第3章　逐次逼近法

3.1 解线性方程组的迭代解法

3.2 非线性方程的迭代解法

3.1　解线性方程组的迭代法

3.1.1 简单迭代法

3.1.2 迭代法的收敛性

前面已经介绍了用直接法求解线性方程组：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad (3\text{-}1)$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^{n}, \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n}$

直接法:在没有误差的情况下,可在有限步之内得到计算问题的精确解.

在用直接法求解的过程中，我们发现系数矩阵 **A** 在不断变动，如果 **A** 的阶数较大时，占用计算机的内存就很大，而且程序较复杂，对程序设计的技巧要求也较高。因此，我们希望找到一种在求解过程中系数矩阵不变，且程序设计又不复杂的求解方法，这种方法就是迭代法。

迭代法:采取逐次逼近的方法来逼近问题的精确解,通常在任意有限步都不能得到其精确解.

使用迭代法求解（3-1）时，首先要将它变形，变成如下形状的等价方程组

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} \qquad (3\text{-}2)$$

其中 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^{n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n}$

即（3-1）的解是（3-2）的解，反之，（3-2）的解也是（3-1）的解。用不同的方法构造（3-2）就可得到不同的迭代法。（3-2）中的矩阵B称为迭代矩阵。

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow$ (3-1)

如果已导出（3-1）的等价方程组（3-2）后，计算（3-1）的解就变成求序列的极限.

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$

代入（3-2）的右端. 其中，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ （3-2）

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{f}$$

其一般形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (3\text{-}3)$$

通常称使用（3-3）式求解的方法为迭代法，也称迭代过程或迭代格式.

如果对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，都有当 $k \to \infty$ 时，$x^{(k)} \to x^*$。

其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (\boldsymbol{x}_1^{(k)}, \boldsymbol{x}_2^{(k)}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{(k)})^T$， $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*)^T$

也可写成

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^* \qquad \text{即} \qquad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_i^{(k)} = \boldsymbol{x}_i^*, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称该迭代法收敛，否则称迭代法发散.

由于

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

所以收敛迭代法的极限向量 x^*，满足

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

即为方程组（3-2）的解，从而也是（3-1）的解。因此，使用迭代法求解就是求向量序列 $\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots$ 的极限向量 $\boldsymbol{x}^*$。

3.1.1 简单迭代法

简单迭代法也称基本迭代法，有些迭代法可以通过对基本迭代法的加速或变形而得到。设线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为非奇异，且 $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$。

对上式移项和变形后可得等价的方程组：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \right) \\ \qquad\vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n \right) \\ \qquad\vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1} \right) \end{cases} \qquad (3\text{-}4)$$

将（3-4）写成迭代格式，即

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3\text{-}5)$$

也可写成

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad （3\text{-}6）$$

迭代法（3-5）或（3-6）称为**Jacobi迭代法**。

例1　将线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20) \\ \Rightarrow x_2 = \frac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}(-2x_1 - x_2 + 12) \end{array}$$

解：写成Jacobi迭代格式（3-5）：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\text{（3-5）}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \quad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \quad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3;$$

$$x_1^{(1)}=\frac{20}{8},\qquad x_2^{(1)}=\frac{33}{11}=3,\qquad x_3^{(1)}=\frac{12}{4}=3\,;$$

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{8}\left(20+3\times3-2\times3\right)\approx2.875\quad\ldots,\quad x_1^{(10)}\approx3.00032$$

$$x_2^{(2)}=\frac{1}{11}\left(33+4\times\frac{20}{8}+3\right)\approx2.3636\quad\ldots,\quad x_2^{(10)}\approx1.999838$$

$$x_3^{(2)}=\frac{1}{4}\left(12-2\times\frac{20}{8}-3\right)\approx1\qquad\ldots,\quad x_3^{(10)}\approx0.999881$$

终止条件为： $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le\varepsilon$ 。**精确解为：** $x^{*}=(\,3,2,1\,)^{T}$ 。

在Jacobi迭代过程中，对已经算出来的信息未加充分利用，在计算$x_2^{(k+1)}$时$x_1^{(k+1)}$已经算出，计算$x_i^{(k+1)}$时$x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},\cdots,x_{i-1}^{(k+1)}$已经算出。一般说来，后面的计算值$x_i^{(k+1)}$比前面的计算值$x_i^{(k)}$要精确些。故对Jacobi迭代法（3-5）可作如下改进.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ，得到

$$x_1^{(1)}=2.5$$

$$x_2^{(1)}=3-0.363636\times 2.5\approx 2.0909091$$

$$x_3^{(1)}=3-0.5\times 2.5-0.25\times 2.0909091\approx 1.768939$$

$$\vdots$$

$x_1^{(5)}\approx 2.999843$, $x_2^{(5)}\approx 2.000072$, $x_3^{(5)}\approx 1.000061$。

终止条件为： $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le 10^{-5}$

将迭代格式可写成如下的分量形式，即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ k = 0, 1, 2, \cdots; \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad (3\text{-}9)$$

称为**Gauss-Seidel迭代法**。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Jacobi迭代

3.1.2 迭代法的收敛性

我们要考虑如下问题：

① 如何判断迭代过程是否收敛呢？

② 迭代格式收敛的充要条件、充分条件是什么？

③ 决定迭代收敛速度的因素是什么？

设某种迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该线性方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

两式相减，得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*}) = \cdots = B^{k+1}\left(x^{(0)} - x^{*}\right)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*}$，则

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \cdots = \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$$

故当 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{0}$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\right) = \boldsymbol{0}$

而 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^{*}$ 是一个非零的常向量，因此只有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^{k+1} = \boldsymbol{O}_{n\times n} \quad （零矩阵）$$

定理 3.1

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=0 \quad (\text{即} \quad \boldsymbol{x}_i^{(k)}\to\boldsymbol{x}_i^*,\ i=1,2,\cdots,n)$$

的充分而且必要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}_{n\times n} \Leftrightarrow \rho(\boldsymbol{B})<1$。

定理 3.2 迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$ 对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 均收敛的充要条件为：$\rho(\boldsymbol{B})<1$。

定理 3.3（充分条件） 若 $\|B\|<1$，则迭代法收敛，

且有 $\|x^{(k)}-x^*\|\le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$

与阶数无关

证明 $x^{(k+1)}-x^{(k)}=Bx^{(k)}-Bx^{(k-1)}=B(x^{(k)}-x^{(k-1)})$

$$x^{(k)}-x^*=x^{(k)}-x^{(k+1)}+x^{(k+1)}-x^*$$

$$=B(x^{(k-1)}-x^{(k)})+B(x^{(k)}-x^*)$$

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|+\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^*\right\|$$

$$(1-\|B\|)\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\le\cdots\le\|B\|^k\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|=\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\le\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

考察Jacobi迭代法和G-S迭代法的矩阵形式及收敛性

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & \cdots & -a_{jj-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nj-1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1j} & \cdots & -a_{j-1n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$$

观察Jacobi迭代法

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则其矩阵的表示形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

注意:

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}} = \overset{D^{-1}}{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & & & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \overset{L+U}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

$$f \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_1}{a_{nn}} \end{pmatrix} = \overset{D^{-1}}{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & & & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \overset{b}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

则Jacobi迭代法可写成为：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

令 $\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{f}_J = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$

或者，由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ ，得 $\boldsymbol{Dx} = (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$从而

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

则得（3-1）的等价方程组为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_J\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_J$

其迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_J\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_J \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

将Gauss-Seidel公式改写成

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而可写成矩阵形式为

$$\overset{\boldsymbol{D}}{\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \overset{\boldsymbol{L}}{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$+ \underset{\boldsymbol{U}}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \underset{\boldsymbol{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

从而有 $$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

整理后可得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

令 $\boldsymbol{B}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{f}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$

则 $$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_G\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_G \quad （k = 0,1,\cdots） \qquad （3\text{-}10）$$

（3-10）就是Gauss-Seidel迭代法。

例4　设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}，其中 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

问使用Jacobi法和G-S法求解是否收敛.

（1）求Jacobi迭代法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

即 $\rho(B) = 0 < 1$ ，故Jacobi迭代法收敛.

（2）求G-S迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_G$ ，由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G\right)=\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\right)\cdot\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=0$$

得

$$\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ \lambda & \lambda & 1\\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

A的对角线及以下乘以 λ

进一步得 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2>1$ ，故G-S迭代法发散.

注意: 并不是对任何情况, G-S迭代比Jacobi迭代收敛速度快.

对于某些特殊的方程组，从方程组本身就可判定其收敛性.不必求迭代矩阵的特征值或范数.

定义3.1 如果矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足不等式

$$|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (\mathbf{3\text{-}14})$$

则称矩阵 A 为对角占优阵，如果（3-14）中严格不等式成立，称矩阵 A 为严格对角占优阵.

