《随机过程》第四章作业答案

4.1　证明式 (4.2) 定义的距离满足距离三公理。

证明：由题意，式 (4.2) 定义的距离公式为：

$$d(X,Y)=\sqrt{\langle X-Y,X-Y\rangle}$$

1) 非负性的证明：

$$d(X,Y)=\sqrt{\langle X-Y,X-Y\rangle}=\sqrt{E\{(X-Y)(X-Y)^*\}}=\sqrt{E\{|X-Y|^2\}}\geq 0$$

当 $P\{X=Y\}=1$ 时，有 $E\{|X-Y|^2\}=0$ ，也即 $d(X,Y)=0$ 。

2) 对称性的证明：

$$\begin{aligned}d(X,Y)=&\sqrt{\langle X-Y,X-Y\rangle}=\sqrt{E\{|X-Y|^2\}}\\=&\sqrt{E\{|Y-X|^2\}}=\sqrt{\langle Y-X,Y-X\rangle}=d(Y,X)\end{aligned}$$

3) 三角不等式证明：

$$\begin{aligned}d^2(X,Z)&=\langle X-Z,X-Z\rangle\\&=\langle X-Y+Y-Z,X-Y+Y-Z\rangle\\&=\langle X-Y,X-Y\rangle+\langle X-Y,Y-Z\rangle+\langle Y-Z,X-Y\rangle+\langle Y-Z,Y-Z\rangle\\&=\langle X-Y,X-Y\rangle+2\mathrm{Re}\langle X-Y,Y-Z\rangle+\langle Y-Z,Y-Z\rangle\\&\leq\langle X-Y,X-Y\rangle+2|\langle X-Y,Y-Z\rangle|+\langle Y-Z,Y-Z\rangle\\&\leq\langle X-Y,X-Y\rangle+2\sqrt{\langle X-Y,X-Y\rangle\langle Y-Z,Y-Z\rangle}+\langle Y-Z,Y-Z\rangle\\&=d^2(X,Y)+2d(X,Y)d(Y,Z)+d^2(Y,Z)\\&=[d(X,Y)+d(Y,Z)]^2\end{aligned}$$

由 1) 知， $d(X,Z)\leq d(X,Y)+d(Y,Z)$ 。

4.3　已知时间序列 X_n 的自相关函数为

$$R_X[n_1,n_2]=1-\frac{|n_1-n_2|}{2n_1n_2}$$

试证明 X_n 均方收敛。

证明：因为

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}R_X[n_1,n_2]=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left(1-\frac{|n_2-n_1|}{2n_1n_2}\right)=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left(1-|\frac{1}{2n_1}-\frac{1}{2n_2}|\right)=1$$

由 loève 准则知， X_n 均方收敛。

4.6 已经 $X(t)$ 是零均值且自相关函数 $R_X(\tau)=\sin\alpha\tau/\tau$ 的宽平稳过程，其中 $\alpha>0$ 。试讨论 $X(t)$ 的均方连续性、均方可微与均方可积性。

解:

1) 注意到自相关函数 $R_X(\tau)=\sin\alpha\tau/\tau$ 在 $\tau=0$ 点的取值为 $R_X(0)=\alpha$，所以 $\lim\limits_{\tau\to 0}R_X(\tau)=\alpha=R_X(0)$，由均方连续准则易知， $X(t)$ 均方连续。

