《随机过程》复习

陈　明　编撰

2003 年 1 月

为使《随机过程》所学内容巩固、熟练于学习者之心，于此以“五要诀”方式复习回顾全书内容。所谓五要诀， 就是“必要、略说、解义、连贯、答辩”。必要，就是宣说所学内容的必要性，使学习者于所学内容生希求和殷重心；略说，就是总说所学内容，使学习者纵览全部，从全局掌握全书内容；解义，就是详细解说知识要点；连贯，就是叙说知识要点的逻辑联系，使学习者掌握知识要点的逻辑关联；答辩，也即就一些知识要点、难点，用讨论、问答的方式加以强调，使学习者遣除疑虑。

五要诀是古人所提倡的学习方式

1. 学习《随机过程》的必要性

通信与信息工程中普遍存在随机现象。对这一领域的科学研究和工程实践必须依赖于描述这些随机现象的数学模型。本书介绍了通信与信息工程领域必备的随机数学基础。

掌握本书内容， 可使在后续课程中的学习中，理解描述通信与信息工程领域中随机现象的数学模型无有困难；在后续科研中，阅读科研文献无有困难，建立相关问题的数学模型，得心应手。

若没有掌握本书内容，则在后续学习中，对问题的理解皆成影像，无有实义；从事科研亦困难重重，不能登堂入室。

在以后的科研和学习中，会深刻体会到《随机过程》数学基础的重要性

2. 《随机过程》的内容概要

本书介绍了通信与信息工程领域必备的随机数学基础。

在介绍概率空间的基础上，介绍了三个常见的随机对象：随机变量、随机向量和随机过程。在此基础上，介绍了常见的随机过程的概率模型和性质；随机过程通过线性与非线性系统的行为；随机信号分析基础，如随机信号的正交分解，常见随机信号的性质，随机信号的检测和滤波等； Markov 链和排队论初步；随机过程的计算机方法等等。

对任何所学内容应当善加总结，实现从“薄”到“厚”之后的从“厚”到“薄”的升华

全书内容对应通信与信息工程中的“随机信号处理”、“通信网流量分析”和“计算机仿真”这三个领域的随机数学基础。

3. 《随机过程》知识要点及其关联

本节略说《随机过程》知识要点及其关联。

3-1 知识要点

将全书的知识要点，归纳为如下 16 个要点：

这 16 个知识要点概括了全书的内容

1. 概率空间 — 随机现象的建模方法
2. 随机变量及其描述
3. 随机向量及其描述
4. 随机变量和随机向量的函数
5. 随机过程及其描述
6. 随机过程的常见特性
7. 随机过程的微积分
8. 随机过程的变换
9. 随机过程的正交分解
10. 随机信号的检测
11. 随机信号的滤波
12. 离散时间 Markov 链
13. 连续时间 Markov 链
14. Markov 型排队系统分析
15. M/G/1 非 Markov 型排队系统分析
16. 随机过程的计算机方法

本书所涉及的常见特性包括：分布特性、平稳特性、记忆特性、功率谱特性、遍历特性等，这些都是研究一个随机过程时所可能关心的侧面

3-2 逻辑关联

下面略说这 16 个知识要点的逻辑关联：

概率空间

概率空间概念的建立，是全书知识的基础。事实上概率空间的概念中体现了描述随机现象的基本数学建模方法。也即在观察之前对事件的概率进行先验地量化，其表现是事件的频率稳定性。

三个随机对象是概率空间的标准化

当概率空间的样本空间为实数集合时，该实数变量被赋予了概率的意义，被称为随机变量；当概率空间的样本空间为多维实数集合时，该多维实数变量被赋予了概率的意义，被称为随机向量；当概率空间的样本空间为随时

间变化的函数时，样本函数被赋予了概率的意义，被称为随机过程。因而，随机变量、随机向量和随机过程完全是概率空间的不同表现。

完全描述一个随机变量和随机向量可以用如下 **概率函数** ：

- 概率分布函数 (pdf) ；
- 概率密度函数 (cdf) ；
- 概率特征函数 (cf) ；
- 概率质量函数 (pmf) ；
- 概率生成函数 (gf) 。

边界概率函数可以部分描述一个随机向量。此外，部分描述一个随机变量的数字特征有：均值、均方、方差、高阶矩；部分描述一个随机向量的数字特征有：均值向量、协相关矩阵、相关矩阵、相关系数等。

随机变量和随机向量的函数仍是一个随机变量， 或者随机向量。当然需要讨论，随机变量或者随机向量通过变换之后得到的随机变量或者随机向量的概率函数，或者数字特征。

随机变量或者向量的函数仍是随机变量或者随机向量

随机变量和随机向量的介绍为随机过程的介绍奠定了基础。完全描述一个随机过程则需要概率函数族，部分描述一个随机过程的数字特征有：均值函数、自相关函数、协相关函数、功率谱密度等。

随机过程的特性包括：分布特性、平稳特性、功率谱特性、记忆特性、遍历特性等。 这些特性都是在不同问题中，研究者对随机过程所要关心和研究的侧面。

这些特性在书中是分散开来介绍的

讨论随机过程的微积分主要是为了讨论随机过程的变换特性， 因为随机过程的线性变换可以表示为随机过程的积分， 而线性变换又可以用于随机过程的正交分解中系数的确定。随机过程的非线性变换则可以通过随机变量和随机向量的非线性变换来解决。

书中在介绍随机过程通过线性系统的表示之前介绍了随机过程的微积分

检测和滤波是通信与信息工程中常见的问题。检测可以理解为随机对象的非线性变换，极大似然和最大后验概率检测都是随机对象的非线性变换。而滤波则也可以理解为随机信号的变换，线性滤波理解为线性变换，非线性滤波理解为非线性变换。

Markov 过程则是从过程的记忆角度考察一个随机过程。 Markov 链是状态离散的 Markov 过程。离散时间 Markov 链的状态分析自身有一定的应用意义，其分析也是连续时间 Markov 链的基础。对于连续时间的 Markov 链可以用状态方程进行描述，生灭过程是一种特殊的 Markov 过程。 Markov 型 (或 M/M 型) 排队系统本质上是生灭过程； M/G/1 非 Markov 型排队系统可以

用嵌入 Markov 链的方法解决。

4. 《随机过程》知识难点讨论与辨析

下面对《随机过程》中的一些具体概念以问答方式进行讨论和辨析。

1. 什么叫随机现象？

   答：对某个客观对象在进行观察之前只知道可能的结果（样本空间），而不知道是可能结果中的哪一个，这个客观对象被称为随机现象。反之，如果在观察之前就可以确切地知道哪一个样本将发生，则这个客观对象被称为确定性现象。一个现象成为随机现象，往往因为两个原因：一是观察者虽然可以确切地预知样本中的哪一个将发生，但由于代价太大的缘故，观察者并不进行准确预知；另外的原因就是观察者的能力根本无法准确预知。因此，一个现象是否是随机现象，取决于观察者的观察态度和能力。

2. 概率空间的概念体现了什么样的对随机现象的建模方法？

   答：概率空间有三个要素：样本空间、事件集合和概率函数。概率函数将事件和一个数建立了对应关系，这个数衡量了这个事件发生可能型性的大小。因此，概率空间在观察者观察之前，通过概率集函数对事件发生可能性的大小进行了量化。这种量化是一种预测。这种预测的有效性是通过多次观察体现出来的，也即在多次观察中，某个事件发生的频率被认为是等于概率的。**因此，概率空间的建模方法是对大量观察中频率稳定性的描述，这种频率稳定性对解决问题往往有较大的帮助。**

3. 随机变量和随机向量与通常的变量和向量有什么区别和联系？

   答：随机变量和向量具有通常意义上变量和向量的所有性质和特征（**变量特性**），除此之外还增加了变量取每个值的可能性大小（**概率特性**）。因此，考察随机变量和随机向量时，除了将他们和通常的变量和向量一样应用，还要考察其概率函数或者各阶矩，以刻画其概率特性。

   要对随机变量和随机向量的这两个特性善加体会

4. 随机向量和随机变量有什么区别和联系？

   答：从变量特性上来看，随机变量是一维的变量，随机向量是高维变量。高维变量含若干个一维变量。从概率特性上来看，随机向量不仅包含了每个分量的概率特性，还包含分量间的关联信息。分量的概率特性可以由向量的概率特性得到。但反过来，由分量的概率特性得不到向量的概率特性，因为分量之间的关联信息不能通过个体分量得到。

5. 如何理解随机过程？

答：理解随机过程，可以从两个角度来理解。一是由样本函数组成的样本空间，然后组成 Borel 事件集合，再有定义于事件集合上的概率集函数。但这样的定义不利于描述一个随机过程。第二种理解方法就是理解成带参变量的随机变量，当参变量在其定义域内变化时，得到一个随机变量的集合，这个随机变量的集合称为随机过程。这个定义利于对随机过程进行描述。

随机过程不是随机变量的简单堆砌，这些随机变量在时间参变量上具有过程关联性。

6. 为什么完全刻画一个随机过程需要概率函数族？

答：随机过程既然是一个带参变量的随机变量集合，当参变量取某个固定值时是一个随机变量，此随机变量可以用概率函数描述；而这些带参变量随机变量集合中的每一个随机变量之间是相互联系的，要刻画 k 阶关联就必须要 k 阶概率函数。因此，完全描述一个随机过程需要概率函数族。

k 阶概率函数刻画 k 阶过程关联性

7. 如何理解随机过程的自相关函数？

答：两个随机变量的相关矩 $R_{X_1X_2}$ 是两个随机变量乘积的均值，这个量可以度量 X_1 和 X_2 这两个随机变量间的相对相关性，而相关系数则是绝对相关性的度量 (或者标准化相关性的度量)。因此自相关函数 $R_X(t_1, t_2)$ 描述了随机过程中两个采样随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 之间的 (相对) 相关性。当该随机过程宽平稳时，$R_X(\tau)$ 描述了时间距离为 τ 的两个随机变量之间的相关性。

仔细思考一下，为什么两个随机变量乘积的均值可以用来反映这两个随机变量的相关性

8. 如何理解随机过程的功率谱密度？

答：随机过程的功率谱密度是描述随机过程的一个指标，和自相关函数是一个等价描述。对于宽平稳随机过程来讲，功率谱密度是自相关函数的 Fourier 变换。功率谱密度从统计意义上描述了样本函数的功率在频谱上的分布。

9. 均方收敛和通常数列的收敛有什么不同？

答：均方收敛描述的是一族数列的收敛。这一族数列具有概率特性，因此最后也收敛到一个随机变量。

10. 均方连续、导数和积分和通常函数的连续、导数和积分有什么不同？

答：均方连续、导数和积分描述的一族函数的连续、导数和积分，由于这一族函数具有概率特征，因此最后导数和积分也是一个随机变量。而连续性则是一族函数在某个时间点 t_0 趋于一个随机变量 $X(t_0)$ 。

11. 随机过程通过线性系统的积分表示和确定性信号通过线性系统的积分表

示有什么差异？

答：随机过程通过线性系统的积分表示描述了一族确定性信号通过线性系统的统计表示。

12. 随机信号的正交分解和确定性信号的正交分解有什么不同？

答：随机信号的正交分解从统计意义上描述了一族确定性信号的正交分解。

13. 随机信号的采样定理和确定性信号的采样定理有什么区别？

答：随机信号的采样定理从统计意义上描述了一族确定性信号的采样定理。

14. 检测和滤波有什么区别和联系？

答：检测是根据被噪声淹没的接收信号判断发送信号是几种可能信号中的哪一种。滤波是将接收信号输入滤波器，得到想要的信号。检测往往可以通过滤波的方式来实现。

15. Markov 过程具有什么样的特性？

答：具有一阶记忆特性，记忆特性实际也是带参变量的随机变量之间的关联特性。一阶记忆也就是一阶关联特性，这使得 Markov 过程可以被二阶概率函数完全刻画。

16. 对于离散时间 Markov 链，正常返状态和零常返状态有什么区别？

答：正常返和零常返都是常返状态，但是正常返的平均常返步长是有限的，零常返的平均常返步长是无穷的。对于常返状态 i，无论是正常返和零常返，都有 $f_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)=1$，零常返意味着序列 $\{f_{ii}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的下降速度比较慢，以至级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$ 发散。例如当 $f_{ii}(n)=\frac{1}{n(n+1)}$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)=1$，但此时平均常返步长为

$$m_i=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty$$

具体构造一个这样的离散时间 Markov 链看看，并画出状态转移图

17. 如何理解状态的周期？

答：状态的周期描述了状态返回自身的规律。也即若某状态 i 的周期是 d，则其只能在 $\{nd,(n+1)d,(n+2)d,\cdots\}$ 上返回自身，在这些步数之外不能返回自身。此外，如果能找到两个互素的步数 n_1 和 n_2 使得 $\pi_i(n_1)>0$ 和 $\pi_i(n_2)>0$，则该状态一定是非周期的，也即周期为 1。

18. 状态遍历是怎样一回事？

答：正常返的非周期状态是遍历状态，正常返状态在以后无穷次返回自

身的概率为 1，非周期意味着在每一步都有可能返回。因此遍历意味着在充分大的步数之后，每一步都可以返回，而且返回无穷次的概率为 1。

19. 如何理解状态微分方程？

答：刻画了 Markov 链的状态概率随时间的变化行为。状态概率是状态的一种统计描述。并非确定性描述。

20. 试证明 M/M 型排队系统中，系统队长是一个连续时间 Markov 链。

答：系统队长实际上是一个生灭过程。由于到达过程 $X(t)$ 是 Markov 的，离去过程 $Y(t)$ 也是 Markov 的，只要证明 $X(t)-Y(t)$ 是 Markov 的。若一个过程 $Y(t)$ 是 Markov 的，则显然 $-Y(t)$ 也是 Markov 的。因此我们等价地只需证明两个独立的 Markov 过程的和还是 Markov 的就行了。(证明留作练习)

21. 如何理解 Little 公式？

答：Little 公式是说系统的平均顾客数等于平均到达率和平均系统时间的乘积。可以作一个这样的比喻，平均到达率好比是质点的平均速率，平均系统时间好比是平均时间，平均顾客数好比是在平均时间内的平均位移。

22. Markov 链达到稳态时，集平均和时间平均为什么相等？

答：达到稳态时，概率就是频率，时间平均是频率的一种表现。

23. 在 M/G/1 排队系统中，设 N_i 是第 i 个顾客离开时系统的总顾客数，试证明 N_i 是一个离散时间 Markov 链。

答：(留作练习)

24. 为什么说均匀分布随机变量的生成是随机变量计算机方法的基础？

答：因为任意分布的随机变量是由均匀分布随机变量生成的。

5. 《随机过程》知识要点的解义

下面对每个知识要点进行回顾、总结。

对每个知识要点分别给出子要点和应该掌握的基本技能，并通过相应习题，巩固知识要点，体现应该掌握的基本技能。

第 1 知识要点：概率空间

(一)子知识要点：

- 样本空间、事件和 Borel 集合、概率集函数
- 条件概率、全概率公式和 Bayes 公式

(二)应该掌握的基本技能：

- 要求掌握概率空间的基本概念，理解描述随机现象的基本的方法；针对具体的概率空间模型，会求具体某个事件的概率；
- 熟练掌握全概率公式 Bayes 公式及其意义，尤其是全概率公式 (及其连续情境时的推广)，要求能在具体问题中熟练运用。

(三)例题讲析：

习题 1-1(P.68/2.6)

试求在相同条件下抛骰子三次，其点数和为 7 的概率。

解：将 7 进行三个数的分解，也即 $7 = x + y + z$ ，其中 $1 \le x, y, z \le 6$ ，则有

这 15 种分解的给出是至关重要的

$$7 = 1 + 1 + 5, 7 = 1 + 2 + 4, 7 = 1 + 3 + 3, 7 = 1 + 4 + 2, 7 = 1 + 5 + 1$$

$$7 = 2 + 1 + 4, 7 = 2 + 2 + 3, 7 = 2 + 3 + 2, 7 = 2 + 4 + 1$$

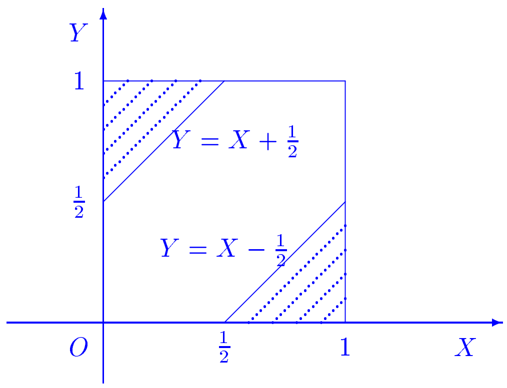
$$7 = 3 + 1 + 3, 7 = 3 + 2 + 2, 7 = 3 + 3 + 1$$

$$7 = 4 + 1 + 2, 7 = 4 + 2 + 1$$

$$7 = 5 + 1 + 1$$

这 15 种分解中，每种分解出现的概率都是 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ ，因此点数和为 7 的概率为 $15/216$ 。

