《随机过程》第五章作业答案

5.1　已知 $f(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2π 的周期函数， $f(t)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有如下 Fourier 级数展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jnt}$$

若 Θ 为 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布，试对随机过程 $X(t)=f(t+\Theta)$ 进行 Fourier 级数展开。

解：对 $f(t)$ 进行 Fourier 级数展开：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jnt},\qquad t\in(-\pi,\pi)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-jnt}dt$$

对 $f(t+\theta)$ 进行 Fourier 级数展开：

$$f(t+\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jnt},\qquad t\in(-\pi,\pi)$$

其中

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+\theta)e^{-jnt}dt\qquad \text{令}x=t+\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta}f(x)e^{-jnx}\cdot e^{jn\theta}dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-jnx}dx\cdot e^{jn\theta}\qquad (\text{因}f(x)\text{和}e^{-jnx}\text{的周期都是}2\pi\ )。\\&=a_n\cdot e^{jn\theta}\end{aligned}$$

所以 $X(t)=f(t+\theta)$ 的 Fourier 级数展开为：

$$f(t+\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot e^{jn\theta}\cdot e^{jnt}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot e^{jn(t+\theta)},\qquad t\in(-\pi,\pi)$$

5.5　若随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $S_X(f)$ 对 $|f|>1/2$ 时有 $S_X(f)=0$ ，又对任意整数 m,n 有 $E\{X(m)X(n)\}=N\delta[m-n]$ 。试求 $X(t)$ 的功率谱密度。

解：由条件知 X 是带限为 1 的带限过程，由采样定理知

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

所以

$$R_X(t+\tau,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}N\delta[m-n]\frac{\sin\pi(t+\tau-m)}{\pi(t+\tau-m)}\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$
$$=N\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(t+\tau-m)\sin\pi(t+\tau-n)}{\pi(t+\tau-m)\pi(t+\tau-m)}$$

因为宽平稳过程的自相关函数和时间起点 t 无关，所以 $R_X(t+\tau,t)=R_X(\tau)$ ，在上式中令 $t=0$ ，考虑到当 $m\neq 0$ 时 $\sin\pi m=0$ ， $m=0$ 时， $\sin\pi m/\pi m=1$ ，得

$$R_X(\tau)=N\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau}$$

所以，由 Wiener-Xinchin 定理知

$$S_X(f)=\begin{cases}N & f\in(-1/2,1/2),\\ 0 & f\notin(-1/2,1/2).\end{cases}$$

5.10 若 $s(t)=\mathrm{Sa}(\pi t/\tau)e^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$ 为一个解析信号，其中 $\mathrm{Sa}(x)=\sin x/x$ 。试求 τ 和 f_0 应满足的关系。

解：因为

$$s(t)=\frac{\sin\pi t/\tau}{\pi t/\tau}(\cos 2\pi f_0 t+j\sin 2\pi f_0 t)$$

是解析过程，所以实部

$$\frac{\sin\pi t/\tau}{\pi t/\tau}\cos 2\pi f_0 t$$

的 Hilbert 变换为虚部

$$\frac{\sin\pi t/\tau}{\pi t/\tau}\sin 2\pi f_0 t$$

所以由定理知道，只有当

$$2\pi f_0>\pi|1/\tau|$$

所以 $|\tau|>1/2f_0$ 。

5.12 对于窄带宽平稳过程 $Y(t)=A(t)\cos 2\pi f_0 t-B(t)\sin 2\pi f_0 t$ ，若其均值为零，功率谱密度为

$$S_Y(f)=\begin{cases}W\cos(f-f_0)\pi/B, & -1/2\leq(f-f_0)/B\leq 1/2\\ W\cos(f+f_0)\pi/B, & -1/2\leq(f+f_0)/B\leq 1/2\\ 0, & \text{其他 } f\end{cases}$$

式中 W,B 及 f_0 都是正常数，且 $f_0\gg B$ 。试求：

1) $Y(t)$ 的平均功率;

2) $A(t)$ 的功率谱密度 $S_A(f)$;

3) 互相关函数 $R_{AB}(\tau)$ 。

解: 1) 平均功率为

$$
\begin{aligned}
E\{|Y(t)|^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df \\
&= \int_{-f_0-B/2}^{-f_0+B/2} W\cos(f+f_0)\pi/Bdf \\
&+ \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} W\cos(f-f_0)\pi/Bdf \\
&(f'=(f+f_0)/B, f''=(f-f_0)/B) \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} WB\cos\pi f'df' + \int_{-1/2}^{1/2} WB\cos\pi f''df'' \\
&= 2WB\int_{-1/2}^{1/2}\cos\pi fdf = \frac{2WB}{\pi}\sin\pi f|_{-1/2}^{1/2} \\
&= 4WB/\pi
\end{aligned}
$$