可以证明严格对角占优阵 A 为非奇异矩阵，即

$$\det(A)\neq 0$$

事实上，如果A奇异，则Ax=0有非零解 $c_1, c_2, \ldots, c_n$

令 $$|c_i| = \max_{1\le j\le n}\{|c_j|\}$$

则 $$a_{i,1}c_1 + a_{i,2}c_2 + \cdots + a_{i,n}c_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{i,i}c_i = -\sum_{j\ne i} a_{i,j}c_j$$

$$\Rightarrow |a_{i,i}|\cdot|c_i| \le \sum_{j\ne i}|a_{i,j}|\cdot|c_j|$$

$$\Rightarrow |a_{i,i}| \le \sum_{j\ne i}|a_{i,j}|\cdot|c_j|/|c_i| \le \sum_{j\ne i}|a_{i,j}|$$

与A为严格对角占优矩阵矛盾！

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对角占优矩阵　　　　严格对角占优矩阵

定理3.4（充分性条件）若线性方程组

$$Ax = b$$

中的 A 为严格对角占优阵，则Jacobi法和Gauss-Seidel法均收敛。

证（1）Jacobi迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则 B_J 的每一行每个元素取绝对值的和为

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵，即

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3\text{-}15)$$

所以 $$\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即

$$\| \boldsymbol{B}_J \|_\infty = \max_i \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

根据定理3.3，Jacobi迭代法收敛.

（2）G-S迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{B}_G$ 的特征值 λ 满足

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right) = \det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1} \cdot \det[\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}) - \boldsymbol{U}] = 0$$

A的对角线及以下乘以 λ

因为 $\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1} \neq 0$，设

$$\boldsymbol{C} = \lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}) - \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则有

$$\det(C)=\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=0 \qquad (3\text{-}16)$$

现在证明 $|\lambda|<1$.用反证法，假设 $|\lambda|\geq 1$，又由于

$\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵，所以（3-15）式成立，则应有

$$|\lambda||a_{ii}|>|\lambda|\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=\sum_{j\neq i}|\lambda||a_{ij}|$$

$$\geq\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda||a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为严格对角占优阵，故

$\det(\boldsymbol{C}) \neq \boldsymbol{O}$，与（3-16）式矛盾，则必有 $|\lambda| < 1$

即 $\boldsymbol{B}_G$ 的所有特征值的绝对值均小于1，即

$$\rho(\boldsymbol{B}_G) < 1$$

根据定理3.2，G-S迭代法收敛.

迭代改善法

对良态或者不十分严重病态的线性方程组，与直接法结合对已得近似解进行精度改善.

1) 用三角分解法(带列主元LU分解)求$Ax=b$

$$PA = LU \quad \Rightarrow PAx = LUx = Pb$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

得到计算解 $\tilde{x}$

2) 求 $\tilde{x}$ 的修正向量 z

用**双精度**计算余向量 $r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = Az$

$$PAz = LUz = Pr \Rightarrow \begin{cases} Ly = Pr \\ Uz = y \end{cases}$$

令 $x = \tilde{x} + z$ $\quad Ax = A\tilde{x} + Az = b - r + Az = b$

故 $x = \tilde{x} + z$ 即为近似解 $\tilde{x}$ 的改进解.

3) 反复对近似解进行改善, 即反复2) 的过程.

例3 见书P57-58

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\xrightarrow{\text{直接法得初始近似解}}\boldsymbol{x}^{*}\approx\boldsymbol{x}^{(1)}$$

$$\text{余量}\boldsymbol{r}^{(1)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(1)}\xrightarrow{\text{利用余量求修正量}}\boldsymbol{Az}^{(1)}=\boldsymbol{r}^{(1)}$$

$$\xrightarrow{\text{修正}}\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{z}^{(1)}$$

$$\text{余量}\boldsymbol{r}^{(2)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(2)}\xrightarrow{\text{利用余量求修正量}}\boldsymbol{Az}^{(2)}=\boldsymbol{r}^{(2)}$$

$$\xrightarrow{\text{修正}}\boldsymbol{x}^{(3)}=\boldsymbol{x}^{(2)}+\boldsymbol{z}^{(2)}$$

3.2　非线性方程的迭代解法

3.2.0 绪论

3.2.1 简单迭代法

3.2.2 Newton迭代法及其变形

3.2.3 多根区间上的逐次逼近法

工程实际与科学计算中都遇到大量求解非线性方程的问题。设非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{3-17}$$

求数 α，使 $f(\alpha) \equiv 0$，则称 α 为方程（3-17）的根，或称函数 $f(x)$ 的零点。

常见的非线性方程有，代数方程（二次、三次等）超越方程（三角方程，指数、对数方程等）。

但是我们发现即使是最基本的代数方程，当次数超过4时，在一般情况下就不能用公式表示方程的根，即难于用解析法求出方程的根，对于超越方程那就更难了。

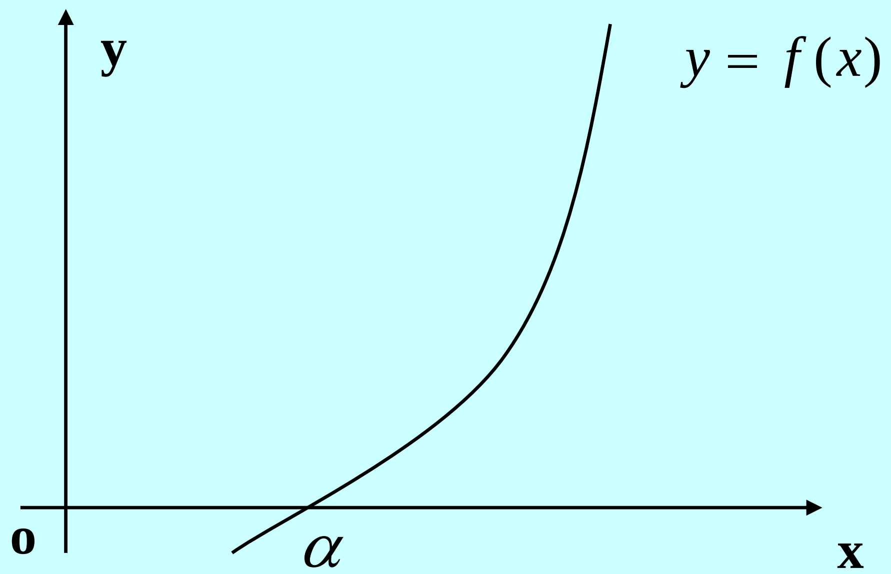
因此，研究用数值方法计算非线性方程的根就显得非常必要。在求根时通常假设非线性方程 $f(x)=0$ 中的函数　　是关于 X 的连续函数。

若令

$$y = f(x)$$

则它在平面直角坐标系 $O-xy$ 下的图象为连续曲线，

可见, 求 $f(x)=0$ 的根，就是求 $y=f(x)$ 与 X 轴的交点 α



如果 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上仅有一个根，则称 $[a,b]$ 为方程的单根区间; 若方程在 $[a,b]$ 上有多个根，则称 $[a,b]$ 为方程的多根区间。

方程的单根区间和多根区间统称为方程的有根区间。为了研究方便，我们主要研究方程在单根区间上的求解方法。

3.2.1 简单迭代法

首先将方程 $f(x)=0$ 化为一个与它同解的方程

$$x=\varphi(x) \qquad (3\text{-}18)$$

其中 $\varphi(x)$ 为 X 的连续函数。即如果数 α 使 $f(\alpha)\equiv 0$，则也有 $\alpha\equiv\varphi(\alpha)$，反之，若 $\alpha\equiv\varphi(\alpha)$，则也有 $f(\alpha)\equiv 0$。

任取一个初始值 x_0，代入（3−18）的右端，得到 $x_1=\varphi(x_0)$ 再将 x_1 代入（3−18）右端得 $x_2=\varphi(x_1)$，继为之，得到一个数列，其一般表示形式为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad \text{（3−19）}$$

通常称（3−19）为求解非线性方程的简单迭代法，也称迭代法或迭代过程或迭代格式，$\varphi(x)$ 称为迭代函数，x_k 称第 k 步的迭代值或简称迭代值。