习题 1-2(P.68/2.7, **作业**)



随机等概地从区间 $[0,1]$ 中任取两个数，试求这两个数的差大于 $1/2$ 的概率。

解：这两个数是互相独立的随机变量，分别设为 X 和 Y，因此 $|X-Y|>1/2$。如图所示，点 (X,Y) 必须落在图示的阴影部分。由于 (X,Y) 是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内的均匀分布，因此 $|X-Y|>1/2$ 的概率为阴影部分面积，即 $\frac{1}{4}$。

习题 1-3(P.68/2.12, 作业)

某实验室从 A 、B 、C 三个芯片制造商处购得某芯片，数量比为 1 : 2 : 2。已知 A 、 B 、 C 三个制造商的芯片次品率分别为 0.001, 0.005 和 0.01 。若该实验室随机使用的某芯片是次品，问该次品芯片购自制造商 A 或 C 的概率分别是多少？

解：用符号 D 表示芯片为次品这个事件， A,B,C 分别表示芯片购自 A 、 B 、 C 三个芯片制造商。由 Bayes 公式知道

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}.$$

又由题意知道，

$$P(A)=1/5, P(B)=2/5, P(C)=2/5$$

$$P(D|A)=0.001, P(D|B)=0.005, P(D|C)=0.01$$

代入上式计算得到 $P(A|D)=1/31$ 。同样道理，可以得到

$$P(C|D)=\frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}=\frac{20}{31}.$$

习题 1-4(P.338 书本内容)

在 M/G/1 排队系统中，已知顾客需要的服务时间 τ 是概率密度函数为 $b(\tau)$ 的随机变量，顾客的到达过程是参数为 λ 的指数分布，试求在某个顾客接受服务的时间内，到达 a 个顾客的概率。

解: 因为到达过程是参数为 λ 的指数过程，因此在 τ 时间内到达 a 个顾客的概率为

$$P\{\text{在时间 } t \text{ 内到达 } a \text{ 个顾客} | t=\tau\} = \frac{(\lambda\tau)^a}{a!}e^{-\lambda\tau}$$

由全概率公式有，在某个顾客接受服务的时间内到达 a 个顾客的概率为

$$q_a = \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^a}{a!}e^{-\lambda\tau}b(\tau)\mathrm{d}\tau$$

本例利用了连续状态情形下的 Bayes 公式

第 2 知识要点：随机变量及其描述

(一)子知识要点：

- 随机变量的各种概率函数： cdf/pdf/pmf/cf/gf
- 随机变量的各种数字特征：均值、均方、方差

(二)应该掌握的基本技能：

- 非常熟练地掌握、背诵有关随机变量各种概率函数和数字特征的公式性质等，能熟练运用并根据具体条件进行有关计算。

(三)例题讲析：

习题 2-1(p.69/2.19, **作业**)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = Ae^{-|x|}$ ，试求： 1) 系数 A ；2) X 落在区间 $(0,1)$ 内的概率； 3) X 的概率分布函数。

解: 1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ 知道， $A = 1/I$ ，其中

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-x}dx = 2$$

因此 $A = 1/2$;

2) 由概率密度函数的性质知

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

3) 由概率分布函数和概率密度函数之间的关系知道

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x \le 0, \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

习题 2-2(p.72/2.39)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=e^{-|x|}/2$ ，求 X 的均值和方差。

解：因为被积函数是偶函数，所以均值

$$m_X=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=0$$

此外，方差

$$\sigma_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2$$

习题 2-3(p.74/2.55)

设随机变量 X 服从 Gauss 分布，其均值为 m_X ，方差为 σ_X^2 ，求证： X 的特征函数为 $\Phi_X(w)=\exp\left[jwm_X-w^2\sigma_X^2/2\right]$ 。

证明：由定义知随机变量 X 的特征函数为

$$\Phi_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2}dx$$

作积分变换： $x=\sigma_Xy+m_X$ ，则有

$$\begin{aligned}j\omega x-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}&=j\omega\sigma_Xy+j\omega m_X-\frac{y^2}{2}\\&=-\frac{1}{2}(y-j\omega\sigma_X)^2-\frac{1}{2}\omega^2\sigma_X^2+j\omega m_X\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega)&=\exp\{j\omega m_X-\frac{1}{2}\omega^2\sigma_X^2\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(y-j\omega\sigma_X)^2\}dy\\&=\exp\{j\omega m_X-\frac{1}{2}\omega^2\sigma_X^2\}\end{aligned}$$

习题 2-4(p.341 课本内容)

已知 M/M/1 排队系统的系统顾客随机过程 $N(t)$ 在达到稳态时其概率分布不随时间的变化而变化，设 N 是在达到稳态时的一个采样随机变量，其概率质量函数为 $P\{N=k\}=(1-\rho)\rho^k$ ， $k=0,1,2,\cdots$ ，其中 ρ 是排队强度，试求 N 的概率生成函数。

解：按照定义，概率生成函数为

$$G_N(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^kP(N=k)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k(1-\rho)\rho^k=\frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

习题 2-5(p.72/2.36，**作业**)

证明性质 2.7 中生成函数满足的两个等式。

证明: 1) 因为

$$G_N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k P_N(k)$$

所以

$$G_N^{'}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P_N(k)$$

从而

$$G_N^{'}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_N(k) = E\{N\}$$

2) 因为

$$G_N^{''}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} P_N(k)$$

所以有

$$\begin{aligned} G_N^{''}(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) P_N(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_N(k) - \sum_{k=1}^{\infty} k P_N(k) \\ &= E\{N^2\} - E\{N\} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{N\} &= E\{N^2\} - (E\{N\})^2 \\ &= G_N^{''}(1) + G'_N(1) - (G_N^{'}(1))^2 \end{aligned}$$

第 3 知识要点：随机向量及其描述

(一)子知识要点：

- 随机向量的各种概率函数： cdf/pdf/pmf/cf/gf
- 随机向量的各种数字特征：均值向量、自相关矩阵、协相关矩阵
- 随机向量的边界概率函数
- 条件概率和随机变量间的关系 (独立、不相关、相关系数)

㈡应该掌握的基本技能：

- 深刻理解随机变量和随机向量的差别，了解随机向量的概率中包含分量随机变量间的关联信息；自相关矩阵和协相关矩阵可以刻划分量随机变量间的相关性；
- 了解如何通过联合概率密度函数刻画两个随机变量之间的关系；
- 非常熟练地掌握、背诵有关随机变量各种概率函数和数字特征的公式性质等，能熟练运用并根据具体条件进行有关计算；

㈢例题讲析：

习题 3-1(p.69/2.20， **作业**)

设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=axe^{-ax^2/2}bye^{-by^2/2},\qquad x>0,y>0,a>0,b>0$$

试求： 1) 联合概率分布函数； 2) $P\{X>Y\}$； 3) $P\{|X-Y|<1\}$； 4) 边界概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

解: 1) 由概率分布函数和概率密度函数之间的关系知道

$$\begin{aligned}F_{XY}(x,y)&=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv\\&=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}x,y.\end{cases}\\&=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y aue^{-au^2/2}bve^{-bv^2/2}dudv, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}x,y.\end{cases}\\&=\begin{cases}(1-e^{-ax^2/2})(1-e^{-by^2/2}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}x,y.\end{cases}\end{aligned}$$

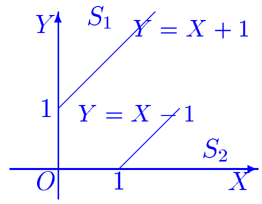
2) 将联合概率密度函数 $f(x,y)$ 在区域 $x>y>0$ 上积分即得 $P\{X>Y\}$，因此

$$\begin{aligned}P\{X>Y\}&=\int_0^\infty\left[\int_0^x bye^{-by^2/2}dy\right]axe^{-ax^2/2}dx\\&=\int_0^\infty\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-bx^2}\right]axe^{-ax^2/2}dx\\&=\frac{b}{a+b}\end{aligned}$$

3) 同样道理，将联合概率密度函数 $f(x,y)$ 在区域 $|x-y|<1$ 上积分即得 $P\{|X-Y|<1\}$，该积分区域如图所示，为直线 $Y=X-1$ 和 $Y=X+1$

在第一象限所围的区域。用全空间的积分值 1 减去 $f(x,y)$ 在 S_1 和 S_2 上的积分，即得积分值

$$\begin{aligned}P\{|X-Y|<1\} &= 1-\int_1^{\infty}\left[\int_0^{y-1} axe^{-ax^2/2}dx\right] bye^{-by^2/2}dy \\ &\quad -\int_0^{\infty}\left[\int_{y+1}^{\infty} axe^{-ax^2/2}dx\right] bye^{-by^2/2}dy \\ &= \text{暂略}\end{aligned}$$



4) 积分得到

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^{\infty} f(x,y)dy = axe^{-ax^2/2}, \quad x>0 \\ f_Y(y) &= \int_0^{\infty} f(x,y)dx = bye^{-by^2/2}, \quad y>0.\end{aligned}$$

习题 3-2(p.69/2.21)

二维随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

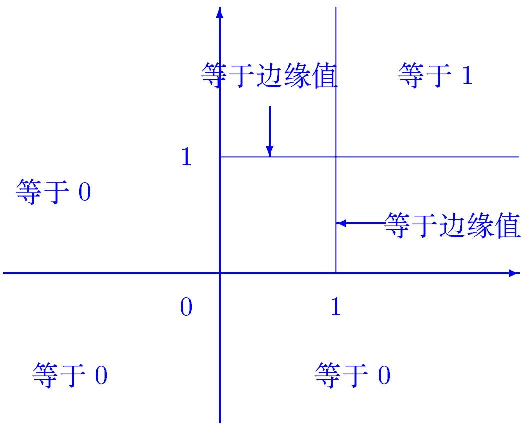
$$f(x,y)=k(x+y), \qquad 0<x<1, \quad 0<y<1$$

试求： 1) k； 2) (X,Y) 的联合概率分布函数； 3) X 和 Y 的边界概率密度函数。

解: 1) 利用全空间积分为 1 的性质，知道

$$1/k = \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(x+\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1\right)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \frac{1}{2} = 1$$

所以 $k=1$；



2) 概率分布函数有如图所示的特点，所以

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ 或 } y\le 0;\\ \int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv, & 1>x>0,1>y>0;\\ \int_0^1\int_0^y f(u,v)dudv, & x\ge 1,y<1;\\ \int_0^x\int_0^1 f(u,v)dudv, & y\ge 1,x<1;\\ 1, & x>1,y>1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\le 0\text{或}y\le 0;\\ \frac{1}{2}xy(x+y), & 1>x>0,1>y>0;\\ y+\frac{y^2}{2}, & x\ge 1,y<1;\\ x+\frac{x^2}{2}, & y\ge 1,x<1;\\ 1, & x>1,y>1.\end{cases}$$

3) 积分可得：

$$f_X(x)=\frac{1}{2}+x,\qquad 0<x<1$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{2}+y,\qquad 0<y<1$$

习题 3-3(p.70/2.22)

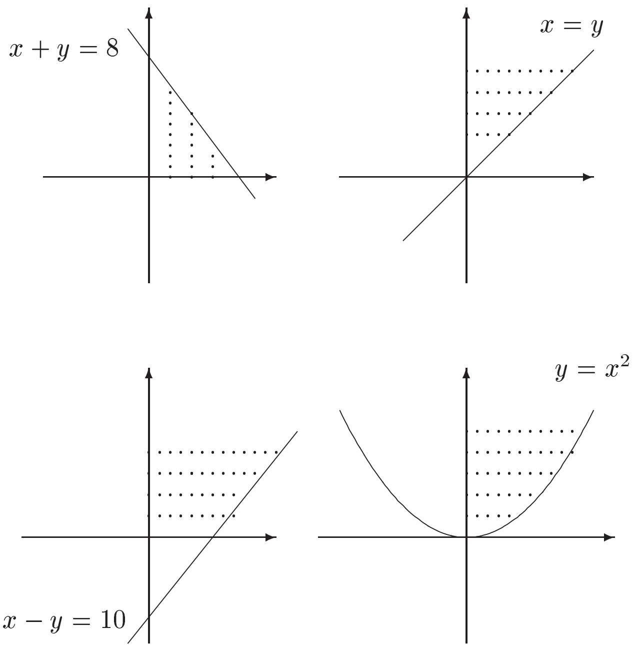
随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y)=2e^{-x}e^{-2y}\qquad x>0,y>0$$

试求： 1) $P\{X+Y\le 8\}$； 2) $P\{X<Y\}$； 3) $P\{X-Y\le 10\}$； 4) $P\{X^2<Y\}$。

解：在如图所示相应区域上积分可得

$$P\{X+Y\le 8\}=\int_0^8\int_0^{8-x}2e^{-x}e^{-2y}dxdy=(1-e^{-8})^2$$
$$P\{X<Y\}=\int_0^\infty\int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}dxdy=\frac{1}{3}$$
$$P\{X-Y\le 10\}=\int_0^\infty\int_0^{y+10}2e^{-x}e^{-2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-10}$$
$$P\{X^2<Y\}=\int_0^\infty\int_0^{\sqrt{y}}2e^{-x}e^{-2y}dxdy$$
$$=2+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{e}^{1/8}\left(\sqrt{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\sqrt{2}\right)$$



习题 3-4(p.71/2.27，**作业**)

已知 X, Y, Z 为互相独立的随机变量,且其概率密度函数分别为 $f_X(x), f_Y(y), f_Z(z)$，试求：

1) $P\{|X|<5, Y>2, Z^2\geq 2\}$；

2) $P\{\min(X,Y,Z)>2\}$；

3) $P\{\max(X,Y,Z)<6\}$；

4) 随机变量 $U=\max(X,Y,Z)$ 和 $V=\min(X,Y,Z)$ 的概率密度函数。

解: 1) 由题意知:

$$\begin{aligned}&P\{|X|<5, Y>2, Z^2\geq 2\}\\ =\ &\int_{-5}^{5} f_X(x)dx \int_2^{\infty} f_Y(y)dy \left(\int_{-\infty}^{-2} f_Z(z)dz + \int_2^{\infty} f_Z(z)dz\right)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}P\{\min(X,Y,Z)>2\} &= P\{X>2, Y>2, Z>2\}\\ &= \int_2^{\infty} f_X(x)dx \int_2^{\infty} f_Y(y)dy \int_2^{\infty} f_Z(z)dz\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} P\{\max(X,Y,Z)<6\} &= P\{X<6,Y<6,Z<6\} \\ &= \int_{-\infty}^{6} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{6} f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{6} f_Z(z)dz \end{aligned}$$

4) 先求分布函数：

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P\{U\le u\} \\ &= P\{\max(X,Y,Z)\le u\} \\ &= P\{X\le u,Y\le u,Z\le u\} \\ &= \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= F_U'(u) \\ &= f_X(u)\int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)dz \\ &\quad +f_Y(u)\int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)dz \\ &\quad +f_Z(z)\int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P\{V\le v\} \\ &= P\{\min(X,Y,Z)\le v\} \\ &= 1-P\{\min(X,Y,Z)>v\} \\ &= 1-P\{X>v,Y>v,Z>v\} \\ &= 1-\int_{v+}^{\infty} f_X(x)dx \int_{v+}^{\infty} f_Y(y)dy \int_{v+}^{\infty} f_Z(z)dz \\ &= 1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))(1-F_Z(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_V(v) &= F_V'(v) \\ &= f_X(v)(1-F_Y(v))(1-F_Z(v)) \\ &\quad +f_Y(v)(1-F_X(v))(1-F_Z(v)) \\ &\quad +f_Z(v)(1-F_X(v))(1-F_Y(v)) \end{aligned}$$

习题 3-5(p.72/2.40，**作业**)

设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y)=A\sin(x+y),\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}$$

求： 1) 系数 A ； 2) 均值 m_X 和 m_Y ； 3) 方差 σ_X^2 和 σ_Y^2 ； 4) 协相关矩 C_{XY} 和相关系数 ρ_{XY} 。

