《随机过程》第六章作业答案

6.1　袋中有 5 个黑球 5 个白球。重复做下列试验：从袋中随机取一个球，若球是白色的，则放回袋中；若球是黑色的，则不放回。设 $X[n]$ 是第 n 次取球后，袋中所剩下黑球的数目。试：

1) 给出 X_n 的一步状态转移矩阵 $\Pi(1)$；

2) 给出两步状态转移矩阵 $\Pi(2)=\Pi^2(1)$，计算 $\pi_{54}(2)$ 验证和用一步状态转移矩阵的乘方得到的结果是否一致；

3) 当 $n\to\infty$ 时，X_n 的概率分布将如何？证明你的猜想。

解：（1）该过程的状态集为 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$。其状态转移图如下：

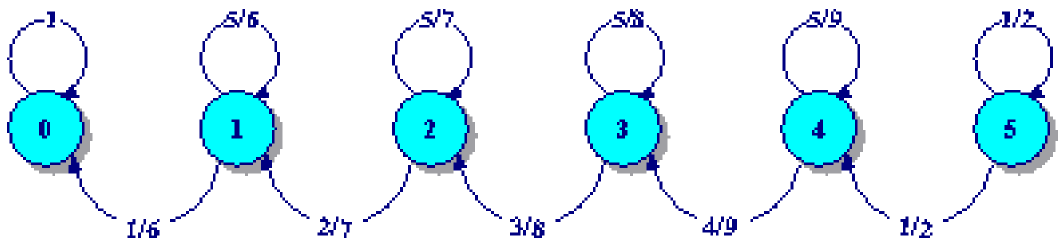


图6.1:一步状态转移图

X_n 的一步转移矩阵为：

$$\Pi(1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{5}{6}&0&0&0&0\\ 0&\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&0&0&0\\ 0&0&\frac{3}{8}&\frac{5}{8}&0&0\\ 0&0&0&\frac{4}{9}&\frac{5}{9}&0\\ 0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

（2）

$$\Pi(2)=\Pi^2(1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ \frac{11}{36}&\frac{25}{36}&0&0&0&0\\ \frac{1}{21}&\frac{65}{147}&\frac{25}{49}&0&0&0\\ 0&\frac{3}{28}&\frac{225}{448}&\frac{25}{64}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{6}&\frac{85}{162}&\frac{25}{81}&0\\ 0&0&0&\frac{2}{9}&\frac{19}{36}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

由状态图可知：

$$\pi_{54}(2) = \pi_{55}(1)\pi_{54}(1) + \pi_{54}(1)\pi_{44}(1) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{19}{36}$$

与用 $\Pi(2) = \Pi^2(1)$ 算得结果一致。

（3）猜想当 $n \to \infty$ 时，$P\{X(n) = 0\} = 1$，$P\{X(n) \neq 0\} = 0$。

证明：由状态图可知，0 为常返态，其它状态为瞬过态则：

$$\lim_{n\to\infty}\Pi^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以得，

$$P_{n\to\infty}(n) = P(0)\cdot\lim_{n\to\infty}\Pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$P(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

法二：Π 可分解为 $\Pi = \mathbf{P}^{-1}diag\left(1, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{1}{2}\right)\mathbf{P}$

则：$\Pi(n) = \Pi^n = \mathbf{P}^{-1}diag\left(1, \left(\frac{5}{6}\right)^n, \left(\frac{5}{7}\right)^n, \left(\frac{5}{8}\right)^n, \left(\frac{5}{9}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\mathbf{P}$

$$\lim_{n\to\infty}\Pi^n = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^{-1}diag\left(1, \left(\frac{5}{6}\right)^n, \left(\frac{5}{7}\right)^n, \left(\frac{5}{8}\right)^n, \left(\frac{5}{9}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\mathbf{P}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以得，

$$P_{n\to\infty}(n) = P(0)\cdot\lim_{n\to\infty}\Pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$P(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.5　设某车间有两个独立工作的机器，且每个机器有两个状态：正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a ，机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b 。设 X_n 是第 n 天该车间正常工作的机器数，