2) 由均方可导准则，对 $R_X(t_1,t_2)$ 求二阶广义导数：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\Delta^2_{\tau_1\tau_2}R_X(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=t}\\
=&\lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\left[R_X(t+\tau_1,t+\tau_2)-R_X(t+\tau_1,t)-R_X(t,t+\tau_2)+R_X(t,t)\right]\\
=&\lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\left[\frac{\sin\alpha(\tau_1-\tau_2)}{\tau_1-\tau_2}-\frac{\sin\alpha\tau_1}{\tau_1}-\frac{\sin\alpha\tau_2}{\tau_2}+\alpha\right]\\
=&\lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\Big[\frac{\alpha(\tau_1-\tau_2)-\frac{1}{3!}\alpha^3(\tau_1-\tau_2)^3+\circ(\tau_1-\tau_2)^3}{\tau_1-\tau_2}\\
&\qquad-\frac{\alpha\tau_1-\frac{1}{3!}\alpha^3\tau_1^3+\circ\tau_1^3}{\tau_1}-\frac{\alpha\tau_2-\frac{1}{3!}\alpha^3\tau_2^3+\circ\tau_2^3}{\tau_2}+\alpha\Big]\\
=&\lim_{\tau_1,\tau_2\to 0}\frac{1}{\tau_1\tau_2}\frac{\alpha^3}{6}\left[\tau_1^2+\tau_2^2-2(\tau_1-\tau_2)^2\right]=\frac{1}{3}\alpha^3<\infty
\end{aligned}
$$

所以 $X(t)$ 均方可微。

3) 均方可积性：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha(t_1,t_2)}{t_1-t_2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha(t_1,t_2)}{t_1-t_2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}\right]t_2\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}2\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}t_2\\
=&\infty
\end{aligned}
$$

所以 $X(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是均方可积的，进一步易知，若限定为有有界区间，则 $X(t)$ 是均方可积的。

4.9 已知线性系统由微分方程 $Y'(t)+2Y(t)=X(t),t\geq 0$ 和初始条件 $Y(0)=0$ 定义。设输入过程为 $X(t)$，试求输出过程 $Y(t)$ 的表达式。若 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$，试求 $Y(t)$ 的自相关函数 $R_Y(t_1,t_2)$ 。

解：(1) 由定理知

$$Y(t) = \int_0^t h(t-\alpha)X(\alpha)\,d\alpha$$

其中 $h(t)$ 满足

$$\begin{cases} h'(t) + 2h(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ h(0) = 1. \end{cases}$$

解得 $h(t) = e^{2t}, \quad t \geq 0$ 。所以

$$Y(t) = \int_0^t e^{-2(t-\alpha)}X(\alpha)\,d\alpha = e^{-2t}\int_0^t e^{2\alpha}X(\alpha)\,d\alpha$$

(2) 自相关函数为

$$\begin{aligned} R_Y(t_1,t_2) =& E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ =& E\left\{\int_0^{t_1} e^{-2(t_1-\alpha)}X(\alpha)\,d\alpha \cdot \int_0^{t_2} e^{-2(t_2-\beta)}X(\beta)\,d\beta\right\} \\ =& \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-2(t_1+t_2)}e^{2(\alpha+\beta)}R_X(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta \\ =& e^{-2(t_1+t_2)}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{2(\alpha+\beta)}e^{-|\alpha-\beta|}\,d\alpha\,d\beta \\ =& e^{-2(t_1+t_2)}\cdot I \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I =& \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{2(\alpha+\beta)}e^{-|\alpha-\beta|}\,d\alpha\,d\beta \\ =& \int_0^{t_2}\int_0^{\beta} e^{2(\alpha+\beta)}e^{\alpha-\beta}\,d\alpha\,d\beta + \int_0^{t_2}\int_\beta^{t_1} e^{2(\alpha+\beta)}e^{-(\alpha-\beta)}\,d\alpha\,d\beta \\ =& \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{t_1} - \frac{1}{3}e^{t_2} + \frac{1}{3}e^{t_1+3t_2} - \frac{1}{6}e^{4t_2} \end{aligned}$$

所以

$$R_Y(t_1,t_2) = \frac{1}{2}e^{-2(t_1+t_2)} - \frac{1}{3}e^{-t_1-2t_2} - \frac{1}{3}e^{-t_2-2t_1} + \frac{1}{3}e^{t_2-t_1} - \frac{1}{6}e^{2(t_2-t_1)}$$

