

2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学(三)

名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题
难易匹配真题
符合命题趋势



不止是模拟，更接近实战



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（三）名师精选 全真模拟冲刺题 10 套

考研辅导名师 陈启浩 编著



机械工业出版社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书,适用于参加“数学三”考试的学生.书中包含了10套精心设计的模拟试题,题目难度稍高于考研真题.这些题目大部分为首次公开发布,非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习.本书的解答部分,不仅给出了详尽解答,还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习.

本书可作为考生自学的复习材料,也可作为考研培训班的辅导教材,还可供大学数学基础课程的教学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

2016 考研数学(三)名师精选.全真模拟冲刺题10套/
陈启浩编著. —2版. —北京:机械工业出版社,

2015.4

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-48613-8

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第269304号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:郑玫 责任编辑:郑玫

版式设计:霍永明 责任校对:胡艳萍

封面设计:路恩中 责任印制:刘岚

北京京丰印刷厂印刷

2015年4月第2版·第1次印刷

184mm×260mm·12.75印张·307千字

0 001—3 000册

标准书号:ISBN 978-7-111-48613-8

定价:29.80元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88361066 机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-68326294 机工官博:weibo.com/cmp1952

010-88379203 金书网:www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

教育服务网:www.cmpedu.com

前言

深入地读完我们编写的 2016 全国硕士研究生入学统一考试备考用书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生,已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力,具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力.但是为了把准备工作做得更充分,为了践行“战前多流汗,战时少流血”,应在考试前进行 10 场“实战演习”——认真、独立地做完 10 套模拟试题(各套模拟试题的难度稍高于考研真题),作为最后的冲刺.

书中的 10 套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的,它既涵盖性强,又重点突出,其中的问题新颖,既有较强的针对性,又有明显的前瞻性.书中给出了这 10 套试题的详细、规范的解答,每题之后都加有附注,用简明的语言指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点.当然,在“实战演习”时,不应一遇到困难就翻看详解,一定要认真、反复地思索,这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力,向着高分进发.使用本书的实践证明:弄通模拟试题,不想拿高分都难.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩,并欢迎读者对本书提出宝贵意见,可发邮件到 cqhs-huxue@gmail.com,非常感谢!

北京邮电大学教授 陈启浩

目 录

前言	
模拟试题(一)	1
模拟试题(二)	8
模拟试题(三)	15
模拟试题(四)	22
模拟试题(五)	29
模拟试题(六)	36
模拟试题(七)	43
模拟试题(八)	50
模拟试题(九)	57
模拟试题(十)	63
模拟试题(一)解答	70
模拟试题(二)解答	83
模拟试题(三)解答	98
模拟试题(四)解答	109
模拟试题(五)解答	122
模拟试题(六)解答	136
模拟试题(七)解答	148
模拟试题(八)解答	159
模拟试题(九)解答	173
模拟试题(十)解答	186

模拟试题(一)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设 $y = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$ ，则 $y^{(10)} =$

- (A) $\frac{1}{2(x-1)^{11}} - \frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{2(x+1)^{11}}$. (B) $\frac{10!}{2(x-1)^{11}} + \frac{10!}{x^{11}} + \frac{10!}{2(x+1)^{11}}$.
 (C) $\frac{10!}{2(x-1)^{11}} - \frac{10!}{x^{11}} + \frac{10!}{2(x+1)^{11}}$. (D) $\frac{1}{2(x-1)^{11}} + \frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{2(x+1)^{11}}$.

[]

(2) 设函数 $y = y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \ln^2(1+t), \\ y = (e^t - 1)^2, \end{cases}$ 且 $\frac{dy}{dx}$ 在 $t=0$ 处连续，则 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{t=0}$ 为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[]

(3) 定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx =$

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $-\frac{3}{4}$. (D) $\frac{1}{4}$.

[]

(4) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 是连续函数，则以下等式正确的是

- (A) $\iint_D [f(x) + f(-x)] d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x) d\sigma$.
 (B) $\iint_D [f(x) - f(-x)] d\sigma = 4 \iint_{D_1} [f(x) - f(-x)] d\sigma$.
 (C) $\iint_D f(x) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x) d\sigma$.
 (D) $\iint_D f(x^2) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x^2) d\sigma$.

[]

(5) 设 A 是 $n(n > 2)$ 阶可逆矩阵，则 $(A^*)^*$ 等于

- (A) A . (B) A^* . (C) $|A|^{n-2}A$. (D) $|A|^{n-1}A$.

[]

(6) 设 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 则下列选项中为正定矩阵的是

- (A) $A^* + 2B^*$. (B) $A^* - B^*$. (C) $A^* B^*$. (D) $\begin{pmatrix} AB & O \\ O & A+B \end{pmatrix}$.

[]

(7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N\left(2\mu, \frac{\sigma^2}{2}\right)$. 记 $p_1 = P(X \geq \mu - \sigma)$, $p_2 = P\left(Y \leq 2\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$, 则

- (A) $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2} < p_1 < p_2$.
(C) $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$. (D) $p_1 = p_2 > \frac{1}{2}$.

[]

(8) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

- (A) $\frac{1}{n}\sigma^2, \frac{2}{n}\sigma^4$. (B) $\frac{1}{n}\sigma^2, \frac{4}{n}\sigma^4$. (C) $\sigma^2, \frac{2}{n}\sigma^4$. (D) $\sigma^2, \frac{4}{n}\sigma^4$.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) \arctan \frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}$ _____.

(10) 定积分 $\int_0^1 \arctan \frac{1+x}{1-x} dx =$ _____.

(11) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{\ln x}, & x \geq 1, -\infty < y < +\infty, \\ \ln(x^{\ln 2}) + y^2 - 3, & x < 1, -\infty < y < +\infty, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} =$ _____.

(12) 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为 _____.

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r((A^2)^*) =$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则随机变量 $Y = X^2$ 的分布

函数 $F_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. 记 $g(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \sqrt[3]{\sin t f(x)}]^{\frac{\sqrt[3]{t}}{\ln(1+x)}}$, 求 $g'(0)$.

(16) (本题满分 10 分)

(I) 求级数 $\frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2^n \cdot (n+1)!}$ 的和, 记为 a ;

(II) 求微分方程 $y' = e^y - \frac{2}{x}$ 的满足 $y(1) = a$ 的解 $y = y(x) (x > 0)$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 3 阶可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = f'(1) = 1$. 证明. 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f^{(3)}(\xi) = 0$.

(18) (本题满分 10 分)

设二元函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8z + 8 = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 上的最大值与最小值.

(19) (本题满分 10 分)

设二元连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) \cos x d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$, 求 $f(x, y)$ 在 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ 上的平均值.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, 求使矩阵方程 $AX = B$ 有解的常数 a, b, c ,

并求该方程的所有解.

(21) (本题满分 11 分)

设 A 是 3 阶实对称矩阵, $r(A)=2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ (其

中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, Q 是正交矩阵), 使得二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 在此正交变换下化为标准形, 并求此标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 (I) DX ; (II) $P\left(X^2 + Y^2 \leq 1 \mid Y \geq \frac{1}{2}\right)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 $Z = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 是未知参数. 又设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本. 求 EX 的最大似然估计量.

模拟试题(二)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{(e^{\cos x} - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{4}x\right)}, & -\pi < x < 0, \\ x^2 + x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 的可去间断点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[]

(2) 设函数 $f(x) = x \ln(x+a) - \frac{1}{e}$ 仅有单调减少区间 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ ，则常数 a 等于

- (A) -2. (B) -1. (C) 0. (D) 1.

[]

(3) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) = f'(0) = 0$ ，

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du, & x \leq 0, \\ \int_{-x}^0 \ln(1 + f(x+t)) dt, & x > 0, \end{cases}$$

则 $F''(0)$ 为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) 0.

[]

(4) 设 D 是由曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 与直线 $x = 2$ 围成的平面图形，则二重积分 $\iint_D (x+y) d\sigma$ 为

- (A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{3}$. (D) 0.

[]

(5) 设 A 是 $n(n \geq 2)$ 阶反对称矩阵， $A^* \neq O$ ，则 A^* 为对称矩阵是 n 为奇数的

- (A) 充分而非必要条件. (B) 必要而非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

[]

(6) 设矩阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似，则 $r(A - 2E_3) + r(A - E_3)$ 为

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

[]

(7) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-\frac{1}{2}y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则以下结论不正确的是

(A) X 与 Y 相互独立.

(B) $EY = 2$.

(C) X 在 $Y = y > 0$ 条件下的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y) = e^{-x}$.

(D) 关于 X 的边缘分布函数 $F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

[]

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $X \sim N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $Z = \frac{1}{20}(X_1 - 2X_2)^2 + \frac{1}{100}(3X_2 - 4X_4)^2$ 的方差 $D(Z)$ 为

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n \sin \frac{\pi}{n}}$ _____.

(10) 函数 $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1, \\ x \ln x, & x > 1, \end{cases}$ $\psi(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & |x| \leq 1 \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^1 \varphi(\psi(x)) dx$ = _____.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且在点 $(1, 0)$ 的充分小邻域内,

$$f(u, v) = 1 - u - v + o(\sqrt{(u - 1)^2 + v^2}).$$

记 $g(x, y) = f(e^x, x + y)$, 则 $dg(x, y)|_{(0,0)} =$ _____.

(12) 设 $f(x, y)$ 是二元连续函数, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{-\sin\theta + \sqrt{3 + \sin^2\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$ 在直角坐标系中先 x 后 y 的二次积分为 _____.

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ B & C^* \end{pmatrix}^{-1}$

_____.

(14) 设随机变量 X, Y 的概率密度同为 $f(t) = \begin{cases} \frac{3}{8}t^2, & 0 < t < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 已知事件 $A = \{X > a\}$,

$B = \{Y > a\}$ 相互独立, 且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, 则常数 $a =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文

字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x - |x|}{|x|} \right) \arctan \frac{1}{x}.$$

(16) (本题满分 10 分)

求由直线 $y = x$ 及曲线 $y = x^2$ 围成的平面图形分别绕直线 $y = 1$ 和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积.

(17) (本题满分 10 分)

求 $a = 1$ 与 $a = 2$ 时微分方程 $y'' + a^2 y = \sin x + 2\cos 2x$ 的通解.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 证明: 当 $|x|$ 充分小时, 有 $0 \leq \tan^2 x - x^2 \leq x^4$;

(II) 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(19) (本题满分 10 分)

设 $f(x, y)$ 是二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2} \cos 2\theta dr d\theta$ 在直角坐标系中的被积函数, 其中

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

(I) 求 $f(x, y)$ 的表达式与 I 的值;

(II) 记 $g(x, y) = f(x + y, \sqrt{2xy})$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组(A): $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 与向量组(B): $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 等价, 求

(I) 常数 a ;

(II) (A) 由 (B) 的线性表示式.

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交变换 $x = Qy$ (其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y =$

$(y_1, y_2, y_3)^T$), 将二次 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 化为标准形, 其中正交矩阵 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求

(I) 常数 a 及 f 的标准形;

(II) A^* 能否正交相似对角化? 如果能写出使 $P^T A^* P = \Lambda$ 的正交矩阵 P 及对角矩阵 Λ ; 如果不能, 说明理由.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ax^2y, & (x, y) \in G = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求常数 A 及方差 $D(2X+3Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2, & x > \alpha > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

记 $Z = X^2$, Z_1, Z_2, \dots, Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本. 求未知参数 α 的最大似然估计量.

模拟试题(三)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

- (A) 处处可导. (B) 恰好有一个不可导点.
(C) 恰好有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

[]

(2) 记 $F(x) = \int_0^{2x} \cos^2(2x - t) dt$ ，则 $F''(x)$ 为

- (A) $4\sin 4x$. (B) $-4\sin 4x$.
(C) $4\cos 4x$. (D) $-4\cos 4x$.

[]

(3) 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^3 x} dx$ 的正根个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[]

(4) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内具有 2 阶连续偏导数，且 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. 记 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ ，则以下结论不正确的是

- (A) 当 $A > 0$, $AC - B^2 > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值.
(B) 当 $C > 0$, $AC - B^2 > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值.
(C) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值.
(D) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

[]

(5) 设 A 是 2 阶矩阵, B 是 3 阶可逆矩阵, 且 $|A| = 2$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & (2A)^* \\ (3B)^{-1} & O \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为

- (A) $\begin{pmatrix} O & \frac{1}{4}A \\ 3B & O \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} O & 3B \\ \frac{1}{4}A & O \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} O & \frac{1}{4}B \\ 3A & O \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 3B & O \\ O & \frac{1}{4}A \end{pmatrix}$.

[]

(6) 已知矩阵 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 及 3 阶非零矩阵 P 满足 $PQ = O$, 则

(A) $t=6$ 时, $r(P)=1$.

(B) $t=6$ 时, $r(P)=2$.

(C) $t \neq 6$ 时, $r(P)=1$.

(D) $t \neq 6$ 时, $r(P)=2$.

[]

(7) 已知 10 件产品中有 4 件一等品, 6 件二等品. 现从中任取两次, 每次取一件, 取后不放回. 已知其中至少有 1 件是一等品, 则两件都是一等品的概率 p 为

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{3}{5}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

[]

(8) 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立且同服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 即它们的概率密度同为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则对任意实数 x , 下列结论中正确的为

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Phi(x).$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Phi(x).$

[]

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$ _____.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = x + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$, 则定积分 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

(11) 设 $z = f(e^x, x^2 + y^2)$, 其中二元函数 $f(u, v)$ 可微, 且 $y = y(x)$ 是由方程 $e^x + \sin y = x$ 确定的隐函数, 则 $\frac{dz}{dx} =$ _____.

(12) 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ (其中, D 是曲线 $y = x^2 (\geq 0)$, 直线 $x + y = 2$ 以及 x 轴围成的平面图形) 在极坐标系下, 先 r 后 θ 的二次积分为 _____.

(13) 设 A, B 都是 4 阶矩阵, 它们相似, 且 A 的特征值为 $-2, 1, 1, 2$, 则行列式 $|B^* - E_4| =$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ Y 的概率分布为 $P(Y=0) = \frac{1}{3}$,

$P(Y=1) = \frac{2}{3}$, 则 $E(X^3 + 2Y^2) =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 在点 $u=1$ 处可导, $f'(u)=1$. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\ln(1+x^2) + e^x - x) - f(1)}{\tan x \cdot (\sqrt{1+x} - 1)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + y = 5e^{2x} + 2\sin x$ 的通解.

(17) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 由递推式 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{1}{a_n^2} \right)$ ($n = 1, 2, \dots$) 确定, 求

(I) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (记为 a);

(II) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} x^n$ 的收敛域.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $0 < f(x) < 1$, 以及 $f'(x) \neq 1 (0 < x < 1)$, 则存唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

(19) (本题满分 10 分)

$$\text{设二元函数 } f(x, y) = \begin{cases} x \ln x, & x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \\ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & 1 < x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

求二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(20) (本题满分 11 分)

已知线性方程组 (I)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \end{cases}$$
 有两个不同的解, 且 a 为系数矩阵的秩, 求其

通解及向量 $\xi = (a, b, c)^T$ 关于向量组 $\eta_1 = (1, 0, -1)^T$, $\eta_2 = (-1, 1, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 1, 0)^T$ 的线性表示式.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ($c \geq 2$) 与 $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ 中有且仅有一个是正定二次型, 求常数 c , 及由可逆线性变换将正定二次型化为的规范形, 用正交变换将非正定二次型化为的标准形(需分别求出可逆线性变换与正交变换).

(22) (本题满分 11 分)

设有随机变量 X, Y , 其中 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 且在 $Y = y$ 的条件

下, X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 求 $D(X)$ 及 $\text{Cov}(X, Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 $Z = XY$, 其中随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率密度 $f_X(x)$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} (\lambda > 0), Y \text{ 的概率分为 } \begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}, \text{ 又设 } z_1, z_2, \dots, z_n \text{ 是来自 } Z \text{ 的一}$$

个简单随机样本的观察值, 求未知参数 λ 的最大似然估计值.

模拟试题(四)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $g(x)$ 满足 $g(1) = 0$, $g'(1) = -1$. 记

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{\pi}{2x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

则 $f'(1)$ 为

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) 不存在.

[]

(2) 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - (x^2 - 1) \sin \pi x}{x^n + x^2 - 1}$ 的极大值与极小值分别为

- (A) 1, -1. (B) -1, 1. (C) 不存在, -1. (D) 1, 不存在.

[]

(3) 设二元函数 $\varphi(x, y) = \int_0^{\frac{y^2}{x^2}} du \int_0^u \frac{1}{y^2} f\left(\frac{v}{y}\right) dv$ (其中 f 是连续函数), 则 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}$ 为

- (A) $\frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x^2}\right)$. (B) $\frac{1}{x^2} f\left(\frac{x^2}{y}\right)$.
(C) $\frac{1}{x^4} f\left(\frac{y}{x^2}\right)$. (D) $\frac{1}{x^4} f\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

[]

(4) 设曲线 $y = y(x)$ 在点 $M(0, 1)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, 且 $y(x)$ 满足微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$, 则 $y(x)$ 为

- (A) $\sqrt{1+x} \ (x \geq -1)$. (B) $\sqrt{1+x} \ (x \geq 0)$.
(C) $y^2 = x + 1 \ (x \geq -1)$. (D) $y^2 = x + 1 \ (x \geq 0)$.

[]

(5) 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维非零列向量, 记 $B = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$, 且 $r(A) = r(B)$, 则线性方程组

- (A) $Ax = \alpha$ 有无穷多解. (B) $Ax = \alpha$ 有唯一解.
(C) $By = 0$ 有非零解. (D) $By = 0$ 只有零解.

[]

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与 A 合同且相似的是

- (A) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

[]

(7) 设随机变量 X 服从指数分布, 它的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则随机变量 $Y = \max\left\{X, X^2, \frac{1}{2}\right\}$ 的分布函数

- (A) 是连续的. (B) 只有一个间断点.
(C) 只有两个间断点. (D) 多于两个间断点.

[]

(8) 设 X_1, X_2, \dots, X_8 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 则统计量 $\frac{(X_1 + X_2 + X_5 + X_6)^2}{(X_3 + X_4 - X_7 - X_8)^2}$ 服从

- (A) $F(4, 2)$. (B) $F(4, 4)$. (C) $F(1, 1)$. (D) $F(2, 4)$.

[]

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为_____.

(10) 由拉格朗日中值定理知, 对任意 $x \in (0, 1)$, 对应地存在唯一的 $\xi(x) \in (0, x)$, 使得 $\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - \xi^2(x)}}$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi(x)}{x} =$ _____.

(11) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^{\pi} e^{2f(x)} \sin x dx =$ _____.

(12) 设二元函数 $z = \sin(xy) + \varphi\left(x, \frac{x}{y}\right)$, 其中 $\varphi(u, v)$ 具有 2 阶偏导数, 且满足 $\varphi''_{uv} +$

$$\frac{1}{y}\varphi''_{vv}=0, \text{ 则 } z''_{xy} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(13) 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 且其列向量组线性无关; \mathbf{B} 是 n 阶矩阵, 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$, 则 $r(\mathbf{B}^*) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 $D(X + Y^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int f(x) dx$, 其中函数 $f(x) = |x + 1| + 2x$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(t) = \begin{cases} 2t^2 + \sin t, & t < 0, \\ y(t), & t \geq 0, \end{cases}$ 其中 $y = y(t)$ 是微分方程 $\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}$ 满足 $y(0) = 0$ 的解. 求 $f''(t)$.

(17) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \sin x \cdot f(x)$, 以及 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. 求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值.

(18) (本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 0\}$ 上的最大值与最小值.

(19) (本题满分 10 分)

设二元函数 $u = u(x, y)$ 具有 2 阶连续偏导数, 且满足 $u''_{xx} = u''_{yy}$, $u(x, 2x) = x$, $u'_x(x, 2x) = x^2$. 又设 D 是由半圆 $x^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$, 曲线 $z = u''_{xx}(x, 2x)$, $z = u''_{xy}(x, 2x)$ 围成的平面图形, 求 D 的面积.

(20) (本题满分 11 分)

设向量 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, $\gamma = (0, 0, 8)^T$. 记 $A = \alpha\beta^T$, $b = \beta^T\alpha$, 求线性方程组 $2b^2A^2x = A^4x + b^4x + \gamma$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求使二次型 $f_1(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 与 $f_2(x_1, x_2, x_3) = x^T A^* x$ (其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$) 都化为标准形的正交变换 $x = Qy$ (其中 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, Q 是正交矩阵), 并写出它们的标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -2 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 求

(I) 随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度 $\varphi(y)$;

(II) 求 $E(|Y - X^4|)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 其中 X 的概率密度为 $f(x; \theta)$

$= \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \theta > 0.$ 求当 n 无限增加时, 未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 所近似服从的分布.

模拟试题(五)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 可导,

(A) 若 $f(x)$ 只有一个零点, 则 $f'(x)$ 至少有两个零点.

(B) 若 $f'(x)$ 只有一个零点, 则 $f(x)$ 至少有两个零点.

(C) 若 $f(x)$ 没有零点, 则 $f'(x)$ 至少有一个零点.

(D) 若 $f'(x)$ 没有零点, 则 $f(x)$ 至多有一个零点.

[]

(2) 对于定积分 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x) dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx$ 有

(A) $I_1 < I_2$.

(B) $I_1 < I_3$.

(C) $I_3 < I_2$.

(D) $I_3 < 1$.

[]

(3) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 则

(A) $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.

(B) $f''_{xy}(0, 0) > f''_{yx}(0, 0)$.

(C) $f''_{xy}(0, 0) < f''_{yx}(0, 0)$.

(D) $f''_{xy}(0, 0)$ 与 $f''_{yx}(0, 0)$ 中至少有一个不存在.

[]

(4) 设二元函数 $f(x, y)$ 连续, 记二次积分 $\int_0^1 dy \int_{1-y}^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x, y) dy$ 对应的二重积分的积分区域为 D , 则 D 的边界上与直线 $y = x - 1$ 平行的切线方程为

(A) $y = x - \frac{3}{4}$.

(B) $y = x + \frac{3}{4}$.

(C) $y = x - \frac{1}{2}$.

(D) $y = x + \frac{1}{2}$.

[]

(5) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -4, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 5, 4, t+2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -8, 2, t)^T$ 有以下结论:

① $t=2$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. ② $t=2$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

③ $t=3$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. ④ $t=3$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

则正确结论为

- (A) ①③. (B) ②③. (C) ①④. (D) ②④.

[]

(6) 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & -b-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 都可相似对角化, 则

- (A) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. (B) $a = b = \frac{1}{2}$.
(C) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. (D) $a = b = -\frac{1}{2}$.

[]

(7) 设连续型随机变量 X, Y 满足 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}$, $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7}$, 则

$P(\max\{X, Y\} \cdot X \geq 0)$ 为

- (A) $\frac{6}{7}$. (B) $\frac{4}{7}$. (C) $\frac{3}{7}$. (D) $\frac{2}{7}$.

[]

(8) 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_9 是来自 X 的简单随机样本, 它的均值记为 \bar{X} , 则使得 $P(1 < \bar{X} < 3)$ 为最大的 σ 值是

- (A) $\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$. (B) $\frac{4}{\sqrt{\ln 3}}$. (C) $\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$. (D) $\frac{8}{\sqrt{\ln 3}}$.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2} + x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ 的非铅直渐近线方程为_____.

(10) 设函数 $f(x) = (\sin x^3)^3 + \ln \cos x$, 则 $f^{(4)}(0) =$ _____.

(11) 定积分 $\int_{-1}^1 (|x| e^{-x} + \sin x^3 + \sqrt{1-x^2}) dx =$ _____.

(12) 设二重积分 $\iint_D (x + 4y + xy) d\sigma = \frac{\pi}{8}$ (其中, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq ax\}, a > 0$),

则常数 $a =$ _____.

(13) 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性无关列向量组, 已知

$$A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

则 A 的最大特征值为_____.

(14) 已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件放入乙箱后, 从乙箱中任取 3 件, 则其中的次品数的

平均值为_____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $e^x f(x) + 2e^{\pi-x} f(\pi-x) = 3\sin x$, 求 $f(x) (x > 0)$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

设二元函数 $f(u, v)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1$, $f'_u(1, 1) = 2$, $f'_v(1, 1) = 3$, 以及 $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$ 是单调函数, 求 $\frac{d}{dx} \int_0^{\varphi(x)} \varphi^{-1}(t) dt \Big|_{x=1}$ (其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数).

(18) (本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n \cdot (2n+1)!} x^{2n+1}$ 的和函数为 $s(x)$, 求反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} s^2(x) dx$.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 在 $[1, +\infty)$ 上具有 2 阶连续偏导数, 且 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. 又设函数 $z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 求

(I) $f(u)$ 的表达式;

(II) 二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2)}{\ln(x^2 + y^2)} d\sigma$, 其中 D 是 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ 与 $D_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ 的公共部分.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$ 有零特征值, 且存在矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ b+1 & c-2 & -3 \end{pmatrix}$, 使得矩

阵方程 $AX = B$ 有解, 求常数 a, b, c 及该矩阵方程的所有解.

(21) (本题满分 11 分)

设向量 $\beta = (1, 1, -2)^T$ 可由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 线性表示, 但表示式不是唯一的.

(I) 求常数 a 及线性表示式的一般形式;

(II) 对矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 及上述算得 a , 求正交变换 $x = Qy$ (其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, Q 是正交矩阵), 使得二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 化为标准形, 并求此标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

记 $Z = 2X - Y$, 求 DZ 和 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 $Z = X^2 + Y$, 其中 $X \sim N(0, \sigma^2)$, Y 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

又设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本, 求未知参数 σ^2 的矩估计量.

模拟试题(六)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

[]

(2) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^2 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^7 x) dx$,

则它们的大小次序为

- (A) $M < N < P$. (B) $N < M < P$. (C) $P < M < N$. (D) $P < N < M$.

[]

(3) 收敛半径 $R=1$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的

- (A) 充分而非必要条件. (B) 必要而非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非必要又非充分条件.

[]

(4) 微分方程 $y'' + y = 2\sin x$ 应有的特解形式为

- (A) $a\cos x + b\sin x$. (B) $x(a\cos x + b\sin x)$.
(C) $ax\cos x$. (D) $bx\sin x$.

[]

(5) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量, 且存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则

- (A) B^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$.
(B) B^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $P\alpha$.
(C) B^{-1} 有特征值 λ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$.
(D) B^{-1} 有特征值 λ 及对应的特征向量 $P\alpha$.

[]

(6) 设 n 维向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ($m \leq n$), 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 和 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, 则下列命题不正确的是

(A) 当(I)与(II)等价时, (I)与(II)等秩.

(B) 当(I)与(II)等秩时, (I)与(II)等价.

(C) 当 A 与 B 等价时, A 与 B 等秩.

(D) 当 A 与 B 等秩时, A 与 B 等价.

[]

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 记 $Y = X^2$ 和二维随机变量 $(X,$

$Y)$ 的分布函数为 $F(x, y)$, 则 $F(1, 4)$ 等于

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{3}{4}$.

(D) 1.

[]

(8) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $Y = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^2$ 的数学期望为

(A) $\frac{4}{n} \sigma^4$.

(B) $\frac{2}{n} \sigma^4$.

(C) $\frac{1+n}{n} \sigma^4$.

(D) $\frac{2+n}{n} \sigma^4$.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ a, & x \leq 0 \end{cases}$ 连续, 则常数 $a =$ _____.

(10) 设二元函数 $f(u, v)$ 可微, 则 $\frac{\partial}{\partial x} f\left(e^{xy}, \cos \frac{1}{x}\right) =$ _____.

(11) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + (-1)^{\cos \frac{n\pi}{2}} \frac{1}{2^n} \right]$ 的和为 _____.

(12) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p + p \ln p$ (其中 p 是价格), 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

(13) 设 4 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $A^* =$ _____.

(14) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件, 又记 X 为服从参数为 $P(A)$ 的 0-1 分布的随机变量, 则 $E(X^2) =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx$.

(16) (本题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^x$, 且 $f_n(1) = \frac{e}{n!}$, 记 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 求 $s(x)$ 的表达式并画出函数 $y = s(x)$ 的简图.

(17) (本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2x^2y^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ 上的最大值与最小值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in D_1, \\ 1 - x - y, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1, D_2 是 $\triangle OAB$ 被曲线 $xy + x + y = 1$

划分成的两部分(见图 6-18), 求二重积分 $\iint_{\triangle OAB} f(x, y) d\sigma$.

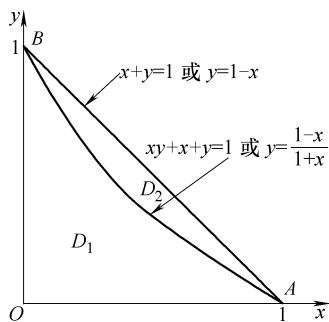


图 6-18

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内 2 阶可导, 且 $f'_+(a) > 0$, $f(b) = 0$. 此外存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, $f'(c) < 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, a)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (b, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, b)^T$ 线性表示, 但 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性表示, 求常数 a, b .

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (其中 \mathbf{A} 是 3 阶实对称矩阵, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$) 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 以及 \mathbf{Q} 是正交矩阵) 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 且 \mathbf{Q} 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 求 \mathbf{A} 的伴随矩阵 \mathbf{A}^* .

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(I) 求随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(II) 求随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 是未知参数, $x_1, x_2, \dots,$

x_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本的观察值, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

模拟试题(七)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

- (1) 设函数 $f(x) = (x-2) |x(x-2)|$, 则
- (A) $f(x)$ 在点 $x=0, 2$ 处都不可导.
- (B) $f(x)$ 在点 $x=0, 2$ 处都可导.
- (C) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 而在点 $x=2$ 处不可导.
- (D) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导, 而在点 $x=2$ 处可导.

[]

- (2) 下列等式中不正确的是

(A) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2.$ (B) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{2n}\right)^2.$

(C) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2.$ (D) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2.$

[]

(3) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$ 则

- (A) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续.
- (B) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数都为零.
- (C) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在但都不为零.
- (D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

[]

(4) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列, 则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, 下列结论正确的是

- (A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散.
- (B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛.
- (C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛.

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

[]

(5) 设向量组 α, β, γ 线性无关, 向量组 α, β, δ 线性相关, 则

(A) α 不可由 β, γ, δ 线性表示.

(B) δ 可由 α, β, γ 线性表示.

(C) β 不可由 α, γ, δ 线性表示.

(D) δ 不可由 α, β, γ 线性表示.

[]

(6) 设 A 是 n 阶矩阵且有以下命题:

① A 有 n 个不同的特征值;

② A 有 n 个线性无关的特征向量;

③ A 是实对称矩阵;

④ A 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i E_n - A$ 都满足 $r(\lambda_i E_n - A) = n - n_i$,

则 A 可相似对角化的充分必要条件有两类, 它们是

(A) ①②.

(B) ②③.

(C) ②④.

(D) ①④.

[]

(7) 下列命题不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 上服从均匀分布, 则 X 与 Y 相互独立.

(B) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} abe^{-(ax+by)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中 } a, b \text{ 都是正数}),$$

则 X 与 Y 相互独立.

(C) 设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上服从均匀分布 (其中 R 是正数), 则 X 与 Y 相互独立.

(D) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自同一总体的简单随机样本, 则随机变量 $X = f_1(X_1, X_2)$ 与 $Y = f_2(X_3, X_4)$ (其中 f_1, f_2 都是连续函数) 相互独立.

[]

(8) 设随机变量 $t \sim t(n)$, 对 $\alpha \in (0, 1)$, $t_\alpha(n)$ 为满足 $P(t > t_\alpha(n)) = \alpha$ 的实数, 则满足 $P(|t| \leq b) = \alpha$ 的 b 等于

(A) $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$.

(B) $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.

(C) $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$.

(D) $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)$.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $y = y(x)$ 由微分方程 $x^2 y' + y + x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$ 及 $y(1) = 0$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 的非

铅直渐近线方程为_____.

(10) 设 a 是常数, 则 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx =$ _____.

(11) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 且

$$f'_x(0, 0) = 1, \quad f'_y(0, 0) = -1,$$

则极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, 0) + f(0, \sin t) - 2f(t, t)}{t} =$ _____.

(12) 函数 $f(x) = xe^{x+1} + \frac{1}{2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数为_____.

(13) 已知 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 记它的伴随矩阵为 A^* , 则行列式

$$\left| \left(\frac{1}{2} A^2 \right)^{-1} - 3A^* \right| = \text{_____}.$$

(14) 设 X 是离散型随机变量, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

又设 Y 是连续型随机变量, 其概率密度为 $\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 记 $a = P(X=1)$, 则概率

$$P(Y \geq a) = \text{_____}.$$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$, 分别求 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 和 V_y .

(17) (本题满分 10 分)

计算二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\arccos \frac{1}{r}} r \sin^2 \theta d\theta$.

(18) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x} + \sin 2x \cos x$ 的通解.

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

(20) (本题满分 11 分)

设方程组 $A\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解 $(1, 2, 2, 1)^T$ 和 $(1, -2, 4, 0)^T$, 其中矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩为 3, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}$ 都是 4 维列向量, 求方程组 $B\mathbf{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解, 其中矩阵 $B=(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

(21) (本题满分 11 分)

设 $f(x_1, x_2, x_3)=\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T, A=\begin{pmatrix} 1 & 2b & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求二次型 $f(x_1, x_2,$

$x_3)=\mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ (其中 B 是实对称矩阵) 的矩阵 B , 并计算 B 有特征值 $\lambda=0, 1$ 时 a, b 的值及可逆线性变换 $\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$ (其中 $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)^T, \mathbf{C}$ 是可逆矩阵), 它将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(I) 求关于 X 与 Y 的边缘概率密度;

(II) 求概率 $P(Y \geq EX)$ 和条件概率 $P(X > 2 | Y < 4)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

($0 < \theta < \frac{1}{2}$).

(I) 试用总体 X 的简单随机样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}$.

(II) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X (其未知参数 θ 为 (I) 中确定的 $\hat{\theta}$) 的简单随机样本, 则由中心极限定理知, 当 n 充分大时取值为 2 的样本个数 Y 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求它的两个参数 μ, σ^2 .

模拟试题(八)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x) = x | (e^x - 1)(x - 1) |$ 的不可导点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[]

(2) 设 $F(x) = \int_0^x \max\{e^{-t}, e^t\} dt$, 则

- (A) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0, \\ e^x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x < 0, \\ e^x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$
(C) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0, \\ 1 - e^x, & x \geq 0. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x < 0, \\ 1 - e^x, & x \geq 0. \end{cases}$

[]

(3) 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x-a)^n$ 在 $x > 0$ 时发散, 在点 $x = 0$ 处收敛, 则

- (A) $a = 1$. (B) $a = -1$.
(C) $-1 \leq a < 1$. (D) $-1 < a \leq 1$.

[]

(4) 设 $y_1 = e^x - e^{-x} \sin x$, $y_2 = e^x + e^{-x} \cos x$ 是 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的两个解, 则 $f(x)$ 为

- (A) e^{5x} . (B) e^{3x} . (C) e^x . (D) e^{-x} .

[]

(5) 设 A, B 都是 n 阶实矩阵, 且齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有相同的基础解系 ξ_1, ξ_2 , 则方程组① $(A+B)x = 0$, ② $A^T Ax = 0$, ③ $B^* x = 0$ 以及④ $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 中仍以 ξ_1, ξ_2 为基础解系的是

- (A) ①②. (B) ②④. (C) ③④. (D) ①③.

