$$

$$= 1+\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\sin\sqrt{2}xde^{-x}$$

$$= 1+\sqrt{2}\left(e^{-x}\sin\sqrt{2}x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}xdx\right)$$

$$= 1-2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{2}xdx$$

得 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{2}xdx = \frac{1}{3}$. 将以上计算代入式(1) 得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}s^2(x)dx = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

附注 应记住 $\sin x$, $\cos x$ 的麦克劳林展开式:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}(-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}(-\infty < x < +\infty).$$

本题就是按此公式快捷算得所给幂级数的和函数 $s(x)$.

(19) 所给微分方程 $\frac{4}{\pi^2}\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$ (1)

对应的齐次微分方程的通解为 $Y=C_1\cos\frac{\pi}{2}x+C_2\sin\frac{\pi}{2}x$, 此外, 式(1)有特解 $y^*=x$, 所以式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos\frac{\pi}{2}x+C_2\sin\frac{\pi}{2}x+x, \quad (2)$$

且
$$y'=-\frac{\pi}{2}C_1\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}C_2\cos\frac{\pi}{2}x+1. \quad (3)$$

将 $y(0)=1$, $y'(0)=1+\frac{\pi}{2}$代入式(2), 式(3)得 $C_1=C_2=1$, 所以

$$y(x)=\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x+x.$$

下面计算 $y(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$的傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x$,

$$a_0=\int_{-1}^{1}\left[\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

对于 $n=1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-1}^{1}\left[\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 2\cos\frac{\pi}{2}x\cos n\pi x\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)x\right]\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-n\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)x\right]\Bigg|_0^1\\&=(-1)^{n-1}\frac{4}{(4n^2-1)\pi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\int_{-1}^{1}\left[\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]\sin\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1\left[\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]\sin n\pi x\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x+x\right)\mathrm{d}\cos n\pi x\\&=-\frac{2}{n\pi}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}x+x\right)\cos n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x+1\right)\cos n\pi x\mathrm{d}x\right]\\&=(-1)^{n-1}\frac{4}{n\pi}+\frac{1}{n}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\cos n\pi x\mathrm{d}x\\&=(-1)^{n-1}\frac{4}{n\pi}+\frac{1}{2n}\int_0^1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)x\right]\mathrm{d}x\\&=(-1)^{n-1}\frac{4}{n\pi}+\frac{1}{2n}\cdot(-1)^{n-1}\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\quad\text{（利用 }a_n\text{ 的计算结果）}\\&=(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{n\pi}+\frac{2}{n(4n^2-1)\pi}\right],\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\cos n\pi x+(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{n\pi}+\frac{2}{n(4n^2-1)\pi}\right]\sin n\pi x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

附注　要熟练掌握函数 $f(x)(-l\leqslant x\leqslant l)$ 的傅里叶系数的计算.

(20) 由 $\boldsymbol{A}$ 有零特征值知

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&0&a-3\end{vmatrix}=a-1=0,\text{ 即 }a=1.$$

要使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，必须 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$. 于是由

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&2&3\\2&1&5&3&4&8\\-1&0&-2&b+1&c-2&-3\end{array}\right)\quad\text{（已将 }a=1\text{ 代入）}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&2&3\\0&1&1&-1&0&2\\0&0&0&b+3&c&0\end{array}\right)$$

知$\begin{cases}b+3=0,\\c=0,\end{cases}$即 $b=-3$，$c=0$.

设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$，并将 $a=1$，$b=-3$，$c=0$ 代入，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 与

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\tag{1}$$

同解，而式(1)即为以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.\tag{4}$$

显然，式(2)的通解为 $C_1(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(2,-1,0)^{\mathrm{T}}=(2C_1+2,C_1-1,-C_1)^{\mathrm{T}}$，

式(3)的通解为 $C_2(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(2,0,0)^{\mathrm{T}}=(2C_2+2,C_2,-C_2)^{\mathrm{T}}$，

式(4)的通解为 $C_3(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,2,0)^{\mathrm{T}}=(2C_3+3,C_3+2,-C_3)^{\mathrm{T}}$，

所以，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2C_1+2&2C_2+2&2C_3+3\\C_1-1&C_2&C_3+2\\-C_1&-C_2&-C_3\end{pmatrix}$ （其中，C_1，C_2，C_3 是任意常数）.

附注 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解法见模拟试题(二)(20)的解答.

(21)（Ⅰ）由于 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0$ 的解为 $a=1$，-2.

当 $a=1$ 时，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right)$$

知，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a=-2$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\text{知，}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 设表示式为 $\boldsymbol{\beta} = x\boldsymbol{\alpha}_1 + y\boldsymbol{\alpha}_2 + z\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$. 由以上的初等行变换知，该方程组与 $\begin{cases} x - z = 1, \\ y - z = 0 \end{cases}$ 同解. 它对应的齐次线性方程组的通解为 $C(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，且有特解 $(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$. 所以它的通解为 $(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}} = C(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}} + (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} = (C+1,\ C,\ C)^{\mathrm{T}}$. 从而所求的 $a = -2$，线性表示式的一般形式为

$$\boldsymbol{\beta} = (C+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + C\boldsymbol{\alpha}_2 + C\boldsymbol{\alpha}_3 \quad (\text{其中 } C \text{ 是任意常数}).$$

(Ⅱ) 由于 $a = -2$ 时，

$$|\lambda \boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & \lambda+2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix},$$

$$= \lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda = 0,\ 3,\ -3$.

设对应 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

由于

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以式(1)与方程组 $\begin{cases} a_1 - a_3 = 0, \\ a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ 同解，故 $\boldsymbol{a}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{a} = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{b}$ 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

由于 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以式

(2)与方程组$\begin{cases} b_1 \quad + b_3 = 0, \\ b_2 \quad\quad = 0 \end{cases}$同解，故 $\boldsymbol{b}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都正交，所以有$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1 \quad\quad -c_3=0, \end{cases}$故 $\boldsymbol{c}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{c}=(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是正交向量组，现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$(正交矩阵)，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$化为标准形 $3y_2^2-3y_3^2$.

附注 由于当 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|\neq 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示. 因此题解从 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|=0$ 入手.

(22) 由 $EZ=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(2x-y)f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Delta}(2x-y)\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}\sigma$

(其中 $\Delta=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<2x\}$)

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2x}(2x-y)\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{2}x\cdot\left[-\frac{1}{2}(2x-y)^2\right]\Bigg|_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 3x^3\mathrm{d}y=\frac{3}{4}$$

得 $DZ=E(Z^2)-(EZ)^2$

$$=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(2x-y)^2f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\frac{9}{16}=\iint\limits_{\Delta}(2x-y)^2\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}\sigma-\frac{9}{16}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2x}(2x-y)^2\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}y-\frac{9}{16}=\int_0^1\frac{3}{2}x\cdot\left[-\frac{1}{3}(2x-y)^3\right]\Bigg|_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x-\frac{9}{16}$$

$$=\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x-\frac{9}{16}=\frac{19}{80}.$$

由 $Z=2X-Y$ 得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) \frac{1}{|-1|} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) \mathrm{d}x,$$

其中 $f(x,\ 2x-z)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,\ 0<2x-z<2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,\quad 0<z<2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x, & 0<z<2,\quad \dfrac{z}{2}<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此 $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) \mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{z}{2}}^{1} \frac{3}{2}x\mathrm{d}x, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left(1 - \dfrac{1}{4}z^2\right), & 0<z<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

附注　记住以下公式：

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为$f(x,\ y)$，则随机变量$Z=aX+bY+c$(a，b，c是常数)的概率密度可按以下公式计算：

当 $a\neq 0$ 时，$f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z - by - c}{a}, y\right)\frac{1}{|a|}\mathrm{d}y$，

当 $b\neq 0$ 时，$f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z - ax - c}{b}\right)\frac{1}{|b|}\mathrm{d}x$.

(23) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z\leqslant z) = P(XY\leqslant z) \\ &= P(Y=-1)P(XY\leqslant z \mid Y=-1) + P(Y=1)P(XY\leqslant z \mid Y=1) \\ &= \frac{1}{3}P(X\geqslant -z) + \frac{2}{3}P(X\leqslant z) \quad (\text{这里利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \\ &= \frac{1}{3}\int_{-z}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

所以，Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

即 $Z\sim N(0,\ \sigma^2)$. 于是由矩估计法，令

$$E(Z^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2, \text{即 } \sigma^2 + 0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

因此 σ^2 的矩估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$.

附注 记住以下结论是有用的.

设 X_1，X_2，…，X_n 是总体 X 的简单随机样本，则当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，μ 的矩估计量为 $\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$\sigma^2$ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. 当 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 时，σ^2 的矩估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

模拟试题(五)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	A	B	D	C	C	B	B	C

(1) 由于

$|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=-\sin\pi x$;

$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=x$;

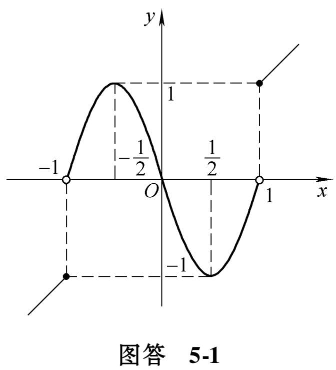
$x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=1$;

$x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=-1$,

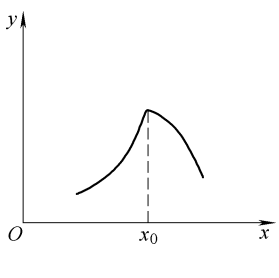
所以，$y=f(x)=\begin{cases}-\sin\pi x, & |x|<1,\\ x, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$的图形如图答 5-1 所示，由图可知，$f(x)$的极大值为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$，极小值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$. 因此选(A).

附注 画图得到正确选项，是解选择题常用的方法之一.

(2) 选项(A)与(B)必有一个是不正确的. 现按题设可得 $y=f(x)$在点 x_0 的邻域内的图形，如图答 5-2 所示，由图可知，$f(x)$在点 x_0 不可导，因此选(B).



图答 5-1



图答 5-2

附注 实际上，$f(x)$在点 x_0 处不可导可以用反证法证明. 具体如下：

设 $f(x)$在点 x_0 处可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0(\text{由于} f(x)\text{在点} x_0 \text{的左侧邻近是单调增加的}),$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0\text{(由于}f(x)\text{在点 }x_0\text{ 的右侧邻近是单调减小的).}$$

所以，$f'(x_0)=0$. 于是对于点 x_0 左侧邻近的任意 x 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\\&=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\geqslant f(x_0)\left(\begin{array}{l}\text{其中 }\xi\in(x,x_0).\text{ 由于 }y=f(x)\text{ 的图形在点 }x_0\text{ 的}\\\text{左侧邻近是凹的，所以 }f''(\xi)\geqslant 0\end{array}\right),\end{aligned}$$

这与$f(x)$在点 x_0 左侧邻近单调增加(即$f(x)<f(x_0)$)矛盾. 由此证得$f(x)$在点 x_0 处不可导.

显然证明是不易的，但在求解选择题时，是不必寻求这样复杂的证明，有时画出简图即可得到符合题意的选项.

(3) 对于选项(D)，由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}=0$. 所以有 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}\right]=0$. 同样可得 $f'_y(0,0)=0$. 于是由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

所以由二元函数可微的定义知，$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，因此选(D).

附注 显然，选项(A)，(B)不是$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充分条件. 选项(C)也不是充分条件. 例如$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，由

$$f'_x(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0\text{，特别 }f'_x(0,0)=0$$

知，$\lim\limits_{x\to 0}f'_x(x,0)=f'_x(0,0)$，同样有$\lim\limits_{y\to 0}f'_y(0,y)=f'_y(0,0)=0$. 但是由

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq 0$$

知，$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

(4) 显然选项(A)，(B)的微分方程不可能有特解 y_1，y_2 和 y_3.

由于$\dfrac{dy_1}{dx}=1+\ln x$，$\dfrac{d^2y_1}{dx^2}=\dfrac{1}{x}$，所以 $x^2\dfrac{d^2y_1}{dx^2}-x\dfrac{dy_1}{dx}+y_1=0$.

由于$\dfrac{dy_2}{dx}=2+\ln x$，$\dfrac{d^2y_2}{dx^2}=\dfrac{1}{x}$，所以 $x^2\dfrac{d^2y_2}{dx^2}-x\dfrac{dy_2}{dx}+y_2=0$.

由于 $y_3=3y_1-y_2$，所以它必满足 $x^2\dfrac{d^2y_3}{dx^2}-x\dfrac{dy_3}{dx}+y_3=0$. 因此选(C)

附注 (C)是正确的选项，也可如下证明：

令 $x=e^t$，则 $y_1=te^t$，$y_2=te^t+e^t$，$y_3=2te^t-e^t$，选项(C)中的微分方程(欧拉方程)成为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{1}$$

由于(1)的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ 有根 $\lambda=1$(二重)，所以选项(C)的方程有特解 y_1，y_2，y_3.

(5) 由于选项(C)与(D)有且仅有一个是正确的，因此只要考虑这两个选项即可. 由 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})\leqslant n<n+1$ 知，$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 因此选(C).

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则

$r(\boldsymbol{A})=n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充分必要条件；

$r(\boldsymbol{A})<n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件.

(6) $\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1，1，2. 由 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$ 知，选项(A)的矩阵 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda=3$，-1(二重)，它与 $\boldsymbol{A}$ 有不同的特征值，故不与 $\boldsymbol{A}$ 相似，从而不能选(A).

对于选项(B)的矩阵 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$，由 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{3}{2}\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$ 知，它有特征值 -1，1，2，即与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，所以这个实对称矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 相似且合同. 因此选(B).

附注　(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件有以下两类：

(i) 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$；

(ii) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，或者 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值(n_i 重以 n_i 个计算).

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有以下三类：

(i) 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$；

(ii) 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$)有相同的规范形，或者二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$ 有相同的正惯性指数，也有相同的负惯性指数；

(iii) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值(n_i 重的以 n_i 个计算).

(7) 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P\left(\max\left\{x, x^2, \frac{1}{2}\right\}\leqslant y\right)\\&=P\left(X\leqslant y, X^2\leqslant y, \frac{1}{2}\leqslant y\right)\\&=\begin{cases}0, & y<\frac{1}{2},\\ P(X\leqslant y, -\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}), & y\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{2},\\ P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant y), & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant \sqrt{y}), & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{2},\\ \int_0^y 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x, & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ \int_0^{\sqrt{y}} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x, & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<\dfrac{1}{2},\\ 1-\mathrm{e}^{-2y}, & \dfrac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{y}}, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

所以，Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 只有一个间断点 $x=\dfrac{1}{2}$. 因此选(B).

附注 由于$\sqrt{y}\begin{cases}>y, & \dfrac{1}{2}\leqslant y<1,\\ \leqslant y, & y\geqslant 1,\end{cases}$所以

$$P(X\leqslant y,\ -\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\begin{cases}P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant y), & \dfrac{1}{2}\leqslant y<1,\\ P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant \sqrt{y}), & y\geqslant 1.\end{cases}$$

(8) 记 $U=X_1+X_2+X_5+X_6$，$V=X_3+X_4-X_7-X_8$，则 $U\sim N(0,4\sigma^2)$，$V\sim N(0,4\sigma^2)$，所以$\dfrac{U}{2\sigma}$，$\dfrac{V}{2\sigma}$相互独立，且都服从 $N(0,1)$，由此得到$\dfrac{(X_1+X_2+X_5+X_6)^2}{(X_3+X_4-X_7-X_8)^2}=\dfrac{\dfrac{U^2}{4\sigma^2}}{\dfrac{V^2}{4\sigma^2}}\sim F(1,1)$. 因此选(C).

附注 $F(n_1,n_2)$分布定义如下：

设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则$\dfrac{X}{Y}\sim F(n_1,n_2)$.

二、填空题

(9) 所给方程两边对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{x+y}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\sin(xy)\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

即$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{x+y}+y\sin(xy)}{e^{x+y}+x\sin(xy)}$，且$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0,y=1}=-1.$

于是，$\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{e^{x+y}+y\sin(xy)}{e^{x+y}+x\sin(xy)}+1}{x}$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{y\sin(xy)-x\sin(xy)}{x[e^{x+y}+x\sin(xy)]}=-\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin(xy)}{x}\cdot\frac{y-x}{e^{x+y}+x\sin(xy)}\right]=-\frac{1}{e}.$$

附注 $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}$也可以由$\frac{dy}{dx}$计算出$\frac{d^2y}{dx^2}$，然后将$x=0$，$y=1$，$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}=-1$代入得到，但这样计算比较繁复，没有题解中采用的方法简捷.

(10) $$\int_{-1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\,dx=\int_{-1}^{1}e^{2f(x)}\sin x\,dx+\int_{1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}e^{\cos x}\sin x\,dx+\int_{1}^{\pi}x^2\sin x\,dx=-\int_{1}^{\pi}x^2\,d\cos x$$
$$=-\left(x^2\cos x\Big|_1^{\pi}-\int_1^{\pi}2x\cos x\,dx\right)$$
$$=\pi^2+\cos1+\int_1^{\pi}2x\,d\sin x$$
$$=\pi^2+\cos1+\left(2x\sin x\Big|_1^{\pi}-2\int_1^{\pi}\sin x\,dx\right)$$
$$=\pi^2+\cos1-2\sin1-2.$$

附注 由于$e^{\cos x}\sin x$是奇函数，所以题解中$\int_{-1}^{1}e^{\cos x}\sin x\,dx=0.$

(11) 由于$z_x'=\cos(xy)\cdot y+\varphi_u'+\varphi_v'\cdot\frac{1}{y}$，所以

$$z_{xy}''=-\sin(xy)\cdot xy+\cos(xy)+\varphi_{uv}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi_{vv}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y}+\varphi_v'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$
$$=-xy\sin(xy)+\cos(xy)-\frac{x}{y^2}\left(\varphi_{uv}''+\frac{1}{y}\varphi_{vv}''\right)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'$$
$$=-xy\sin(xy)+\cos(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'.$$

附注 要熟练掌握二元复合函数的1、2阶偏导数的计算.