4.11　设 $g(x)$ 为如下式定义的三角形脉冲函数：

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{其它} \quad x \end{cases}$$

1) 若宽平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = g(\tau/T)$ ， T 为正常数，试求 $X(t)$ 的功率谱密度。

2) 若宽平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(f)=g(f/W)$ ， W 为正常数，试求 $X(t)$ 的自相关函数。

解：(1) 由于

$$R_X(\tau)=g(\tau/T)=\begin{cases}\tau/T+1 & , \quad -T\le\tau\le 0\\ -\tau/T+1 & , \quad 0\le\tau\le T\\ 0 & , \quad \text{其它}\quad \tau\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}S_X(f)=&\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\\ =&\int_{-T}^{0}(\tau/T+1)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau+\int_{0}^{T}(-\tau/T+1)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\\ =&\int_{0}^{T}(-\tau/T+1)[e^{j2\pi f\tau}+e^{-j2\pi f\tau}]\,d\tau\\ =&\int_{0}^{T}(-\tau/T+1)2\cos(2\pi f\tau)\,d\tau\\ =&T\left(\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right)^2\end{aligned}$$

(2) 由于

$$S_X(f)=g(f/W)=\begin{cases}f/W+1 & , \quad -W\le f\le 0\\ -f/W+1 & , \quad 0\le f\le W\\ 0 & , \quad \text{其它}\quad f\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}R_X(\tau)=&\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)e^{j2\pi f\tau}\,df\\ =&\int_{-W}^{0}(f/w+1)e^{j2\pi f\tau}\,df+\int_{0}^{W}(-f/W+1)e^{j2\pi f\tau}\,df\\ =&\int_{0}^{W}(-f/W+1)[e^{j2\pi f\tau}+e^{-j2\pi f\tau}]\,df\\ =&\int_{0}^{W}(-f/W+1)2\cos(2\pi f\tau)\,df\\ =&W\left(\frac{\sin\pi\tau W}{\pi\tau W}\right)^2\end{aligned}$$

4.15　设 $Y(t)=X(t)-X(t-d)$ ，若 $X(t)$ 是自相关函数为 $R_X(\tau)$ 、功率谱密度为 $S_X(f)$ 的宽平稳过程，试求 $R_{XY}(\tau)$ 、 $S_{XY}(f)$ 、 $R_Y(\tau)$ 、 $S_Y(f)$ 。

解：由题意知

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) =& E\{X(t+\tau)Y(t)\} = E\{X(t+\tau)[X(t)-X(t-d)]\} \\ =& E\{X(t+\tau)X(t)\}E\{X(t+\tau)X(t-d)\} \\ =& R_X(\tau) - R_X(\tau+d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) =& \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau+d)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ =& S_X(f) - S_X(f)e^{j2\pi fd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) =& E\{Y(t+\tau)Y(t)\} = E\{[X(t+\tau)-X(t+\tau-d)][X(t)-X(t-d)]\} \\ =& E\{X(t+\tau)X(t)\} - E\{X(t+\tau)X(t-d)\} - E\{X(t+\tau-d)X(t)\} \\ & + E\{X(t+\tau-d)X(t-d)\} \\ =& 2R_X(\tau) - R_X(\tau+d) - R_X(\tau-d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_Y(f) =& \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ =& 2S_X(f) - S_X(f)e^{j2\pi fd} - S_X(f)e^{-j2\pi fd} \\ =& 2(1-\cos 2\pi fd)S_X(f) \\ =& 4\sin^2(\pi fd)\, S_X(f) \end{aligned}$$

4.16　试对具有下列相关函数的宽平稳离散时间过程求其功率谱密度：

1)$R_X[k] = 4(1/2)^{|k|} + 16(1/4)^{|k|}$;