解: 1) 由题意知:

$$A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dxdy=1$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)dxdy\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin ydy\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy\\
&= 2\left(-\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\sin y|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=2\\
\Longrightarrow &\quad A=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2) 由 X 和 Y 的对称性易知 $m_X=m_Y$ 。此外,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(x+y)dy\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)dy\\
&= \frac{1}{2}\sin x\left[\sin y|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]+\frac{1}{2}\cos x\left[\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]\\
&= \frac{1}{2}(\sin x+\cos x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_X &= E\{X\}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx\right]\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-d\cos x)=-\left[x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right]\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}x(d\sin x)=\left[x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\right]\\
&= \frac{\pi}{2}-\left(-\cos x|_0^{\pi/2}\right)=\frac{\pi}{2}-1
\end{aligned}$$

所以

$$m_X=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

3) 由 X 和 Y 的对称性易知 $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$ 。此外,

$$
\begin{aligned}
\psi_x^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2x\sin x-(x^2-2)\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[2x\cos x-(x^2-2)\sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\pi+(-2)\right]+\frac{1}{2}\left[(\pi^2/4-2)\right]=\pi^2/8+\pi/2-2 \\
\sigma_X^2 &= \psi_x^2-m_X^2=\pi^2/16+\pi/2-2
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(xy\sin x\cos y+xy\cos x\sin y)dxdy \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos y dy=\pi/2-1 \\
C_{XY} &= R_{XY}-m_Xm_Y=\pi/2-1-\pi^2/16 \\
\rho_{XY} &= \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\pi/2-1-\pi^2/16}{\pi/2-2+\pi^2/16}
\end{aligned}
$$

第 4 知识要点：随机变量和随机向量的函数

(一)子知识要点：

- 随机变量的函数
- 随机向量的函数

(二)应该掌握的基本技能：

- 随机变量或者随机向量的概率函数给定，会求其函数的概率函数

(三)例题讲析：

习题 4-1(p.70/2.26，作业)

已知随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且其相应的概率密度函数分别为 $f_{X_1}(x_1)$,$f_{X_2}(x_2),\cdots,f_{X_n}(x_n)$ ，又已知 $Y_1=X_1,Y_2=X_1+X_2,\cdots,Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ ，求证：随机向量 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的联合概率密度函数为

$$
f_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=f_{X_1}(y_1)f_{X_2}(y_2-y_1)\cdots f_{X_n}(y_n-y_{n-1})
$$

解：由概率分布函数的定义知道

$$\begin{aligned}
& F_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\
= & P\{Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2, \cdots, Y_n \le y_n\} \\
= & P\{X_1 \le y_1, X_1+X_2 \le y_2, \cdots, X_1+\cdots+X_n \le y_n\} \\
= & \int\cdots\int_D f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n
\end{aligned}$$

其中

$$D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|x_1\le y_1, x_1+x_2\le y_2,\cdots,x_1+\cdots+x_n\le y_n\}$$

令 $u_1=x_1, u_2=x_1+x_2,\cdots,u_n=x_1+\cdots+x_n$ ，则上述积分成为

$$\begin{aligned}
& F_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\
= & \int\cdots\int_D f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \\
= & \int\cdots\int_{D'} f_{X_1}(u_1)f_{X_2}(u_2-u_1)\cdots f_{X_n}(u_n-u_{n-1})du_1du_2\cdots du_n
\end{aligned}$$

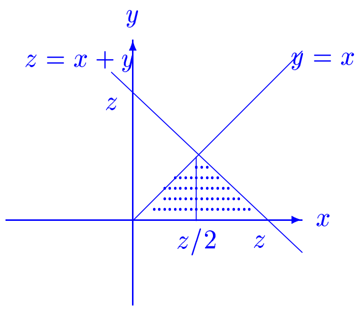
其中

$$D'=\{(u_1,u_2,\cdots,u_n)\big|u_1\le y_1, u_2\le y_2,\cdots,u_n\le y_n\}$$

因此

$$\begin{aligned}
& f_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\
= & \frac{\partial^n F_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial y_1\partial y_2\cdots\partial y_n} \\
= & f_{X_1}(y_1)f_{X_2}(y_2-y_1)\cdots f_{X_n}(y_n-y_{n-1})
\end{aligned}$$

习题 4-2(p.70/2.24)



随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y)=2e^{-(x+y)},\qquad 0\le y\le x<\infty$$

试求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

解：由题意得

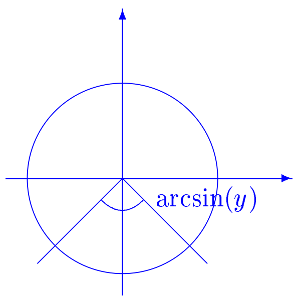
$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{X+Y\le z\}\\
&= 2\int_0^{z/2} e^{-x}\left[\int_0^x e^{-y}dy\right]dx + 2\int_{z/2}^{z} e^{-x}\left[\int_0^{z-x} e^{-y}dy\right]dx\\
&= 2\left[\int_0^z e^{-x}dx - \int_0^{z/2} e^{-2x}dx - e^{-z}\frac{z}{2}\right]
\end{aligned}
$$

所以

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = 2(e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-z} + \frac{z}{2}e^{-z}) = ze^{-z}
$$

习题 4-3(p.185/4.38)

设 X 为 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布，试求 $Y=\sin X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 。



解：先求概率分布函数

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{\sin X\le y\}\\
&= \begin{cases} 0, & y<-1;\\ 1, & y\ge 1;\\ (\pi+2\arcsin(y))/(2\pi), & -1\le y\le 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<-1 \text{ 或 } y\ge 1;\\ 1/\left(\pi\sqrt{1-y^2}\right), & -1\le y\le 1. \end{cases}
$$

习题 4-4(p.185/4.39)

设 X 是具有连续概率分布函数 $F_X(x)$ 的一个随机变量，若将概率分布函数 $F_X(x)$ 作为一个无记忆非线性系统的传输特性，试证明 $Y=F_X(X)$ 为 $(0,1)$ 上的均匀分布。

证明：观察 Y 的概率分布函数 $F_Y(y)=P\{F_X(X)\le y\}$ 。因为概率密度函数取值于 $[0,1]$ ，因此若 $y<0$ ，则 $F_Y(y)=0$ ，当 $y>1$ 时， $F_Y(y)=1$ 。当 $y\in[0,1]$ 时，由于 $F_X(x)$ 单调，因此 $F_X(X)\le y$ 等价于 $X\le F_X^{-1}(y)$ ，而这个事件的概率为 $F_Y(y)=P\{X\le F_X^{-1}(y)\}=F_X(F_X^{-1}(y))=y$ ，由此可知 Y 是 $[0,1]$ 上的均匀分布。

习题 4-5(p.185/4.40)

设随机变量 X_1 和 X_2 互相独立，其概率密度函数为

$$f_{X_1}(x_1)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x_1/2}, & x_1\geq 0\\ 0, & x_1<0\end{cases},\qquad f_{X_2}(x_2)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-x_2/3}, & x_2\geq 0\\ 0, & x_2<0\end{cases}$$

试求随机变量 $Y=X_1+X_2$ 的概率密度函数。

解：由书本例题知道 $f_Y(y)=f_{X_1}(y)*f_{X_2}(y)$，因此

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-(y-\tau)/2}U(y-\tau)\right]\left[\frac{1}{3}e^{-\tau/3}U(\tau)\right]d\tau\\ &= e^{-y/2}\int_0^y e^{\tau/6}d\left(\frac{\tau}{6}\right)\\ &= e^{-y/3}-e^{-y/2}, \qquad y\geq 0\end{aligned}$$

习题 4-5(p.74/2.56, **作业**)

设 X_1 和 X_2 是两个独立同分布的、零均值的 Gauss 随机变量，试证明随机变量 $Y=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 是一个 Rayleigh 分布随机变量。

在无线通信中，考虑 Raleigh 衰落信道时，常涉及 Raleigh 分布

解：由 X_1 和 X_2 为 iid 的高斯 RV 可知：

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}}$$

当 $y<0$ 时，显然有 $f_y(y)=0$

当 $y\geq 0$ 时，有：

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \int\int f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^y\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr\\ &= 2\pi\int_0^y\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2\sigma^2}d\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\\ &= \left(-e^{r^2/2\sigma^2}\right)\Big|_0^y=1-e^{-y^2/2\sigma^2}\end{aligned}$$

从而有

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{y}{\sigma^2}e^{-y^2/2\sigma^2}$$

综上，$Y=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 是一个 Rayleigh 分布随机变量。

第 5 知识要点：随机过程及其描述

㈠子知识要点：

- 随机过程的两个定义

- 描述随机过程的概率函数族
- 部分描述随机过程的矩函数 (均值函数、自相关函数等) 和功率谱密度

(二)应该掌握的基本技能：

- 深刻理解随机过程的定义，会针对具体给定的条件求解一阶和二阶概率函数、矩函数和功率谱密度；
- 对一些特殊的随机过程，如高斯随机过程、 Poisson 随机过程等，需要特别了解其定义性质等。

(三)例题讲析：

习题 5-1(p.71/2.30)

设 K 为掷骰子试验所得随机变量，其样本空间为 $\{1,2,3,4,5,6\}$ ，每个样本点的概率都是 $1/6$ 。定义随机过程

$$X(t)=\cos\left(\frac{2\pi K}{6}\right)t,\qquad t>0$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一阶概率分布函数和一阶概率密度函数。

解：由题意，根据离散 VR 的概率分布函数定义易得

随机过程是带参变量的随机变量，因此在考虑概率函数时， t 是一个时间参变量。

$$\begin{aligned}F_X(x;t)&=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}U\left(x-\cos\frac{2\pi i}{6}t\right)\\ f_X(x;t)&=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\delta\left(x-\cos\frac{2\pi i}{6}t\right)\end{aligned}$$

习题 5-2(p.71/2.31)

一个离散时间随机过程 $X[n]$ 定义如下：若抛均匀硬币，出现正面，则 $X[n]=(-1)^n$ ；若抛均匀硬币出现反面，则 $X[n]=(-1)^{n+1}$ 。试给出：

1) $X[n]$ 一阶概率质量函数；

2) $X[n]$ 和 $X[n+k]$ 的联合概率质量函数。

解：1) 由题义知， $X[n]$ 的样本空间为 $\{+1,-1\}$ ，又由于硬币 质量均匀，所以 $+1,-1$ 等概，从而有

注意这个随机过程的定义，当抛一次硬币时，样本函数就已经确定了

$$P\{x[n]=+1\}=P\{x[n]=-1\}=1/2$$

2) 易知， $(X[n],X[n+k])$ 的样本空间为

$$\{(+1,+1),(+1,-1),(-1,+1),(-1,-1)\}$$

若 k 为偶数，则

$$P\{(1,-1)\}=P\{(-1,1)\}=0, P\{(1,1)\}=P\{(-1,-1)\}=1/2$$

若 k 为奇数，则

$$P\{(1,-1)\}=P\{(-1,1)\}=1/2, P\{(1,1)\}=P\{(-1,-1)\}=0$$

习题 5-3(p.73/2.46)

设函数 $a(t)$ 为三角脉冲

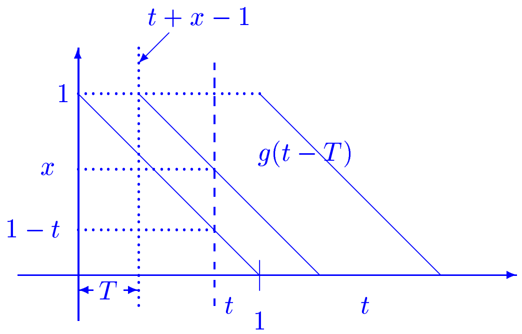
$$a(t)=\begin{cases}-t+1, & 0\le t\le 1\\ 0, & t\notin[0,1]\end{cases}$$

波形 $g(t)$ 定义为

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a(t-n),$$

设 T 为 $(0,1)$ 上的均匀分布，定义随机过程 $X(t)=g(t-T)$，试求： 1) $X(t)$ 在 $0<t<1$ 上的一阶概率分布函数； 2) 均值函数 $m_X(t)$。

解:



1) 如图所示，若 $x<0$， $F(x,t)=0$；若 $x\ge 1$， $F(x,t)=1$。下面讨论 $x\in[0,1)$ 时的情况：

仔细观察图示

a)$x=0$，此时 $X(t)=0$ 当且仅当 $T>t$，也即 $P\{X(t)=0\}=P\{T>t\}=1-t$；

b)$x\le 1-t$，此时 $F(x,t)=P\{X(t)\le x\}=P\{X(t)=0\}+P\{T>t\}=1-t$；

c)$1-t<x<0$，此时

$$\begin{aligned}F_X(x,t)&=P\{X(t)\le x\}\\&=P\{T\le x+t-1\}+P\{T>t\}\\&=(x+t-1)+1-t=x\end{aligned}$$

因此

$$F(x,t)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-t, & 0\le x<1-t;\\ x, & 1-t\le x<1;\\ 1, & 1\le x.\end{cases}$$

注：其概率密度函数为

$$f_X(x,t)=1_{[1-t,1]}(x)+(1-t)\delta(x),\qquad 0<t<1$$

2) 当 $t<0$ 时 $m_X(t)=0$；当 $0\le t<1$ 时,

$$\begin{aligned}m_X(t) &= \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^{1-t}x(1-t)\delta(x)dx+\int_{1-t}^1 x\cdot 1dx\\ &= 0+\frac{1}{2}x^2\Big|_{1-t}^1=t-\frac{1}{2}t^2\end{aligned}$$

当 $t\in[i,i+1)$ 时，$i\ge 1$，$X(t)$ 对于每个 t 是均匀分布，$m_X(t)=(1-0)/2=1/2$。

习题 5-4(p.73/2.48)

设 $Z(t)=At+B$，其中 A 和 B 为互相独立的随机变量，其概率密度函数分别为 $f_A(a)$ 和 $f_B(b)$，试求： 1)$Z(t)$ 的一阶概率密度函数； 2) 均值函数 $m_Z(t)$。

解: 1)$Z(t)$ 的概率分布函数为

注意随机过程是带参变量的随机变量

$$F_Z(z;t)=P\{At+B\le z\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-at}f_A(a)f_B(b)dadb$$

因此，$f_Z(z;t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_A(a)f_B(z-at)da$。

2)$m_Z(t)=t\int_{-\infty}^{\infty}af_A(a)da+\int_{-\infty}^{\infty}bf_B(b)db$。

习题 5-5(p.74/2.49)

下列定义的随机过程 $H(t)$ 称为随机过程 $X(t)$ 的 **符号过程**：

$$H(t)=\begin{cases}+1, & X(t)\ge 0\\ -1, & X(t)<0\end{cases}$$

已知 $X(t)$ 的一阶概率分布函数为 $F_X(x;t)$，二阶概率分布函数为 $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$，试给出 $H(t)$ 的一阶概率密度函数、均值函数和自相关函数。

解: $H(t)$ 的概率质量函数为

$$P\{H(t)=1\}=\int_0^{\infty}F(x;t)dx,\qquad P\{H(t)=-1\}=\int_{-\infty}^{0^-}F(x;t)dx$$

所以，其一阶概率密度函数为

$$f_H(h;t)=\delta(h-1)\int_0^{\infty}F(x;t)dx+\delta(h+1)\int_{-\infty}^{0^-}F(x;t)dx$$

均值函数为

$$m_H(t)=\int_0^{\infty}F(x;t)dx-\int_{-\infty}^{0^-}F(x;t)dx$$

$H(t)$ 的二阶概率质量函数为

$$\begin{aligned}
P\{H(t_1)=1,H(t_2)=1\} &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\
P\{H(t_1)=1,H(t_2)=-1\} &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0^-}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\
P\{H(t_1)=-1,H(t_2)=1\} &= \int_{-\infty}^{0^-}\int_0^{\infty}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\
P\{H(t_1)=-1,H(t_2)=-1\} &= \int_{-\infty}^{0^-}\int_{-\infty}^{0^-}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2
\end{aligned}$$

所以，自相关函数为

$$\begin{aligned}
&R_H(t_1,t_2)\\
&=P\{H(t_1)=1,H(t_2)=1\}-P\{H(t_1)=1,H(t_2)=-1\}\\
&-P\{H(t_1)=-1,H(t_2)=1\}+P\{H(t_1)=-1,H(t_2)=-1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\
&-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0^-}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\
&-\int_{-\infty}^{0^-}\int_0^{\infty}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\
&+\int_{-\infty}^{0^-}\int_{-\infty}^{0^-}F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2
\end{aligned}$$