[]

(6) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4$ 的最小特征值为

- (A) -1. (B) -2. (C) 1. (D) 2.

[]

(7) 袋内有 7 个球, 其中 4 个红球, 3 个白球. 现不放回地取球, 每次取 1 个. 记

$A = \{\text{第二次取球才取到白球}\}$, $B = \{\text{第二次取球取到的是白球}\}$,

则它们的概率为

- (A) $P(A) = P(B) = \frac{4}{7}$. (B) $P(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{3}{7}$.
 (C) $P(A) = P(B) = \frac{3}{7}$. (D) $P(A) = P(B) = \frac{2}{7}$.

[]

(8) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ($-\infty < x < +\infty$), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的简单随机样本, 记其均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 方差为 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $E(\bar{X} + S^2)$ 为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x^3}} - 2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则常数 $a =$ _____.

(10) 设函数 $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$, 则 $f^{(5)}(0) =$ _____.

(11) 设二元函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + \sin(xy) + xz = 0$ 确定, 且 $xz + 1 \neq 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 其对价格 P 的弹性 $\varepsilon_P = 0.2$, 则当需求量为 100 000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 _____ 元.

(13) 设 A, B 分别为 2 阶与 4 阶矩阵, 且 $r(A) = 1$, $r(B) = 2$, A^*, B^* 分别是 A 与 B 的伴随矩阵, 则

$$r \begin{pmatrix} O & A^* \\ B^* & O \end{pmatrix} = \text{_____}.$$

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 都服从参数为 1 的指数分布, 即它们的概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \text{ 则 } P(\max\{X, Y\} \leq 1) = \text{_____}.$$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x \cos x \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}} dx$.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & 0 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在圆域 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ 上的最大值与最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设 $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \tan^2 \frac{x}{2}}{1 - (1+x)^{\sin^3 x}}$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sin^{n+1} \alpha$ 的和.

(19) (本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1, D_2 是 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ 被圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 划分成的两部分, 如图 8-19 所示. 求二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$.

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

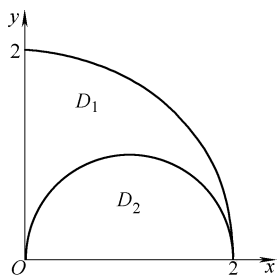


图 8-19

(20) (本题满分 11 分)

已知线性方程组 (A):
$$\begin{cases} x_1 & + 2x_2 & + x_3 & = 3, \\ 2x_1 & + (a+4)x_2 & - 5x_3 & = 6, \\ -x_1 & - 2x_2 & + ax_3 & = -3 \end{cases}$$
 有无穷多解.

(I) 求常数 $a (a \neq 0)$ 的值;

(II) 对上述算得的 a 值, 求方程组 (A) 与 (B):
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$$
 有公共解时的 λ 值

及公共解.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 是 3 阶实对称矩阵, A^* 是它的伴随矩阵, 其满足

$$A^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

且二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ (其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, Q 是正交矩阵) 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 求 Q 及 A^* .

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (U, V) 的概率密度为

$$f(u, v) = \begin{cases} 1, & 0 < u < 1, 0 < v < 2u, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

又设 X 与 Y 都是离散型随机变量, 其中 X 只取 $-1, 0, 1$ 三个值, Y 只取 $-1, 1$ 两个值, 且 $EX = 0.2$, $EY = 0.4$, $P(X = -1, Y = 1) = P(X = 1, Y = -1) = P(X = 0, Y = 1) =$

$\frac{1}{3}P\left(V \leq \frac{1}{2} \mid U \leq \frac{1}{2}\right)$. 求

(I) (X, Y) 的概率分布;

(II) $\text{Cov}(X, Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3} x^2 e^{-(y-\theta)}, & 0 < x < \theta, y > \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 和它的方差 $D(\hat{\theta})$.

模拟试题(九)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填写在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ ，则 $y^{(n)}$ 为

(A) $(-1)^n \frac{n!}{(x+1)^n}$.

(B) $(-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$.

(C) $(-1)^n \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+1}}$.

(D) $(-1)^n \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$.

[]

(2) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的三个 2 阶偏导数 $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ 存在，则必有

(A) $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

(B) $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

(C) $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

(D) $f'_x(x, y_0)$ 在点 x_0 处可微.

[]

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($-1 < \alpha < 0$)

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛或发散与 α 取值有关.

[]

(4) 设 y_1, y_2 是非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解， $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.

(B) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.

(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$.

(D) $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

[]

(5) 设矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (其中 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵， \mathbf{B} 是 $m \times l$ 矩阵， \mathbf{X} 是 $n \times l$ 未知矩阵)，则该方程有无穷多解的充分必要条件为

(A) $r(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) = n$.

(B) $r(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) < n$.

(C) $r(\mathbf{A} : \mathbf{B}) > r(\mathbf{A})$.

(D) $r(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$.

[]

(6) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 n 阶实对称矩阵，则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 合同的充分必要条件为

(A) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

(B) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$.

(C) \mathbf{A}, \mathbf{B} 的特征值相同.

(D) 分别以 \mathbf{A} , \mathbf{B} 为矩阵的二次型有相同的规范形.

[]

(7) 设 X, Y 是随机变量, 其中 $X \sim N(1, 1)$, 概率密度为 $f_1(x)$, Y 的概率密度为

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases} \text{ 记 } f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x < 0, \\ bf_2(x), & x \geq 0, \end{cases} \text{ 则当 } f(x) \text{ 是概率密度时, } a, b \text{ 应满足}$$

(A) $a + \frac{1}{2}b = 1.$

(B) $\frac{1}{2}a + b = 1.$

(C) $a + \frac{1}{2}b = 0.$

(D) $\frac{1}{2}a + b = 0.$

[]

(8) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 其中 X 服从参数 λ 的指数分布. 记样本均值为 \bar{X} , 方差为 S^2 , 则当 $(4-a)S^2 - 2a\bar{X}^2$ 为 $\frac{1}{\lambda^2}$ 的无偏估计量时, 常数 a 为

(A) 3.

(B) $\frac{3n}{3n+1}.$

(C) $\frac{3n}{3n+2}.$

(D) $\frac{n}{n+1}.$

[]

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + e^{nx}} + (1 + \sqrt{1+n} - \sqrt{n})^{\sqrt{2+n}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) $\int \frac{1}{x \sqrt{4x^2 - 1}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 设二元函数 $f(u, v)$ 可微, 则 $\frac{\partial}{\partial x} f(e^{xy}, \sin x^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^{2n}$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 及 3 阶矩阵 \mathbf{B} , 它们满足 $r(\mathbf{B}) = 2$, $r(\mathbf{AB}) = 1$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 A, B, C 是相互独立事件, 且 $P(A) = 0.4$, $P(B) = P(C) = 0.5$, 则概率 $P(A - C | AB \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y = \varphi(\psi(x))$, 其中 $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0, \end{cases} \psi(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0, \\ xe^x, & x > 0, \end{cases}$ 求

$\varphi'(\psi(x)) \Big|_{x=0}$ 与 $[\varphi(\psi(x))]' \Big|_{x=0}.$

(16) (本题满分 10 分)

已知二元连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = y + \int_0^x f(x-t, y) dt$, 求二重积分 $\iint_D \sqrt{x} f(x, y^2) d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $x = y^2$ 和直线 $x = 1$ 围成的区域.

(17) (本题满分 10 分)

某厂家生产的一种产品同时在 A, B 两个市场销售, 每件产品售价分别为 p_1 和 p_2 , 需求函数分别为 $q_1 = 3 - 0.5p_1$ 和 $q_2 = 2 - 3p_2$, 总成本函数为 $C = 5 + 2\left(q_1 + \frac{41}{12}q_2\right)$. 如果 A 市场的价格对 B 市场的价格弹性为 2, 且 $p_2 = 1$ 时, $p_1 = \frac{3}{16}$. 试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大?

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上非负、单调减少的连续函数, 证明:

$$\int_0^a f(x) dx > \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \quad (\text{其中 } 0 < a < b < 1).$$

(19) (本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n+1}$, 求

(I) 该幂级数的和函数 $s(x)$ 及其定义域;

(II) 方程 $s(x) = \frac{1}{2}$ 的实根个数.

(20) (本题满分 11 分)

设 A 是三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量组. 已知

$$A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$A\alpha_2 = \alpha_1 + a\alpha_3,$$

$$A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

问: a 为何值时, A 不能相似对角化?

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, A 是 3 阶实对称矩阵) 经正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, Q 是正交矩阵) 化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 又设 $A^* \alpha = \alpha$ (其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, $\alpha = (1, 1, -1)^T$). 求

(I) Q 及 A ;

(II) 可逆线性变换 $\mathbf{x} = C\mathbf{z}$ (其中 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, C 是可逆矩阵), 它将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 是连续型的, 它的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$ 随机变量 Y 是离散型的,

它的概率分布为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(I) 当 X 与 Y 相互独立时, 求 $Z = XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$;

(II) 求 $\text{Cov}(X, X^2)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X}, S^2 分别是它的均值与方差, 求

(I) $E(\bar{X}^2 S^4)$;

(II) $D(\bar{X}^2)$.

模拟试题(十)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$, 则当 $x > 1$ 时, $f(x)$

- (A) 单调减少且大于零. (B) 单调减少且小于零.
(C) 单调增加且大于零. (D) 单调增加且小于零.

[]

(2) 设二元函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 且 $z(x, 0) = x^2$, $z(0, y) = y$, 则 $z(x, y)$ 为

- (A) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x^2 + y$. (B) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - x^2 + y$.
(C) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + x^2$. (D) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x^2$.

[]

(3) 设 $\varphi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则当区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 时, $\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} d\sigma =$

- (A) πa . (B) πb . (C) $\pi(a+b)$. (D) $\frac{\pi}{2}(a+b)$.

[]

(4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 则

- (A) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一收敛.
(B) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一发散.
(C) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.
(D) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

[]

(5) 设 A 是 n 阶实矩阵, 则方程组 $Ax = 0$ 有解是方程组 $A^T Ax = 0$ 有解的

- (A) 必要而非充分条件. (B) 充分而非必要条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

[]

(6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶实对称矩阵, A^* 是它的伴随矩阵. 如果 $(1, 1, 0, 0)^T$, $(1, 0, 1, 0)^T$ 和 $(0, 0, 1, 1)^T$ 是方程组 $A^*z = 0$ 的一个基础解系, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T Ax$ (其中 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$) 的标准形应形如

(A) $a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2$.

(B) $b_1y_1^2 + b_2y_2^2$.

(C) $c_1y_1^2$.

(D) $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2 + d_4y_4^2$.

(其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, d_1, d_2, d_3, d_4$ 都是非零常数).

[]

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 都在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 则随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的概率密度为

(A) $f(z) = \begin{cases} \frac{2z}{a^2}, & 0 < z < a, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(B) $f(z) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{z}{a}\right), & 0 < z < a, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(C) $f(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \left(\frac{z}{a}\right)^2, & 0 < z < a, \\ 1, & z \geq a. \end{cases}$

(D) $f(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2, & 0 < z < a, \\ 1, & z \geq a. \end{cases}$

[]

(8) 设 $X \sim N(a, \sigma^2)$, $Y \sim N(b, \sigma^2)$, 且相互独立. 现分别从总体 X 和 Y 中各抽取容量为 9 和 11 的简单随机样本, 记它们的方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2 , 并记 $S_{12}^2 = \frac{1}{2}(S_X^2 + S_Y^2)$, $S_{XY}^2 = \frac{1}{18}(8S_X^2 + 10S_Y^2)$, 则上述四个统计量 S_X^2 , S_Y^2 , S_{12}^2 和 S_{XY}^2 中方差最小者为

(A) S_X^2 .

(B) S_Y^2 .

(C) S_{12}^2 .

(D) S_{XY}^2 .

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且满足

$$\int_0^x [5f(t) - 2] dt = f(x) - e^{5x},$$

则 $f''(0) =$ _____.

(10) 设二元可微函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\int_y^z e^{t^2} dt + xy + yz = 0$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} =$ _____.

(11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) =$ _____.

(12) 设 2 阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 有特解 $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$, 则 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = \cos x$ 的通解为 _____.

(13) 设 n 阶矩阵 A 满足 $AA^T = E_n$, $|A| < 0$, 则 $|A + E_n| =$ _____.

(14) 设存在常数 $a, b (b \neq 0)$, 使得 $P(Y = a + bX) = 1$, 则随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续的导数，且满足

$$y(x) = 1 + x + 2 \int_0^x (x-t)y(t)y'(t) dt,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

(16) (本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x + 2x^2y, & 0 \leq x \leq a, |y| \leq a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求二重积分 $I(a) = \iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D: x^2 + y^2 \geq ax (a > 0)$.

(17) (本题满分 10 分)

设 $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}, a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)a_n (n \geq 2)$, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi)(1 - \xi) = \int_0^{\xi} f(x) dx$;

(II) 当 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导且满足 $(1-x)f'(x) > 2f(x)$ 时, (I) 中的 ξ 是唯一的.

(19) (本题满分 10 分)

某厂制造某种电器, 固定成本为 400 万元, 每生产一件产品成本增加 0.8 万元, 总收益 R (单位: 万元) 是月产量 x (单位: 件) 的函数

$$R(x) = \begin{cases} 30x - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 60, \\ 900, & x > 60, \end{cases}$$

并且总纳税金 T (单位: 万元) 是 x 的函数

$$T(x) = \begin{cases} 0.2x, & 0 \leq x \leq 60, \\ 900 \cdot 1\% + \frac{1}{20}x, & x > 60. \end{cases}$$

求该厂月产量 x 为多大时总利润最大, 并求最大总利润.

(20) (本题满分 11 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 4 维列向量组, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$. 已知方程组

$$(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + a\alpha_2 + \alpha_3)x = \alpha_4$$

有无穷多解.

(I) 求常数 a 的值;

(II) 对 (I) 中求得的 a 值, 计算方程组的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 可相似对角化.

(I) 求常数 a 的值;

(II) 对(I)中求得的 a 值, 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, \mathbf{Q} 是正交矩阵), 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

记 $Z = \min\{X, Y\}$, 求 Z^2 的数学期望 $E(Z^2)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 $\theta > -1$ 为未知参数, $X_1,$

X_2, \dots, X_n 为来自 X 的一个简单随机样本. 求

(I) θ 的矩估计量;

(II) θ 的最大似然估计量.

模拟试题(一) 解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	D	A	D	B	A	D	C

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 由于 } y &= \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以, } y^{(10)} &= \frac{1}{2} \left[(-1)^{10} \frac{10!}{(x-1)^{11}} + (-1)^{10} \frac{10!}{(x+1)^{11}} - 2(-1)^{10} \frac{10!}{x^{11}} \right] \\
 &= \frac{10!}{2(x-1)^{11}} + \frac{10!}{2(x+1)^{11}} - \frac{10!}{x^{11}}. \quad \text{因此选 (C).}
 \end{aligned}$$

附注 应记住公式对: 对于 $a \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$(2) \text{ 由于 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^t(e^t-1)}{\frac{2}{1+t}\ln(1+t)} = \frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)}, \text{ 并且由题设知}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以, } \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}}{t} \bigg|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)} - 1}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t(1+t)(e^t-1) - \ln(1+t)}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[e^{2t} - e^t - \ln(1+t)] + e^t t(e^t-1)}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - e^t - \ln(1+t)}{t^2} + 1 \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2e^{2t} - e^t - \frac{1}{1+t}}{2t} + 1 \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(e^{2t}-1) - (e^t-1) - \left(\frac{1}{1+t} - 1 \right)}{2t} + 1 = 3.
 \end{aligned}$$

因此选(D).

附注 由于在点 $x=0$ 的某个邻域内 $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{e^t(1+t)(e^t-1)}{\ln(1+t)}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$ 是分段函数, 所以用

导数定义计算 $\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right|_{t=0}$.

$$\begin{aligned} (3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x |\cos x| dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3}{4}. \text{ 因此选 (A).} \end{aligned}$$

附注 题解中应注意的是: 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$ 上, $\sqrt{1 - \sin^2 x} \neq \cos x$, 而应 $\sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$.

(4) 由于 D 关于 y 轴对称, 而 $f(x^2)$ 在对称点处的值彼此相等, 所以 $\iint_D f(x^2) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x^2) d\sigma$. 因此选(D).

附注 在计算二重积分时, 应充分利用积分区域的对称性, 适当地化简二重积分.

(5) 对于 $n > 2$ 有

$$\begin{aligned} (A^*)^* &= (|A| A^{-1})^* = |A|^{n-1} (A^{-1})^* = |A|^{n-1} (A^*)^{-1} \\ &= |A|^{n-1} (|A| A^{-1})^{-1} = |A|^{n-1} \cdot \frac{1}{|A|} A = |A|^{n-2} A. \end{aligned}$$

因此选(B).

附注 当 A 不可逆时, 本题结论仍成立. 这是因为, 当 A 不可逆, 即 $|A| = 0$ 时, $|A|^{n-2} A = O$. 另一方面, 当 $|A| = 0$ 时, $r(A^*) = 1$, 或 0 , 即 $r(A^*) < n - 1$. 从而 $r((A^*)^*) = 0$, 由此得到 $(A^*)^* = O$.

故仍有 $(A^*)^* = |A|^{n-2} |A|$.

(6) 由 A 是正定矩阵知 A 是实对称矩阵, 故 A^* 也是实矩阵, 并且, 由 $A^T = A$ 得 $(A^*)^T = (A^T)^* = A^*$, 所以 A^* 也是对称的, 从而 A^* 也是实对称矩阵. 此外由 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 全为正的知, A^* 的特征值 $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \dots, \frac{|A|}{\lambda_n}$ 也全为正的. 因此 A^* 是正定矩阵. 同样可得 B^* 是正定矩阵.

于是, 对于任意 x (n 维非零列向量), 有 $x^T A^* x > 0$, $x^T B^* x > 0$, 由此可知 $x^T (A^* + 2B^*) x > 0$, 即 $A^* + 2B^*$ 是正定矩阵, 因此选 (A).

附注 应记住以下结论:

设 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 则 $A + B, A^T + B^T, A^{-1} + B^{-1}, A^* + B^*$ 都是正定矩阵, 但 $A - B, AB, A^T B^T, A^{-1} B^{-1}, A^* B^*$ 等未必是正定矩阵.

(7) 由题设知 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \frac{Y - 2\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sim N(0, 1)$, 所以

$$p_1 = P(X \geq \mu - \sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq -1\right) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1\right) = \Phi(1) > \frac{1}{2},$$

$$p_2 = P\left(Y \leq 2\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{Y - 2\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \leq 1\right) = \Phi(1), \text{ (其中 } \Phi(x) \text{ 是标准正态分布函数)}$$

数)

所以 $p_2 = p_2 > \frac{1}{2}$. 因此选 (D).

附注 由 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 知 $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$, 所以有 $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) > \frac{1}{2}$.

$$(8) \text{ 由于 } Y = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2,$$

其中由 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1) (i = 1, 2, \dots, n)$ 知, $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, 所以

$$EY = \frac{\sigma^2}{n} \cdot n = \sigma^2, \quad DY = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

因此选 (C).

附注 应记住以下结论:

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立且都服从 $N(0, 1)$ 的随机变量, 则 $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \sim \chi^2(n)$, 且 $E\eta = n, D\eta = 2n$.

二、题空题

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) \arctan \frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) \arctan \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x},$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}, \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0$. 所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) \arctan \frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)} = -\frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

附注 由 $x \rightarrow 0$ 时, x 是无穷小, $\left| \arctan \frac{1}{x} \right| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0$. 类似地有

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x \frac{1}{x} = 0.$$

$$\begin{aligned} (10) \int_0^1 \arctan \frac{1-x}{1+x} dx &= \int_0^1 (\arctan 1 - \arctan x) dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

附注 应记住初等数学公式:

$$\arctan \frac{a+x}{1-ax} = \arctan a + \arctan x,$$

$$\arctan \frac{a-x}{1+ay} = \arctan a - \arctan x.$$

$$\begin{aligned}
 (11) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{z(x, 2) - z(1, 2)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{\ln x} - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\ln x (\ln 2 - \ln x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\ln x}{x - 1} \cdot (\ln 2 - \ln x) \right] = \ln 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = \ln 2, \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{z(x, 2) - z(1, 2)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[\ln(x^{\ln 2}) + 1] - 1}{x - 1} = \ln 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x - 1} = \ln 2,
 \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \ln 2$.

附注 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \frac{dz(x, 2)}{dx} \Big|_{x=1}$, 而 $z(x, 2)$ 是分段点为 $x=1$ 的分段函数, 所以按定义计算 $\frac{dz(x, 2)}{dx} \Big|_{x=1}$.

(12) 所给差分方程可改写成

$$y_{t+1} + 5y_t = \frac{5}{2}t. \quad (1)$$

式(1)对应的齐次线性差分方程的通解为 $y_c(t) = c(-5)^t$. 此外, 式(1)有特解 $y_t^* = at + b$. 将它代入式(1)得 $a = \frac{5}{12}$, $b = -\frac{5}{72}$, 所以 $y_t^* = \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right)$.

因此式(1), 即所给的差分方程的通解为

$$y_t = c(-5)^t + \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right) \quad (t=1, 2, \dots, c \text{ 是任意常数}).$$

附注 常系数线性差分方程 $y_{t+1} + ay_t = f(t)$ 的通解可按以下步骤计算

(I) 算出对应的齐次差分方程 $y_{t+1} + ay_t = 0$ 通解 $y_c(t)$,

(II) 计算所给差分方程 $y_{t+1} + ay_t = f(t)$ 的一个特解 y_t^* , 则所求的通解为 $y_t = y_c(t) + y_t^*$.

(13) 由于

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 & -1 \\ -14 & 4 & 10 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & -7 & 17 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & -7 & 17 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

所以 4 阶矩阵 A^2 的秩 $r(A^2) = 3$, 从而 $r((A^2)^*) = 1$

附注 本题是利用以下公式(应记住)计算的:

设 A 是 n 阶矩阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

(14) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$, 其中,

$y \leq 0$ 时, $P(X^2 \leq y) = 0$;

$y > 0$ 时, $P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(0 \leq X \leq \sqrt{y})$

$$= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} x dx, & 0 < y \leq 1, \\ \int_0^1 x dx + \int_1^{\sqrt{y}} (2 - 2x) dx, & 1 < y \leq 4, \\ \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx, & y > 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}y, & 0 < y \leq 1, \\ -1 + 2\sqrt{y} - \frac{1}{2}y, & 1 < y \leq 4, \\ 1, & y > 4. \end{cases}$$

$$\text{所以 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{2}y, & 0 < y \leq 1, \\ -1 + 2\sqrt{y} - \frac{1}{2}y, & 1 < y \leq 4, \\ 1, & y > 4. \end{cases}$$

附注 $F_Y(y)$ 也可以按以下方法计算.

记 $g(x) = x^2$, 则 $g(x)$ 在 $\{x \mid f(x) \neq 0\} = (0, 2)$ 内单调增加, 记它的反函数为 $x =$

$h(y)$, 则 $h(y) = \sqrt{y}$, $h'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (0 < y < 4)$. 所以

$$Y \text{ 的概率密度 } f_Y(y) = \begin{cases} f(h(y)) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right|, & 0 < y < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1, \\ (2 - \sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}, & 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\text{因此 } F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u) du = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \int_0^y \frac{1}{2} du, & 0 < y \leq 1, \\ \int_0^1 \frac{1}{2} du + \int_1^y \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2} \right) du, & 1 < y \leq 4, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du, & y > 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{2}y, & 0 < y \leq 1, \\ -1 + 2\sqrt{y} - \frac{1}{2}y, & 1 < y \leq 4, \\ 1, & y > 4. \end{cases}$$

三、解答题

$$(15) \text{ 由于 } g(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \sqrt[3]{\sin t f(x)}]^{\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\ln(1+x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2} \cdot \ln[1 + \sqrt[3]{\sin t f(x)}]}{\ln(1+x)}},$$

其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2} \cdot \ln[1 + \sqrt[3]{\sin t f(x)}]}{\ln(1+x)} &= \sqrt[3]{t^2 \sin t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \sqrt[3]{t^2 \sin t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt[3]{t^2 \sin t} f'(0) = \sqrt[3]{t^2 \sin t}. \end{aligned}$$

所以, $g(t) = e^{\sqrt[3]{t^2 \sin t}}$. 因此

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt[3]{t^2 \sin t}} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 \sin t}}{t} = 1.$$

附注 题解中有两点值得注意:

(I) 由于 $f(x)$ 仅在点 $x=0$ 处可导, 所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 必须按导数定义计算.

(II) $g'(0)$ 也可以按以下方法计算:

$$\text{由于 } t \neq 0 \text{ 时, } g'(t) = e^{\sqrt[3]{t^2 \sin t}} \left(\frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} \sin^{\frac{1}{3}} t + \frac{1}{3} t^{\frac{2}{3}} \sin^{-\frac{2}{3}} t \cos t \right),$$

$$\text{且 } \lim_{t \rightarrow 0} g'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\sqrt[3]{t^2 \sin t}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{\frac{2}{3}} \cos t \right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

所以, $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g'(t) = 1$.

$$\begin{aligned} (16) \text{ (I) } a &= \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1) - (n+1) + \frac{3}{4}}{2^n \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \\ &\quad \frac{3}{4} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right] \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} (e^{\frac{1}{2}} - 1) = 0. \end{aligned}$$

(II) 所给微分方程可以改写成

$$e^{-y} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} e^{-y} = 1, \text{ 即 } \frac{de^{-y}}{dx} - \frac{2}{x} e^{-y} = -1,$$

所以
$$e^{-y} = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(C + \int (-1) \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = x^2 \left(C - \int \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$= x^2 \left(C + \frac{1}{x} \right) = Cx^2 + x. \quad (1)$$

将 $y(1) = a = 0$ 代入式(1)得 $C = 0$, 所以 $e^{-y} = x$, 从而

$$y = y(x) = -\ln x (x > 0).$$

附注 题解中有两点值得注意:

(I) 利用公式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\infty < x < +\infty)$ 计算题中所给级数之和.

(II) 将所给微分方程改写成

$$e^{-y} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} e^{-y} = 1, \text{ 即 } \frac{de^{-y}}{dx} - \frac{2}{x} e^{-y} = -1,$$

得到以 e^{-y} 为未知函数的线性微分方程, 由此算出 $y = y(x)$.

(17) 记 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $F(0) = F(1) (=0)$, 所以由罗尔定理知, 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$. 于是由 $F'(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上可导, 且 $F'(0) = F'(\eta)$, 所以由罗尔定理知, 存在 $\eta_1 \in (0, \eta)$, 使得 $F''(\eta_1) = 0$. 同样可知, 存在 $\eta_2 \in (\eta, 1)$, 使得 $F''(\eta_2) = 0$.

由此可知, $F''(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上满足罗尔定理条件, 因此存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 1)$, 使得 $F^{(3)}(\xi) = 0$, 即 $f^{(3)}(\xi) = \xi$.

附注 罗尔定理的高阶导数形式有各种叙述, 例如,

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 2 阶可导, 且 $f(a) = f(c) = f(b)$ (其中 $c \in (a, b)$), 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 3 阶可导, 且 $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = f(b)$ (其中 $a < x_1 < x_2 < b$), 或 $f'(a) = f'(\eta) = f'(b)$ (其中 $\eta \in (a, b)$), 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(3)}(\xi) = 0$.

(18) 所给方程两边对 x 求偏导数得

$$2x + z \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ 即 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{4-z}.$$

同样可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{4-z}$. 由于方程组 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{2x}{4-z} = 0, \\ \frac{2y}{4-z} = 0 \end{cases}$ 在 D 内部无解, 所以 $z = z(x, y)$ 在 D

内无可能极值点.

D 有边界 I: $y = 0 (0 \leq x \leq 1)$, II: $x = 0 (0 \leq y \leq 1)$ 以及 III: $x + y = 1 (0 \leq x \leq 1)$.

在 I 上, 所给方程式为 $2x^2 + z^2 - 8z + 8 = 0$, 即

$$z = 4 \pm \sqrt{8 - 2x^2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

它有最大值 $4 + 2\sqrt{2}$, 最小值 $4 - 2\sqrt{2}$. 同样可以算出 z 在 II 上有最大值 $4 + 2\sqrt{2}$, 最小值 $4 - 2\sqrt{2}$.

在 III 上, 所给方程成为

$$2x^2 + 2(1 - x^2) + z^2 - 8z + 8 = 0,$$

即
$$z = 4 \pm \sqrt{7 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

它有最大值 $4 + \sqrt{7}$, 最小值 $4 - \sqrt{7}$.

综上所述, $z = z(x, y)$ 在 D 上的

$$\text{最大值} = \max\{4 + 2\sqrt{2}, 4 + \sqrt{7}\} = 4 + 2\sqrt{2},$$

$$\text{最小值} = \min\{4 - 2\sqrt{2}, 4 - \sqrt{7}\} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

附注 在 D 上 $z \neq 4$ (这是因为 $z = 4$ 时, 所给方程成为 $x^2 + y^2 = 4$, 这在 D 上是不可能

的), 所以 $z = z(x, y)$ 在 D 的内部的可能极值点仅来自方程组
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 的解. 因此当它在 D

内无解时, $z = z(x, y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

(19) 记 $A = \iint_D f(x, y) \cos x \, d\sigma$, 则

$$f(x, y) = xy + A. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } A &= \iint_D f(x, y) \cos x \, d\sigma = \iint_D (xy + A) \cos x \, dx \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (xy + A) \, dy = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} x \sin^2 x + A \sin x \right) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{4} x (1 - \cos 2x) \, dx + 2A \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi x \, dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi x \cos 2x \, dx + 2A \\ &= \frac{1}{4} \left[x \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^\pi - \frac{1}{8} \int_0^\pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx + 2A \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^\pi + 2A = \frac{\pi^2}{8} + 2A, \end{aligned}$$

即 $A = \frac{\pi^2}{8} + 2A$. 所以 $A = -\frac{\pi^2}{8}$. 将它代入式(1)得 $f(x, y) = xy - \frac{\pi^2}{8}$. 因此

$$f(x, y) \text{ 在 } D_1 \text{ 上的平均值 } B = \frac{1}{D_1 \text{ 的面积}} \iint_{D_1} f(x, y) \, d\sigma,$$

其中, D_1 的面积 $= \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} f(x, y) \, d\sigma &= \iint_{D_1} \left(xy - \frac{\pi^2}{8} \right) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \left(xy - \frac{\pi^2}{8} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^5 - \frac{\pi^2}{8} x^2 \right) dx = \frac{2 - \pi^2}{24}. \end{aligned}$$

$$\text{因此 } B = \frac{\frac{2-\pi^2}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{2-\pi^2}{8}.$$

附注 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值为 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 其中 $f(x)$ 是连续函数.

二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上的平均值为 $\frac{1}{D \text{ 的面积}} \iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中, $f(x, y)$ 是连续函数,

D 是平面区域, 它的面积不为零.

(20) 使矩阵方程 $AX=B$ 有解, 必须

$$r(A) = r(A : B).$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } (A : B) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & a & b & c \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-4 & c \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-4 & c \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-2 & c-1 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-2 & c-1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以, 使式(1)成立的 a, b, c 满足 $\begin{cases} a-1=0, \\ b-2=0, \\ c-1=0, \end{cases}$ 即 $a=1, b=2, c=1$.

当 $a=1, b=2, c=1$ 时, 所给的矩阵方程与

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

同解. 记 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, 则式(1)等价于以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

式(3)的通解为 $(x_{11}, x_{21}, x_{31})^T = C_1(-1, -1, 1)^T + (1, 0, 0)^T = (-C_1+1, -C_1, C_1)^T$,

式(4)的通解为 $(x_{12}, x_{22}, x_{32})^T = C_2(-1, -1, 1)^T + (2, 2, 0)^T = (-C_2+2, -C_2+2, C_2)^T$,

式(5)的通解为 $(x_{13}, x_{23}, x_{33})^T = C_3(-1, -1, 1)^T + (1, -1, 0)^T = (-C_3+1, -C_3-1, C_3)^T$.

所以, 式(2), 即所给矩阵方程的所有解为

$$X = \begin{pmatrix} -C_1+1 & -C_2+2 & -C_3+1 \\ -C_1 & -C_2+2 & -C_3-1 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } C_1, C_2, C_3 \text{ 为任意常数}).$$

附注 (I) 设矩阵方程 $AX=B$ (其中 A, B 分别为 $m \times n, m \times l$ 矩阵), 则

$AX=B$ 有解的充分必要条件为 $r(A \parallel B) = r(A)$.

特别, $AX=B$ 有唯一解的充分必要条件为 $r(A \parallel B) = r(A) = n$; $AX=B$ 有无穷多解的充分必要条件为 $r(A \parallel B) = r(A) < n$.

(II) 当矩阵方程 $AX=B$ 有解时, 可按以下方法求解:

如果 A 可逆 (此时 $m=n$), 则 $X=A^{-1}B$;

如果 A 不可逆, 则如题解中那样, 将 $AX=B$ 表示成若干个线性方程组, 然后逐一计算各个方程组的通解, 即可得到 X .

$$(21) \text{ 由 } A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 得}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以, A 有特征值 $-1, 2$, 它们对应的特征向量分别为 $\xi_1 = (1, 0, -1)^T$, $\xi_2 = (1, 1, 1)^T$. 由于 $r(A)=2$, 所以 A 还有特征值 0 , 设它对应的特征向量为 $\xi_3 = (a, b, c)^T$, 则由 A 是实对称矩阵知 ξ_3 满足

$$\begin{cases} (\xi_3, \xi_1) = 0, \\ (\xi_3, \xi_2) = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a - c = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

取它的基础解系数 ξ_3 , 即 $\xi_3 = (1, -2, 1)^T$.

显然, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是正交向量组, 现将它们单位化:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T,$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T,$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T.$$

$$\text{记 } \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (\text{正交矩阵}), \text{ 则正交变换 } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \text{ 将}$$

$f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $-y_1^2 + 2y_2^2$.

附注 应熟练掌握用正交变换或可逆线性变换(即配平方方法)将二次型化为标准形的方法.

(22) 记 (X, Y) 关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$, 则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy \right) dy, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy \right) dx, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y, & 0 \leq y \leq 2. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(I) \text{ 由 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_0^1 x \left(2x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx = \frac{13}{18} \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} DX &= E(x^2) - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left(\frac{13}{18} \right)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 \left(2x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx - \left(\frac{13}{18} \right)^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18} \right)^2 = \frac{73}{1620}. \end{aligned}$$

$$(II) P(X^2 + Y^2 \leq 1 \mid Y \geq \frac{1}{2}) = \frac{P\left(X^2 + Y^2 \leq 1, Y \geq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right)}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } P(X^2 + Y^2 \leq 1, Y \geq \frac{1}{2}) &= \iint_D \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) d\sigma \left(D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{2}\right\}\right) \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{6}x(1-x^2) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{3}{128} - \frac{\sqrt{3}}{16} \stackrel{\text{令 } x = \sin\theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta) d\theta + \frac{3}{128} - \frac{\sqrt{3}}{16} \\
&= \frac{\pi}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{64} + \frac{3}{128},
\end{aligned} \tag{2}$$

$$P\left(y \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_y(y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}y\right) dy = \frac{13}{16}. \tag{3}$$

将式(2), 式(3)代入式(1)得

$$P\left(x^2 + y^2 \leq 1 \mid y \geq \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{64} + \frac{3}{128}}{\frac{13}{16}} = \frac{2\pi}{39} - \frac{5\sqrt{3}}{52} + \frac{3}{104}.$$

附注 题解中需注意的是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) dy, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

而不是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) dy (0 \leq x \leq 1)$. 对 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 也有同样的说法.