(12) 所给微分方程

$$y''+2y'+y=2e^{-x}+x \tag{1}$$

对应的齐次微分方程$y''+2y'+y=0$的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

此外，式(1)有特解

$$y^*=Ax^2e^{-x}+B+Cx.$$

将它代入式(1)得

$$(2Ae^{-x}-4Axe^{-x}+A^2x^2e^{-x})+2(2Axe^{-x}-Ax^2e^{-x}+C)+(Ax^2e^{-x}+B+Cx)=2e^{-x}+x.$$

由此得到 $A=1$，$B=-2$，$C=1$，所以

$$y^*=x^2e^{-x}-2+x.$$

因此式(1)的通解为

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}-2+x.$$

附注 由于式(1)的右边为 $2e^{-x}$ 与 x 两项之和，其中 $2e^{-x}\xlongequal{\text{记}}2e^{\lambda x}$ 的 $\lambda=-1$ 是齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ 的二重根，所以 $y''+2y'+y=2e^{-x}$ 有形如 Ax^2e^{-x} 的特解. 此外，$y''+2y'+y=x$ 有形如 $B+Cx$ 的特解. 从而式(1)有形如 $y^*=Ax^2e^{-x}+B+Cx$ 的特解.

(13) 由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$，即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{B})$. (1)

此外，由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 及 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$ 得 $r(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})$. (2)

所以由式(1)、式(2)得 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$. 从而 $r(\boldsymbol{B}^*)=n$.

附注 题解中利用了关于矩阵秩的以下结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}.$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1 & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0 & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(14) 由题设知，X，Y 相互独立，从而 X 与 Y^2 相互独立，且 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 所以 $D(X+Y^2)=DX+D(Y^2)$，其中

$$DX=1,\ EY=\frac{1}{2},\ DY=\frac{1}{4},\ E(Y^2)=DY+(EY)^2=\frac{1}{2},\ \text{并且}$$

$$\begin{aligned}D(Y^2)&=E(Y^4)-[E(Y^2)]^2=\int_0^{+\infty}y^4\cdot 2e^{-2y}dy-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\&=-\int_0^{+\infty}y^4de^{-2y}-\frac{1}{4}=-\left(y^4e^{-2y}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}y^3\cdot 4e^{-2y}dy\right)-\frac{1}{4}\\&=-2\int_0^{+\infty}y^3de^{-2y}-\frac{1}{4}=-2\left(y^3e^{-2y}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}3y^2\cdot e^{-2y}dy\right)-\frac{1}{4}\\&=3\int_0^{+\infty}y^2\cdot 2e^{-2y}dy-\frac{1}{4}=3E(Y^2)-\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

因此，$D(X+Y^2)=1+\dfrac{5}{4}=\dfrac{9}{4}$.

附注 记住：服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布的随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$

$=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0 & 其他,\end{cases}EX=\dfrac{1}{\lambda},\ DX=\dfrac{1}{\lambda^2},\ E(X^2)=\dfrac{2}{\lambda^2}.$

三、解答题

(15) 由于 $y(t)=e^{-\int 2dt}\left(C+\int e^{-t}\cdot e^{\int 2dt}dt\right)=Ce^{-2t}+e^{-t}$.

将 $y(0)=0$ 代入上式得 $C=-1$. 所以 $y(t)=-e^{-2t}+e^{-t}(t\geqslant 0)$.

当 $t<0$ 时，$f'(t)=(2t^2+\sin t)'=4t+\cos t$,

当 $t>0$ 时，$f'(t)=y'(t)=(-e^{-2t}+e^{-t})'=2e^{-2t}-e^{-t}$.

由于 $\lim\limits_{t\to 0^-}f'(t)=1$，$\lim\limits_{t\to 0^+}f'(t)=1$，所以 $f'(0)=1$. 因此

$$f'(t)=\begin{cases}4t+\cos t, & t\leqslant 0,\\ 2e^{-2t}-e^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

由此可得，$t<0$ 时，$f''(t)=4-\sin t$；$t>0$ 时，$f''(t)=-4e^{-2t}+e^{-t}$. 由于 $\lim\limits_{t\to 0^-}f''(t)=4$，$\lim\limits_{t\to 0^+}f''(t)=-3$，所以 $f''(0)$ 不存在，因此

$$f''(t)=\begin{cases}4-\sin t, & t<0,\\ -4e^{-2t}+e^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

附注　$f'(0)=1$ 与 $f''(0)$ 不存在也可证明如下：

由于 $f(t)=\begin{cases}2t^2+\sin t, & t<0,\\ -e^{-2t}+e^{-t}, & t>0,\end{cases}$ 所以

$$f'_-(0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{2t^2+\sin t}{t}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-e^{-2t}+e^{-t}}{t}=1,$$

从而 $f'(0)=1$.

由于 $f'(t)=\begin{cases}4t+\cos t, & t<0,\\ 2e^{-2t}-e^{-t}, & t>0,\end{cases}$ 所以

$$f''_-(0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{4t+\cos t-1}{t}=4,$$

$$f''_+(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2e^{-2t}-e^{-t}-1}{t}=-3.$$

从而 $f''(0)$ 不存在.

(16) 令 $u=x-t$，则 $f(x)\cdot\int_0^x f(x-t)dt=\sin x$ 成为

$$f(x)\cdot\int_0^x f(u)du=\sin x,即\int_0^x f(u)du=\frac{\sin x}{f(x)}.$$

上式两边对 x 求导得

$$f(x)=\frac{\cos x\cdot f(x)-\sin x\cdot f'(x)}{f^2(x)}，即 f'(x)-\cot x\cdot f(x)=-\frac{1}{\sin x}f^3(x).$$

令 $y=\frac{1}{f^2(x)}$，得 $y'+2\cot x\cdot y=\frac{2}{\sin x}$，所以

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int 2\cot x\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{2}{\sin x}\mathrm{e}^{\int 2\cot x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{\sin^2 x}\left(C+\int 2\sin x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\sin^2 x}(C-2\cos x).\end{aligned}$$

将 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ 代入上式得 $C=2$，所以，在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. 因此 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(2-\sqrt{2}).$$

附注 $y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$ 称为伯努利方程，它可通过变量代换 $z=y^{1-n}$ 转换成线性方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$ 后求解.

(17) $u(x,2x)=x$ 两边对 x 求导得

$$u_x'(x,2x)+2u_y'(x,2x)=1.$$

再对 x 求导得 $[u''_{xx}(x,2x)+2u''_{xy}(x,2x)]+2[u''_{yx}(x,2x)+2u''_{yy}(x,2x)]=0$，
利用 $u''_{xx}=u''_{yy}$，$u''_{xy}=u''_{yx}$ 化简后得

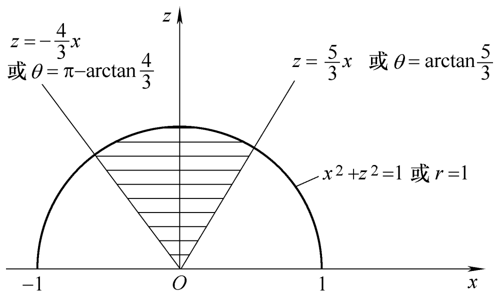
$$5u''_{xx}(x,2x)+4u''_{xy}(x,2x)=0. \tag{1}$$

$u_x'(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导得

$$u''_{xx}(x,2x)+2u''_{xy}(x,2x)=2x. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $u_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$，$u''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$. 于是 D 如图答 5-17 阴影部分所示，所以 D 的面积为

$$\begin{aligned}\iint_D\mathrm{d}\sigma&=\int_{\arctan\frac{5}{3}}^{\pi-\arctan\frac{4}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}-\arctan\frac{5}{3}\right).\end{aligned}$$



图答 5-17

附注 本题获解的关键是利用题设从 $u(x,2x)=x$，$u_x'(x,2x)=x^2$ 中算出 $u''_{xx}(x,2x)$ 与 $u''_{xy}(x,2x)$ 的表达式，这一点可以如题解中那样，将以上两式对 x 求导即可.

(18) 所给不等式可改写成

$$(f'(x)-3f(x))'-2(f'(x)-3f(x))>0. \tag{1}$$

式(1)两边同乘以 e^{-2x} 得

$$e^{-2x}(f'(x)-3f(x))'-e^{-2x}\cdot 2(f'(x)-3f(x))>0,$$

即
$$[e^{-2x}(f'(x)-3f(x))]'>0.$$

所以，对 $x>0$ 有

$$e^{-2x}(f'(x)-3f(x))>[e^{-2x}(f'(x)-3f(x))]\Big|_{x=0}=-3,$$

即
$$e^{-2x}(f'(x)-3f(x))+3>0. \tag{2}$$

式(2)两边同乘以 e^{-x} 得

$$[e^{-3x}f'(x)-3e^{-3x}f(x)]+3e^{-x}>0,$$

即
$$(e^{-3x}f(x)-3e^{-x})'>0.$$

所以，对 $x>0$ 有

$$e^{-3x}f(x)-3e^{-x}>(e^{-3x}f(x)-3e^{-x})\Big|_{x=0}=-2,$$

即
$$f(x)>3e^{2x}-2e^{3x}\ (x>0).$$

附注　题解中，值得注意的是：式(1)两边同乘以 e^{-2x}，使其左边成为一个函数的导数；同样，在式(2)两边同乘以 e^{-x}，使其左边也成为一个函数的导数.

(19) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma,$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant ax\}=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ r\leqslant a\cos\theta,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\theta}{2}\right\}$是 Σ 在 xOy 平面上的投影，且

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

所以
$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S&=\sqrt{2}\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\cdot r\mathrm{d}r\\&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}a^3\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}.\end{aligned}$$

附注　设曲面 Σ：$z=z(x,y)$，且 $f(x,y,z)$ 是连续函数，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma,$$

其中，D_{xy}是 Σ 在 xOy 平面上的投影.

(20) 由于 $b=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，$b^4=16$，

$$2b^2\boldsymbol{A}^2=2\cdot 2^2(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^2=8\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=16\boldsymbol{A}=16\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^3\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=8\boldsymbol{A},$$

所以，所给的方程组成为

$$(8\boldsymbol{A}-16\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma},\ 即(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

由于

$$\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right),$$

所以，式(1)与方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2 & =0,\\ \quad\ \ x_2-2x_3=1\end{cases} \tag{2}$$

同解. 式(2)的导出组的通解为 $C(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，此外式(2)有特解 $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，所以，式(2)，即所给方程组的通解 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}=C(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}+\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$(其中，$C$ 是任意常数).

附注 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 是一个常数，记为 c；$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶矩阵，记为 $\boldsymbol{A}$，则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，且对正整数 k，有

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=c^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

(21) 由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -4\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ \lambda-3 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -4\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda+4)[(\lambda-3)^2-(\lambda-1)]$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=2,\ 5,\ -4$.

设对应 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

由于

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}0 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，式(1)与方程组$\begin{cases}a_2-2a_3=0,\\a_1\quad-\ a_3=0\end{cases}$同解，故可取 $\boldsymbol{a}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{b}$ 满足

$$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

由于

$$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}0&-9&-9\\1&2&1\\0&9&9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以式(2)与方程组$\begin{cases}b_2+b_3=0,\\b_1+b_2\quad=0\end{cases}$同解，故可取 $\boldsymbol{b}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{b}=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=-4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都正交，所以有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=0,\\(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}c_1+2c_2+c_3=0,\\c_1-c_2+c_3=0.\end{cases}\text{由于它与}\begin{cases}c_2\quad=0,\\c_1\quad+c_3=0.\end{cases}$$

同解，故可取 $\boldsymbol{c}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{c}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

显然 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$(正交矩阵)，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}$，于是在

正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1, x_2, x_3)=2y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$(标准形).

由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q}=-40\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q}$ $(|\boldsymbol{A}|=2\times5\times(-4)=-40)$

$$=-40(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^{-1}=-40(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^{-1}$$

$$=-40\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-20&&\\&-8&\\&&10\end{pmatrix}$$

知，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，

$$f_2(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}$$

$$=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-20&&\\&-8&\\&&10\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=-20y_1^2-8y_2^2+10y_3^2\text{(标准形)}.$$

附注 由题解可知，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实对称矩阵，则当正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$)化为标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$(其 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值)时，必将二次型 $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\cdots+\mu_ny_n^2$(其中 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值). 记住这个结论，是有用的.

(22)(Ⅰ)记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y).$$

当 $y\leqslant0$ 时，$P(X^2\leqslant y)=0$；

当 $0<y\leqslant1$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{y}$；

当 $1<y\leqslant4$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{1}\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(1+\sqrt{y})$；

当 $y>4$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-2}^{1}\frac{1}{3}\mathrm{d}y=1$，

所以，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant0,\\ \frac{2}{3}\sqrt{y}, & 0<y\leqslant1,\\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{y}), & 1<y\leqslant4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$ 由此得到

$$\varphi(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y\leqslant1,\\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y\leqslant4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) $E(|Y-X^4|)=E(|X^2-X^4|)=E(X^2|1-X^2|)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|1-x^2|f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}x^2|1-x^2|\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1} x^2(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{58}{15} + \frac{4}{15}\right) = \frac{62}{45}.$$

附注 $\varphi(y)$也可以按以下方法计算：

由于 $y=x^2$ 在$f(x)\neq 0$ 的区间$[-2,0)$与$(0,1]$上都是单调的，且 $y=x^2$ 在$(-2,0)$内的反函数 $x=h_1(y)=-\sqrt{y}(0<y\leqslant 4)$，在$(0,1)$内的反函数 $x=h_2(y)=\sqrt{y}(0<y\leqslant 1)$，所以

$$\varphi(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}|h_1'(y)|, & 0<y\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{3}|h_2'(y)|, & 0<y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y\leqslant 1,\\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(23) 设所给的随机简单样本的观察值为 x_1，x_2，…，x_n. 为了计算 θ 的最大似然估计量，可认为 x_1，x_2，…，x_n 全为正的. 故似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_2}{\theta}} \cdots \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},$$

即 $\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$. 于是由

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2} = 0$$

得 θ 的最大似然估计值为$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，从而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

由于 $EX=\theta$，$DX=\theta^2$，所以由

$$P(\hat{\theta} \leqslant y) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \leqslant y\right)$$

$$= P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}} \leqslant \frac{y-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}\right)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\frac{y-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad (\text{其中}, y\text{是任意实数}).$$

由此可知 $\hat{\theta} \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\theta, \dfrac{\theta^2}{n}\right)$.

附注 设 Y 是随机变量，如果对于任意实数 y 有 $P(Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$，则 $Y \sim N(a, \sigma^2)$；如果对任意实数 y 有 $P(Y \leqslant y) \approx \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$，则 $Y \overset{\text{近似}}{\sim} N(a, \sigma^2)$.

模拟试题(六)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	D	D	B	C	B	B	D

(1) $f(x)=x|x|\cdot(x-2)^2|x-2|$，可能不可导点为 $x=0$，2.

在点 $x=0$ 附近，

$$f(x)=-x|x|(x-2)^3=\begin{cases} x^2(x-2)^3, & x\leqslant 0,\\ -x^2(x-2)^3, & x>0,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2, & x<0,\\ -[2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2], & x>0,\end{cases}$$

且由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$ 知 $f'(0)=0$.

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2}{x}=-16,\ f''_+(0)=16.$$

所以，$x=0$ 是 $f(x)$ 的 2 阶不可导点.

在点 $x=2$ 附近，

$$f(x)=x^2(x-2)^2|x-2|=\begin{cases} -x^2(x-2)^3, & x\leqslant 2,\\ x^2(x-2)^3, & x>2,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -[2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2], & x<2,\\ 2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2, & x>2,\end{cases}$$

且由 $\lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)=0$ 知 $f'(2)=0$.

$$f''_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-[2x(x-2)^3+3x^2(x-2)^2]}{x-2}=0,\ f''_+(2)=0.$$

所以，$x=2$ 是 $f(x)$ 的 2 阶可导点. 因此选(B).

附注 如果记住以下结论，本题将快捷获解：

(Ⅰ) $(x-a)|x-a|$ 在点 $x=a$ 处 2 阶不可导，$(x-a)^2|x-a|$ 在点 $x=a$ 处 2 阶可导；

(Ⅱ) 设 $f(x)=\varphi(x)g(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处可导而 2 阶不可导，$g(x)$ 在点 $x=a$ 处 2 阶可导且 $g(a)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处 2 阶不可导.

(2) 由于 x^2 在[0，1]上连续，选项(A)，(B)，(C)右边都是 x^2 在[0，1]上的积分和式的极限，它们都等于 $\int_0^1 x^2\,dx$，即选项(A)，(B)，(C)都正确. 因此选(D).

附注 也可以通过直接计算，确认选项(D)不正确：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\sum_{i=1}^{n}(9i^2-6i+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\left[\frac{9}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{6}{2}n(n+1)+n\right]$$

$$=\frac{1}{9}\neq\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

(3) 由于$f''_{xx}(x_0, y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_x(x, y_0)\Big|_{x=x_0}$，所以由$f''_{xx}(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处存在知$f'_x(x, y_0)$在点$x_0$处可微．因此选(D).

附注 当题中所给的三个2阶偏导数在点(x_0, y_0)处连续时，选项(A)，(B)，(C)都正确，但仅假定这三个2阶偏导数在点(x_0, y_0)处存在时，未必能推出这三个选项都正确．

(4) 由于Ω关于平面π：$x+y+z=0$对称，设$M_1(x_1, y_1, z_1)$与$M_2(x_2, y_2, z_2)$为对称点，则线段$\overline{M_1M_2}$的中点$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$位于平面$\pi$上，所以

$$\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{z_1+z_2}{2}=0,\text{即 } x_1+y_1+z_1=-(x_2+y_2+z_2).$$

从而$\tan(x_1+y_1+z_1)=-\tan(x_2+y_2+z_2)$，即$\tan(x+y+z)$在对称点处的值互为相反数，于是有

$$\iiint_{\Omega}\tan(x+y+z)\mathrm{d}v=0.$$

因此选(B).

附注 计算三重积分时，应先按积分区域的对称性进行化简，然后计算．对于三重积分$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$，如果$\Omega$具有某种对称性，且按此对称性$\Omega$被划分成$\Omega_1$与$\Omega_2$两部分，则

当$f(x,y,z)$在对称点处的值互为相反数时，$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当$f(x,y,z)$在对称点处的值彼此相等时，$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(5) 由于方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解$\boldsymbol{x}_0$可使$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{x}_0$也是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解．反之，设$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解$\boldsymbol{\xi}$，则

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0,\text{即}(\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\xi})=0.$$

记$\boldsymbol{A\xi}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$，则由上式得$\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=0$，即$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$(利用$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$都为实数)．所以有$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{\xi}$也是方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解．因此选(C).