如果由迭代格式产生的数列收敛，即

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$$

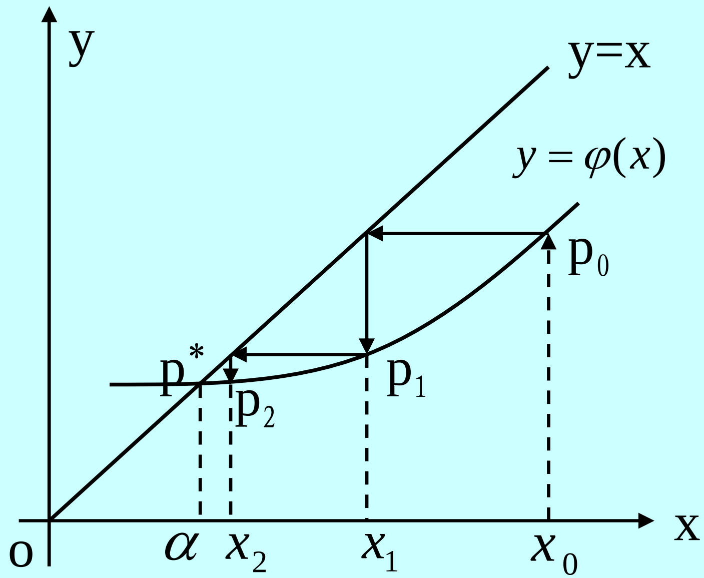
则称迭代法收敛，否则称迭代法发散。若迭代法收敛于 α，则 α 就是方程（3-17）的根，即有 $f(\alpha) \equiv 0$。

几何直观:

在曲线 $y=\varphi(x)$ 上得到点列 $P_1, P_2, \cdots$，其横坐标分别为由公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

所确定的迭代值 $x_1, x_2, \cdots$，若迭代法收敛 $\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$，则点列 $P_1, P_2, \cdots$ 将越来越逼近所求的交点 $P(\alpha)=P^*$。



例1 用迭代法求 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根。

解 （1）化方程为等价方程

$$x=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}=\varphi(x)$$

取初始值 $x_0=0$，则迭代值为

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{0.5}\approx 0.79\text{，}\quad x_2=\sqrt[3]{\frac{1+0.79}{2}}=\sqrt[3]{0.895}\approx 0.964\text{，}$$

$$x_3=\sqrt[3]{\frac{1+0.964}{2}}\approx 0.994\text{，}\ \cdots$$ 显然，当 $k\to\infty$ 时，

$x_k\to 1$ 且 $f(1)\equiv 0$，即迭代法收敛于1， $x=1$

就是方程 $f(x)=0$ 的根。

（2）化 $f(x)=0$ 为等价方程 $x=2x^3-1=\varphi(x)$，同样取初始值 $x_0=0$，其迭代格式为 $x_{k+1}=2x_k^3-1$

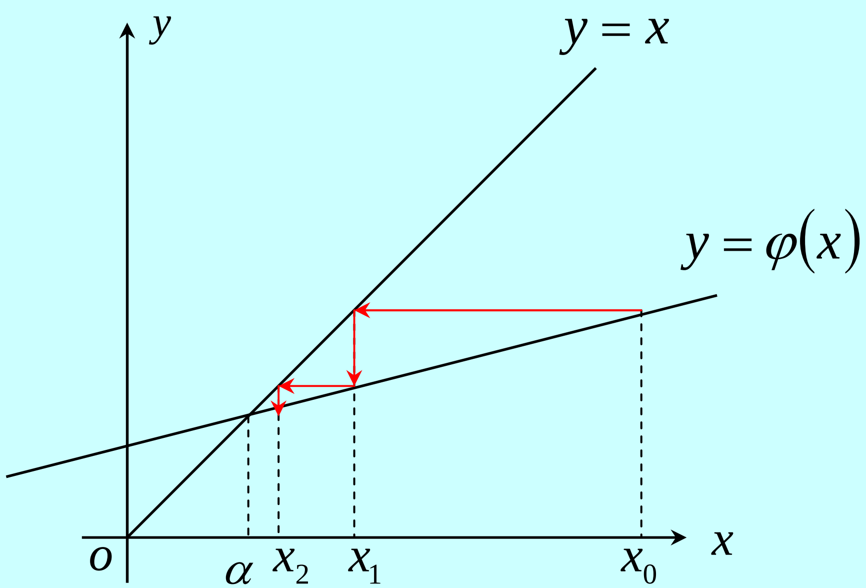
$x_1=2\times 0-1=-1$，$x_2=2(-1)^3-1=-3$，$x_3=2(-3)^3-1=-55$，

显然，当 $k\to\infty$时，$x_k\to-\infty$，故迭代法发散。

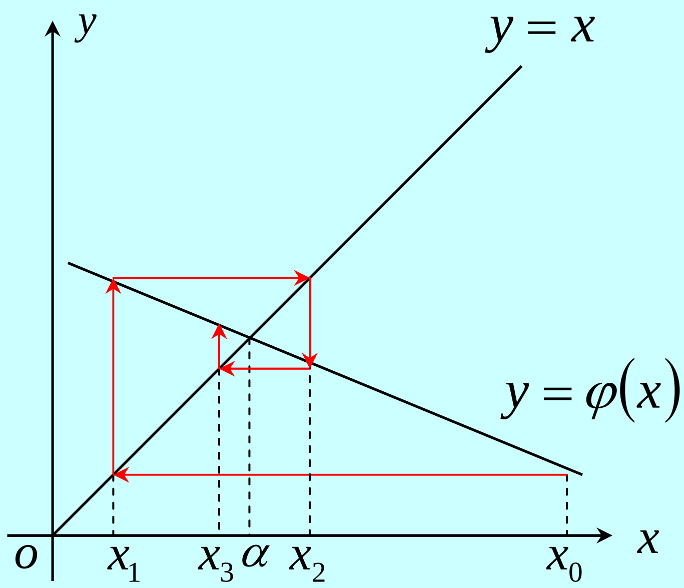
上述例子表明，迭代法的收敛与发散，依赖于迭代函数的构造，迭代函数构造的方法很多。

例如，$x=x-f(x)=\varphi(x)$ 中的 就是（3-17）的迭代函数。而且很容易证明 $\varphi(x)=x-k(x)f(x)$ $(k(x)\neq 0)$ 也是（3-17）的迭代函数。

对于同一个方程，由于构造出来的迭代函数不同，有的迭代函数所构成的迭代法收敛，有的迭代函数所构成的迭代法却发散。那么迭代函数须满足什么条件，迭代法才能收敛。

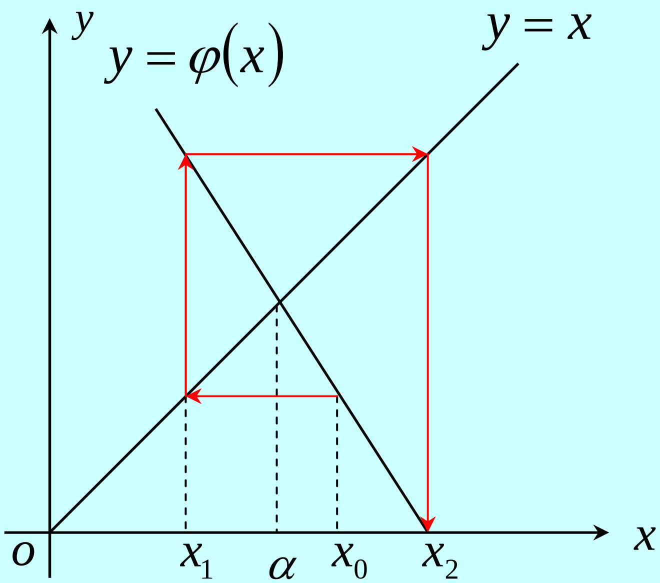


$0<\varphi'(x)<1$

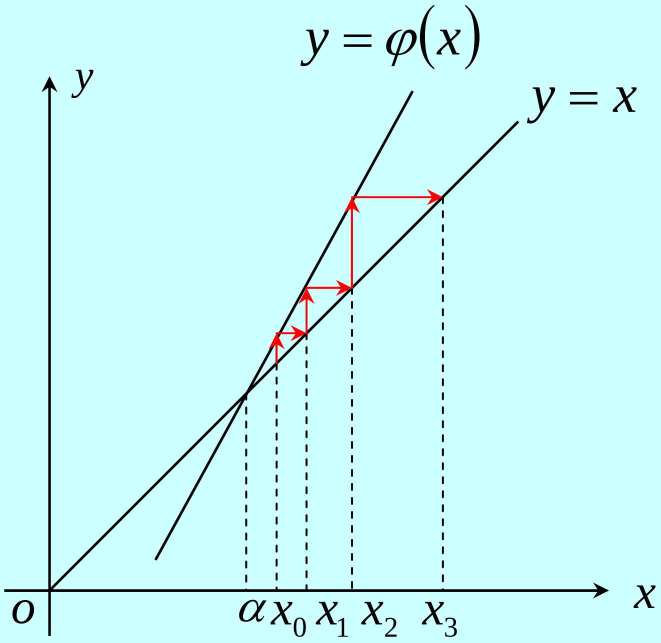


$-1<\varphi'(x)<0$

从而，迭代函数满足条件：$|\varphi'(x)|<1$ 时，迭代法收敛。



$\varphi'(x)<-1$



$1<\varphi'(x)$

从而，当 $\varphi'(x)<-1$ 或 $1<\varphi'(x)$ 时，迭代法发散。

定理3.5 设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

（1）当 $x\in[a,b]$ 时， $a\le\varphi(x)\le b$

（2）存在正数 $0<L<1$，对任意 $x\in[a,b]$ 均有

$$|\varphi'(x)|\le L$$

则 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在唯一根 α，且对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，迭代法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

