东南大学无线电工程系 02 级硕士研究生

《随机过程》期末考试试卷

姓名 ___________ **专业** ___________ **学号** ___________ **成绩** ___________

说明 ①本卷满分 100 分，共分三部分：判断题 (30 分)、简单计算题 (30 分)、综合计算证明题 (40 分)；②简单计算题和综合计算证明题只需写出必要的关键步骤即可，如果答题空白不够用，则将答案写在试卷的背面，并在正面注明；③涉及 Fourier 变换之处，请一律用 $G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$ 。

一、判断题

本题考察对课本概念理解和掌握的程度。共给出了关于课本所学知识的 15 个命题，请在题首给的表格中分别判断这 15 个命题的正误，在相应的位置打“ $\surd$ ”。本题共 30 分，每题判断正确得 2 分，判断错误得 -1 分，弃权不作判断得 0 分，本题得分若低于 0 分则按 0 分计算。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
正确															
错误															
弃权															

以下是所给的 10 **个命题：**

1. 概率空间由样本空间 S 、定义于样本空间上的 Borel 集 B 和定义于 Borel 集上的概率集函数 P 这三要素组成；概率集函数 P 将 Borel 集 B 中的每个事件和衡量该事件发生可能性大小的一个数对应起来；若 A_1 和 A_2 是两个事件，则有 $P\{A_1\cup A_2\}\geq P\{A_1\}+P\{A_2\}$ 。
2. 任何一个随机变量，无论是离散型的还是连续型的，都可以用下列函数中的任意一个进行完全描述：概率分布函数、概率密度函数、概率质量函数和概率特征函数。
3. 一般来说，从随机过程的一个高阶概率密度函数可以得到一个低阶的概率密度函数，反之则不然；但对于 Markov 过程，可以从二阶概率密度函数得到任意阶

的概率密度函数。

4. 宽平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 时取得最大值，若 $R_X(\tau)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|\tau R_X(\tau)|\,\mathrm{d}\tau<\infty$ ，则 $R_X(\tau)$ 的 Fourier 变换是 $X(t)$ 的功率谱密度。
5. 宽平稳 Gauss 随机过程一定是严平稳随机过程；宽平稳的 Gauss 随机过程通过一个线性系统后，也一定是一个严平稳的 Gauss 随机过程。
6. Poisson 过程是停留在一个状态的时间是一个指数分布随机变量，该指数分布的均值为该 Poisson 过程的出生率；此外两个 Poisson 过程的和也是一个 Poisson 过程。
7. 设 i 是离散时间 Markov 链的一个状态，若 $\pi_{ii}(3)>0$ 且 $\pi_{ii}(5)>0$ ，则状态 i 一定是非周期的状态。
8. 若某线性系统的输入随机过程为 $X(t)$ ，系统的输出随机过程为 $X(t-\alpha)$ ，则其传递函数为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\alpha}$ ；若输出过程为 $\mathrm{d}X(t)/\mathrm{d}t$ ，则其传递函数为 $\mathrm{j}\,2\pi f$ ； Hilbert 变换的传递函数为 $\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(f)$ ；
9. 若随机变量序列 A_n 和 B_n 的均方极限分别为 A 和 B ，则随机变量序列 A_nB_n 的均方极限为 AB 。
10. 用权残余法，也即用迭代格式 $Z_k=\alpha Z_{k-1} \mod n$ 生成一个均匀分布的随机序列 $Z_0,Z_1,Z_2,\cdots$ 时，适当选取 α ，可以使该随机序列的周期达到最大值 $n-1$ ，因此 α 被称为随机数生成的种子。
11. 最大后验概率检测就是最小错误概率检测；若先验概率相等，则最大后验概率检测和最大似然检测等价；但如果先验概率不等，则最大似然检测的错误概率小于最大后验概率检测的错误概率。
12. 若双调幅式窄带过程 $X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$ 中的 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是两个均值为零的联合宽平稳过程，则 $X(t)$ 宽平稳的充要条件是 $R_a(\tau)=R_b(\tau)$ 且互相关函数满足 $R_{ab}(\tau)=-R_{ba}(\tau)$ 。
13. 离散时间 Markov 链的状态要么是常返的，要么是瞬过的，两者必居其一；常返意味着从该状态出发， Markov 链将以概率 1 无穷次返回该状态；瞬过意味着从该状态出发，只能有限次的返回该状态。
14. 任何一种排队系统，包括 M/G/1 排队系统，系统顾客数 $N(t)$ 都是一个生灭过程。
15. 设 $X(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的宽平稳过程，若 $X(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的时间平均 $\langle X(t)\rangle$ 等于 $X(t)$ 的均值 m_X ，则称 $X(t)$ 是遍历的。