附注 本题表明：设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是同解方程组．

这一结论可推广为：

设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$实矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times l$实矩阵，则$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$是同解方程组的充分必要条件是$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

(6) 由于$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^4$

$$=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&4&16\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

所以 $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-4&-16\\-1&\lambda&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0$ 有解 $\lambda=-2,2,3$. 从而 A 的最小特征值为 -2.

因此选(B).

附注　题解中，由于注意到 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，它们的三次方与四次方分别左乘、右乘于 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 表明，对 B 施行三次"交换第 1、2 行"的初等变换后，再施行四次"将第 2 列加到第 3 列"的初等变换，所以很快获解.

(7) 记 $U=-2Y\left(\text{对应的函数 } u=-2y\text{，即 } y=-\dfrac{u}{2}\right)$，则 U 的概率密度

$$f_U(u)=f\left(-\frac{u}{2}\right)\left|\frac{\mathrm{d}\left(-\dfrac{u}{2}\right)}{\mathrm{d}u}\right|=\frac{1}{2}f\left(-\frac{u}{2}\right),$$

从而 $Z=X-2Y=X+U$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f_U(z-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f\left(\frac{x-z}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

因此选(B).

附注　常用的随机变量函数的概率密度计算公式：

(Ⅰ) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，记 $Y=g(X)$(其中 $y=g(x)$ 在 $f(x)\neq 0$ 的区间内是单调函数，且除个别点外处处可导)，则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f(h(y))\,|h'(y)|, & y\in I,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 I 是 $g(x)$ 在 $f_X(x)\neq 0$ 的区间上的值域，$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 在该区间的反函数.

(Ⅱ) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则随机变量 $Z=aX+bY+c$(a，b，c 都为常数)的概率密度为

当 $b\neq 0$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,\frac{z-ax-c}{b}\right)\frac{1}{|b|}\mathrm{d}x$，

当 $a\neq 0$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-by-c}{a},y\right)\frac{1}{|a|}\mathrm{d}y$.

如果记住了(Ⅱ)，则本题可快捷获解.

(8) 由于 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，所以 $E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\right)=n$，$D\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\right)=2n$，于是

$$EY=E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2\right]=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)+\left[E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right]^2$$

$$=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\right)+\frac{\sigma^4}{n^2}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\right)\right]^2=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n+\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot n^2=\frac{2+n}{n}\sigma^4.$$

因此选(D).

附注 应记住以下结论：

(Ⅰ) 设 X_1, X_2, …, X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim$ $\chi^2(n-1)$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(Ⅱ) 设 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n$，$DX=2n$.

二、填空题

(9) 由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$a=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{\ln(1+x)}},\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln[1+(\mathrm{e}^x-1+\sin x)]}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1+\sin x}{x}=2.$

代入式(1)得 $a=\mathrm{e}^2$.

附注 (Ⅰ) 计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 时，首先要对 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 进行化简，其中对 $f(x)$ 或 $g(x)$ 作等价无穷小代替是最常用的，也是最有效的化简方法.

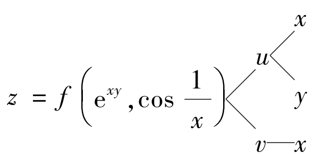
(Ⅱ) 计算 0^0，1^∞，∞^0 型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 时，应首先将函数指数化，即 $[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$,于是

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^A, & \lim g(x)\ln f(x)=A,\\ 0, & \lim g(x)\ln f(x)=-\infty,\\ \infty, & \lim g(x)\ln f(x)=+\infty.\end{cases}$$

(10) $\frac{\partial}{\partial x}f\left(\mathrm{e}^{xy},\cos\frac{1}{x}\right)=f'_u\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{xy}+f'_v\frac{\partial}{\partial x}\cos\frac{1}{x}$

$=y\mathrm{e}^{xy}f'_u+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cdot f'_v.$

附注 计算多元复合函数的偏导数时，应先画出该函数与自变量之间的复合关系图，例如本题的关系图为



(11) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\cos\frac{n}{2}\pi}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\quad(\text{由于}(-1)^{\cos\frac{n}{2}\pi}=(-1)^{n-1})$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n}{2}\pi}\frac{1}{2^n}\right]=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$

附注　应记住 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. 顺便计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+1}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-1\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\Big|_{x=1}-1\\&=2\ln(1+x)\big|_{x=1}-1\\&=2\ln 2-1.\end{aligned}$$

(12) 由 $y''+py'+qy=0$ 的通解可知，$1+\mathrm{i}$ 是它的特征方程的根．所以 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^x\cos x$ 的特解形式应为

$$x\mathrm{e}^x(A\cos x+B\sin x).$$

附注　对于 2 阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x),$$

当 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$($P_l(x)$，$Q_m(x)$ 分别是 x 的 l 次，m 次多项式)时，该方程应有的特解形式为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x+R_n^{(2)}(x)\sin\beta x],$$

其中，k 是按 $\alpha+\beta\mathrm{i}$ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的零重根与一重根对应地取 0，1，$R_n^{(1)}(x)$，$R_n^{(2)}(x)$ 是 x 的 $n=\max\{l,m\}$ 次多项式．

(13) 由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，其中

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=1,$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\left(\begin{array}{cc:c}0&0&\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\\0&0&\\\hdashline\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}&&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

附注 本题也可以利用以下公式，快捷算出 $\boldsymbol{A}^*$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \\ |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

(14) 由于 $P(A) = C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$，则 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-3p^2(1-p)^2$	$3p^2(1-p)^2$

所以 $E(X^2) = 1^2 \cdot 3p^2(1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$.

附注 服从参数为 λ 的 0-1 分布的随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	$1-\lambda$	λ

$(0<\lambda<1)$.

由此可以算得 X 的数字特征，例如

$$EX = E(X^2) = \lambda, D(X) = \lambda(1-\lambda)$$

等.

三、解答题

(15) $$\int \frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\csc^2 2x-\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}2x}{\sin^2 2x}$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\cot 2x$$

$$= -\ln\left(\cot 2x+\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}\right)+C.$$

附注 可考虑类似的不定积分：$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$. 解答如下：

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}) + C.$$

(16) 由于$f_n(x)$满足

$$f'_n(x) - f_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^x,$$

所以,$f_n(x) = \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}(C+\int x^{n-1}\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$

$$= \mathrm{e}^x(C+\int x^{n-1}\mathrm{d}x) = \mathrm{e}^x\left(C+\frac{1}{n}x^n\right).$$

将$f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$代入上式得 $C=0$，所以$f_n(x)=\frac{1}{n}x^n\mathrm{e}^x(n=1，2,\cdots)$. 从而

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}f_n(x) = \mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n = \mathrm{e}^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n\right)$$

$$= \mathrm{e}^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$$

$$= \mathrm{e}^x\left\{-\ln(1-x) - \frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x]\right\}$$

$$= -\mathrm{e}^x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)-1\right] \quad (x\in[-1,0)\cup(0,1)).$$

此外，$s(0)=0$. 所以

$$s(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)-1\right], & x\in[-1,0)\cup(0,1), \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

附注　题解中直接利用 $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n(x\in[-1,1))$, 比较快捷 .

(17) 由于 $\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t = \int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u$ (其中,$u=x-t$),

所以$f(x,y) = y+\int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u$. 从而$f(0，y)=y$，且

$$f'_x(x,y) = f(x,y),$$

由此得到$f(x，y)=y\mathrm{e}^x$. 此外，由题设得

$$\mathrm{d}g(x，y)=g'_x(x，y)\mathrm{d}x+g'_y(x，y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x+y),$$

所以 $g(x，y)=x+y+C_0$. 从而由 $g(0，0)=0$ 得 $C_0=0$.

$$g(x,\ y)=x+y.$$

由以上得到的f，g得

$$f(\sqrt{x},g(x,y))=e^{\sqrt{x}}(x+y).$$

从而 $\iint\limits_D f(\sqrt{x},g(x,y))\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D e^{\sqrt{x}}(x+y)\mathrm{d}\sigma$

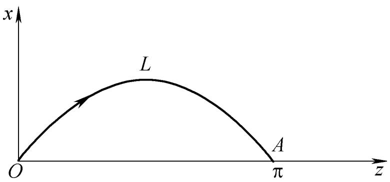
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}(x+y)\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\sqrt{x}}4\int_0^1 t^4e^t\mathrm{d}t=36e-96.$$

附注 题解中值得注意是：

为了对$f(x,y)=y+\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$的两边关于$x$求偏导数，需将被积函数中的$x$移走，故令$u=x-t$.

(18)(Ⅰ)$\overset{\frown}{OA}$如图答6-18所示．由于



图答 6-18

$$\int_{\overset{\frown}{OA}}(e^z\sin x+x-z)\mathrm{d}z+(e^z\cos x-z)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{\overset{\frown}{AO}}(e^z\sin x+x-z)\mathrm{d}z+(e^z\cos x-z)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{\overset{\frown}{AO}+\overline{OA}}(e^z\sin x+x-z)\mathrm{d}z+(e^z\cos x-z)\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\overline{OA}}(e^z\sin x+x-z)\mathrm{d}z+(e^z\cos x-z)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}}-\iint\limits_D\left[\frac{\partial(e^z\cos x-z)}{\partial z}-\frac{\partial(e^z\sin x+x-z)}{\partial x}\right]\mathrm{d}\sigma+\int_0^{\pi}-z\mathrm{d}z$$

(其中D是由$\overset{\frown}{AO}+\overline{OA}$围成的区域)

$$=2\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{2}\pi^2=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}z\int_0^{\sin z}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\pi^2=4-\frac{1}{2}\pi^2.$$

(Ⅱ)由于Σ：$\sqrt{x^2+y^2}=\sin z(0\leqslant z\leqslant\pi)$是闭曲面，所以

$$\oint\!\!\!\int\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(xz)}{\partial x}+\frac{\partial(2xy)}{\partial y}+\frac{\partial(3xy)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v\ \text{(其中,}\Omega\text{是由}\Sigma\text{围成的立体)}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(z+2x)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v\left(\text{由于}\Omega\text{关于}yOz\text{平面对称,在对称点处}2x\text{的值互为相反数,所以}\iiint\limits_{\Omega}2x\mathrm{d}v=0\right)$$

$$=\int_0^{\pi}z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\sin^2z}\mathrm{d}\sigma=\pi\int_0^{\pi}z\sin^2z\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^{\pi}z\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}z\mathrm{d}\left(z-\frac{1}{2}\sin 2z\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[z\left(z-\frac{1}{2}\sin 2z\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(z-\frac{1}{2}\sin 2z\right)dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi^3-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}\cos 2z\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi^3.$$

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ)由于$\overparen{AO}$不是闭曲线，所以添上线段$\overline{OA}$，使得$\overparen{AO}+\overline{OA}$成为闭曲线，然后应用格林公式计算所给的曲线积分，比较快捷.

(Ⅱ)由于Σ是闭曲面，且是外侧，所以对所给的曲面积分直接应用高斯公式计算，比较快捷. 此外，计算$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$时，由于$\Omega$是旋转曲面，且被积函数与$x$，$y$无关，所以采用先$x$，$y$，后$z$的方法.

(19) c将$[a,\ b]$分成两个小区间$[a,\ c]$与$[c,\ b]$.

由于$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以存在$x_1\in(a,\ c)$，使得$f(x_1)>f(a)$. 由于$f'(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$，所以存在$x_2\in(x_1,\ c)$，使得$f(x_2)>f(c)$. 因此$f(x)$在$[a,\ c]$上的最大值在$(a,\ c)$内取到，于是由费马定理知，存在$\eta_1\in(a,\ c)$，使得$f'(\eta_1)=0$.

此外，由$f(c)=f(b)=0$知，$f(x)$在$[c,\ b]$上满足罗尔定理条件，所以存在$\eta_2\in(c,\ b)$，使得$f'(\eta_2)=0$.

由题设及以上证明知，$f'(x)$在$[\eta_1,\ \eta_2]$上满足罗尔定理条件，所以存在$\xi\in(\eta_1,\ \eta_2)\subset(a,\ b)$，使得$f''(\xi)=0$.

附注　当函数$f(x)$在$[a,\ b]$上有连续导数时，如果$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则容易知道，存在$\xi\in(a,\ b)$，使得$f'(\xi)=0$. 但是，从本题的证明可知，“当$f(x)$在$[a,\ b]$上可导(未必有连续导数)时，如果$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则存在$\xi\in(a,\ b)$，使得$f'(\xi)=0$.”记住这个结论，有助快捷解题.

(20) 由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

无解，从而

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)>r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

由于$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\1&2&4&0&1&3\\1&3&b&a&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\0&1&1&-1&1&3-b\\0&2&b-3&a-1&1&5-b\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\0&1&1&-1&1&3-b\\0&0&b-5&a+1&-1&b-1\end{array}\right),$$

所以，$b=5$时，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=3>2=r(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$，即此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$

不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

有解，从而

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$

将 $b=5$ 代入得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&6&1&1&3\\0&1&4&1&2&4\\a&a+1&a+6&1&3&5\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&6&1&1&3\\0&1&4&1&2&4\\0&1&6-5a&1-a&3-a&5-3a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&6&1&1&3\\0&1&4&1&2&4\\0&0&2-5a&-a&1-a&1-3a\end{array}\right),$$

所以，$a\neq\dfrac{2}{5}$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)(=3)$，即此时，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

于是，所求的 $a\neq\dfrac{2}{5}$，$b=5$.

附注 题解中有两点值得注意：

（Ⅰ）矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}),$$

而无解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A}).$$

（Ⅱ）设有两个 n 维向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$，(B)：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s$，则

(A)可由(B)线性表示，且表示式是唯一的充分必要条件是矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\text{(其中,}\boldsymbol{X}\text{ 是未知矩阵)}$$

有唯一解；

(A)可由(B)线性表示，但表示式不唯一的充分必要条件是矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$$

有无穷多解；

(A)不可由(B)线性表示的充分必要条件是矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$$

无解.

(21) 由 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，且对应 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

设 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$

正交，即

$$a_1 + a_3 = 0.$$

它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，它们即为 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量. $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$

它们是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应特征值为 1，1，-1 的特征向量.

由此可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-1,\mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1,\mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1,$$

它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则由 $\boldsymbol{A}^*$ 是实对称矩阵得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^*&=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\begin{pmatrix}0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1&0&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$.

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可使它正交相似对角化，则 $\boldsymbol{Q}$ 也可使 $\boldsymbol{A}^*$ 正交相似对角化.

(22)(Ⅰ) 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}y, & |x|<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

记 Z 的分布函数为 $F(z)$，则 $F(z)=P(Z\leqslant z)$.

当 $z\leqslant 0$ 时，$P(Z\leqslant z)=P(X^2\leqslant z)=0$，

当 $0<z<1$ 时，$P(Z\leqslant z)=P(X^2\leqslant z)=P(-\sqrt{z}\leqslant X\leqslant\sqrt{z})=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{z}$，

当 $z\geqslant 1$ 时，$P(Z\leqslant z)=P(X^2\leqslant z)=P(-\sqrt{z}\leqslant X\leqslant\sqrt{z})=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=1$.

所以，$F(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \sqrt{z}, & 0<z<1,\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}$ 从而 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{z}}, & 0<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(Ⅱ) $EW=E[(X-Y)^2]=E(X^2)+E(Y^2)-2E(XY)$，

其中 $E(X^2)=D(X^2)+(EX)^2=\dfrac{1}{12}\times 2^2+0^2=\dfrac{1}{3}$. 同样可得 $E(Y^2)=\dfrac{1}{3}$. 此外，

$$\begin{aligned}E(XY)&=\iint\limits_{xOy平面}xyf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}xy\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{4}\left(\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}xy\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}x^4y^2\mathrm{d}\sigma\right)\\&=\frac{1}{4}\left(0-2\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}\right)\\&=-\frac{2}{15},\end{aligned}$$

所以
$$EW=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-2\times\left(-\frac{2}{15}\right)=\frac{14}{15}.$$

附注 $E[(X-Y)^2]$也可按定义计算：

$$\begin{aligned}E[(X-Y)^2]&=\iint\limits_{xOy平面}(x-y)^2f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}(x-y)^2\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x-y)^2(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+2x^4y^2+2x^2y^4-2xy-2x^3y^5-x^5y-xy^5)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}(x^2+y^2+2x^4y^2+2x^2y^4)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^4+\frac{7}{5}x^2\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^4+\frac{7}{5}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{14}{15}.\end{aligned}$$

(23)(Ⅰ) 由于 $N_1\sim B(n,1-\theta)$，$N_2\sim B(n,\theta-\theta^2)$，$N_3\sim B(n,\theta^2)$，所以

$$EN_1=n(1-\theta),EN_2=n(\theta-\theta^2),EN_3=n\theta^2.$$

因此，$ET=E(a_1N_1+a_2N_2+a_3N_3)=a_1EN_1+a_2EN_2+a_3EN_3$

$$=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2$$

$$=a_1n+(-a_1n+a_2n)\theta+(-a_2n+a_3n)\theta^2.$$

欲使 T 是 θ 的无偏估计量，必须 $ET=\theta$，即

$$a_1n+(-a_1n+a_2n)\theta+(-a_2n+a_3n)\theta^2=\theta.$$

比较 θ 同次幂的系数得

$$\begin{cases}a_1n=0,\\-a_1n+a_2n=1,\\-a_2n+a_3n=0,\end{cases}\text{即 } a_1=0, a_2=a_3=\frac{1}{n}.$$

(Ⅱ) 由于 $N_2\sim B(n,\ \theta-\theta^2)=B\left(300,\ \frac{1}{4}\right)$，所以 $EN_2=75$，$DN_2=\frac{225}{4}$，因此由中心极限定理(具体的是棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理)知

$$\begin{aligned}P(N_2>80)&=1-P(N_2\leqslant 80)\\&\approx 1-\Phi\left(\frac{80-EN_2}{\sqrt{DN_2}}\right)=1-\Phi\left(\frac{80-75}{\sqrt{\frac{225}{4}}}\right)\\&=1-\Phi(0.67)=1-0.7486=0.2514.\end{aligned}$$

附注　本题的关键，是从总体 X 的概率分布，推出 $N_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 的各自分布，即 $N_1\sim B(n,\ 1-\theta)$，$N_2\sim B(n,\ \theta-\theta^2)$，$N_3\sim B(n,\ \theta^2)$.