第 6 知识要点：随机过程的常见特性

(一)子知识要点：

- 分布特性 (Gauss 过程， Poisson 过程等)
- 平稳特性
- 功率谱特性
- 记忆特性
- 遍历特性

(二)应该掌握的基本技能：

- 对一些常见分布特性的随机过程，如 Gauss 过程、 Poisson 过程等，熟练掌握其概率特性和常见性质；
- 可以根据具体条件，判断随机过程的平稳性；
- 对常见功率谱特性的随机信号，如带限过程、带通过程、白噪声等，熟练掌握其性质；
- 对独立增量过程、 Markov 过程等，了解其记忆特性带来的特征；
- 了解随机过程的遍历特性，并对具体随机过程能进行遍历性的验证。

(三)例题讲析：

习题 6-1(p.115/3.18)

设 $N_1(t), N_2(t), \cdots, N_k(t)$ 分别是参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 的互相独立的 Possion 过程，且 $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_k(t)$ ，且 $N_i(t)$ 相互独立，试求 $P\{N(t) = k\}, k \geq 0$ 。

解: Poisson 过程 $N_i(t)$ 的概率质量函数为

$$P\{N_i(t) = k\} = \frac{(\lambda_i t)^k}{k!} e^{-\lambda_i t}, k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

因此其概率生成函数为

$$G_{N_i(t)} = E\{z^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda_i t)^k}{k!} e^{-\lambda_i t} = e^{\lambda_i t(z-1)}$$

因为 $N_1(t), N_2(t), \cdots, N_k(t)$ 相互独立，所以有

$$\begin{aligned} G_{N(t)}(z) &= G_{N_1(t)}(z) G_{N_2(t)}(z) \cdots G_{N_k(t)}(z) \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)t(z-1)} \end{aligned}$$

对 $G_{N(t)}(z)$ 作反变换得：

$$P\{N(t)=k\}=\frac{\lambda t}{k!}e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

其中 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_k$ 所以 $N(t)$ 是参数为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ 的 Possion 过程。

习题 6-2(p.115/3.21)

设 $N(t)$ 是一个参数为 λ 的 Poisson 随机过程，设该 Poisson 随机过程中，每一事件发生时就抛硬币设正面出现的概率为 p 。记 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为时间 $[0,t)$ 内正面和反面出现的次数。

1) 试求 $P\{N_1(t)(5)=j,N_2(t)=k|N(t)=k+j\}$；

2) 证明 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为相互独立的参数为 $p\lambda$ 和 $(1-p)\lambda$ 的 Poisson 随机过程。

解：1)$P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N_2(t)=k+j\}$ 表示抛 $k+j$ 次硬币，出现正面次数和反面次数分别为 k 和 j 的概率。所以，

$$P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N_2(t)=k+j\}=\binom{j}{k+j}p^j(1-p)^k$$

2) 考察

$$\begin{aligned}
&P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}\\
&=P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k|N(t)=k+j\}P\{N(t)=k+j\}\\
&=C_{k+j}^j p^j(1-p)^k\cdot\frac{(\lambda t)^{k+j}e^{-\lambda t}}{(k+j)!}\\
&=\left[\frac{(p\lambda t)^j}{j!}e^{-p\lambda t}\right]\left[\frac{((1-p)\lambda t)^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda t}\right]
\end{aligned}$$

对 $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}$ 求边界概率密度函数：

$$\begin{aligned}
P\{N_1(t)=j\}&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}\\
&=\frac{(p\lambda t)^j}{j!}e^{-p\lambda t}\\
P\{N_2(t)=k\}&=\sum_{j=0}^{\infty}P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}\\
&=\frac{((1-p)\lambda t)^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda t}
\end{aligned}$$

从而得 $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}=P\{N_1(t)=j\}\cdot P\{N_2(t)=k\}$
由概率性质知 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为相互独立的参数为和的 Poisson 随机过程，命题得证。

习题 6-3(p.116/3.25)

设随机信号过程 $Z(t)$ 的取值为 0 或 1，当计数过程 $N(t)$ 的事件每发生一次，则 $Z(t)$ 的值变化一次。已知

$$P\{N(t)=k\}=\frac{1}{1+\lambda t}(\frac{\lambda t}{1+\lambda t})^k \quad k=0,1,2,\cdots\cdots$$

试求 $Z(t)$ 的一阶概率质量函数和均值函数。

解：设 $P\{Z(0)=0\}=p$， $P\{Z(0)=1\}=1-p$。

$$\begin{aligned}P\{Z(t)=\text{初值}\}=P\{N(t)=\text{偶数}\}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda t}(\frac{\lambda t}{1+\lambda t})^{2m}\\&=\frac{\frac{1}{1+\lambda t}}{1-(\frac{1}{1+\lambda t})^2}=\frac{1+\lambda t}{1+2\lambda t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Z(t)\neq\text{初值}\}=P\{N(t)=\text{奇数}\}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda t}(\frac{\lambda t}{1+\lambda t})^{2m+1}\\&=\frac{\frac{\lambda t}{(1+\lambda t)^2}}{1-(\frac{1}{1+\lambda t})^2}=\frac{\lambda t}{1+2\lambda t}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P\{Z(t)=0\} &= P\{N(t)=\text{偶数}|Z(0)=0\}P\{Z(0)=0\}\\&\quad +P\{N(t)=\text{奇数}|Z(0)=1\}P\{Z(0)=1\}\\&=\frac{1+\lambda t}{1+2\lambda t}\cdot p+\frac{\lambda t}{1+2\lambda t}(1-p)\\&=\frac{p+\lambda t}{1+2\lambda t}\end{aligned}$$

$$P\{Z(t)=1\}=1-P\{Z(t)=0\}=\frac{1+\lambda t-p}{1+2\lambda t}$$

所以 $m_Z(t)=0\cdot P\{Z(t)=0\}+1\cdot P\{Z(t)=1\}=\frac{1+\lambda t-p}{1+2\lambda t}$

习题 6-4(p.113/3.8)

设 $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$，其中 A 和 B 是独立同分布的均值为零方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

1) $X(t)$ 的均值函数和自相关函数;

2) $X(t)$ 的一阶概率密度函数;

3) $X(t)$ 二阶概率密度函数。

解: 1) 由均值函数的定义知道

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\{X(t)\} = E\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\} \\ &= E\{A\}\cos\omega t + E\{B\}\sin\omega t = 0 \end{aligned}$$

又由自相关函数的定义知道

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E\{X(t)X(t+\tau)\} \\ &= E\Big\{\Big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\Big) \\ &\quad \times\Big(A\cos\omega(t+\tau) + B\sin\omega(t+\tau)\Big)\Big\} \\ &= E\{A^2\}\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) \\ &\quad + E\{B^2\}\sin\omega t\sin\omega(t+\tau) \\ &= \sigma^2\Big[\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + \sin\omega t\sin\omega(t+\tau)\Big] \\ &= \sigma^2\cos\omega\tau \end{aligned}$$

2) 因为 A 和 B 都是正态随机变量，因此它们的线性组合也是正态随机变量，由 1) 的结论知道 $C_X(t,t) = \sigma^2$, 因此其一阶概率密度函数为

$$f_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

3) 正态随机过程的概率密度函数可以写为

$$\begin{aligned} f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\Big[\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2 - \\ 2\rho\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)\Big(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big) + \Big(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big)^2\Big]\Big\} \end{aligned}$$

其中 $m_1 = m_X(t_1)$，$m_2 = m_X(t_2)$，$\sigma_1^2 = C(t_1,t_1)$，$\sigma_2^2 = C(t_2,t_2)$，$\rho = C(t_1,t_2)/\sigma_1\sigma_2$。本题中，$m_1 = m_2 = 0$，$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$，$\rho = \cos\omega\tau$，因此，

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2|\sin\omega\tau|}\exp\Big\{-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2\cos\omega\tau + x_2^2}{2(\sigma\sin\omega\tau)^2}\Big\}.$$

习题 6-5(2002 年春季博士生入学试题)

某宽平稳实 Gauss 随机过程 $X(t)$ 的均值函数为零，方差函数为常数 1，自相关函数为 $\rho(\tau)$，τ 是时间间隔。定义二阶采样最大随机过程 $Y(t)=\max\{X(t+\tau_0),X(t)\}$，其中 τ_0 是正常数。试用正态积分函数 $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ 表示 $Y(t)$ 的一阶概率密度函数。

解：由定义知道，$Y(t)$ 的概率分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y,t) &= P\{Y(t)\le y\}=P\{\max\{X(t+\tau_0),X(t)\}\le y\}\\ &= P\{X(t+\tau_0)\le y, X(t)\le y\}\\ &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{y} f_X(x_1,x_2;t,t+\tau_0)dx_1dx_2\end{aligned}$$

其中 $f_X(x_1,x_2;t,t+\tau_0)$ 是 $X(t)$ 的二阶概率密度函数，且有如下表达

$$f_X(x_1,x_2;t,t+\tau_0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau_0)}}\exp\Big\{-\frac{x_1^2-2x_1x_2\rho(\tau_0)+x_2^2}{2\rho^2(\tau_0)}\Big\}.$$

又 $f_X(x,t)=F'_X(x,t)$，所以

$$f_Y(y,t)=\int_{-\infty}^{y}f_X(y,x_2;t,t+\tau_0)dx_2+\int_{-\infty}^{y}f_X(x_1,y;t,t+\tau_0)dx_1$$

由 $f_X(x_1,x_2;t,t+\tau_0)$ 的表达式关于 X_1 和 X_2 的对称性，有

$$\begin{aligned}f_Y(y,t) &= 2\int_{-\infty}^{y}f_X(y,x_2;t,t+\tau_0)dx_2\\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau_0)}}\int_{-\infty}^{y}\exp\Big\{-\frac{y^2-2yx_2\rho(\tau_0)+x_2^2}{2\rho^2(\tau_0)}\Big\}dx_2\\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau_0)}}\exp\{-\frac{y^2(1-\rho^2(\tau_0))}{2\rho^2(\tau_0)}\}\\ &\quad\times\int_{-\infty}^{y}\exp\Big\{-\frac{(x_2/\rho(\tau_0)-y)^2}{2}\Big\}dx_2\\ &= \frac{\rho(\tau_0)}{\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau_0)}}\exp\{-\frac{y^2(1-\rho^2(\tau_0))}{2\rho^2(\tau_0)}\}\times\int_{-\infty}^{y/\rho(\tau_0)-y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= \frac{\sqrt{\gamma}}{\pi}e^{-y^2/2\gamma}G\Big(\frac{1-\rho(\tau_0)}{\rho(\tau_0)}y\Big)\end{aligned}$$

其中 $\gamma=\rho^2(\tau_0)/\Big(1-\rho^2(\tau_0)\Big)$。

习题 6-6(p.112/3.1)

证明公式 (3.4) 和 (3.5)。

证明：由定义知道

$$E\{|X|^n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

若 $n = 2k$ ，则

$$E\{X^n\} = E\{|X|^n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2k} e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

令 $z = x/\sigma$ ，则 $x = \sigma z$ ， $dx = \sigma dz$ ，所以

$$\begin{aligned}
E\{X^{2k}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^{2k}z^{2k}e^{-z^2/2}\sigma dz \\
&= \sigma^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^{2k}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}z^{2k}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}z^{2k-1}d(-e^{-z^2/2}) \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Big[-e^{-z^2/2}z^{2k-1}\Big|_0^{\infty} + (2k-1)\int_0^{\infty}z^{2k-2}e^{-z^2/2}dz\Big] \\
&= \sigma^{2k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(2k-1)\int_0^{\infty}z^{2k-2}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2/2}dz \\
&= \sigma^{2k}(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1
\end{aligned}$$

$E\{X^{2k+1}\}$ 的被积分函数为奇函数，故积分为零。

$$\begin{aligned}
E\{|X|^{2k+1}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2k+1}e^{-x^2/2\sigma^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty}x^{2k+1}e^{-x^2/2\sigma^2}dx
\end{aligned}$$

同样，令 $z = x/\sigma$ ，则 $x = \sigma z$ ， $dx = \sigma dz$ ，所以

$$\begin{aligned}
E\{|X|^{2k+1}\} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty}\sigma^{2k+1}z^{2k+1}e^{-z^2/2}\sigma dz \\
&= \sigma^{2k+1}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}z^{2k+1}e^{-z^2/2}dz
\end{aligned}$$

进一步,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} z^{2k+1} e^{-z^2/2} dz &= \int_0^{\infty} z^{2k} d(-e^{-z^2/2}) \\
&= -z^{2k} e^{-z^2/2}\Big|_0^{\infty} + 2k \int_0^{\infty} z^{2k-1} e^{-z^2/2} dz \\
&= 2k \int_0^{\infty} z^{2k-1} e^{-z^2/2} dz \\
&= 2k \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 2 \int_0^{\infty} z e^{-z^2/2} dz \\
&= 2^k k! (-e^{-z^2/2}\Big|_0^{\infty}) \\
&= 2^k k!
\end{aligned}
$$

所以

$$
E\{|X|^{2k+1}\} = \sigma^{2k+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k!.
$$

习题 6-7(p.249/5.12)

对于窄带宽平稳过程 $Y(t) = A(t)\cos 2\pi f_0 t - B(t)\sin 2\pi f_0 t$ ，若其均值为零，功率谱密度为

$$
S_Y(f) = \begin{cases} W\cos(f-f_0)\pi/B, & -1/2 \le (f-f_0)/B \le 1/2 \\ W\cos(f+f_0)\pi/B, & -1/2 \le (f+f_0)/B \le 1/2 \\ 0, & \text{其他 } f \end{cases}
$$

式中 W, B 及 f_0 都是正常数，且 $f_0 \gg B$ 。试求：

1) $Y(t)$ 的平均功率;

2) $A(t)$ 的功率谱密度 $S_A(f)$;

3) 互相关函数 $R_{AB}(\tau)$ 。

解: 1) 平均功率为

$$
\begin{aligned}
E\{|Y(t)|^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df \\
&= \int_{-f_0-B/2}^{-f_0+B/2} W\cos(f+f_0)\pi/Bdf \\
&+ \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} W\cos(f-f_0)\pi/Bdf \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} WB\cos\pi f'df' + \int_{-1/2}^{1/2} WB\cos\pi f''df'' \\
&= 2WB\int_{-1/2}^{1/2}\cos\pi fdf = \frac{2WB}{\pi}\sin\pi f|_{-1/2}^{1/2} \\
&= 4WB/\pi
\end{aligned}
$$

作变量变换

$$f' = (f+f_0)/B$$

$$f'' = (f-f_0)/B$$

2) 因为宽平稳，故其自相关函数为

$$R_Y(\tau) = R_A(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + R_{AB}(\tau)\sin 2\pi f_0\tau$$

作 Fourier 变换得到：

$$S_Y(f) = \frac{1}{2}[S_A(f-f_0)+S_A(f+f_0)] + \frac{1}{2j}[S_{AB}(f-f_0)-S_{AB}(f+f_0)]$$

因此 $S_A(f) = 2W\cos f\pi/B$， $-1/2 \le f/B \le 1/2$ 。

3) 由 $S_{AB}(f) = 0$ 得到 $R_{AB}(\tau) = 0$ 。

习题 6-8(p.180/4.11)

设 $g(x)$ 为如下式定义的三角形脉冲函数：

$$
g(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \quad x \end{cases}
$$

1) 若宽平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = g(\tau/T)$， T 为正常数，试求 $X(t)$ 的功率谱密度。

2) 若宽平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(f) = g(f/W)$， W 为正常数，试求 $X(t)$ 的自相关函数。

解: 1) 由 Wiener-Xinchin 定理知道

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\tau}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad \text{(偶函数故)} \\
&= 2\int_{0}^{T} \left(\frac{-\tau}{T}+1\right) \cos 2\pi f\tau d\tau \\
&= T\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2
\end{aligned}$$

2) 同样由 Wiener-Xinchin 定理知道

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{f}{W}\right) e^{j2\pi f\tau} df \qquad (\text{令 } -f = f') \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} g\left(\frac{-f'}{W}\right) e^{-j2\pi f'\tau} (-df') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{f}{W}\right) e^{-j2\pi f\tau} (df) \qquad \text{(偶函数故)} \\
&= W\left(\frac{\sin \pi\tau W}{\pi\tau W}\right)^2
\end{aligned}$$

习题 6-9(p.181/4.16)

试对具有下列自相关函数的宽平稳离散时间过程求其功率谱密度:

1) $R_X[k] = 4(1/2)^{|k|} + 16(1/4)^{|k|}$;