二、简单计算题 本题考察对课本所要求的基本技能的掌握。共有 6 个小题组成，每小题 5 分，共 30 分。请在所给空白处写出关键步骤和答案。

1. 已知某离散时间宽平稳过程 $X[n]$ 的自相关函数为 $R_X[k]=\alpha^{|k|}$，其中 α 为 $(0,1)$ 内的一个正常数，试求 $X[n]$ 的功率谱密度 $S_X(f)$。

2. 试求定义于 $[0,\infty)$ 上的随机过程 $X(t)=(-1)^{N(t)}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$，$N(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上概率质量函数为 $P\{N(t)=k\}=\left(\frac{1}{1+\lambda t}\right)\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^k$，$k=0,1,2,\cdots$ 的一个独立增量过程。

3. X 是标准正态分布随机变量，试求随机变量 $Y=X^3$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

4. 某离散时间齐次 Markov 链的一步状态转移矩阵如下所示。试画出该 Markov 链的状态转移图，并完成下列填空：常返状态有 ________ ；状态 1 的周期为 ________ ；稳态概率为 $(p_1, p_2, p_3, p_4) =$____________________ 。

$$\Pi = \begin{array}{c c} \text{状态} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. 将一个均值为零、功率谱密度为正常数 q 的白 Gauss 噪声通过一个冲激响应为 $h(t) = \mathrm{e}^{-t}U(t)$ 的因果时不变线性系统，其中 $U(t)$ 是单位阶跃函数，则试求输出过程的一阶概率密度函数。

6. 已知随机变量 X 的概率质量函数为 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{bmatrix}$，试给出在计算机中生成 X 的方法。

三、综合计算题

本题考察对课本所要求的综合计算、推导技能的掌握。共有 4 个小题，每小题 10 分，共 40 分。请在所给空白处写出必要的公式及演算推导步骤等。

1. 随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为 $f_{XY}(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}, x > 0, y > 0$ 。试求：1) 随机变量 X 的均值；2)X 和 Y 的相关系数；3) 随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ ； 4) 随机变量 $W = \min\{X, Y\}$ 的概率密度函数 $f_W(w)$ 。

2. 某简单通信系统等概地发送 4 个信号：$s_1 = (1,1), s_2 = (1,-1), s_3 = (-1,1), s_4 = (-1,-1)$，接收端的接收信号为 $r = (r_1, r_2) = s_i + n$，其中向量 $n = (n_1, n_2)$ 的每个分量是均值为零、方差为 1 的实 Gauss 噪声，且互相关矩为 $\rho = E\{n_1 n_2\}$。试： 1) 给出极大似然检测所对应的组合优化问题； 2) 给出观测空间的判决分割，并画图表示判决分割区域； 3) 计算最大似然检测的判决错误概率。

3. 某通信系统的接收实信号序列 $\{y_i \mid i = 0, 1, \cdots\}$ 和发射实信号序列 $\{x_i \mid i = -L, -L+1, \cdots\}$ 之间满足 $y_i = \sum_{l=1}^{L} a_l x_{i-l} + z_i$ ， $i = 0, 1, \cdots$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_L$ 是 L 个固定的非零实数， $\{z_i \mid i = 0, 1, \cdots\}$ 是一个均值为零、方差为 1 的白噪声序列。已知信号序列 $\{x_i\}$ 和噪声序列 $\{z_i\}$ 相互独立，并且 $\{x_i\}$ 是独立同分布的随机变量序列，每一个 x_i 等概地取 $+1$ 或者 -1 。试确定长度为 L 的离散时间滤波器系数 $h_1, h_2, \cdots, h_L$ ，使得将 $\{y_i\}$ 输入该滤波器，其输出过程 $\{w_i \mid i = 0, 1, \cdots\}$ 对每一个 i 满足均方误差 $E\{(w_i - x_i)^2\}$ 最小。

4. 某排队系统顾客的到达是到达率为 $\lambda = 4$(单位：个 / 秒) 的 Poisson 过程，顾客在系统要经过两个串联的服务窗口接受不同类别的服务，然后离开系统。已知在两个窗口的服务时间是独立的，并且都是均值为 $\mu = 1$(单位：秒) 的指数分布。试求： 1) 顾客在系统内接受服务的总时间 τ 的概率密度函数 $f_\tau(\tau)$； 2) 在一个顾客接受服务的时间内，到达 1 个顾客的概率； 3) 稳态队长的概率生成函数 $P(z)$； 4) 稳态平均队长。 (提示： $P(z)$ 为如下 Pollaczek-Khinchin 公式： $P(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)B(\lambda-\lambda z)}{z-B(\lambda-\lambda z)}$，其中 $\rho = \lambda E\{\tau\}$，函数 $B(s)$ 为服务时间 $f_\tau(\tau)$ 的 Laplace 变换 $B(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_\tau(\tau)\mathrm{d}\tau$ 。)