顺便计算 T 是 θ 的无偏估计量时的 DT.

由于 $T=\frac{1}{n}(N_2+N_3)=1-\frac{1}{n}N_1$，所以

$$DT=D\left(1-\frac{1}{n}N_1\right)=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{1}{n^2}\cdot n(1-\theta)\theta=\frac{1}{n}\theta(1-\theta).$$

模拟试题(七)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	A	D	C	B	C	C	D

(1) 显然 $x=0$，1 都是方程的实根．记 $f(x)=2^x-x^2-1$，则 $f(x)$ 连续，且

$$f(2)\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)<0,$$

所以由零点定理推广形式知所给方程 $f(x)=0$ 在 $(2,+\infty)$ 上有实根，记为 x_0.

如果方程 $f(x)=0$ 还有不同实根 x_1，不妨 $x_1>x_0$，则由 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=f(x_0)=f(x_1)$ 及罗尔定理(高阶导数形式)知，存在 $\xi\in(0,x_1)$，使得 $f'''(\xi)=0$. (1)

另一方面，计算 $f(x)$ 的 3 阶导数得 $f'''(\xi)=2^{\xi}(\ln 2)^3\neq 0$. (2)

式(1)与式(2)矛盾知，方程 $2^x-x^2-1=0$ 除实根 0，1，x_0 外别无其他实根，因此选(C).

附注 (Ⅰ) 零点定理的一种推广形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，则存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

(Ⅱ) 罗尔定理的高阶导数形式

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内 2 阶可导，且有 $x_1,x_2,x_3\in(a,b)$ (其中，$x_1<x_2<x_3$)，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内 3 阶可导，且有 $x_1,x_2,x_3,x_4\in(a,b)$ (其中，$x_1<x_2<x_3<x_4$)，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=0$.

(2) 由于 $\max\{e^{-t},e^t\}=\begin{cases}e^{-t}, & t\leqslant 0,\\ e^t, & t>0,\end{cases}$ 所以

$$F(x)=\int_0^x\max\{e^{-t},e^t\}dt=\begin{cases}\int_0^x e^{-t}dt, & x\leqslant 0,\\ \int_0^x e^t dt, & x>0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0,\\ e^x-1, & x>0.\end{cases}$$

因此选(A).

附注 同样可以计算 $\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}dt$,具体如下：

由于 $\min\{e^{-t},e^t\}=\begin{cases}e^t, & t\leqslant 0,\\ e^{-t}, & t>0,\end{cases}$ 所以

$$\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^x e^t dt, & x\leqslant 0,\\ \int_{-\infty}^0 e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt, & x>0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ 2 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

(3) 由$\{a_n\}$是单调减少收敛于零的正项数列知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛．所以对它两项两项地加括号所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$$

收敛．因此选(D).

附注　本题获解的关键是，由莱布尼茨定理确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛．此外，应记住以下的收敛级数性质：

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛,则对它任意加括号所得级数仍收敛,但反之未必正确,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 任意加括号后所得的级数收敛时,原级数未必收敛．

(4) 由于$\iint\limits_{\Sigma}(x+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{D_{yz}}(\sqrt{4-y^2-z^2}+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{yz}}(-\sqrt{4-y^2-z^2}+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{4-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以选(C).

附注　题中计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 时，需用平面 $x=0$ 将 Σ 划分成两部分:$\Sigma_1: x = \sqrt{4-y^2-z^2}$(前侧)与$\Sigma_2: x = -\sqrt{4-y^2-z^2}$(后侧)，它们在 yOz 平面的投影都为 D_{yz}.

(5) 由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关知 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，从而由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\delta}$ 线性相关知 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线表示，即 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示．因此选(B).

附注　关于向量组的线性相关性的以下结论应记住：

(Ⅰ) 设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$.

如果(A)线性无关，则它的任一部分组也线性无关；

如果(A)的某一部分组线性相关，则(A)线性相关．

(Ⅱ) 设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$.

如果(A)线性相关，则至少存在一个向量可用其余向量线性表示；

如果(A)线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示式是唯一的．

(6) ②④都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件，因此选(C).

附注　应记住以下的结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则“$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量”，或“$\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的

特征矩阵 $\lambda_i \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - n_i$”，都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件. 而 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，或 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分而非必要条件.

(7) 对于选项(C)，(X, Y) 的概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 它的关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}y, & -R \leqslant x \leqslant R, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}, & -R \leqslant x \leqslant R, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}, & -R \leqslant y \leqslant R, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y) = f(x, y)$ 不是几乎处处成立的，所以 X 与 Y 不相互独立. 因此选(C).

附注 应记住选项(A)，(B)，(D)的结论.

(8) 由于 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n_1 - 1)$，$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2 \sim \chi^2(n_2 - 1)$，且 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2$ 与 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2$ 相互独立，所以由 χ^2 分布的可加性得

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2 \sim \chi^2(n_1 + n - 2).$$

于是 $D(Z) = \dfrac{\sigma^4}{(n_1 + n_2 - 2)^2} D\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2\right]$

$$= \frac{\sigma^4}{(n_1 + n_2 - 2)^2} \cdot 2(n_1 + n_2 - 2) = \frac{2\sigma^4}{n_1 + n_2 - 2}.$$

因此选(D).

附注 要记住以下的关于 χ^2 分布的结论：

(Ⅰ) 设 $X \sim \chi^2(n)$，则 $EX = n$，$DX = 2n$；

(Ⅱ) 设 $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$ 且它们相互独立，则 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

二、填空题

(9) 由 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x + f(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x - \sin x}{x^3} + \dfrac{f(x)}{x^3}}{x}$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x - \sin x}{x^3} + \dfrac{f(x)}{x^3}\right] = 0$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} -\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

附注 类似地可考虑：

设$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$. 具体计算如下：

由$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$ 得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$. 由此可得$\lim\limits_{x\to0}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=0$，即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，以及$3=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$，即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2$.

(10) 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_u(x+y,yg(x))+f'_v(x+y,yg(x))yg'(x)$得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(0,y)}{\partial x}&=f'_u(y,y)+f'_v(y,y)y\quad(\text{利用}\,g(0)=g'(0)=1)\\&=f'_x(y,y)+f'_y(y,y)y=1+y\quad(\text{利用}\,f'_x(y,y)=f'_y(y,y)=1),\end{aligned}$$

所以，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1+y)\right|_{y=1}=1$.

附注 由于$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0}\right)\right|_{y=1}$，所以可先算出$\dfrac{\partial z(0,y)}{\partial x}$，记为$\varphi(y)$，然后计算$\left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}$即得$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$，这样计算比先算出$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，然后将$x=0,y=1$代入计算$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$快捷.

(11) 由于曲面$z=x^2+y^2$与$x^2+y^2+z^2=2\,(z\geqslant0)$的交线为$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x^2+y^2+z^2=2,\end{cases}$即$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=1.\end{cases}$所以$\Sigma$在$xOy$平面的投影为$D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$，从而$\Sigma$的面积

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\left.\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\right|_{z=x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_{D}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\sigma\\&\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{6}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

附注 顺便计算上半球面$x^2+y^2+z^2=2(z\geqslant0)$位于曲面$z=x^2+y^2$之内部分$\Sigma_1$的面积$S_1$：

$$S_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\left.\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\right|_{z=\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \sqrt{2}\iint_D \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\mathrm{d}r = 2(2-\sqrt{2})\pi.$$

(12) 将$f(x)$偶延拓为周期是2的周期函数$f_1(x)$，其中在$[-1,1]$上

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ f(-x), & -1\leqslant x<0, \end{cases}$$

所以，

$$s_1(-1) = \frac{1}{2}[f_1(1)+f_1(-1)] = f(1) = -1.$$

将$f(x)$奇延拓为周期为2的周期函数$f_2(x)$，其中在$(-1,1]$上

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -f(-x), & -1<x<0, \end{cases}$$

所以

$$s_2\left(\frac{5}{2}\right)= s_2\left(\frac{1}{2}\right)(\text{由于 } S_2 \text{ 是以 2 为周期的周期函数})$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^-\right)+f_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^-\right)+f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)= \frac{1}{4}.$$

附注 应记住：要计算$f(x)(0\leqslant x\leqslant l)$的余弦级数(正弦级数)时，应将$f(x)$作偶延拓(奇延拓). 此外应掌握用狄利克雷收敛定理计算傅里叶级数的和函数的方法.

(13) 由于$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{B}^*)$.

其中，$\boldsymbol{A}$是2阶矩阵，所以当$r(\boldsymbol{A})=1$时，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$；$\boldsymbol{B}$是4阶矩阵，所以当$r(\boldsymbol{B})=2$时，$r(\boldsymbol{B}^*)=0$.

从而$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=1+0=1$.

附注 应记住以下公式：

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$$

(14) $P(\max\{X,Y\}\leqslant 1) = P(X\leqslant 1, Y\leqslant 1)$

$$= P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1) = \left(\int_{-\infty}^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2 = (1-\mathrm{e}^{-1})^2.$$

附注 应记住以下公式：

设随机变量X，Y相互独立，它们的分布函数分别为$F_X(x)$与$F_Y(y)$，则

$Z_1=\max\{X, Y\}$的分布函数$F_{Z_1}(z)=F_X(z)F_Y(z)$；

$Z_2=\min\{X, Y\}$的分布函数 $F_{Z_2}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$.

三、解答题

(15) $y(0)=1$，此外，

由 $y(x)=1+x+2x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$y'=1+2\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t=1+y^2-y^2(0)=y^2,$$

所以$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{y}\right)=-1$，从而$\dfrac{1}{y}=-x+C$. 将 $y(0)=1$ 代入得 $C=1$. 因此 $y=\dfrac{1}{1-x}$. 从而

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

附注　对$\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 求导时，必须首先将被积函数中的 x 提到积分号之外，故将它改写成

$$x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

(16) 由于$f'_x=2(x+1)$，$f'_y=2(y+1)$，$f'_z=-2z$，所以由方程组

$$\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0,\\ f'_z=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2(x+1)=0,\\ 2(y+1)=0,\\ -2z=0\end{cases}$$

在 Ω 内部无解知，$f(x, y, z)$在 Ω 内部无可能极值点.

下面计算$f(x, y, z)$在 Ω 的表面上的最值.

记 $F(x, y, z)=2x+2y+x^2+y^2-z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，则

$$F'_x=2(1+x+\lambda x),\quad F'_y=2(1+y+\lambda y),\quad F'_z=2(-1+\lambda)z.$$

于是方程组

$$\begin{cases}F'_x=0,\\ F'_y=0,\\ F'_z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}1+(1+\lambda)x=0, & (1)\\ 1+(1+\lambda)y=0, & (2)\\ (-1+\lambda)z=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1. & (4)\end{cases}$$

由式(1)与式(2)知 $x=y$，由式(3)知 $z=0$ 或 $\lambda=1$.

将 $x=y$，$z=0$ 代入式(4)得 $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 这时可能极值点为

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\text{和 }M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

将 $x=y$，$\lambda=1$ 代入式(1)、式(2)得 $x=y=-\dfrac{1}{2}$，将它们代入式(4)得 $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 这时可能极值点为

$$M_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad M_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

由于$f\big|_{M_1}=2\sqrt{2}+1$，$f\big|_{M_2}=-2\sqrt{2}+1$，$f\big|_{M_3}=f\big|_{M_4}=-2$，
所以$f(x,y,z)$在Ω上的最大值为$2\sqrt{2}+1$，最小值为-2.

附注 计算三元函数$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上的最值，通常可按以下步骤进行：

（Ⅰ）计算$f(x,y,z)$在Ω内部的所有可能极值点，记为M_1，M_2，…，M_n.

（Ⅱ）计算$f(x,y,z)$在Ω的边界上的最值(通常使用拉格朗日乘数法)，记最大值为M，最小值为m.

（Ⅲ）比较$f(M_1)$，$f(M_2)$，…，$f(M_n)$，M，m的大小，则最大者与最小者，分别为$f(x,y,z)$在Ω上的最大值与最小值.

(17) 记$f(x)=2\sin x+\tan x-3x$，则

$$f'(x)=2\cos x+\sec^2 x-3=\tan^2 x-2(1-\cos x)$$
$$>\tan^2 x-2\cdot\frac{x^2}{2}>0\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

即 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加. 所以，对$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$f(x)>\lim_{x\to0^+}f(x)=0,\text{即}\quad 2\sin x+\tan x>3x.$$

附注 要证明函数不等式$f(x)>g(x)(x\in(a,b))$(其中，$f(x)$与$g(x)$在(a,b)内可导)，总是按以下步骤进行：

（Ⅰ）作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-g(x)$；

（Ⅱ）计算$\varphi'(x)$.

如果 $\varphi'(x)>0(x\in(a,b))$，且$\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=A\geqslant0$，则有

$$\varphi(x)>0,\text{即}f(x)>g(x)(x\in(a,b)).$$

如果$\varphi'(x)<0(x\in(a,b))$，且$\lim\limits_{x\to b^-}\varphi(x)=B\geqslant0$，则有

$$\varphi(x)>0,\text{即}f(x)>g(x)(x\in(a,b)).$$

如果$\varphi'(x)\begin{cases}<0, & a<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<b,\end{cases}$ 且$\varphi(x_0)=C>0$，则有

$$\varphi(x)>0,\text{即}f(x)>g(x)(x\in(a,b)).$$

$$(18)\ \alpha=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\tan\frac{x}{2}}{1-(1+x)^{x\sin^2\sqrt{x}}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{e^{x\sin^2\sqrt{x}\ln(1+x)}-1}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{x\sin^2\sqrt{x}\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{x\cdot x\cdot x}=-\frac{1}{2}.$$

由于当$|x|<1$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''-\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''-\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''-\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^{n-1}\alpha=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\right)\bigg|_{x=\sin\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1+x}{(1-x)^3}\bigg|_{x=-\sin\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1-\sin\frac{1}{2}}{\left(1+\sin\frac{1}{2}\right)^3}.$$

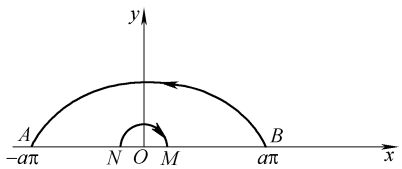
附注　利用幂级数计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 和的步骤如下：

（Ⅰ）构造幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，

（Ⅱ）计算上述幂级数的收敛域 I 与和函数 $s(x)$，

（Ⅲ）如果 $x_0\in I$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=s(x_0)$，

本题就是如此计算的.



图答　7-19

（19）C 如图答 7-19 所示的$\overparen{AB}$，其中，$A=(-a\pi,0)$，$B=(a\pi,0)$.

作正向闭曲线 $\Gamma=\overparen{BA}+\overline{AN}+\overparen{NM}+\overline{MB}$，其中，$\overline{AN}$，$\overline{MB}$是位于 x 轴上的线段，$\overparen{NM}$是上半圆 $x^2+y^2=\varepsilon^2(y\geqslant 0)$，$\varepsilon$ 是充分小的正数，使得$\overparen{NM}$位于$\overparen{BA}$下方. 记上述闭曲线围成的区域为 D，则由格林公式得

$$I=\int_C\frac{1}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$

$$=-\int_{\overparen{BA}}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\left[\oint_{\Gamma}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y-\int_{\overline{AN}}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y-\right.$$

$$\left.\int_{\overline{MB}}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y-\int_{\overparen{NM}}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\right]$$

$$=-\iint_D\left[\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma+\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon^2\sin^2t+\varepsilon^2\cos^2t)\mathrm{d}t$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{这里将}\overparen{NM}\text{的参数方程}\begin{cases}x=\varepsilon\cos t,\\ y=\varepsilon\sin t,\end{cases}\\ \text{代入曲线积分}\int_{\overparen{NM}}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,\\ \text{其起点参数为}\pi,\text{终点参数为}0\end{array}\right)$$

$$=-\pi.$$

附注 由于 C 不是闭曲线，不能直接应用格林公式计算所给的曲线积分，所以要添上一段曲线 C_1，使之成为正向闭曲线 Γ，这里对 C_1 有以下要求：

(Ⅰ) 要求 $\frac{-y}{x^2+y^2}$，$\frac{x}{x^2+y^2}$ 在 Γ 围成的闭区域上具有连续的偏导数；

(Ⅱ) 要求在 C_1 上的曲线积分比较容易计算.

题中所取的 C_1(即 $\overline{AN}+\overset{\frown}{NM}+\overline{MB}$)就是按此要求确定的.

(20)(Ⅰ) 方程组(A)的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & a+4 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & -7 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right),$$

所以，线性方程(A)有无穷多解时，有 $a+1=0$，即 $a=-1$.

(Ⅱ) 当 $a=-1$ 时，方程组(A)与(B)组成的方程组为

$$(\mathrm{C})\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=6, \\ -x_1-2x_2-x_3=-3, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+\lambda x_2=1. \end{cases}$$

对(C)的增广矩阵施行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7-3\lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7-3\lambda \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{7}-3\lambda \end{array}\right),$$

由此可知，有公共解时 $\frac{43}{7}-3\lambda=0$，即 $\lambda=\frac{43}{21}$. 公共解为 $x_1=-\frac{18}{7}$，$x_2=3$，$x_3=-\frac{3}{7}$.

附注　设方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$(其中 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 分别是 $m_1\times n$ 与 $m_2\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 分别是 m_1 维与 m_2 维列向量，则这两个方程组有公共解的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2\end{cases}$$

有解.

