《随机过程》第三章作业答案

3.1 试证明式 (3.4) 和式 (3.5) 。

解：由定义知道

$$E\{|X|^n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

若 $n = 2k$ ，则

$$E\{X^n\} = E\{|X|^n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2k} e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

令 $z = x/\sigma$ ，则 $x = \sigma z$ ， $dx = \sigma dz$ ，所以

$$\begin{aligned}
E\{X^{2k}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^{2k}z^{2k}e^{-z^2/2}\sigma dz \\
&= \sigma^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^{2k}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}z^{2k}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}z^{2k-1}d(-e^{-z^2/2}) \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Big[-e^{-z^2/2}z^{2k-1}\Big|_0^{\infty} + (2k-1)\int_{0}^{\infty}z^{2k-2}e^{-z^2/2}dz\Big] \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(2k-1)\int_{0}^{\infty}z^{2k-2}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1
\end{aligned}$$

$E\{X^{2k+1}\}$ 的被积分函数为奇函数，故积分为零。

$$\begin{aligned}
E\{|X|^{2k+1}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2k+1}e^{-x^2/2\sigma^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{\infty}x^{2k+1}e^{-x^2/2\sigma^2}dx
\end{aligned}$$

同样，令 $z = x/\sigma$ ，则 $x = \sigma z$ ， $dx = \sigma dz$ ，所以

$$\begin{aligned}
E\{|X|^{2k+1}\} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{\infty}\sigma^{2k+1}z^{2k+1}e^{-z^2/2}\sigma dz \\
&= \sigma^{2k+1}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}z^{2k+1}e^{-z^2/2}dz
\end{aligned}$$

进一步，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty z^{2k+1}e^{-z^2/2}dz &= \int_0^\infty z^{2k}d(-e^{-z^2/2}) \\
&= -z^{2k}e^{-z^2/2}\Big|_0^\infty + 2k\int_0^\infty z^{2k-1}e^{-z^2/2}dz \\
&= 2k\int_0^\infty z^{2k-1}e^{-z^2/2}dz \\
&= 2k\cdot(2k-2)\cdots 4\cdot 2\int_0^\infty ze^{-z^2/2}dz \\
&= 2^k k!(-e^{-z^2/2}\Big|_0^\infty) \\
&= 2^k k!
\end{aligned}$$

所以

$$E\{|X|^{2k+1}\} = \sigma^{2k+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^k k!.$$

3.2　试证明式 (3.6) 。

证明：由特征函数的定义知

$$\begin{aligned}
\Phi_X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x-(x-\eta)^2/2\sigma^2}dx \\
&= e^{j\eta\omega-\sigma^2\omega^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-j\omega\sigma}^{\infty-j\omega\sigma} e^{-z^2/2}dz \\
&= e^{j\eta\omega-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}
\end{aligned}$$

3.3　已知二维 Gauss 随机向量的联合概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\Big[\Big(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\Big)^2 - 2\rho\Big(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\Big)\Big(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\Big) + \Big(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\Big)^2\Big]\Big\}$$

试证明： X 和 Y 的边界概率密度函数分别是均值为 m_1 和 m_2 、方差为 σ_1^2 和 σ_2^2 的 Gauss 随机变量的概率密度函数。

证明：由 X 和 Y 的对称性知道，只要对随机变量 X 证明结论即可，对 Y 则类似可得。由

概率密度函数的相容性原理知道

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2\right]} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} \int_{-\infty-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)}^{\infty-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y'-m_2}{\sigma_2}\right)^2} dy' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2}
\end{aligned}$$

3.8 设 $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$，其中 A 和 B 是独立同分布的均值为零方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

1) $X(t)$ 的均值函数和自相关函数；

2) $X(t)$ 的一阶概率密度函数；

3) $X(t)$ 二阶概率密度函数。

解: 1) 由均值函数的定义知道

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= E\{X(t)\} = E\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\} \\
&= E\{A\}\cos\omega t + E\{B\}\sin\omega t = 0
\end{aligned}$$