收敛于 α，且

1. $$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \qquad (3\text{-}20)$$

2. $$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \qquad (3\text{-}21)$$

证 满足条件（1）、（2）时，易证方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在唯一根 α。事实上，令 $f(x)=x-\varphi(x)$

由 $x\in[a,b]$ 时， $a\le\varphi(x)\le b$

$$f(a)=a-\varphi(a)\le 0 \qquad f(b)=b-\varphi(b)\ge 0$$

$$|\varphi'(x)|\le L<1 \quad \Rightarrow f'(x)=1-\varphi'(x)>0$$

连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，且在端点取值异号，故在 $[a,b]$ 上有唯一根.

$$0=f(\alpha)=\alpha-\varphi(\alpha) \Leftrightarrow \alpha=\varphi(\alpha)$$

根据微分中值定理可得

$$x_{k+1}-\alpha = \varphi(x_k)-\varphi(\alpha)= \varphi'(\xi_1)(x_k-\alpha)$$

$$x_{k+1}-x_k = \varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})=\varphi'(\xi_2)(x_k-x_{k-1})$$

其中 $\xi_1,\xi_2 \in [a,b]$ 由条件（2）得

$$\begin{cases} |x_{k+1}-\alpha| = |\varphi'(\xi_1)||x_k-\alpha| \le L|x_k-\alpha| \\ |x_{k+1}-x_k| = |\varphi'(\xi_2)||x_k-x_{k-1}| \le L|x_k-x_{k-1}| \end{cases} \quad (3\text{-}22)$$

又因为

$$|x_k-\alpha| \le |x_k-x_{k+1}|+|x_{k+1}-\alpha| \le L|x_k-x_{k-1}|+L|x_k-\alpha|$$

将上式移项整理后，得 $(1-L)|x_k-\alpha|\le L|x_k-x_{k-1}|$，从而

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

即（3-20）成立。再反复使用（3-22）的第2式，得

$$|x_k-x_{k-1}|\le L|x_{k-1}-x_{k-2}|\le\cdots\le L^{k-1}|x_1-x_0|$$

将上式代入（3-20）即得（3-21）成立。

又因为 $L<1$，所以根据（3-21）得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-\alpha|=0 \quad \text{即} \quad \lim_{k\to\infty}x_k=\alpha$$

故迭代法收敛。

当迭代函数满足定理3.5的条件且 L 较小时，根据（3-20）式可知，只要相邻两次计算值的偏差 $|x_k - x_{k-1}|$ 达到事先给定的精度要求 δ（即 $|x_k - x_{k-1}| \le \delta$）时，迭代过程就可以终止，$x_k$ 就可作为 α 的近似值。因此，（3-20）式也是判断迭代是否可终止的依据。如果对 L 的大小可作出估计时，由（3-21）式就可以大概估计出迭代过程所需要的迭代次数，即 $|x_k - \alpha| \le \delta$ 时，k 的大小范围。

$$|x_k - \alpha| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow k \ge \log_L \frac{\delta(1-L)}{|x_1 - x_0|}$$

由于定理3.5的条件一般难于验证，而且在大区间$[a,b]$上，这些条件也不一定都成立，所以在使用迭代法时往往在根α的附近进行。只要假定$\varphi'(x)$在α的附近连续，且满足

$$|\varphi'(\alpha)|<1$$

则根据连续函数的性质，一定存在α的某个邻域$S:|x-\alpha|\le\delta$，$\varphi(x)$在S上满足定理3.5的条件。

故在S中任取初始值x_0，迭代格式

$$x_k=\varphi(x_{k-1})$$

收敛于方程的根α，即$f(\alpha)\equiv 0$，称此收敛为局部收敛。

例2 求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的一个根，要求精度 $\delta=10^{-3}$。 $\left(f\left(x\right)=xe^{x}-1=0\right)$

解 由于 $\varphi'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}$，故当 $x\in[0.5,0.7]$ 时，

$$|\varphi'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}\le 0.61<1$$

因此，迭代格式 $x_{k+1}=e^{-x_k}$，对于初始值 x_0=0.5是收敛的。

迭代停止条件

$$|x_k-x_{k-1}|\le\frac{1-L}{L}\delta=\frac{1-0.61}{0.61}\times10^{-3}=0.64\times10^{-3}$$

迭代的数值结果表

k	x_k	e^{-x_k}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	0.5	0.606531	0.106531
1	0.606531	0.545239	0.061292
2	0.545239	0.579703	0.034464
3	0.579703	0.560065	0.019638
4	0.560065	0.571172	0.011107
5	0.571172	0.564863	0.006309
6	0.564863	0.568439	0.003576
7	0.568439	0.566409	0.002030
8	0.566409	0.567560	0.001151
9	0.567560	0.566907	0.000653
10	0.566907	0.567277	0.000370

从定理3.5的（3-21）式可以看出，当L或$|\varphi'(x)|$在$[a,b]$上的值越小，迭代过程的收敛速度就越快。但当$L<1$且接近于1时，迭代法虽然收敛，但收敛速度很慢。为了使收敛速度有定量的判断，特介绍收敛速度的阶的概念，作为判断迭代法收敛速度的重要标准。

设迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，当 $k\to\infty$时，$x_{k+1}\to\alpha$，并记 $e_k=x_k-\alpha$ 。

定义3.2 若存在实数 $p \geq 1$ 和 $c > 0$ 满足

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c \qquad (3\text{-}23)$$

则称迭代法是 p 阶收敛。当 $p=1$ 时，称线性收敛，当 $p>1$ 时称超线性收敛，当 $p=2$ 时称平方收敛。

p 越大迭代法的收敛速度也越快。但是在实际使用中 p 很难直接确定，常常采用一些其他的方法来确定收敛的阶。 使用Taylor展开式是一种常用的方法。

如果 $\varphi(x)$ 在根 α 处充分光滑（各阶导数存在），则可对 $\varphi(x)$ 在 α 处进行Taylor展开，得

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)(x_k-\alpha)+\frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_k-\alpha)^2$$

$$+\cdots+\frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_k-\alpha)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-\alpha)^p$$

如果 $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$，但是 $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$，则

$$x_{k+1}-\varphi(\alpha)=x_{k+1}-\alpha=$$

即

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=\frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!}$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!}=\frac{|\varphi^{(p)}(\alpha)|}{p!}$$

上式说明迭代法具有 p 阶收敛。

定理3.6 如果 $x=\varphi(x)$中的迭代函数$\varphi(x)$ 在根 α 附近满足:

（1）$\varphi(x)$ 存在 p 阶导数且连续;

（2）$\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0,\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$ ，则迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛。

例 取迭代函数 $\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$

要使如下迭代法收敛到 $x^*=\sqrt{5}$，则 α 应取何值？

且其收敛阶是多少？ $x_{k+1}=\varphi(x_k)$

解： $|\varphi'(x)|=|1+2\alpha x|$ 令 $|\varphi'(\sqrt{5})|=|1+2\alpha\sqrt{5}|<1$

$$-1<1+2\alpha\sqrt{5}<1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{5}}<\alpha<0$$

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 时， $\varphi'(\sqrt{5})=0$ 其收敛阶 $p\geq 2$

当 $\alpha\neq-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 时， $0\neq|\varphi'(\sqrt{5})|<1$ 其收敛阶 $p=1$

例3 设 $f(x)=0$ 且 $f(\alpha)\equiv 0, f'(\alpha)\neq 0$ 证明由

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x) \qquad (3\text{-}24)$$

建立的迭代格式至少是平方收敛。

证 根据定理3.6，只需证明 $\varphi'(\alpha)=0$ 。因为

$$\varphi'(\alpha) = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]'_{x=\alpha} = \left[1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]_{x=\alpha} = \left[\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]_{x=\alpha} = 0$$

故该迭代法至少是平方收敛。

由（3-24）式建立的迭代法就是有名的Newton法。

3.2.2 Newton迭代法及其变形

用迭代法解非线性方程时，如何构造迭代函数是非常重要的，那么怎样构造的迭代函数才能保证迭代法收敛呢？不管非线性方程 $f(x)=0$ 的形式如何，总可以构造

$$x=\varphi(x)=x-k(x)f(x) \quad (k(x)\neq 0) \qquad (3\text{–}25)$$

作为方程（3-17）求解的迭代函数。因为

$$\varphi'(x)=1-k'(x)f(x)-k(x)f'(x)$$

而且 $|\varphi'(x)|$ 在根 α 附近越小，其局部收敛速度越快，

故可令

$$\varphi'(\alpha)=1-k'(\alpha)f(\alpha)-k(\alpha)f'(\alpha)=1-k(\alpha)f'(\alpha)=0$$