(23) 设 Z 的简单随机样本 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 的观察值为 z_1, z_2, \dots, z_n , 则似然函数为

$$\begin{aligned}
L(\mu, \sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2},
\end{aligned}$$

取对数得

$$\ln L = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2.$$

所以有

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu),$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2.$$

$$\text{由最大似然估计法, 令 } \begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases} \text{ 解此方程组得 } \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \stackrel{\text{记}}{=} \bar{z}, \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2,$$

所以 μ, σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \stackrel{\text{记}}{=} \bar{Z}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2.$$

$$\text{由于 } EX = E(e^Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^z \sigma \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{令 } t = \frac{z-\mu}{\sigma}}{=} e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma t - \frac{t^2}{2}} dt \\ & = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \end{aligned}$$

所以,由最大似然估计量的不变性得 EX 的最大似然估计量为

$$\hat{EX} = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} = e^{\bar{Z} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}.$$

附注 (I) 应记住,设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的简单随机样本,则

$$\mu \text{ 的矩估计量} = \mu \text{ 的最大似然估计量 } \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\text{记}}{=} \bar{X},$$

$$\sigma^2 \text{ 的矩估计量} = \mu \text{ 的最大似然估计量 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(II) 最大似然估计量的不变性是:

设 θ 是未知参数, θ 的函数 $u = u(\theta)$ 有单值反函数, 则当 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计量时, $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计量.

模拟试题(二)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	C	D	B	C	D	C	A

(1) 在 $(-\pi, 0)$ 内 $f(x)$ 仅有间断点 $x = -\frac{\pi}{2}$. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(e^{\cos x} - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{4}x\right)} \\ &= \frac{1}{\ln \left(1 - \frac{\pi}{8}\right)} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = -\frac{2}{\ln \left(1 - \frac{\pi}{8}\right)},\end{aligned}$$

所以 $x = -\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内 $f(x)$ 无间断点. 此外, 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{(e^{\cos x} - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{4}x\right)} = \frac{1}{e - 1} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\frac{1}{4}x} \\ &= \frac{8}{e - 1} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),\end{aligned}$$

所以 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的可去间断点.

由此可知, $f(x)$ 的可去间断点个数为 1. 因此选 (B).

附注 寻找分段函数的间断点, 除各个分段区间内的间断点外, 还应通过考虑函数在分段点处的连续性, 确定它是否为间断点.

(2) $a = -2, -1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ 上无定义, 所以选项 (A), (B) 应排除. 当 $a = 0$

时, $f(x) = x \ln x - \frac{1}{e}$, 且由

$$f'(x) = \ln x + 1 \begin{cases} < 0, & 0 < x < \frac{1}{e}, \\ = 0, & x = \frac{1}{e}, \\ > 0, & x > \frac{1}{e} \end{cases}$$

知, $f(x)$ 的单调减少区间仅为 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$. 因此选 (C).

附注 本题是对选项逐一检验, 直到得到正确的选项为止. 这是求解单项选择题的常用方法之一.

$$(3) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^x f(t) dt.$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, 由 } F(x) = \int_{-x}^0 \ln(1 + f(x+t)) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_0^x \ln(1 + f(u)) du$$

得 $F'(x) = \ln(1 + f(x))$. 此外, 由

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + f(x)) = \ln(1 + f(0)) = 0$$

知 $F'(0) = 0$. 所以由

$$\begin{aligned} F''_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} \\ &\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0, \\ F''_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + f(x))}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 \end{aligned}$$

得 $F''(0) = 0$. 因此选 (D).

附注 题解中 $F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x)$ 与 $F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x)$ 是根据以下结论:

设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 在 $(-\delta, 0)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi'(x)$ 存在, 则 $\varphi'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi'(x)$;

设函数 $\psi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi'(x)$ 存在, 则 $\psi'_{+1}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi'(x)$.

第二个结论是 2009 年考研真题, 第一个结论的证明与第二个相似. 因此上述这些结论都可作为定理用于解题.

$$\begin{aligned} (4) \iint_D (x+y) d\sigma &= \iint_{D_1} 2xd\sigma \left(\begin{array}{l} \text{由于 } D \text{ 关于 } x \text{ 轴对称, } y \text{ 在对称点处的值互为相反数, } x \text{ 在对称点处} \\ \text{的值彼此相等. } D_1 \text{ 是 } D \text{ 的第一象限部分} \end{array} \right) \\ &= \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{x^2-1}} 2xdy = \int_1^2 2x \sqrt{x^2-1} dx \\ &= \frac{2}{3} (x^2-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = 2\sqrt{3}. \text{ 因此选 (B).} \end{aligned}$$

附注 计算二重积分应充分利用积分区域的对称性: 当 D 具有某种对称性时,

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y) \text{ 在对称点处的值互为相反数,} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(x, y) \text{ 在对称点处的值彼此相等,} \end{cases}$$

其中 D_1 是 D 按这种对称性划分成的两部分之一.

(5) 由 $(A^*)^T = (A^T)^* = (-A)^* = (-1)^{n-1} A^*$ 知, n 为奇数时, 有 $(A^*)^T = A^*$. 即 A^* 是对称矩阵. 反之, 当 A^* 是对称矩阵, 即 $(A^*)^T = A^*$ 时, 由以上计算得 $(-1)^{n-1} = 1$, 即 n 为奇数.

所以 A^* 为对称矩阵是 n 为奇数的充分必要条件, 因此选 (C).

附注 对于 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A , $A^* = O$ 的充分必要条件是 $r(A) < n-1$. 因此 $A^* \neq O$ 的充分必要条件是 $r(A) = n$ 或 $n-1$.

(6) 由于 $A \sim B$, 所以存在 3 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B.$$

于是, $r(A - 2E_3) = r(P^{-1}(A - 2E_3)P) = r(B - 2E_3)$. 由于

$$|B - 2E_3| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

所以 $r(A - 2E_3) = r(B - 2E_3) = 3$.

同样有 $r(A - E_3) = r(B - E_3)$. 由于

$$|B - E_3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 但 } B - E_3 \text{ 的 2 阶子式 } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以, $r(A - E_3) = r(B - E_3) = 2$.

从而 $r(A - 2E_3) + r(A - E_3) = 5$. 因此选 (D).

附注 本题也可按以下方法计算:

$$r(A - 2E_3) + r(A - E_3) = r(B - 2E_3) + r(B - E_3) = r \left(\begin{array}{ccc|ccc} B - 2E_3 & & & O & & \\ \hline & & & O & & \\ & & & & B - E_3 & \end{array} \right),$$

$$\text{其中 } \left(\begin{array}{ccc|ccc} B - 2E_3 & & & O & & \\ \hline & & & O & & \\ & & & & B - E_3 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以, $r(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E}_3) = 5$.

(7) 由关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$ 关于 Y 的边缘

分布函数 $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 知 $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$

$(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 从而

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由此可知选项 (C) 不正确. 因此选 (C).

附注 题解中, 实际上已给出选项 (A), (D) 都正确. 选项 (B) 也是正确的, 这是因为

关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 所以 $EY = 2$.

(8) 由题设知, X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 因此

$$E(X_1 - 2X_2) = 0, \quad D(X_1 - 2X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 20,$$

$$E(3X_3 - 4X_4) = 0, \quad D(3X_3 - 4X_4) = 9D(X_3) + 16D(X_4) = 100.$$

于是 $\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{100}}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 1)$, 且它们相互独立, 所以,

$\frac{1}{20}(X_1 - 2X_2)^2 + \frac{1}{100}(3X_3 - 4X_4)^2 \sim \chi^2(2)$. 从而 $D(Z) = 4$. 因此选 (A).

附注 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

$$Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n), \text{ 且 } EY = n, DY = 2n;$$

$$Z = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1), \text{ 且 } EZ = n-1, DY = 2(n-1),$$

其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

二、填空题

(9) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{(-1)^n \sin n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)},$

其中, $|(-1)^n \sin n| < 1 (n=1, 2, \dots)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n \sin n} = e^0 = 1.$$

附注 设 $\alpha(x)$ 是有界函数, $\beta(x)$ 是某个极限过程中的无穷小, 则在这个极限过程中有

$$\lim \alpha(x) \beta(x) = 0.$$

(10) 由于 $x \in [-1, 1]$ 时, $\psi(x) = (x-1)^2$, 显然 $x \in [-1, 0)$ 时, $\psi(x) > 1$; $x \in [0, 1]$ 时, $\psi(x) \leq 1$, 所以

$$\varphi(\psi(x)) = \begin{cases} \psi(x) \ln \psi(x), & x \in [-1, 0), \\ 1 - \psi(x), & x \in [0, 1] \end{cases} = \begin{cases} (1-x)^2 \ln(1-x)^2, & x \in [-1, 0), \\ 1 - (x-1)^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

于是 $\int_{-1}^1 \varphi(\psi(x)) dx = \int_{-1}^0 (1-x)^2 \ln(1-x)^2 dx + \int_0^1 [1 - (x-1)^2] dx$, 其中

$$\int_{-1}^0 (1-x)^2 \ln(1-x)^2 dx = -\frac{2}{3} \left[(1-x)^3 \ln(1-x) \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (1-x)^2 dx = \frac{16}{3} \ln 2 - \frac{14}{9},$$

$$\int_0^1 [1 - (x-1)^2] dx = 1 - \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \int_{-1}^1 \varphi(\psi(x)) dx = \left(\frac{16}{3} \ln 2 - \frac{14}{9} \right) + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}.$$

附注 平时应练习分段函数的复合运算.

(11) 由题设 $f(u, v) = 1 - u - 2v + o$

$(\sqrt{(u-1)^2 + v^2}) = -(u-1) - 2(v-0) + o(\sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2})$ 知

$$f(1, 0) = 0, f'_u(1, 0) = -1, f'_v(1, 0) = -2.$$

记 $u = e^x$, $v = x + y$, 则 $g(x, y) = f(u, v)$, 且

$$g'_x(x, y) = f'_u(u, v), g'_y(x, y) = f'_u(u, v)e^x + f'_v(u, v).$$

所以 $dg(x, y) \Big|_{(0,0)} = g'_x(0, 0) dx + g'_y(0, 0) dy = f'_u(1, 0) dx + [f'_u(1, 0) + f'_v(1, 0)] dy = -2dx - 3dy$.

附注 本题获解的关键是由 $f(u, v) = 1 - u - 2v + o(\sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2})$ 得到 $f'_u(1, 0) = -1, f'_v(1, 0) = -2$.

$$(12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{-\sin\theta + \sqrt{3 + \sin^2\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr = \iint_D f(x, y) d\sigma, \text{ 其中}$$

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq -\sin\theta + \sqrt{3 + \sin^2\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

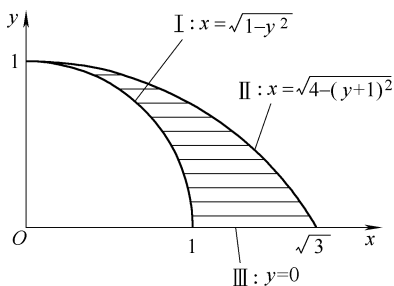
它是由曲线 I: $r = 1 \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$, II: $r = -\sin\theta + \sqrt{3 + \sin^2\theta} \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 及 III: $\theta = 0$ 围成.

显然 I 的方程为 $x = \sqrt{1-y^2} (0 \leq y \leq 1)$. 由于 II 的方程可改写成

$r^2 = -r \sin \theta + \sqrt{3r^2 + r^2 \sin^2 \theta}$, 即 $x^2 + y^2 + y = \sqrt{3x^2 + 4y^2}$, 或者, $x^2 + y^2 + 2y - y = \sqrt{3x^2 + 4y^2}$, 两边平方后得

$(x^2 + y^2 + 2y)^2 - (2y+3)(x^2 + y^2 + 2y) + 3 \cdot 2y = 0$,
即 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2y - 3) = 0$.

由此得到 II 的方程为 $x^2 + y^2 + 2y = 3$, 即 $x = \sqrt{4 - (y+1)^2} (0 \leq y \leq 1)$. III 的方程为 $y = 0$. 于是 D 如图答 2-12 阴影部分所示, 所以有



图答 2-12

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{1-y^2}^{\sqrt{4-(y+1)^2}} f(x, y) dx,$$

上式右边即为所求的先 x 后 y 的二次积分.

附注 对某个二次积分 I , 要改变它的积分次序或积分坐标系, 总是先写出与 I 相对应的二重积分(实际上, 只要写出它的积分区域即可), 然后再将这个二重积分转化为所要求的二次积分.

$$\begin{aligned} (13) \quad \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ B & C^* \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} (A^{-1})^{-1} & O \\ -(C^*)^{-1}B(A^{-1})^{-1} & (C^*)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & O \\ -\frac{1}{|C|}CBA & \frac{1}{|C|}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

附注 这里利用了分块矩阵的求逆公式:

设 A, D 都是可逆矩阵, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(14) 由题设知 $P(A) = P(B)$, 于是由 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ 得

$$2P(A) - [P(A)]^2 = \frac{3}{4}, \text{ 即 } P(A) = \frac{1}{2} \left(\text{舍去了 } P(A) = \frac{3}{2} \right) \quad (1)$$

由此可知 $0 < a < 2$ (这是因为, 如果 $a \leq 0$, 则 $P(A) = 1$, 这与 $P(A) = \frac{1}{2}$ 矛盾; 如果 $a \geq 2$,

则 $P(A) = 0$, 这也与 $P(A) = \frac{1}{2}$ 矛盾). 于是由式(1)得

$$\frac{1}{2} = P(A) = \int_a^2 \frac{3}{8} t^2 dt = 1 - \frac{1}{8} a^3, \text{ 即 } a = \sqrt[3]{4}.$$

附注 根据题设推出 $P(A) = P(B)$ 以及 $0 < a < 2$ 是本题获解的关键.

三、解答题

$$(15) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x - |x|}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \frac{2+0}{1+0} - 1 - 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x - |x|}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \frac{0+0}{0+1} + 1 - 1 = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x - |x|}{|x|} \right) = 0$. 此外 $\left| \arctan \frac{1}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x - |x|}{|x|} \right) \arctan \frac{1}{2} = 0.$$

附注 由于 $\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x - |x|}{|x|}$ 是以 $x=0$ 为分段点的分段函数, 所以计算 $x \rightarrow 0$ 的极限

时, 应从计算左、右极限入手. 在计算时还应注意 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

(16) 记 D 绕直线 $y=1$ 旋转一周而成的旋转体体积为 V , 则

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\int_0^1 (1-x^2)^2 dx - \int_0^1 (1-x)^2 dx \right] \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

记 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积为 V_y , 则

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \left(\int_0^1 x \cdot x dx - \int_0^1 x \cdot x^2 dx \right) \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

附注 应记住以下公式:

设平面图形 $D_1 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \leq k\}$ 绕直线 $y=k$ 旋转一周而成的旋转体体积

$$V_k = \pi \left\{ \int_a^b [k - f_1(x)]^2 dx - \int_a^b [k - f_2(x)]^2 dx \right\}.$$

设平面图形 $D_2 = \{(x, y) \mid c \leq a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ 绕直线 $x=c$ 旋转一周而成的旋转体体积

$$V_c = 2\pi \left[\int_a^b (x-c)f_2(x) dx - \int_a^b (x-c)f_1(x) dx \right].$$

(17) 所给微分方程 $y'' + a^2 y = \sin x + 2 \cos 2x$ (1)

对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax \quad (\text{其中, } C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

当 $a=1$ 时, 式(1)有特解

$$y^* = x(A_1 \sin x + B_1 \cos x) + (A_2 \sin x + B_2 \cos 2x).$$

将它代入 $a=1$ 时的式(1)得

$$2A_1 \cos x - 2B_1 \sin x - 3A_2 \sin 2x - 3B_2 \cos 2x = \sin x + 2 \cos 2x.$$

由此得到 $A_1=0$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $A_2=0$, $B_2=-\frac{2}{3}$. 故

$$y^* = -\frac{1}{2}x \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x.$$

因此, 当 $a=1$ 时, 式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x.$$

当 $a=2$ 时, 式(1)有特解

$$y^* = A_1 \sin x + B_1 \cos x + x(A_2 \cos x + B_2 \sin 2x).$$

将它代入 $a=2$ 时的式(1)得

$$3A_1 \sin x + 3B_1 \cos x - 4A_2 \sin 2x + 4B_2 \cos 2x = \sin x + 2 \cos 2x.$$

由此得到 $A_1=\frac{1}{3}$, $B_1=0$, $A_2=0$, $B_2=\frac{1}{2}$. 故

$$y^* = \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{2} x \sin 2x.$$

因此, 当 $a=2$ 时, 式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{2} x \sin 2x.$$

附注 设有 2 阶线性微方程

$$y'' + ay' + by = e^{\alpha x} (a_1 \cos \beta x + b_1 \sin \beta x) \quad (*)$$

(其中 $a, b, a, b, \alpha, \beta$ 都是常数), 则式(*)有特解

$$y^* = x^k e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

其中 $k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \alpha + i\beta \text{ 是方程 } \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \text{ 的 } 0 \text{ 重根,} \\ 1, & \text{当 } \alpha + i\beta \text{ 是方程 } \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \text{ 的 } 1 \text{ 重根,} \end{cases}$ 常数 A, B 可由 y^* 代入式(*)确定.

$$(18) \quad (I) \quad \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{2}{3},$$

所以, 在点 $x=0$ 的充分小去心邻域内有

$$0 < \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} < 1.$$

由此证得, 当 $|x|$ 充分小时, $x^2 \leq \tan^2 x \leq x^2 + x^4$.

(II) 由(I)知, 当 n 充分大时,

$$\frac{1}{n+k} = \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)^2 \leq \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)^4 = \frac{1}{n+k} + \frac{1}{(n+k)^2},$$

所以 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \quad (n=1, 2, \cdots).$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2,$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \right] &= \ln 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \right] \\ &= \ln 2 + 0 \cdot \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \ln 2, \end{aligned}$$

所以, 由数列极限存在准则 I 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \ln 2.$

附注 数列极限存在准则有两个:

准则 I 设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$, 如果它们满足

$$y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

准则 II 设数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界, 或单调不增有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

$$\begin{aligned} (19) \quad (I) \quad & \text{由于} \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} dr d\theta = \iint_D r \sin \theta \sqrt{1-r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \cdot r dr d\theta \\ &= \iint_D y \sqrt{1-x^2+y^2} d\sigma, \end{aligned}$$

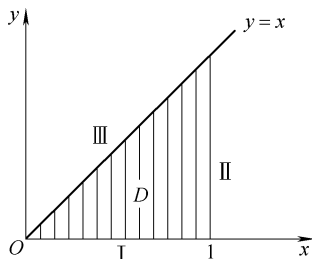
所以, $f(x, y) = y \sqrt{1-x^2+y^2}$, 此外,

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} =$$

$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ 如图答 2-19

阴影部分所示, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1-x^2+y^2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &\stackrel{\text{令 } x = \sin t}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$



图答 2-19

(II) 由于 $g(x, y) = f(x + y, \sqrt{2xy}) = \sqrt{2xy} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{2(xy - x^3y - xy^3)}$, 所以

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y - 3x^2y - y^3}{\sqrt{2}\sqrt{xy - x^3y - xy^3}}, \text{ 从而}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} &= \frac{(1 - 3x^2 - 3y^2) \sqrt{xy - x^3y - xy^3} - \frac{(y - 3x^2y - y^3)(x - x^3 - 3xy^2)}{2\sqrt{xy - x^3y - xy^3}}}{\sqrt{2}(xy - x^3y - xy^3)} \\ &= \frac{xy - 4x^3y - 4xy^3 + 3x^5y + 2x^3y^3 + 3xy^5}{2\sqrt{2}(xy - x^3y - xy^3)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x - 4x^3 - 4xy^2 + 3x^5 + 2x^3y^2 + 3xy^4}{2\sqrt{2}\sqrt{y}(x - x^3 - xy^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

附注 如题解中那样, 在直角坐标系中计算二重积分 I , 比直接在极坐标系中计算 I 简捷得多.

(20) (I) 由(A)与(B)等价知, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 由于

$$|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 即 } r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$$

所以 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$, 即 $0 \neq |(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5$. 由

此得到 $a \neq 5$.

(II) 当 $a \neq 5$ 时, 由

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{2a-14}{a-5} & \frac{-a+7}{a-5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a+3}{a-5} & \frac{a-4}{a-5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} & 0 \end{array} \right)$$

知, (A) 由 (B) 的线性表示式为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2a-14}{a-5}\beta_1 + \frac{-a+3}{a-5}\beta_2 + \frac{2}{a-5}\beta_3, \\ \alpha_2 = \frac{-a+7}{a-5}\beta_1 + \frac{a-4}{a-5}\beta_2 - \frac{1}{a-5}\beta_3, \\ \alpha_3 = -\beta_1 + 2\beta_2. \end{cases} \quad (1)$$

附注 将初等行变换后的矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{2a-14}{a-5} & \frac{-a+7}{a-5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a+3}{a-5} & \frac{a-4}{a-5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} & 0 \end{array} \right)$$

的列向量由左至右顺序记为 $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$, 容易看到

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \frac{2a-14}{a-5}\beta'_1 + \frac{-a+3}{a-5}\beta'_2 + \frac{2}{a-5}\beta'_3, \\ \alpha'_2 = \frac{-a+7}{a-5}\beta'_1 + \frac{a-4}{a-5}\beta'_2 - \frac{1}{a-5}\beta'_3, \\ \alpha'_3 = -\beta'_1 + 2\beta'_2. \end{cases} \quad (2)$$

由于“初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系”(记住这一结论), 因此由式(2)直接得到式(1), 即(A)由(B)的线性表示式.

附注 (A) 由 (B) 的线性表示式也可以用以下方法计算:

记 $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$,

则 由 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ 得

$$\begin{aligned} (e_1, e_2, e_3) &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{a-5} & -1 + \frac{4}{a-5} & -\frac{2}{a-5} \\ -1 - \frac{1}{a-5} & 1 + \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} \\ \frac{1}{a-5} & -\frac{2}{a-5} & \frac{1}{a-5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{a-5} & -1 + \frac{4}{a-5} & -\frac{2}{a-5} \\ -1 - \frac{1}{a-5} & 1 + \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} \\ \frac{1}{a-5} & -\frac{2}{a-5} & \frac{1}{a-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} \frac{2a-14}{a-5} & \frac{-a+7}{a-5} & -1 \\ \frac{-a+3}{a-5} & \frac{a-4}{a-5} & 2 \\ \frac{2}{a-5} & -\frac{1}{a-5} & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

它即为式(1).

(21) (I) 由于 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ 是 A 的一个特征向量, 记它对应的特征值为 λ_1 , 则有

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & -4 \\ 1 & \lambda_1 - 3 & -a \\ -4 & -a & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ 即 } \begin{cases} \lambda_1 - 2 = 0, \\ 1 + 2(\lambda_1 - 3) - a = 0, \\ -4 - 2a + \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $\lambda_1 = 2, a = -1$

将 $a = -1$ 代入 A , 得 A 的特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -4 \\ \lambda - 1 & \lambda - 3 & 1 \\ \lambda - 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -4 \\ \lambda - 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4),$$

它的根除 $\lambda_1 = 2$ 外, 还有 $\lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$, 所以, $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形为 $2y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$.

(II) 由于 A^* 是实对称矩阵, 所以它能正交对角化为对角形矩阵 Λ . 由于 A^* 的特征值

为 $\mu_1 = \frac{|A|}{\lambda_1} = -20, \mu_2 = \frac{|A|}{\lambda_2} = -8, \mu_3 = \frac{|A|}{\lambda_3} = 10$, 所以

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -20 & & \\ & -8 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

下面计算使得 $P^T A^* P = \Lambda$ 的正交矩阵 P .

由题设知, A 的对应 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $\xi_1 = (1, 2, 1)^T$.

设对应 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量为 $\xi_2 = (u_1, u_2, u_3)^T$, 则 ξ_2 满足

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

由于 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以, 式(1)与 $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 + u_2 = 0 \end{cases}$ 同解, 它的基础解系为 $(1, -1, 1)^T$, 故取 $\xi_2 = (1, -1, 1)^T$.

设对应 $\lambda_3 = -4$ 的特征向量为 $\xi_3 = (v_1, v_2, v_3)^T$, 则由 A 是实对称矩阵知,

$$\begin{cases} (\xi_3, \xi_1) = 0, \\ (\xi_3, \xi_2) = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} v_1 + 2v_2 + v_3 = 0, \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0, \end{cases}$$

它的基础解系为 $(1, 0, -1)^T$, 故取 $\xi_3 = (1, 0, -1)^T$.

显然, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是正交向量组. 现将它的单位化得

$$\xi_1^0 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T, \quad \xi_2^0 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, \quad \xi_3^0 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T.$$

记 $P = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$, 则 P 即为所求的正交矩阵.

附注 设 A 是可逆实对称矩阵, 且有特征值 λ 及与之对应的特征向量 ξ , 则 A^* 有特征值 $\mu = \frac{|A|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 ξ . 所以当 $P^T A P$ (P 是正交矩阵) 为对角矩阵时, $P^T A^* P$ 也是对角矩阵, 且对角线上的元素都是 A^* 的特征值.

(22) 由 $\iint_{xOy \text{ 平面}} f(x, y) d\sigma = 1$, 即 $\iint_G A x^2 y d\sigma = 1$ 得

$$A = \frac{1}{\iint_G x^2 y d\sigma} = \frac{1}{\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y dy} = \frac{1}{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx} = \frac{21}{4},$$

$$\text{所以, } f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4} x^2 y, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$D(2X + 3Y) = E[(2X + 3Y)^2] - [E(2X + 3Y)]^2,$$

$$\text{其中 } E[(2X + 3Y)^2] = \iint_{xOy \text{ 平面}} (2x + 3y)^2 f(x, y) d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_G (2x+3y)^2 \cdot \frac{21}{4} x^2 y d\sigma = \frac{21}{4} \iint_G (4x^4 y + 12x^3 y^2 + 9x^2 y^3) d\sigma \\
&= \frac{21}{4} \cdot 2 \iint_{G_1} (4x^4 y + 9x^2 y^3) d\sigma \quad (\text{由于 } G \text{ 关于 } y \text{ 轴对称, } 4x^4 y + 9x^2 y^3 \text{ 在对称点处的值彼此相等, 而 } 12x^3 y^2 \text{ 的值互为相反数, } D_1 \text{ 是 } D \text{ 的第一象限部分})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{21}{2} \int_0^1 \left(2x^4 y^2 + \frac{9}{4} x^2 y^4 \right) \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx \\
&= \frac{21}{2} \int_0^1 \left(\frac{9}{4} x^2 + 2x^4 - 2x^8 - \frac{9}{4} x^{10} \right) dx = \frac{2506}{165},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(2X+3Y) &= \iint_{xOy \text{ 平面}} (2x+3y) f(x,y) d\sigma = \iint_G (2x+3y) \cdot \frac{21}{4} x^2 y d\sigma \\
&= \frac{21}{2} \iint_{G_1} 3x^2 y^2 d\sigma = \frac{21}{2} \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 3x^2 y^2 dy \\
&= \frac{21}{2} \int_0^1 (x^2 - x^8) dx = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{于是, } D(2X+3Y) = \frac{2506}{165} - \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{4921}{477}.$$

附注 应记住随机变量 X 的方差计算公式:

$$DX = E(X^2) - (EX)^2.$$

$$(23) \text{ 由于 } X \text{ 的概率密度 } f(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha^2}{x^3}, & x > \alpha, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \text{ 记 } z = x^2, \text{ 则它在 } f(x) \neq 0 \text{ 的区间 } (\alpha,$$

$+\infty$) 上单调增加, 反函数 $x = h(z) = \sqrt{z} (z > \alpha^2)$, 于是 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} f(h(z)) |h'(z)|, & z > \alpha^2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{z^2}, & z > \alpha^2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

记样本观察值为 z_1, z_2, \dots, z_n (由于现在是计算最大似然估计量, 可认为它们都大于 α^2), 故有似然函数为

$$L(\alpha^2) = \frac{\alpha^2}{z_1^2} \cdot \frac{\alpha^2}{z_2^2} \cdots \frac{\alpha^2}{z_n^2} = \frac{(\alpha^2)^n}{z_1^2 z_2^2 \cdots z_n^2}.$$

由于 $\frac{dL(\alpha^2)}{d\alpha^2} = \frac{n(\alpha^2)^{n-1}}{z_1^2 z_2^2 \cdots z_n^2} > 0$, 所以 α^2 的最大似然估计值为 $\min\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. 从而

α^2 的最大似然估计量为 $\hat{\alpha}^2 = \min\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$.

由最大似然值估计量的不变性得 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\hat{\alpha}^2} = \sqrt{\min\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}}.$$

附注 本题也可计算如下:

由于 X 的概率密度 $f(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha^2}{x^3}, & x > \alpha, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且 X 有简单随机样本观察值 $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \dots,$

$\sqrt{z_n}$ (它们都大于 α), 所以有似然函数

$$L(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{z_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2\alpha^2}{z_2^{\frac{3}{2}}} \cdots \frac{2\alpha^2}{z_n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^n}{(z_1 z_2 \cdots z_n)^{\frac{3}{2}}} \alpha^{2n} (\sqrt{z_1} > \alpha, \sqrt{z_2} > \alpha, \dots, \sqrt{z_n} > \alpha)$$

于是由 $\frac{dL(\alpha)}{d\alpha} = \frac{2^n \cdot 2n}{(z_1 z_2 \cdots z_n)^{\frac{3}{2}}} \alpha^{2n-1} > 0$ 知, α 的最大似然估计值为 $\min\{\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \dots, \sqrt{z_n}\} =$

$\sqrt{\min\{z_1, z_2, \dots, z_n\}}$. 所以 α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha} = \sqrt{\min\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}}$.

模拟试题(三)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	B	C	C	B	C	A	A

(1) 当 $|x| \leq 1$ 时, 由 $1 \leq \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}} \leq \sqrt[n]{2} (n=1, 2, \dots)$ 知, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}} = 1$;

当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = |x|^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left|\frac{1}{x}\right|^{3n}} = |x|^3$,

所以
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ |x|^3 & |x| > 1. \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 上可导, 但由

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

知, $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不可导. 此外, 由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处也不可导. 因此选 (C).

附注 由于 $f(x)$ 是由数列极限确定的, 所以要讨论它的可导性, 首先要通过数列极限计算, 确定 $f(x)$ 的解析表达式.

(2) 由于 $F(x) = \int_0^{2x} \cos^2(2x - t) dt \stackrel{\text{令 } u = 2x - t}{=} \int_0^{2x} \cos^2 u du$, 所以

$$F'(x) = 2\cos^2 2x, \quad F''(x) = -4\sin 4x.$$

因此选 (B).

附注 要计算 $\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t, x) dt$ 时, 首先应将被积函数中的 x 移到积分号外, 或移到积分限中去.

(3) 记 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^2 x} dx$, 则由

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \begin{cases} > 0, & 0 < x < e, \\ = 0, & x = e, \\ < 0, & x > e, \end{cases}$$

知 $f(x)$ 的最大值 $f(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^2 x} dx > 0$, 以及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 所以方程

$f(x) = 0$, 即方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^2 x} dx$ 的正根个数为 2. 因此选 (C)

附注 由于曲线 $y=f(x)$ 的概图如图答 3-3 所示, 所以方程 $f(x)=0$ 有两个正根.

(4) 由于当 $AC-B^2=0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 可能是极值, 也可能不是极值, 所以选项 (C) 不正确. 因此选 (C)

附注 (C) 的不正确性可用下列例子以明之:

设 $f_1(x, y) = x^3 + y^3$, 记 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则

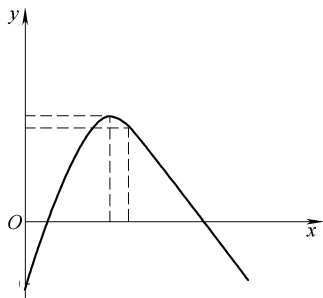
$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

且 $AC-B^2=0$. 此时, $f(x_0, y_0)=0$ 不是 $f(x, y)$ 的极值.

设 $f_2(x, y) = x^4 + y^4$, 记 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

且 $AC-B^2=0$. 此时, $f(x_0, y_0)=0$ 是 $f(x, y)$ 的极值.



图答 3-3

$$(5) \text{ 由于 } \begin{pmatrix} \mathbf{O} & (2\mathbf{A})^* \\ (3\mathbf{B})^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & |2\mathbf{A}|(2\mathbf{A})^{-1} \\ (3\mathbf{B})^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & 8(2\mathbf{A})^{-1} \\ (3\mathbf{B})^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

$$\text{所以, } \begin{pmatrix} \mathbf{O} & (2\mathbf{A})^* \\ (3\mathbf{B})^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & ((3\mathbf{B})^{-1})^{-1} \\ (8(2\mathbf{A})^{-1})^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{B} \\ \frac{1}{4}\mathbf{A} & \mathbf{O} \end{pmatrix}. \text{ 因此选 (B)}$$

附注 题解中应用了以下公式 (应记住):

设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, 则 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1} (n \geq 2)$, $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$ (k 是常数).

设 \mathbf{A} 是 n 阶可逆矩阵, 则 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}$.

$$\text{设 } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ 分别是 } m, n \text{ 阶可逆矩阵, 则 } \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

(6) 由题设知 $r(\mathbf{P}) + r(\mathbf{Q}) \leq 3$. 由于当 $t \neq 6$ 时, $r(\mathbf{Q}) = 2$, 所以此时 $r(\mathbf{P}) \leq 1$. 此外, 由 \mathbf{P} 是非零矩阵知, $r(\mathbf{P}) \geq 1$. 从而 $r(\mathbf{P}) = 1$. 因此选 (C).

附注 本题也可按以下方法计算.

当 $t \neq 6$ 时, $r(\mathbf{Q}^T) = 2$, 所以齐次线性方程组 $\mathbf{Q}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中包含 $3 - 2 = 1$ 个线性无关的解向量. 从而由 $\mathbf{Q}^T \mathbf{P}^T = \mathbf{O}$ 知, 非零矩阵 \mathbf{P}^T 的线性无关列向量个数为 1, 即得 $r(\mathbf{P}) = r(\mathbf{P}^T) = 1$.

(7) 记 $A_1 = \{\text{第一次取到的是一等品}\}$,

$A_2 = \{\text{第二次取到的是一等品}\}$,

$$\text{则 } p = P(A_1 A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1 A_2 (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)}, \text{ 其中}$$

$$P(A_1 A_2 (A_1 \cup A_2)) = P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15},$$

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = 1 - \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } p = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \quad \text{因此选 (A).}$$

附注 题解中的 $P(A_1 \cup A_2)$ 也可按加法公式计算:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) \\ &= P(A_1) + P(\bar{A}_1) P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

显然, 它没有题解中的计算简捷.

(8) 由于 $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{\lambda}$, $D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n\lambda^2}$, 所以由列维—林德伯格中心极限定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

因此选 (A).

