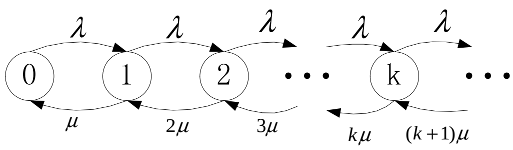
《随机过程》第七章作业答案

7.8　给出 $M/M/\infty$ 排队系统的稳态解。

解：由题义可知 $M/M/\infty$ 排队系统的状态转移率图如下：



因而，该系统的状态微分方程为

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_k'(t) = -(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad k > 0 \end{cases}$$

设 $t \to \infty$ 时，$p_k(t)$ 趋向稳定，即 $p_k'(t) = 0$

则 $p_k(t)$ 和 t 无关，可简记为 p_k，则上述方程组可简化为：

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ -(\lambda + k\mu) p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad k > 0 \end{cases}$$

从而可解得：

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \qquad k = 1, 2, \cdots \qquad \text{其中}\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

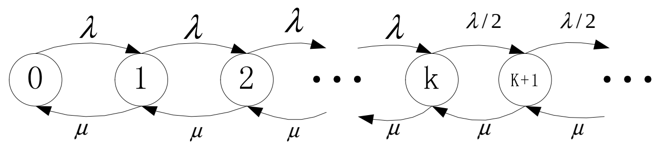
利用 $1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k$ 可求得

$$p_0 = 1/(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}) = e^{-\alpha}$$

$$\therefore \qquad p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\lambda/\mu} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

7.10　在某 $M/M/1$ 排队系统中，设有两类顾客各自独立地以 $\lambda/2$ 的到达率到达，两类顾客的服务时间都是以 μ 为参数的指数分布。设第一类顾客总是可以进入队列排队，而第二类顾客在系统总顾客数小于等于 K 时可以进入队列排队，而当系统总顾客数超过 K 时，被拒绝离去。试画出系统总顾客数 $N(t)$ 的状态转移图，并求出 $N(t)$ 的稳态概率质量函数。

解：由题义知 $M/M/1$ 排队系统的状态转移率图如下：



因而，该系统的状态微分方程为

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_j'(t) = -(\lambda+\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t) & 0 < j < k \\ p_j'(t) = -(\lambda/2+\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t) & j = k \\ p_j'(t) = -(\lambda/2+\mu)p_j(t) + \lambda/2 p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t) & 0 < j < k \end{cases}$$

考虑稳态解，$t \to \infty$ 时，$p_j(t)$ 趋向稳定，即 $p_j'(t) = 0$，且 $p_j(t)$ 和 t 无关，可简记为 p_j，则上述方程组可简化为：

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 = -(\lambda+\mu)p_j + \lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} & 0 < j < k \\ 0 = -(\lambda/2+\mu)p_j + \lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} & j = k \\ 0 = -(\lambda/2+\mu)p_j + \lambda/2 p_{j-1} + \mu p_{j+1} & 0 < j < k \end{cases}$$

若令 $\alpha = \lambda/\mu$，则可解得：

$$\begin{cases} p_j = \alpha^j p_0 & 1 \leqslant j \leqslant k \\ p_j = \alpha^j p_0 & j > k \end{cases}$$

再由条件

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

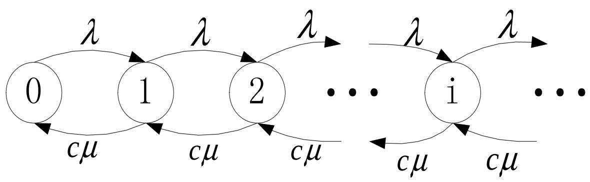
从而可得

$$p_0 = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2-\alpha-\alpha^{k+1}}$$

$$\therefore p_j = \begin{cases} p_j = \alpha^j \left(\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2-\alpha-\alpha^{k+1}}\right) & 0 \leqslant j \leqslant k \\ p_j = 2^{k-j}\alpha^j \left(\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2-\alpha-\alpha^{k+1}}\right) & j > k \end{cases}$$

7.14　设某 M/M/c 排队系统的顾客到达率是均值为 λ 的 Poisson 过程，当顾客数大于零时，系统的总服务率总是 $c\mu$。试画出状态转移图并求出系统总顾客数的稳态概率质量函数。

解：由题意，状态转移图为



由状态转移图，可列出平稳状态方程为：

$$\begin{cases} \lambda P_0 - c\mu P_1 = 0 & i = 0 \quad (1) \\ (\lambda + c\mu)P_i - \lambda P_{i-1} - c\mu P_{i+1} = 0 & i > 0 \quad (2) \\ \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 & \quad\quad (3) \end{cases}$$

解方程 (1)(2)，得

$$P_i = (\frac{\lambda}{c\mu})^i P_0 = \rho^i P_0$$

其中令 $\rho = \lambda / c\mu$ 。
再由方程 (3)，解得

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{c\mu} = 1 - \rho$$

所以，系统总顾客数的稳态概率质量函数为

$$P_i = (1 - \rho)\rho^i \qquad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