1) 证明 X_n 是一个三状态的 Markov 链，并给出一步状态转移矩阵 Π ；

2) 证明该 Markov 链的稳态状态概率是参数为 $p = b/(a+b)$ 的二项分布；

3) 若车间里有 n 台机器，则稳态概率是什么？

解:

（１）由题意知随机变量 X 将来的状态置于当时状态有关，而与过去时刻的状态无关，所以 X_n 是一 Markov 过程。该过程的状态集为 $S = \{0, 1, 2\}$ 。

其一步转移概率矩阵为：

$$\Pi = \begin{bmatrix} (1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab + (1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{bmatrix}$$

（２）平稳 Markov 链的稳态概率矢量是一常量。设稳态概率矢量 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ ，由稳态概率矢量的性质知

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\Pi$$

即：

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab + (1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{bmatrix}$$

与 $\sum\limits_{i=0}^{2} p_i = 1$ 联立解得：

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{(a+b)^2} & \frac{2ab}{(a+b)^2} & \frac{b^2}{(a+b)^2} \end{pmatrix}$$

令： $p = \frac{b}{a+b}$ ， $q = 1 - p = \frac{a}{a+b}$ ，则，

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2^0 p^0 q^2 & c_2^1 p^1 q^1 & c_2^2\ p^2 q^0 \end{pmatrix}$$

因此，该 Markov 的稳态状态概率是参数为 $p = \frac{b}{a+b}$ 的二项分布。

(3) 考虑只有一台机器时，其状态为 0,1, 此时 $\Pi = \begin{bmatrix} 1-b & b \\ a & 1-a \end{bmatrix}$ 。

设稳态概率矢量 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \end{pmatrix}$，由 $\mathbf{P}=\mathbf{P}\Pi$ 及 $\sum\limits_{i=0}^{1} p_i=1$ 得：

$$\begin{aligned} p_0 &= \tfrac{a}{a+b} \\ p_1 &= \tfrac{b}{a+b} \end{aligned}$$

$$p_i=C_1^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^i\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{1-i},i=0,1$$

说以一台机器正常工作的的概率为 $\frac{b}{a+b}$ 。

当有 n 台机器时，又与机器之间是相互独立的，所以其稳态概率为：

$$p_i=C_n^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^i\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{n-i},i=0,1,\cdots n$$

6.7 设齐次 Markov 链的转移矩阵为

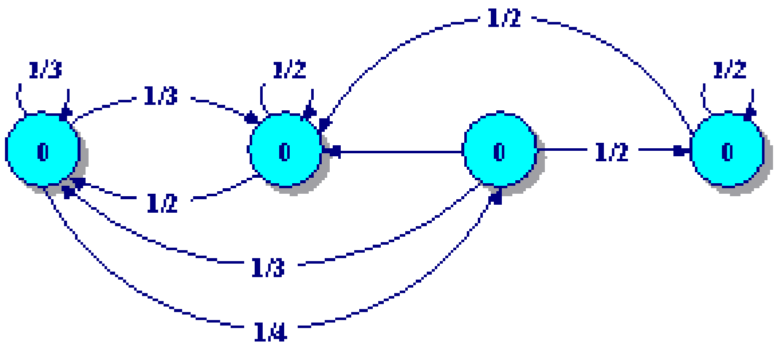
$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) 问该 Markov 链有几个状态？分别判定它们是常返的还是瞬过的。

2) 试给出所有状态的分解。

解：

（ 1 ）该 Markov 链有四个状态。设状态空间为 $S=\{0,1,2,3\}$ 。其一步状态转移图为：



因为该过程的四个状态是互态的，则该过程是不可约的，因此这四个状态都是常返的。

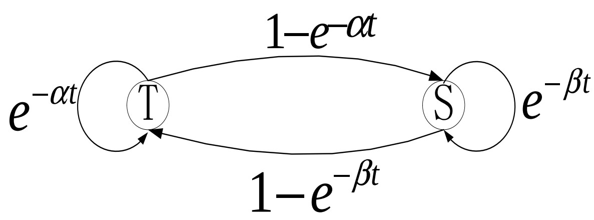
因此状态空间职能分解为 $\{0,1,2,3\}$ 。

6.15　设某说话者的状态有二：说话和沉默。设说话状态的时间是参数为 α 的指数分布，沉默的时间是参数为 β 的指数分布。设有 n 个独立的说话者， $N(t)$ 是在时刻 t 处于说话状态的说话者的数目，