若 $f'(\alpha)\neq 0$（即不是的重根），则

$$k(\alpha)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

故可取 $k(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$ 代入（3-25）式，得

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

定理3.7 设方程$f(x)=0$的根为 α，且 $f'(\alpha)\neq 0$

则迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (3\text{-}26)$$

至少是平方收敛，并称（3-26）为**Newton迭代法**。

由于**Newton**迭代法带有 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，使用起来不太方便。为了不求导数，可用导数的近似式替代 $f'(x)$。因为

$$f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

将它代入（3-26）的 $f'(x_k)$ 中，得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left[\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right]} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

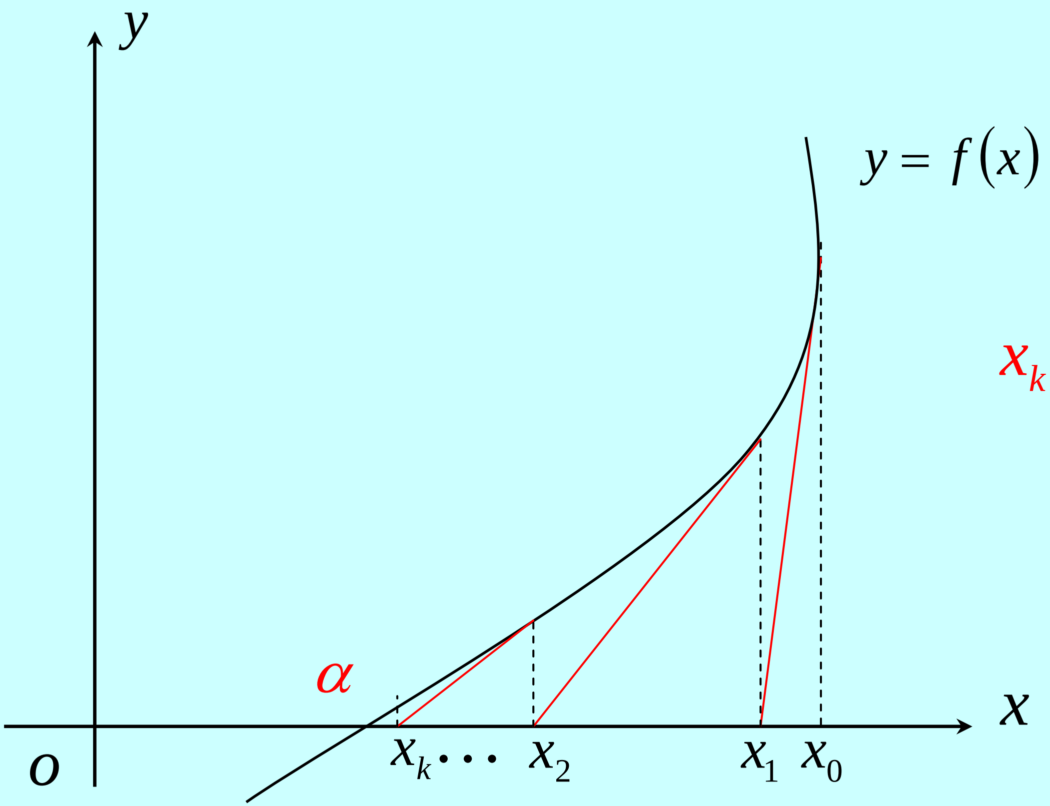
则 $x_{k+1} =$ （3-27）

（3-27）就是弦截法。由于弦截法采用了导数的近似值，故在Newton法和弦截法都收敛的情况下，弦截法的收敛阶为 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$，低于Newton法，为超线性收敛。

Newton法与弦截法的几何意义如下:

使用Newton迭代格式，由 x_k 得到 x_{k+1}，在几何上就是过曲线上的B点作切线 p_1，p_1与 X 轴的交点即为 x_{k+1}。故Newton法也称切线法。

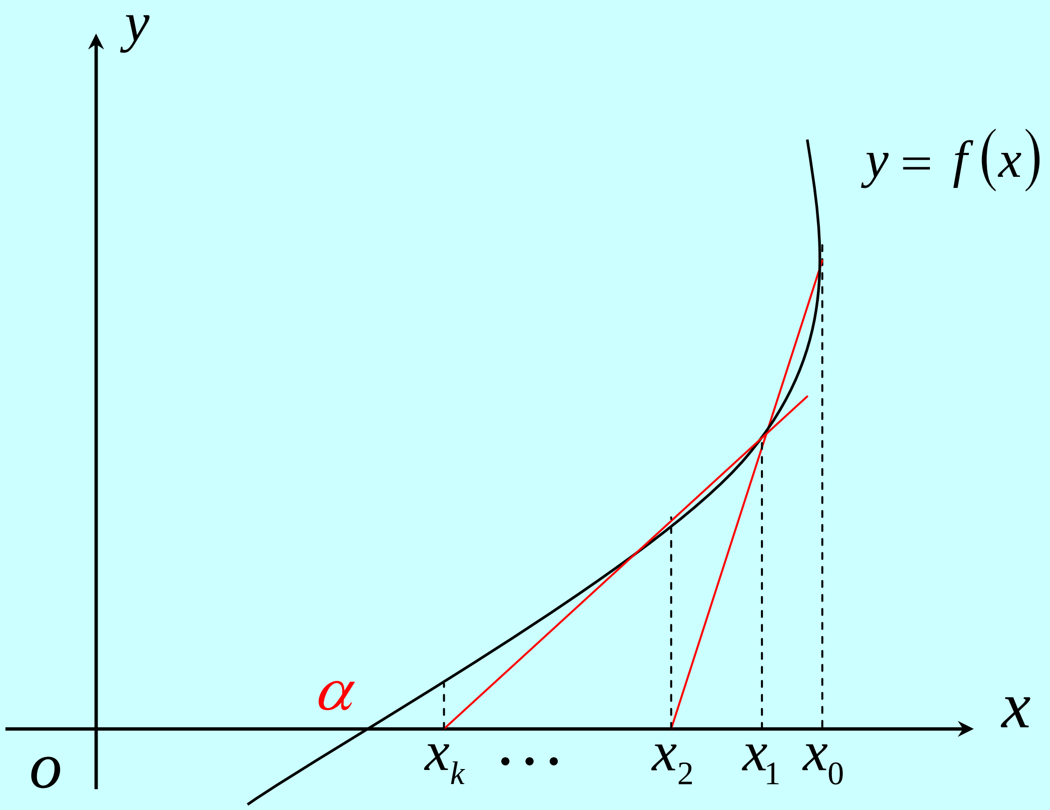
弦截法在几何上是一种以直代曲的近似方法。即用弦Q来替代曲线 AB。用 Q_i 在 X 轴上截取的值，即 Q_i 与 X 轴的交点 x_{k+i} 作为 α 的近似值，故称弦截法。



$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton 迭代法的几何意义

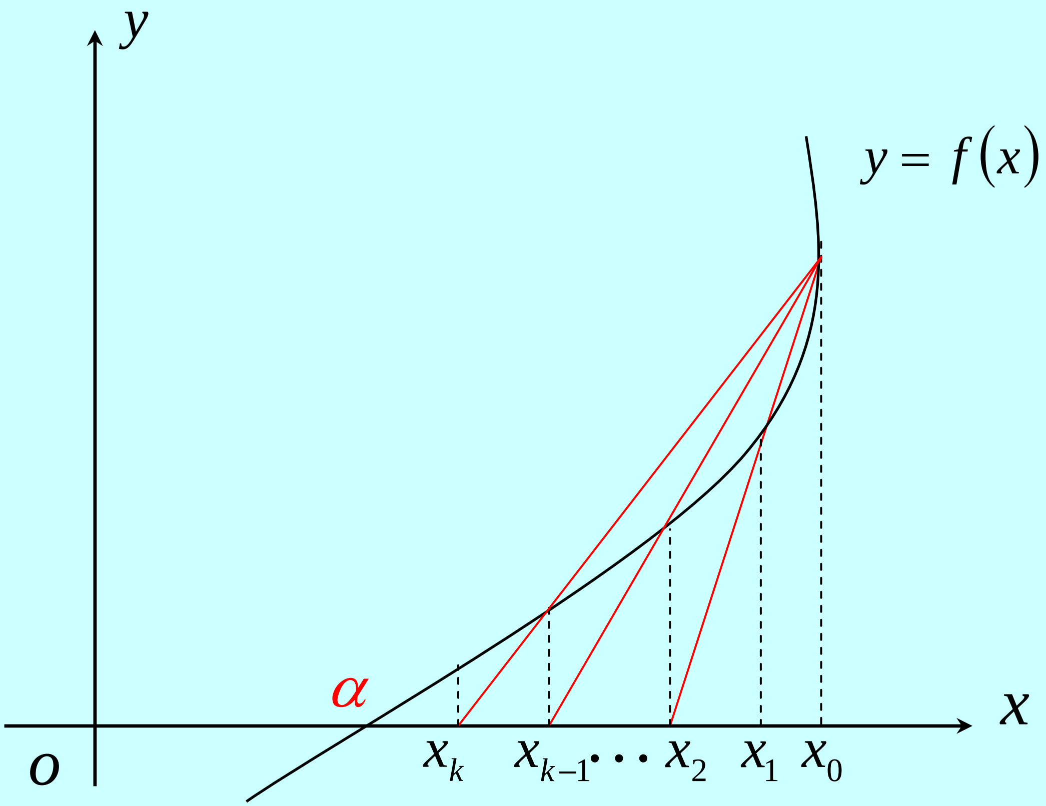
使用**Newton**迭代格式，就是过曲线上的点 x_k 作切线与 X 轴的交点即为 x_{k+1} ，故**Newton**法也称切线法。