附注 列维—林德伯格中心极限定理是:

设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立同分布的随机变量序列, 它们的数学期望都为 μ , 方差都为 σ^2 , 则对任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

其中, $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

二、填空题

(9) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) &= \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \ln 2 - [x - \ln(1+x)] \Big|_0^1 = 2\ln - 1. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}} = e^{2\ln - 1} = \frac{4}{e}.$$

附注 $\ln(1+x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 而 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)$ 是它的一个积分和式, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

(10) 记 $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$, 则 $f(x) = x + 2A$, 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + 2A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$$

即

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + 2A. \text{ 所以}$$

$$A = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x = - \left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

于是 $f(x) = x + 2 - \pi$, 从而

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2 - \pi) dx = \frac{5}{2} - \pi.$$

附注 本题获解的关键, 是注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$ 是常数 A .

(11) 由 $e^x + \sin y = x$ 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - e^x}{\cos y}$, 所以

$$\frac{dz}{dx} = f'_u e^x + f'_v \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = e^x f'_u + \frac{2(x \cos y + y - y e^x)}{\cos y} f'_v.$$

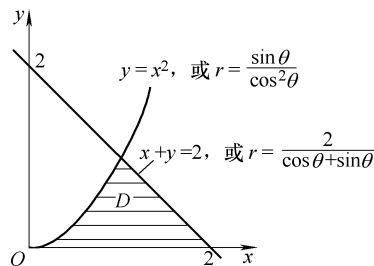
附注 计算 $\frac{dy}{dx}$ 时, 要注意 y 是 x 的函数, 而 $\frac{dy}{dx}$ 可由方程 $e^x + \sin y = x$ 两边对 x 求导得到.

(12) D 如图答 3-12 阴影部分所示. 它的极坐标表示为

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \leq r \leq \frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}, \text{ 所以,}$$

$\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的先 r 后 θ 的二次积分为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$



图答 3-12

附注 顺便写出所给二重积分的先 y 后 x 与先 x 后 y

的二次积分:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy \quad (\text{先 } y \text{ 后 } x \text{ 的二次积分}) \\ &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (\text{先 } x \text{ 后 } y \text{ 的二次积分}). \end{aligned}$$

(13) 由于 $A \sim B$, 所以 B 有特征值 $-2, -1, 1, 2$, 从而 B^* 有特征值

$$\frac{|B|}{-2} = -2, \frac{|B|}{-1} = -4, \frac{|B|}{1} = 4, \frac{|B|}{2} = 2, \text{ 由此可知 } B^* \sim \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$|B^* - E_4| = \left| \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right| = 45.$$

附注 题解有两点值得注意:

(I) 设 A 是可逆矩阵, 有特征值 λ , 则 A^* 对应特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$.

(II) 设 A, B 是相似的 n 阶矩阵, 则 $|A - E_n| = |B - E_n|$.

(14) 由于 $E(X^3 + 2Y^2) = E(X^3) + 2E(Y^2)$, 其中

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot 2e^{-2x} dx = - \int_0^{+\infty} x^3 d e^{-2x} \\ &= - \left(x^3 e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} - \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x} dx \right) = \frac{3}{2} E(X^2) \\ &= \frac{3}{2} [DX + (EX)^2] = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$E(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{所以, } E(X^3 + 2Y^2) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}.$$

附注 在 $E(X^3)$ 的计算中, 对于 $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x} dx$ 不必再作积分计算, 这是因为它可按 $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = E(X^2) = DX + (EX)^2$, 直接得到.

三、解答题

$$\begin{aligned} (15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\ln(1+x^2) + e^x - x) - f(1)}{\tan x \cdot (\sqrt{1+x} - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\ln(1+x^2) + e^x - x) - f(1)}{\frac{1}{2}x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1 + (\ln(1+x^2) + e^x - x - 1)) - f(1)}{\ln(1+x^2) + e^x - x - 1} \cdot \frac{\ln(1+x^2) + e^x - x - 1}{\frac{1}{2}x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + (\ln(1+x^2) + e^x - x - 1)) - f(1)}{\ln(1+x^2) + e^x - x - 1} \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) + e^x - x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + (\ln(1+x^2) + e^x - x - 1)) - f(1)}{\ln(1+x^2) + e^x - x - 1} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) + e^x - x - 1}{x^2} &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\ln(1+x^2) + e^x - x) - f(1)}{\tan x \cdot (\sqrt{1+x} - 1)} = 1 \times 2 \times \frac{3}{2} = 3.$$

附注 由于 $f(u)$ 仅在点 $u=1$ 处可导, 因此对所给极限不能直接应用洛必达法则计算, 而只能利用导数定义计算.

$$(16) \text{ 所给微分方程 } y'' + y = 5e^{2x} + 2\sin x \quad (1)$$

对应的齐次微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

式(1)有特解 $y^* = Ae^{2x} + x(B_1 \cos x + B_2 \sin x)$,

将它代入式(1)得

$$5Ae^{2x} - 2B_1 \sin x + 2B_2 \cos x = 5e^{2x} + 2\sin x.$$

由此得到 $A = 1$, $B_1 = -1$, $B_2 = 0$. 所以 $y^* = e^{2x} - x \cos x$. 从而式(1)的通解为 $y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x} - x \cos x$.

附注 应熟练掌握常系数线性微分方程的解法.

(17) (I) 显然 $\{a_n\}$ 是正项数列, 且由

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) = \frac{1}{3} \left(a_n + a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) \geq \sqrt[3]{a_n \cdot a_n \cdot \frac{1}{a_n^2}} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

知, $\{a_n\}$ 有下界. 此外,

$$\text{由} \quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) - a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n^2} - a_n \right) \leq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

知, $\{a_n\}$ 单调不减. 从而由数列极限存在准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记为 a . 对递推式两边取极限得

$$a = \frac{1}{3} \left(2a + \frac{1}{a^2} \right), \text{ 所以 } a = 1, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$(II) \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{a_n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}, \text{ 所以所给幂级数的收敛半径 } R = 2.$$

当 $x = 2, -2$, 所给幂级数分别成为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, 显然它们的通项极限都不为零, 所以所给幂级数在点 $x = 2, -2$ 处都是发散的, 故收敛域为 $(-1, 1)$.

附注 计算幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛域步骤如下:

(I) 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径, 记为 R .

(II) 当 $R = +\infty$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$; 当 $R = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 收敛域为 $\{0\}$; 当 R 为正数时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛域为 $(-R, R)$ 与其收敛端点之并集.

(18) 作辅助函数 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $F(0)F(1) = f(0)[f(1) - 1] < 0$, 所以由零点定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = \xi. \quad (1)$$

下面用反证法证明式(1)的 ξ 的唯一性. 设另有 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f(\eta) = \eta$, 不妨设 $\eta < \xi$, 则

$$f(\xi) - f(\eta) = \xi - \eta.$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\theta \in (\eta, \xi) \subset (0, 1)$, 使得

$f'(\theta)(\xi - \eta) = \xi - \eta$, 即 $f'(\theta) = 1$.

这与题设 $f'(x) \neq 1 (x \in (0, 1))$ 矛盾. 因此满足式(1)的 ξ 是唯一的.

附注 唯一性问题, 往往用反证法证明. 本题就是如此.

(19) 用直线 $x + y = 1$ 将 D 划分成 D_1 与 D_2 两部分(如图答 3-19), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} x \ln x d\sigma + \iint_{D_2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma,$$

其中 $\iint_{D_1} x \ln x d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x \ln x dy$

$$= \int_0^1 (x - x^2) \ln x dx = \int_0^1 \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

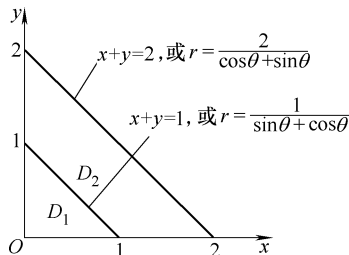
$$= \left[\ln x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2\right) dx$$

$$= -\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}x^3\right)\Big|_0^1 = -\frac{5}{36},$$

$$\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r^3} \cdot r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta = 1.$$

所以, $\iint_D f(x, y) d\sigma = -\frac{5}{36} + 1 = \frac{31}{36}.$



图答 3-19

附注 D_1 与 D_2 都是角域的一部分, 但是 $\iint_{D_1} x \ln x d\sigma$ 按直角坐标计算, 而 $\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$ 按

极坐标计算, 这主要是由于后者的被积函数是 $x^2 + y^2$ 的函数.

$$(20) \text{ 由于 } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ a & b & c & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & b-a & c+2a & -a \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & b-a & c+2a & -a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & a+b+c & -\frac{4}{3}a + \frac{1}{3}b \end{array} \right),$$

所以由题设知,
$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ -\frac{4}{3}a + \frac{1}{3}b=0, \text{ 即 } a=2, b=8, c=-10. \\ a=2 \end{cases}$$
 此时所给方程组与 (II)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{4}{3}, \\ x_2 - x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{同解. (II) 的导出组的基础解系为 } C(1, 1, 1)^T, \text{ 此外 (II) 有特解}$$

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)^T, \text{ 所以 (I) 的通解为}$$

$$(x_1, x_2, x_3)^T = C(1, 1, 1)^T + \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)^T \quad (\text{其中 } C \text{ 是任意常数}),$$

对上述算得的 a, b, c 知, $\xi = (2, 8, -10)^T$.

设 ξ 关于向量组 η_1, η_2, η_3 的线性表示式为

$$\xi = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3\eta_3 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{其中矩阵 } (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ 可逆}),$$

$$\text{即} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{所以,} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此所求的线性表示为

$$\xi = 26\eta_1 + 16\eta_2 - 8\eta_3.$$

附注 由所给方程组有两个不同解可得, 这个方程组对应的齐次线性方程有非零解, 所以系数矩阵的秩 ≤ 2 , 此外由系数矩阵本身可知, 其秩 ≥ 2 . 因此系数矩阵的秩 $= 2$. 从而有

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -\frac{4}{3}a + \frac{1}{2}b = 0, \\ a = 2. \end{cases}$$

$$(21) \text{ 由于 } g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 \text{ 在 } \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = \sqrt{3}x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \text{ 即可逆线性变换}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{下成为 } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \text{ 所以 } g(x_1, x_2, x_3) \text{ 是正定二次型, 它在上述可逆线性变换}$$

下化成的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是非正定二次型, 所以, 它的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

的顺序主子式不全为正, 故有 $c \leq 2$. 从而由题设 $c \geq 2$ 得 $c = 2$. 于是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{由于 } |\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) - 2(\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda -$$

3), 所以 A 的特征值 $\lambda = 0, 1, 3$

设 A 的对应 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $\xi = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则它满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 即 } \begin{cases} a_1 + a_3 = 0, \\ a_2 + a_3 = 0. \end{cases}$$

可取它的基础解系数为 ξ , 即 $\xi = (-1, -1, 1)^T$

设 A 的对应 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $\eta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则它满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 即 } \begin{cases} b_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0, \end{cases}$$

可取它的基础解系为 η , 即 $\eta = (1, -1, 0)^T$

设 A 的对应 $\lambda = 3$ 的特征量为 $\zeta = (c_1, c_2, c_3)^T$, 则由 A 是实对称矩阵知

$$\begin{cases} (\zeta, \xi) = 0, \\ (\xi, \eta) = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -c_1 - c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 = 0, \end{cases}$$

可取它的基础解系为 ζ , 即 $\zeta = (1, 1, 2)^T$.

显然, ξ, η, ζ 是正交向量组, 现将它们单位化:

$$\xi^0 = \frac{\xi}{\|\xi\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T,$$

$$\eta^0 = \frac{\eta}{\|\eta\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T,$$

$$\zeta^0 = \frac{\zeta}{\|\zeta\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T.$$

$$\text{记 } Q = (\xi^0, \eta^0, \zeta^0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则正交变换 } x = Qz \text{ (其中 } x =$$

$(x_1, x_2, x_3)^T, z = (z_1, z_2, z_3)^T$) 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $z_2^2 + 3z_3^3$.

附注 由于 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)^T A (x_1, x_2, x_3)$ (A 是实对称矩阵) 为正定二次型的充分必要条件是它的矩阵 A 的顺序主子式都大于零. 故当题中 $f(x_1, x_2, x_3)$ 不是正

定二次型时, 它的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ 的顺序主子式 1, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $|A| = c - 2$ 不全大于

零, 于是有 $c \leq 2$.

$$\begin{aligned} (22) \text{ 由于 } f(x, y) &= \begin{cases} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y), & f_Y(y) > 0, f_{X|Y}(x|y) > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 5y^4 \cdot \frac{3x^2}{y^3}, & 0 < y < 1, 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 15x^2y, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^1 15x^2y dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{15}{2}(x^2 - x^4), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{于是由 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{15}{2}(x^2 - x^4) dx = \frac{5}{8} \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} DX &= E(X^2) - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left(\frac{5}{8}\right)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{15}{2}(x^2 - x^4) dx - \frac{25}{64} = \frac{3}{7} - \frac{25}{64} = \frac{17}{448}. \end{aligned}$$

$$\text{此外, 由 } EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) dy = \int_0^1 5y^5 dy = \frac{5}{6} \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - EX \cdot EY \\ &= \iint_{xOy \text{ 平面}} xyf(x, y) d\sigma - \frac{5}{8} \times \frac{5}{6} \\ &= \iint_{\Delta} xy \cdot 15x^2y d\sigma - \frac{25}{48} \quad (\text{其中 } \Delta = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 1\}) \\ &= \int_0^1 dx \int_x^1 15x^3y^2 dy - \frac{25}{48} = \frac{15}{28} - \frac{25}{48} = \frac{5}{336} \end{aligned}$$

附注 当已知 $f_Y(y)$, $f_{X|Y}(x|y)$ 时, 可按以下公式计算 $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y), & f_Y(y) > 0, f_{X|Y}(x|y) > 0, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

同样当已知 $f_X(x)$, $f_{Y|X}(y|x)$ 时, 可按以下公式计算 $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_X(x)f_{Y|X}(y|x), & f_X(x) > 0, f_{Y|X}(y|x) > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(23) 记 Z 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(Y = -1)P(X \geq -z | Y = -1) + P(Y = 1)P(X \leq z | Y = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(X \geq -z) + \frac{1}{2}P(X \leq z) \quad (\text{利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-z}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx, & z \leq 0, \\ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{2} \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} dx, & z > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

所以, Z 的概率密度为

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda z}, & z \leq 0, \\ \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda z}, & z > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |z|} \quad (-\infty < z < +\infty).$$

由此得到似然函数

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |z_1|} \cdot \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |z_2|} \cdots \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |z_n|} \\ &= \frac{1}{2^n} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n |z_i|}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \ln L(\lambda) = \ln \frac{1}{2^n} + n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

上式两边对 λ 求导得

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n |z_i|,$$

$$\text{于是由 } \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = 0 \text{ 得 } \lambda \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n |z_i|}.$$

附注 应熟练掌握参数点估计的两种方法: 矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(四)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	A	C	A	C	B	B	C

$$\begin{aligned}
 (1) f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) \sin \frac{\pi}{2x}}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = -1.
 \end{aligned}$$

因此选(C)

附注 计算分段函数在分段点处的导数,总是从导数定义出发.

(2) 由于

$$|x| < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - (x^2 - 1) \sin \pi x}{x^n + x^2 - 1} = -\sin \pi x;$$

$$|x| > 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - (x^2 - 1) \sin \pi x}{x^n + x^2 - 1} = x;$$

$$x = 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - (x^2 - 1) \sin \pi x}{x^n + x^2 - 1} = 1;$$

$$x = -1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - (x^2 - 1) \sin \pi x}{x^n + x^2 - 1} = -1,$$

所以, $y = f(x) = \begin{cases} -\sin \pi x, & |x| < 1, \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$ 的图形如图答 4-2 所

示,由图可知, $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, 极小值为

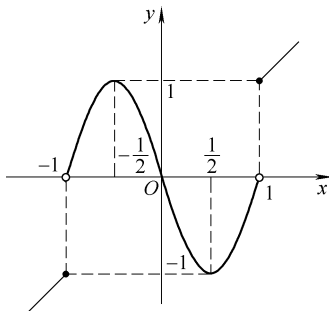
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. 因此选(A)

附注 画图得到正确选项,是解选择题常用的方法之一.

$$(3) \text{ 由于 } \varphi(x, y) = \int_0^{y^2} du \int_0^u \frac{1}{y^2} f\left(\frac{v}{y}\right) dv$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{\text{令 } t = \frac{v}{y}}{=} \int_0^{y^2} \frac{1}{y^2} du \int_0^{\frac{u}{y}} f(t) dt \stackrel{\text{令 } z = \frac{u}{y}}{=} \int_0^{\frac{y}{x^2}} dz \int_0^z f(t) dt,
 \end{aligned}$$

从而 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{x^4} f\left(\frac{y}{x^2}\right)$. 因此选(C).



图答 4-2

附注 要对 $\int_0^{\frac{y^2}{x^2}} du \int_0^u \frac{1}{y^2} f\left(\frac{v}{y}\right) dv$ 关 y 求偏导数, 应首先把被积函数 $\int_0^u \frac{1}{y^2} f\left(\frac{v}{y}\right) dv$ 中的 y 移到外层积分限或移出外层积分号. 本题题解就是如此处理的.

$$(4) \text{ 由题设知 } y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

对于选项(A)的 $y = \sqrt{1+x}$, 显然它有 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$, 且满足 $yy'' + (y')^2 = 0$, 并且 $y = \sqrt{1+x}$ 的定义域为 $[-1, +\infty)$. 因此选(A).

附注 $y = \sqrt{1+x}$ ($x \geq -1$) 也可直接计算得到, 具体如下:

$yy'' + (y')^2 = (yy')'$, 所以由所给微分方程得 $yy' = C_1$, 将 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 代入得 $C_1 = \frac{1}{2}$. 从而 $yy' = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{dy^2}{dx} = 1$. 所以 $y^2 = x + C_2$, 将 $y(0) = 1$ 代入得 $C_2 = 1$. 因此, $y^2 = x + 1$, 即 $y = \sqrt{1+x}$ (舍去了不合题意的 $y = -\sqrt{1+x}$). 由于 $\sqrt{1+x}$ 的定义域为 $[-1, +\infty)$. 所以所求的 $y = y(x)$ 为 $y = \sqrt{1+x} (x \geq -1)$.

(5) 由于选项(C)与(D)有且仅有一个是正确的, 因此只要考虑这两个选项即可. 由 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) \leq n < n+1$ 知, $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 有非零解. 因此选(C).

附注 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, 则

$r(\mathbf{A}) = n$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解的充分必要条件;

$r(\mathbf{A}) < n$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件.

(6) \mathbf{A} 有特征值 $-1, 1, 2$. 由 $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)^2$ 知, 选项(A)的

矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda = 3, -1$ (二重), 它与 \mathbf{A} 有不同的特征值, 故不与 \mathbf{A} 相似, 从而不能选(A).

对选项(B)的矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, 由 $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$

知, 它有特征值 $-1, 1, 2$, 即与 \mathbf{A} 有相同的特征值, 所以这个实对称矩阵与 \mathbf{A} 相似且合同. 因此选(B).

附注 (I) 设 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 都是 n 阶矩阵, 则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似的充分必要条件有以下两类:

(i) 存在 n 阶可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$;

(ii) \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有相同的特征多项式, 或者 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有相同的特征值 (n_i 重以 n_i 个计算).

(II) 设 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 都是 n 阶实对称矩阵, 则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 合同的充分必要条件有以下三类:

(i) 存在 n 阶可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = B$;

(ii) 二次型 $x^T A x$ 与 $x^T B x$ (其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$) 有相同的规范形, 或者二次型 $x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正惯性指数, 也有相同的负惯性指数.

(iii) A 与 B 有相同的特征值 (n_i 重的以 n_i 个计算),

(7) 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\max\left\{X, X^2, \frac{1}{2}\right\} \leq y\right) \\
 &= P\left(X \leq y, X^2 \leq y, \frac{1}{2} \leq y\right) \\
 &= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{2}, \\ P(X \leq y, -\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{2}, \\ P(-\sqrt{y} \leq X \leq y), & \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{2}, \\ \int_0^y 2e^{-2x} dx, & \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ \int_0^{\sqrt{y}} 2e^{-2x} dx, & y > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & y < \frac{1}{2}, \\ 1 - e^{-2y}, & \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ 1 - e^{-2\sqrt{y}}, & y \geq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以, Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 只有一个间断点 $y = \frac{1}{2}$. 因此选(B).

附注 由于 $\sqrt{y} = \begin{cases} > y, & \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ \leq y, & y \geq 1, \end{cases}$

所以 $P(X \leq y, -\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq y), & \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y \geq 1. \end{cases}$

(8) 记 $U = X_1 + X_2 + X_5 + X_6$, $V = X_3 + X_4 - X_7 - X_8$, 则 $U \sim N(0, 4\sigma^2)$, $V \sim N(0, 4\sigma^2)$, 所以, $\frac{U}{2\sigma}, \frac{V}{2\sigma}$ 相互独立, 且都服从 $N(0, 1)$. 由此得到

$$\frac{(X_1 + X_2 + X_5 + X_6)^2}{(X_3 + X_4 - X_7 - X_8)^2} = \frac{\frac{U^2}{4\sigma^2}}{\frac{V^2}{4\sigma^2}} \sim F(1, 1). \text{ 因此选(C).}$$

附注 $F(n_1, n_2)$ 分布定义如下:

设 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $\frac{X}{Y} \sim F(n_1, n_2)$.

二、填空题

$$(9) \text{ 由 } 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + 1}{x^3} \cdot x^2}{\frac{x - \sin x}{x^3}} \text{ 知}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

所以, $f(0) = -1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$. 因此所求的切线方程为

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 0), \text{ 即 } y = \frac{1}{3}x - 1.$$

附注 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - k}{x - x_0} = A$ (A, k 是常数), 则 $f(x_0) = k$, $f'(x_0) = A$.

$$(10) \text{ 由 } \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - \xi^2(x)}} \text{ 得 } \xi(x) = \frac{\sqrt{\arcsin^2 x - x^2}}{\arcsin x}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\arcsin^2 x - x^2}}{x \arcsin x} \xrightarrow{\text{令 } t = \arcsin x} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2 - \sin^2 t}}{t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t + \sin t}{t}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t - \sin t}{t^3}}, \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t + \sin t}{t}} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + \sin t}{t}} = \sqrt{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t - \sin t}{t^3}} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \sin t}{t^3}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \sqrt{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{3t^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi(x)}{x} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

附注 只有对 $x \in (0, 1)$, 存在唯一的 ξ 时, ξ 才是 x 的函数, 才可以写成 $\xi(x)$. 下面证明上述的 ξ 是唯一的.

对函数 $\arcsin t$ 在 $[0, x]$ ($x \in (0, 1)$) 上应用拉格朗日中值定理, 如果在 $(0, x)$ 内存在两个 ξ_1, ξ_2 , 使得

$$\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-\xi_1^2}}, \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

则 $\xi_1 = \xi_2$. 由此证明了唯一性.

$$\begin{aligned} (11) \quad \int_{-1}^{\pi} e^{2f(x)} \sin x dx &= \int_{-1}^1 e^{2f(x)} \sin x dx + \int_1^{\pi} e^{2f(x)} \sin x dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{\cos x} \sin x dx + \int_1^{\pi} x^2 \sin x dx = - \int_1^{\pi} x^2 d\cos x \\ &= - \left(x^2 \cos x \Big|_1^{\pi} - \int_1^{\pi} 2x \cos x dx \right) \\ &= \pi^2 + \cos 1 + \int_1^{\pi} 2x d\sin x \\ &= \pi^2 + \cos 1 + \left(2x \sin x \Big|_1^{\pi} - 2 \int_1^{\pi} \sin x dx \right) \\ &= \pi^2 - \cos 1 - 2\sin 1 - 2. \end{aligned}$$

附注 由于 $e^{\cos x} \sin x$ 是奇函数, 所以题解中 $\int_{-1}^1 e^{\cos x} \sin x dx = 0$.

(12) 由于 $z'_x = \cos(xy) \cdot y + \varphi'_u + \varphi'_v \cdot \frac{1}{y}$, 所以

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= -\sin(xy) \cdot xy + \cos(xy) + \varphi''_{uv} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \varphi''_{vv} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot \frac{1}{y} + \varphi'_v \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) \\ &= -xy \sin(xy) + \cos(xy) - \frac{x}{y^2} \left(\varphi''_{uv} + \frac{1}{y} \varphi''_{vv} \right) - \frac{1}{y^2} \varphi'_v \\ &= -xy \sin(xy) + \cos(xy) - \frac{1}{y^2} \varphi'_v. \end{aligned}$$

附注 要熟练掌握二元复合函数的 1、2 阶偏导数的计算.

(13) 由于 $r(A) = r(AB) \leq r(B)$, 即 $r(A) \leq r(B)$. (1)

此外, 由 $r(A) = n$ 及 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq r(A)$ 得 $r(B) \leq r(A)$. (2)

所以 $r(B) = r(A) = n$. 从而 $r(B^*) = n$.

附注 题解中利用了关于矩阵秩的以下结论:

(I) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times l$ 矩阵, 则

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

(II) 设 A 是 n 阶矩阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1 & r(A) = n-1, \\ 0 & r(A) < n-1. \end{cases}$$

(14) 由题设知, X 与 Y 相互独立, 从而 X 与 Y^2 相互独立, 且 X 的概率密度为 $f_X(x)$

$$= \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} Y \text{ 的概率密度为 } f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \text{ 所以 } D(X+Y^2) = DX + D(Y^2), \text{ 其中}$$

$$DX = 1, EY = \frac{1}{2}, DY = \frac{1}{4}, E(Y^2) = DY + (EY)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 并且}$$

$$\begin{aligned}
D(Y^2) &= E(Y^4) - [E(Y^2)]^2 = \int_0^{+\infty} y^4 \cdot 2e^{-2y} dy - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= - \int_0^{+\infty} y^4 de^{-2y} - \frac{1}{4} \\
&= - \left(y^4 e^{-2y} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} y^3 \cdot 4e^{-2y} dy \right) - \frac{1}{4} \\
&= -2 \int_0^{+\infty} y^3 de^{-2y} - \frac{1}{4} \\
&= -2 \left(y^3 e^{-2y} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 3y^2 \cdot e^{-2y} dy \right) - \frac{1}{4} \\
&= 3 \int_0^{+\infty} y^2 \cdot 2e^{-2y} dy - \frac{1}{4} = 3E(Y^2) - \frac{1}{4} \\
&= 3 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

因此, $D(X+Y^2) = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$.

附注 记住: 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的指数分布的随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} EX = \frac{1}{\lambda}, DX = \frac{1}{\lambda^2}, E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

三、解答题

(15) 由于 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -1, \\ 3x+1, & x > -1 \end{cases}$, 所以

$$\int f(x) dx = \int_{-1}^x f(t) dt + C,$$

$$\text{其中, } \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-1}^x (t-1) dt, & x \leq -1, \\ \int_{-1}^x (3t+1) dt, & x > -1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}, & x \leq -1, \\ \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}, & x > -1. \end{cases}$$

$$\text{因此 } \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} + C, & x \leq -1, \\ \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + C, & x > -1. \end{cases}$$

附注 分段函数 $f(x)$ 的不定积分, 应用以下公式计算是比较快捷的:

$$\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(t) dt + C,$$

其中 x_0 是 $f(x)$ 是最靠左边的分段点.

$$(16) \text{ 由于 } y(t) = e^{-\int dt} \left(C + \int e^{-t} \cdot e^{\int dt} dt \right) = Ce^{-2t} + e^{-t}.$$

将 $y(0) = 0$ 代入上式得 $C = -1$. 所以 $y(t) = -e^{-2t} + e^{-t} (t \geq 0)$.

当 $t < 0$ 时, $f'(t) = (2t^2 + \sin t)' = 4t + \cos t$,

当 $t > 0$ 时, $f'(t) = y'(t) = (-e^{2t} + e^{-t})' = 2e^{-2t} - e^{-t}$.

由于 $\lim_{t \rightarrow 0^-} f'(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = 1$, 所以 $f'(0) = 1$. 因此

$$f'(t) = \begin{cases} 4t + \cos t, & t < 0, \\ 2e^{-2t} - e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

由此可得, $t < 0$ 时, $f''(t) = 4 - \sin t$; $t > 0$ 时, $f''(t) = -4e^{-2t} + e^{-t}$. 由于 $\lim_{t \rightarrow 0^-} f''(t) = 4$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f''(t) = -3$, 所以 $f''(0)$ 不存在, 因此

$$f''(t) = \begin{cases} 4 - \sin t, & t < 0, \\ -4e^{-2t} + e^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$

附注 $f'(0) = 1$ 与 $f''(0)$ 不存在也可证明如下:

由于 $f(t) = \begin{cases} 2t^2 + \sin t, & t < 0, \\ -e^{-2t} + e^{-t}, & t \geq 0, \end{cases}$ 所以

$$f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2t^2 + \sin t}{t} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-2t} + e^{-t}}{t} = 1,$$

从而 $f'(0) = 1$.

由于 $f'(t) = \begin{cases} 4t + \cos t, & t < 0, \\ 2e^{-2t} - e^{-t}, & t \geq 0, \end{cases}$ 所以

$$f''_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{4t + \cos t - 1}{t} = 4,$$

$$f''_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-2t} - e^{-t} - 1}{t} = -3.$$

从而 $f''(0)$ 不存在.

(17) 令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x f(x - t) dt = \sin x \cdot f(x)$ 成为

$$\int_0^x f(u) du = \sin x \cdot f(x). \quad (1)$$

式(1)的两边对 x 求导得

$$f(x) = \sin x \cdot f'(x) + \cos x \cdot f(x),$$

即 $f'(x) + \frac{\cos x - 1}{\sin x} f(x) = 0$ (齐次线性微分方程), 所以

$$f(x) = Ce^{-\int \frac{\cos x - 1}{\sin x} dx} = Ce^{\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx} = Ce^{-2 \ln \cos \frac{x}{2}},$$

即 $f(x) = \frac{C}{\cos^2 \frac{x}{2}}$. 将 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ 代入得 $C = 1$. 所以 $f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$. 从而, $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上

的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{6}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{12}{\pi} \tan \frac{x}{2} \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} (3 - \sqrt{3}).$$

附注 如果计算 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值, 则不需算出 $f(x)$ 的表达式. 这是因为在式

(1) 中令 $x = \frac{\pi}{2}$ 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

所以, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{4}{\pi}.$$

(18) 由于 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1-y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2-x^2)$, 所以方程组 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x(1-y^2) = 0, \\ 2y(2-x^2) = 0 \end{cases}$ 在 D

的内部无可能极值点.

D 有边界 I: $y = \sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$, II: $x = \frac{1}{2} \left(0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, III: $y = 0 \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right)$, 如图答 4-18 所示.

在 I 上, $f(x, y)$ 成为

$$g_1(x) = 2 - 2x^2 + x^4 \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right).$$

由于 $g_1'(x) = 4x(x^2 - 1) < 0$, 所以 $g_1(x)$ 在 I 上的

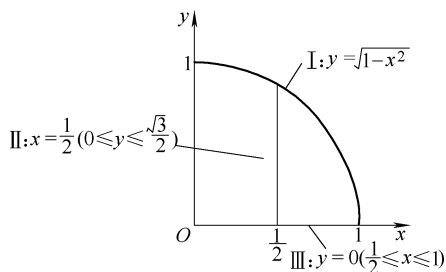
最大值 $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{16}$, 最小值 $g_1(1) = 1$.

在 II 上, $f(x, y)$ 成为 $g_2(y) = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}y^2 \left(0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 所以 $g_2(y)$ 在 II 上的最大值 g_2

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{23}{8}$, 最小值 $g_2(0) = \frac{1}{4}$.

在 III 上, $f(x, y)$ 成为 $g_3(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right)$, 所以 $g_3(x)$ 在 III 上的最大值 $g_3(1) = 1$,

最小值 $g_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.



图答 4-18

综上所述, $f(x, y)$ 在 D 上的最大值 $= \max\left\{\frac{25}{16}, \frac{23}{8}, 1\right\} = \frac{23}{8}$, 最小值 $= \min\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$.

附注 有界闭区域 D 上的二元连续函数 $f(x, y)$ 的最值, 可按以下步骤计算:

(I) 计算 $f(x, y)$ 在 D 内部的可能极值点, 记为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$;

(II) 计算 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大值与最小值(分别记为 M_1, m_1) 则 $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n), M_1, m_1$ 中的最大者(最小者)为 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

(19) $u(x, 2x) = x$ 两边对 x 求导得

$$u'_x = u_x(x, 2x) + 2u'_y(x, 2x) = 1,$$

再对 x 求导得 $[u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x)] + 2[u''_{yx}(x, 2x) + 2u''_{yy}(x, 2x)] = 0$. 利用 $u''_{xx} = u''_{yy}, u''_{xy} = u''_{yx}$ 化简后得

$$5u''_{xx}(x, 2x) + 4u''_{xy}(x, 2x) = 0. \quad (1)$$

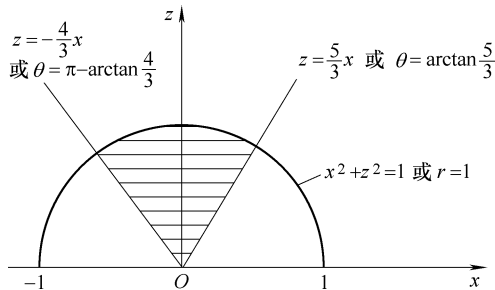
$u'_x(x, 2x) = x^2$ 两边对 x 求导得

$$u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x) = 2x. \quad (2)$$

由式(1), 式(2)得 $u_{xx}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x$,

$u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x$. 于是 D 如图答4-19的阴影部分所示, 所以 D 的面积为

$$\begin{aligned} \iint_D d\sigma &= \int_{\arctan \frac{5}{3}}^{\pi - \arctan \frac{4}{3}} d\theta \int_0^1 r dr \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \arctan \frac{4}{3} - \arctan \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$



图答 4-19

附注 本题获解的关键是利用题设从 $u(x, 2x) = x$, $u'_x(x, 2x) = x^2$ 中算出 $u''_{xx}(x, 2x)$ 与 $u''_{xy}(x, 2x)$ 的表达式.

$$(20) \text{ 由于 } b = \beta^T \alpha = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2, \quad b^4 = 16,$$

$$2b^2 A^2 = 2 \cdot 2^2 (\alpha \beta^T) = 8\alpha (\beta^T \alpha) \beta^T = 16A = 16 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha (\beta^T \alpha)^3 \beta^T = 8A,$$

所以, 所给的方程组成为

$$(8A - 16E_3)x = \gamma, \quad \text{即 } (A - 2E_3)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$$\text{由于} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right),$$

$$\text{所以, 式(1)与方程组} \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

同解. 式(2)的导出组的通解为 $C(1, 2, 1)^T$, 此外式(2)有特解 $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)^T$, 所以, 式(2), 即式(1)的通解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = C(1, 2, 1)^T + \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)^T$ (其中, C 是任意常数).

附注 设 α, β 都是 n 维列向量, 则 $\alpha^T \beta$ 是一个常数, 记为 c ; $\alpha \beta^T$ 是 n 阶矩阵, 记为 A , 则 $r(A) \leq 1$, 且对正整数 k , 有

$$A^k = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) \cdots (\alpha \beta^T) = c^{k-1} A.$$

$$\begin{aligned} (21) \text{ 由于 } |\lambda E_3 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -4 \\ \lambda - 1 & \lambda - 3 & 1 \\ \lambda - 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -4 \\ \lambda - 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 4) [(\lambda - 3)^2 - (\lambda - 1)] \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4), \end{aligned}$$

所以 A 有特征值 $\lambda = 2, 5, -4$.