2) 因为宽平稳，故其自相关函数为

$$R_Y(\tau) = R_A(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + R_{AB}(\tau)\sin 2\pi f_0\tau$$

作 Fourier 变换得到：

$$S_Y(f) = \frac{1}{2}\left[S_A(f-f_0)+S_A(f+f_0)\right] + \frac{1}{2j}\left[S_{AB}(f-f_0)-S_{AB}(f+f_0)\right]$$

因此 $S_A(f) = 2W\cos f\pi/B$ ， $-1/2 \le f/B \le 1/2$ 。

3) 由 $S_{AB}(f)=0$ 得到 $R_{AB}(\tau)=0$ 。

5.13 证明 Hilbert 变换的性质 (6).

证明：设 $X(t)=A(t)\cos\omega_0 t$ ， $Y(t)=\mathcal{H}\{A(t)\cos\omega_0 t\} = X(t) * \frac{1}{\pi t}$ ， $S_Y(f)=S_X(f)\cdot H(f)$ ，其中

$$H(f) = \begin{cases} -j & f>0 \\ 0 & f=0 \\ j & f<0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_X(f) &= S_A(f) * \mathcal{F}[\cos\omega_0 t] \\ &= \frac{1}{2} S_A(f) * [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \\ &= \frac{1}{2}[S_A(f-f_0) + S_A(f+f_0)] \end{aligned}$$

由于 $S_A(f)$ 的支集包含于 $(-B,B)$ ，且 $\omega_0 > 2\pi B$ ，则 $S_A(f-f_0)$ 在 $f>0$ 部分， $S_A(f+f_0)$ 在 $f<0$ 部分。所以，

$$\begin{aligned} S_Y(f) =& \frac{j}{2}[S_A(f+f_0) - S_A(f-f_0)] \\ =& S_A(f) * \mathcal{F}[\sin\omega_0 t] \end{aligned}$$

即 $Y(t) = A(t)\sin\omega_0 t$ ，亦即 $\mathcal{H}[A(t)\cos\omega_0 t] = A(t)\sin\omega_0 t$ 。

由上面的结论知道

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[A(t)\sin(\omega_0 t)] &= \mathcal{H}[A(t)\cos(\pi - \omega_0 t)] \\ &= A(t)\sin(\pi - \omega_0 t) \\ &= A(t)\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

5.14 设某简单通信系统等概发送两个信号 S_0 和 S_1 ， $S_0 = (-1,-1,-1)$ 和 $S_1 = (1,1,1)$ 。接收端的接收信号为 $r = (r_1, r_2, r_3) = S_i + n, n = (n_1, n_2, n_3)$ 的每个分量是相互独立的零均值单位方差的 Gauss 随机变量。试给出 S_0 和 S_1 的极大似然估计检测，并给出观测空间的判决分割，并计算最大似然估计检测的判决错误概率。

解：由题意知道

$$\hat{S}_i = \arg\{\max_{S_i} f(r|S_i)\}$$

其中

$$\begin{aligned} f(r|S_i) = f(r - S_i) &= \prod_{k=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_k - S_i^{(k)})^2}{2}} \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^3 e^{-\frac{(r_1-b)^2 + (r_2-b)^2 + (r_3-b)^2}{2}} \end{aligned}$$

要使 $f(r|S_i)$ 最大，即要使

$$x(b) = (r_1 - b)^2 + (r_2 - b)^2 + (r_3 - b)^2$$

最小。因此， r 离 S_0, S_1 哪个欧氏距离近，就判定为谁。所以，以 S_0 和 S_1 的连线的垂直平分面将在三维观测空间分为两半，该垂直平分面可归入任意一边。

误码率的表达式为

$$Pe = P\{S_0 \neq \hat{S}_0|S_0\}P\{S_0\} + P\{S_1 \neq \hat{S}_1|S_1\}P\{S_1\} = P\{S_0 \neq \hat{S}_0|S_0\}$$

$$
\begin{aligned}
P\{S_0 \neq \hat{S}_0 | S_0\} &= P\{(r_1+1)^2+(r_1+1)^2+(r_1+1)^2 \geq (r_1-1)^2+(r_1-1)^2+(r_1-1)^2 | S_0\} \\
&= P\{r_1+r_2+r_3 \geq 0 | S_0\} \\
&= P\{(-1+n_1)+(-1+n_2)+(-1+n_3) \geq 0\} \\
&= P\{n_1+n_2+n_3 \geq 3\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{3-n_1-n_2}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^3 e^{-\frac{n_1^2+n_2^2+n_3^2}{2}} \mathrm{d}n_1\mathrm{d}n_2\mathrm{d}n_3
\end{aligned}
$$