7.16　任务以均值为 λ 的 Poisson 过程到达某机器，机器对每个任务的服务时间是均值为 $1/\mu$ 的指数分布。机器在为顾客服务时有出故障的概率。若机器为某任务服务的时间为 t ，则出 k 次故障的概率满足均值为 αt 的 Poisson 分布。修复一次故障所需的时间是均值为 $1/\beta$ 的指数分布。设机器开始一个任务时总是正常工作的，
(1) 试求机器完成一个任务所需的时间的均值和方差；
(2) 试求任务的平均系统时间。

解：
(1) 假设完成一个任务所需的总时间为 $T = T_1 + T_2$ ，其中， T_1 为故障修复的时间， T_2 为机器服务的时间。

①先求均值。由题意知，

$$P\{\text{出现 k 次故障} \mid \text{服务时间为 t}\} = \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}$$

且 t 服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布，那么，

$$
\begin{aligned}
P\{\text{出现 k 次故障}\} &= \int_0^\infty \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t} \cdot \mu e^{-\mu t}\, dt \\
&= \frac{\mu\alpha^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\alpha+\mu)t}\, dt \\
&= \frac{\mu\alpha^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{(\alpha+\mu)^{k+1}} \\
&= \frac{\mu\alpha^k}{(\alpha+\mu)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

由题意，修复一次故障的平均时间为 $1/\beta$ ，所以修复 k 次故障的平均时间就为 k/β 。那么，平均故障修复时间为

$$
\begin{aligned}
E\{T_1\} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{\beta} \frac{\mu\alpha^k}{(\alpha+\mu)^{k+1}} \\
&= \frac{\mu}{\beta(\alpha+\mu)} \sum_{k=0}^\infty k \left(\frac{\alpha}{\alpha+\mu}\right)^k \\
&= \frac{\alpha}{\beta\mu}
\end{aligned}
$$

所以，机器完成一个任务所需的平均时间为

$$
E\{T\} = E\{T_1\} + E\{T_2\} = \frac{\alpha}{\beta\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)
$$

②求方差。由于当服务时间为 t 的条件下，修复 k 次故障的时间 $T_{1k} = t_1 + t_2 + \cdots + t_k$ ，其中 t_i 为第 i 次故障的修复时间，服从均值为 $1/\beta$ 的指数分布，则 T_{1k} 特征函数为

$$
\Phi_{T_{1k}}(\omega) = \left(\frac{\beta}{\beta + j\omega}\right)^k
$$

所以，

$$
E\{T_{1k}^2|t\} = \frac{1}{j^2} \frac{d^2}{d\omega^2} \Phi_{T_{1k}}(\omega)|_{w=0} = \frac{k(k+1)}{\beta^2}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{T_1^2\} &= E\left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{k(k+1)}{\beta^2} \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}\right\} \\
&= E\left\{\frac{2\alpha t}{\beta^2} + \frac{\alpha^2 t^2}{\beta^2}\right\} \\
&= \frac{2\alpha t}{\beta^2} E\{t\} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} E\{t^2\} \\
&= \frac{2\alpha}{\beta^2\mu} + \frac{2\alpha^2}{\beta^2\mu^2}
\end{aligned}
$$

又有

$$
E\{T_1 T_2\} = E\{T_1\} E\{T_2\} = \frac{\alpha}{\beta\mu^2}
$$

$$E\{T_2^2\} = E\{T_2\}^2 + Var\{T_2\} = 2/\mu^2$$

所以，

$$\begin{aligned}
Var\{T\} &= E\left\{T^2\right\} - E\{T\}^2 = E\{(T_1+T_2)^2\} - E\{T\}^2 \\
&= E\{T_1^2\} + E\{T_2^2\} + 2E\{T_1T_2\} - E\{T\}^2 \\
&= \frac{2\alpha}{\beta^2\mu} + \frac{2\alpha^2}{\beta^2\mu^2} + \frac{2}{\mu^2} + \frac{2\alpha}{\beta\mu^2} - \frac{1}{\mu^2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\mu^2}\left(1 + \frac{2\alpha\mu}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)
\end{aligned}$$

(2) 平均系统时间 $E\{S\} = E\{W\} + E\{T\}$，其中 S 为系统时间，W 为等待时间，T 为服务时间。因为系统为 $M/G/1$ 系统，则

$$E\{W\} = \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}$$

其中，

$$\begin{aligned}
m_2 &= E\{T^2\} = \frac{2}{\mu^2} + \frac{2\alpha}{\beta^2\mu} + \frac{2\alpha^2}{\beta^2\mu^2} + \frac{2\alpha}{\beta\mu^2} \\
\rho &= \lambda E\{T\}
\end{aligned}$$

$$\therefore E\{S\} = \frac{\lambda}{1-\rho}\left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{\alpha}{\beta^2\mu} + \frac{\alpha^2}{\beta^2\mu^2} + \frac{\alpha}{\beta\mu^2}\right] + \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{\lambda}{\mu}$$

(注：答案仅供参考，答案中可能存在错误的地方，欢迎指出错误！)