$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1}) f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

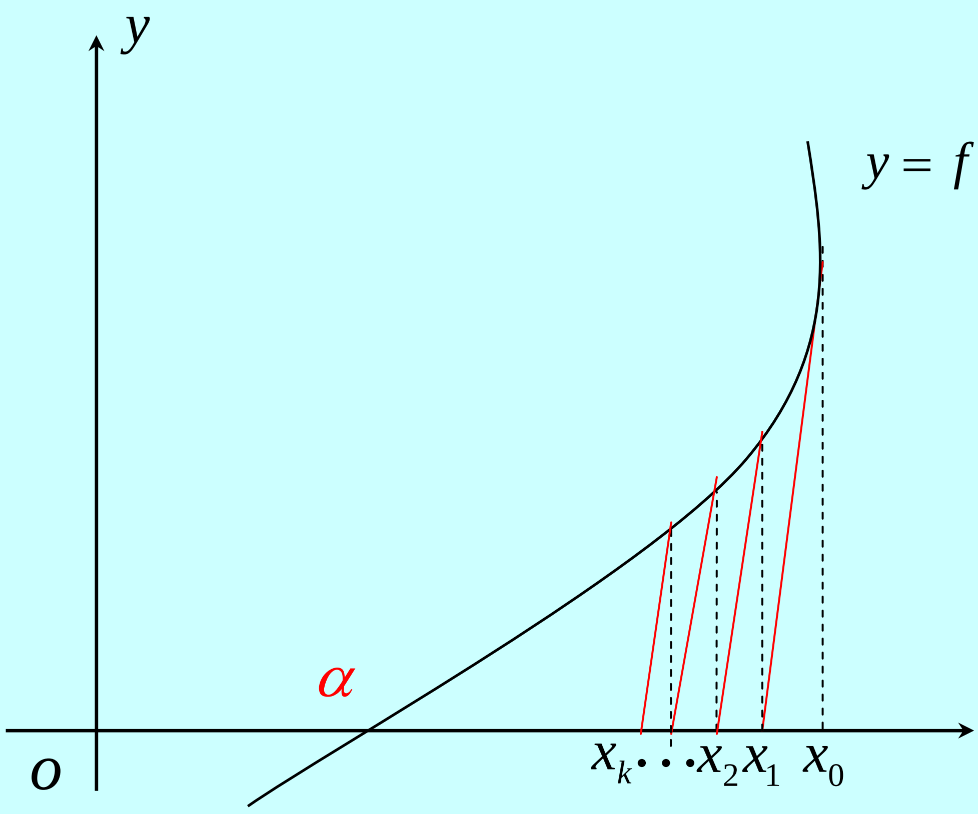
快速弦截法（割线法）的几何意义

在几何上是一种以直代曲的近似方法。即用弦来替代曲线用在轴上截取的值，即弦与 x 轴的交点 x_k 作为 α 的近似值，故称弦截法。



$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_0) f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}$$

单步弦截法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

平行线法的几何意义

从Newton和弦截法的迭代格式中可以看到，弦截法虽然不需要求导数值 $f'(x)$ ，但是使用时需要有前两两步的值， 即开始时需要有两个初始值 x_0, x_1 ；Newton法虽然需求 $f'(x)$ ，但是使用时只用到前一步的值， 即只需要给出一个初始值就可以进行迭代计算。 由于Newton法的收敛性是在根 α 附近讨论的， 因此， 初始值的选取与Newton法的收敛很有关系， 使用时必须充分注意。

例4 用Newton法和弦截法分别计算方程

$$f(x)=x^3-x-1=0$$

在 $x=1.5$ 附近的根 α 。

解 （1）使用Newton法，并取 $x_0=1.5$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1} \qquad (3\text{-}28)$$

$$x_1=x_0-\frac{x_0^3-x_0-1}{3x_0^2-1}=1.5-\frac{(1.5)^3-1.5-1}{3(1.5)^2-1}\approx 1.34783$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx 1.32520$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1.32472$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx 1.32472$$

迭代3次就得到具有6位有效数字的结果。

（2）使用弦截法，并取 $x_0 = 1.5, x_1 = 1.4$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{x_k^2 + x_{k-1}x_k + x_{k-1}^2 - 1}$$

$$x_2 = 1.4 - \frac{(1.4)^3 - 1.4 - 1}{(1.4)^2 + 1.4 \times 1.5 + (1.5)^2 - 1} \approx 1.33522$$

$$x_3 = 1.33522 - \frac{(1.33522)^3 - 1.33522 - 1}{(1.33522)^2 + 1.33522 \times 1.4 + (1.4)^2 - 1} \approx 1.32541$$

（3）取 $x_0 = 0$ ， 使用Newton法计算方程的根。使用公式（3-23）进行迭代计算后得

$$x_1 = -1, x_2 = -0.5, \quad x_3 \approx 0.33, \quad x_4 \approx -1.44$$

这个结果不但偏离所求的根，而且还看不出它的收敛性。从中可知，初始值的选取对Newton法是否收敛的重要性。

使用Newton法时，为了防止迭代发散，我们在迭代格式中附加一个条件:

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

即要求 $|f(x_k)|$ 的值单调下降。为此，引入 $0<\lambda\le 1$，建立

$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad 0<\lambda\le 1 \qquad（3-29）$$

使 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$。其中 λ 称下山因子。称迭代法（3-29）为**Newton**下山法。

下山因子的选择一般采用试算法。即由迭代得到计算值 x_k 后，取不同的 λ 值试算，例如取 $\lambda=1,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{2^3}\cdots$，用（3-29）进行试算，对用公式（3-29）算出的 x_{k+1}

均需要接着计算 $f(x_{k+1})$ ，如果 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$ 成立，则计算值 x_{k+1} 即为第 $k+1$ 步的迭代值。再取 $\lambda=1,\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}\cdots$ 用求得的 x_{k+1} 和（3-29）仿照前面的过程计算第 $k+2$ 步的迭代值。如果计算过程中碰到一个迭代值 x_k 取不到满足要求的 λ 值，则称“下山失败”，需要另取初始值 x_0，仿照上述过程重算。若 $|f(x_k)|<\varepsilon_1$ 或 $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_2$（其中 ε_1 和 ε_2 是事先给定的精度要求值）时，迭代终止，并取 $\alpha\approx x_{k+1}$ 作为根的计算值；如果取不到满足要求的 x_0 迭代终止。