5.16 证明性质 5.10 。

解：先让 $r(t)$ 通过一个白化滤波器，使得噪声成为一个白色噪声，此时可以按照白色噪声的处理得到匹配滤波器。

按照白化滤波器的构造，其传递函数为 $H_w(f) = 1/\sqrt{S_N(f)}$ 。设 $r(t) = s(t) + N(t)$ 输入该白化滤波器后的输出为 $\hat{r}(t) = \hat{s}(t) + \hat{N}(t)$ 。其中 $S_{\hat{N}}(f) = 1$ ， $S_{\hat{s}}(f) = S(f)/\sqrt{S_N(f)}$ 。所以匹配滤波器的传递函数应该为

$$
H(f) = c\frac{S^*(f)}{S_N(f)}e^{-j2\pi fT}
$$

5.23 一个低通滤波器具有传递函数 $H(f) = 1/(1 + j2\pi fT)$ ，将 $X(t) = S(t) + N(t)$ 输入该滤波器得到输出 $S^*(t)$ ，其中 $S(t)$ 和 $N(t)$ 互不相关，且具有功率谱密度

$$
S_S(f) = \frac{A^2}{(2\pi f)^2 + 2a^2}; \quad S_N(f) = \frac{2}{5}\frac{A^2}{(2\pi f)^2 + a^2}
$$

试确定 T 的值，使得 $E\{|S(t) - S^*(t)|^2\}$ 最小。

解：由题意

$$
\begin{aligned}
S^*(t) &= h(t) * [S(t) + N(t)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\alpha)[S(\alpha) + N(\alpha)]d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [S(t-\alpha) + N(t-\alpha)]h(\alpha)d\alpha
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\left|S(t) - \int_{-\infty}^{\infty}[S(t-\alpha) + N(t-\alpha)]h(\alpha)d\alpha\right|^2\right\} \\
=&R_S(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} R_S(\alpha)h(\alpha)d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R_S(\alpha-\beta) + R_N(\alpha-\beta)\right]h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta
\end{aligned}
$$

因为

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi fT}=\frac{1/T}{1/T+j2\pi f}$$

所以

$$h(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}U(t)=\lambda e^{-\lambda t}U(t)$$

此外

$$\begin{aligned}
S_S(f)&=\frac{A^2}{2a^2+(2\pi f)^2}=\frac{2(\sqrt{2}a)}{(\sqrt{2}a)^2+(2\pi f)^2}\frac{A^2}{2\sqrt{2}a}\\
R_S(\alpha)&=\frac{\sqrt{2}A^2}{4a}e^{-\sqrt{2}a|\alpha|}\\
S_N(f)&=\frac{2}{5}\frac{A^2}{a^2+(2\pi f)^2}=\frac{A^2}{5a}\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}\\
R_N(\alpha)&=\frac{A^2}{5a}e^{-a|\alpha|}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
J(\lambda)=&R_S(0)-2\int_0^\infty R_S(\alpha)\lambda e^{-\lambda\alpha}d\alpha\\
&+\int_0^\infty\int_0^\infty\left[R_S(\alpha-\beta)+R_N(\alpha-\beta)\right]\lambda^2e^{-\lambda(\alpha+\beta)}d\alpha d\beta\\
=&R_S(0)-2\int_0^\infty\frac{\sqrt{2}A^2}{4a}e^{-\sqrt{2}a\alpha}\lambda e^{-\lambda\alpha}d\alpha\\
&+\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{\sqrt{2}A^2}{4a}e^{-\sqrt{2}a|\alpha-\beta|}+\frac{A^2}{5a}e^{-a|\alpha-\beta|}\right]\lambda^2e^{-\lambda(\alpha+\beta)}d\alpha d\beta\\
&=R_S(0)-\frac{\sqrt{2}A^2}{2a}\lambda\frac{1}{\sqrt{2}a+\lambda}+\frac{\sqrt{2}A^2}{4a}\lambda^2\frac{1}{\lambda(\sqrt{2}a+\lambda)}+\frac{A^2}{5a}\lambda^2\frac{1}{\lambda(a+\lambda)}\\
&=R_S(0)-\frac{A^2}{a}\frac{\lambda\left[\frac{\sqrt{2}}{4}a+\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}-1\right)\lambda\right]}{5(\sqrt{2}a+\lambda)(a+\lambda)}
\end{aligned}$$