(21)(Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-1$，1. 由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 知 $\boldsymbol{A}$ 还有特征值 $\lambda=0$. 显然对应 $\lambda=-1$，1 分别有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 设对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交，故有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=0,\\ (\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

所以可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

从而按伴随矩阵的定义得 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 显然 $|Q|=-1$，所以 $Q^*=|Q|Q^{-1}=-Q^{\mathrm{T}}$，因此

$$Q^{\mathrm{T}}A^*Q=-Q^*A^*(-Q^{\mathrm{T}})^*=(Q^{\mathrm{T}}AQ)^*.$$

于是

$$\begin{aligned}Q^{\mathrm{T}}(A^*+A)Q&=Q^{\mathrm{T}}A^*Q+Q^{\mathrm{T}}AQ=(Q^{\mathrm{T}}AQ)^*+Q^{\mathrm{T}}AQ\\&=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}^*+\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1}$$

由此可知，取 $C=Q$，则在正交变换 $x=Cy=Qy$ 下，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

附注 我们知道，使 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 化为标准形的正交变换也使 $x^{\mathrm{T}}A^*x$ 化为标准形，即 $x^{\mathrm{T}}A^*x=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\mu_3y_3^2$，其中 μ_1,μ_2,μ_3 是 A^* 的特征值. 当 $|A|\neq0$ 时，μ_1,μ_2,μ_3 可由 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 直接得到，即 $\mu_1=\dfrac{|A|}{\lambda_1}$，$\mu_2=\dfrac{|A|}{\lambda_2}$，$\mu_3=\dfrac{|A|}{\lambda_3}$. 但是现在 $|A|=0$，故为了算出 μ_1,μ_2,μ_3，或为了将 $x^{\mathrm{T}}(A^*+A)x$ 化为标准形，采用了题解中的方法.

(22)(Ⅰ)由于 (U,V) 关于 U 的边缘概率密度为

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^{2u}\mathrm{d}v,0<u<1,\\0,\quad 其他,\end{cases}=\begin{cases}2u,0<u<1,\\0,其他,\end{cases}$$

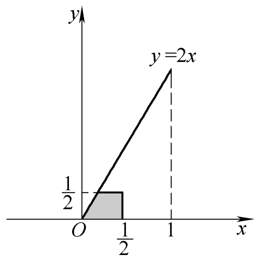
所以，

$$P\left(V\leqslant\frac12\,\middle|\,U\leqslant\frac12\right)=\frac{P\left(U\leqslant\frac12,V\leqslant\frac12\right)}{P\left(U\leqslant\frac12\right)},\tag{1}$$

其中，

$$\begin{aligned}P\left(U\leqslant\frac12,V\leqslant\frac12\right)&=\iint\limits_{\substack{u\leqslant\frac12\\v\leqslant\frac12}}f(u,v)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma\ (其中,D 如图答 7\text{-}22 的阴影部分所示的梯形)\\&=\frac12\times\frac12\left(\frac12+\frac14\right)=\frac{3}{16},\end{aligned}$$

$$P\left(U\leqslant\frac12\right)=\int_{-\infty}^{\frac12}f_u(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac12}2u\mathrm{d}u=\frac14.$$



图答 7-22

因此，由式(1)得 $P\left(V\leqslant\frac12\,\middle|\,U\leqslant\frac12\right)=\dfrac{3/16}{1/4}=\dfrac34$.

于是 $P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=-1)=P(X=0,Y=1)$

$=0.25.$

记(X, Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	P_1	0.25
0	P_2	0.25
1	0.25	P_3

则$\begin{cases} P_1+P_2+P_3+0.75=1, \\ -(P_1+0.25)+(0.25+P_3)=0.2, \\ -(P_1+P_2+0.25)+(0.5+P_3)=0.4, \end{cases}$ 即$\begin{cases} P_1+P_2+P_3=0.25, \\ -P_1+P_3=0.2, \\ -P_1-P_2+P_3=0.15. \end{cases}$

所以 $P_1=0$, $P_2=0.05$, $P_3=0.2$. 因此(X, Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	0	0.25
0	0.05	0.25
1	0.25	0.2

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-EX\cdot EY$,

其中 $E(XY)=(-1)\times(-1)\times 0+(-1)\times 1\times 0.25+0\times(-1)\times 0.05+0\times 1\times 0.25+1\times(-1)\times 0.25+1\times 1\times 0.2=-0.3$,

所以, $\mathrm{Cov}(X, Y)=-0.3-0.2\times 0.4=-0.38$.

附注 本题是连续型随机变量与离散型随机变量结合的综合题，需计算许多元素，因此对题目审视后应确定计算各个元素的先后顺序:

先计算 $P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)$, 为此需先算出关于 U 的边缘概率密度 $f_U(u)$;

然后确定(X, Y)的概率分布表，将已知的概率填入，对于未知的概率用 P_1, P_2, P_3 等表示，并利用已知条件逐一确定这些未知的概率.

最后根据(X, Y)的概率分布算出 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(23)(Ⅰ)由于关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_\theta^{+\infty}\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\mathrm{d}y, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, $\int_\theta^{+\infty}\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\mathrm{d}y=-\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\Big|_\theta^{+\infty}=\frac{3}{\theta^3}x^2$, 所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{\theta^3}x^2, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{3}{\theta^3}x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\theta$,所以由矩估计法,令 $EX=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,即$\frac{3}{4}\theta$

$=\overline{X}$. 由此得到 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{4}{3}\overline{X}$.

由于 $E\hat{\theta}=E\left(\frac{4}{3}\overline{X}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{4}{3}EX=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\theta=\theta$,所以 $\hat{\theta}$ 是无偏估计量.

(Ⅱ) $D(\hat{\theta})=D\left(\frac{4}{3}\overline{X}\right)=\frac{16}{9}D\overline{X}=\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{n}DX=\frac{16}{9n}[E(X^2)-(EX)^2]$,

其中, $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{3}{\theta^3}x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\theta^2$. 所以

$$D(\hat{\theta})=\frac{16}{9n}\left[\frac{3}{5}\theta^2-\left(\frac{3}{4}\theta\right)^2\right]=\frac{1}{15n}\theta^2.$$

附注 要熟练掌握总体未知参数的两种点估计方法：矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(八)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	C	B	B	C	B	B	D

(1) 由于 $y=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$，所以

$$y^{(n)}=\frac{1}{3}\left[(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{3}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right],$$

所以选(B).

附注　要记住公式：$\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$.

(2) 由于利用对称区间上定积分的性质可得

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x=0(\text{被积函数是奇函数}),$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x>0\left(\begin{array}{l}\sin^3x\text{ 是奇函数},\cos^4x\text{ 是偶函数},\text{在}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\text{上}\\ \cos^4x\geqslant 0,\text{且仅在点 }x=\dfrac{\pi}{2}\text{ 处取等号}\end{array}\right),$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^7x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7x\mathrm{d}x<0\left(\begin{array}{l}x^2\sin^3x\text{ 是奇函数},\cos^7x\text{ 是偶函数},\text{在}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \text{上 }\cos^7x\geqslant 0,\text{且仅在点 }x=\dfrac{\pi}{2}\text{ 处取等号}\end{array}\right).$$

所以　$P<M<N$. 因此选(C).

附注　应记住对称区间上定积分的性质：设 $f(x)$ 在 $[-a,\ a]\ (a>0)$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数},\\ 0, & f(x)\text{ 是奇函数}.\end{cases}$$

此外，当 $f(x)$ 是非奇非偶函数时有

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

(3) 令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$ 成为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=2\sin t.$$

所以，原方程有形如 $y=t(a\cos t+b\sin t)=(a\cos\ln x+b\sin\ln x)\ln x$ 的特解. 因此选(B).

附注 所给微分方程是2阶欧拉方程，令 $x=\mathrm{e}^t$ 可以转换成2阶常系数线性微分方程，由此即可确定应具有的特解形式.

(4) 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为1时，它在 $x=-1$ 处可能条件收敛$\left(\text{如} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$，也可能不是条件收敛$\left(\text{如} \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \text{ 或 } \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right)$，但当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛时，它的收敛半径必为1. 于是收敛半径为1是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的必要而非充分条件. 因此选(B).

附注 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，当其收敛半径为 R(正数)时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R, R)$ 内绝对收敛，但在端点 $x=-R, R$ 处可能收敛(条件收敛或绝对收敛)，也可能发散，应视 $\{a_n\}$ 而定.

(5) 由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，所以当 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，$\boldsymbol{B}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 因此由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $\boldsymbol{B}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{\lambda}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 因此选(C).

附注 应记住以下结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵) 有特征值 λ 和对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(6) 由于当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩；当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩，反之也对，所以选项(A)、(C)、(D)都正确，因此选(B).

附注 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时，(Ⅰ)与(Ⅱ)未必等价. 例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 显然 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，但是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不等价.

由本题可知：题中的(Ⅰ)、(Ⅱ)等价与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价是有区别的，应注意这一点.

(7) 记 $C_i=\{$第 i 次取球取到的是白球$\}(i=1,2)$，则

$$A=\overline{C}_1C_2,\quad B=\overline{C}_1C_2\cup C_1C_2,$$

所以 $P(A)=P(\overline{C}_1C_2)=P(\overline{C}_1)P(C_2\mid\overline{C}_1)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{2}{7}$，

$$P(B)=P(\overline{C}_1C_2)+P(C_1C_2)=P(\overline{C}_1)P(C_2\mid\overline{C}_1)+P(C_1)P(C_2\mid C_1)=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{7}.$$

因此选(B).

附注 本题有两点值得注意：

(Ⅰ) {第二次取球才取到白球}与{第二次取球取到的是白球}这两个随机事件是有区别的.

(Ⅱ) 随机事件{第 i 次取球取到白球}$(i=1,2,3)$的概率是相等的，都为 $\dfrac{3}{7}$.

(8) 由于$\frac{8}{\sigma^2}S_X^2 \sim \chi^2(8)$，$\frac{10}{\sigma^2}S_Y^2 \sim \chi^2(10)$，所以

$$D(S_X^2)=\frac{\sigma^4}{8^2}D\left(\frac{8}{\sigma^2}S_X^2\right)=\frac{\sigma^4}{8^2}\times 2\times 8=\frac{1}{4}\sigma^4,$$

$$D(S_Y^2)=\frac{\sigma^4}{10^2}D\left(\frac{10}{\sigma^2}S_Y^2\right)=\frac{\sigma^4}{10^2}\times 2\times 10=\frac{1}{5}\sigma^4,$$

且 $D(S_{12}^2)=\frac{1}{4}[D(S_X^2)+D(S_Y^2)]=\frac{9}{80}\sigma^4$，$D(S_{XY}^2)=\frac{1}{18^2}[64D(S_X^2)+100D(S_Y^2)]=\frac{1}{9}\sigma^4$，所以，四个统计量中方差最小者为 S_{XY}^2，因此选(D).

附注　记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$E(S^2)=\sigma^2$，$D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

二、填空题

(9) 由$\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t=f(x)-\mathrm{e}^{5x}$ 得

$$5f(x)-2=f'(x)-5\mathrm{e}^{5x}\quad 以及 f(0)=1,\ f'(0)=8,$$

所以有
$$\frac{f'(x)-8}{x}=\frac{5[f(x)-f(0)]+5(\mathrm{e}^{5x}-1)}{x},$$

令 $x\to 0$，由上式得

$$f''(0)=5f'(0)+5\times 5=65.$$

附注　本题也可以解答如下：由于对所给等式两边关于 x 求导得

$$5f(x)-2=f'(x)-5\mathrm{e}^{5x},$$

上式对 x 求导得

$$5f'(x)=f''(x)-25\mathrm{e}^{5x},\ 即 f''(x)=5f'(x)+25\mathrm{e}^{5x}.$$

于是利用 $f(0)=1$，$f'(0)=8$ 得

$$f''(0)=5\times 8+25\times 1=65.$$

(10) 显然 $x=0$，$y=0$ 时，所给方程成为 $\int_0^z \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=0$，从而 $z(0,0)=0$.

此外，所给方程两边对 x 求偏导数得

$$\mathrm{e}^{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+y+y\frac{\partial z}{\partial x}=0,即\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{\mathrm{e}^{z^2}+y},且\frac{\partial z(0,0)}{\partial x}=0.$$

从而$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial z(0,y)}{\partial x}\right)\right|_{y=0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial z(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial z(0,0)}{\partial x}}{y}$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y}{\mathrm{e}^{z^2(0,y)}+y}-0}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{z^2(0,y)}+y}=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

附注 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$也可以由$\dfrac{\partial z}{\partial x}$对 y 求偏导数算出$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,然后将 $x=y=z=0$ 代入计算得到. 但题解中由$\dfrac{\partial z}{\partial x}$按定义计算$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$更加快捷些.

(11) 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则 S 在点 M 处的法向量为$(2x_0-1, 2y_0, 2z_0)$, 于是由切平面与 π_1 与 π_2 都垂直知

$$(2x_0-1,\ 2y_0,\ 2z_0)=\mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\mu\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)(\mu\text{ 为常数}),$$

所以$\begin{cases} 2x_0-1=\dfrac{1}{2}\mu, \\ 2y_0=\dfrac{1}{2}\mu, \\ 2z_0=0, \end{cases}$ 即 $x_0=\dfrac{1}{4}\mu+\dfrac{1}{2}$, $y_0=\dfrac{1}{4}\mu$, $z_0=0$.

由 $M\in S$ 知, $x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0$, 即

$$\left(\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\mu\right)^2=\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{2}, \text{ 解此方程得 } \mu=\pm\sqrt{2}.$$

所以切点为 $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ 0\right)$和 $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ 0\right)$, 因此所求的切平面方程为

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0, \text{ 即 } x+y=\frac{\sqrt{2}+1}{2},$$

和

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0, \text{ 即 } x+y=\frac{-\sqrt{2}+1}{2}.$$

附注 计算曲面 S 的切平面时, 如果未知切点坐标, 总是根据有关条件先计算切点坐标, 然后写出切平面方程.

(12) $\displaystyle\oint_D e^{y^2}dx+xdy \xlongequal{\text{格林公式}} \iint_D\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial e^{y^2}}{\partial y}\right)d\sigma$(其中,$D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leqslant 8x\}$

$=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$)

$$=\iint_D(1-2ye^{y^2})d\sigma=\iint_D d\sigma-2\iint_D ye^{y^2}dy=2\pi.$$

$\left(\begin{array}{l}\text{这是由于}\displaystyle\iint_D d\sigma=D\text{ 的面积}=\pi\cdot 1\cdot 2=2\pi\text{,此外由于 }D\text{ 关于 }x\text{ 轴} \\ \text{对称,在对称点处 }ye^{y^2}\text{ 的值互为相反数,所以}\displaystyle\iint_D ye^{y^2}d\sigma=0\end{array}\right).$

附注 题解中有两点值得注意:

（Ⅰ）当曲线 C 是正向平面闭曲线时，曲线积分 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 通常用格林公式计算比较快捷.

（Ⅱ）对于二重积分，应先利用积分区域的对称性化简以后再行计算，具体说，设 D 满足某种对称性，则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{当} f(x,y) \text{ 的值在对称点处彼此相等}, \\ 0, & \text{当} f(x,y) \text{ 的值在对称点处互为相反数},\end{cases}$$

其中，D_1 是 D 按对称性划分成的两部分之一.

（13）显然 $|\boldsymbol{A}|=2$，此外

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*=2(\boldsymbol{A}^{-1})^2-3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2\cdot 2(\boldsymbol{E}_3-3\boldsymbol{A}),$$

所以 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=|\boldsymbol{A}^{-1}|^2\cdot 8|\boldsymbol{E}_3-3\boldsymbol{A}|$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 8\times\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ -3 & -3 & -5\end{vmatrix}=-58.$$

附注　计算矩阵的行列式时，以下结论是常用的：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则

$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$（$k$ 是常数），$|\boldsymbol{A}^*|=|A|^{n-1}$（$n>1$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）.

当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

（14）由于 $a=P(X=1)=F(1)-F(1^-)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，所以

$$P(Y\geqslant a)=P\left(Y\geqslant\frac{1}{4}\right)=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

附注　由于 $F(x)$ 只有间断点 $x=0$，1，2，所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$F(0)-F(0^-)$	$F(1)-F(1^-)$	$F(2)-F(2^-)$

即

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

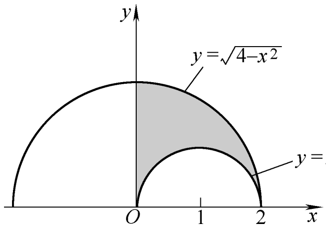
三、解答题

（15）D 如图答 8-15 的阴影部分所示，所以

$$V_x=\pi\int_0^2[(\sqrt{4-x^2})^2-(\sqrt{2x-x^2})^2]\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^2 (4-2x)\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

$$V_y = 2\pi\int_0^2 x\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2x-x^2}\right)\mathrm{d}x,$$



图答 8-15

其中 $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$,

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\ t=x-1}\int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

所以 $V_y = 2\pi\left(\frac{8}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{16}{3}\pi+\pi^2$.

附注 应记住以下公式

设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 都是连续函数，且 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\ (0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$.

记 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$，则 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_x = \pi\int_a^b [f_2^2(x)-f_1^2(x)]\,\mathrm{d}x,$$

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_y = 2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x.$$

(16) $n=2$ 时，由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ 沿直线 y=x}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ 沿直线 y=x}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{2x^2} = 2\neq f(0,0)$,
所以，此时 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

$n\geqslant 3$ 时，由于当 $(x,y)\to(0,0)$ 时由

$$|f(x,y)| = \left|\frac{(x+y)^n}{x^2+y^2}\right| = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}|x+y|^{n-2}\leqslant 2|x+y|^{n-2}$$

知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，所以此时 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此使 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续的最小 n 值为 3.

$n=3$ 时，$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$，同样有 $f'_y(0,0)=1$. 由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ 沿直线 x=y}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ 沿直线 x=y}}\frac{(x+y)^3-(x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2\sqrt{2}x^3}=\sqrt{2}\neq 0,$$

所以，此时 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

$n\geqslant 4$ 时，$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3}=0$，同样有 $f'_y(0,0)=0$. 于是当 $(x,y)\to(0,0)$ 时由

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{(x+y)^n}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot|x+y|^{n-3}\leqslant\frac{[2(x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}|x+y|^{n-3}=2\sqrt{2}|x+y|^{n-3}$$

知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以，此时$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微．因此使$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的最小n值为4.