2) 对 $|k| < N$， $R_X[k] = 1 - |k|/N$； $|k| \geq N$ 时， $R_X[k] = 0$ 。

解: (1) 由 Wiener-Xinchin 定理知

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] e^{-j2\pi fk} \\
&= 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/2)^{|k|} e^{-j2\pi fk} + 16\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/4)^{|k|} e^{-j2\pi fk} \\
&= 4\left[\sum_{k=-\infty}^{-1} (1/2)^{-k} e^{-j2\pi fk} + \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^{k} e^{-j2\pi fk}\right] \\
&\quad +16\left[\sum_{k=-\infty}^{-1} (1/4)^{-k} e^{-j2\pi fk} + \sum_{k=0}^{\infty} (1/4)^{k} e^{-j2\pi fk}\right] \\
&= 4\left[\frac{(1/2)e^{j2\pi f}}{1-(1/2)e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1-(1/2)e^{-j2\pi f}}\right] \\
&\quad +16\left[\frac{(1/4)e^{j2\pi f}}{1-(1/4)e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1-(1/4)e^{-j2\pi f}}\right] \\
&= \frac{12}{5-4\cos 2\pi f} + \frac{240}{17-8\cos 2\pi f}
\end{aligned}$$

4.23 将零均值且功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声输入一个传递函数为 $H(f) = 1/(1+j2\pi f)$ 的线性系统，试求 $R_{XY}(\tau)$ 、 $S_{YX}(f)$ 、 $R_Y(\tau)$ 和 $S_Y(f)$ 。

解: 由定理知道

$$S_{YX}(f) = S_X(f)H(f) = \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+j2\pi f}$$

查 Fourier 变换表知道

$$R_{YX}(\tau) = \frac{N_0}{2} e^{-t} U(t)$$

其中 $U(t)$ 是单位阶跃函数。又

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+(2\pi f)^2}$$

查 Fourier 变换表知道

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{4} e^{-|t|}$$

4.27 设 $X(t)$ 是一个定义于 $\mathbb{R}$ 上的均方连续的实平稳过程，又 $R_X(\tau)$ 绝对可积，设 $Y(t) = X(t) + X(t+T)$ ，其中 T 为常数，试证： $S_Y(f) = 2[1+\cos 2\pi fT]S_X(f)$ ，其中 $S_X(f)$ ， $S_Y(f)$ 分别表示 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度。

证明: 由于 $X(t)$ 为实宽平稳随机过程，则 $Y(t) = X(t) + X(t+T)$ 也为实宽平稳随机过程。所

以

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E\{Y(t+\tau)Y(t)\} \\
&= E\{[X(t+\tau)+X(t+T+\tau)][X(t)+X(t+T)]\} \\
&= 2R_X(\tau)+R_X(\tau+T)+R_X(\tau-T)
\end{aligned}
$$

由 Wiener-Xinchin 定理

$$
\begin{aligned}
S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} \\
&= 2S_X(f)+S_X(f)e^{j2\pi fT}+S_X(f)e^{-j2\pi fT} \\
&= 2[1+\cos 2\pi fT]S_X(f)
\end{aligned}
$$

4.31 将定义于 $[0,\infty]$ 上的、自相关函数为 $R_X(\tau)=\delta(\tau)$ 的随机过程 $X(t)$ 输入冲激响应为 $h(t)$ 的时不变线性系统，设输出为 $Y(t)$ 。分别对

$$
(1)h(t)=\begin{cases} 1 & ,\quad 0<t<T \\ 0 & ,\quad \text{其它}\quad t \end{cases}
\qquad\qquad
(2)h(t)=\begin{cases} t\,e^{-2t} & ,\quad t>0 \\ 0 & ,\quad \text{其它}\quad t \end{cases}
$$