设对应 $\lambda = 2$ 的特征向量为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则 \mathbf{a} 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

由于

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以, 式(1)与方程组 $\begin{cases} a_2 - 2a_3 = 0, \\ a_1 - a_3 = 0 \end{cases}$ 同解, 故可取 \mathbf{a} 为它的基础解系, 即 $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^T$.

设对应 $\lambda = 5$ 的特征向量为 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则 \mathbf{b} 满足

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

由于

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以式(2)与方程组 $\begin{cases} b_2 + b_3 = 0, \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$ 同解, 故可取 \mathbf{b} 为它的基础解系, 即 $\mathbf{b} = (1, -1, 1)^T$.

设对应 $\lambda = -4$ 的特征向量为 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$, 则由 \mathbf{A} 是实对称矩阵知, \mathbf{c} 与 \mathbf{a} , \mathbf{b} 都正交, 所以有

$$\begin{cases} (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0, \\ (\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases} \text{ 由于它与 } \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 + c_3 = 0. \end{cases}$$

同解, 故可取 \mathbf{c} 为它的基础解系, 即 $\mathbf{c} = (1, 0, -1)^T$.

显然 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 是正交向量组, 现将它们单位化:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T, \\ \eta &= \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, \\ \zeta &= \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T. \end{aligned}$$

$$\text{记 } \mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则 } \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \text{ 于是在}$$

正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下, $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$ (标准形).

$$\begin{aligned} \text{由 } \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^* \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} = -40 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \quad (|\mathbf{A}| = 2 \times 5 \times (-4) = -40) \\ &= -40 (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q})^{-1} = -40 (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q})^{-1} \\ &= -40 \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & & \\ & -8 & \\ & & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

知, 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下,

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A}^* \mathbf{Q}) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} -20 & & \\ & -8 & \\ & & 10 \end{pmatrix} \mathbf{y} = -20y_1^2 - 8y_2^2 + 10y_3^2 \text{ (标准形)}. \end{aligned}$$

附注 由题解可知, 如果 \mathbf{A} 是 n 阶可逆实对称矩阵, 则当正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将二次型 $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$) 化为标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ (其 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 \mathbf{A} 的特征值) 时, 必将二次型 $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x}$ 化为标准形 $\mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \dots + \mu_n y_n^2$ (其中 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 是 \mathbf{A}^* 的特征值).

(22) (I) 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y).$$

当 $y \leq 0$ 时, $P(X^2 \leq y) = 0$;

$$\text{当 } 0 < y \leq 1 \text{ 时, } P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3} \sqrt{y};$$

$$\text{当 } 1 < y \leq 4 \text{ 时, } P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^1 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} (1 + \sqrt{y});$$

$$\text{当 } y > 4 \text{ 时, } P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-2}^1 \frac{1}{3} dy = 1,$$

$$\text{所以, } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{2}{3} \sqrt{y}, & 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{3} (1 + \sqrt{y}), & 1 < y \leq 4, \\ 1, & y > 4. \end{cases} \quad \text{由此得到}$$

$$\varphi(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 < y \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(II) E(|Y - X^4|) = E(|X^2 - X^4|) = E(X^2 |1 - X^2|)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |1 - x^2| f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 x^2 |1 - x^2| dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\int_{-2}^{-1} x^2 (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_{-1}^1 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{58}{15} + \frac{4}{15} \right) = \frac{62}{45}.$$

附注 $\varphi(y)$ 也可以按以下方法计算:

由于 $y = x^2$ 在 $f(x) \neq 0$ 的区间 $(-2, 0]$ 与 $(0, 1)$ 上都是单调的, 且 $y = x^2$ 在 $(-2, 0)$ 内的反函数 $x = h_1(y) = -\sqrt{y} (0 < y \leq 4)$, 在 $(0, 1)$ 内的反函数 $x = h_2(y) = \sqrt{y} (0 < y \leq 1)$, 所以

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} |h_1'(y)|, & 0 < y \leq 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{3} |h_2'(y)|, & 0 < y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 < y \leq 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(23) 设所给的简单随机样本的观察值为 x_1, x_2, \dots, x_n . 为了计算 θ 的最大似然估计量, 可认为 x_1, x_2, \dots, x_n 全为正的. 故似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_2}{\theta}} \cdots \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i},$$

即 $\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$. 于是由

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} = 0$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 从而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

由于 $EX = \theta$, $DX = \theta^2$, 所以由

$$P(\hat{\theta} \leq y) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq y\right) = P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}} \leq \frac{y - \theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}\right)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\frac{y-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{其中 } y \text{ 是任意实数})$$

由此可知 $\hat{\theta}$ 近似 $N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$.

附注 设 Y 是随机变量, 如果对于任意实数 y 有 $P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 则 $Y \sim$

$N(a, \sigma^2)$; 如果对任意实数 y 有 $P(Y \leq y) \approx \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 则 $Y \stackrel{\text{近似}}{\sim} N(a, \sigma^2)$.

模拟试题(五)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	D	B	C	A	C	A	A	C

(1) 设 $f(x) = x$, 则 $f(x)$ 只有一个零点, 但 $f'(x)$ 没有零点. 表明选项(A)不正确.

设 $f(x) = x^2$, 则 $f'(x)$ 只有一个零点, $f(x)$ 也只有一个零点, 表明选项(B)不正确.

设 $f(x) = e^x$ 则 $f(x)$ 没有零点, $f'(x)$ 也没有零点. 表明选项(C)不正确.

因此选(D).

附注 (D)的结论可用反证法证明其正确, 具体如下:

设 $f(x)$ 至少有两个零点, 设其中两个为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 则由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 这与 $f'(x)$ 没有零点相矛盾. 从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

(2) 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $\sin(\sin x) \leq \sin x$ (仅在点 $x=0$ 处取等号), $\cos(\sin x) \geq \cos x$ (仅在点 $x=0$ 处取等号), 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1.$$

故有 $I_1 < I_3$. 因此选(B).

附注 选项(A)是不正确的, 这是由于

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(\sin x) - \sin(\cos x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(\sin x) - \sin(\cos x)] dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin(\sin x) - \sin(\cos x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(\sin x) - \sin(\cos x)] dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(\cos t) - \sin(\sin t)] dt \\ &\quad \left(\text{其中 } x = \frac{\pi}{2} - t \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(\sin x) - \sin(\cos x)] dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(\cos x) - \sin(\sin x)] dx = 0, \end{aligned}$$

所以, $I_1 = I_2$.

由此也证明选项(C)是不正确的.

(3) 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f'_y(x, y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

并且 $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, $f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$,

所以, $f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^4} = -1$,

$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x} = 1$.

故 $f''_{xy}(0, 0) < f''_{yx}(0, 0)$. 因此选 (C).

附注 在已算出 $f'_x(x, y)$ 时, 可按以下方法快捷算出 $f'_y(x, y)$ (这是因为当 $f(y, x) = -f(x, y)$ 时, $f'_y(x, y) = -f'_x(y, x)$):

$$f'_y(x, y) = -f'_x(y, x) = -\frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{x \text{ 与 } y \text{ 互换}} = \frac{x^5 - 4x^2 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(4) $D = \{(x, y) \mid 1 - y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} + \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \sqrt{x-1} \leq y \leq 1\}$, 如图答 5-4 的阴影部分所示.

D 的边界由 I, II, III 三部分组成. 显然 II, III 上的任一点的切线都为它们自己, 从而不能与直线 $y = x - 1$ 平行.

设 (x_0, y_0) ($x_0 = 1 + y_0^2$, $0 < y_0 < 1$) 是 I 上的一点, 则此点的切线斜率的倒数为 $2y_0$, 于是由题设得 $\frac{1}{2y_0} =$

1, 即 $y_0 = \frac{1}{2}$ (对应地有 $x_0 = \frac{5}{4}$). 从而所求的切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{5}{4}, \text{ 即 } y = x - \frac{3}{4}.$$

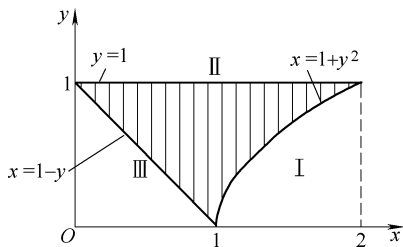
因此选 (A).

附注 要计算 I 上的与直线 $y = x - 1$ 平行的切线方程, 应先确定切点的坐标.

$$\begin{aligned} (5) \text{ 由于 } |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & t+2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & t-7 & t+6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 4 & -5 & 8 \\ 4 & t-7 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & t-9 & t-2 \end{vmatrix} = 14(t-2), \end{aligned}$$

所以, $t = 2$ 时, $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)| = 0$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关; $t = 3$ 时, $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)| \neq 0$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 由此可知, 结论①④正确, 因此选 (C).

附注 确定 n 个 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性相关性的好方法是计算行列式 $D =$



图答 5-4

$|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)|$. 如果 $D=0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关; 如果 $D \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

$$(6) \text{ 由 } |\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \text{ 知, } A \text{ 的特征值为 } \lambda = 1 \text{ (二重)}, \lambda = -1.$$

由于 A 可相似对角化, 所以 $r(1 \cdot E_3 - A) = 3 - 2 = 1$, 即

$$r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ 从而 } -a = b. \quad (1)$$

用 $-b-1$ 代替 b , A 就成为 B , 所以由 B 可相似对角化得

$$-a = -b - 1. \quad (2)$$

由式(1), 式(2)得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. 因此选 (A).

附注 设 A 是 n 阶矩阵, 则 A 可相似对角化的充分必要条件有较多种表述, 其中常用的有:

设 A 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 它们的重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_s ($n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$), 则 A 可相似对角化充分必要条件有

$$r(\lambda_i E_n - A) = n - n_i \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

$$(7) \text{ 由 } P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}, P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7} \text{ 得}$$

$$P(X \geq 0, Y < 0) = P(X \geq 0) - P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{1}{7},$$

$$P(X < 0, Y \geq 0) = P(Y \geq 0) - P(X < 0, Y \geq 0) = \frac{1}{7},$$

$$P(X < 0, Y < 0) = 1 - P(X \geq 0, Y \geq 0) - P(X \geq 0, Y < 0) - P(X < 0, Y \geq 0) = \frac{2}{7},$$

所以 $P(\max\{X, Y\} \geq 0) = P(\max\{X, Y\} \geq 0, X \geq 0) + P(\max\{X, Y\} \leq 0, X \leq 0)$

$$= P(X \geq 0)P(\max\{X, Y\} \geq 0 | X \geq 0) + P(X \leq 0, Y \leq 0, X \leq 0)$$

$$= P(X \geq 0) + P(X \leq 0, Y \leq 0) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}. \text{ 因此本题选 (A).}$$

附注 题解中有两点值得注意:

(I) 由于 X, Y 是连续型随机变量, 所以 $P(X \leq 0, Y \leq 0) = P(X < 0, Y < 0)$.

(II) 由于 $X \geq 0$ 时, 必有 $\max\{X, Y\} \geq 0$, 所以 $P(\max\{X, Y\} \geq 0 | X \geq 0) = 1$.

(8) 由题设知 $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{9}\right)$, 所以

$$P(1 < \bar{X} < 3) = P\left(\frac{3}{\sigma} < \frac{\bar{X} - 0}{\frac{\sigma}{3}} < \frac{9}{\sigma}\right) = \int_{\frac{3}{\sigma}}^{\frac{9}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \stackrel{\text{记}}{=} f(\sigma).$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{df}{d\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{81}{2\sigma^2}} \left(-\frac{9}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{2\sigma^2}} \left(-\frac{3}{\sigma^2} \right) \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{9}{2\sigma^2}} (3e^{-\frac{36}{\sigma^2}} - 1) \end{aligned} \begin{cases} > 0, & 0 < \sigma < \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}, \\ = 0, & \sigma = \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}, \\ < 0, & \sigma > \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}, \end{cases}$$

所以, 使得 $P(1 < \bar{X} < 2)$ 为最大的 $\sigma = \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$. 因此选(C).

附注 应记住以下结论:

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $\mu = EX$, $\sigma^2 = DX$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (样本均值), 则

$$E\bar{X} = \mu, \quad D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

于是, 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

二、填空题

$$(9) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2} + x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 + 1 = 2,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} + x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] + \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &\stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^t - 1}{2t} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

所以, 所给出曲线的非铅直渐近线方程为 $y = 2x + \frac{5}{2}$.

附注 对于曲线 $y = f(x)$, 如果极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ 存在为 a , 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax)$ 存在为 b , 则该曲线的非铅直渐近线方程为 $y = ax + b$.

(10) 由于 $(\sin x^3)^3$ 是奇函数, 所以它在点 $x=0$ 处的 4 阶导数为 0.

由于 $(\ln \cos x)' = -\tan x$, $(\ln \cos x)'' = (-\tan x)' = -\sec^2 x$,
 $(\ln \cos x)^{(3)} = (-\sec^2 x)' = -2\sec^2 x \tan x$,

所以, $(\ln \cos x)^{(4)} \Big|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)^{(3)} - (\ln \cos x)^{(3)} \Big|_{x=0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sec^2 x \tan x}{x} = -2$.

从而 $f^{(4)}(0) = 0 + (-2) = -2$.

附注 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处任意阶可导, 则

当 $f(x)$ 是奇函数时, $f^{(2k)}(0) = 0 (k=0, 1, 2, \dots)$;

当 $f(x)$ 是偶函数时, $f^{(2k+1)}(0) = 0 (k=0, 1, 2, \dots)$.

$$\begin{aligned} (11) \quad & \int_{-1}^1 (|x|e^{-x} + \sin x^3 + \sqrt{1-x^2}) dx = \int_{-1}^1 |x|e^{-x} dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^0 -xe^{-x} dx + \int_0^1 xe^{-x} dx + \frac{\pi}{2} = \int_{-1}^0 xde^{-x} - \int_0^1 xde^{-x} + \frac{\pi}{2} \\ &= \left(xe^{-x} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^{-x} dx \right) - \left(xe^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \right) + \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{2}{e} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

附注 利用定积分几何意义, 有

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \text{上半单位圆的面积} = \frac{\pi}{2}.$$

$$(12) \quad \text{由于} \iint_D (x+4y+xy) d\sigma = \iint_D x d\sigma + \iint_D (4y+xy) d\sigma$$

$$= 2 \iint_{D_1} x d\sigma \left(\begin{array}{l} \text{由于 } D \text{ 关于 } x \text{ 轴对称, 而 } 4y+xy \text{ 在对称点处的值互为相反数, 所以} \\ \iint_D (4y+xy) d\sigma = 0; x \text{ 在对称点处的值彼此相等, 所以 } \iint_D x d\sigma = \\ 2 \iint_{D_1} x d\sigma, D_1 \text{ 是 } D \text{ 的第一象限部分} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \cos \theta \cdot r dr = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{6} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta = \frac{\pi}{8} a^3. \end{aligned}$$

所以, 由题设得 $\frac{\pi}{8} a^3 = \frac{\pi}{8}$, 即 $a=1$.

附注 计算二重积分时, 首先应利用积分区域的对称性, 化简二重积分, 然后再进行计算.

(13) 由题设得

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关知 P 可逆, 且式(1)可以表示为

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} B, \text{ 所以 } A \sim B. \text{ 从而 } A \text{ 与 } B \text{ 有相同的特征值.}$$

$$\text{由 } |\lambda E_3 - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \text{ 知, } B \text{ 的最大特征值为 } 2, \text{ 从而 } A$$

的最大特征值为 2.

附注 设 A 与 B 都是 n 阶矩阵, 如果它们相似, 则

(I) $|A| = |B|$.

(II) $r(A) = r(B)$, 从而 A 与 B 等价.

(III) A, B 有相同的特征值.

(IV) $A^* \sim B^*$.

(V) 当 A 可逆时, B 也可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

(14) 记 X = 乙箱中的次品数,

Y = 从乙箱中取出的次品数,

则 $P(Y=1) = P(X=1)P(Y=1|X=1) + P(X=2)P(Y=1|X=2) + P(X=3)P(Y=1|X=3)$

$$= \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} \cdot \frac{C_1^1 C_5^2}{C_6^3} + \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} \cdot \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} + \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} \cdot \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{207}{400},$$

$P(Y=2) = P(X=2)(Y=2|X=2) + P(X=3)P(Y=2|X=3)$

$$= \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} \cdot \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} + \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} \cdot \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{45}{400},$$

$$P(Y=3) = P(X=3)P(Y=3|X=3) = \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} \cdot \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{400}.$$

所以, 所求的平均值 $= EY = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3)$

$$= \frac{207}{400} + \frac{90}{400} + \frac{3}{400} = \frac{3}{4}.$$

附注 由于 Y 可能取的值为 0, 1, 2, 3, 所以

$$EY = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3)$$

但是, 在具体计算时, $P(Y=0)$ 是不必算出的.

三、解答题

$$(15) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cos x + x}{2 \sqrt{1+x}} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\cos x + \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1+x)}{x^2}},$$

$$\begin{aligned}
 & \text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\cos x + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x)}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x + \frac{1}{2}}{\cos x + \frac{x}{2}} - \frac{1}{2(1+x)}}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+x)\left(-\sin x + \frac{1}{2}\right) - \cos x - \frac{x}{2}}{4x(1+x)\left(\cos x + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(1+x)\sin x + (1 - \cos x) + \frac{x}{2}}{x} \\
 &= \frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(1+x)\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \left(-2 + 0 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{3}{8}}.$$

附注 计算 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型未定式极限 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ 时, 总是先将函数指数化, 即 $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$. 然后计算 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)\ln f(x)$ (它是 $0 \cdot \infty$ 型未定式极限可转换或 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限进行计算), 记此极限为 A , 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \begin{cases} 0, & A = -\infty, \\ e^A, & A \text{ 是实数}, \\ +\infty, & A = +\infty. \end{cases}$$

(16) 在所给等式

$$e^x f(x) + 2e^{\pi-x} f(\pi-x) = 3\sin x \quad (1)$$

中令 $x = \pi - t$ 得

$$e^{\pi-t} f(\pi-t) + 2e^t f(t) = 3\sin t,$$

即

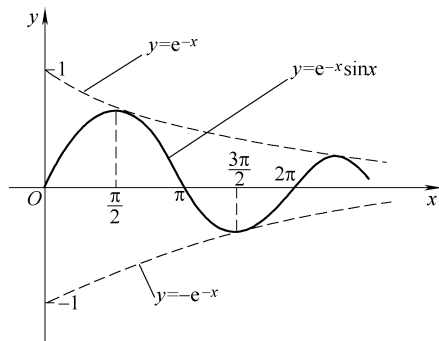
$$2e^{\pi-x} f(\pi-x) + 4e^x f(x) = 6\sin x. \quad (2)$$

式(1) - 式(2)得

$$e^x f(x) = \sin x, \text{ 即 } f(x) = e^{-x} \sin x.$$

由于 $y = f(x)$ ($x > 0$) 的概图如图答 5-16 所示, 所以, 由图可知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的极大值为 $f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 极小值为 $f\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($n = 1, 2, \dots$).

附注 画出函数的概图后, 往往可以利用函数极值定义, 得到该函数的极值. 这比用导数方法计算函数极值快捷.



图答 5-16

(17) 由 $\varphi(x)$ 单调知, 它的反函数 $\varphi^{-1}(x)$ 存

在, 于是由 $\varphi(x)$ 可求得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_0^{\varphi(x)} \varphi^{-1}(t) dt &= \varphi^{-1}(\varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx} \\ &= x[f'_u(x, f(x, x)) + f'_v(x, f(x, x))(f'_u(x, x) + f'_v(x, x))],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{从而 } \frac{d}{dx} \int_0^{\varphi(x)} \varphi^{-1}(t) dt \Big|_{x=1} &= f'_u(1, 1) + f'_v(1, 1)[f'_u(1, 1) + f'_v(1, 1)] \\ &= f'_u(1, 1) + f'_v(1, 1)(2 + 3) = 2 + 3(2 + 3) = 17.\end{aligned}$$

附注 题解中应注意的是: $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

(18) 由于

$$\begin{aligned}s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n (2n+1)!} x^{2n+1} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} \\ &= \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \quad (-\infty < x < +\infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \int_0^{+\infty} e^{-x} s^2(x) dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} 2 \sin^2 \frac{x}{\sqrt{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 - \cos \sqrt{2}x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{2}x dx,\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, 此外由

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{2}x dx &= - \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{2}x de^{-x} = - \left(e^{-x} \cos \sqrt{2}x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x dx \right) \\ &= 1 + \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \sin \sqrt{2}x de^{-x} \\ &= 1 + \sqrt{2} \left(e^{-x} \sin \sqrt{2}x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x dx \right) \\ &= 1 - 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{2}x dx\end{aligned}$$

得 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{2}x dx = \frac{1}{3}$. 将以上计算代入式(1)得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} s^2(x) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

附注 应记住 $\sin x$, $\cos x$ 的麦克劳林展开式.

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty), \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty).\end{aligned}$$

本题就是按此公式快捷算得所给幂级数的和函数 $s(x)$.

(19) (I) 令 $u = x^2 + y^2$, 则 $z = uf(u)$. 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(u) + 2xuf'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(u) + 8x^2 f'(u) + 2uf'(u) + 4x^2 u f''(u).$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(u) + 8y^2 f'(u) + 2uf'(u) + 4y^2 u f''(u).$$

从而, 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得

$$u^2 f''(u) + 3uf'(u) + f(u) = 0,$$

即 $[u^2 f'(u) + uf(u)]' = 0$. 由此得到

$$u^2 f'(u) + uf(u) = C_1 \quad (1)$$

将 $f(1) = 0, f'(1) = 1$ 代入式(1)得 $C_1 = 1$, 所以式(1)成为

$$u^2 f'(u) + uf(u) = 1, \text{ 即 } f'(u) + \frac{1}{u}f(u) = \frac{1}{u^2} \text{ (线性微分方程).}$$

它的通解为 $f(u) = e^{-\int \frac{1}{u} du} \left(C_2 + \int \frac{1}{u^2} e^{\int \frac{1}{u} du} du \right)$

$$= \frac{1}{u} \left(C_2 + \int \frac{1}{u} du \right) = \frac{C_2}{u} + \frac{\ln u}{u}. \quad (2)$$

将 $f(1) = 0$ 代入式(2)得 $C_2 = 0$. 所以 $f(u) = \frac{\ln u}{u} (u \geq 1)$

(II) D 如图答 5-19 的阴影部分所示, 所以,

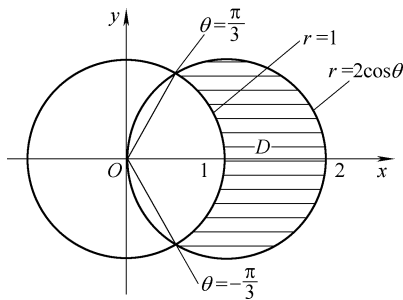
$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2)}{\ln(x^2 + y^2)} d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2)}{\ln(x^2 + y^2)} d\sigma \quad (D_1 \text{ 是 } D \text{ 的第一象限部分}) \\ & \xrightarrow{\text{极坐标}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \frac{f(r^2)}{\ln r^2} \cdot r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta - 1) d\theta = (4\sin\theta - 2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

附注 由于 D 是角域的一部分, 而且被积函数是 $x^2 + y^2$ 的函数, 所以题解中用极坐标计算所给的二重积分.

(20) 由 A 有零特征值知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = a-1=0, \text{ 即 } a=1.$$

要使矩阵方程 $AX=B$ 有解, 必须 $r(A:B) = r(A)$. 于是由



图答 5-19

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -2 & b+1 & c-2 & -3 \end{array} \right) \text{ (已将 } a=1 \text{ 代入)}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 & c & 0 \end{array} \right)$$

知 $\begin{cases} b+3=0, \\ c=0, \end{cases}$ 即 $b=-3, c=0$.

设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, 并将 $a=1, b=-3, c=0$ 代入, 则矩阵方程

$$AX=B \text{ 与 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

同解, 而式(1)即为以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

显然, 式(2)的通解为 $C_1(2, 1, -1)^T + (2, -1, 0)^T = (2C_1+2, C_1-1, -C_1)^T$,

式(3)的通解为 $C_2(2, 1, -1)^T + (2, 0, 0)^T = (2C_2+2, C_2, -C_2)^T$,

式(4)的通解为 $C_3(2, 1, -1)^T + (3, 2, 0)^T = (2C_3+3, C_3+2, -C_3)^T$,

所以, $X = \begin{pmatrix} 2C_1+2 & 2C_1+2 & 2C_3+3 \\ C_1-1 & C_2 & C_3+2 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 \end{pmatrix}$ (其中, C_1, C_2, C_3 是任意常数).

附注 矩阵方程 $AX=B$ 的解法见模拟试题(二)(20)的解答.

$$(21) \text{ (I) 由于 } |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2, \text{ 所以, } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$$

$=0$ 的解为 $a=1, -2$.

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, 由 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \vdots \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

知, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

当 $a = -2$ 时,

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

知, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 设表示式为 $\beta = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$, 即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta. \quad (1)$$

由以上的初等行变换知, 该方程组与 $\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ 同解. 它对应的齐次线性方程组的通解为 $C(1, 1, 1)^T$, 且有特解 $(1, 0, 0)^T$. 所以式(1)的通解为 $(x, y, z)^T = C(1, 1, 1)^T + (1, 0, 0)^T = (C+1, C, C)^T$. 从而对所求的 $a = -2$, 线性表示式的一般形式为 $\beta = (C+1)\alpha_1 + C\alpha_2 + C\alpha_3$ (其中 C 是任意常数).

(II) 由于 $a = -2$ 时,

$$\begin{aligned}
 |\lambda E_3 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & \lambda + 2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 0 & \lambda + 3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3),
 \end{aligned}$$

所以 A 有特征值 $\lambda = 0, 3, -3$.

设对应 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则 a 满足

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

$$\text{由于} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以式(1)与方程组 $\begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ 同解, 故 a 可取它的基础解系, 即 $a = (1, 1, 1)^T$.

设对应 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $b = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则 b 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

$$\text{由于} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以}$$

式(2)与方程组 $\begin{cases} b_1 + b_3 = 0, \\ b_2 = 0 \end{cases}$ 同解, 故 \mathbf{b} 可取它的基础解系, 即 $\mathbf{b} = (1, 0, -1)^T$.

设对应 $\lambda = -3$ 的特征向量为 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$, 则由 \mathbf{A} 是实对称矩阵知, \mathbf{c} 与 \mathbf{a}, \mathbf{b} 都正交, 所以有 $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 - c_3 = 0, \end{cases}$ 故 \mathbf{c} 可取它的基础解系, 即 $\mathbf{c} = (1, -2, 1)^T$.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是正交向量组, 现将它们单位化得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, \\ \boldsymbol{\eta} &= \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \\ \boldsymbol{\zeta} &= \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T.\end{aligned}$$

$$\text{记 } \mathbf{Q} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ (正交矩阵), 则正交变换 } \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} \text{ 将 } f(x_1, x_2,$$

$x_3)$ 化为标准形 $3y_2^2 - 3y_3^2$.

附注 由于当 $|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时, $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示. 因此题解从 $|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)| = 0$ 入手.

$$\begin{aligned}(22) \text{ 由 } EZ &= \iint_{xOy \text{ 平面}} (2x - y)f(x, y) d\sigma = \iint_{\Delta} (2x - y) \cdot \frac{3}{2}xd\sigma \\ &\quad \text{(其中 } \Delta = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 2x\}) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (2x - y) \cdot \frac{3}{2}xdy = \int_0^1 \frac{3}{2}x \cdot \left[-\frac{1}{2}(2x - y)^2 \right] \Big|_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

得 $DZ = E(Z^2) - (EZ)^2$

$$\begin{aligned}&= \iint_{xOy \text{ 平面}} (2x - y)^2 f(x, y) d\sigma - \frac{9}{16} = \iint_{\Delta} (2x - y)^2 \cdot \frac{3}{2}xd\sigma - \frac{9}{16} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (2x - y)^2 \cdot \frac{3}{2}xdy - \frac{9}{16} = \int_0^1 \frac{3}{2}x \cdot \left[-\frac{1}{3}(2x - y)^3 \right] \Big|_{y=0}^{y=2x} dx - \frac{9}{16} \\ &= \int_0^1 4x^4 dx - \frac{9}{16} = \frac{19}{80}.\end{aligned}$$

由 $Z = 2X - Y$ 得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) \frac{1}{|-1|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } f(x, 2x - z) &= \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < x < 1, 0 < 2x - z < 2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < x < 1, 0 < z < 2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < z < 2, \frac{z}{2} < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx = \begin{cases} \int_{\frac{z}{2}}^1 \frac{3}{2}x dx, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4}z^2 \right), & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

附注 记住以下公式:

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = aX + bY + c$ (a, b, c 是常数) 的概率密度可按以下公式计算:

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z - by - c}{a}, y\right) \frac{1}{|a|} dy,$$

$$\text{当 } b \neq 0 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z - ax - c}{b}\right) \frac{1}{|b|} dx.$$

(23) 由于 $EZ = E(X^2) + EY$,

其中, $E(X^2) = DX + (EX)^2 = \sigma^2$, $EY = \frac{1}{3}$. 所以 $EZ = \sigma^2 + \frac{1}{3}$. 因此由矩估计法令 $EZ =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \stackrel{\text{记}}{=} \bar{Z}$. 从而 σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \bar{Z} - \frac{1}{3}.$$

附注 顺便在 X 与 Y 相互独立的条件下计算 Z 的分布函数 $F_Z(z)$: 记 X 的分布函数为

$F(x)$, 则 $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$. 于是

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X^2 + Y \leq z) \\ &= P(Y = -1)P(X^2 + Y \leq z | Y = -1) + P(Y = 1)P(X^2 + Y \leq z | Y = 1) \\ &= \frac{1}{3}P(X^2 \leq z + 1) + \frac{2}{3}P(X^2 \leq z - 1) \quad (\text{利用 } X^2 \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} 0, & z \leq -1, \\ \frac{1}{3}P(-\sqrt{z+1} \leq X \leq \sqrt{z+1}), & -1 < z \leq 1, \\ \frac{1}{3}P(-\sqrt{z+1} \leq X \leq \sqrt{z+1}) + \frac{2}{3}P(-\sqrt{z-1} \leq X \leq \sqrt{z-1}), & z > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & z \leq -1, \\ \frac{1}{3}[F(\sqrt{z+1}) - F(-\sqrt{z+1})], & -1 < z \leq 1, \\ \frac{1}{3}[F(\sqrt{z+1}) - F(-\sqrt{z+1})] + \frac{2}{3}[F(\sqrt{z-1}) - F(-\sqrt{z-1})], & z > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

模拟试题(六)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	C	B	B	A	B	C	D

(1) 显然 $x = 0, 1$ 都是方程的实根. 记 $f(x) = 2^x - x^2 - 1$, 则 $f(x)$ 连续, 且 $f(2) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, 所以由零点定理(推广形式)知方程 $f(x) = 0$ 在 $(2, +\infty)$ 上有实根, 记为 x_0 .

如果 $f(x) = 0$ 还有不同实根 x_1 , 不妨设 $x_1 > x_0$, 则由 $f(x)$ 3 阶可导, 且 $f(0) = f(1) = f(x_0) = f(x_1)$ 及罗尔定理(高阶导数形式)知, 存在 $\xi \in (0, x_1)$, 使得

$$f^{(3)}(\xi) = 0. \quad (1)$$

另一方面, 计算 $f(x)$ 的 3 阶导数得

$$f^{(3)}(\xi) = 2^\xi (\ln 2)^3 \neq 0. \quad (2)$$

由式(1)与式(2)矛盾知, 方程 $f(x) = 0$, 即 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 除 $0, 1, x_0$ 外, 别无其他实根. 因此选(C).

附注 (I) 零点定理的一种推广形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

(II) 罗尔定理的一种高阶导数形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内 3 阶可导, 且存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$ (其中 $x_1 < x_2$), 使得 $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(3)}(\xi) = 0$.

(2) 利用对称区间上定积分性质可得

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^2 x dx = 0 \quad (\text{由于被积函数是奇函数}),$$

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{由于 } \sin^3 x \text{ 是奇函数, } \cos^4 x \text{ 是偶函数, 在} \\ [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上 } \cos^4 x \geq 0, \text{ 且仅在点 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 处取等号} \end{array} \right),$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^7 x) dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{由于 } x^2 \sin^3 x \text{ 是奇函数, } \cos^7 x \text{ 是偶函数, 在} \\ [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上 } \cos^7 x \geq 0, \text{ 且仅在点 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 处取} \\ \text{等号} \end{array} \right),$$

所以, $P < M < N$. 因此选(C).

附注 应记住对称区间上定积分的性质: 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x) \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

此外,当 $f(x)$ 是非奇非偶函数时,有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

(3) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1时,它在点 $x = -1$ 处可能是条件收敛(如 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$),也可能不是条件收敛(如 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^n$),但当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = -1$ 处条件收敛时,它的收敛半径必为1. 于是收敛半径为1是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = -1$ 处条件收敛的必要而非充分条件,因此选(B).

附注 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,当其收敛半径为 R (正数)时,必在 $(-R, R)$ 内绝对收敛,但在端点 $x = -R, R$ 处可能收敛(条件收敛或绝对收敛),也可能发散,应视 $\{a_n\}$ 而定.

(4) 由于所给的微分方程右端函数

$$2\sin x = e^{\alpha x}(0 \cdot \cos \beta x + 2 \cdot \sin \beta x) \quad (\text{其中 } \alpha = 0, \beta = 1),$$

而 $\alpha + \beta i = i$ 是对应的齐次线性微分方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程之根,所以 $y'' + y = 2\sin x$ 应有的特解形式为 $x(a\cos x + b\sin x)$. 因此选(B).

附注 对于常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x]$$

(式中 $P_l(x), Q_m(x)$ 分别是 l 与 m 次多项式)应有如下形式的特解:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x)\cos \beta x + R_n^{(2)}(x)\sin \beta x]$$

(式中 $R_n^{(1)}(x), R_n^{(2)}(x)$ 都是 n 次多项式, $n = \max\{l, m\}$, $k = 0, 1$, 视 $\alpha + i\beta$ 是否为 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根而定).

(5) 当 A 可逆时, $\lambda \neq 0$, 且 A^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 α , $B = P^{-1}AP$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$. 从而 B^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$. 因此选(A).

附注 设 A 是 n 阶矩阵, 有特征值 λ 及对应的特征向量 α , 则 $B = P^{-1}AP$ (P 是 n 阶可逆矩阵)有特征值 λ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$. 此外, 当 A 可逆时, A^{-1} 与 A^* 分别有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 与 $\frac{|A|}{\lambda}$ 以及对应的特征向量 α .

(6) 由于当(I)与(II)等价时, (I)与(II)等秩; 当 A 与 B 等价时, A 与 B 等秩, 反之也对. 所以选项(A)、(C)、(D)都正确. 因此选(B).

附注 当(I)与(II)等秩时, 未必等价. 例如, $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, $\beta_1 = (1, 0, 0)^T$, $\beta_2 = (0, 0, 1)^T$. 显然 $r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\beta_1, \beta_2)$, 但是 α_2 不能由 β_1, β_2 线性表示, 即 α_1, α_2 与 β_1, β_2 不等价.

由本题可知, 题中的(I)、(II)等价与 A, B 等价是有区别的, 应注意这一点.

$$\begin{aligned}
 (7) \quad F(1, 4) &= P(X \leq 1, Y \leq 4) = P(X \leq 1, X^2 \leq 4) = P(-2 \leq X \leq 1) \\
 &= \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^1 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

因此选(C).