又由自相关函数的定义知道

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E\{X(t)X(t+\tau)\} \\
&= E\Big\{\Big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\Big) \\
&\quad \times\Big(A\cos\omega(t+\tau) + B\sin\omega(t+\tau)\Big)\Big\} \\
&= E\{A^2\}\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) \\
&\quad +E\{B^2\}\sin\omega t\sin\omega(t+\tau) \\
&= \sigma^2\Big[\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + \sin\omega t\sin\omega(t+\tau)\Big] \\
&= \sigma^2\cos\omega\tau
\end{aligned}$$

2) 因为 A 和 B 都是正态随机变量，因此它们的线性组合也是正态随机变量，由 1) 的结论知道 $C_X(t,t) = \sigma^2$, 因此其一阶概率密度函数为

$$f_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

3) 正态随机过程的概率密度函数可以写为

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\Big[\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2-2\rho\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)\Big(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big)+\Big(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big)^2\Big]\Big\}$$

其中 $m_1=m_X(t_1)$ ， $m_2=m_X(t_2)$ ， $\sigma_1^2=C(t_1,t_1)$ ， $\sigma_2^2=C(t_2,t_2)$ ， $\rho=C(t_1,t_2)/\sigma_1\sigma_2$ 。本题中， $m_1=m_2=0$ ， $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ ， $\rho=\cos\omega\tau$ ，因此，

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2|\sin\omega\tau|}\exp\Big\{-\frac{x_1^2-2x_1x_2\cos\omega\tau+x_2^2}{2(\sigma\sin\omega\tau)^2}\Big\}.$$

3.18 设 $N_1(t),N_2(t),\cdots,N_k(t)$ 分别是参数为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的 Possion 过程, 且 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)+\cdots+N_k(t)$ ，且 $N_i(t)$ 相互独立，试求 $P\{N(t)=k\},k\geq 0$ 。

解：由 $N_i(t)$ 的一阶概率质量函数为

$$P\{N_i(t)=k\}=\frac{(\lambda_i t)^k}{k!}e^{-\lambda_i t},k=0,1,2,\cdots$$

知道， $N_i(t)$ 的概率生成函数为

$$G_{N_i(t)}(z)=E\{z^{N_i(t)}\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\lambda_i t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=e^{\lambda_i t(z-1)}$$

因为 $N_1(t),N_2(t),\cdots,N_k(t)$ 相互独立，所以有

$$G_{N(t)}(z)=G_{N_1(t)}(z)G_{N_2(t)}\cdots G_{N_k(t)}(z)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)t(z-1)}$$

对 $G_{N(t)}(z)$ 反变换得：

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)t}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)t},k=0,1,2,\cdots$$

所以 $N(t)$ 是参数为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ 的 Possion 过程。

3.21 设 $N(t)$ 是一个参数为 λ 的 Poisson 过程。设该 Poisson 过程中，每一事件发生时就抛硬币设正面出现的概率为 p 。记 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为时间 $[0,t)$ 内正面和反面出现的次数。

1) 试求 $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N(t)=k+j\}$ ；

2) 证明 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为相互独立的参数为 $p\lambda$ 和 $(1-p)\lambda$ 的 Poisson 随机过程。

解：1) 显然， $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N(t)=k+j\}$ 表示在抛了 $k+j$ 次硬币后，出现正面次数和反面次数分别为 k 和 j 的概率。所以

$$P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N_2(t)=k+j\}=\binom{k+j}{j}p^j(1-p)^k$$

2) 因为

$$
\begin{aligned}
P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\} &= P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N_2(t)=k+j\}P\{N(t)=k+j\} \\
&= C_{k+j}^{j}p^j(1-p)^k\frac{\lambda^{k+j}e^{-\lambda}}{(k+j)!}
\end{aligned}
$$

对 $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}$ 求边界概率密度函数

$$
\begin{aligned}
P\{N_1(t)=j\} &= \sum_{k=0}^{\infty}P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}=\frac{(p\lambda)^je^{-p\lambda}}{j!} \\
P\{N_2(t)=k\} &= \sum_{j=0}^{\infty}P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}=\frac{((1-p)\lambda)^je^{-(1-p)\lambda}}{k!}
\end{aligned}
$$

从而得 $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}=P\{N_1(t)=j\}\cdot P\{N_2(t)=k\}$ 。由概率性质知 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为相互独立的参数为和的 Poisson 随机过程，命题得证。