2) 对 $|k| < N$, $R_X(k) = 1 - |k|/N$; $|k| \geq N$ 时, $R_X(k) = 0$ 。

解: 由 Wiener-Xinchin 定理知道

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] e^{-jk2\pi f} \\
&= 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/2)^{|k|} e^{-jk2\pi f} + 16\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/4)^{|k|} e^{-jk2\pi f}
\end{aligned}$$

$$= 4\left[\sum_{k=-\infty}^{-1}(1/2)^{-k}e^{-jk2\pi f} + \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^{k}e^{-jk2\pi f}\right]$$

$$+ 16\left[\sum_{k=-\infty}^{-1}(1/4)^{-k}e^{-jk2\pi f} + \sum_{k=0}^{\infty}(1/4)^{k}e^{-jk2\pi f}\right])$$

$$= 4\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi f}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)^{k}\right]$$

$$+ 16\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}e^{j2\pi f}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}e^{-j2\pi f}\right)^{k}\right]$$

$$= 4\left[\frac{\frac{1}{2}e^{j2\pi f}}{1-\frac{1}{2}e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}\right] + 16\left[\frac{\frac{1}{4}e^{j2\pi f}}{1-\frac{1}{4}e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\pi f}}\right]$$

$$= \frac{3\times 4}{5-4\cos 2\pi f} + \frac{15\times 16}{17-8\cos 2\pi f}$$

2) 由 Wiener-Xinchin 定理得

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k]e^{-jk2\pi f}$$

$$= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)z^k \qquad (z = e^{-j2\pi fk})$$

$$= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} z^k + \sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\frac{|k|}{N}z^k$$

此外

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} z^k = \frac{z^{-(N-1)}\left(1-z^{2N-1}\right)}{1-z}$$

$$= \frac{z^{-(N-1)} - z^N}{1-z}$$

利用课本 p.160 的公式 $\sum_{k=0}^{m-1} kx^k = \frac{x-mx^m+(m-1)x^{m+1}}{(1-x)^2}$ 得

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\frac{|k|}{N}z^k$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} kz^k + \sum_{k=0}^{N-1} k(1/z)^k\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{e^{j2\pi f} - N(e^{j2\pi f})^N + (N-1)(e^{j2\pi f})^{N+1}}{(1-e^{j2\pi f})^2}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{-j2\pi f} - N(e^{-j2\pi f})^N + (N-1)(e^{-j2\pi f})^{N+1}}{(1-e^{j2\pi f})^2}\right]$$

$$= \frac{2\left(\cos 2\pi f - N\cos 2\pi Nf + (N-1)\cos 2\pi(N+1)f\right)}{N(1-e^{j2\pi f})^2}$$

所以

$$S_X(f) = \left.\frac{(z^N - 1)^2}{N z^{N-1}(z-1)^2}\right|_{z=e^{-j2\pi f}}$$

习题 6-10(p.379/8.4， **作业**)

设 $f(t)$ 是一个周期为 L 的函数， Φ 为 $[0, L]$ 上的均匀分布的随机变量，则 $X(t) = f(t+\Phi)$ 称为 **随机相位过程**，试证明 $X(t)$ 是各态遍历的。若 $f(t)$ 是如下函数

$$f(t) = \begin{cases} \frac{8A}{L}t, & 0 \le t \le \frac{L}{8} \\ -\frac{8A}{L}(t - \frac{L}{4}), & \frac{L}{8} < t \le \frac{L}{4} \\ 0, & \frac{L}{4} < t \le L \end{cases}$$

其中 A 为常数，试计算 $m_X(t), \langle X(t) \rangle$，并验证其均值遍历性。

证明：均值函数为

$$m_X(t) = E\{f(t+\Phi)\} = \frac{1}{L}\int_0^L f(t+\phi)d\phi = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)dt$$

这个均值函数是周期函数 $f(t)$ 在一个周期上的平均，这个平均也是时间平均 $\langle f(t+\Phi) \rangle$ 的值，因此是均值遍历的。

同样

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E\{f(t+\Phi)f(t+\tau+\Phi)\} \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L f(t+\phi)f(t+\tau+\phi)d\phi = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)f(t+\tau)dt \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \langle X(t)X(t+\tau) \rangle &= \frac{1}{L}\int_0^L f(t+\Phi)f(t+\tau+\Phi)dt \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L f(t)f(t+\tau)dt \end{aligned}$$

因此 $R_X(t, t+\tau) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle$，所以 $X(t)$ 是遍历的。

计算均值函数

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \frac{1}{L}\int_0^L f(t)dt \\
&= \frac{1}{L}\left(\int_0^{L/8} \frac{8A}{L} t dt - \int_{L/8}^{L/4} \frac{8A}{L}\left(t - \frac{L}{4}\right) dt\right) \\
&= \frac{1}{L}\left(\frac{8A}{L}\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{L/8} - \frac{8A}{L}\frac{t^2}{2}\bigg|_{L/8}^{L/4} + 2A\left(\frac{L}{4} - \frac{L}{8}\right)\right) \\
&= \frac{A}{8}
\end{aligned}
$$

事实上，计算可得 $\langle X(t)\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)dt$ ，因此 $X(t)$ 是均值遍历的。

第 7 知识要点：随机过程的微积分

㈠子知识要点：

- 均方收敛
- 均方连续
- 均方导数
- 均方积分

㈡应该掌握的基本技能：

- 深刻理解和掌握均方收敛、均方连续、均方导数和均方积分所表示的意义及其常见性质；
- 对通常给定的随机过程，判断其均方连续性，会求其均方导数和积分。

㈢例题讲析：

习题 7-1(p.179/4.1)

证明式 (4.2) 定义的距离满足距离三公理。

证明：由题义，式 (4.2) 定义的距离公式为： $d(X,Y) = \sqrt{\langle X-Y, X-Y\rangle}$

1) 非负性的证明

$$
\begin{aligned}
d(X,Y) &= \sqrt{\langle X-Y, X-Y\rangle} \\
&= \sqrt{E\{(X-Y)(X-Y)^*\}} \\
&= \sqrt{E\{|X-Y|^2\}} \geq 0
\end{aligned}
$$

当 $P\{X=Y\}=1$ 时， $d(X,Y)=0$ ，即等号成立。

2) 对称性的证明

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \sqrt{\langle X-Y, X-Y\rangle} = \sqrt{E\{|X-Y|^2\}} \\ &= \sqrt{E\{|Y-X|^2\}} = \sqrt{\langle Y-X, Y-X\rangle} = d(Y,X) \end{aligned}$$

3) 三角不等式的证明

$$\begin{aligned} & d^2(X,Z) \\ = & \langle X-Z, X-Z\rangle \\ = & \langle X-Y+Y-Z, X-Y+Y-Z\rangle \\ = & \langle X-Y, X-Y\rangle + \langle X-Y, Y-Z\rangle \\ & +\langle Y-Z, X-Y\rangle + \langle Y-Z, Y-Z\rangle \\ = & \langle X-Y, X-Y\rangle + 2\mathrm{Re}\langle X-Y, Y-Z\rangle + \langle Y-Z, Y-Z\rangle \\ \leq & \langle X-Y, X-Y\rangle + 2|\langle X-Y, Y-Z\rangle| + \langle Y-Z, Y-Z\rangle \\ \leq & \langle X-Y, X-Y\rangle + 2\sqrt{\langle X-Y, X-Y\rangle\langle Y-Z, Y-Z\rangle} \\ & +\langle Y-Z, Y-Z\rangle \\ = & d^2(X,Y) + 2d(X,Y)d(Y,Z) + d^2(Y,Z) \\ = & [d(X,Y)+d(Y,Z)]^2 \end{aligned}$$

由 1) 知, $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$

习题 7-2(p.179/4.2)

已知时间序列 X_n 的自相关函数为

$$R_X[n_1,n_2] = 1 - \frac{|n_1-n_2|}{2n_1n_2}$$

试证明 X_n 均方收敛。

证明: 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n_1,n_2\to\infty} R_X[n_1,n_2] &= \lim_{n_1,n_2\to\infty}\left(1-\frac{|n_2-n_1|}{2n_1n_2}\right) \\ &= \lim_{n_1,n_2\to\infty}\left(1-\left|\frac{1}{2n_1}-\frac{1}{2n_2}\right|\right) = 1 \end{aligned}$$

由 loève 准则知, X_n 均方收敛。

习题 7-3(p.179/4.6)

已经 $X(t)$ 是零均值且自相关函数 $R_X(\tau)=\sin\alpha\tau/\tau$ 的宽平稳过程，其中 $\alpha>0$ 。试讨论 $X(t)$ 的均方连续性、均方可微与均方可积性。

解：若补充定义自相关函数 $R_X(\tau)=\sin\alpha\tau/\tau$ 在 0 点连续，即自相关函数 $R_X(0)=\alpha$ 。

1) 因为 $\lim\limits_{\tau\to 0}R_X(\tau)=\alpha=R_X(0)$ 由均方连续准则易知， $X(t)$ 均方连续。

2) 由均方可导准则，对 $R_X(t_1,t_2)$ 求二阶广义导数：

$$\begin{aligned}
& \lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\Delta^2_{\tau_1\tau_2}R_X(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=t}\\
= & \lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}[R_X(t+\tau_1,t+\tau_2)-R_X(t+\tau_1,t)\\
& -R_X(t,t+\tau_2)+R_X(t,t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\left[\frac{\sin\alpha(\tau_1-\tau_2)}{\tau_1-\tau_2}-\frac{\sin\alpha\tau_1}{\tau_1}-\frac{\sin\alpha\tau_2}{\tau_2}+\alpha\right]\\
= & \lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\left[\frac{\alpha(\tau_1-\tau_2)-\frac{1}{3!}\alpha^3(\tau_1-\tau_2)^3+\circ(\tau_1-\tau_2)^3}{\tau_1-\tau_2}\right.\\
& \left.-\frac{\alpha\tau_1-\frac{1}{3!}\alpha^3\tau_1^3+\circ\tau_1^3}{\tau_1}-\frac{\alpha\tau_2-\frac{1}{3!}\alpha^3\tau_2^3+\circ\tau_2^3}{\tau_2}+\alpha\right]\\
= & \lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\frac{\alpha^3}{6}\left[\tau_1^2+\tau_2^2-2(\tau_1-\tau_2)^2\right]=\frac{1}{3}\alpha^3<\infty
\end{aligned}$$

所以 $X(t)$ 均方可微。

3)

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\
= & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha(t_1-t_2)}{t_1-t_2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\
= & \int_{-\infty}^{+\infty}\pi\mathrm{d}t_2\\
= & \infty
\end{aligned}$$

所以 $X(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是均方可积的，进一步易知，若限定为有有界区间，则 $X(t)$ 是均方可积的。

第 8 知识要点：随机过程的变换

(一)子知识要点：

- 随机过程通过线性系统的表示

- 随机过程通过线性系统的二阶矩统计性质
- 随机过程通过线性系统的概率函数性质
- 随机过程通过非线性无记忆系统

(二)应该掌握的基本技能：

- 掌握随机过程通过线性系统的积分表示，特别对时不变系统的卷积表示要熟练掌握；
- 能针对给定的线性系统，分析其输入和输出的二阶矩性质、功率谱密度性质；
- 对高斯过程通过线性系统的概率特性要熟练掌握；
- 能通过随机变量的非线性函数，分析随机过程通过非线性无记忆系统的概率性质。

(三)例题讲析：

习题 8-1(p.183/4.27，**作业**)

设 $X(t)$ 是一个定义于 $\mathbb{R}$ 上的均方连续的实平稳过程，又 $R_X(\tau)$ 绝对可积，设 $Y(t)=X(t)+X(t+T)$，其中 T 为常数，试证：$S_Y(f)=2[1+\cos 2\pi fT]S_X(f)$，其中 $S_X(f)$，$S_Y(f)$ 分别表示 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度。

证明：由于 $X(t)$ 为实宽平稳随机过程，所以

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t+\tau)Y(t)\}\\&=E\{[X(t+\tau)+X(t+T+\tau)][X(t)+X(t+T)]\}\\&=2R_X(\tau)+R_X(\tau+T)+R_X(\tau-T)\end{aligned}$$

由 Wiener-Xinchin 定理

$$\begin{aligned}S_X(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\\&=2S_X(f)+S_X(f)e^{j2\pi fT}+S_X(f)e^{-j2\pi fT}\\&=2[1+\cos 2\pi fT]S_X(f)\qquad \text{得证}\end{aligned}$$

习题 8-2(p.184/4.31，**作业**)

将定义于 $[0,\infty]$ 上的、自相关函数为 $R_X(\tau)=\delta(\tau)$ 的随机过程 $X(t)$ 输入冲激响应为 $h(t)$ 的时不变线性系统，设输出为 $Y(t)$。分别对

(1)

$$h(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < T \\ 0 & , \quad \text{其它} \quad t \end{cases}$$

(2)

$$h(t) = \begin{cases} t\,e^{-2t} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad \text{其它} \quad t \end{cases}$$

求 $Y(t)$ 的自相关函数、功率谱密度、及 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度。

解：仅对 (2) 求解。

先求自相关函数

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \\ &= \delta(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \\ &= h(\tau) * h(-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\alpha)h(-\alpha)\,d\alpha \end{aligned}$$

因为 $h(t) = te^{-2t}U(t)$，所以

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau-\alpha)e^{-2(\tau-\alpha)}U(\tau-\alpha)(-\alpha)e^{2\alpha}U(-\alpha)\,d\alpha \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(\alpha-\tau)e^{-2\tau+4\alpha}\,d\alpha & \tau \le 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \alpha(\alpha-\tau)e^{-2\tau+4\alpha}\,d\alpha & \tau > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{32}e^{2\tau}(1-2\tau) & \tau \le 0 \\ \frac{1}{32}e^{-2\tau}(1+2\tau) & \tau > 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{32}e^{-2|\tau|}(1+2|\tau|) \end{aligned}$$

传递函数 $H(f)$ 为

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{0}^{\infty} te^{-2t}e^{-j2\pi ft}\,dt \\ &= \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \end{aligned}$$

因为 $S_X(f) = 1$，所以

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{1}{(4+4\pi^2 f^2)^2}$$

此外,

$$S_{YX}(f) = S_X(f)H(f) = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2}$$
$$S_{YX}(f) = S_X(f)H^*(f) = \frac{1}{(2-j2\pi f)^2}$$

习题 8-3(p.184/4.33， **作业**)

设 $Y[n] = X[n]+\beta X[n-1]$，其中 $X[n]$ 是零均值的自相关函数为 $R_X[k] = \alpha^{|k|}\sigma^2$ 的随机序列，其中 $|\alpha| < 1$。试求以下各量：$R_{YX}[k]$、$S_{YX}(f)$、$S_Y(f)$、$R_Y[k]$、 $E\{Y^2[n]\}$， 并求其当 β 为何值时， $Y[n]$ 为白噪声。

解: 1) 求 $R_{YX}[k]$：

$$\begin{aligned} R_{YX}[k] &= E\{Y[n+k]X[n]\} \\ &= E\{(X[n+k]+\beta X[n+k-1])X[n]\} \\ &= R_X[k]+\beta R_X[k-1] \\ &= \sigma^2[\alpha^{|k|}+\beta\alpha^{|k-1|}] \end{aligned}$$

2) 求 $R_Y[k]$：

$$\begin{aligned} R_Y[k] &= E\{Y[n+k]Y[n]\} \\ &= E\{(X[n+k]+\beta X[n+k-1])(X[n]+\beta X[n-1])\} \\ &= R_X[k]+\beta^2 R_X[k]+\beta R_X[k-1]+\beta R_X[k+1] \\ &= \sigma^2\alpha^{|k|}[1+\beta^2]+\sigma^2\beta[\alpha^{|k-1|}+\alpha^{|k+1|}] \end{aligned}$$

3) 求 $S_{YX}(f)$： 由 $Y[n] = X[n]+X[n-1]$， 有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1+\beta z^{-1}$$

所以 $H(f) = 1+\beta e^{-j2\pi f}$ 。 又由于

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k]e^{-j2\pi fk} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|}\sigma^2 e^{-j2\pi fk} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-k}\sigma^2 e^{-j2\pi fk} + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\sigma^2 e^{-j2\pi fk} \\ &= \sigma^2\left[\frac{\alpha e^{j2\pi f}}{1-\alpha e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi f}}\right] \\ &= \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f} \end{aligned}$$

因此

$$S_{YX}(f) = S_X(f)H(f) = \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)(1+\beta e^{-j2\pi f})}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f}$$

4) 求 $S_Y(f)$：

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \sigma^2(1-\alpha^2)\frac{1+\beta^2+2\beta\cos 2\pi f}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f}$$

若 $Y[n]$ 是白噪声，则 $S_Y(f)$ 为关于 f 的常数，即

$$\frac{1+\beta^2+2\beta\cos 2\pi f}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f} = K \quad \Longrightarrow \begin{cases} 1+\beta^2 = K(1+\alpha^2) \\ 2\beta = -2K\alpha \end{cases}$$