求 $Y(t)$ 的自相关函数、功率谱密度、及 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度。

解：仅解第 (2) 题。

①自相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)=\delta(\tau)*h(\tau)*h(-\tau) \\
&= h(\tau)*h(-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\alpha)h(-\alpha)\,d\alpha \quad ;\text{其中 } h(t)=te^{-2t}U(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau-\alpha)e^{-2(\tau-\alpha)}U(\tau-\alpha)(-\alpha)e^{2\alpha}U(-\alpha)\,d\alpha \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(\alpha-\tau)e^{-2\tau+4\alpha}\,d\alpha & ,\quad \tau\le 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \alpha(\alpha-\tau)e^{-2\tau+4\alpha}\,d\alpha & ,\quad \tau>0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{32}e^{2\tau}(1-2\tau) & ,\quad \tau\le 0 \\ \frac{1}{32}e^{-2\tau}(1+2\tau) & ,\quad \tau>0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{32}e^{-2|\tau|}(1+2|\tau|)
\end{aligned}
$$

②功率谱密度：先求 $H(f)$

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{0}^{\infty} te^{-2t}e^{-j2\pi ft}\,dt \\
&= \frac{1}{(2+j2\pi f)^2}
\end{aligned}
$$

因为且 $S_X(f)=1$，所以

$$S_Y(f)=S_X(f)|H(f)|^2=\frac{1}{(4+4\pi^2f^2)^2}$$

③互功率谱密度：

$$S_{YX}(f)=S_X(f)H(f)=\frac{1}{(2+j2\pi f)^2}$$
$$S_{YX}(f)=S_X(f)H^*(f)=\frac{1}{(2-j2\pi f)^2}$$

4.33　设 $Y[n]=X[n]+\beta X[n-1]$，其中 $X[n]$ 是零均值的自相关函数为 $R_X[k]=\alpha^{|k|}\sigma^2$ 的随机序列，其中 $|\alpha|<1$。试求以下各量：$R_{YX}[k]$、$S_{YX}(f)$、$S_Y(f)$、$R_Y[k]$、$E\{Y^2[n]\}$，并求其当 β 为何值时，$Y[n]$ 为白噪声。

解：由题意知

$$\begin{aligned}R_{YX}[k]&=E\left\{Y[n+k]X[n]\right\}\\&=E\left\{(X[n+k]+\beta X[n+k-1])X[n]\right\}\\&=R_X[k]+\beta R_X[k-1]\\&=\sigma^2[\alpha^{|k|}+\beta\alpha^{|k-1|}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y[k]&=E\{Y[n+k]Y[n]\}\\&=E\{(X[n+k]+\beta X[n+k-1])(X[n]+\beta X[n-1])\}\\&=R_X[k]+\beta^2R_X[k]+\beta R_X[k-1]+\beta R_X[k+1]\\&=\sigma^2\alpha^{|k|}[1+\beta^2]+\sigma^2\beta[\alpha^{|k-1|}+\alpha^{|k+1|}]\end{aligned}$$

由 $Y[n]=X[n]+X[n-1]$，有

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1+\beta z^{-1}$$

所以

$$H(f)=1+\beta e^{-j2\pi f}$$

又由于

$$\begin{aligned}S_X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k]e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|}\sigma^2 e^{-j2\pi fk} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-k}\sigma^2 e^{-j2\pi fk} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k}\sigma^2 e^{-j2\pi fk} \\ &= \sigma^2\left[\frac{\alpha e^{j2\pi f}}{1-\alpha e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi f}}\right] \\ &= \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f}\end{aligned}$$

因此

$$S_{YX}(f) = S_X(f)H(f) = \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)(1+\beta e^{-j2\pi f})}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f}$$

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \sigma^2(1-\alpha^2)\frac{1+\beta^2+2\beta\cos 2\pi f}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f}$$

若 $Y[n]$ 是白噪声，则 $S_Y(f)$ 为关于 f 的常数。即

$$\frac{1+\beta^2+2\beta\cos 2\pi f}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f} = K \quad \Longrightarrow \begin{cases} 1+\beta^2 = K(1+\alpha^2) \\ 2\beta = -2K\alpha \end{cases}$$