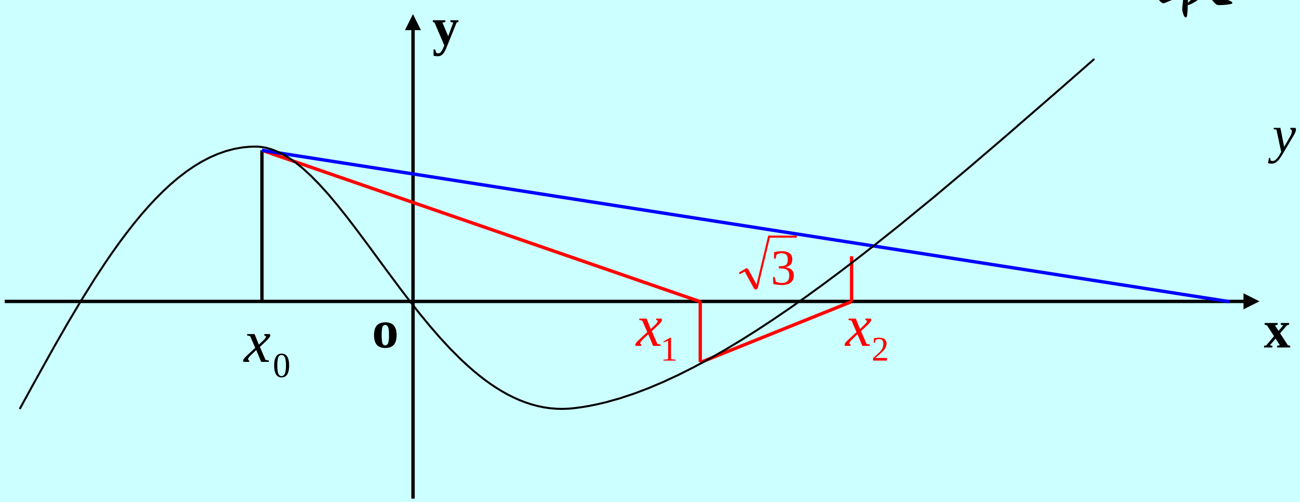
例5 用**Newton**下山法求方程

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x\ =0$$

的一个根。取 $x_0=-0.99$，终止条件：$|x_k-x_{k-1}|\le 10^{-5}$。

Newton下山法迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{x_k^3-3x_k}{3(x_k^2-1)}$，$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$

取 $\lambda=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$



如果不用下山法，取 $x_0 = -0.99$ ，使用**Newton**法进行迭代，从图中的动态轨迹显示，是难于求出根的。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{x_k^3}{3} - x_k}{x_k^2 - 1}$$

```
x_0=-0.99
x_1=32.5058
x_2=21.6911
x_3=14.4915
x_4=9.70724
x_5=6.54091
```

下表是使用**Newton下山法**计算的结果。

k	λ	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0		**-0.99**	0.66657	-0.01990	-33.49589
1	1	32.50598	11416.51989		
	1/2	15.75799	1233.55136		
	1/4	7.38400	126.81613		
	1/8	3.19700	7.69495		
	1/16	**1.10350**	-0.65559	0.21771	-3.01131
2	1	4.11481	19.10899		
	1/2	2.60916	3.31162		
	1/4	**1.85633**	0.27594	2.44594	0.11281
3	1	**1.74352**	0.02316	2.03985	0.01135
4	1	**1.73217**	0.00024	2.00041	0.00012
5	1	**1.73205**	0.00000	2.00000	0.00000
6	1	**1.73205**			

由 $|x_6 - x_5| \le 10^{-5}$ ，迭代终止。

注意： 1） 由 x_k 求 x_{k+1} 是根据（3-29）得到;

2） 在上表中的 x_i 例如 x_2 是根据下式求出

$$x_2 = x_1 - \lambda \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.10350 - (-3.01131) = 4.11481$$

3.2.3 多根区间上的逐次逼近法

方程 $f(x)=0$ 在多根区间 $[a,b]$ 上，根的情况主要有两种：其一，均为单根；其二，有重根。 现在分别讨论如下：

一、$[a,b]$ 是 $f(x)=0$ 仅有单根的多根区间

1）求单根区间

设 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有 m 个根。将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间：$[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$ ，（其中 $b_0=a,b_n=b$ ）

然后计算 $f(b_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的值，由图3-1可知，当 $f(b_i)\cdot f(b_{i+1})<0$ 时，$f(x)=0$ 在 $[b_i,b_{i+1}]$ 上至少有一个根。如果有根区间的个数确为 m，则所得到的有根区间就都是单根区间。如果有根区间的个数小于 m 时，再将有些小区间对分，设对分点为 $b_{i+\frac{1}{2}}$，然后计算 $f(b_{i+\frac{1}{2}})$ 再搜索有根区间，直到有根区间的个数是 m 为止。

2）在单根区间 $[c,d]$ 上求根

单根区间上求根的方法在前面已作介绍。在此介绍一种根的搜索法，它可用于求迭代法的初始值，也可用于求 $f(x)=0$ 的近似根。

将区间 $[c,d]$ 对分，设对分点（即区间中点）为 $x_0=\frac{1}{2}(c+d)$，计算 $f(x_0)$，如果 $f(x_0)$ 与 $f(c)$ 同号，说明方程的根 α 在 x_0 的右侧，此时令 $x_0=c_1, d=d_1$ 否则令 $c=c_1, x_0=d_1$。不管是那种情况，新的有根区间为 $[c_1,d_1]$，其长度为原来区间 $[c,d]$ 的一半。

用同样方法可将含根区间的长度再压缩一半。如此继续下去，可使有根区间为 $[c_n, d_n]$ ，其长度为

$$d_n - c_n = \frac{1}{2^n}(d - c)$$

只要 n 足够大，有根区间 $[c_n, d_n]$ 的长度就足够小，当 $d_n - c_n$ 达到根的精度要求时，取

$$x_n = \frac{1}{2}(d_n + c_n)$$

就可作为根 α 的近似值。这种搜索根的方法称二分法。

$$f(c)\cdot f(t) > 0 \qquad\qquad f(d)\cdot f(t) < 0$$

$$[c, d] \supset [c_1, d_1] \supset \cdots \supset [c_n, d_n] \supset \cdots$$

$$|x_n - \alpha| = \left|\frac{d_n + c_n}{2} - \alpha\right| < \frac{d_n - c_n}{2} = \frac{d-c}{2^{n+1}} \quad < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > \frac{d-c}{\varepsilon} \ \Rightarrow n > \log_2 \frac{d-c}{\varepsilon} - 1$$

如果发现用二分法求根的过程中，有根区间趋于零的速度较慢，此时，可以从某个区间 $[c_i, d_i]$ 开始使用其他迭代法求解，将 c_i 或 d_i 作为迭代法的初始值。

例6 求 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.79x-41.769=0$ 在[0，8]中的三个根。

解 首先将有根区间[0，8]三等分，得

[0，2.7] [2.7，5.4] [5.4，8]

搜索单根区间:

$$[0,2.7] \qquad f(0)\cdot f(2.7)=(-41.768)\cdot(1.728)<0$$

$$[2.7,5.4] \qquad f(2.7)\cdot f(5.4)=(1.728)\cdot(1.485)>0$$

$$[5.4,8] \qquad f(5.4)\cdot f(8)=(1.485)\cdot(70.151)>0$$

$$[2.7,4] \qquad f(2.7)\cdot f(4)=(1.7)\cdot(-0.209)<0$$

$$[4,5.4] \qquad f(4)\cdot f(5.4)=(-0.2)\cdot(1.4)<0$$

故 $f(x)=0$ 的三个根分别在区间 $[0,\ 2.7]$, $[2.7,\ 4]$, $[4,\ 5.4]$ 中。用计算单根的方法，可分别求出三个区间上的计算根。

二、$f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有重根

设 α 是 $f(x)=0$ 的 m 重根，其中$m\geqslant 2$整数， 则有

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \qquad 且 g(\alpha)\neq 0$$

此时 $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0, f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

在这种情况下，如果 $f'(x_k)\neq 0$，虽然使用**Newton**法也可以继续算下去，但是由于**Newton**法在定理3.7中的条件 $f'(\alpha)\neq 0$ 不满足，它的收敛速度可能较慢。事实上，由 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ 且$g(\alpha)\neq 0$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)}$$

$$=x-(x-\alpha)\frac{g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$$

则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{g(x)}{m\cdot g(x)+(x-\alpha)g'(x)}-(x-\alpha)\cdot\left[\dfrac{g(x)}{m\cdot g(x)+(x-\alpha)g'(x)}\right]'$

$$\varphi'(\alpha)=1-\frac{g(\alpha)}{m\cdot g(\alpha)+0}-0=1-\frac{1}{m}\neq 0$$

从而得到在这种条件下的**Newton**法如果收敛，它必是线性收敛的。为了提高收敛的阶， 可取

$$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (3\text{–}31)$$

从而 $\varphi'(\alpha)=1-\dfrac{m}{m}=0,$

故迭代法（3-31）至少是平方收敛的。

当 m 不知道时，可采用试探法或其他变形公式，在此就不介绍了。

例7 求方程 $f(x)=x^4-4x^2+4=0$ ，二重根 $\sqrt{2}$ 的计算值。

解 （1） 使用**Newton**法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=x_k-\frac{x_k^4-4x_k^2+4}{4x_k^3-8x_k}=x_k-\frac{x_k^2-2}{4x_k}$$

（2） 使用

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{x_k^2 - 2}{4x_k} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