附注　本题的$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续或可微都是由定义证明的．

设二元函数$g(x,y)$在点(x_0,y_0)处的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微．

(17) 由题设知$\{x_n\}$是正项数列，且对$n=1,2,\cdots$有

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{1}{x_n^2}\right)=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{1}{x_n^2}\right)$$

$$\geqslant\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{1}{x_n^2}}=1\left(\text{当 }a,b,c\text{ 都为非负数时，}\frac{1}{3}(a+b+c)\geqslant\sqrt[3]{abc}\right)$$

所以$\{x_n\}$有下界．此时，由$x_n\geqslant1(n=2,3,\cdots)$知

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{1}{x_n^2}\right)-x_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_n^2}-x_n\right)\leqslant0(n=2,3,\cdots),$$

即$\{x_n\}$单调不增．因此由数列极限存在准则Ⅱ知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记为$A$. 对所给递推式两边令$n\to\infty$取极限得

$$A=\frac{1}{3}\left(2A+\frac{1}{A^2}\right),\ \text{即 }A=1.$$

由此得到$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

考虑极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan(x-1)}-\mathrm{e}^{\sin(x-1)}}{(x-1)^3}$（即将欲求的极限式中的$x_n$改为$x$，则当$n\to\infty$时，$x\to1$）：

$$\lim_{x\to1}\frac{\mathrm{e}^{\tan(x-1)}-\mathrm{e}^{\sin(x-1)}}{(x-1)^3}\xlongequal{\text{令 }t=x-1}\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{\tan t}-\mathrm{e}^{\sin t}}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\mathrm{e}^{\sin t}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\tan t-\sin t}-1}{t^3}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\tan t-\sin t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{1}{\cos t}\right)=1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan(x_n-1)}-\mathrm{e}^{\sin(x_n-1)}}{(x_n-1)^3}=\dfrac{1}{2}$.

附注　数列极限有两个存在准则：

准则Ⅰ：设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n=1, 2, \cdots),$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

准则Ⅱ：设数列$\{x_n\}$是由递推式 x_1，$x_{n+1}=f(x_n)(n=1, 2, \cdots)$确定.

如果$\{x_n\}$单调不减有上界或单调不增有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

当数列$\{x_n\}$由递推式确定时，通常总是利用数列极限存在准则Ⅱ，先确定$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，然后对所给递推式两边令 $n\to\infty$ 取极限算出极限值.

(18) 记 $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n}(n=1, 2, \cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}}{\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}}|x|^2 = |x|^2,$$

且当 $x=-1$，1 时，所给幂级数都成为收敛级数

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

所以所给级数的收敛域为$[-1, 1]$.

对 $x\in[-1, 0)\cup(0, 1]$有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}x^{2n}\\
&=\frac{1}{2}x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\\
&=\frac{1}{2}x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2x}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}x\arctan x-\frac{1}{2x}(x-\arctan x)\\
&=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x-\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

且当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n}=0$，所以所给幂级数的和函数为

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\arctan x-\dfrac{1}{2}, & x\in[-1, 0)\cup(0, 1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

附注 本题解答有两点值得注意：

(Ⅰ)所给幂级数是缺项幂级数，所以应将幂级数记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，然后用比值法确定这个幂

级数的收敛域.

(Ⅱ) $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n}$ 的和函数 $s(x)$ 也可计算如下:

由于 $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n \mathrm{d}t$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1},\text{所以}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}x^{2n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}x\arctan x + \frac{1}{2x}\arctan x - \frac{1}{2}.$$

(19) 记 S(不妨设其为外侧)围成的空间区域为 Ω, 则由高斯公式得

$$\iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial[xf(x)]}{\partial x} + \frac{\partial[-xyf(x)]}{\partial y} + \frac{\partial(-\mathrm{e}^{2x}z)}{\partial z}\right\}\mathrm{d}v = 0.$$

由于 S 是半空间 $x>0$ 内任意有向闭曲面,所以由上式得

$$\frac{\partial[xf(x)]}{\partial x} + \frac{\partial[-xyf(x)]}{\partial y} + \frac{\partial(-\mathrm{e}^{2x}z)}{\partial z} = 0(x>0),$$

即 $$f'(x) + \left(\frac{1}{x}-1\right)f(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}(x>0).$$

它的通解为 $$f(x) = \mathrm{e}^{-\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\left(C + \int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{x}\left(C + \int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{x}(C+\mathrm{e}^x)(x>0). \tag{1}$$

上式两边令 $x\to0^+$ 取极限, 且与题设 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 比较得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x(C+\mathrm{e}^x)}{x}=1,$$

所以 $C=-1$, 将它代入式(1)得 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1)(x>0)$.

附注　闭曲面上的关于坐标的曲面积分通常用高斯公式计算比较快捷. 高斯公式为:

设 Σ 是光滑或分块光滑有向闭曲面(外侧), 它围成的空间闭区域为 Ω, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$都在 Ω 上具有连续偏导数, 则

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

(20) 由题设知 $(1, 2, 2, 1)^{\mathrm{T}} - (1, -2, 4, 0)^{\mathrm{T}} = (0, 4, -2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 所以有

$$4\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=0,\text{ 即 }\boldsymbol{\alpha}_4=-4\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

于是由 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩为 3 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

此外，由题设$(1,\ -2,\ 4,\ 0)^{\mathrm{T}}$是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,$$

于是方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，即为

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{1}$$

由于式(1)的系数矩阵的秩为3，且对应的齐次方程组有基础解系$(2,\ 2,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. 此外，式(1)有特解$(0,\ 2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$. 所以方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{y}=C(2,\ 2,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}+(0,\ 2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}(\text{其中，}C\text{ 是任意常数}).$$

附注 要记住齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(其中，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知列向量)的基础解系中所包含的线性无关解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$.

(21)(Ⅰ)由于

$$\begin{aligned}f(x_1,\ x_2,\ x_3)&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=x_1^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+x_3^2\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

所以$f(x_1,\ x_2,\ x_2)$的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{B}$ 有特征值为 $\lambda=0,\ 1,\ 4$，所以有

$$\begin{cases}1+a+1=0+1+4,\\|\boldsymbol{B}|=0\times4\times1,\end{cases}\text{即 }a=3,\ b=1.$$

(Ⅱ)由以上计算知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

由于
$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以式(1)与方程组$\begin{cases}x_1\quad+x_3=0,\\ \quad x_2\quad=0\end{cases}$同解，可取它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

由于
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以式(2)与方程组$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 \quad\ = 0 \end{cases}$同解，可取它的基础解系为$\boldsymbol{\beta}$，即$\boldsymbol{\beta} = (-1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

设$\boldsymbol{B}$对应$\lambda = 4$的特征向量为$\boldsymbol{\gamma} = (c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则由$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵知$\boldsymbol{\gamma}$与$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$都正交，于是有

$$\begin{cases} c_1 \qquad\ - c_3 = 0, \\ -c_1 + c_2 - c_3 = 0, \end{cases}$$

可取它的基础解系为$\boldsymbol{\gamma}$，即$\boldsymbol{\gamma} = (1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 显然$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$两两正交，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$（正交矩阵），则$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$，即$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

使得　$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = y_2^2 + 4y_3^2$（标准形）.

附注　题中的$\boldsymbol{A}$不是实对称矩阵，所以要用正交变换将$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$化为标准形，必须首先将$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$改写成$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$（其中，$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵）. 此外，要熟练掌握，用正交变换把二次型化成标准形的方法.

(22)(Ⅰ)由于当$y > 0$时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x = y\mathrm{e}^{-y} > 0,$$

所以，$f_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅱ) $P(X > 2 \mid Y > 4) = \dfrac{P(X > 2, Y > 4)}{P(Y > 4)}$，其中，

$$P(X > 2, Y > 4) = \iint\limits_{\substack{x > 2 \\ y > 4}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\text{（其中，}D = \{(x,y) \mid 2 < x < y, y > 4\}\text{）}$$

$$= \int_4^{+\infty} \mathrm{d}y \int_2^y \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}x$$

$$= \int_4^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}(y-2)\,\mathrm{d}y$$

$$= -\left[(y-2)\mathrm{e}^{-y}\Big|_4^{+\infty} - \int_4^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right] = 3\mathrm{e}^{-4}.$$

$$P(X > 2 \mid Y = 4) = \int_2^{+\infty} f_{X|Y}(x \mid 4)\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{1}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

附注 对于二维连续型随机变量(X, Y)，必须掌握其两种条件概率$P(X \geqslant a \mid Y \geqslant b)$和$P(X \geqslant a \mid Y = b)$的计算方法.

(23)(Ⅰ)由于$EX = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot \theta^2 + 3 \cdot (1-2\theta) = 3-4\theta.$

样本值的平均值$\bar{x} = \frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$,

所以由矩估计法，令$EX = \bar{x}$，即$3-4\theta = 2$得θ的矩估计值$\hat{\theta} = \frac{1}{4}.$

(Ⅱ)由题设知$Y \sim B(n, \hat{\theta}^2) = B\left(n, \frac{1}{16}\right)$，所以对于任意实数$y$，由中心极限定理(具体是棣莫弗-拉普拉斯定理)得

$$P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{Y - \frac{n}{16}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16}}} \leqslant \frac{y - \frac{n}{16}}{\frac{\sqrt{15n}}{16}}\right)$$

$$\overset{\text{近似}}{\approx} \int_{-\infty}^{\frac{y-\frac{n}{16}}{\sqrt{15n}/16}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

因此,所求的参数为$\mu = \frac{n}{16}, \sigma^2 = \frac{15n}{16^2}.$

附注 计算关于随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的概率问题时,总是引入标准化随机变量$X^0 = \frac{X-\mu}{\sigma}$,则$X^0 \sim N(0,1)$(标准正态分布),于是$X$的分布函数$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$(其中,$\Phi(u)$是标准正态分布函数),即$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$

由此可知,当$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$时,$X \sim N(a, b^2)$. 本题中的参数就是如此得到的.

模拟试题(九)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	A	C	C	A	B	D	C	C

(1) 如果取 L_1 为 $y=f(x)$ 的图形，则$f'(x)>0(x\in(0,\ x_2))$，$f'(x)<0(x\in(x_2,\ x_4))$，$f'(x)>0(x\in(x_4,\ a))$，这与 L_2 为 $y=f'(x)$图形相符，也与 L_3 为 $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形相符. 所以选(A).

附注 本题是先选定 L_1 为 $y=f(x)$ 的图形,然后检验 L_2,L_3 是否分别为 $y=f'(x)$,$y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的曲线. 如果如此选定不行,则再考虑L_2 为 $y=f(x)$ 的图形,等等,直到得到正确选项为止.

(2) 当$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{+\infty}f(-t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x(\text{其中},t=-x)\\ &= -\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x(\text{利用}f(t)\text{ 是奇函数})\\ &= -\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

所以选(C).

附注 当$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上连续，且$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 是奇函数},\\ 2\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

(3) 由于 S 关于平面 $x=0$ 对称,x 在对称点处的值互为相反数,所以$\iint\limits_S x\mathrm{d}S=0$. 由于 D 关于 x 轴对称,y 在对称点处的值互为相反数,所以$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,因此选(C).

附注 当曲面 S 关于某个坐标平面对称时，如果被积函数$f(x,\ y,\ z)$在对称点处的值彼此相等(或互为相反数)，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{S_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S(\text{或}0),$$

其中，S_1 是 S 被此坐标平面划分成的两部分之一.

记住这一结论，往往能化简关于面积的曲面积分的计算.

(4) 容易看到 $y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$是 $y''+py'+qy=0$ 的特解，所以

$$p=-[(-1+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})]=2,\ q=(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})=2.$$

此外，由题设知 e^x 是 $y''+py'+qy=f(x)$，即 $y''+2y'+2y=f(x)$的特解，所以

$$f(x)=(\mathrm{e}^x)''+2(\mathrm{e}^x)'+2\mathrm{e}^x=5\mathrm{e}^x.$$

因此选(A).

附注 容易知道，$\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 是 $y''+2y'+2y=0$ 的解，所以由题设知 e^x 是 $y''+2y'+2y=f(x)$的解.

(5) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，所以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 都有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，所以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 也是$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，因此选(B).

附注 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 未必是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的基础解系，例如$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和$\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系$(0,1)^{\mathrm{T}}$，但它不是$\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以(A)与(D)都不能选.

$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 也未必是 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，例如$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，但它不是$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，这是因为$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$的秩为 $2=3-1$，所以$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}^*$的秩为1，从而$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中应有两个线性无关的解向量．因此(C)不能选．

(6) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形．因此选(D).

附注 (Ⅰ)选项(A)是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的必要条件而不是充分条件，而选项(B)、(C)既不是必要条件，也不是充分条件．

(Ⅱ) 两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有两种：

(i) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征值分别相等(当某个特征值 k 重时，按 k 个计算)；

(ii) 以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形．

(7) $F(1,4)=P(X\leqslant 1,Y\leqslant 4)=P(X\leqslant 1,X^2\leqslant 4)=P(-2\leqslant X\leqslant 1)$

$$=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

因此选(C).

附注 顺便计算 X 的分布函数 $G(x)=P(X\leqslant x)$.

当 $x\leqslant -1$ 时，$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$，

当 $-1<x<0$ 时，$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+1)$，

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x$，

当 $x>2$ 时，$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$

所以，$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & -1<x<0,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

(8) 由于随机变量 t 的概率密度曲线关于纵轴对称，所以由

$$\alpha=P(|t|\leqslant b)=1-P(|t|>b)=1-P(t>b)-P(t<-b)=1-2P(t>b)$$

得 $P(t>b)=\frac{1-\alpha}{2}$，从而由 $t_\alpha(n)$ 的定义得 $b=t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$.

因此选(C).

附注　应当记住：

当 $X\sim N(0,1)$ 时，满足 $P(|X|\leqslant b)=\alpha$ 的 $b=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$(其中，u_α 为满足 $P(X>u_\alpha)=\alpha$ 的实数)；

当 $X\sim T(n)$ 时，满足 $P(|X|\leqslant b)=\alpha$ 的 $b=t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$(其中，$t_\alpha(n)$ 为满足 $P(X>t_\alpha(n))=\alpha$ 的实数).

二、填空题

(9) 所给微分方程可改写成

$$y'+\frac{1}{x^2}y=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

它的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\left(C-\int\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(C-x)$.

将 $y(1)=0$ 代入得 $C=1$，所以 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-x)$. 从而由

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-x)}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-x)+x]=\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=0$$

得曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为 $y=-x$.

附注　计算曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线方程时，总是先计算

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\text{和 }b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

如果这两个极限中至少有一个不存在，则计算

$$a_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\text{和}\ b_1=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_1x]$$

和
$$a_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\text{和}\ b_2=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_2x].$$

(10) 由于$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(2t,\ 0)+f(0,\ \sin t)-2f(t,\ t)}{t}$

$$=2\lim_{t\to0}\frac{f(2t,\ 0)-f(0,\ 0)}{2t}+\lim_{t\to0}\left(\frac{f(0,\ \sin t)-f(0,\ 0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right)-2\lim_{t\to0}\frac{f(t,\ t)-f(0,\ 0)}{t},\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(2t,\ 0)-f(0,\ 0)}{2t}=f'_x(0,\ 0)=1$,

$$\lim_{t\to0}\left[\frac{f(0,\ \sin t)-f(0,\ 0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right]=f'_y(0,\ 0)\cdot1=-1,$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t,\ t)-f(0,\ 0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f'_x(0,\ 0)t+f'_y(0,\ 0)t+o(\sqrt{t^2+t^2})}{t}$$
$$=f'_x(0,\ 0)+f'_y(0,\ 0)=0.$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{t\to0}\frac{f(2t,\ 0)+f(0,\ \sin t)-2f(t,\ t)}{t}=2\times1-1+2\times0=1.$$

附注 由于$f(x,\ y)$仅在点$(0,\ 0)$处可微，所以需用偏导数的定义与全微分的定义计算本题的极限.

(11) 平面$z=1$被Σ所截下的有限部分上侧记为S，它在xOy平面的投影为$D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$，则由高斯公式有

$$\iint_\Sigma xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma+S}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial(xy)}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial x^2}{\partial z}\right]\mathrm{d}v-\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{(其中,}\Omega\text{是由}\ \Sigma+S\ \text{围成的空间区域)}$$
$$=\iiint_\Omega y\mathrm{d}v-\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(由于Ω关于平面$y=0$对称,在对称点处y的值互为相反数)

$$\xlongequal{\text{极坐标}}-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=-\frac14\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac18\int_0^{2\pi}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}.$$

附注 由于题中的Σ不是闭曲面，所以添上一块S，构成闭曲面，然后应用高斯公式计算所给的曲面积分. 这是计算关于坐标的曲面积分的常用方法.

(12) $f(x)$的麦克劳林展开式为

$$f(x)=\sin^2x=\frac12-\frac12\cos2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}(-\infty < x < +\infty).$$

附注　(Ⅰ) 写出 $f(x)$ 的泰勒展开式或麦克劳林展开式时，应写出泰勒级数或麦克劳林级数的通项，还应写出展开式的成立范围.

(Ⅱ) 初等函数的麦克劳林展开式总是用间接法计算，即利用常用函数 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^{\mu}$ 的麦克劳林展开式及幂级数的加、减运算和求导、积分运算等计算.

(13) 由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-3\leqslant r(\boldsymbol{AB})$ 得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，所以

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-3)=0，\text{由此得到 } \lambda=3.$$

附注　应记住关于矩阵秩运算的以下两个公式：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则
$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times l$ 矩阵，则
$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}.$$

(14) $P(A-C\mid AB\cup C)=\dfrac{P((A-C)(AB\cup C))}{P(AB\cup C)}$，

其中，$P((A-C)(AB\cup C)) = P(A\overline{C}(AB\cup C))$
$$= P(AB\overline{C}) = P(A)P(B)(1-P(C)) = 0.1,$$
$$P(AB\cup C) = P(AB)+P(C)-P(ABC)$$
$$= P(A)P(B)+P(C)-P(A)P(B)P(C) = 0.6,$$

所以，$P(A-C\mid AB\cup C)=\dfrac{0.1}{0.6}=\dfrac{1}{6}$.