3.25 设随机信号过程 $Z(t)$ 的取值为 0 或 1 ，当计数过程 $N(t)$ 的时间每发生一次，则 $Z(t)$ 的值变化一次。已知 $P\{N(t)=k\}=\frac{1}{1+\lambda t}(\frac{\lambda t}{1+\lambda t})^k \quad k=0,1,2,\cdots\cdots$ 试求的一阶概率质量函数和均值函数

解：设 $P\{Z(0)=0\}=p$ ； $P\{Z(0)=1\}=1-p$ 。此外，由题意知：

$$
\begin{aligned}
P\{N(t)=\text{偶数}\} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda t}(\frac{\lambda t}{1+\lambda t})^{2m}=\frac{\frac{1}{1+\lambda t}}{1-(\frac{1}{1+\lambda t})^2}=\frac{1+\lambda t}{1+2\lambda t} \\
P\{N(t)=\text{奇数}\} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda t}(\frac{\lambda t}{1+\lambda t})^{2m+1}=\frac{\frac{\lambda t}{(1+\lambda t)^2}}{1-(\frac{1}{1+\lambda t})^2}=\frac{\lambda t}{1+2\lambda t}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
P\{Z(t)=0\} &= P\{Z(t)=0|Z(0)=0\}P\{Z(0)=0\}+P\{Z(t)=0|Z(0)=1\}P\{Z(0)=1\} \\
&= P\{Z(t)=\text{偶数}\}P\{Z(0)=0\}+P\{Z(t)=\text{奇数}\}P\{Z(0)=1\} \\
&= \frac{1+\lambda t}{1+2\lambda t}p+\frac{\lambda t}{1+2\lambda t}(1-p)=\frac{p+\lambda t}{1+2\lambda t}
\end{aligned}
$$

因此

$$
P\{Z(t)=1\}=1-P\{Z(t)=0\}=\frac{1+\lambda t-p}{1+2\lambda t}
$$

所求一阶概率质量函数为

$$
P\{Z(t)=0\}=\frac{p+\lambda t}{1+2\lambda t},\qquad P\{Z(t)=1\}=\frac{1+\lambda t-p}{1+2\lambda t}
$$

均值函数为

$$
m_Z(t)=0\cdot P\{Z(t)=0\}+1\cdot P\{Z(t)=1\}=\frac{1+\lambda t-p}{1+2\lambda t}
$$

3.28 设 $Z(t)=X(t)-aX(t-s)$ ，其中 $X(t)$ 是 Brown 过程，试求 $Z(t)$ 的一阶概率密度函数和均值函数 $m_Z(t)$ 。

解：由 $X(t)$ 是 Brown 过程，知 $X(t)$ 是一齐次独立增量过程，并且是一个正态过程。不妨设 X 的概率密度函数为

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}}$$

因为

$$Z(t)=X(t)-aX(t-s)=[X(t)-X(t-s)]+(1-a)X(t-s)$$

由 $X(t)$ 是一齐次独立增量过程，并且是一个正态过程知： $X(t)-X(t-s)$ 与 $X(t-s)$ 相互独立，所以

$$E\{Z(t)\}=E\{X(t)-X(t-s)\}+E\{(1-a)X(t-s)\}=0$$

且

$$\begin{aligned}
Var\{Z(t)\}&=Var\{[X(t)-X(t-s)]+(1-a)X(t-s)\}\\
&=Var\{X(t)-X(t-s)\}+(1-a)^2Var\{X(t-s)\}\\
&=\alpha s+(1-a)^2\alpha(t-s)
\end{aligned}$$

所以， $Z(t)$ 的一阶概率密度函数为：

$$f_Z(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi[\alpha s+(1-a)^2\alpha(t-s)]}}e^{-\frac{x^2}{2[\alpha s+(1-a)^2\alpha(t-s)]}}$$

3.32 Brown 过程是独立增量过程，因而是 Markov 过程。试给出 Brown 过程的状态转移概率密度函数。

解：由转移概率密度的定义知

$$f(x_2,t_2|x_1,t_1)=f(x_2,x_1;t_2,t_1)/f(x_1;t_1)$$

由 Brown 过程是独立增量过程知道

$$f(x_2,x_1;t_2,t_1)=f_{X(t_1)}(x_1)f_{X(t_2-t_1)}(x_2-x_1)$$

所以

$$f(x_2,t_2|x_1,t_1)=f_{X(t_2-t_1)}(x_2-x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(t_2-t_1)}}e^{-(x_2-x_1)^2/2\alpha(t_2-t_1)}$$