上述两种方法都取初始值 $x_0 = 1.5$ ，计算结果见下表。

x_i	方法（1）结果	方法（2）结果
1	1.453333	1.416667
2	1.436607	1.414216
3	1.425498	1.414214

从上面两种方法的计算解中可以看出，方法（2）的收敛速度较方法（1）快。

3.4 迭代法的加速

序列收敛的加速问题：

已知 $x_k \to x^*$ 改造 x_k 得到 $y_k \to x^*$

使得 $$\lim_{k\to\infty}\frac{y_k - x^*}{x_k - x^*} = 0$$

策略之一：通过前后两步迭代值加权平均

$$y_{k+1} = \beta_0 x_k + \beta_1 x_{k+1} \qquad \beta_0 + \beta_1 = 1$$

旧迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

新迭代 $x_{k+1} = \beta_0 x_k + \beta_1 \varphi(x_k)$

例： $x_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \to 0$ 取

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\frac{1}{k(k+1)} \to 0$$

3.4.1 超松弛法（SOR法）

G—S迭代格式

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$$

取 $x_i^{(k+1)} = \beta_0 x_i^{(k)} + \beta_1 \bar{x}_i^{(k+1)} \qquad \beta_0 + \beta_1 = 1$

令 $\beta_1 = \omega,\ \beta_0 = 1-\omega$ 逐次超松弛法，SOR法，松弛因子 ω

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$$= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \qquad (3-54)$$

SOR法的收敛速度与 ω 有关，当 $\omega=1$ ，它就是G—S法。

考虑SOR法的矩阵格式和收敛性，由（3—54）

$$a_{ii}x_i^{(k+1)}=(1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)}+\omega\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(1-\omega)\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)})$$

整理后得 $(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

令 $\boldsymbol{L}_\omega=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}],\quad \boldsymbol{f}=\omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$

则 $$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{L}_\omega\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$$

SOR法收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1$,

$$\boldsymbol{L}_\omega = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}]$$

$$= (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}]$$

$$= (\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}]$$

$$\det(\boldsymbol{L}_\omega) = \det((\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}) \cdot \det((1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U})$$

$$= 1 \cdot (1-\omega)^n \quad = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

令 $\quad |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \Rightarrow |\lambda_1|^n \geq |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| = (1-\omega)^n$

$$\Rightarrow \rho(\boldsymbol{L}_\omega) \geq |1-\omega|$$

必要条件

由收敛充要条件 $\quad |1-\omega| \leq \rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1 \quad \Rightarrow 0 < \omega < 2$

可以证明，如果A是对称正定矩阵，则满足 $0<\omega<2$ 的任意 ω 和初始向量 $x^{(0)}$ ，SOR法均收敛。从而有

如果A为对称正定矩阵，则G－S迭代法必收敛。

使SOR法（3－54）收敛最快的松弛因子称为最优松弛因子，记为 ω_{opt}，使得 $\rho(L_{\omega})$ 最小。

但在实际计算中，最优松弛因子较难事先确定，一般可用试算法取近似最优值。在有些数学软件中有取近似最优松弛因子的算法。

P86 例1－2

3.4.2 Aitken加速

设数列$\{x_k\}$为线性收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|}=c>0$

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\approx c,\quad \frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}\approx c,\quad \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\approx\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}$$

$$\Rightarrow (x_k-\alpha)^2\approx(x_{k+1}-\alpha)(x_{k-1}-\alpha)$$

$$\Rightarrow x_k^2-2\alpha x_k+\alpha^2\approx x_{k+1}x_{k-1}-(x_{k-1}+x_{k+1})\alpha+\alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha\approx\frac{x_{k-1}x_{k+1}-x_k^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}=x_{k+1}-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}$$

令 $\bar{x}_k=x_{k+1}-\dfrac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}$ 即对数列$\{x_k\}$进行Aitken加速。

如果原数列$\{x_k\}$为线性收敛，则Aitken加速后新数列收敛更快

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\to c\neq 0, \qquad \frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}\to c\neq 0,$$

$$\Rightarrow x_{k+1}-\alpha\approx c(x_k-\alpha), \qquad \Rightarrow x_{k-1}-\alpha\approx\frac{1}{c}(x_k-\alpha)$$

$$\frac{\bar{x}_k-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}=\frac{x_{k+1}-\dfrac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}=1-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{(x_{k+1}-\alpha)(x_{k-1}-2x_k+x_{k+1})}$$

$$=1-\frac{((x_{k+1}-\alpha)-(x_k-\alpha))^2}{(x_{k+1}-\alpha)((x_{k-1}-\alpha)-2(x_k-\alpha)+(x_{k+1}-\alpha))}$$

$$\approx 1-\frac{(c-1)^2}{c(\dfrac{1}{c}-2+c)}=1-\frac{(c-1)^2}{(c-1)^2}=0 \qquad \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\bar{x}_k-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}=0$$

Aitken加速的两种基本方式

1. 对于没有（显示）迭代格式的数列

$$\bar{x}_k = x_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}$$

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ \cdots,\ x_{k-1},\quad x_k,\quad x_{k+1},\ \cdots$$

$$\bar{x}_1,\quad \bar{x}_2,\quad \cdots,\qquad \bar{x}_k,\qquad \cdots$$

$$\bar{\bar{x}}_2,\quad \cdots,\qquad \bar{\bar{x}}_k,\qquad \cdots$$

特点：加速后的新数列不改变原数列

2. 对于有显示迭代格式的数列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$

Steffensen 迭代法

令 $y_k=\varphi(x_k),\quad z_k=\varphi(y_k),$

再加速 $x_{k+1}=z_k-\dfrac{(z_k-y_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}=\varphi(\varphi(x_k))-\dfrac{(\varphi(\varphi(x_k))-\varphi(x_k))^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}$

迭代

迭代

$$\left.\begin{array}{c} x_0\\ \downarrow\\ y_0\\ \downarrow\\ z_0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{c} x_1\\ \downarrow\\ y_1\\ \downarrow\\ z_1\end{array}\right\}\ \cdots\ \left.\begin{array}{c} x_k\\ \downarrow\\ y_k\\ \downarrow\\ z_k\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{c} x_{k+1}\\ \downarrow\\ y_{k+1}\\ \downarrow\\ z_{k+1}\end{array}\right\}\ \cdots$$

加速 加速 加速 加速

特点：加速引入到迭代过程，原数列被改变。 P88例1

牛顿（**Issac Newton, 1642-1727**），英国数学家、物理学家, 17世纪科学革命的顶峰人物。在力学上牛顿提出作为近代物理学基础的力学三大定律和万有引力定律；他关于白光由色光组成的发现为物理光学奠定了基础；他还是微积分学的创始人之一。他的《自然哲学的数学原理》是近代科学史上的重要著作。

在牛顿的全部科学贡献中，数学成就占有突出的地位。微积分的创立是牛顿最卓越的数学成就，它为近代科学发展提供了最有效的工具，开辟了数学上的一个新纪元。此外，他的数学工作还涉及代数、解析几何、数值分析、概率论和初等数论等众多领域。

1686年，牛顿写成划时代的伟大著作《自然哲学的数学原理》一书（在**1687**年出版），在这部书中，牛顿从力学的基本概念(质量、动量、惯性、力)和基本定律(运动三定律)出发，运用他所发明的微积分这一锐利的数学工具，不但从数学上论证了万有引力定律，而且把经典力学确立为完整而严密的体系，把天体力学和地面上的物体力学统一起来，实现了物理学史上第一次大的综合。

我不知道在别人看来，我是什么样的人；但在我自己看来，我不过就象是一个在海滨玩耍的小孩，为不时发现比寻常更为光滑的一块卵石或比寻常更为美丽的一片贝壳而沾沾自喜，而对于展现在我面前的浩瀚的真理的海洋，却全然没有发现。—牛顿

1643年1月4日，在英格兰林肯郡小镇沃尔索浦的一个自耕农家庭里，牛顿诞生了。

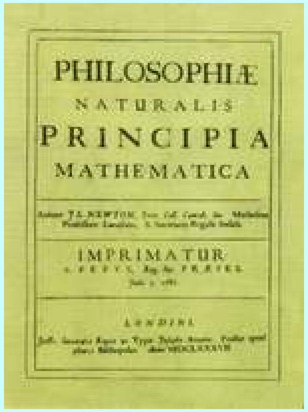
1727年3月20日，伟大艾萨克·牛顿逝世。同其他很多杰出的英国人一样，他被埋葬在了威斯敏斯特教堂。他的墓碑上镌刻着:

让人们欢呼这样一位多么伟大的人类荣耀曾经在世界上存在

伟大的成就之一：建立微积分

伟大的成就之二：对光学的三大贡献

伟大的成就之三：构筑力学大厦



作者姓名：张宏伟、金光日、李崇君

工作单位：大连理工大学数学科学学院

联系方式：E-mail：chongjun@dlut.edu.cn