消去 K，得

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1) = 0$$

所以

$$\beta = -\alpha \qquad \text{或} \qquad \beta = -1/\alpha$$

5) 若考虑 $Y[n]$ 为实随机过程，则

$$E\{Y^2[n]\} = R_Y[0] = \sigma^2(1+2\alpha\beta+\beta^2)$$

习题 8-4(p.186/4.41，**作业**)

设非线性无记忆系统的传输特性为 $y = g(x) = be^x$，$b > 0$。设输入过程 $X(t)$ 是一个均值为 m_X、方程为 σ_X^2 的宽平稳 Gauss 过程。试求：输出过程 $Y(t)$ 的一维概率密度函数、均值及方差。

解：由题意知：

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}$$

此外，

$$y = be^x, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

因此，

$$\begin{aligned} f_Y(y;t) &= f_X(x;t)\cdot\frac{dx}{dy}\Big|_{x=g^{-1}(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{y}{b}-m_X\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\}\cdot\frac{1}{y}, \qquad y>0 \end{aligned}$$

均值为

$$
\begin{aligned}
E\{Y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x;t)\, dx \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{x - \frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
&= b \cdot e^{m_X + \frac{\sigma_X^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
&= b \cdot e^{m_X + \frac{\sigma_X^2}{2}}
\end{aligned}
$$

均方为

$$
\begin{aligned}
E\left\{Y^2(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) \cdot f_X(x;t)\, dx \\
&= \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
&= \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-2\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{4\sigma_X^4 + 4\sigma_X^2 m_X}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
&= b^2 \cdot e^{2m_X + 2\sigma_X^2} \\
&\qquad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-2\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
&= b^2 \cdot e^{2m_X + 2\sigma_X^2}
\end{aligned}
$$

所以，方差为

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= Var\{Y(t)\} = E\left\{Y^2(t)\right\} - E^2\{Y(t)\} \\
&= b^2 \cdot e^{2m_X + 2\sigma_X^2} - \left(b \cdot e^{m_X + \frac{\sigma_X^2}{2}}\right)^2 \\
&= b^2 \cdot e^{2m_X + \sigma_X^2}\left(e^{\sigma_X^2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

第 9 知识要点：随机过程的正交分解

(一)子知识要点：

- 正交分解

- Fourier 分解
- K-L 分解

㈡应该掌握的基本技能：

- 了解正交分解的含义的性质，能对正交分解进行简单的分析。

㈢例题讲析：

习题 9-1(p.247/5.1，**作业**)

已知 $f(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的周期函数， $f(t)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有如下 Fourier 级数展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jnt}$$

若 Θ 为 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布，试对随机过程 $X(t)=f(t+\Theta)$ 进行 Fourier 级数展开。

解：对 $f(t)$ 进行 Fourier 级数展开：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jnt} \qquad t\in(-\pi,\pi)$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-jnt}dt$$

对 $f(t+\theta)$ 进行 Fourier 级数展开：

$$f(t+\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jnt}, \qquad t\in(-\pi,\pi)$$

其中，

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+\theta)e^{-jnt}dt \qquad \text{令}x=t+\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta}f(x)e^{-jnx}\cdot e^{jn\theta}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-jnx}dx\cdot e^{jn\theta} \\
&= a_n\cdot e^{jn\theta}
\end{aligned}$$

所以， $X(t)=f(t+\theta)$ 的 Fourier 级数展开为：

$$f(t+\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot e^{jn\theta}\cdot e^{jnt}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot e^{jn(t+\theta)} \qquad ,t\in(-\pi,\pi)$$

习题 9-2(p.247/5.2，**作为参考**)

设宽平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$， $\alpha>0$。试将 $X(t)$ 在区间 $[-T,T]$ 上进行 Karhunen-Loève 展开。

解：决定标准正交函数系的特征方程为

$$\int_{-T}^{T} e^{-\alpha|t-u|}\varphi(u)du=\lambda\varphi(t)$$

进一步展开得

$$\lambda\varphi(t)=\int_{-T}^{t} e^{-\alpha(t-u)}\varphi(u)du+\int_{t}^{T} e^{-\alpha(u-t)}\varphi(u)du$$

将上式对 t 求导得到

$$\lambda\varphi'(t)=-\alpha e^{-\alpha t}\int_{-T}^{t} e^{\alpha u}\varphi(u)du+\alpha e^{\alpha t}\int_{t}^{T} e^{-\alpha u}\varphi(u)du$$

对上式关于 t 再求一次导数得到

$$\begin{aligned}\lambda\varphi''(t)&=\alpha^2 e^{-\alpha t}\int_{-T}^{t} e^{\alpha u}\varphi(u)du-\alpha e^{-\alpha t}e^{\alpha t}\varphi(t)\\&=\alpha^2 e^{\alpha t}\int_{t}^{T} e^{-\alpha u}\varphi(u)du-\alpha e^{\alpha t}e^{-\alpha t}\varphi(t)\\&=\alpha^2\lambda\varphi(t)-2\alpha\varphi(t)\end{aligned}$$

所以

$$\lambda\varphi''(t)=(\alpha^2\lambda-2\alpha)\varphi(t)$$

1) 情形 1： $\lambda=0$，此时 $\varphi(t)\equiv 0$，显然此解无意义。

2) 情形 2： $\lambda=2/\alpha$，则由 $\varphi''(t)=0$ 知 $\varphi(t)=At+B$，将其代入特征方程，待定系数 A 和 B，发现 A 和 B 必须满足

$$\frac{B}{A}=\frac{-(\alpha T+1)}{\alpha}\tanh(\alpha t)$$

其中

$$\tanh(\alpha t)=\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}$$

因为 B/A 是常数，因此得出 $\lambda=2/\alpha$ 不可能是特征值。

3) 情形 3： $\lambda>2/\alpha$。令

$$a^2=\frac{\alpha^2(\lambda-2/\alpha)}{\lambda},\qquad a>0$$

则

$$\varphi''(t)=a^2\varphi(t)$$

上述方程的通解为 $\varphi(t)=c_1e^{at}+c_2e^{-at}$ 。待定系数 c_1 和 c_2 时发现

$$\frac{e^{-aT}}{a+\alpha}c_1=\frac{e^{aT}}{a-\alpha}c_2$$
$$\frac{e^{-aT}}{a+\alpha}c_2=\frac{e^{aT}}{a-\alpha}c_1$$

而并不存在非零的 c_1 和 c_2 满足上述等式。

4) 情形 4： $2/\alpha>\lambda>0$ 。令

$$b^2=-\frac{\alpha^2(\lambda-2/\alpha)}{\lambda},\qquad b>0$$

则

$$\varphi''(t)+b^2\varphi(t)=0$$

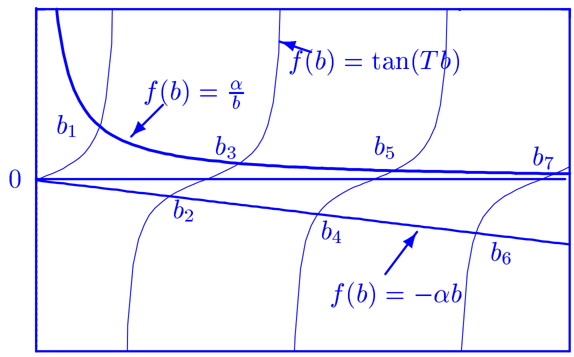
上述方程的通解为 $\varphi(t)=c_1e^{jbt}+c_2e^{-jbt}$ 。待定系数 c_1 和 c_2 时发现要使 λ 是特征值，必须 $c_1\pm c_2=0$ 。当 $c_1=-c_2$ 时，导出

$$\tan(bT)=-\frac{b}{\alpha}$$

当 $c_1=c_2$ 时，可以求得

$$\tan(bT)=\frac{\alpha}{b}$$

设 $b_i,i=1,2,3,\cdots$ 是上述方程的解，如图所示，



则可以求出相应的 λ_i

$$\lambda_i=\frac{2\alpha}{\alpha^2+b_i^2},\qquad i=1,2,3,\cdots$$

i 为奇数时，对应于 $c_1=c_2$ ，此时特征函数为

$$\varphi_i(t)=\frac{\cos b_it}{\left[T\left(1+\frac{\sin 2b_it}{2b_it}\right)\right]^{1/2}},\qquad i=1,3,5,\cdots$$

i 为偶数时，对应于 $c_1 = -c_2$ ，此时特征函数为

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin b_i t}{\left[T\left(1 - \frac{\sin 2b_i t}{2b_i t}\right)\right]^{1/2}}, \qquad i = 2, 4, 6, \cdots$$

因此，可以对 $X(t)$ 进行 K-L 展开为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i \varphi_i(t), \qquad -T \le t \le T$$

其中 $v_i = \int_{-T}^{T} X(t)\varphi_i^*(t)dt$ 。

第 10 知识要点：随机信号的检测

(一)子知识要点：

- 极大似然检测
- 最大后验概率检测

(二)应该掌握的基本技能：

- 能对具体的问题，给出极大似然检测所对应的组合优化问题。

(三)例题讲析：

习题 10-1(p.249/5.14，作业)

设某简单通信系统等概发送两个信号 S_0 和 S_1 ， $S_0 = (-1, -1, -1)$ 和 $S_1 = (1, 1, 1)$ 。接收端的接收信号为

$$r = (r_1, r_2, r_3) = S_i + n, n = (n_1, n_2, n_3)$$

的每个分量是相互独立的零均值单位方差的 Gauss 随机变量。试给出 S_0 和 S_1 的极大似然估计检测，并给出观测空间的判决分割，并计算最大似然估计检测的判决错误概率。

解: $\hat{S}_i = \arg\{\max_{S_i} f(r|S_i)\}$ 其中

$$\begin{aligned} f(r|S_i) = f(r - S_i) &= \prod_{k=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k - S_i^{(k)})^2}{2}} \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^3 e^{-\frac{(r_1-b)^2+(r_2-b)^2+(r_3-b)^2}{2}} \end{aligned}$$

要使 $f(r|S_i)$ 最大，即要使

$$x(b) = (r_1 - b)^2 + (r_2 - b)^2 + (r_3 - b)^2$$

最小。因此， r 离 S_0, S_1 哪个欧氏距离近，就判定为谁。所以，以 S_0 和 S_1 的连线的垂直平分面将在三维观测空间分为两半，该垂直平分面可归入任意一边。

错误概率为

$$\begin{aligned} Pe &= P\{S_0 \neq \hat{S}_0|S_0\}P\{S_0\} + P\{S_1 \neq \hat{S}_1|S_1\}P\{S_1\} \\ &= P\{S_0 \neq \hat{S}_0|S_0\} \end{aligned}$$

上式是因为 S_0 和 S_1 等概，所以

$$\begin{aligned} Pe = P\{&(r_1+1)^2 + (r_1+1)^2 + (r_1+1)^2 \\ &\geq (r_1-1)^2 + (r_1-1)^2 + (r_1-1)^2|S_0\} \\ = P\{&r_1 + r_2 + r_3 \geq 0|S_0\} \\ = P\{&(-1+n_1) + (-1+n_2) + (-1+n_3) \geq 0\} \\ = P\{&n_1 + n_2 + n_3 \geq 3\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{3-n_1-n_2}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^3 e^{-\frac{n_1^2+n_2^2+n_3^2}{2}} \mathrm{d}n_1 \mathrm{d}n_2 \mathrm{d}n_3 \end{aligned}$$

第 11 知识要点：随机信号的滤波

(一)子知识要点：

- 均方滤波

(二)应该掌握的基本技能：

- 对离散情形的滤波问题，特别是对有限长度的离散滤波器，要能给出确定滤波器系数的方程，并求解。
- 对连续情形的滤波问题，会针对具体问题推导滤波器冲激响应所满足的方程。

(三)例题讲析：

习题 11-1(p.250/5.22，作业)

设 $S^*(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(t-\tau)h(\tau)\,d\tau+N(t)$，其中 $S(t)$ 为随机信号，$N(t)$ 为随机噪声。试确定 $h(t)$ 所满足的积分方程，使得 $E\{|S(t+\alpha)-S^*(t)|^2\}$ 达到最小。

解: 一般来说,噪声和信号是假设独立的,且假设噪声具有零均值,所以 $R_{NS}(\tau)=R_{SN}(\tau)=0$。此外，还假设考虑的信号和噪声都是实信号，$h(t)$ 也是实函数。令

$$
\begin{aligned}
J[h(t)] &= \mathrm{E}\{|S(t+\alpha)-S^*(t)|^2\}\\
&= \mathrm{E}\{|S(t+\alpha)-\int_{-\infty}^{\infty}S(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau-N(t)|^2\}\\
&= R_S(0)+R_N(0)\\
&\quad -\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\alpha+\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta-\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\alpha+\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta\\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_S(t-\xi,t-\eta)h(\xi)h(\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

设 $h_*(t)$ 是使 $J[h(t)]$ 达到最小的函数，由变分法原理知，对任意函数 $h(t)$ 有

$$\frac{d}{d\lambda}[h_*(t)+\lambda h(t)]|_{\lambda=0}=0$$

而 $J[h_*(t)+\lambda h(t)]=A+B\lambda+C\lambda^2$，其中

$$
\begin{aligned}
A &= J[h_*(t)]\\
B &= -\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\alpha+\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta-\int_{-\infty}^{\infty}R_S(-\eta-\alpha)h(\eta)\mathrm{d}\eta\\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)[h_*(\xi)h(\eta)+h(\eta)h_*(\xi)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
C &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)h(\xi)h(\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

由于

$$\frac{d}{d\lambda}[h_*(t)+\lambda h(t)]|_{\lambda=0}=B=0$$

则

$$
\begin{aligned}
B=0 &= -\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\alpha+\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta-\int_{-\infty}^{\infty}R_S(-\eta-\alpha)h(\eta)\mathrm{d}\eta\\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)[h_*(\xi)h(\eta)+h(\eta)h_*(\xi)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

即

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}[-R_S(\eta+\alpha)+\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)h_*(\xi)\mathrm{d}\xi]h(\eta)\mathrm{d}\eta\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}[R_S(\alpha+\eta)-\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)h_*(\xi)\mathrm{d}\xi]h(\eta)\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

对任意 $h(t)$ 成立，则有

$$\begin{aligned}&-R_S(\eta+\alpha)+\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)h_*(\xi)\mathrm{d}\xi\\ =&\ R_S(\alpha+\eta)-\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)h_*(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

所以，

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_S(\eta-\xi)h_*(\xi)\mathrm{d}\xi=R_S(\eta+\alpha)$$

习题 11-2(p.251/5.23，**作业**)

一个低通滤波器具有传递函数 $H(f)=1/(1+j2\pi fT)$，将 $X(t)=S(t)+N(t)$ 输入该滤波器得到输出 $S^*(t)$，其中 $S(t)$ 和 $N(t)$ 互不相关，且具有功率谱密度

$$S_S(f)=\frac{A^2}{(2\pi f)^2+2a^2};\quad S_N(f)=\frac{2}{5}\frac{A^2}{(2\pi f)^2+a^2}$$

试确定 T 的值，使得 $E\{|S(t)-S^*(t)|^2\}$ 最小。

解：不妨设 $Y(t)=S(t)-S^*(t)$，则

$$E\{|S(t)-S^*(t)|^2\}=E\{|Y(t)|^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(f)\,df$$

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t+\tau)Y(t)\}=E\{[S(t+\tau)-S^*(t+\tau)][S(t)-S^*(t)]\}\\ &=R_S(\tau)+R_{S^*}(\tau)-R_{SS^*}(\tau)-R_{S^*S}(\tau)\end{aligned}$$

所以

$$S_Y(f)=S_S(f)+S_{S^*}(f)-S_{SS^*}(f)-S_{S^*S}(f)$$

可以证明：$R_{SS^*}(\tau)=h^\dagger(\tau)*R_S(\tau)$，所以 $S_{SS^*}(f)=S_S(f)H^\dagger(f)$，其中 $\dagger$ 表示共轭，同理 $S_{S^*S}(f)=S_S(f)H(f)$，$S_{S^*}(f)=S_X(f)|H(f)|^2=(S_S(f)+S_N(f))|H(f)|^2$，将其代入 $S_Y(f)$ 整理得

$$\begin{aligned}S_Y(f)&=S_S(f)\left(1+|H(f)|^2-H(f)+H^\dagger(f)\right)+S_N(f)|H(f)|^2\\ &=S_S(f)\frac{(2\pi fT)^2}{1+(2\pi fT)^2}+S_N(f)\frac{1}{1+(2\pi fT)^2}\end{aligned}$$