1 ）画出状态转移图并写出状态转移矩阵;

2 ）写出平稳状态方程，并求出平稳状态概率矢量。

解：1 ）对于一个说话者来说，设说话 T 和沉默 S,



所以， n 个独立的说话者处于说话状态的数目 $N(t)$ 的状态转移概率为

$\pi_{00}(t)=e^{-n\beta t}$,

$\pi_{01}(t)=C_n^1 e^{-(n-1)\beta t}(1-e^{-\beta t})$,

$\pi_{02}(t)=C_n^2 e^{-(n-2)\beta t}(1-e^{-\beta t})^2$ ，　$\cdots$,

$\pi_{0n}(t)=(1-e^{-\beta t})^n$

$\pi_{10}(t)=e^{-(n-1)\beta t}(1-e^{-\alpha t})$,

$\pi_{11}(t)=e^{-(n-1)\beta t}e^{-\alpha t}+C_{n-1}^1 e^{-(n-2)\beta t}(1-e^{-\beta t})(1-e^{-\alpha t})$,

$\pi_{12}(t)=C_{n-1}^1 e^{-(n-2)\beta t}(1-e^{-\beta t})e^{-\alpha t}+C_{n-2}^2 e^{-(n-3)\beta t}(1-e^{-\beta t})^2(1-e^{-\alpha t})$,

$\cdots$ ，　$\pi_{1n}(t)=(1-e^{-\beta t})^{n-1}e^{-\alpha t}$,

$\cdots$ ，　$\cdots$ ，　$\cdots$,

$\pi_{n0}(t)=(1-e^{-\alpha t})^n$,

$\pi_n^1(t)=C_n^1 e^{-\alpha t}(1-e^{-\alpha t})^{n-1}$,

$\pi_{n2}(t)=C_n^2 e^{-2\alpha t}(1-e^{-\alpha t})^{n-2}$ ，　$\cdots$,

$\pi_{nn}(t)=e^{-n\alpha t}$,

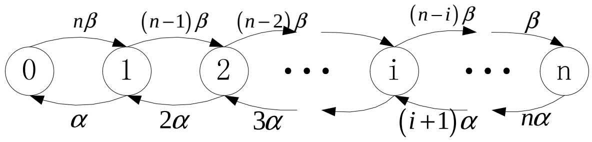
$N(t)$ 的状态转移率定义为

$$\mu_{ij}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\pi_{ij}(t)}{t} & , \quad i\neq j\\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{\pi_{ii}(t)-1}{t} & , \quad i=j\end{cases}$$

经计算，得到状态转移矩阵为

$$
\begin{aligned}
U &= \{\mu_{ij}\}_{(n+1)\times(n+1)} \\
&= \begin{pmatrix}
-n\beta & n\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\alpha & -(n-1)\beta-\alpha & (n-1)\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 2\alpha & -(n-2)\beta-2\alpha & (n-2)\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\alpha & -n\alpha
\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}
\end{aligned}
$$

那么 $N(t)$ 的状态转移率图为（略去自身转移）



2) 设方程的平稳概率矢量为 $\vec{P}=(P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n)$ ，则
平稳状态方程为

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_{ij}P_i=0$$

即有

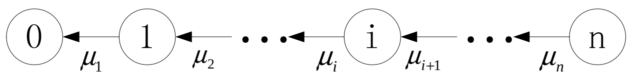
$$\vec{P}U=0$$

再通过归一化条件 $\sum_{i=0}^{n}P_i=1$ ，则可解出方程的解，即平稳状态概率为

$$
\begin{cases}
P_0=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^n \\
P_1=C_n^1\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\frac{\beta}{\alpha+\beta} \\
\qquad\vdots \\
P_i=C_n^i\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{n-i}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^i \\
\qquad\vdots \\
P_n=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^n
\end{cases}
$$