附注 顺便计算 X 的分布函数 $G(x) = P(X \leq x)$:

$$\text{当 } x \leq -1 \text{ 时, } P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0;$$

$$\text{当 } -1 < x \leq 0 \text{ 时, } P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}(x+1);$$

$$\text{当 } 0 < x \leq 2 \text{ 时, } P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dt + \int_0^x \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x;$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

$$\text{所以, } G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right), & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$(8) \text{ 由于 } Y = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2\right] &= \frac{\sigma^4}{n^2} E(Y^2) = \frac{\sigma^4}{n^2} [DY + (EY)^2] \\
 &= \frac{\sigma^4}{n^2} (2n + n^2) = \frac{2+n}{n} \sigma^4.
 \end{aligned}$$

因此选(D).

附注 应记住以下结论:

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

此外, 设 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $EX = n$, $DX = 2n$.

二、填空题

(9) 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续知

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x + \sin x)}{x}}, \quad (1)$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x + \sin x)}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x} = 2. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得 $a = e^2$.

附注 计算 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型未定式极限 $\lim [f(x)]^{g(x)}$ 时, 应首先将函数指数化, 即 $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$. 于是

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)} = \begin{cases} e^A, & \lim g(x)\ln f(x) = A (\text{常数}), \\ 0, & \lim g(x)\ln f(x) = -\infty, \\ +\infty, & \lim g(x)\ln f(x) = +\infty. \end{cases}$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} f\left(e^{xy}, \cos \frac{1}{x}\right) = f'_u \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + f'_v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cos \frac{1}{x} = ye^{xy} f'_u + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} f'_v.$$

附注 计算多元复合函数的偏导数时, 应先画出该函数与自变量之间的复合关系图, 例如本题的关系图为

$$z = f\left(e^{xy}, \cos \frac{1}{x}\right) \begin{matrix} \swarrow u < x \\ \searrow v \text{---} x \end{matrix}$$

然后按关系图计算有关的偏导数.

$$\begin{aligned} (11) \quad & \text{由于 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\cos \frac{n\pi}{2}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \quad (\text{由于 } (-1)^{\cos \frac{n\pi}{2}} = (-1)^{n-1}) \\ & = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + (-1)^{\cos \frac{n\pi}{2}} \frac{1}{2^n} \right] = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

附注 应记住 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. 顺便计算 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - 1 = 2 \ln(1+x) \Big|_{x=1} - 1 \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

(12) 由题设知

$$\frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = 1 + p + p \ln p \quad \text{即} \quad \frac{d \ln R}{dp} = \frac{1 + p + p \ln p}{p} = \frac{1}{p} + 1 + \ln p,$$

所以,

$$\begin{aligned} \ln R(p) - \ln R(1) &= \int_1^p \left(\frac{1}{t} + 1 + \ln t \right) dt \\ &= (\ln t + t \ln t) \Big|_1^p = \ln p + p \ln p = \ln p^{1+p}. \end{aligned}$$

将 $R(1) = 1$ 代入上式得

$$R(p) = p^{1+p}.$$

附注 由于 $R(p)$ 是 p 的单调增加函数, 所以 $R(p)$ 的弹性为 $\frac{p}{R} \frac{dR}{dp}$.

(13) 由于 $A^* = |A| A^{-1}$, 以及

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{所以 } A^* = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

附注 如果记住以下公式, 将快捷地算出 A^* .

设 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B| A^* & O \\ O & |A| B^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & |A| B^* \\ |B| A^* & O \end{pmatrix}.$$

(14) 由于 $P(A) = C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$, 则 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1 - 3p^2(1-p)^2$	$3p^2(1-p)^2$

所以, $E(X^2) = 1^2 \cdot 3p^2(1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$.

附注 服从参数为 λ 的 0-1 分布的随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1 - \lambda$	λ

($0 < \lambda < 1$)

由此可算出 X 的数字特征, 例如

$$EX = E(X^2) = \lambda, \quad DX = \lambda(1 - \lambda).$$

三、解答题

$$\begin{aligned} (15) \quad \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx &= \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} de^x \\ &= \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x - \int e^x \cdot \frac{1 + \cos x + \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx \\ &= \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x - \left[\int \frac{1}{1 + \cos x} \cdot e^x dx + \int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} \cdot e^x dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x - \left(\int \frac{1}{1 + \cos x} \cdot e^x dx + \int e^x d \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\
&= \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x - \left(\int \frac{1}{1 + \cos x} \cdot e^x dx + \frac{e^x}{1 + \cos x} - \int \frac{1}{1 + \cos x} \cdot e^x dx \right) \\
&= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x + C.
\end{aligned}$$

附注 当 $\int f(x) dx$ 不易计算时,有时可采用以下方法计算,即将不定积分 $\int f(x) dx$ 改写成两个不定积分之和:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx,$$

并且对其中一个,例如对 $\int f_1(x) dx$ 施行分部积分法消去 $\int f_2(x) dx$. 本题的 $\int e^x \cdot \frac{1 + \cos x + \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx$ 就是如此计算的.

(16) 由于 $f_n(x)$ 满足

$$f'_n(x) - f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^x,$$

所以, $f_n(x) = e^{\int dx} \left[C + \int \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^x \cdot e^{\int -dx} dx \right] = e^x \left(C + \frac{1}{n!} x^n \right).$

将 $f_n(1) = \frac{e}{n!}$ 代入上式得 $C = 0$, 所以 $f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n e^x (n = 1, 2, \dots)$. 从而 $s(x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x (e^x - 1) (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{由 } s(x) = e^x (e^x - 1) \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ > 0, & x > 0, \end{cases}$$

知函数 $y = s(x)$ 有唯一零点 $x = 0$, 在 $(-\infty, 0)$ 上 $s(x) < 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $s(x) > 0$.

$$\text{由 } s'(x) = 2e^x \left(e^x - \frac{1}{2} \right) \begin{cases} < 0, & x < -\ln 2, \\ = 0, & x = -\ln 2, \\ > 0, & x > -\ln 2, \end{cases}$$

知函数 $y = s(x)$ 在 $(-\infty, -\ln 2]$ 上单调减少, 在 $[-\ln 2, +\infty)$ 上单调增加, $s(-\ln 2) = -\frac{1}{4}$ 是极小值, 无极大值.

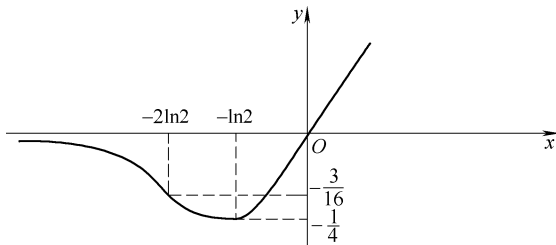
$$\text{由 } s''(x) = 4e^x \left(e^x - \frac{1}{4} \right) \begin{cases} < 0, & x < -2\ln 2, \\ = 0, & x = -2\ln 2, \\ > 0, & x > -2\ln 2, \end{cases}$$

知曲线 $y = s(x)$ 在 $(-\infty, -2\ln 2]$ 上是凸的, 在 $[-2\ln 2, +\infty)$ 上是凹的,

$\left(-2\ln 2, -\frac{3}{16}\right)$ 是拐点.

由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(e^x - 1) = 0$ 知曲线 $y = s(x)$ 有水平渐近线 $y = 0$. 所以 $y = s(x)$ 的图形如图答 6-16 所示.

附注 作函数 $y = f(x)$ 的简图时, 应确定 $y = f(x)$ 取正值与负值的区间(零点), 单调增加与单调减少区间(极值), 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间(拐点)以及渐近线. 本题一一计算了这些要素后, 作出了简图.



图答 6-16

(17) 由 $f'_x = 4x - 4xy^2$, $f'_y = 2y - 4x^2y$ 知方程组 $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 4x(1 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 2x^2) = 0 \end{cases}$ 在 D 的内部无解, 即 $f(x, y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

D 的边界由 $C_1: x^2 + 2y^2 = 1 (y \geq 0)$ 与 $C_2: y = 0 (-1 \leq x \leq 1)$ 组成.

$f(x, y) \big|_{C_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + x^4 \stackrel{\text{记}}{=} \varphi(x) (-1 \leq x \leq 1)$, 且 $\varphi(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最小值 $\frac{1}{2}$,

在 $x = -1$ 或 1 处取最大值 2 , 即 $f(x, y)$ 在 C_1 上的最小值为 $\frac{1}{2}$, 最大值为 2 .

$f(x, y) \big|_{C_2} = 2x^2 (-1 \leq x \leq 1)$, 在点 $x = 0$ 处取到最小值 0 , 在点 $x = -1, 1$ 处取到最大值 2 , 即 $f(x, y)$ 在 C_2 上的最小值为 0 , 最大值为 2 .

因此, $f(x, y)$ 在 D 上的最小值为 0 , 最大值为 2 .

附注 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上必有最小值与最大值, 它们可按以下步骤计算:

(I) 计算 $f(x, y)$ 在 D 的内部的所有可能极值点, 记为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n);$$

(II) 计算 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最小值和最大值, 记为 m_1 与 M_1 ;

(III) 比较 $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n), m_1, M_1$, 其中最小者(最大者)即为 $f(x, y)$ 在 D 上的最小值(最大值).

$$(18) \iint_{\triangle OAB} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} (1 - x - y) d\sigma,$$

其中, $D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x} \right\}$; $D_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x \right\}$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iint_{\triangle OAB} f(x, y) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \Big|_{y=0}^{y=\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2} (1-x-y)^2 \Big|_{y=\frac{1-x}{1+x}}^{y=1-x} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[x \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 + x^2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x} dx \stackrel{\text{令 } t=1+x}{=} \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-\frac{4}{t} + 8 - 5t + t^2 \right) dt \\
 &= \frac{17}{12} - 2\ln 2.
 \end{aligned}$$

附注 计算分块函数的二重积分, 必须根据函数的分块将积分区域分成若干小块, 并逐一计算各小块上的二重积分后相加, 即得所求的二重积分.

(19) c 将 $[a, b]$ 分成两个小区间 $[a, c]$ 与 $[c, b]$.

由于 $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 所以存在 $x_1 \in (a, c)$, 使得 $f(x_1) > f(a)$. 由于 $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$, 所以存在 $x_2 \in (x_1, c)$, 使得 $f(x_2) > f(c)$. 因此 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上的最大值在 (a, c) 内取到. 于是由费马引理知存在 $\eta_1 \in (a, c)$, 使得 $f'(\eta_1) = 0$.

此外, 由 $f(c) = f(b)$ 知 $f(x)$ 在 $[c, b]$ 上满足罗尔定理条件, 所以存在 $\eta_2 \in (c, b)$, 使得 $f'(\eta_2) = 0$.

由题设及以上证明知, $f'(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上满足罗尔定理条件, 所以存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

附注 当函数 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上有连续导数, 且 $f'_+(a) \cdot f'_-(c) < 0$, 则容易知道, 存在 $\xi \in (a, c)$, 使得 $f'(\xi) = 0$. 但是, 从本题的证明可知, “当 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上可导 (未必有连续导数), 且 $f'_+(a) \cdot f'_-(c) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, c)$, 使得 $f'(\xi) = 0$,” 记住这个结论, 有助于快速解题.

(20) 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 所以矩阵方程

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

无解, 从而

$$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > r(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

$$\text{由于 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & b & a & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3-b \\ 0 & 2 & b-3 & a-1 & 1 & 5-b \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3-b \\ 0 & 0 & b-5 & a+1 & -1 & b-1 \end{array} \right).$$

所以, $b=5$ 时, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3 > 2 = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 即此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性表示, 所以矩阵方程

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)Y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

有解, 从而

$$r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

将 $b=5$ 代入得

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ a & a+1 & a+6 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6-5a & 1-a & 3-a & 5-3a \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2-5a & -a & 1-a & 1-3a \end{array} \right).$$

所以, $a \neq \frac{2}{5}$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

(=3), 即此时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性表示.

附注 题解中有两点值得注意:

(I) 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是

$$r(A \mid B) = r(A),$$

而无解的充分必要条件是

$$r(A \mid B) > r(A).$$

(II) 设有两个 n 维向量组 (A): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, (B): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 则向量组 (A) 可由向量组 (B) 线性表示, 且表示式是唯一的充分必要条件是矩阵方程

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \quad (1)$$

有唯一解; 向量组 (A) 可由向量组 (B) 线性表示, 但表示式不唯一的充分必要条件是矩阵方程 (1) 有无穷多解; 向量组 (A) 不可由向量组 (B) 线性表示的充分必要条件是矩阵方程 (1) 无解.

(21) 由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所以, A 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, 且对应 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\alpha_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$.

设对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则由 A 是实对称矩阵知, α 与 α_3 正交, 即

$$a_1 + a_3 = 0.$$

它的基础解系为 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 它们可取为 A 的对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是正交向量组, 现将其单位化:

$$\xi_1 = \alpha_1 = (0, 1, 0)^T,$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

$$\xi_3 = \alpha_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

A^* 的特征值为

$$\mu_1 = \frac{|A|}{\lambda_1} = -1, \mu_2 = \frac{|A|}{\lambda_2} = -1, \mu_3 = \frac{|A|}{\lambda_3} = 1,$$

它们对应的特征向量分别为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 记 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ (正交矩阵), 则

$$Q^T A^* Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{从而 } A^* = Q \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} Q^T$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

附注 题解中有两点值得注意:

(I) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 有特征值 λ 及对应的特征向量 ξ , 则 A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 ξ .

(II) 设 A 是可逆实对称矩阵, 正交矩阵 Q 使它正交相似对角化, 则 Q 也使 A^* 正交相似对角化.

(22) (I) 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 - x^3 y - xy^3) dy, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1, \text{ (即 } X \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 内服从均匀分布).} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

记 Z 的分布函数为 $F(z)$, 则 $F(z) = P(Z \leq z)$.

当 $z < 0$ 时, $P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = 0$;

当 $0 \leq z < 1$ 时, $P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{z}$;

当 $z \geq 1$ 时, $P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1$,

$$\text{所以, } F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \sqrt{z}, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \sqrt{z}, & 0 < z < 1, \\ 1, & z \geq 1, \end{cases} \text{ 从而}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}}, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(\text{II}) \quad E(X - Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY),$$

其中 $E(X^2) = D(X^2) + (EX)^2 = \frac{1}{12} \times 2^2 + 0 = \frac{1}{3}$. 同样可得 $E(Y^2) = \frac{1}{3}$. 此外,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \iint_{xOy \text{ 平面}} xyf(x, y) d\sigma = \iint_{\substack{|x| < 1 \\ |y| < 1}} xy \cdot \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3) d\sigma \\ &= \frac{1}{4} \left(\iint_{\substack{|x| < 1 \\ |y| < 1}} xy d\sigma - 2 \iint_{\substack{|x| < 1 \\ |y| < 1}} x^4 y^2 d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(0 - 2 \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^1 \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-1}^1 \right) = -\frac{2}{15}, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } E(X - Y)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) = \frac{14}{15}.$$

附注 $E(X - Y)^2$ 也可按公式直接计算:

$$\begin{aligned} E(X - Y)^2 &= \iint_{xOy \text{ 平面}} (x - y)^2 f(x, y) d\sigma = \iint_{\substack{|x| < 1 \\ |y| < 1}} (x - y)^2 \cdot \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3) d\sigma \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x - y)^2 (1 - x^3y - xy^3) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + 2x^4 y^2 + 2x^2 y^4 - 2xy - 2x^3 y^3 - x^5 y - xy^5) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 + 2x^4 y^2 + 2x^2 y^4) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^4 + \frac{7}{5}x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^4 + \frac{7}{5}x^2 \right) dx \\
 &= \frac{14}{15}.
 \end{aligned}$$

(23) 由于 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$, 所以由矩估计法令

$$EX = \bar{x} \left(= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

得 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \bar{x}$, 即 $\theta = \frac{\bar{x}^2}{(1-\bar{x})^2}$. 所以 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{x}^2}{(1-\bar{x})^2}$.

似然函数 $L(\theta) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 的最大值只能当 $0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 1$ 时取到, 所以取

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &= \sqrt{\theta} x_1^{\sqrt{\theta}-1} \cdot \sqrt{\theta} x_2^{\sqrt{\theta}-1} \cdot \cdots \cdot \sqrt{\theta} x_n^{\sqrt{\theta}-1} \\
 &= \theta^{\frac{n}{2}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1} \quad (0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 1).
 \end{aligned}$$

取对数得

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln \theta + (\sqrt{\theta} - 1) \ln(x_1 x_2 \cdots x_n).$$

由 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$ 知 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$ 的解为

$$\theta = \frac{n^2}{\ln^2(x_1 x_2 \cdots x_n)},$$

所以, θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_2 = \frac{n^2}{\ln^2(x_1 x_2 \cdots x_n)}$.

附注 应熟练掌握总体未知参数的两种点估计法: 矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(七)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	D	D	C	D	B	C	C	C

(1) 由于 $f(x) = |x| \cdot (x-2)|x-2|$, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导, 在点 $x=2$ 处可导, 因此选(D).

附注 应记住以下结论:

函数 $|x-a|$ 在点 $x=a$ 处不可导, 而函数 $(x-a)|x-a|$ 在点 $x=a$ 处可导.

(2) 由于 x^2 在 $[0, 1]$ 上连续, 选项(A), (B), (C)的右边都是 x^2 在 $[0, 1]$ 的积分和式的极限, 它们都等于 $\int_0^1 x^2 dx$, 即选项(A), (B), (C)都正确. 因此选(D).

附注 也可通过直接计算, 确认选项(D)不正确:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i-1}{3n} \right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{27n^3} \sum_{i=1}^n (9i^2 - 6i + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{27n^3} \left[\frac{9}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{6}{2}n(n+1) + n \right] \\ &= \frac{1}{9} \neq \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx. \end{aligned}$$

$$(3) f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = 1,$$

同样, $f'_y(0, 0) = 1$. 因此选(C).

附注 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 连续但不可微, 证明如下:

$$\begin{aligned} \text{由于 } |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} |x+y| \\ &\leq 2|x+y| \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)), \end{aligned}$$

所以, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{沿 } y=x}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{沿 } y=x}} \frac{\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}x}{|x|} \text{ 不存在,} \end{aligned}$$

所以, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微.

(4) 由 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 所以对它两项两项地加括号所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$$

收敛. 因此选(D).

附注 本题获解的关键是, 按莱布尼茨定理确定 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. 此外应记住以下的收敛级数性质:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则对它任意加括号所得级数仍收敛. 但反之未必正确, 即当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

任意加括号后所得的级数收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 未必收敛.

(5) 由 α, β, γ 线性无关知 α, β 线性无关, 由 α, β, δ 线性相关知 δ 可由 α, β 线性表示, 即 δ 可由 α, β, γ 线性表示. 因此选(B).

附注 关于向量组的线性相关性的以下结论应记住:

(I) 设向量组(A): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

如果(A)线性无关, 则它的任一部分组也线性无关;

如果(A)的任一部分组线性相关, 则(A)线性相关.

(II) 设向量组(A): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$.

如果(A)线性相关, 则至少存在一个向量可由其余向量线性表示; 如果(A)线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示式是唯一的.

(6) ②④都是 A 可相似对角化的充分必要条件, 而①③都是 A 可相似对角化的充分而非必要条件. 因此选(C).

附注 应记住以下的结论:

设 A 是 n 阶矩阵, 则“ A 有 n 个线性无关的特征向量”, 或“ A 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i E_n - A$ 都满足 $r(\lambda_i E_n - A) = n - n_i$ ”, 都是 A 可相似对角化的充分必要条件, 而“ A 有 n 个不同的特征值”, 或“ A 是实对称矩阵”, 则是 A 可相似对角化的充分而非必要条件.

(7) 对于选项(C), (X, Y) 的概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 它关于 X 与 Y

的边缘概率密度分别为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy, & -R \leq x \leq R, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2-x^2}, & -R \leq x \leq R, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2-y^2}, & -R \leq y \leq R, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

显然, $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$ 不是几乎处处成立的, 所以 X 与 Y 不相互独立. 因此选(C).

附注 应记住选项(A), (B), (D)的结论.

(8) 由于随机变量 t 的概率密度曲线关于纵轴对称, 所以由

$$\alpha = P(|t| \leq b) = 1 - P(|t| > b) = 1 - P(t > b) - P(t < -b) = 1 - 2P(t > b)$$

得 $P(t > b) = \frac{1-\alpha}{2}$. 从而由 $t_\alpha(n)$ 的定义得 $b = t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$. 因此选(C).

附注 应当记住:

当 $X \sim N(0, 1)$ 时, 满足 $P(|X| \leq b) = \alpha$ 的 $b = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (其中 u_α 为满足 $P(X > u_\alpha) = \alpha$ 的实数);

当 $X \sim t(n)$ 时, 满足 $P(|X| \leq b) = \alpha$ 的 $b = t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$ (其中 $t_\alpha(n)$ 为满足 $P(X > t_\alpha(n)) = \alpha$ 的实数).

二、填空题

(9) 所给微分方程 $x^2 y' + y + x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$ 可以改写成

$$y' + \frac{1}{x^2} y = -e^{\frac{1}{x}},$$

它的通解为 $y(x) = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left(C + \int -e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx \right) = e^{\frac{1}{x}} (C - x)$.

将 $y(1) = 0$ 代入得 $C = 1$. 所以 $y(x) = e^{\frac{1}{x}} (1 - x)$. 从而由

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x} \right) = -1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{\frac{1}{x}} (1-x) + x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

得曲线 $y = y(x)$ 的非铅直渐近线方程 $y = -x$.

附注 计算曲线 $y = f(x)$ 的非铅直渐近线方程时, 总是要先计算

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

如果这两个极限中至少有一个不存在, 则计算

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a_1 x];$$

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_2 x].$$

(10) 由于在 $[0, +\infty)$ 上

$$0 < \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} < \frac{1}{1+x^2},$$

且 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx$ 是收敛的反常积分, 从而有

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)(1+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^a)(1+x^2)} dx,$$

$$\begin{aligned}\text{即 } 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^a)(1+x^2)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{所以, } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{4}.$$

附注 对收敛的反常积分, 可以与定积分那样施行变量代换法与分部积分法.

$$\begin{aligned}(11) \text{ 由于 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, 0) + f(0, \sin t) - 2f(t, t)}{t} \\ = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, 0) - f(0, 0)}{2t} + \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(0, \sin t) - f(0, 0)}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{t} \right] - \\ 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\text{其中, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, 0) - f(0, 0)}{2t} = f'_x(0, 0) = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(0, \sin t) - f(0, 0)}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{t} \right] = f'_y(0, 0) \cdot 1 = -1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0)t + f'_y(0, 0)t + o(|t|)}{t} \\ &= f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, 0) + f(0, \sin t) - 2f(t, t)}{t} = 2 \times 1 + (-1) - 2 \times 0 = 1.$$

附注 由于 $f(x, y)$ 仅在点 $(0, 0)$ 处可微, 所以需用偏导数与全微分的定义计算本题的极限.

由于 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 所以有

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

特别当 $x = y = t$ 时, 上式成为

$$f(t, t) - f(0, 0) = [f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0)]t + o(|t|).$$

计算 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t}$ 时就利用了上式.

$$(12) \text{ 由于 } f'(x) = e^{x+1}(x+1) \begin{cases} < 0, & x < -1, \\ = 0, & x = -1, \\ > 0, & x > -1, \end{cases} \text{ 所以 } f(x) \text{ 有最小值 } f(-1) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{此外, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{x+1} + \frac{1}{2} \right) = e \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} + \frac{1}{2} = e \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{x+1} + \frac{1}{2} \right) = +\infty,$$

所以,由零点定理(推广形式)及 $f(x)$ 的单调性(即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调减少,在 $(-1, +\infty)$ 上单调增加)知, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 上各仅有一个零点,故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数为2.

附注 当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有零点;当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续、单调,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有且仅有一个零点.

上述的区间换为无穷区间,结论仍成立.

(13) 由 $|A| = 2$ 得

$$\left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1} - 3A^* = 2(A^{-1})^2 - 3|A|A^{-1} = (A^{-1})^2 \cdot 2(E_3 - 3A),$$

所以, $\left|\left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1} - 3A^*\right| = |A^{-1}|^2 \cdot 8|E_3 - 3A|$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8 \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -58.$$

附注 计算矩阵的行列式时,以下结论是常用的:

设 A, B 都是 n 阶矩阵,则

$$|AB| = |A| |B|, \quad |kA| = k^n |A| \quad (k \text{ 是常数}),$$

$$|A^*| = |A|^{n-1} \quad (n > 1).$$

当 A 可逆时, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

(14) 由于 $a = P(X=1) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, 所以

$$P(Y \geq a) = P\left(Y \geq \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-\frac{1}{4}}.$$

附注 由于 $F(x)$ 有间断点 $x=0, 1, 2$, 所以 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$F(0) - F(0^-)$	$F(1) - F(1^-)$	$F(2) - F(2^-)$

即

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

三、解答题

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(e^x + \sin x)}{\ln(1+x^2)}}, \quad (1)$$

其中, $x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \sin x \ln(e^x + \sin x) &= \sin x \ln[1 + (e^x - 1 + \sin x)] \sim x(e^x - 1 + \sin x), \\ \ln(1 + x^2) &\sim x^2. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln(e^x + \sin x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1 + \sin x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = 2.$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}} = e^2.$$

附注 本题题解中有两点值得注意:

(I) 计算 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型未定式极限 $\lim [f(x)]^{g(x)}$ 时, 应先指数化, 即 $\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$.

(II) 计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 应先进行化简, 其中 $f(x)$, $g(x)$ 分别用它们的等价无穷小代替是化简的重要手段之一.

(16) D 如图答 7-16 的阴影部分所示, 所以

$$V_x = \pi \int_0^2 [(\sqrt{4-x^2})^2 - (\sqrt{2x-x^2})^2] dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4 - 2x) dx = 4\pi.$$

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{2x-x^2}) dx$$

$$= 2\pi \left(\int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx \right),$$

$$\text{其中 } \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{8}{3},$$

$$\int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^2 x \sqrt{1-(x-1)^2} dx$$

$$\stackrel{t=x-1}{=} \int_{-1}^1 (t+1) \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{于是, } V_y = 2\pi \left(\frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{16}{3}\pi + \pi^2.$$

附注 应记住以下公式:

设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 都是连续函数, 且 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ ($0 \leq a \leq x \leq b$), 设

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$, 则

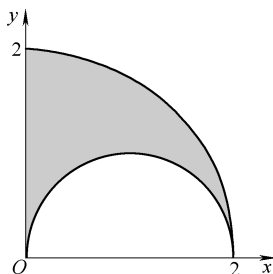
D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx,$$

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_y = 2\pi \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

(17) 记 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$,



图答 7-16

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{1}{r} \right\} \\
 &= \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{\cos \theta} \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},
 \end{aligned}$$

则 D_1 与 D_2 如图 7-17 所示, 于是由

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \iint_{D_1} \frac{\sin x}{x} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \\
 &= \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1, \\
 \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\arccos \frac{1}{r}} r \sin^2 \theta d\theta &= \iint_{D_2} \sin^2 \theta d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^{\sqrt{2}} r \sin^2 \theta dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \tan^2 \theta \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sec^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \tan \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

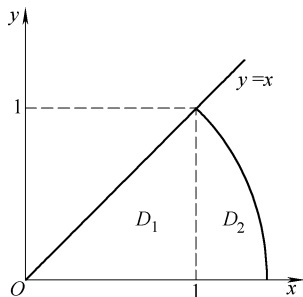


图 7-17

得到

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\arccos \frac{1}{r}} r \sin^2 \theta d\theta \\
 &= (1 - \cos 1) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4} - \cos 1 + \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

附注 对 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx$, 只有改变积分次序才能算出其值, 但是, 对于 $\int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\arccos \frac{1}{r}} r \sin^2 \theta d\theta$, 不改变积分次序, 同样可以算出其值. 具体如下:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\arccos \frac{1}{r}} r \sin^2 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} r (\theta - \sin \theta \cos \theta) \Big|_0^{\arccos \frac{1}{r}} dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} r \left(\arccos \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} \right) dr \\
 &\stackrel{\text{令 } \frac{1}{r} = \cos t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t (t - \cos t \sin t) \sec t \tan t dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} t d \tan^2 t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} t \tan^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt \right) \\
 &= \frac{\pi}{16} - \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 t - 1) dt
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{3}{4}(\tan t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}.$$

显然, 现在的计算比题解中的计算复杂得多.

(18) 所给微分方程可以改写成

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x. \quad (1)$$

式(1)的齐次线性微分方程

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (2)$$

的特征方程之根为二重根 -1 , 所以式(2)的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{-x}.$$

此外, 式(1)有特解

$$y^* = Ax^2e^{-x} + (A_1\cos x + B_1\sin x) + (A_2\cos 3x + B_2\sin 3x). \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)得

$$A = \frac{1}{2}, A_1 = -\frac{1}{4}, B_1 = 0, A_2 = -\frac{3}{100}, B_2 = -\frac{1}{25},$$

从而有

$$y^* = \frac{1}{2}x^2e^{-x} - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{100}\cos 3x - \frac{1}{25}\sin 3x.$$

因此, 所给方程的通解为

$$y = Y + y^* \\ = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{100}\cos 3x - \frac{1}{25}\sin 3x.$$

附注 题解中有两点值得注意:

(I) 由于式(2)的特征方程的根为 $r = -1$ (二重), 所以它的通解为 $(C_1 + C_2x)e^{-x}$.

(II) 由于式(1)的右边有 $e^{\lambda x} = e^{-x}$ 的项, 这里的 $\lambda = -1$ 是式(2)的特征方程之二重根, 所以式(1)的特解中有 Ax^2e^{-x} 的项.

(19) 记 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}} = x^2.$$

所以, 所给幂级数的收敛区间为 $\{x \mid x^2 < 1\} = (-1, 1)$. 当 $x = -1, 1$ 时, 幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)},$$

它是收敛的, 所以所给幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

对 $x \in [-1, 1]$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n} &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n(2n-1)} t^{2n-1} \right]' dt = x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} t^{2n-2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \int_0^x \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (t^2)^n dt = x \int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt \\
&= -x \int_0^x \ln(1+t^2) d \frac{1}{t} = -x \left[\frac{\ln(1+t^2)}{t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= -\ln(1+x^2) + 2x \arctan x.
\end{aligned}$$

所以所给幂级数的和函数

$$s(x) = -\ln(1+x^2) + 2x \arctan x \quad (x \in [-1, 1]).$$

附注 题解中以下两点值得注意:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (t^2)^n = \ln(1+t^2) \quad (-1 \leq t \leq 1)$ 是按公式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

得到的.

(II) 由于 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = 1$, 所以 $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$ 是定积分而不是反常积分.

(20) 由题设知 $(1, 2, 2, 1)^T - (1, -2, 4, 0)^T = (0, 4, -2, 1)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解, 所以有

$$4\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \text{ 即 } \alpha_4 = -4\alpha_2 + 2\alpha_3.$$

由题设 $(1, -2, 4, 0)^T$ 是方程组 $Ax = \beta$ 的解得

$$\beta = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3,$$

于是方程组 $By = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 即

$$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta - \alpha_4)y = \alpha_1 + 2\alpha_2,$$

成为

$$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)y = \alpha_1 + 2\alpha_2. \quad (1)$$

由 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的秩为 3 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 由此得到式(1)的系数矩阵的秩为 3, 于是对应的齐次方程组的解 $(2, 2, 1, -1)^T$ 即为这个齐次方程组的基础解系. 此外式(1)有特解 $(0, 2, 1, 0)^T$. 所以, 式(1), 即方程组 $By = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 的通解为

$$y = C(2, 2, 1, -1)^T + (0, 2, 1, 0)^T \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

附注 要记住: 齐次线性方程 $Ax = 0$ (其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, x 是 n 维未知列向量) 的基础解系中所包含的线性无关的解向量个数为 $n - r(A)$.

(21) 由于

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x^T Ax = x_1^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x^T \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x,
\end{aligned}$$

所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

由题设知

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} -1 & -b & -1 \\ -b & -a & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (因为 } \mathbf{B} \text{ 有特征值 } \lambda = 0 \text{)}, \\ \begin{vmatrix} 0 & -b & -1 \\ -b & 1-a & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (因为 } \mathbf{B} \text{ 有特征值 } \lambda = 1 \text{)}, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} -2b + 1 + b^2 = 0, \\ -2b - (1 - a) = 0. \end{cases} \text{ 解此方程组得 } a = 3, b = 1.$$

于是, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2$.

$$\text{记} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \text{ 即 } \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \text{ 则}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 \text{ (规范形).}$$

附注 题解中的以下两点值得注意:

(I) $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 中的 \mathbf{A} 不是实对称矩阵, 所以它不是二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵, 只有写成 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ (其中 \mathbf{B} 是实对称矩阵) 时, \mathbf{B} 才是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵.

(II) 计算 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ (其中 \mathbf{C} 是可逆矩阵, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$) 下的规范形, 总是对 $f(x_1, x_2, x_3)$ 施行配平方方法.

(22) (I) 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx, & y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) 由于 $EX = 1$, 所以

$$\begin{aligned} P(Y \geq EX) &= P(Y \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_Y(y) dy = \int_1^{+\infty} ye^{-y} dy = \\ &= - \int_1^{+\infty} y de^{-y} = -ye^{-y} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

由于

$$P(X > 2 \mid Y < 4) = \frac{P(X > 2, Y < 4)}{P(Y < 4)},$$

$$\text{其中, } P(X > 2, Y < 4) = \iint_{\substack{x > 2 \\ y < 4}} f(x, y) d\sigma$$

$$= \iint_{\Delta} e^{-y} d\sigma \text{ (其中 } \Delta \text{ 是如图答 7-22 阴影部分所示的三角形)}$$

$$= \int_2^4 dx \int_x^4 e^{-y} dy = \frac{1}{e^2} - \frac{3}{e^4}.$$

附注 关于 $f_X(x)$ 的以下计算是错误的:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x} (x > 0).$$

这一点应注意, 关于 $f_Y(y)$ 的计算也有同样说法.

(23) (I) 由于 $EX = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot \theta^2 + 3 \cdot (1-2\theta) = 3-4\theta$,

并且, 样本值的平均值 $\bar{x} = \frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$,

所以, 由矩估计法, 令 $EX = \bar{x}$, 即 $3-4\theta=2$ 得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$.

(II) 由题设知 $Y \sim B(n, \hat{\theta}^2) = B\left(n, \frac{1}{16}\right)$. 当 n 充分大时, 由中心极限定理(具体是棣莫弗-拉普拉斯定理)得

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{Y - \frac{n}{16}}{\sqrt{n \times \frac{1}{16} \times \frac{15}{16}}} \leq \frac{y - \frac{n}{16}}{\frac{\sqrt{15n}}{16}}\right)$$

$$\stackrel{\text{近似}}{\sim} \int_{-\infty}^{\frac{y - \frac{n}{16}}{\frac{\sqrt{15n}}{16}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

因此, 所求的参数为 $\mu = \frac{n}{16}$, $\sigma^2 = \frac{15n}{16^2}$.

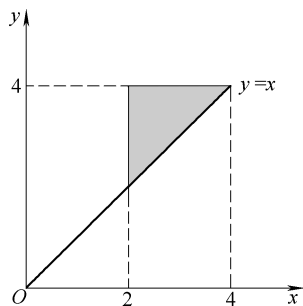
附注 计算关于随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的概率问题时, 总是引入标准化随机变量 $X^0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则 $X^0 \sim N(0, 1)$ (标准正态分布). 于是 X 的分布函数

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (\text{其中 } \Phi(u) \text{ 是标准正态分布函数}),$$

即

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

由此可知, 当 $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 时, $X \sim N(a, b^2)$. 本题中的参数就是如此得到的.