附注　对于比较复杂的随机事件概率，总是利用简单的随机事件概率和概率计算公式计算. 概率计算公式主要有

设 A，B 都是事件，则

$P(\overline{A})=1-P(A)$(逆概公式)；

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$(加法公式)；

特别当 A，B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

$P(AB)=\begin{cases} P(A)P(B\mid A),\ P(A)>0, \\ P(B)P(A\mid B),\ P(B)>0 \end{cases}$(乘法公式)；

设 A_1，A_2，…，A_n 是一个完全事件组，则当 $P(A_i)>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时，对任意随机事件 B 有
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)\text{(全概率公式)}.$$

三、解答题

(15) 由 $y(x)=\varphi(\psi(x))=\begin{cases}\psi(x), & |\psi(x)|\leqslant 1,\\ \sin\psi(x), & |\psi(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ \sin x^2, & 1<|x|\leqslant 2,\\ \cos x, & |x|>2\end{cases}$ 知,

$|x|<1$ 时, $y'(x)=2x$;

$1<|x|<2$ 时, $y'(x)=2x\cos x^2$;

$|x|>2$ 时, $y'(x)=-\sin x$.

并且 $y'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}y'(x)=2$, $y'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}y'(x)=2\cos 1$,

$y'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}y'(x)=4\cos 4$, $y'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}y'(x)=-\sin 2$,

所以 $y'(x)$ 在点 $x=1$, 2 处不存在, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $y'(x)$ 在点 $x=-1$, -2 处也不存在, 从而

$$y'(x)=\begin{cases}2x, & |x|<1,\\ 2x\cos x^2, & 1<|x|<2,\\ -\sin x, & |x|>2,\end{cases}$$

因此
$$y''(x)=\begin{cases}2, & |x|<1,\\ 2\cos x^2-4x^2\sin x^2, & 1<|x|<2,\\ -\cos x, & |x|>2.\end{cases}$$

附注 本题的题解有两点值得注意:

(Ⅰ) 要计算分段函数复合函数的导数, 应先算出复合函数的表达式.

(Ⅱ) 对分段函数 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant x_0,\\ f_2(x), & x>x_0,\end{cases}$ 如果已算出 $f_1'(x)(x<x_0)$ 与 $f_2'(x)(x>x_0)$, 则当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)$ 都存在时, $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$, $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)$.

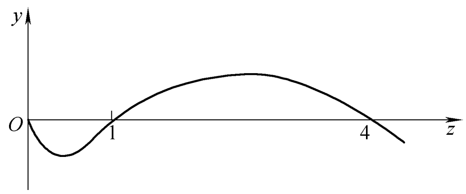
(16) 因为 $f(x)=\int_0^x\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=3x-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$

$$=-x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}-2),$$

并且 $x\in(0,1)\cup(4,+\infty)$ 时 $f(x)<0$, $x\in(1,4)$ 时 $f(x)>0$ 以及 $f(0)=f(1)=f(4)=0$, 所以 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 的图形如图答 9-16 所示, 因此, 所求的面积为

$$A=\int_0^1-(3x-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}})dx+\int_1^4(3x-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$=-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4=1.$$



图答 9-16

附注 计算平面图形的面积时, 应先画出该图形.

当平面图形 D 是由曲线 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$($f_1(x)$, $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续) 及直线 $x=a$, $x=b$ 围成, 则 D 的面积

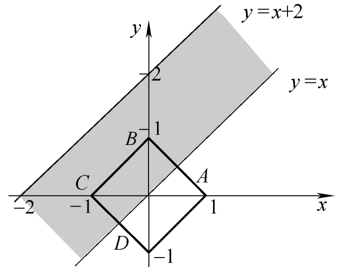
$$S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x.$$

本题的平面图形可理解为是由曲线 $y=f(x)$，直线 $y=0$，$x=0$，$x=4$ 围成的，所以

$$A=\int_0^4 |f(x)-0|\,\mathrm{d}x=\int_0^4 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(17) 由于 $f(x)g(y-x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x\geqslant 0,\ 0\leqslant y-x\leqslant 2,\\ 1,\ x<0,\ 0\leqslant y-x\leqslant 2,\\ 0,\quad\quad 其他,\end{cases}$



图答　9-17

所以，$f(x)g(y-x)$ 仅在图答 9-17 阴影部分取非零值，而在 xOy 平面的其他部分都取零值．因此

$$\oint_C f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}s=\int_{\overline{AB}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}s+\int_{\overline{BC}}\mathrm{d}s+\int_{\overline{CD}}\mathrm{d}s,\tag{1}$$

其中，$\overline{AB}:\begin{cases}x=t,\\ y=1-t,\end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以

$$\int_{\overline{AB}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^t\sqrt{(t')^2+[(1-t)']^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\mathrm{e}^t\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1);$$

$\overline{BC}:\begin{cases}x=t,\\ y=1+t,\end{cases}\ -1\leqslant t\leqslant 0$，所以

$$\int_{\overline{BC}}\mathrm{d}s=\int_{-1}^0\sqrt{(t')^2+[(1+t)']^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2};$$

$\overline{CD}:\begin{cases}x=t,\\ y=-1-t,\end{cases}\ -1\leqslant t\leqslant -\dfrac{1}{2}$，所以

$$\int_{\overline{CD}}\mathrm{d}s=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(t')^2+[(-1-t)']^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

将它们代入式(1)得

$$\oint_C f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}s=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1)+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2\mathrm{e}}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

附注　关于弧长的平面曲线积分计算公式是：

设 $f(x,y)$ 是连续函数，曲线 $C:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$，其中 $x(t)$，$y(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上具有连续的导数，则

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t_1}f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(18)(Ⅰ) 利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n\ (x\in(-1,1])$ 得

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}x^{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x^2)^n$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)(x \in [-1,1]).$$

(Ⅱ) $f(x)=e^x s(x)=\frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2)$在$[-1,\ 1]$上连续，在$(0,\ 1)$内可导且

$$f'(x)=e^x\left[\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right].$$

显然在$(0,\ 1)$内$f'(x)>0$，且$f'(0)=0$. 下面证明在$(-1,\ 0)$内$f'(x)<0$.

记$\varphi(x)=\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，则$\varphi(x)$在$(-1,\ 0)$内可导且

$$\varphi'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{x^3-x^2+x+1}{(1+x^2)^2}.$$

记$\psi(x)=x^3-x^2+x+1$，则$\psi'(x)=3x^2-2x+1>0(x\in(-1,\ 0))$，且$\psi(-1)<0$，$\psi(0)>0$，所以存在$x_0\in(-1,\ 0)$，使得

$$\psi(x)\begin{cases}<0, & -1<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<0.\end{cases}$$

由此得到$\varphi'(x)\begin{cases}<0, & -1<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<0.\end{cases}$

于是，由$\varphi(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2<0$，$\varphi(0)=0$知$\varphi(x)<0$，即$f'(x)<0(x\in(-1,\ 0))$.

由此得到$f(x)$在$(-1,\ 1)$内有唯一驻点$x=0$，于是$f(x)$在$[-1,\ 1]$上的最大值为$\max\{f(0),\ f(-1),\ f(1)\}=\frac{e}{2}\ln 2$，最小值为$\min\{f(0),\ f(-1),\ f(1)\}=0$.

附注 解本题(Ⅱ)的关键是证明$f'(x)<0(x\in(-1,\ 0))$，即证明不等式

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)<0(x\in(-1,\ 0)).$$

题解中采用了导数方法.

(19) 由于$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$即为$[xf(x)]'\big|_{x=\xi}=0$. 所以作辅助函数$F(x)=xf(x)$，它在$[0,\ 1]$上连续，在$(0,\ 1)$内可导，且由

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,dx=x_1f(x_1)\left(x_1\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right)(\text{根据积分中值定理})$$

知$F(1)=F(x_1)$，所以由罗尔定理知，存在$\xi\in(x_1,\ 1)\subset(0,\ 1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

附注 题解中综合使用了罗尔定理与积分中值定理.

(20) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}.$$

记　$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}$，即

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&a&0\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{B}.$$

则由 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-(\lambda+1)&0\\0&\lambda+a&-(\lambda+1)\\-1&-a&\lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda+a&-(\lambda+1)\\1&a&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-(1+a)]\text{知}$$

方程 $f(\lambda)=0$ 不可能有三重根，这是因为如果 $\lambda=-1$ 是三重根，则 $\lambda=-1$ 是 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 的二重根；但是当 $\lambda=-1$ 是 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 的根时 $a=1$，此时 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 成为 $\lambda^2-\lambda-2=0$，这与 $\lambda=-1$ 是它的二重根矛盾.

方程 $f(\lambda)=0$ 有二重根时，应分两种情形讨论：

（ⅰ）$\lambda=-1$ 是方程的二重根，则由以上计算此时 $a=1$，并且由

$$-\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $r(-\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B})=1=3-2$（即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=-1$ 的重数之差），所以此时 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化. 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

（ⅱ）$\lambda=-1$ 不是方程的二重根时，方程 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 必有二重根，从而 $(-1)^2-4[-(1+a)]=0$，即 $a=-\dfrac{5}{4}$，并且此时的二重特征根为 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. 由

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&-1\\-1&\frac{1}{2}&-1\\-1&\frac{5}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-1&\frac{1}{2}&-1\\-1&\frac{5}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&-\frac{3}{2}&-3\\0&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&-\frac{3}{2}&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知，$r\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}\right)=2\neq1=3-2\left(\text{即矩阵 }\boldsymbol{B}\text{ 的阶数与 }\lambda=\dfrac{1}{2}\text{的重数之差}\right)$，所以此时 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

综上所述，当 $a=-\dfrac{5}{4}$时，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有下列两种：

(Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量；

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i(即特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\mathbf{A}|=0$ 的根)，都满足

$$r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\mathbf{A})=n-n_i\quad (n_i\text{ 是 }\lambda_i\text{ 的重数}).$$

本题的求解是利用第(Ⅱ)种充分必要条件.

(21) (Ⅰ)由题设知，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$. 从而 λ_1 对应 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 $\mu_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=1$，所以由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 知 $\mu_1=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$，由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

设 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交，即

$$b_1+b_2-b_3=0.$$

故可取 $\boldsymbol{\beta}$ 为它的基础解系，即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

现将它们正交化：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_1)}{(\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_1)}\boldsymbol{\gamma}_1=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)^{\mathrm{T}}.$$

显然，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$ 是正交向量组，现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\gamma}_1}{\|\boldsymbol{\gamma}_1\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}_2}{\|\boldsymbol{\gamma}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

于是所求的正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$，它使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由于$f(x_1, x_2, x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，

故令$\begin{cases} z_1=\sqrt{2}y_1, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3, \end{cases}$ 即$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \\ y_2=z_2, \\ y_3=z_3, \end{cases}$ 或$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z}$，则

$$2y_1^2-y_2^2-y_3^2=z_1^2-z_2^2-z_3^2\text{（规范形）}.$$

从而$f(x_1, x_2, x_3)$在可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z},$$

即
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\boldsymbol{z}$$

下化为规范形，即

$$f(x_1, x_2, x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2.$$

附注　（Ⅰ）设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆矩阵，有特征值λ及对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$，则$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$有特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$.

（Ⅱ）要熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法.

(22)(Ⅰ)由于 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)$，其中

$$
\begin{aligned}
&P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\
&=P(Y=-1)P(XY\leqslant z\mid Y=-1)+P(Y=0)P(XY\leqslant z\mid Y=0)+P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1)\\
&=\frac{1}{3}[P(X\geqslant -z\mid Y=-1)+P(0\leqslant z\mid Y=0)+P(X\leqslant z\mid Y=1)]\\
&=\frac{1}{3}[P(X\geqslant -z)+P(0\leqslant z)+P(X\leqslant z)]\text{(利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立)}\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, & z<0,\\ \dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+1+\int_{0}^{z}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right), & z\geqslant 0\end{cases}\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ 1-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

所以，$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ 1-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-EX\cdot E(X^2)$，

其中，$EX=1, E(X^2)=D(X)+(EX)^2=1+1^2=2$，

$$
\begin{aligned}
E(X^3)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\
&=-\left(x^3\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}-3\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)=3\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\
&=3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x=3E(X^2),
\end{aligned}
$$

所以，$\mathrm{Cov}(X,X^2)=3E(X^2)-E(X^2)=2E(X^2)=4$.

附注 由于 $Z=XY$ 是连续型随机变量与离散型随机变量之积，所以要计算它的分布函数应从定义出发，即从计算概率

$$P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)$$

入手.

(23)记 X 为独立重复射击中，直到命中时的射击次数，则 k_1，k_2，…，k_n 为来自总体 X 的简单随机样本值．由于

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p(k=1,2,\cdots),$$

所以，$EX=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=-p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k$

$$=-p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1-p}{p}\right)=\frac{1}{p}$$

令 $EX=\bar{k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$，即$\frac{1}{p}=\bar{k}$，于是由矩估计法得 p 的矩估计值 $\hat{p}=\frac{1}{\bar{k}}$.

最大似然函数为

$$\begin{aligned}L(p)&=(1-p)^{k_1-1}p\cdot(1-p)^{k_2-1}p\cdot\cdots\cdot(1-p)^{k_n-1}p\\&=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i-n},\end{aligned}$$

取对数 $\ln L(p)=n\ln p+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i-n\right)\ln(1-p)$. 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=0,\text{即}\frac{n}{p}-\frac{n(\bar{k}-1)}{1-p}=0,$$

解此方程得 $p=\frac{1}{\bar{k}}$. 于是由最大似然估计法知 p 的最大似然估计值 $\hat{p}=\frac{1}{\bar{k}}$.

附注　应熟练掌握总体未知参数的两种点估法方法：矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(十)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	C	B	B	A	B	B	C

(1) 由于
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\frac{\tan x}{x}\right)=-e,$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1+e\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\tan x}{x}\right)=1.$$
所以，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点．因此选(A)．

附注　应记住：$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$．

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时，由定积分性质知 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (-\infty<x<+\infty)$ 成立．反之，当 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (-\infty<x<+\infty)$ 时，等式两边对 x 求导得 $f(x)+f(-x)=2f(x)$，即 $f(x)=f(-x)\ (-\infty<x<+\infty)$．所以 $f(x)$ 是偶函数．因此选(C)．

附注　应记住本题的结论，即

设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (-\infty<x<+\infty)$ 是 $f(x)$ 为偶函数的充分必要条件．

(3) 记 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$，则 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\{a_n\}$ 单调减少，收敛于零，所以所给级数收敛．但是由于 $-1<\alpha\leqslant0$ 时，由 $a_n>\frac{1}{\sqrt2}\int_0^{\frac{1}{n}}x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt2(\alpha+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，从而所给级数在 $\alpha>-1$ 时不是绝对收敛．

综上所述，所给级数条件收敛．因此选(B)．

附注　本题的题解，实际上表明所给级数在 $\alpha>-1$ 时是收敛的，但不是对任意 $\alpha\in(-1,+\infty)$ 都是绝对收敛的，因此对所有的 $\alpha>-1$，所给级数收敛性的结论是条件收敛．

(4) 由于 $I_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}$，
$$I_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\xlongequal{\text{极坐标}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$I_3=I_2$(这是由于 D_2 与 D_3 关于直线 $y=x$ 对称，在对称点$(x,\ y)$与$(y,\ x)$处，$\sqrt{x^2+y^2}$的值彼此相等，所以 $I_2=I_3$)，因此选(B).

附注 题解中，用极坐标计算得出 I_1，I_2 的值，但 $I_2=I_3$ 是利用对称性得到的．在二重积分计算中，应充分利用积分区域的对称性，以化简计算．

(5) 由题设知 $r(\boldsymbol{A}^*)=4-3=1$，从而 $r(\boldsymbol{A})=4-1=3$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有且仅有三个不为零．由此推得$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$的标准形应形如 $a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$($a_1$，$a_2$，$a_3$ 全不为零)．因此选(A).

附注 题解中利用了以下两个结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是它的伴随矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化．

(6) 由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知列向量，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量)有无穷多解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<n.$$

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_l)$($\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_l$ 都是 m 维列向量)，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n)$($\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n$ 都是 n 维列向量)，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}_1)=r(\boldsymbol{A})\leqslant \boldsymbol{n},\cdots,r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}_l)=r(\boldsymbol{A})\leqslant \boldsymbol{n}$$

(其中至少有一式只取不等号)，即

$$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=r(\boldsymbol{A})<n.$$

由此得到，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n.$$

因此选(B).

附注 应记住关于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times l$，$\boldsymbol{X}$ 是 $n\times l$ 未知矩阵)的有解性结论：

该方程有无穷多解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$；有唯一解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$；无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$.

(7) 由于$f(x)$是概率密度，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$a\int_{-\infty}^{1}f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_{1}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1. \tag{1}$$

由 $f_1(x)$是 $X\sim N(1,\ 1)$的概率密度知，$\int_{-\infty}^{1}f_1(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

由 $f_2(x)$ 是 Y 的概率密度知$\int_{1}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1$. 将它代入式(1) 得$\dfrac{1}{2}a+b=1$. 因此选(B).

附注 题解中利用了以下结论：

(Ⅰ) 设 $X\sim N(a,\ \sigma^2)$，则它的概率密度 $f(x)$满足

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

(Ⅱ) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-a)}, & x\leqslant a,\\ 0, & x>a,\end{cases}$ $(\lambda>0)$，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

(8) 当 $\mu=0$ 时，

$$\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{\sigma} = \frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

$$\frac{Q^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

所以

$$\frac{\sqrt{n(n-1)}\overline{X}}{Q} = \frac{\dfrac{\sqrt{n}\overline{X}}{\sigma}}{\sqrt{(Q^2/\sigma^2)/(n-1)}} \sim t(n-1).$$

因此选(C).

附注 应记住数理统计中服从三个抽样分布的随机变量的构成：

(Ⅰ) 设 X_1，X_2，…，X_n 都服从 $N(0,1)$ 的相互独立的随机变量，则

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n).$$

(Ⅱ) 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

(Ⅲ) 设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2).$$

二、填空题

(9) $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}(\cos 2x)^{(4)}\Big|_{x=\xi}\cdot x^4\right]$$

$$=1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{48}\cdot 2^4\cos\left(2\xi+4\times\frac{\pi}{2}\right)x^4$$

$$=1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}\cos 2\xi\cdot x^4(\xi\text{ 是介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间的实数}).$$

附注 $\sin x$ 的 $2n-1$ 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+$$

$$\frac{1}{(2n+1)!}\sin\left(\xi+(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)x^{2n+1},$$

而不是

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{1}{(2n)!}\sin\left(\xi + 2n\cdot\frac{\pi}{2}\right)x^{2n}.$$

同样，$\cos x$ 的 $2n$ 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \frac{1}{(2n+2)!}\cos\left(\xi + (2n+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right)x^{2n+2},$$

而不是

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}\cos\left(\xi + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)x^{2n+1},$$

以上的 ξ 都是介于 0 与 x 之间的实数

(10) $$\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a x\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } t = x - \frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(t + \frac{a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} t\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{a}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}a^3.$$

附注 题解中 $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}a^2$ 是根据定积分的几何意义直接得到的.