消去 K ，得

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1) = 0$$

所以

$$\beta = -\alpha \qquad \text{或} \qquad \beta = -1/\alpha$$

若考虑 $Y[n]$ 为实随机过程，则

$$E\{Y^2[n]\} = R_Y[0] = \sigma^2(1+2\alpha\beta+\beta^2)$$

4.39 设 X 是具有连续概率分布函数 $F_X(x)$ 的一个随机变量，若将概率分布函数 $F_X(x)$ 作为一个无记忆非线性系统的传输特性，试证明 $Y = F_X(X)$ 为 $(0,1)$ 上的均匀分布。

证明：由题意知， $F_X(x)$ 是单调递增函数， $F_X(x) \in [0,1]$ ，因为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f_X(x)}$$

所以

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}|_{x=g^{-1}(y)} = f_X(x)\cdot\frac{1}{f_X(x)} = 1$$

因此

$$f_Y(y) = 1; y \in [0,1]$$

命题得证。

4.40 设随机变量 X_1 和 X_2 互相独立，其概率密度函数为

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x_1/2}, & x_1 \geq 0 \\ 0, & x_1 < 0 \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x_2/3}, & x_2 \geq 0 \\ 0, & x_2 < 0 \end{cases}$$

试求随机变量 $Y = X_1 + X_2$ 的概率密度函数。

解：由于 X_1 和 X_2 互相独立，所以

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_{X_1}(y) * f_{X_2}(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-s) f_{X_2}(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(y-s)/2} U(y-s) \frac{1}{3} e^{-s/3} U(s) ds \\ &= \frac{1}{6} e^{-y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s/6} U(y-s) U(s) ds \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ \frac{1}{6} e^{-y} \int_0^y e^{s/6} ds & y > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ e^{-y}(e^{y/6} - 1) & y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4.41 设非线性无记忆系统的传输特性为 $y = g(x) = be^x$ ， $b > 0$ 。设输入过程 $X(t)$ 是一个均值为 m_X 、方程为 σ_X^2 的宽平稳 Gauss 过程。试求：输出过程 $Y(t)$ 的一维概率密度函数、均值及方差。

解：由题意知

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}$$

因为 $y = be^x$ ，所以 $dx/dy = 1/y$ ，从而一阶概率密度函数为

$$f_Y(y;t) = f_X(x;t) \cdot \frac{dx}{dy}|_{x=g^{-1}(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{\left(\ln \frac{y}{b} - m_X\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \cdot \frac{1}{y}$$

均值函数为

$$\begin{aligned}
E\left\{Y\left(t\right)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)\cdot f_X\left(x;t\right)dx \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}\cdot \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{x-\frac{\left(x-m_X\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{\sigma_X^4+2\sigma_X^2 m_X}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= b\cdot e^{m_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= b\cdot e^{m_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}
\end{aligned}$$

均方为

$$\begin{aligned}
E\left\{Y^2\left(t\right)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2\left(x\right)\cdot f_X\left(x;t\right)dx \\
&= \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x}\cdot \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-2\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{4\sigma_X^4+4\sigma_X^2 m_X}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= b^2\cdot e^{2m_X+2\sigma_X^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(x-m_X-2\sigma_X^2\right)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx \\
&= b^2\cdot e^{2m_X+2\sigma_X^2}
\end{aligned}$$

所以方差为

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 = Var\left\{Y\left(t\right)\right\} &= E\left\{Y^2\left(t\right)\right\}-E^2\left\{Y\left(t\right)\right\} \\
&= b^2\cdot e^{2m_X+2\sigma_X^2}-\left(b\cdot e^{m_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\right)^2 \\
&= b^2\cdot e^{2m_X+\sigma_X^2}\left(e^{\sigma_X^2}-1\right)
\end{aligned}$$

(**注：答案仅供参考，答案中可能存在错误的地方，欢迎指出错误！**)