图答 7-22

模拟试题(八)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	A	B	A	B	B	B	B

(1) $f(x) = x |e^x - 1| \cdot |x - 1|$ 的可能不可导点为 $x=0, 1$.

由在点 $x=0$ 的某个去心邻域内,

$$f(x) = -x |x| \cdot \left| \frac{e^x - 1}{x} \right| (x - 1) = -x |x| \cdot \frac{e^x - 1}{x} (x - 1)$$

知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-|x| \cdot \frac{e^x - 1}{x} (x - 1) \right] = 0$, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

由于在点 $x=1$ 的某个邻域内, $f(x) = x(e^x - 1) |x - 1|$, 而

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[x(e^x - 1) \cdot \frac{|x - 1|}{x - 1} \right] \text{ 不存在, 所以 } f(x) \text{ 在点 } x=1 \text{ 处不可导.}$$

因此本题选(B).

附注 应记住函数 $|x - x_0|$ 在点 x_0 处不可导, 但函数 $(x - x_0) |x - x_0|$ 在点 x_0 处可导.

(2) 由于 $\max\{e^{-t}, e^t\} = \begin{cases} e^{-t}, & t < 0, \\ e^t, & t \geq 0. \end{cases}$ 所以

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \max\{e^{-t}, e^t\} dt = \begin{cases} \int_0^x e^{-t} dt, & x < 0, \\ \int_0^x e^t dt, & x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0, \\ e^x - 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{因此选(A).} \end{aligned}$$

附注 同样可以计算 $\int_{-\infty}^x \min\{e^{-t}, e^t\} dt$, 具体如下:

由于 $\min\{e^{-t}, e^t\} = \begin{cases} e^t, & t \leq 0, \\ e^{-t}, & t > 0, \end{cases}$ 所以

$$\int_{-\infty}^x \min\{e^{-t}, e^t\} dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x e^t dt, & x \leq 0, \\ \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^x e^{-t} dt, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 2 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

(3) 由 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n$ ($-1 < x \leq 1$) 知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x-a)^n$ 的收敛域为 $a-1 < x \leq a+1$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x-a)^n$ 在点 $x = a+1$ 处收敛, 而 $x > a+1$ 发散. 所以由题设得 $a+1=0$, 即 $a=-1$. 因此选(B).

附注 记住 $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$ 的麦克劳林展开式, 即

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad (-1 \leq x < 1),$$

对计算幂级数的收敛域与和函数等是十分有用的.

(4) 容易看到 $y_2 - y_1 = e^{-x}(\cos x + \sin x)$ 是 $y'' + py' + qy = 0$ 的特解, 从而

$$p = -[(-1+i) + (-1-i)] = 2, \quad q = (-1+i)(-1-i) = 2.$$

此外, 由题设知 e^x 是 $y'' + py' + qy = f(x)$, 即 $y'' + 2y' + 2y = f(x)$ 的特解, 所以

$$f(x) = (e^x)'' + 2(e^x)' + 2e^x = 5e^x.$$

因此选(A).

由于微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 有解 $y_2 = e^x + e^{-x} \cos x$, 其中, $e^{-x} \cos x$ 是 $y'' + py' + qy = 0$ 的特解, 所以由线性微分方程解的构造知, e^x 是 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的解.

(5) 由于 $A^T A x = 0$ 与 $A x = 0$ 是同解方程组, 所以 ξ_1, ξ_2 必是 $A^T A x = 0$ 的基础解系, 即②正确.

由于 $A x = 0$ 与 $B x = 0$ 都有基础解系 ξ_1, ξ_2 , 所以 ξ_1, ξ_2 也是 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的基础解系, 即

④正确. 因此选(B).

附注 ξ_1, ξ_2 未必是 $(A+B)x=0$ 的基础解系, 例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = 0$ 有相同的基础解系 $(0, 1)^T$, 但它不是 $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] x = 0$ 的基础解系, 所以(A)与(D)都不能选.

ξ_1, ξ_2 也未必是 B^* 的基础解系, 例如 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} x = 0$ 有基础解系 $(0, 1, 0)^T, (0, 0,$

$1)^T$, 但它不是 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^* x = 0$ 的基础解系. 这是因为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 的秩 $1 < 3-1$, 所以

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^*$ 的秩为 0. 从而 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^* x = 0$ 无基础解系. 因此(C)不能选.

$$(6) \text{ 由于 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

所以, $|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$ 有解 $\lambda = -2, 2, 3$, 从而 A 的最小特征值为 -2 , 因此选(B).

附注 题解中, 由于注意到 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 都是初等矩阵, 它们的三次方与四

次方分别左乘、右乘于 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 表明, 对 B 施行三次“交换第一、二行”的初等变换

后, 再施行四次“交换第二、三列”的初等变换, 所以很快获解.

(7) 记 $C_i = \{\text{第 } i \text{ 次取球取到的是白球}\} (i=1, 2)$, 则

$$A = \bar{C}_1 C_2, \quad B = \bar{C}_1 C_2 \cup C_1 C_2,$$

所以, $P(A) = P(\bar{C}_1 C_2) = P(\bar{C}_1)P(C_2 | \bar{C}_1) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$,

$$P(B) = P(\bar{C}_1 C_2) + P(C_1 C_2) = P(\bar{C}_1 C_2) + P(C_1)P(C_2 | C_1) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{3}{7}.$$

因此选(B).

附注 本题有两点值得注意:

(I) A 与 B 这两个随机事件是有区别的.

(II) 随机事件 $\{\text{第 } i \text{ 次取球取到的是白球}\} (i=1, 2, 3)$ 的概率是相等的, 都为 $\frac{3}{7}$.

$$(8) E(\bar{X} + S^2) = E(\bar{X}) + E(S^2) = EX + DX, \quad (1)$$

其中 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$ (由于 $xf(x)$ 是奇函数),

$$\begin{aligned} DX &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= E(T^2) \quad (\text{其中 } T \text{ 是服从参数为 } 1 \text{ 的指数分布, 即它的概率密度为} \end{aligned}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$= D(T) + (ET)^2 = 1 + 1 = 2.$$

将它们代入式(1)得 $E(\bar{X} + S^2) = 0 + 2 = 2$. 因此选(B).

附注 应记住以下结论:

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 其平均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则

$$E(\bar{X}) = EX, E(S^2) = DX.$$

二、填空题

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} - \frac{1}{3}$$

洛必达法则 $\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1+x)} - \frac{1}{3} = 0.$

由于 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续, 所以

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{\frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x^3}} - 2 \right] = e^0 - 2 = -1.$$

附注 本题题解的关键是先计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x^3}.$

(10) 由于 $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$, 所以

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{3} \left[(-1)^5 \frac{5!}{(x-1)^6} - (-1)^5 \frac{5!}{(x+2)^6} \right] = \frac{5!}{3} \left[\frac{1}{(x+2)^6} - \frac{1}{(x-1)^6} \right].$$

$$\text{从而 } f^{(5)}(0) = \frac{5!}{3} \left(\frac{1}{2^6} - 1 \right) = -\frac{315}{8}.$$

附注 $f^{(5)}(0)$ 也可以利用麦克劳林公式计算:

$$\begin{aligned} \text{由于 } f(x) &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x}{2} + \cdots - \left(\frac{x}{2} \right)^5 + o(x^5) \right] + [1 + x + \cdots + x^5 + o(x^5)] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^6} - 1 \right) x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

$$\text{所以, } f^{(5)}(0) = 5! \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^6} - 1 \right) = -\frac{315}{8}.$$

(11) 方程两边对 x 求偏导数得

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + \cos(xy) \cdot y + z + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\text{所以, } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz \cos(xy) + z^2}{1+xz}.$$

附注 如果要同时计算 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, 则从对方程两边求全微分入手, 具体如下:

$$\frac{1}{z} dz + \cos(xy) (y dx + x dy) + z dx + x dz = 0,$$

即
$$dz = -\frac{yz\cos(xy) + z^2}{1+xz}dx - \frac{xz\cos(xy)}{1+xz}dy,$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz\cos(xy) + z^2}{1+xz}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz\cos(xy)}{1+xz}.$$

(12) 由于 $\frac{P}{Q(P)} \frac{dQ(P)}{dP} = \varepsilon_p = 0.2$, 所以由增益函数 $R(P) = PQ(P)$ 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dR(P)}{dP} \right|_{Q=100\,000} &= \left[Q(P) + P \frac{dQ(P)}{dP} \right]_{Q=100\,000} \\ &= \left\{ Q(P) + Q(P) \left[\frac{P}{Q(P)} \frac{dQ(P)}{dP} \right] \right\}_{Q=100\,000} \\ &= 100\,000 + 100\,000 \times 0.2 = 120\,000, \end{aligned}$$

即当需求量为 100 000 件时, 价格每增加 1 元会使产品收益增加 120 000 元.

附注 要记住函数弹性的定义, 并理解它在经济学上的意义.

(13) 由于 $r \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix} = r(\mathbf{A}^*) + r(\mathbf{B}^*),$ (1)

其中, 由 $r(\mathbf{A}) = 1$, 即 $r(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ 的阶数 -1 知 $r(\mathbf{A}^*) = 1$; 由 $r(\mathbf{B}) = 2$, 即 $r(\mathbf{B}) < \mathbf{B}$ 的阶数 -1 知 $r(\mathbf{B}^*) = 0$. 将它们代入式(1)得

$$r \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1.$$

附注 应记住以下公式:

设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, \mathbf{A}^* 是它的伴随矩阵, 则

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\mathbf{A}) = n, \\ 1, & r(\mathbf{A}) = n-1, \\ 0, & r(\mathbf{A}) < n-1. \end{cases}$$

(14) $P(\max\{X, Y\} \leq 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1)$

$$= P(X \leq 1)P(Y \leq 1) = \left(\int_{-\infty}^1 f(t) dt \right)^2 = \left(\int_0^1 e^{-t} dt \right)^2 = (1 - e^{-1})^2.$$

附注 应记住以下公式:

设随机变量 X, Y 相互独立, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$, 则

$$Z_1 = \max\{X, Y\} \text{ 的分布函数 } F_{Z_1}(z) = F_X(z)F_Y(z);$$

$$Z_2 = \min\{X, Y\} \text{ 的分布函数 } F_{Z_2}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

三、解答题

$$\begin{aligned} (15) \int \frac{1}{\sin x \cos x \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\csc^2 2x - \frac{1}{2}}} \frac{d2x}{\sin^2 2x} = - \int \frac{1}{\sqrt{\cot^2 2x + \frac{1}{2}}} d\cot 2x \end{aligned}$$

附注 可考虑类似的不定积分 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx$, 解答如下:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} d(\sin x - \cos x) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} d(\sin x + \cos x) \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) + C.
 \end{aligned}$$

(16) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x) = 1$, 及

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^2 = 1$$

知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ 内连续.

由于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x \sin x - 2(1 - \cos x)}{x^3} = 2 \sin x \cdot \frac{x - 2 \tan \frac{x}{2}}{x^3} > 0,$$

$0 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时,

$$f'(x) = \frac{x \cos x^2 - \int_0^x \cos t^2 dt}{x^2} = \frac{\int_0^x (\cos t^2 - 2t^2 \sin t^2 - \cos t^2) dt}{x^2} < 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ 仅有极大值 $f(0) = 1$, 无极小值,

(17) 由 $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$ 知方程组 $\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases}$ 在 D 的内部无解, 即 $f(x, y)$ 在 D 的内部无可

能极值点. 下面计算 $f(x, y)$ 在 D 的边界 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 上的最值.

记 $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda[(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2]$, 则

$$F'_x = 2x + 2\lambda(x-1), \quad F'_y = 2y + 2\lambda(y-1).$$

于是, 由拉格朗日乘数法令

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} (1+\lambda)x - \lambda = 0, \\ (1+\lambda)y - \lambda = 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2, \end{cases}$$

解此方程组得 $x=y=0$, $x=y=2$. 由于

$$f(0, 0) = 0, \quad f(2, 2) = 8,$$

所以, $f(x, y)$ 在 C 上的最小值, 即在 D 上的最小值为 $f(0, 0) = 0$, 在 C 上的最大值, 即在 D 上的最大值为 $f(2, 2) = 8$.

附注 二元连续函数在闭区域上的最值计算方法见模拟试题(一)(18)解答中的附注.

(18) 由于 $x \rightarrow 0$ 时

$$x^2 \tan^2 \frac{x}{2} \sim \frac{1}{4} x^4,$$

$$1 - (1+x)^{\sin^3 x} = -[e^{\sin^3 x \ln(1+x)} - 1] \sim -\sin^3 x \ln(1+x) \sim -x^4,$$

$$\text{所以, } \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \tan^2 \frac{x}{2}}{1 - (1+x)^{\sin^3 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} x^4}{-x^4} = -\frac{1}{4}.$$

考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1,$$

所以上述幂级数的收敛半径为 1, 从而收敛区间为 $(-1, 1)$, 记其和函数为 $s(x)$, 则

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \quad (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } s(x) &= s(0) - \int_0^x \ln(1-t) dt = -\int_0^x \ln(1-t) dt \\ &= -\left[t \ln(1-t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{1-t} dt \\ &= -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) \quad (-1 < x < 1), \end{aligned}$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} = -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) \quad (-1 < x < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sin^{n+1} \alpha &= [-x \ln(1-x) + x + \ln(1-x)] \Big|_{x=\sin \alpha = -\sin \frac{1}{4}} \\ &= \sin \frac{1}{4} \cdot \ln\left(1 + \sin \frac{1}{4}\right) - \sin \frac{1}{4} + \ln\left(1 + \sin \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

附注 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$ 的和函数 $s(x)$ 也可以用以下方法计算: 在 $(-1, 1)$ 内有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} x^m = -x \ln(1-x) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} x^m + x \\ &= -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

$$(19) \quad \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} d\sigma, \quad (1)$$

$$\text{其中, } \iint_{D_1} xy d\sigma = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy dy = \int_0^2 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}, \quad (2)$$

$$\iint_{D_2} \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} d\sigma \stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} \frac{2r \sin \theta}{r^2 + 1} \cdot r dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r - \arctan r) \Big|_0^{2\cos\theta} \cdot \sin\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta \cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\arctan(2\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta \\
&= 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(2\cos\theta) \cdot d2\cos\theta \\
&= 2 + [\arctan(2\cos\theta) \cdot 2\cos\theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{1+4\cos^2\theta} d2\cos\theta \\
&= 2 - 2\arctan 2 - \frac{1}{2} \ln(1+4\cos^2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 - 2\arctan 2 + \frac{1}{2} \ln 5.
\end{aligned} \tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{4}{3} + 2 - 2\arctan 2 + \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{10}{3} - 2\arctan 2 + \frac{1}{2} \ln 5.$$

附注 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 也可计算如下:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} d\sigma, \\
&= \iint_D xy d\sigma + \iint_{D_2} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} - xy \right) d\sigma,
\end{aligned} \tag{4}$$

其中, $\iint_D xy d\sigma \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \cdot r dr$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta \cos\theta d\theta = 2\sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_2} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} - xy \right) d\sigma \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \left(\frac{2r\sin\theta}{r^2 + 1} - r^2 \sin\theta \cos\theta \right) r dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r - \arctan r) \Big|_0^{2\cos\theta} \sin\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^5\theta \sin\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta \cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\arctan(2\cos\theta) \sin\theta d\theta - \frac{2}{3} \\
&= 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(2\cos\theta) d2\cos\theta - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3} + \arctan(2\cos\theta) 2\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{1+4\cos^2\theta} d2\cos\theta \\
&= \frac{4}{3} - 2\arctan 2 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+4\cos^2\theta} d(1+4\cos^2\theta) \\
&= \frac{4}{3} - 2\arctan 2 - \frac{1}{2} \ln(1+4\cos^2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5. \quad (6)$$

将式(5)、式(6)代入式(4)得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{10}{3} - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5.$$

(20) (I) 方程组(A)的增广矩阵

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & a+4 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & -7 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right).$$

由于方程组(A)有无穷多解, 所以 $r(\bar{A}) = r(A) < 3$ (其中 A 是方程组(A)的系数矩阵), 从而有 $a+1=0$, 即 $a=-1$.

(II) 当 $a=-1$ 时, 方程组(A)与(B)组成的方程组为

$$(C) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1. \end{cases}$$

对方程组(C)的增广矩阵 \bar{C} 施行初等行变换:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7-3\lambda \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{7}-3\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{21}-\lambda \end{array} \right). \end{aligned}$$

由此可知, 方程(A)与(B)有公共解, 即方程组(C)有解时, $r(C) = r(\bar{C})$ (其中 C 是方

程组(C)的系数矩阵), 因此所求的 $\lambda = \frac{43}{21}$, 并且此时的公共解 $x_1 = -\frac{18}{7}$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{3}{7}$.

附注 设方程组 $A_1x = b_1$, $A_2x = b_2$ (其中 A_1, A_2 分别是 $m_1 \times n$ 与 $m_2 \times n$ 的矩阵, b_1, b_2 , 分别是 m_1 维与 m_2 维列向量), 则这两个方程组有公共解的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} A_1x = b_1, \\ A_2x = b_2 \end{cases}$$

有解.

(21) 由 A 是 3 阶实对称矩阵知, A^* 也是 3 阶实对称矩阵. 由题设知 $A^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以 A^* 有特征值 $\mu_1 = -1$, $\mu_3 = 1$, 且它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$.

由于 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$, 因此 A^* 的特征值除 $\mu_1 = \frac{|A|}{\lambda_1} = -1$, $\mu_3 = \frac{|A|}{\lambda_3} = 1$ 外, 还有 $\mu_2 = \frac{|A|}{\lambda_2} = -1$, 记它对应的特征向量为 $\alpha_2 = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则它分别与 α_1, α_3 正交, 于是有

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 0, \\ a_1 + a_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $(0, 1, 0)^T$, 故可取 $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$. 由于 A 的对应 λ_i 的特征向量即为 A^* 的对应 μ_i 的特征向量 ($i=1, 2, 3$), 所以 A 对应 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ 的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是正交向量组, 现将它们单位化:

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T,$$

$$\xi_2 = \alpha_2 = (0, 1, 0)^T.$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T,$$

记 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (正交矩阵), 则在正交变换 $x = Qy$ 下

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

且

$$Q^T A^* Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

附注 题解中有以下三点值得注意:

(I) 当用正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, \mathbf{Q} 是正交矩阵) 将二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (其中 \mathbf{A} 是 n 阶实对称矩阵) 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

时, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 必都为 \mathbf{A} 的特征值, 从而

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr} \mathbf{A}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\mathbf{A}|.$$

(II) 设 \mathbf{A} 是 n 阶可逆矩阵, α 是 \mathbf{A} 的对应特征值 λ 的特征向量, 则 \mathbf{A}^* 有特征值 $\mu = \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$, 且 α 是 \mathbf{A}^* 的对应 μ 的特征向量.

(III) \mathbf{A}^* 也可计算如下:

由于 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此, 由 \mathbf{A}^* 的定义可得 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(22) (I) 由于 (U, V) 关于 U 的边缘概率密度为

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv = \begin{cases} \int_0^{2u} dv, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2u, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

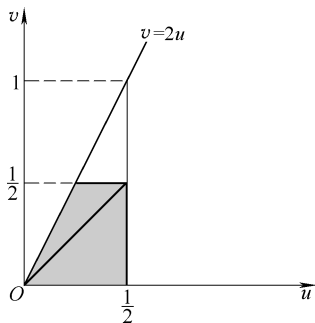
所以,

$$P\left(V \leq \frac{1}{2} \mid U \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(U \leq \frac{1}{2}, V \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(U \leq \frac{1}{2}\right)}, \quad (1)$$

其中, $P\left(U \leq \frac{1}{2}, V \leq \frac{1}{2}\right) = \iint_{\substack{u \leq \frac{1}{2} \\ v \leq \frac{1}{2}}} f(u, v) d\sigma$

$$= \iint_{\Delta} d\sigma \quad (\text{其中 } \Delta \text{ 如图答 8-22 的带阴影梯形所示})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16},$$



图答 8-22

$$P\left(U \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_U(u) du = \int_0^{\frac{1}{2}} 2u du = \frac{1}{4}.$$

将它们代入式(1)得

$$\frac{1}{3} P\left(V \leq \frac{1}{2} \mid U \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = 0.25.$$

于是, $P(X = -1, Y = 1) = P(X = 1, Y = -1) = P(X = 0, Y = 1) = 0.25$.

记 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{matrix} & Y \\ X \end{matrix}$		-1	1
-1		p_1	0.25
0		p_2	0.25
1		0.25	p_3

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + 0.75 = 1, \\ (-1) \cdot (p_1 + 0.25) + 0 \cdot (p_2 + 0.25) + 1 \cdot (0.25 + p_3) = 0.2, \\ (-1) \cdot (p_1 + p_2 + 0.25) + 1 \cdot (0.25 + 0.25 + p_3) = 0.4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 0.25, \\ -p_1 + p_3 = 0.2, \\ -p_1 - p_2 + p_3 = 0.15. \end{cases}$$

因此, (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	Y		
		-1	1
-1		0	0.25
0		0.05	0.25
1		0.25	0.2

$$(\text{II}) \operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY,$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } E(XY) &= (-1) \times (-1) \times 0 + (-1) \times 1 \times 0.25 + 0 \times (-1) \times 0.05 + 0 \times 1 \times 0.25 + \\ &\quad 1 \times (-1) \times 0.25 + 1 \times 1 \times 0.2 \\ &= -0.3, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \operatorname{Cov}(X, Y) = -0.3 - 0.2 \times 0.4 = -0.38.$$

附注 本题是连续型随机变量与离散型随机变量结合的综合题, 需计算许多量值, 因此对题目审视后应确定计算各个量值的先后顺序:

先计算 $P\left(V \leq \frac{1}{2} \mid U \leq \frac{1}{2}\right)$, 为此需先算出关于 U 的边缘概率密度 $f_U(u)$; 然后确定 (X, Y) 的概率分布表, 将已知的概率填入, 对未知的概率用 p_1, p_2, p_3 等表示, 并利用已知条件逐一确定这些未知概率; 最后根据 (X, Y) 的概率分布算出 $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

(23) 由于关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{\theta}^{+\infty} \frac{3}{\theta^3} x^2 e^{-(y-\theta)} dy, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\text{其中, } \int_{\theta}^{+\infty} \frac{3}{\theta^3} x^2 e^{-(y-\theta)} dy = -\frac{3}{\theta^3} x^2 e^{-(y-\theta)} \Big|_{y=\theta}^{y=+\infty} = \frac{3}{\theta^3} x^2, \text{ 所以,}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3} x^2, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{由于 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{3}{\theta^3} x^3 dx = \frac{3}{4} \theta, \text{ 所以由矩估计法, 令 } EX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\text{记}}{=} \bar{X},$$

$$\text{即 } \frac{3}{4} \theta = \bar{X}. \text{ 由此得到 } \theta \text{ 的矩估计量 } \hat{\theta} = \frac{4}{3} \bar{X}.$$

$$\text{于是, } D(\hat{\theta}) = D\left(\frac{4}{3} \bar{X}\right) = \frac{16}{9} D\bar{X} = \frac{16}{9n} DX$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16}{9n} [E(X^2) - (EX)^2] = \frac{16}{9n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \frac{9}{16} \theta^2 \right] \\
 &= \frac{16}{9n} \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^4 dx - \frac{1}{n} \theta^2 = \frac{16}{15n} \theta^2 - \frac{1}{n} \theta^2 = \frac{1}{15n} \theta^2.
 \end{aligned}$$

附注 要记住以下结论:

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X (具有数学期望与方差) 的简单随机样本, 则它的均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 与方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 满足 $E(\bar{X}) = EX, D(\bar{X}) = \frac{1}{n} DX, E(S^2) = D(X)$.

模拟试题(九)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	D	D	B	A	B	D	B	C

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y^{(n)} &= \left[\frac{1}{(x+1)^2} \right]^{(n)} = - \left[\left(\frac{1}{x+1} \right)' \right]^{(n)} = - \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n+1)} \\
 &= -(-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.
 \end{aligned}$$

所以选(D).

附注 应记住公式

$$\left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \quad (a \neq 0).$$

(2) 由于 $f''_{xx}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} f'_x(x, y_0) \Big|_{x=x_0}$, 所以由 $f''_{xy}(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在知, $f'_x(x, y_0)$ 在点 x_0 处可微. 因此选(D).

附注 当题中所给的三个 2 阶偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续时, 选项(A), (B), (C) 都正确, 但仅假定这三个 2 阶偏导数在点 (x_0, y_0) 处存在, 未必能推出这三个选项正确.

(3) 记 $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} dx$, 则 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\{a_n\}$ 单调减少并且收敛于零, 所以所给级数收敛. 但是由于 $-1 < \alpha < 0$ 时, 由 $a_n > \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{n}} x^\alpha dx = \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha+1)} \left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha+1} (n=1, 2, \dots)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha+1}$ 发散, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} dx \right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 从而所给级数条件收敛. 因此选(B).

附注 由莱布尼茨定理判定交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (其中 $\{a_n\}$ 是正项数列) 为收敛时, 其可能是绝对收敛, 也可能是条件收敛. 为了确定它们, 必须考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

(4) 欲使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解, 必须

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x),$$

即 $\lambda[y'_1 + p(x)y_1] + \mu[y'_2 + p(x)y_2] = q(x)$. 由此得到

$$(\lambda + \mu)q(x) = q(x) \quad (\text{这里利用 } y_1, y_2 \text{ 是 } y' + p(x)y = q(x) \text{ 的两个特解}),$$

即

$$\lambda + \mu = 1 \text{ (由于 } q(x) \text{ 不恒为零).} \quad (1)$$

此外, 欲使 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 与上同样可得

$$\lambda - \mu = 0. \quad (2)$$

由式(1), 式(2)得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. 因此选(A).

附注 应记住一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解公式:

$$y = e^{-\int p(x) dx} (C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx),$$

其中, 不定积分都表示被积函数的一个原函数.

(5) 矩阵方程 $AX = B$ 有无穷多解的充分必要条件为

$$r(A : B) = r(A) < n.$$

因此选(B).

附注 应记住: 对矩阵方程 $AX = B$ 来说, $r(A : B) = r(A) = n$, $r(A : B) = r(A) < n$, 以及 $r(A : B) > r(A)$ 分别是该矩阵方程有唯一解, 有无穷多解, 以及无解的充分必要条件.

(6) 实对称矩阵 A, B 合同的充分必要条件是分别以 A, B 为矩阵的二次型有相同的规范形. 因此选(D).

附注 (I) 选项(A)是 A 与 B 合同的必要条件而不是充分条件, 而选项(B), (C)既不是必要条件, 也不是充分条件.

(II) 两个 n 阶实对称矩阵 A, B 合同的充分必要条件有两种:

(i) A, B 的正、负特征值个数分别相等(当某个特征值有 k 重时, 按 k 个计算);

(ii) 以 A, B 为矩阵的二次型有相同的规范形.

(7) 由于 $f(x)$ 是概率密度, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 即

$$a \int_{-\infty}^1 f_1(x) dx + b \int_1^{+\infty} f_2(x) dx = 1. \quad (1)$$

由 $f_1(x)$ 是 $X \sim N(1, 1)$ 的概率密度知, $\int_{-\infty}^1 f_1(x) dx = \frac{1}{2}$. 由 $f_2(x)$ 是 Y 的概率密度知

$\int_1^{+\infty} f_2(x) dx = 1$. 将它们代入式(1)得 $\frac{1}{2}a + b = 1$. 因此选(B).

附注 题解中利用了以下结论:

(I) 设 $X \sim N(a, \sigma^2)$, 则它的概率密度 $f(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

(II) 设 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)}, & x \geq a, \\ 0, & x < a \end{cases} (\lambda > 0)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

(8) 由于 $EX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$, 所以, 当 $(4-a)S^2 - 2a\bar{X}^2$ 为 $\frac{1}{\lambda^2}$ 的无偏估计量时, a 必须

满足

$$E[(4-a)S^2 - 2a\bar{X}^2] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } E[(4-a)S^2 - 2a\bar{X}^2] &= (4-a)E(S^2) - 2aE(\bar{X}^2) \\ &= (4-a)D(X) - 2a[D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2] \\ &= (4-a)\frac{1}{\lambda^2} - 2a\left[\frac{1}{n}D(X) + (EX)^2\right] \\ &= (4-a)\frac{1}{\lambda^2} - 2a\left(\frac{1}{n\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$(4-a)\frac{1}{\lambda^2} - 2a\left(\frac{1}{n\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \text{即 } a = \frac{3n}{3n+2}.$$

因此选(C).

附注 要记住以下的结论.

设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 是来自总体 X (数学期望 EX 与方差 DX 都存在) 的简单随机样

本, 记其均值为 \bar{X} , 方差为 S^2 , 即 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则

$$E(\bar{X}) = EX, \quad D(\bar{X}) = \frac{1}{n}DX, \quad E(S^2) = DX.$$

二、填空题

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{nx}} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{此外, } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{1+n} - \sqrt{n})^{\sqrt{2+n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{1+n} - \sqrt{n})}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}}},$$

$$\text{其中, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{1+n} - \sqrt{n})}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{1+n} - \sqrt{n})^{\sqrt{2+n}} = e^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

于是由式(1), 式(2)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + e^{nx}} + (1 + \sqrt{1+n} - \sqrt{n})^{\sqrt{2+n}} \right] = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{2}}, & x < 0, \\ \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}}, & x = 0, \\ e^{\frac{1}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

附注 由于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{nx}}$ 与 x 取值有关, 所以应分 $x < 0$, $x = 0$ 以及 $x > 0$ 三种情况计算

这个极限.

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \int \frac{1}{x \sqrt{4x^2 - 1}} dx & \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} - \int \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} dt = -\arcsin \frac{t}{2} + C \\
 & = -\arcsin \frac{1}{2x} + C.
 \end{aligned}$$

附注 本题是无理函数积分, 也可以令 $2x = \sec t$ 进行计算:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x \sqrt{4x^2 - 1}} dx & = \int \frac{1}{\frac{1}{2} \sec t \tan t} \cdot \frac{1}{2} \sec t \tan t dt \\
 & = \int dt = t + C = \arccos \frac{1}{2x} + C.
 \end{aligned}$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x} f(e^{xy}, \sin x^2) = f'_u \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + f'_v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sin x^2 = y e^{xy} \cdot f'_u + 2x \cos x^2 \cdot f'_v.$$

附注 计算多元复合函数的偏导数时, 应先画出该函数与自变量之间的复合关系图, 例如本题的关系图为

$$z = f(e^{xy}, \sin x^2) = f(u, v) \quad \begin{array}{c} x \\ \swarrow \quad \searrow \\ u \quad y \\ \swarrow \quad \searrow \\ v \quad x \end{array}$$

$$(12) \quad \text{记 } u_n(x) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^{2n}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}} x^{2n+2}}{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^{2n}} \right| \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} (n+2)} \right] x^2 = \frac{e}{e} \cdot 1 \cdot x^2 = x^2,
 \end{aligned}$$

所以, 所给幂级数的收敛区间为 $\{x \mid x^2 < 1\} = (-1, 1)$.

$$\text{当 } x = -1, 1 \text{ 时, 所给幂级数成为级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \right] = \frac{1}{e}, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ 发散. 从而所给幂级数的收敛域为 } (-1, 1).$$

附注 所给幂级数是缺项幂级数. 对于缺项幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域可按以下步骤计算:

$$(I) \quad \text{计算 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|, \text{ 设其值为 } R(x), \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 的收敛区间为 } \{x \mid R(x) < 1\} \stackrel{\text{记}}{=}$$

$(-a, a)$.

(II) 确定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 $x = -a, a$ 处的收敛性, 即判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-a)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 的收敛性, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $(-a, a)$ 及收敛的点 $x = -a$ 或 $x = a$ 之并集.

(13) 由 $r(A) + r(B) - 3 \leq r(AB)$ 得 $r(A) \leq 2$, 所以

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda - 3) = 0.$$

因此 $\lambda = 3$.

附注 应记住关于矩阵秩的以下两个不等式:

(I) 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 则

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

(II) 设 A, B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times l$ 矩阵, 则

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

$$(14) P(A-C | AB \cup C) = \frac{P((A-C)(AB \cup C))}{P(AB \cup C)},$$

其中,

$$P((A-C)(AB \cup C)) = P(A \bar{C}(AB \cup C))$$

$$= P(A \bar{B} \bar{C}) = P(A)P(B)(1-P(C)) = 0.1,$$

$$P(AB \cup C) = P(AB) + P(C) - P(ABC)$$

$$= P(A)P(B) + P(C) - P(A)P(B)P(C) = 0.6.$$

$$\text{所以 } P(A-C | AB \cup C) = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}.$$

附注 对于比较复杂的随机事件概率, 总是利用简单随机事件概率和概率计算公式计算, 概率计算公式主要有:

设 A, B 都是事件, 则

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); \text{ (逆概公式)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), \text{ (加法公式)}$$

特别当 A, B 互不相容时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B|A), & P(A) > 0, \\ P(B)P(A|B), & P(B) > 0. \end{cases} \text{ (乘法公式)}$$

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个完全事件组, 则当 $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, 对任意随机事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i), \text{ (全概率公式)}$$

三、解答题

$$(15) \text{ 由于 } \varphi'(\psi(x)) \Big|_{x=0} = \varphi'(\psi(0)) = \varphi'(0),$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

所以,

$$\varphi'(\psi(x)) \Big|_{x=0} = \varphi'(0) = 1.$$

$$\begin{aligned} [\varphi(\psi(x))]'\Big|_{x=0} &= \varphi'(\psi(x)) \Big|_{x=0} \cdot \psi'(x) \Big|_{x=0} \\ &= \psi'(0) \text{ (这里利用以上的计算结果 } \varphi'(\psi(x)) \Big|_{x=0} = 1 \text{)}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{x} = 1,$$

所以,

$$[\varphi(\psi(x))]\Big|_{x=0}' = \psi'(0) = 1.$$

附注 题解中, 以下两点值得注意:

(I) $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都是分段函数, 但现在仅计算在点 $x=0$ 处的复合函数的导数, 所以不必写出复合函数的具体表达式.

(II) $\varphi'(\psi(x))$ 与 $[\varphi(\psi(x))]'$ 是两个不同的概念, 应予以区分.

(16) 由于 $\int_0^x f(x-t, y) dt = \int_0^x f(u, y) du$ (其中 $u = x-t$), 所以所给等式成为

$$f(x, y) = y + \int_0^x f(u, y) du.$$

由此可得 $f(0, y) = y$, $f'_x(x, y) = f(x, y)$, 所以 $f(x, y) = ye^x$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x} f(x, y^2) d\sigma &= \iint_D \sqrt{x} \cdot y^2 e^x d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{x} e^x \cdot y^2 dy = \int_0^1 \sqrt{x} e^x \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 e^x dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 de^x = \frac{2}{3} \left(x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx \right) \\ &= \frac{2e}{3} - \frac{4}{3} \int_0^1 x de^x = \frac{2e}{3} - \frac{4}{3} \left(x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \\ &= -\frac{2e}{3} + \frac{4}{3}(e-1) = \frac{2e}{3} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

附注 我们多次求解过方程 $y(x) = \int_0^x g(x, y(t)) dt + h(x)$ (其中, g, h 都是已知的连续函数), 题中所给的

$$f(x, y) = y + \int_0^x f(x-t, y) dt$$

也是同种类型的方程(但其中的未知函数是二元函数 $f(x, y)$), 因此可用同样的方法求解,

只需用求偏导数代替求导数即可.