令

$$I(\lambda)=\frac{\lambda\left[\frac{\sqrt{2}}{4}a+\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}-1\right)\lambda\right]}{5(\sqrt{2}a+\lambda)(a+\lambda)}$$

由 $I'(\lambda)=0$ 得

$$3\lambda^2+2(5-2\sqrt{2})a\lambda+a^2=0$$

解得

$$\lambda=\frac{(2\sqrt{2}-5)\pm a\sqrt{30-20\sqrt{2}}}{3}$$

所以

$$T=1/\lambda=\frac{3}{(2\sqrt{2}-5)\pm a\sqrt{30-20\sqrt{2}}}$$

5.25　已知 $X(t)=S(t)+N(t)$ ， $S(t)$ 和 $N(t)$ 互不相关，试对下面两组功率谱密度分别求最小均方信号复原滤波器的因果解：

$$1)\quad S_S(f)=\frac{(2\pi f)^2}{(1+(2\pi f)^2)^2},\qquad S_N(f)=\frac{1}{16};$$

$$2)\quad S_S(f)=\frac{1}{(2\pi f)^2+8},\qquad S_N(f)=\frac{(2\pi f)^2+1}{(2\pi f)^2+16}$$

解: (暂略，见书上例题。)

5.27　已知 $X[n]=S[n]+N[n]$ ，且

$$R_S[k]=5\times 0.8^{|k|},\quad R_N[k]=5\delta[k],\quad R_{SN}[k]=0$$

试求非因果和因果均方信号复原滤波器的传递函数，并分别给出最小均方误差，比较之。

解：由 $R_S[k]=5\times 0.8^{|k|}$ 得，

$$S_S(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}5\times 0.8^{|k|}z^{-k}=5\cdot\frac{z(0.8-0.8^{-1})}{(z-0.8)(z-0.8^{-1})}$$

由 $R_N[k]=5\delta[k]$ 得，　$S_N(z)=5$
而 $R_{SN}[k]=0$ ，则 $S[n]$ 与 $N[n]$ 无关。
所以

$$S_{SX}(z)=S_S(z)=5\cdot\frac{z(0.8-0.8^{-1})}{(z-0.8)(z-0.8^{-1})}$$

$$S_X(z)=S_S(z)+S_N(z)=5\cdot\frac{(z-1/2)(z-2)}{(z-0.8)(z-0.8^{-1})}$$

(1) 非因果滤波器的传递函数为

$$H(z)=\frac{S_{SX}(z)}{S_X(z)}=\frac{-0.45z}{(z-1/2)(z-2)}=\frac{0.3z}{z-1/2}-\frac{0.3z}{z-2}$$

将其作 Z 变换得，

$$h[k]=0.3\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

因此，非因果滤波器的最小均方误差为

$$\begin{aligned}\min\xi_1 &= R_S[0]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_S[k]h[k]\\ &= 5-\sum_{k=-\infty}^{\infty}5\cdot 0.8^{|k|}\cdot 0.3\cdot(1/2)^{|k|}\\ &= 1.5\end{aligned}$$

(2) 因果滤波器的传递函数

第一步：

$$S_X(z) = \frac{(z-1/2)}{(z-0.8)} \cdot 5\frac{(z-2)}{(z-0.8^{-1})} = M^+(z)M^-(z)$$

其中

$$M^+(z) = \frac{(z-1/2)}{(z-0.8)}\ ;\quad M^-(z) = 5\frac{(z-2)}{(z-0.8^{-1})}$$

第二步：

$$\frac{S_S(z)}{M^-(z)} = \frac{z(0.8-0.8^{-1})}{(z-0.8)(z-2)} = \frac{3/8z}{(z-0.8)} + \frac{-3/8z}{(z-2)} = N^+(z) + N^-(z)$$

其中

$$N^+(z) = \frac{3/8z}{(z-0.8)}\ ;\quad N^-(z) = \frac{-3/8z}{(z-2)}$$

第三步：

$$H(z) = \frac{N^+(z)}{M^+(z)} = \frac{3}{8}\frac{z}{z-1/2}$$

所以

$$h[k] = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k U[k]$$

因此，因果滤波器的最小均方误差为

$$\begin{aligned}
\min \xi_2 &= R_S[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_S[k]h[k] \\
&= 5 - \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 0.8^{|k|} \cdot \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1.875
\end{aligned}$$

显然，非因果滤波器的最小均方误差要小于因果滤波器的最小均方误差，因为非因果滤波器利用了 $R_S[k]$ 的全部信息，而因果滤波器却只利用了 $k \geq 0$ 部分的信息。

(注：答案仅供参考，答案中可能存在错误的地方，欢迎指出错误！)