3.35 设 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，其中 A 和 B 是相互独立的零均值等方差的随机变量，试证明 $X(t)$ 是宽平稳的，且不是严平稳的。

证明：由题意知 $X(t)$ 的均值为

$$m_X(t)=E\{X(t)\}=E\{A\cos\omega t+B\sin\omega t\}=E\{A\}\cdot\cos\omega t+E\{B\}\cdot\sin\omega t=0$$

自相关函数为

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E\{X(t_1)\cdot X(t_2)\}=E\{(A\cos\omega t_1+B\sin\omega t_1)\cdot(A\cos\omega t_2+B\sin\omega t_2)\}\\&=E\{A^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2+2B\sin\omega t_1 A\cos\omega t_2+B^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2\}\\&=E\{A^2\}\cdot\frac{1}{2}[\cos\omega(t_1+t_2)+\cos\omega(t_1-t_2)]\\&+E\{B^2\}\cdot\frac{1}{2}[\cos\omega(t_1-t_2)-\cos\omega(t_1+t_2)]\\&=\delta^2\cdot\cos\omega(t_1-t_2)\\&=\delta^2\cdot\cos\omega\tau\qquad\qquad(\tau=t_1-t_2)\end{aligned}$$

所以 $X(t)$ 是一个宽平稳随机过程。

设 $A=0$，$B=1$，显然对任意 t，$X(t)$ 是一个单值随机变量，其概率密度函数为 $f_X(x;t)=\delta(x-\sin\omega t)$。这显然不是一个严平稳过程。

3.44 设 $X(t)=A\sin(t+\Theta)$，其中 A 与 Θ 是相互独立的随机变量，$P\{\Theta=\pm\pi/4\}=1/2$，A 为 $(-1,1)$ 上的均匀分布，试证明随机过程 $X(t)$ 为宽平稳过程。

证明：其均值 $m_X(t)=E\{A\}E\{\sin(t+\Theta)\}=0$；自相关函数为

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E\{A^2\}E\{\sin(t_1+\Theta)\sin(t_2+\Theta)\}\\&=E\{A^2\}\frac{1}{2}(\cos(t_1-t_2)-E\{\cos(t_1+t_2+2\Theta)\})\\&=\frac{1}{2}E\{A^2\}(\cos(t_1-t_2)\end{aligned}$$

所以，这是一个宽平稳随机过程。

3.45 设 $X(t)=Ah(t)$，其中 A 是均值为零、方差为 σ^2 的随机变量，$h(t)$ 是确定性时间函数。求证 $X(t)$ 是宽平稳过程的充要条件是 $h(t)=ce^{\mathrm{j}\omega t}$，其中 c 和 ω 是任意常数。

证明：设 $h(t)=ce^{\mathrm{j}\omega t}$，则 $E\{X(t)\}=0$，其自相关函数为

$$R_X(t_1,t_2)=E\{A^2\}|c|^2e^{\mathrm{j}(t_1-t_2)}$$

所以 $X(t)$ 是宽平稳过程。

反之，若 $X(t)$ 是宽平稳过程，则 $R_X(t_1,t_2)=E\{A^2\}h(t_1)h^*(t_2)$ 为只和时移 t_1-t_2 有关的函数。令 $t_1=t_2=t$ ，则 $|h(t)|^2=c^2>0$ ，所以 $h(t)$ 可以写成如下形式：

$$h(t)=ce^{\mathrm{j}\psi(t)}$$

其中 $\psi(t)$ 是一个关于 t 的实函数。又因为 $h(t_1)h^*(t_2)=c^2e^{\mathrm{j}(\psi(t_1)-\psi(t_2))}$ 只和 t_1-t_2 有关，所以 $\psi(t_1)-\psi(t_2)$ 是一个只和 t_1-t_2 有关的函数，这当且仅当 $\psi(t)=\omega t+\theta$ 。将 $e^{\mathrm{j}\theta}$ 归并到常数 C 中，仍用记号 c 表示，则 $h(t)=ce^{\mathrm{j}\omega t}$ 。