(11) 由于所给微分方程可改写成

$$(x^2\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x) - \mathrm{d}y - \cos x\mathrm{d}x = 0,$$

即

$$\mathrm{d}(x^2y - y - \sin x) = 0,$$

所以，$x^2y - y - \sin x = C$. 将 $x = 0$，$y = 1$ 代入得 $C = -1$. 因此所求的特解为

$$x^2y - y - \sin x = -1.$$

附注 本题也可以用以下方法求解：

将所给微分方程改写成

$$y' + \frac{2x}{x^2 - 1}y = \frac{\cos x}{x^2 - 1}\text{(一阶线性微分方程)},$$

它的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(C + \int\frac{\cos x}{x^2 - 1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left(C+\int\cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{x^2-1}(C+\sin x).$$

将 $y(0)=1$ 代入上式得 $C=-1$. 所以所求的特解为

$$y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x-1).$$

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,

其中, $D=\left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$

= 第一象限内由直线 $x+y=1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 围成的闭区域

$=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 1-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

附注 本题是分两步完成的:

首先, 将所给的极坐标系中的二次积分转换成直角坐标系中的二重积分, 此时被积函数为 $f(x,\ y)$, 积分区域为 D.

然后, 将所得到的二重积分转换成先 y 后 x 的二次积分.

(13) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)$. (1)

由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}_3$ 得 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}_3=2\boldsymbol{E}_3$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)=\boldsymbol{E}_3$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3).\tag{2}$$

由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}_3$ 得 $\boldsymbol{A}^3-8\boldsymbol{E}_3=-7\boldsymbol{E}_3$, 即 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}_3)=\boldsymbol{E}_3$, 所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)^{-1}=-\frac{1}{7}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}_3).\tag{3}$$

由式(1)~(3)知 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{-1}&=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)^{-1}\\
&=-\frac{1}{7}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}_3)\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\\
&=-\frac{1}{14}(\boldsymbol{A}^4-\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}_3)\\
&=-\frac{1}{14}(\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}_3)\\
&=-\frac{1}{14}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3+3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}_3)\\
&=-\frac{1}{14}(3\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}_3).
\end{aligned}$$

附注　本题的 $A+E_3$ 与 $A-2E_3$ 的逆矩阵都按定义计算的：

设 A，B 都是 n 阶矩阵，如果 $AB=E_n$，则 A，B 都是可逆矩阵，且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$.

(14) 由于 $\dfrac{a(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}=\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2)}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3\sigma^2}}$服从 t 分布(实际上是服从 $t(3)$分布)，显然，其中$(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/\sigma^2\sim\chi^2(3)$，所以必有

$$\frac{a}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2)\sim N(0,1).$$

从而由 $D\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2)\right)=1$，即$\dfrac{a^2}{3\sigma^2}\cdot 2\sigma^2=1$. 由此得到 $a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

附注　服从 $t(n)$的随机变量定义如下：

设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则随机变量 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$.

三、解答题

(15) 由于 $x<0$ 时，$g(x)<0$；$x>0$ 时，$g(x)>0$，并且由

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}=0$$

知 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}f(g(x))&\xlongequal{\text{令 }u=g(x)}\lim_{u\to0^-}f(u)\\&=\lim_{u\to0^-}\frac{\ln(1-u^3)}{u-\arcsin u}=-\lim_{u\to0^-}\frac{u^3}{u-\arcsin u}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}-3\lim_{u\to0^-}\frac{u^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}}\\&=-3\lim_{u\to0^-}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1}=-3\lim_{u\to0^-}\frac{1}{-\dfrac{1}{2}}=6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(g(x))&\xlongequal{\text{令 }u=g(x)}\lim_{u\to0^+}f(u)\\&=\lim_{u\to0^+}\frac{e^{-u}+\dfrac{1}{2}u^2+u-1}{u\sin\dfrac{u}{6}}=6\lim_{u\to0^+}\frac{e^{-u}+\dfrac{1}{2}u^2+u-1}{u^2}\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} 6\lim_{u\to0^+}\frac{-\mathrm{e}^{-u}+u+1}{2u}$$

$$=3\left(-\lim_{u\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}+1\right)=6,$$

由此得到$\lim\limits_{x\to0^+}f(g(x))=6$.

附注 题解中先计算出$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$，然后计算$\lim\limits_{u\to0}f(u)$，这样计算$\lim\limits_{x\to0}f(g(x))$比较快捷些.

(16) 由于曲线 $y=f(x)$与曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处有相同的切线，从而

$f'(1)=y'(1)=-1$(曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处的切线斜率 $y'(1)$为 -1). (1)

此外，曲线 $y=f(x)$与曲率圆 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处有相同的凹凸性，而 $x^2+y^2=2$ 在点(1, 1)处是凸的，从而 $f''(1)<0$. 由于 $f''(x)$不变号，所以在(1, 2)内 $f''(x)<0$，从而 $f'(x)$单调减少，故 $f'(x)<f'(1)=-1<0(x\in(1,2))$，因此 $f(x)$在(1, 2)内无极值点.

由 $f(1)=1$,

$$\begin{aligned}f(2)&=f(1)+[f(2)-f(1)]=1+f'(\xi)(\text{其中},\xi\in(1,2))\\&<1+f'(1)=0\end{aligned}$$

知 $f(1)f(2)<0$，并且上面已证 $f'(x)<0(x\in(0,1))$，所以 $f(x)$在(1, 2)内有唯一零点.

附注 曲率圆定义如下：

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处二阶可导，则当曲线 $y=f(x)$在点(x_0, y_0)(其中，$y_0=f(x_0)$)处的曲率 $K\neq0$ 时，称以点 D 为圆心，$R=\dfrac{1}{K}$为半径的圆为该曲线在点(x_0, y_0)的曲率圆，其中 D 位于该曲线的在点(x_0, y_0)处的法线(在凹的一侧)上，与点(x_0, y_0)的距离为 R.

曲率圆与曲线 $y=f(x)$在点(x_0, y_0)处有相同的切线及凹凸性.

(17) 由于

$$\begin{aligned}a_n&=-\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n-1}=(-1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)a_{n-2}\\&=\cdots=(-1)^{n-2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdots\frac{4}{3}a_2\\&=(-1)^{n-2}\frac{7}{6}(n+1)=(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)\ (n=3,4,\cdots),\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1,

由于 $x=-1$, 1 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\dfrac{7}{2}x^2+\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\dfrac{7}{6}(n+1)x^n$ 分别成为

$$\frac{13}{12}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7}{6}(n+1),\ \frac{5}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{7}{6}(n+1),$$

它们都发散. 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为$(-1,1)$. 对任意 $x\in(-1,1)$，有

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n$$

$$=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=3}^{\infty}(-x)^{n+1}$$

$$=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4}{1+x}\right)$$

$$=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{7}{6(x+1)^2}.$$

因此 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}s(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{7}{6(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{7}{6}\frac{1}{1+x}\bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{25}{18}.$$

附注　当计算幂级数的和函数 $s(x)$时，应先算出该幂级数的收敛域，即确定 $s(x)$的定义域.

(18) 记$f(x)=xe^{2x}-2x-\cos x$，则$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，在$(0,1)$内二阶可导，且由

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2+\sin x,$$
$$f''(x)=4(1+x)e^{2x}+\cos x>0,$$

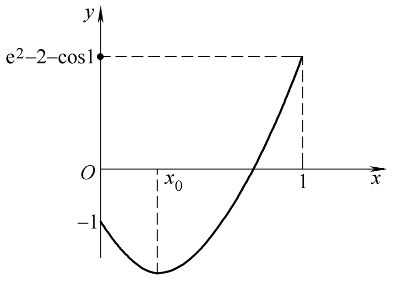
知 $f'(x)$在$(0,1)$内单调增加，$f'(0)f'(1)=(-1)\cdot(3e^2-2+\sin 1)<0$，所以存在唯一$x_0\in(0,1)$，使得$f'(x_0)=0$. 由此得到

$$f'(x)\begin{cases}<0, & 0<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x_0<x<1.\end{cases}$$

因此　由 $f(0)=-1<0$，知 $f(x)<0(x\in(0,x_0])$，即方程$f(x)=0$ 在$(0,x_0]$上无实根．此外，由$f(x_0)f(1)<0$ 及$f'(x)>0(x\in(x_0,1))$知方程$f(x)=0$ 在$(x_0,1)$上有唯一实根.

综上所述，所给方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 在$(0,1)$内有唯一实根.

附注　由题解中分析可知，曲线 $y=f(x)$ 如图答 10-18 所示，由图可知方程$f(x)=0$ 在$(0,1)$内有且仅有一个实根.



图答　10-18

(19) 记 S 切下 yOz 平面、xOz 平面及平面 $z=1$ 的部分为 S_1(前侧)，S_2(右侧)及 S_3(下侧)，则

$$\iint_S x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S+S_1+S_2+S_3}x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1}x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint_{S_2} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_3} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$\displaystyle\iint_{S+S_1+S_2+S_3} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial(x^2z)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^2)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$

（Ω是由 $S + S_1 + S_2 + S_3$ 围成的立体）

$$\xlongequal{\text{高斯公式}} -\iiint_{\Omega}(4xz + 2yz)\mathrm{d}v = -\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}(4xz + 2yz)\mathrm{d}\sigma$$

（其中，$D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant z, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$）

$$= -\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}(4zr\cos\theta + 2zr\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= -\int_0^1 2z^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}z = -\frac{4}{7},$$

$\displaystyle\iint_{S_1} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$（由 S_1 位于平面 $x = 0$ 上），

$\displaystyle\iint_{S_2} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$（由 S_2 位于平面 $y = 0$ 上），

$\displaystyle\iint_{S_3} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中，$D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$）

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta \cdot r\mathrm{d}r = -\frac{1}{3}.$$

所以，$A = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{5}{21}$.

由于 $y[f(x) + 3\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y$ 是某个二元函数的全微分，所以

$$\frac{\partial f'(x)}{\partial x} = \frac{\partial\{y[f(x) + 3\mathrm{e}^{2x}]\}}{\partial y}，\text{即} f''(x) - f(x) = 3\mathrm{e}^{2x},$$

它有通解 $f(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}$，且

$$f'(x) = C_1\mathrm{e}^x - C_2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{2x}.$$

将 $f(0) = A = -\dfrac{5}{21}$，$f'(0) = -A = \dfrac{5}{21}$ 代入以上两式得 $C_1 = -\dfrac{3}{2}$，$C_2 = \dfrac{11}{42}$.

所以，$f(x) = -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^x + \dfrac{11}{42}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}$.

附注 题解中有两点值得注意：

（Ⅰ）利用高斯公式计算所给的曲面积分，故需添上 S_1，S_2，S_3，但由此构成的闭曲面方向为内侧，故有

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial(x^2z)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^2)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v.$$

（Ⅱ）$f''(x) - f(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $f(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}$ 是这样算得的：

首先，对应的齐次线性微分方程 $f''(x) - f(x) = 0$ 的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

其次，$f''(x)-f(x)=3e^{2x}$有特解 $y^*=Me^{2x}$，将它代入这个非齐次线性微分方程得 $M=1$，即 $y^*=e^{2x}$. 所以通解$f(x)=y+y^*=Ce^x+C_2e^{-x}+e^{2x}$.

(20)(Ⅰ)由于所给方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

于是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$是可逆矩阵，得所给方程组的同解方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

对式(1)的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\-1&1&a&1\\0&1&1&2\end{array}\right)$施行初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&a-1&2\\0&1&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&0&a-2&0\\0&1&1&2\end{array}\right),$$

所以，当所给方程组有无穷多解时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$(其中，$\boldsymbol{A}$ 是式(1)的系数矩阵)，于是 $a-2=0$，即 $a=2$.

(Ⅱ)当 $a=2$ 时，式(1)，即所给方程组与

$$\begin{cases}x_1\quad\;\;-x_3=1,\\ \quad\;\; x_2+x_3=2\end{cases} \tag{2}$$

同解. 它对应的导出组通解为 $C(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，且式(2)有特解$(1,2,0)^{\mathrm{T}}$. 所以式(2)，即所给方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C(1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,2,0)^{\mathrm{T}}(C\text{ 是任意常数}).$$

附注　本题(Ⅰ)获解的关键是根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，将所给的线性方程组化简为同解方程组(1).

(21)(Ⅰ)由 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2$ 知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-2,6$(二重). 于是，$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时必有

$$r(6\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})=3-2=1, \tag{1}$$

其中，$6\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&0\\0&-a&0\end{pmatrix}$，因此，满足式(1)的 $a=0$，即当 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时，$a=0$.

(Ⅱ)$a=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，所以

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2+6x_3^2$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$(实对称矩阵)，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-5&0\\-5&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-6)(\lambda-7).$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=-3,\ 6,\ 7$.

设对应 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-5&-5&0\\-5&-5&0\\0&0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\mathbf{0},\text{即}\begin{cases}a_1+a_2=0,\\a_3=0.\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\alpha}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$\begin{pmatrix}4&-5&0\\-5&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=0,\text{即}\begin{cases}4b_1-5b_2=0,\\-5a_1+4b_2=0,\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\beta}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\beta}=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=7$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}=(c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都正交，即

$$\begin{cases}-c_1+c_2=0,\\c_3=0,\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\gamma}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\gamma}=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是正交向量组，现将它们单位化，即

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则所求的正交变换为

$$x = Qy = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y,$$

它将二次型$f(x_1, x_2, x_3)$化为标准形$-3y_1^2+6y_2^2+7y_3^2$.

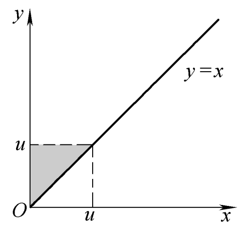
附注　用正交变换将二次型$f(x_1, x_2, x_3)$化为标准形，首先要将该二次型表示成$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$(其中，$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵)，这是本题获解的关键．此外，应熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法．

(22)(Ⅰ)记U的分布函数为$F(u)$，则

$$F(u) = P(U \leqslant u) = P\{\max\{X,Y\} \leqslant u\}$$

$$= P(X \leqslant u, Y \leqslant u) = \iint\limits_{\substack{x\leqslant u\\ y\leqslant u}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \begin{cases} \int_0^u \mathrm{d}x \int_x^u x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0 \end{cases}$$



图答　10-22

$$\left(u > 0 \text{ 时，有} \iint\limits_{\substack{x\leqslant u\\ y\leqslant u}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\triangle} x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\sigma, \triangle \text{ 如图答 10-22 的带阴影的三角形}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-u} - u\mathrm{e}^{-u} - \frac{1}{2}u^2\mathrm{e}^{-u}, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0, \end{cases}$$

所以，U的概率密度

$$\varphi(u) = \frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2\mathrm{e}^{-u}, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0. \end{cases}$$

(Ⅱ)因为$EU = \int_{-\infty}^{+\infty} u\varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}u^3\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-u}$

$$= -\frac{1}{2}\left(u^3\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^{+\infty} - 3\int_0^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right)$$

$$= \frac{3}{2}ET^2\left(\text{其中，}T \sim E(1)\text{，即 }T\text{ 的概率密度为 }f_T(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}\right)$$

$$= \frac{3}{2}[DT + (ET)^2] = \frac{3}{2}(1 + 1^2) = 3,$$

所以$P(U \leqslant EU) = P(U \leqslant 3) = \int_{-\infty}^{3} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^3 \frac{1}{2}u^2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^3 u^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-u}$

$$= -\frac{1}{2}\left(u^2\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^3 - 2\int_0^3 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right) = -\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-3} - \int_0^3 u\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-u}$$

$$= -\frac{9}{2}e^{-3} - \left(ue^{-u}\Big|_0^3 - \int_0^3 e^{-u}du\right) = 1 - \frac{17}{2}e^{-3}.$$

附注 当 X 与 Y 相互独立，且概率密度分别为 $f_1(x)$，$f_2(y)$ 时，$U=\max\{X, Y\}$ 的概率密度为

$$\varphi(u) = f_1(u)F_2(u) + f_2(u)F_1(u),$$

其中 $F_1(x)$，$F_2(y)$ 分别是 X 与 Y 的分布函数.

当 X 与 Y 不相互独立，但 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$ 时，$U=\max\{X, Y\}$ 的概率密度应按题中的方法计算，不能直接套用上述公式.

(23)(Ⅰ)由于 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，所以 $\overline{X}^2$ 与 S^4 也相互独立，因此，

$$E(\overline{X}^2S^4) = E(\overline{X}^2)E(S^4), \tag{1}$$

其中，由 $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 知，$EX=0$，$D\overline{X}=\frac{1}{n}$. 所以，

$$E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + (E\overline{X})^2 = \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n},$$

由 $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ 知 $E(S^2)=1$，$D(S^2)=\frac{2}{n-1}$，所以

$$E(S^4) = D(S^2) + [E(S^2)]^2 = \frac{2}{n-1} + 1 = \frac{n+1}{n-1}.$$

将它们代入式(1)得

$$E(\overline{X}^2S^4) = \frac{n+1}{n(n-1)}.$$

(Ⅱ)由 $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 知 $\sqrt{n}\overline{X} = \frac{\overline{X}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0, 1)$，所以

$$n\overline{X}^2 = (\sqrt{n}\overline{X})^2 \sim \chi^2(1).$$

从而，$D(\overline{X}^2) = D\left(\frac{1}{n} \cdot n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2) = \frac{1}{n^2} \cdot 2 = \frac{2}{n^2}$.

附注 应记住以下结论：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2,$$

则 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，并且

$$E\overline{X} = \mu, \quad D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S^2) = \sigma^2, \quad D(S^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4.$$