(17) 由题设“A 市场的价格对 B 市场的价格弹性为 2”得

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{dp_1}{dp_2} = 2, \text{ 即 } p_1 = kp_2^2.$$

将 $p_1 \Big|_{p_2=1} = \frac{3}{16}$ 代入上式得 $k = \frac{3}{16}$, 所以 $p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 = 0$.

总利润函数为

$$\begin{aligned} L(p_1, p_2) &= q_1 p_1 + q_2 p_2 - C \\ &= (3 - 0.5p_1)p_1 + (2 - 3p_2)p_2 - 5 - 2 \left[3 - 0.5p_1 + \frac{41}{12}(2 - 3p_2) \right] \\ &= -0.5p_1^2 + 4p_1 - 3p_2^2 + \frac{45}{2}p_2 - \frac{74}{3}. \end{aligned}$$

于是本题即为在约束条件 $p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 = 0$ 下, 计算 $L(p_1, p_2)$ 的最大值问题, 故采用拉格朗日乘数法.

作拉格朗日函数

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2) &= L(p_1, p_2) + \lambda \left(p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 \right) \\ &= -0.5p_1^2 + 4p_1 - 3p_2^2 + \frac{45}{2}p_2 - \frac{74}{3} + \lambda \left(p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 \right), \end{aligned}$$

$$\text{且令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p_2} = 0, \\ p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -p_1 + 4 + \lambda = 0, \\ -6p_2 + \frac{45}{2} - \frac{3}{8}\lambda p_2 = 0, \\ p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

由式(1), 式(3)得 $\lambda = p_1 - 4 = \frac{3}{16}p_2^2 - 4$, 代入式(2)得

$$-6p_2 + \frac{45}{2} - \frac{3}{8} \left(\frac{3}{16}p_2^2 - 4 \right) p_2 = 0,$$

即 $p_2^3 + 64p_2 - 320 = 0$, 或 $(p_2 - 4)(p_2^2 + 4p_2 + 80) = 0$, 所以 $p_2 = 4$, 代入式(3)得 $p_1 = 3$.

由以上计算, $L(p_1, p_2)$ 在约束条件 $p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 = 0$ 下有唯一的可能极值点, 而根据问题的实际意义知, 在约束条件 $p_1 - \frac{3}{16}p_2^2 = 0$ 下, $L(p_1, p_2)$ 必有最大值. 因此, A 市场产品售价为 3, B 市场产品售价为 4 时, 总利润最大.

附注 (I) 要弄清一个变量 y 对另一个变量 x 的弹性 ε 的概念:

$$\varepsilon = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

(II) 要熟练掌握计算多元函数条件极值的拉格朗日乘数法.

(18) 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{b} \int_x^b f(t) dt$, 则 $F(x)$ 在 $[0, b]$ 上连续, 在 $(0, b)$ 内可导, 且

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) - \frac{1}{b} \int_x^b f(t) dt + \frac{x}{b} f(x) \\ &= \frac{b-x}{b} f(x) - \frac{1}{b} \int_x^b f(t) dt + \frac{2x}{b} f(x) \\ &= \frac{1}{b} \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + \frac{2x}{b} f(x) > 0 \end{aligned}$$

(由于 $f(u)$ 单调减少, 所以 $f(x) - f(t) \geq 0$, 且仅在 $t = x$ 处取等号, 所以 $\int_x^b [f(x) - f(t)] dt > 0$, 此外 $\frac{2x}{b} f(x) \geq 0$), 即函数 $F(x)$ 在 $[0, b]$ 上单调增加, 所以

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } \int_0^a f(x) dx > \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \quad (0 < a < b < 1).$$

附注 以下是证明定积分不等式的常用方法:

将某个定积分的上限及与此上限相同的字母都换成 x , 转化为函数不等式, 然后用导数方法证明这个函数不等式, 由此推得所给的定积分不等式.

(19) (I) 由于 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \quad (x \in (-1, 1])$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x^2)^n = x \ln(1+x^2),$$

且其成立范围为 $[-1, 1]$.

由此可知, 和函数 $s(x) = x \ln(1+x^2)$, 它的定义域为 $[-1, 1]$.

(II) 记 $F(x) = s(x) - \frac{1}{2}$, 则 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 在 $(-1, 1)$ 内可导且

$$F'(x) = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} > 0,$$

此外, $F(-1) = -\ln 2 - \frac{1}{2} < 0$, $F(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$, 所以方程 $F(x) = 0$, 即 $s(x) = \frac{1}{2}$ 在 $[-1, 1]$ 有且仅有一个实根.

附注 题解中有以下两点值得注意:

(I) 题中利用公式 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$ 计算幂级数的和函数, 并确定和函数的定义域, 十分快捷.

(II) 当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根;

当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内单调, 且 $f(a)f(b) < 0$ 时, 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且只有一个实根.

(20)(I) 由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} B.$$

由 $f(\lambda) = |\lambda E_3 - B|$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -a & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(1+\lambda) & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -a & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -a & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -(1+a) & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)[\lambda^2 - \lambda - (1+a)] \end{aligned}$$

知, 方程 $f(\lambda) = 0$ 不可能有三重根. 这是因为, 如有三重根, 则

$$(\lambda+1)[\lambda^2 - \lambda - (1+a)] = (\lambda+1)^3,$$

但 $\lambda^2 - \lambda - (1+a) = (\lambda+1)^2$ 是不可能的. 所以只需考虑方程 $f(\lambda) = 0$ 有二重根的情形:

(1) $\lambda = -1$ 是方程 $f(\lambda) = 0$ 的二重根, 则 $\lambda = -1$ 必是 $\lambda^2 - \lambda - (1+a) = 0$ 的根, 由此推出 $a = 1$. 于是

$$r(-E - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{的秩} = 1 = 3 - 2 \text{ (即矩阵 } B \text{ 的阶数与 } \lambda = -1 \text{ 重数之差)},$$

所以此时 B 可相似对角化, 由于 $A \sim B$, 所以此时 A 可相似对角化.

(2) $\lambda = -1$ 不是方程 $f(\lambda) = 0$ 的二重根, 则 $\lambda^2 - \lambda - (1+a) = 0$ 有二重根. 由此推出 $a = -\frac{5}{4}$. 此时方程 $f(\lambda) = 0$ 的二重根为 $\lambda = \frac{1}{2}$. 于是

$$r\left(\frac{1}{2}E - B\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{的秩} = 2 \neq 3 - 2 \text{ (即矩阵 } B \text{ 的阶数与 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 重数之差)},$$

所以此时 B 不可相似对角化, 由于 $A \sim B$, 所以此时 A 不可相似对角化.

综上所述, $a = -\frac{5}{4}$ 时, A 不可相似对角化.

附注 设 A 是 n 阶矩阵, 则 A 可相似对角化的充分必要条件有下列两种:

(I) A 有 n 个线性无关的特征向量;

(II) A 的每个特征值 λ_i (即特征方程 $|\lambda E_n - A| = 0$ 的根) 都满足 $r(\lambda_i E_n - A) = n - n_i$ (其中 n_i 是 λ_i 的重数).

本题的求解, 就是从利用 (II) 入手的.

(21) (I) 由题设知, A 有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 从而与 λ_1 对应的 A^* 的特征值 $\mu_1 = \frac{|A|}{\lambda_1} = 1$, 所以由 $A^* \alpha = \alpha$ 知 $\mu_1 = 1$ 对应的 A^* 的特征向量为 $\alpha = (1, 1, -1)^T$. 由此可知 A 的对应 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 α .

设 A 的对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则由 A 是实对称矩阵知 β 与 α 正交, 即

$$b_1 + b_2 - b_3 = 0.$$

故可取 β 为这个方程的基础解系, 即

$$\beta_1 = (-1, 1, 0)^T, \beta_2 = (1, 0, 1)^T.$$

将 α, β_1, β_2 正交化:

$$\eta_1 = \alpha = (1, 1, -1)^T,$$

$$\eta_2 = \beta_1 = (-1, 1, 0)^T,$$

$$\eta_3 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)} \eta_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T,$$

将 η_1, η_2, η_3 单位化:

$$\xi_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

$$\xi_2 = \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T,$$

$$\xi_3 = \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

它们是 A 的分别对应 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的特征向量, 于是所求的正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

由于

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

所以, $A = Q \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} Q^T$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(II) $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}y_1, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases} \quad \text{或} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z}, \text{ 则}$$

$$2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \text{ (规范形).}$$

从而, $f(x_1, x_2, x_3)$ 在可逆线性变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \mathbf{z}$$

下, 化为规范形, 即

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

附注 (I) 设 \mathbf{A} 是 n 阶可逆矩阵, 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 则 \mathbf{A} 的伴随矩阵 \mathbf{A}^* 有特征值 $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(II) 要熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法及由正交变换与标准形计算二次型矩阵的方法.

(22) (I) 由于 $F_Z(z) = P(Z \leq z)$,

其中, $P(Z \leq z) = P(XY \leq z)$

$$\begin{aligned}
&= P(Y = -1)P(XY \leq z | Y = -1) + P(Y = 0)P(XY \leq z | Y = 0) + \\
&\quad P(Y = 1)P(XY \leq z | Y = 1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} [P(X \geq -z) + P(0 \leq z) + P(X \leq z)] \quad (\text{利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \int_{-z}^{+\infty} e^{-x} dx, & z < 0, \\ \frac{1}{3} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} dx + 1 + \int_0^z e^{-x} dx \right), & z \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} e^z, & z < 0, \\ 1 - \frac{1}{3} e^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{所以, } F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^z, & z < 0, \\ 1 - \frac{1}{3} e^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$$

$$(\text{II}) \operatorname{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - EX \cdot E(X^2),$$

$$\text{其中, } EX = 1, E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = 1 + 1^2 = 2,$$

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^3 de^{-x} \\ &= - \left(x^3 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - 3 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \right) = 3 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= 3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = 3E(X^2). \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \operatorname{Cov}(X, X^2) = 3E(X^2) - E(X)^2 = 2E(X^2) = 4.$$

附注 由于 $Z = XY$ 是连续型随机变量与离散型随机变量之积, 所以要计算它的分布函数应从定义出发, 即从计算概率

$$P(Z \leq z) = P(XY \leq z)$$

入手.

(23) (I) 由于 \bar{X} 与 S^2 相互独立, 所以 \bar{X}^2 与 S^4 相互独立, 因此

$$E(\bar{X}^2 S^4) = E(\bar{X}^2) E(S^4), \quad (1)$$

其中, 由 $E(\bar{X}) = EX = 0$, $D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{1}{n}$ 得

$$E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2 = \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

此外, $E(S^2) = D(X) = 1$, 且由 $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ 知 $D(S^2) = \frac{1}{(n-1)^2} D((n-1)S^2)$

$$= \frac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n-1}, \text{ 所以}$$

$$E(S^4) = D(S^2) + [E(S^2)]^2 = \frac{2}{n-1} + 1^2 = \frac{n+1}{n-1}. \quad (3)$$

将式(2), 式(3)代入式(1)得

$$E(\bar{X}^2 S^4) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{n+1}{n(n-1)}.$$

$$(\text{II}) \quad D(\bar{X}^2) = E(\bar{X}^4) - [E(\bar{X}^2)]^2 = E(\bar{X}^4) - \frac{1}{n^2}, \quad (4)$$

其中, 由于 $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 所以

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{n}} e^{-\frac{t^2}{2 \cdot \frac{1}{n}}} dt \stackrel{\text{令 } u = \frac{t}{\sqrt{1/n}}}{=} \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= -\frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^3 de^{-\frac{u^2}{2}} = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \\ &= \frac{3}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{3}{n^2} E(U^2) \quad (\text{其中 } U \sim N(0, 1)) \\ &= \frac{3}{n^2} [DU + (EU)^2] = \frac{3}{n^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得

$$D(\bar{X}^2) = \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

附注 应记住以下结论:

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

则 $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 并且

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S^2) = \sigma^2, \quad D(S^2) = \frac{2}{n-1} \sigma^4.$$

模拟试题(十)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	A	D	B	C	A	A	D

(1) 由 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续及 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ 知 $f(1) = f'(1) = 0$. 于是, 由 $f''(x) > 0$ 知 $f'(x) > f'(1) = 0 (x > 1)$, 且 $f(x) > f(1) = 0 (x > 1)$. 从而, 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 单调增加且大于零. 因此选(C).

附注 应记住以下结论:

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A$, 则

$$f(x_0) = 0, f'(x_0) = A.$$

(2) 对 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ 两边关于 y 积分得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x), \quad (1)$$

特别有

$$z'_x(x, 0) = \varphi(x). \quad (2)$$

对 $z(x, 0) = x^2$ 两边关于 x 求导得

$$z'_x(x, 0) = 2x. \quad (3)$$

于是, 由式(2), 式(3)得 $\varphi(x) = 2x$, 将它代入式(1)得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x.$$

从而, 上式两边关于 x 积分得

$$z = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x^2 + \psi(y), \quad (4)$$

特别有 $z(0, y) = \psi(y)$, 故由题设 $z(0, y) = y$ 得 $\psi(y) = y$. 将它代入式(4)得 $z(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x^2 + y$. 因此选(A).

附注 在不定积分中, 对 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 有

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (\text{其中 } C \text{ 是任意常数}).$$

对 $g(x, y)$ 关于 x 的原函数 $G_1(x, y)$ 有

$$\int g(x, y) dx = G_1(x, y) + \varphi(y) \quad (\text{其中 } \varphi(y) \text{ 是 } y \text{ 的任意函数}).$$

同样, 对 $g(x, y)$ 关于 y 的原函数 $G_2(x, y)$ 有

$$\int g(x, y) dy = G_2(x, y) + \psi(x) \quad (\text{其中 } \psi(x) \text{ 是 } x \text{ 的任意函数}).$$

(3) 由于 D 关于直线 $y=x$ 对称, 所以

$$\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} d\sigma = \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} dx, \quad (1)$$

即

$$\begin{aligned} 2 \iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} d\sigma &= \iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} d\sigma + \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} d\sigma \\ &= \iint_D (a+b) d\sigma = \pi(a+b), \end{aligned}$$

所以 $\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} d\sigma = \frac{\pi}{2}(a+b)$. 因此本题选(D).

附注 式(1)证明如下:

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称, 函数 $\frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} - \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)}$ 在对称点 (x, y) 与 (y, x) 处的值互为相反数, 所以

$$\iint_D \left[\frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} - \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} \right] d\sigma = 0,$$

从而

$$\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} d\sigma = \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} d\sigma.$$

(4) 考虑选项(B). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ 矛盾, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一发散. 因此选(B).

附注 可用例子说明选项(A)、(C)及(D)都不能选.

设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 所以(A)不能选.

设 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 所以(C)不能选.

设 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以(D)不能选.

(5) 显然, $Ax=0$ 的解 x_0 可使 $A^T Ax_0=0$, 即 x_0 也是方程组 $A^T Ax=0$ 的解. 反之, 设 $A^T Ax=0$ 有解 ξ , 则

$$\xi^T A^T A \xi = 0, \text{ 即 } (A\xi)^T (A\xi) = 0. \quad (1)$$

设 $A\xi = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则由 A 是实矩阵, ξ 是实向量知 b_1, b_2, \dots, b_n 都是实数. 于是由式(1)得

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 0, \text{ 从而 } b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0, \text{ 即 } A\xi = 0.$$

由此可知, ξ 也是方程 $Ax=0$ 的解.

因此选(C).

附注 题解中,证明了以下结论:

设 A 是 n 阶实矩阵, 则 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 是同解方程组, 由此也推得 $r(A^T A) = r(A)$. 这结论可推广为:

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times l$ 矩阵, 则 $Bx = 0$ 与 $ABx = 0$ 是同解方程组的充分必要条件是 $r(AB) = r(B)$.

(6) 由题 $r(A^*) = 4 - 3 = 1$, 从而 $r(A) = 4 - 1 = 3$. 所以 A 的特征值中有且仅有三个不为零. 由此推得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准形应形如 $a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2$ (a_1, a_2, a_3 全不为零). 因此选(A).

附注 题解中利用了以下两个结论:

(I) 设 A 是 n 阶矩阵, A^* 是它的伴随矩阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n - 1, \\ 0, & r(A) < n - 1. \end{cases}$$

(II) 设 A 是实对称矩阵, 则 A 可正交相似对角化, 且对角矩阵的对角线上元素都是 A 的特征值.

(7) 记 X 的分布函数为 $G(x)$, 则

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{a}, & 0 < x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

记 Z 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z \leq z) = P(\max\{X, Y\} \leq z) \\ &= P(X \leq z, Y \leq z) \\ &= P(X \leq z)P(Y \leq z) \quad (\text{由于 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \\ &= G^2(z) \quad (\text{由于 } X \text{ 与 } Y \text{ 有相同的分布函数 } G(z)) \\ &= \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \left(\frac{z}{a}\right)^2, & 0 < z < a, \\ 1, & z \geq a. \end{cases} \end{aligned}$$

所以 Z 的概率密度

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2z}{a^2}, & 0 < z < a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此选(A).

附注 顺便指出, 选项(B), (D)分别是随机变量 $\min\{X, Y\}$ 的概率密度与分布函数.

(8) 由于 $\frac{8}{\sigma^2} S_X^2 \sim \chi^2(8)$, $\frac{10}{\sigma^2} S_Y^2 \sim \chi^2(10)$, 所以

$$D(S_X^2) = \frac{\sigma^4}{8^2} D\left(\frac{8}{\sigma^2} S_X^2\right) = \frac{\sigma^4}{64} \times 2 \times 8 = \frac{1}{4} \sigma^4,$$

$$D(S_Y^2) = \frac{\sigma^4}{10^2} D\left(\frac{10}{\sigma^2} S_Y^2\right) = \frac{\sigma^4}{10^2} \times 2 \times 10 = \frac{1}{5} \sigma^4,$$

并且

$$D(S_{12}^2) = \frac{1}{4} [D(S_X^2) + D(S_Y^2)] = \frac{9}{80} \sigma^4,$$

$$D(S_{XY}^2) = \frac{1}{18^2} [64D(S_X^2) + 100D(S_Y^2)] = \frac{1}{9} \sigma^4.$$

所以, 四个统计量中方差最小者为 S_{XY}^2 , 因此选(D).

附注 记住以下结论:

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

则

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), E(S^2) = \sigma^2, D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

二、填空题

(9) 由 $\int_0^x [5f(t) - 2] dt = f(x) - e^{5x}$ 得

$$f(0) = 1, 5f(x) - 2 = f'(x) - 5e^{5x} \text{ 以及 } f'(0) = 8,$$

所以有

$$\frac{f'(x) - 8}{x} = \frac{5[f(x) - f(0)] + 5(e^{5x} - 1)}{x}.$$

令 $x \rightarrow 0$, 由上式得

$$f''(0) = 5f'(0) + 5 \times 5 = 65.$$

附注 本题也可解答如下: 由于

$$5f(x) - 2 = f'(x) - 5e^{5x}, \text{ 即 } y' - 5y = -2 + 5e^{5x} \text{ (其中 } y = f(x)),$$

所以,

$$\begin{aligned} y &= e^{5x} \left[C + \int (-2 + 5e^{5x}) e^{-5x} dx \right] \\ &= e^{5x} \left[C + \int (-2e^{-5x} + 5) dx \right] \\ &= e^{5x} \left(C + \frac{2}{5} e^{-5x} + 5x \right). \end{aligned}$$

将 $y|_{x=0} = 1$ 代入上式得 $C = \frac{3}{5}$, 所以

$$y = e^{5x} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} e^{-5x} + 5x \right) = \frac{3}{5} e^{5x} + \frac{2}{5} + 5xe^{5x},$$

$$y' = 8e^{5x} + 25xe^{5x},$$

$$y'' = 65e^{5x} + 125xe^{5x}.$$

由此得到 $f''(0) = y''|_{x=0} = 65$.

(10) 显然, $x = y = 0$ 时, 所给方程成为 $\int_0^z e^{t^2} dt = 0$, 从而 $z(0, 0) = 0$. 此外, 所给方程

两边对 x 求偏导数得

$$e^{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + y + y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ 即 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{e^{z^2} + y}, \text{ 且 } \frac{\partial z(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial z(0, y)}{\partial x} \right) \bigg|_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial z(0, y)}{\partial x} - \frac{\partial z(0, 0)}{\partial x}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-y}{e^{z^2(0, y)} + y} - 0}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{e^{z^2(0, y)} + y} = - \frac{1}{1+0} = -1. \end{aligned}$$

附注 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ 也可以由 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 y 求偏导数算出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 然后将 $x=y=0$ 代入计算得到. 但

题解中由 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 按定义计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ 更加快捷些.

$$\begin{aligned} (11) \quad \text{由于} \quad \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} &\leq \frac{1}{n^2+n} (1+2+\cdots+n) = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} &> \frac{1}{n^2+2n} (1+2+\cdots+n) \\ &= \frac{n+1}{2(n+2)} \quad (n=1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

并且, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$, 所以由数列极限存在准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

附注 这里的数列极限存在准则是:

设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 以及 $\{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$ ($n=1, 2, \cdots$), 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A,$$

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

(12) 由于 y_1 与 y_2 是 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解, 所以其通解为 $Y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. 此外, $y'' + py' + qy = 0$ 对应的特征方程有根 $1+i$ 与 $1-i$, 从而

$$p = -[(1+i) + (1-i)] = -2, \quad q = (1+i)(1-i) = 2.$$

由于 $y'' + py' + qy = \cos x$, 即 $y'' - 2y' + 2y = \cos x$ 应有特解

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

将它代入这个非齐次线性微分方程得

$$(A-2B) \cos x + (2A+B) \sin x = \cos x,$$

于是有 $\begin{cases} A-2B=1, \\ 2A+B=0, \end{cases}$ 即 $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{2}{5}$, 因此 $y^* = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$. 从而这个非齐次线性微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x.$$

附注 本题获解的关键是, 由 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解确定其通解及方程中的系数 p, q 的值. 它们都是按 2 阶常系数齐次线性微分方程的解的性质得到的.

(13) 由 $AA^T = E_n$ 知 A 可逆, 且 $A^{-1} = A^T$, 此外对 $AA^T = E_n$ 的两边取行列式得 $|A|^2 = 1$, 所以由 $|A| < 0$ 得 $|A| = -1$.

由于 $A + E_n = A(E_n + A^{-1}) = A(E_n + A^T) = A(E_n + A)^T$,
 所以, $|A + E_n| = |A| |(E_n + A)^T| = |A| |E_n + A| = -|E_n + A|$, 即
 $|A + E_n| = 0$.

附注 题中的 A 是 n 阶正交矩阵. 正交矩阵有以下性质:

设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则

(I) $|A| = 1$ 或 -1 ;

(II) A 是可逆矩阵, 且 $A^{-1} = A^T$;

(III) A 的行向量组与列向量组都是正交单位向量组;

(IV) A^{-1}, A^* 都是正交矩阵;

(V) AB 是正交矩阵.

(14) 由于存在常数 $a, b (b \neq 0)$, 使得 $P(Y = a + bX) = 1$. 所以

$$\rho = \begin{cases} 1, & b > 0, \\ -1, & b < 0, \end{cases} \text{ 即 } \rho = \frac{b}{|b|}.$$

附注 关于随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ 的性质:

(I) $|\rho| \leq 1$;

(II) $|\rho| = 1$ 的充分必要条件是, 存在常数 $a, b (b \neq 0)$, 使得

$$P(Y = a + bX) = 1,$$

且当 $b > 0$ 时 $\rho = 1$, $b < 0$ 时 $\rho = -1$.

三、解答题

(15) $y(0) = 1$, 此处,

由 $y(x) = 1 + x + 2x \int_0^x y(t)y'(t)dt - 2 \int_0^x ty(t)y'(t)dt$ 得

$$y' = 1 + 2 \int_0^x y(t)y'(t)dt = 1 + y^2 - y^2(0) = y^2,$$

所以 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = -1$, 从而 $\frac{1}{y} = -x + C$. 将 $y(0) = 1$ 代入得 $C = 1$. 因此 $y = \frac{1}{1-x}$. 从而 $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

附注 对 $\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)dt$ 求导时, 必须首先将被积函数中的 x 移到积分号之外, 故将它改写成

$$x \int_0^x y(t)y'(t)dt - \int_0^x ty(t)y'(t)dt.$$

(16) 由于 $I(a) = \iint_D f(x, y) d\sigma$

$$= \iint_{D_1 + D_2} (x + 2x^2y) d\sigma \quad (D_1 + D_2, \text{如图答 10-16 阴影部分所示})$$

$$= 2 \iint_{D_1} x d\sigma \quad (1)$$

(这是由于 D_1 与 D_2 关于 x 轴对称, 在对称点处 x 的值彼此相等, 而 $2x^2y$ 的值互为相反数, 故

$$\iint_{D_1+D_2} x d\sigma = 2 \iint_{D_1} x d\sigma, \quad \iint_{D_1+D_2} 2x^2 y d\sigma = 0),$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } I(a) &= 2 \int_0^a dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^a x dy = 2 \int_0^a x(a - \sqrt{ax-x^2}) dx \\ &= 2 \int_0^a ax dx - 2 \int_0^a x \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} dx \\ &= a^3 - 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(t + \frac{a}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2} dt \quad \left(\text{其中 } t = x - \frac{a}{2}\right) \\ &= a^3 - a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2} dt = a^3 - a \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) a^3. \end{aligned}$$

附注 $\iint_{D_1} x d\sigma$ 也可计算如下:

$$\iint_{D_1} x d\sigma = \iint_S x d\sigma - \iint_{D_3} x d\sigma,$$

其中, S 是正方形 $OABC = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$,

$D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax-x^2}\} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. 所以

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} x d\sigma &= \int_0^a dx \int_0^a x dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \cos \theta \cdot r dr \\ &= \frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}\right) a^3. \end{aligned}$$

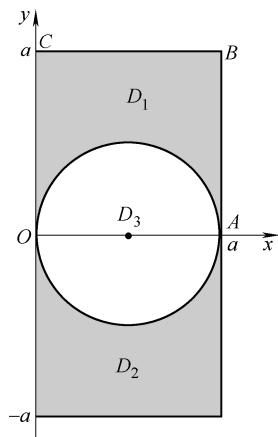
$$\begin{aligned} (17) \text{ 由于 } a_n &= -\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_{n-1} = (-1)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) a_{n-2} \\ &= \cdots = (-1)^{n-2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdots \frac{4}{3} a_2 \\ &= (-1)^{n-2} \frac{7}{6} (n+1) = (-1)^n \frac{7}{6} (n+1) \quad (n=3, 4, \cdots), \end{aligned}$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

由于 $x = -1, 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{6} (n+1) x^n$ 分别成为

$$\frac{13}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{7}{6} (n+1) \quad \text{与} \quad \frac{5}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{6} (n+1),$$

它们都是发散的, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. 对任意 $x \in (-1, 1)$ 有



图答 10-16

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{6}(n+1)x^n \\
&= 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{6} \frac{d}{dx} \sum_{n=3}^{\infty} (-x)^{n+1} \\
&= 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{6} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{1+x} \right) \\
&= 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{6} \frac{d}{dx} \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{7}{6(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

附注 计算幂级数的和函数 $s(x)$ 时, 应先算出该幂级数的收敛域, 即确定 $s(x)$ 的定义域.

(18) (I) 作辅助函数

$$F(x) = (1-x) \int_0^x f(t) dt.$$

显然它在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $F(0) = F(1) (= 0)$, 所以由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi)(1-\xi) = \int_0^\xi f(x) dx$.

(II) 记 $G(x) = f(x)(1-x) - \int_0^x f(x) dx$. 由 (I) 的证明知方程 $G(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 有实根 ξ , 此外, 由题设得

$$G'(x) = f'(x)(1-x) - 2f(x) > 0 \quad (x \in (0, 1)),$$

即函数 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调增加, 所以方程 $G(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的实根是唯一的, 即 (I) 中的 ξ 是唯一的.

附注 (I) 的证明中, 辅助函数 $F(x)$ 是按以下方法得到的:

首先将欲证等式中的 ξ 改为 x 得

$$f(x)(1-x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 即 } \frac{d}{dx} \left((1-x) \int_0^x f(t) dt \right) = 0,$$

所以所作辅助函数为 $F(x) = (1-x) \int_0^x f(t) dt$.

(19) 总成本函数 $C(x) = 0.8x + 400$, 所以总利润函数为

$$\begin{aligned}
L(x) &= R(x) - C(x) - T(x) \\
&= \begin{cases} 29x - \frac{1}{4}x^2 - 400, & 0 \leq x \leq 60, \\ 491 - 0.85x, & x > 60. \end{cases}
\end{aligned}$$

显然 $L(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且

$$L'(x) = \begin{cases} 29 - \frac{1}{2}x, & 0 < x < 60, \\ -0.85, & x > 60, \end{cases}$$

所以 $L(x)$ 的最大值, 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一极值点 $x = 58$ 处取到, 值为 $L(58) = 441$. 于是当该厂月产量 $x = 58$ 件时, 总利润 $L(x)$ 最大, 其值为 441 万元.

附注 $y = L(x)$ 的图形如图答 10-19 所示.

(20) (I) 由于所给方程组

$$(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + a\alpha_2 + \alpha_3)x = \alpha_4,$$

$$\text{即 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

于是, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关得,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

对式(1)的增广矩阵

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

施行初等行变换:

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right). \quad (2)$$

所以, 当所给方程组有无穷多解时, $r(\bar{A}) = r(A) < 3$ (其中, A 是式(1)的系数矩阵), 于是由式(2)知 $a-2=0$, 即 $a=2$.

(II) 当 $a=2$ 时, 式(1), 即所给方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (3)$$

同解, 它对应的导出组通解为 $C(1, -1, 1)^T$, 且式(3)有特解 $(1, 2, 0)^T$. 所以, 式(3), 即所给方程组的通解为

$$x = C(1, -1, 1)^T + (1, 2, 0)^T (C \text{ 是任意常数}).$$

附注 本题获解的关键是, 根据 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 将所给的方程组化简为同解方程组(1).

(21) (I) 由

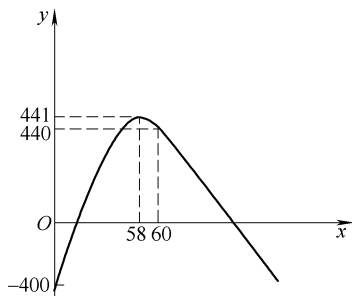
$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -a & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 6)^2$$

知, A 有特征值 $\lambda = -2, 6$ (二重), 所以 A 可相似对角化时, 必有

$$r(6E_3 - A) = 3 - 2 = 1, \quad (1)$$

$$\text{其中, } 6E_3 - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

因此满足式(1)的 $a=0$, 即 A 可相似对角化时, $a=0$.



图答 10-19

(II) $a=0$ 时, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 所以

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

记 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ (实对称矩阵), 则

$$|\lambda \mathbf{E}_3 - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -5 & 0 \\ -5 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 6)(\lambda - 7),$$

所以, \mathbf{B} 有特征值 $\lambda = -3, 6, 7$.

设对应 $\lambda = -3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 即 } \begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\alpha}$ 为它的基础解系, 即 $\boldsymbol{\alpha} = (-1, 1, 0)^T$.

设对应 $\lambda = 6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 即 } \begin{cases} 4b_1 - 5b_2 = 0, \\ -5b_1 + 4b_2 = 0. \end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\beta}$ 为它的基础解系, 即 $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, 1)^T$.

设对应 $\lambda = 7$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, c_3)^T$, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 都正交, 即

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 0, \\ c_3 = 0. \end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\gamma}$ 为它的基础解系, 即 $\boldsymbol{\gamma} = (1, 1, 0)^T$. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 为正交向量组, 现将它们单位化:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T,$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\beta} = (0, 0, 1)^T,$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T.$$

记 $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$ (正交矩阵), 则所求的正交变换为

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y},$$

它将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $-3y_1^2 + 6y_2^2 + 7y_3^2$.

附注 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形, 首先要将该二次型表示成 $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ (其中 \mathbf{B} 是实对称矩阵), 这是本题获解的关键. 此外应熟练掌握用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, \mathbf{B} 是 n 阶实对称矩阵) 为标准形的方法.

$$\begin{aligned}
 (22) \quad E(Z^2) &= \iint_{xOy \text{ 平面}} (\min\{x, y\})^2 f(x, y) d\sigma = \iint_{0 < x < y} (\min\{x, y\})^2 x e^{-y} d\sigma \\
 &= \iint_{0 < x < y} x^2 \cdot x e^{-y} d\sigma = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^y x^3 dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} y^4 e^{-y} dy = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} y^4 de^{-y} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(y^4 e^{-y} \Big|_0^{+\infty} - 4 \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy \right) = \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy = -\int_0^{+\infty} y^3 de^{-y} \\
 &= -\left(y^3 e^{-y} \Big|_0^{+\infty} - 3 \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy \right) = 3 \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy \\
 &= 3E(T^2) \left(\text{其中, 随机变量 } T \text{ 的概率密度为 } \varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \right) \\
 &= 3[DT + (ET)^2] = 3(1 + 1^2) = 6.
 \end{aligned}$$

附注 由于在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < y\}$ 上, $(\min\{x, y\})^2 = x^2$, 所以, 用定义计算数学期望 $E(Z^2)$. 这里顺便计算 EZ 与 DZ :

$$\begin{aligned}
 EZ &= \iint_{xOy \text{ 平面}} \min\{x, y\} f(x, y) d\sigma = \iint_{0 < x < y} \min\{x, y\} x e^{-y} d\sigma \\
 &= \iint_{0 < x < y} x \cdot x e^{-y} d\sigma = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^y x^2 dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy = -\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 de^{-y} \\
 &= -\frac{1}{3} \left(y^3 e^{-y} \Big|_0^{+\infty} - 3 \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = E(T^2) = DT + (ET)^2 = 1 + 1^2 = 2.
 \end{aligned}$$

$$DZ = E(Z^2) - (EZ)^2 = 6 - 2^2 = 2.$$

(23) (I) X 的数学期望

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot (1 + \theta) x^\theta \cdot dx = \frac{1 + \theta}{2 + \theta}.$$

根据矩估计法, 令

$$EX = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 即 } \frac{1 + \theta}{2 + \theta} = \bar{X}.$$

解此方程得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \frac{1 - 2\bar{X}}{\bar{X} - 1}$.

(II) 记 X_1, X_2, \dots, X_n 的观察值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 由于计算最大似然估计量, 所以可以认为 $0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1$. 于是有似然函数

$$L(\theta) = (1 + \theta) x_1^\theta \cdot (1 + \theta) x_2^\theta \cdot \dots \cdot (1 + \theta) x_n^\theta,$$

$$= (1 + \theta)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^\theta.$$

取对数 $\ln L(\theta) = n \ln(1 + \theta) + \theta \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$, 则由

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{1 + \theta} + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0$$

得

$$\theta = -\frac{n}{\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)} - 1 \quad (0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 1).$$

所以, θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\ln(X_1 X_2 \cdots X_n)} - 1 \quad (0 < X_1, X_2, \cdots, X_n < 1)$.

附注 应熟练掌握总体未知参数点估计的两种方法: 矩估计法与最大似然估计法.