欲使 $E\{|S(t)-S^*(t)|^2\}$ 达到最小，即要使 $\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\,df$ 最小，则

$$\frac{d}{dT}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\,df\right\}=0$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dT}S_Y(f)\,df=0$$

代入 $S_Y(f)$，整理得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8\pi^2 f^2T^2}{[1+(2\pi fT)^2]^2}[S_S(f)-S_N(f)]\,df=0$$

积分得

$$\frac{\pi}{2T}\frac{1+2T^2a^2-2\sqrt{2}Ta}{(2T^2a^2-1)^2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{\pi}{2T}\frac{1+T^2a^2-2Ta}{(T^2a^2-1)^2}=0$$

进一步整理，得

$$5(Ta+1)^2=2(\sqrt{2}Ta+1)^2$$

所以

$$T=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-2)a}\quad\text{或}\quad T=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+2)a}$$

习题 11-3(p.251/5.27，**作业**)

已知 $X[n]=S[n]+N[n]$，且

$$R_S[k]=5\times 0.8^{|k|},\quad R_N[k]=5\delta[k],\quad R_{SN}[k]=0$$

试求非因果和因果均方信号复原滤波器的传递函数，并分别给出最小均方误差，比较之。

解：由 $R_S[k]=5\times 0.8^{|k|}$ 得，

$$S_S(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}5\times 0.8^{|k|}z^{-k}=5\cdot\frac{z(0.8-0.8^{-1})}{(z-0.8)(z-0.8^{-1})}$$

由 $R_N[k]=5\delta[k]$ 得，　$S_N(z)=5$

而 $R_{SN}[k]=0$，则 $S[n]$ 与 $N[n]$ 无关。

所以

$$S_{SX}(z)=S_S(z)=5\cdot\frac{z(0.8-0.8^{-1})}{(z-0.8)(z-0.8^{-1})}$$

$$S_X(z)=S_S(z)+S_N(z)=5\cdot\frac{(z-1/2)(z-2)}{(z-0.8)(z-0.8^{-1})}$$

(1) 非因果滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{S_{SX}(z)}{S_X(z)} = \frac{-0.45z}{(z-1/2)(z-2)} = \frac{0.3z}{z-1/2} - \frac{0.3z}{z-2}$$

将其作 Z 变换得，

$$h[k] = 0.3\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

因此，非因果滤波器的最小均方误差为

$$\begin{aligned}
\min \xi_1 &= R_S[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_S[k]h[k] \\
&= 5 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 5 \cdot 0.8^{|k|} \cdot 0.3 \cdot (1/2)^{|k|} \\
&= 1.5
\end{aligned}$$

(2) 因果滤波器的传递函数

第一步：

$$S_X(z) = \frac{(z-1/2)}{(z-0.8)} \cdot 5\frac{(z-2)}{(z-0.8^{-1})} = M^+(z)M^-(z)$$

其中

$$M^+(z) = \frac{(z-1/2)}{(z-0.8)}\ ; \quad M^-(z) = 5\frac{(z-2)}{(z-0.8^{-1})}$$

第二步：

$$\frac{S_S(z)}{M^-(z)} = \frac{z(0.8-0.8^{-1})}{(z-0.8)(z-2)} = \frac{3/8z}{(z-0.8)} + \frac{-3/8z}{(z-2)} = N^+(z) + N^-(z)$$

其中

$$N^+(z) = \frac{3/8z}{(z-0.8)}\ ; \quad N^-(z) = \frac{-3/8z}{(z-2)}$$

第三步：

$$H(z) = \frac{N^+(z)}{M^+(z)} = \frac{3}{8}\frac{z}{z-1/2}$$

所以

$$h[k] = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k U[k]$$

因此，因果滤波器的最小均方误差为

$$\begin{aligned}
\min \xi_2 &= R_S[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_S[k]h[k] \\
&= 5 - \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 0.8^{|k|} \cdot \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.875
\end{aligned}$$

显然，非因果滤波器的最小均方误差要小于因果滤波器的最小均方误差，因为非因果滤波器利用了 $R_S[k]$ 的全部信息，而因果滤波器却只利用了 $k \geq 0$ 部分的信息。

第 12 知识要点：离散时间 Markov 链

(一)子知识要点：

- 状态的瞬过和常返
- 状态的周期
- 稳态概率

(二)应该掌握的基本技能：

- 对给定的离散时间 Markov 链，给出状态分解，能判断状态的常返和瞬过，计算状态的周期
- 会计算稳态概率。

(三)例题讲析：

习题 12-1(p.300/6.1，**作业**)

袋中有 5 个黑球 5 个白球。重复做下列试验：从袋中随机取一个球，若球是白色的，则放回袋中；若球是黑色的，则不放回。设 $X[n]$ 是第 n 次取球后，袋中所剩下黑球的数目。试：

1) 给出 X_n 的一步状态转移矩阵 $\Pi(1)$；

2) 给出两步状态转移矩阵 $\Pi(2) = \Pi^2(1)$，计算 $\pi_{54}(2)$ 验证和用一步状态转移矩阵的乘方得到的结果是否一致；

3) 当 $n \to \infty$ 时，X_n 的概率分布将如何？证明你的猜想。

解：1)X_n 的一步转移矩阵为：

$$\Pi(1) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

该过程的状态集为 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ 。其状态转移图如下：

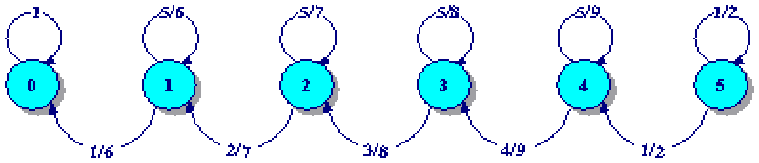


图6.1:一步状态转移图

2) 两步转移矩阵为

$$\Pi(2)=\Pi^2(1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\ \frac{11}{36}&\frac{25}{36}&0&0&0&0\\ \frac{1}{21}&\frac{65}{147}&\frac{25}{49}&0&0&0\\ 0&\frac{3}{28}&\frac{225}{448}&\frac{25}{64}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{6}&\frac{85}{162}&\frac{25}{81}&0\\ 0&0&0&\frac{2}{9}&\frac{19}{36}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

由状态图可知：

$$\pi_{54}(2)=\pi_{55}(1)\pi_{54}(1)+\pi_{54}(1)\pi_{44}(1)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{19}{36}$$

与用 $\Pi(2)=\Pi^2(1)$ 算得结果一致。

3) 猜想当 $n\to\infty$ 时， $P\{X(n)=0\}=1$ ， $P\{X(n)\neq 0\}=0$ 。证明：由状态图可知， 0 为常返态，其它状态为瞬过态则：

$$\lim_{n\to\infty}\Pi^n=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以得，

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=P(0)\lim_{n\to\infty}\Pi^n=(1,0,0,0,0,0)$$

其中， $P(0)=(0,0,0,0,0,1)$

法二： Π 可分解为 $\Pi=P^{-1}\Lambda P$ ，其中

$$\Lambda=\mathrm{diag}\left(1,\frac{5}{6},\frac{5}{7},\frac{5}{8},\frac{5}{9},\frac{1}{2}\right)$$

所以

$$\Pi(n)=\Pi^n=P^{-1}\mathrm{diag}\left(1,\left(\frac{5}{6}\right)^n,\left(\frac{5}{7}\right)^n,\left(\frac{5}{8}\right)^n,\left(\frac{5}{9}\right)^n,\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)P$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Pi^n&=\lim_{n\to\infty}P^{-1}\mathrm{diag}(1,0,0,0,0,0)P\\&=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以得,

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=P(0)\cdot\lim_{n\to\infty}\Pi^n=(1,0,0,0,0,0)$$

其中 $P(0)=(0,0,0,0,1)$ 。

习题 12-2(p.250/6.5， **作业**)

设某车间有两个独立工作的机器，且每个机器有两个状态：正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a ，机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b 。设 X_n 是第 n 天该车间正常工作的机器数,

1) 证明 X_n 是一个三状态的 Markov 链，并给出一步状态转移矩阵 Π ；

2) 证明该 Markov 链的稳态状态概率是参数为 $p=b/(a+b)$ 的二项分布；

3) 若车间里有 n 台机器，则稳态概率是什么？

解: 1) 由题意知随机变量 X 将来的状态置于当时状态有关，而与过去时刻的状态无关，所以 X_n 是一 Markov 过程。该过程的状态集为 $S=\{0,1,2\}$ 。其一步转移概率矩阵为:

$$\Pi=\begin{pmatrix}(1-b)^2&2b(1-b)&b^2\\a(1-b)&ab+(1-b)(1-a)&b(1-a)\\a^2&2a(1-a)&(1-a)^2\end{pmatrix}$$

2) 平稳 Markov 链的稳态概率矢量是一常量。设稳态概率矢量 $P=(p_0,p_1,p_2)$，由稳态概率矢量的性质知 $P=P\Pi$，即：

$$(p_0,p_1,p_2)=(p_0,p_1,p_2)\begin{pmatrix}(1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2\\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a)\\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2\end{pmatrix}$$

与 $\sum\limits_{i=0}^{2}p_i=1$ 联立解得：

$$(p_0,p_1,p_2)=\left(\frac{a^2}{(a+b)^2},\frac{2ab}{(a+b)^2},\frac{b^2}{(a+b)^2}\right)$$

令 $p=b/(a+b)$， $q=1-p=a/(a+b)$，则，

$$(p_0,p_1,p_2)=\left(q^2,2pq,p^2\right)=\left(C_2^0p^0q^2,C_2^1p^1q^1,C_2^2\right)$$

因此，该 Markov 的稳态状态概率是参数为 $p=b/(a+b)$ 的二项分布。

3) 考虑只有一台机器时，其状态为 0,1, 此时

$$\Pi=\begin{pmatrix}1-b & b\\ a & 1-a\end{pmatrix}$$

设稳态概率矢量 $P=(p_0,p_1)$，由 $P=P\Pi$ 及 $\sum\limits_{i=0}^{1}p_i=1$ 得 $p_0=\frac{a}{a+b}$，$p_1=\frac{b}{a+b}$，也即 $p_i=C_1^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^i\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{1-i},i=0,1$。所以一台机器正常工作的的概率为 $\frac{b}{a+b}$。当有 n 台机器时，又与机器之间是相互独立的，所以其稳态概率为：

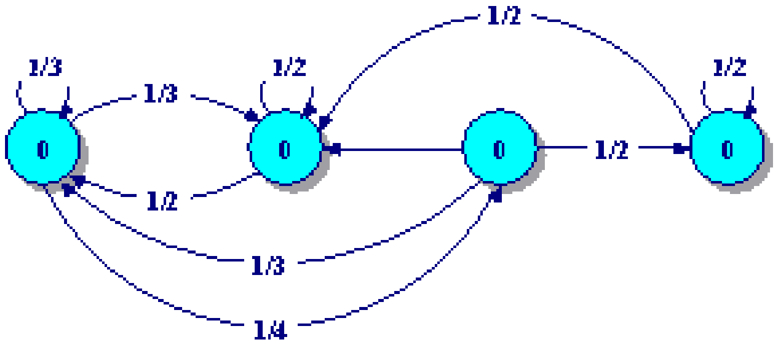
$$p_i=C_n^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^i\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{n-i},i=0,1,\cdots n$$

习题 12-3(p.303/6.7，作业)

设齐次 Markov 链的转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

1) 问该 Markov 链有几个状态？分别判定它们是常返的还是瞬过的。



2) 试给出所有状态的分解。

解: 1) 该 Markov 链有四个状态。设状态空间为 $S=\{0,1,2,3\}$ 。其一步状态转移图如图所示 因为该过程的四个状态是互达的，该 Markov 链是不可约的，又因为是有限状态的 markov 链，因此这四个状态都是常返的。

2) 状态空间只能分解为 $\{0,1,2,3\}$ 。

第 13 知识要点：连续时间 Markov 链

(一)子知识要点：

- 状态停留时间
- C-K 状态微分方程
- 生灭过程

(二)应该掌握的基本技能：

- 能针对具体给出的连续时间 Markov 链或生灭过程，画出状态转移率图，给出其 C-K 状态微分方程，会求稳态解。

(三)例题讲析：

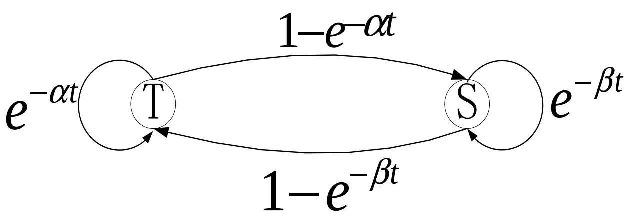
习题 13-1(p.304/6.15，**作业**)

设某说话者的状态有二：说话和沉默。设说话状态的时间是参数为 α 的指数分布，沉默的时间是参数为 β 的指数分布。设有 n 个独立的说话者，$N(t)$ 是在时刻 t 处于说话状态的说话者的数目，

1 ）画出状态转移图并写出状态转移矩阵;

2 ）写出平稳状态方程，并求出平稳状态概率矢量。

解：1) 对于一个说话者来说，设说话为 T 和沉默为 S，



所以， n 个独立的说话者处于说话状态的数目 $N(t)$ 的状态转移概率为

$$
\begin{aligned}
\pi_{00}(t) &= e^{-n\beta t} \\
\pi_{01}(t) &= C_n^1 e^{-(n-1)\beta t}(1-e^{-\beta t}) \\
\pi_{02}(t) &= C_n^2 e^{-(n-2)\beta t}(1-e^{-\beta t})^2 \\
&\quad \cdots \\
\pi_{0n}(t) &= (1-e^{-\beta t})^n \\
\pi_{10}(t) &= e^{-(n-1)\beta t}(1-e^{-\alpha t}) \\
\pi_{11}(t) &= e^{-(n-1)\beta t}e^{-\alpha t} + C_{n-1}^1 e^{-(n-2)\beta t}(1-e^{-\beta t})(1-e^{-\alpha t}) \\
\pi_{12}(t) &= C_{n-1}^1 e^{-(n-2)\beta t}(1-e^{-\beta t})e^{-\alpha t} \\
&\qquad + C_{n-2}^2 e^{-(n-3)\beta t}(1-e^{-\beta t})^2(1-e^{-\alpha t}) \\
&\qquad \cdots \\
\pi_{1n}(t) &= (1-e^{-\beta t})^{n-1}e^{-\alpha t} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots \\
\pi_{n0}(t) &= (1-e^{-\alpha t})^n \\
\pi_{n1}(t) &= C_n^1 e^{-\alpha t}(1-e^{-\alpha t})^{n-1} \\
\pi_{n2}(t) &= C_n^2 e^{-2\alpha t}(1-e^{-\alpha t})^{n-2} \\
&\quad \cdots \\
\pi_{nn}(t) &= e^{-n\alpha t}
\end{aligned}
$$

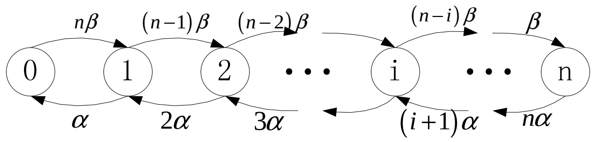
$N(t)$ 的状态转移率定义为

$$
\mu_{ij} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi_{ij}(t)}{t} & , \quad i \neq j \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi_{ii}(t)-1}{t} & , \quad i = j \end{cases}
$$

经计算，得到状态转移矩阵为

$$U=\{\mu_{ij}\}_{(n+1)\times(n+1)}$$
$$=\begin{pmatrix} -n\beta & n\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \alpha & -(n-1)\beta-\alpha & (n-1)\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2\alpha & -(n-2)\beta-2\alpha & (n-2)\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\alpha & -n\alpha \end{pmatrix}$$

那么 $N(t)$ 的状态转移率图为（略去自身转移）



2) 设方程的平稳概率矢量为 $\vec{P}=(P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n)$，则

平稳状态方程为

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_{ij}P_i=0$$

即有

$$\vec{P}U=0$$

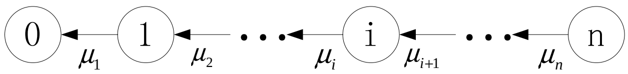
再通过归一化条件 $\sum_{i=0}^{n}P_i=1$，则可解出方程的解，即平稳状态概率为

$$\begin{cases} P_0=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^n\\ P_1=C_n^1\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\\ \quad\vdots\\ P_i=C_n^i\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{n-i}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^i\\ \quad\vdots\\ P_n=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^n \end{cases}$$