6.19　推导纯灭过程满足的状态微分方程并求解。

解：不妨设纯灭过程的初始状态为 n ，且由于其 $\lambda_i=0$ ，则对于 $i>n$ 的状态将不会再返回。
$\therefore$ 此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,n\}$ 。状态转移图如下：



由状态方程知， $P_i(t+h)=\sum_{j=0}^{n}\pi_{ji}(h)P_j(t) \qquad \forall i\in S$

再由生灭过程的定义，有

$$\begin{aligned} P_i(t+h) &= \sum_{j=i-1}^{i+1}\pi_{ji}(h)P_j(t)+o(h) \\ &= [1-\mu_i h]P_i(t)+h\mu_{i+1}P_{i+1}(t)+o(h) \end{aligned}$$

整理，得 $P_i'(t)=-\mu_iP_i(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t)$ ，对于任意 $1\le i\le n-1$ 都成立。

对于 $i=0,n$ ，由其纯灭性知， $P_0'(t)=\mu_1P_1(t)$ ， $P_n'(t)=-\mu_nP_n(t)$ 。

综上，初始状态为 n 的纯灭过程所满足的状态微分方程为

$$\begin{cases} P_i'(t)=-\mu_iP_i(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t) & 1\le i\le n-1 \quad (1) \\ P_0'(t)=\mu_1P_1(t) & i=0 \quad (2) \\ P_n'(t)=-\mu_nP_n(t) & i=n \quad (3) \end{cases}$$

求解上述方程的解：

设初始状态概率矢量为 $\vec{P}(0)=(0,0,\cdots,1)$,

即 $\quad P_n(0)=1, \quad P_i(0)=0, \quad 0\le i\le n-1$

求方程 (3)，得

$$P_n(t)=e^{-\mu_n t} \quad t\ge 0$$

令 $\quad q_i(t)=e^{-\mu_i t}P_i(t) \qquad (4),$

对其求导，得 $\quad q_i'(t)=e^{-\mu_i t}P_i'(t)+\mu_i e^{-\mu_i t}P_i(t)$

将 (1) 代入，得 $\quad q_i'(t)=e^{-\mu_i t}\mu_{i+1}P_{i+1}(t)$

由于对 $\quad i<n$ ， 有

$$P_i(0)=0 \qquad \therefore \quad q_i(0)=0$$

$$\therefore \qquad q_i(t)=\int_0^t e^{-\mu_i x}\mu_{i+1}P_{i+1}(x)\,dx$$

代入 (4)，解得

$$P_i(t)=e^{-\mu_i t}\mu_{i+1}\int_0^t e^{\mu_i x}P_{i+1}(x)\,dx \qquad 0\le i\le n-1$$

对于 $i=n-1$ ，

$$P_{n-1}(t)=e^{-\mu_{n-1}t}\mu_n\int_0^t e^{\mu_{n-1}x}e^{-\mu_n x}\,dx$$

$\therefore$ 当 $\mu_n\ne\mu_{n-1}$ ，

$$P_{n-1}(t)=\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}-\mu_n}(e^{-\mu_n t}-e^{-\mu_{n-1}t})$$

当 $\mu_n=\mu_{n-1}$ ，

$$P_{n-1}(t)=\mu_n t e^{-\mu_{n-1}t}=\mu_n t e^{-\mu_n t}$$

同理，逐次迭代，得到一般的 $P_i(t)$ 表达式：
当 μ_i 两两不相等时，

$$P_i(t) = \prod_{j=i+1}^{n} \mu_j [\sum_{l=i}^{n} c_{li} e^{-\mu_l t}] \quad 其中 \quad c_{li} = \frac{1}{\prod_{k \neq l}(\mu_k - \mu_l)}$$

当 $\mu_n = \mu_{n-1} = \cdots = \mu_1 = \mu_0 = \mu$ 时，

$$P_i(t) = \frac{(\mu t)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\mu t}$$

(注：答案仅供参考，答案中可能存在错误的地方，欢迎指出错误！)