习题 13-2(p.305/6.19，**作业**)

6.19 推导纯灭过程满足的状态微分方程并求解。

解：不妨设纯灭过程的初始状态为 n，且由于其 $\lambda_i=0$，则对于 $i>n$ 的状态将不会再返回。$\therefore$ 此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,n\}$。状态转移图如下：



由状态方程知， $P_i(t+h)=\sum_{j=0}^{n}\pi_{ji}(h)P_j(t) \qquad \forall i\in S$

再由生灭过程的定义，有

$$\begin{aligned} P_i(t+h) &= \sum_{j=i-1}^{i+1}\pi_{ji}(h)P_j(t)+o(h) \\ &= [1-\mu_i h]P_i(t)+h\mu_{i+1}P_{i+1}(t)+o(h) \end{aligned}$$

整理，得 $P_i'(t)=-\mu_i P_i(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t)$ ，对于任意 $1\le i\le n-1$ 都成立。

对于 $i=0,n$ ，由其纯灭性知， $P_0'(t)=\mu_1 P_1(t)$ ， $P_n'(t)=-\mu_n P_n(t)$ 。

综上，初始状态为 n 的纯灭过程所满足的状态微分方程为

$$\begin{cases} P_i'(t)=-\mu_i P_i(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t) & 1\le i\le n-1 \quad (1) \\ P_0'(t)=\mu_1 P_1(t) & i=0 \quad (2) \\ P_n'(t)=-\mu_n P_n(t) & i=n \quad (3) \end{cases}$$

求解上述方程的解:

设初始状态概率矢量为 $\vec{P}(0)=(0,0,\cdots,1)$,

即 $\quad P_n(0)=1, \quad P_i(0)=0, \quad 0\le i\le n-1$

求方程 (3)，得

$$P_n(t)=e^{-\mu_n t} \quad t\ge 0$$

令 $\quad q_i(t)=e^{-\mu_i t}P_i(t) \qquad (4),$

对其求导，得 $\quad q_i'(t)=e^{-\mu_i t}P_i'(t)+\mu_i e^{-\mu_i t}P_i(t)$

将 (1) 代入，得 $\quad q_i'(t)=e^{-\mu_i t}\mu_{i+1}P_{i+1}(t)$

由于对 $\quad i<n$ ， 有

$$P_i(0)=0 \qquad \therefore \quad q_i(0)=0$$

$$\therefore \qquad q_i(t)=\int_0^t e^{-\mu_i x}\mu_{i+1}P_{i+1}(x)\,dx$$

代入 (4)，解得

$$P_i(t)=e^{-\mu_i t}\mu_{i+1}\int_0^t e^{\mu_i x}P_{i+1}(x)\,dx \qquad 0\le i\le n-1$$

对于 $i=n-1$ ，

$$P_{n-1}(t)=e^{-\mu_{n-1}t}\mu_n\int_0^t e^{\mu_{n-1}x}e^{-\mu_n x}\,dx$$

$\therefore$ 当 $\mu_n \neq \mu_{n-1}$，

$$P_{n-1}(t) = \frac{\mu_n}{\mu_{n-1} - \mu_n}(e^{-\mu_n t} - e^{-\mu_{n-1} t})$$

当 $\mu_n = \mu_{n-1}$，

$$P_{n-1}(t) = \mu_n t e^{-\mu_{n-1} t} = \mu_n t e^{-\mu_n t}$$

同理，逐次迭代，得到一般的 $P_i(t)$ 表达式：

当 μ_i 两两不相等时，

$$P_i(t) = \prod_{j=i+1}^{n} \mu_j [\sum_{l=i}^{n} c_{li} e^{-\mu_l t}] \quad 其中 \quad c_{li} = \frac{1}{\prod_{k \neq l}(\mu_k - \mu_l)}$$

当 $\mu_n = \mu_{n-1} = \cdots = \mu_1 = \mu_0 = \mu$ 时，

$$P_i(t) = \frac{(\mu t)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\mu t}$$

第 14 知识要点： Markov 型排队系统分析

(一)子知识要点：

- M/M/1,M/M/c,M/M/c/K
- 有限源 M/M 排队系统

(二)应该掌握的基本技能：

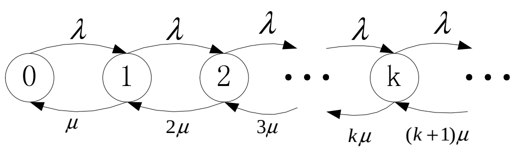
- 能根据状态转移率图列稳态方程，求出稳态方程的解，并能根据求出的稳态解进行初步的系统分析（平均队长、等待时间等）。

(三)例题讲析：

习题 14-1(p.349/7.8，**作业**)

给出 $M/M/\infty$ 排队系统的稳态解。

解：由题义可知 $M/M/\infty$ 排队系统的状态转移率图如下：



因而，该系统的状态微分方程为

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_k'(t) = -(\lambda + k\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad k > 0 \end{cases}$$

设 $t \to \infty$ 时， $p_k(t)$ 趋向稳定，即 $p_k'(t) = 0$

则 $p_k(t)$ 和 t 无关，可简记为 p_k ，则上述方程组可简化为：

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ -(\lambda + k\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad k > 0 \end{cases}$$

从而可解得：

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \qquad k = 1, 2, \cdots \qquad \text{其中}\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

利用 $1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k$ 可求得

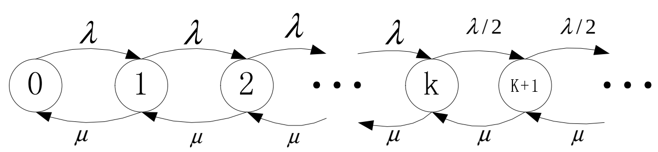
$$p_0 = 1/(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}) = e^{-\alpha}$$

$$\therefore \qquad p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\lambda/\mu} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

习题 14-2(p.349/7.10， **作业**)

在某 $M/M/1$ 排队系统中，设有两类顾客各自独立地以 $\lambda/2$ 的到达率到达，两类顾客的服务时间都是以 μ 为参数的指数分布。设第一类顾客总是可以进入队列排队，而第二类顾客在系统总顾客数小于等于 K 时可以进入队列排队，而当系统总顾客数超过 K 时，被拒绝离去。试画出系统总顾客数 $N(t)$ 的状态转移图，并求出 $N(t)$ 的稳态概率质量函数。

解：由题义知 $M/M/1$ 排队系统的状态转移率图如下：



因而，该系统的状态微分方程为

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_j'(t) = -(\lambda+\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t) & 0 < j < k \\ p_j'(t) = -(\lambda/2+\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t) & j = k \\ p_j'(t) = -(\lambda/2+\mu)p_j(t) + \lambda/2 p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t) & 0 < j < k \end{cases}$$

考虑稳态解， $t \to \infty$ 时， $p_j(t)$ 趋向稳定，即 $p_j'(t) = 0$ ，且 $p_j(t)$ 和 t 无关，可简记为 p_j ，则上述方程组可简化为：

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 = -(\lambda+\mu)p_j + \lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} & 0 < j < k \\ 0 = -(\lambda/2+\mu)p_j + \lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} & j = k \\ 0 = -(\lambda/2+\mu)p_j + \lambda/2 p_{j-1} + \mu p_{j+1} & 0 < j < k \end{cases}$$

若令 $\alpha = \lambda/\mu$ ，则可解得：

$$\begin{cases} p_j = \alpha^j p_0 & 1 \leqslant j \leqslant k \\ p_j = \alpha^j p_0 & j > k \end{cases}$$

再由条件

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

从而可得

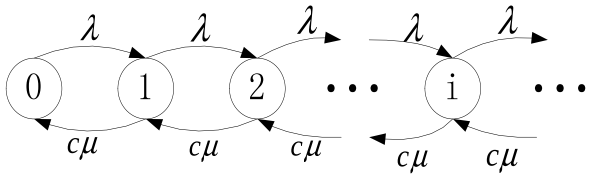
$$p_0 = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2-\alpha-\alpha^{k+1}}$$

$$\therefore p_j = \begin{cases} p_j = \alpha^j \left(\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2-\alpha-\alpha^{k+1}}\right) & 0 \leqslant j \leqslant k \\ p_j = 2^{k-j}\alpha^j \left(\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2-\alpha-\alpha^{k+1}}\right) & j > k \end{cases}$$

习题 14-3(p.350/7.14，**作业**)

设某 M/M/c 排队系统的顾客到达率是均值为 λ 的 Poisson 过程，当顾客数大于零时，系统的总服务率总是 $c\mu$ 。试画出状态转移图并求出系统总顾客数的稳态概率质量函数。

解：由题意，状态转移图为



由状态转移图，可列出平稳状态方程为：

$$\begin{cases} \lambda P_0 - c\mu P_1 = 0 & i=0 \quad (1) \\ (\lambda + c\mu)P_i - \lambda P_{i-1} - c\mu P_{i+1} = 0 & i>0 \quad (2) \\ \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 & \quad (3) \end{cases}$$

解方程 (1)(2)，得

$$P_i = (\frac{\lambda}{c\mu})^i P_0 = \rho^i P_0$$

其中令 $\rho = \lambda/c\mu$ 。

再由方程 (3)，解得

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{c\mu} = 1 - \rho$$

所以，系统总顾客数的稳态概率质量函数为

$$P_i = (1-\rho)\rho^i \qquad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

第 15 知识要点：非 Markov 型排队系统分析

(一)子知识要点：

- M/G/1

(二)应该掌握的基本技能：

- 深刻理解用嵌入 Markov 过程的方法求解 M/G/1 的思路，熟练掌握 P-K 方程。

(三)例题讲析：

习题 15-1(p.350/7.16，**作业**)

任务以均值为 λ 的 Poisson 过程到达某机器，机器对每个任务的服务时间是均值为 $1/\mu$ 的指数分布。机器在为顾客服务时有出故障的概率。若机器

为某任务服务的时间为 t ，则出 k 次故障的概率满足均值为 αt 的 Poisson 分布。修复一次故障所需的时间是均值为 $1/\beta$ 的指数分布。设机器开始一个任务时总是正常工作的，

(1) 试求机器完成一个任务所需的时间的均值和方差；

(2) 试求任务的平均系统时间。

解: (1) 假设完成一个任务所需的总时间为 $T = T_1 + T_2$ ，其中， T_1 为故障修复的时间， T_2 为机器服务的时间。

①先求均值。由题意知，

$$P\{\text{出现 k 次故障} \mid \text{服务时间为 t}\} = \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}$$

且 t 服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布，那么，

$$\begin{aligned} P\{\text{出现 k 次故障}\} &= \int_0^\infty \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t} \cdot \mu e^{-\mu t}\, dt \\ &= \frac{\mu\alpha^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\alpha+\mu)t}\, dt \\ &= \frac{\mu\alpha^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{(\alpha+\mu)^{k+1}} \\ &= \frac{\mu\alpha^k}{(\alpha+\mu)^{k+1}} \end{aligned}$$

由题意，修复一次故障的平均时间为 $1/\beta$ ，所以修复 k 次故障的平均时间就为 k/β 。那么，平均故障修复时间为

$$\begin{aligned} E\{T_1\} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{\beta} \frac{\mu\alpha^k}{(\alpha+\mu)^{k+1}} \\ &= \frac{\mu}{\beta(\alpha+\mu)} \sum_{k=0}^\infty k \left(\frac{\alpha}{\alpha+\mu}\right)^k \\ &= \frac{\alpha}{\beta\mu} \end{aligned}$$

所以，机器完成一个任务所需的平均时间为

$$E\{T\} = E\{T_1\} + E\{T_2\} = \frac{\alpha}{\beta\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

②求方差。由于当服务时间为 t 的条件下，修复 k 次故障的时间 $T_{1k} = t_1 + t_2 + \cdots + t_k$ ，其中 t_i 为第 i 次故障的修复时间，服从均值为 $1/\beta$ 的指数分布，则 T_{1k} 特征函数为

$$\Phi_{T_{1k}}(\omega) = \left(\frac{\beta}{\beta + j\omega}\right)^k$$

所以，

$$E\{T_{1k}^2|t\} = \frac{1}{j^2}\frac{d^2}{d\omega^2}\Phi_{T_{1k}}(\omega)|_{w=0} = \frac{k(k+1)}{\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
E\{T_1^2\} &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)}{\beta^2}\frac{(\alpha t)^k}{k!}e^{-\alpha t}\right\} \\
&= E\left\{\frac{2\alpha t}{\beta^2}+\frac{\alpha^2 t^2}{\beta^2}\right\} \\
&= \frac{2\alpha t}{\beta^2}E\{t\}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}E\{t^2\} \\
&= \frac{2\alpha}{\beta^2\mu}+\frac{2\alpha^2}{\beta^2\mu^2}
\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}
E\{T_1T_2\} &= E\{T_1\}E\{T_2\} = \frac{\alpha}{\beta\mu^2} \\
E\{T_2^2\} &= E\{T_2\}^2 + Var\{T_2\} = 2/\mu^2
\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
Var\{T\} &= E\left\{T^2\right\} - E\{T\}^2 = E\{(T_1+T_2)^2\} - E\{T\}^2 \\
&= E\{T_1^2\}+E\{T_2^2\}+2E\{T_1T_2\}-E\{T\}^2 \\
&= \frac{2\alpha}{\beta^2\mu}+\frac{2\alpha^2}{\beta^2\mu^2}+\frac{2}{\mu^2}+\frac{2\alpha}{\beta\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\mu^2}\left(1+\frac{2\alpha\mu}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)
\end{aligned}$$

(2) 平均系统时间 $E\{S\} = E\{W\} + E\{T\}$，其中 S 为系统时间， W 为等待时间， T 为服务时间。因为系统为 $M/G/1$ 系统，则

$$E\{W\} = \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}$$

其中，

$$\begin{aligned}
m_2 &= E\{T^2\} = \frac{2}{\mu^2}+\frac{2\alpha}{\beta^2\mu}+\frac{2\alpha^2}{\beta^2\mu^2}+\frac{2\alpha}{\beta\mu^2} \\
\rho &= \lambda E\{T\}
\end{aligned}$$

$$\therefore E\{S\} = \frac{\lambda}{1-\rho}\left[\frac{1}{\mu^2}+\frac{\alpha}{\beta^2\mu}+\frac{\alpha^2}{\beta^2\mu^2}+\frac{\alpha}{\beta\mu^2}\right]+\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{\lambda}{\mu}$$

第 16 知识要点：随机过程的计算机方法

(一)子知识要点：

- 均匀分布随机变量的生成
- 任意分布随机变量的生成
- 任意给定相关矩的随机向量的生成

(二)应该掌握的基本技能：

- 掌握上述三种情形的随机变量或随机向量的生成，针对具体的要求，给出生成某个随机变量或者向量的方法。

(三)例题讲析：

习题 16-12(p.379/8.2，**作业**)

试证明一般情形的拒绝法生成的随机变量具有所规定的概率密度函数。

证明：和特殊情形的情况一样，我们来计算概率

$$P\{x_1 \le X-1 \le x+dx \mid X_1\text{被接受}\}$$
$$=\frac{P\{(x_1 \le X-1 \le x+dx)\cap(X_1\text{被接受})\}}{P\{X_1\text{被接受}\}}$$

因为总面积为 K， $f_X(x)$ 下方的面积为 1，因此一个点 (X_1, Y) 不被拒绝，也即落在 $f_X(x)$ 下方的概率为

$$P\{X_1\text{被接受}\}=1/K$$

X_1 落在 $(x, x+dx)$ 的概率为 $f_W(x)$，而 X_1 被接受的概率为 $f_X(x)dx/(Kf_W(x))$，因此

$$P\{(x_1 \le X-1 \le x+dx)\cap(X_1\text{被接受})\}$$
$$=f_W(x)\frac{f_X(x)dx}{Kf_W(x)}=f_X(x)dx/K$$

因此

$$P\{x_1 \le X-1 \le x+dx \mid X_1\text{被接受}\}=f_X(x)dx$$

命题得证。

习题 16-2(p.380/8.7，**作业**)

讨论如何生成具有任意自相关函数的随机过程。

解：设所要生成的随机过程的自相关函数为 $R_X(\tau)$，其对应的功率谱密度为 $S_X(f)$，对 $S_X(f)$ 进行分解 $S_X(f) = H(f)H^*(f)$，将一个白噪声随机过程输入冲激响应为 $H(f)$ 的滤波器即可。

6. 结语

于此，已将《随机过程》之要义以五要诀方式而简明扼要地表达。然欲精通于《随机过程》之心髓，尚需不断学习、思考、总结，在学习和科研中善加运用。古人云：业精于勤而荒于嘻。