《随机过程》第二章作业答案

2.4　已知集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$ ，试给出三个定义于集合 S 上的 Borel 集。

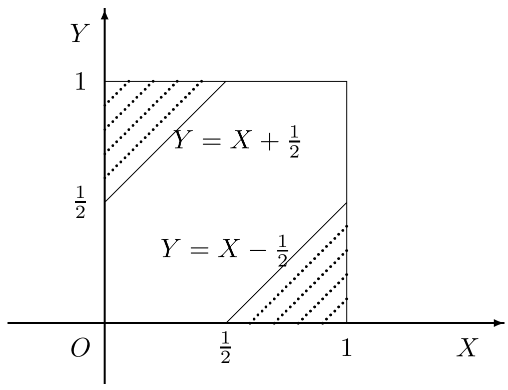
解：根据 Borel 集的定义，可以在 S 上定义如下 Borel 集：

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\emptyset, S\} \\ B_2 &= \Big\{\emptyset, S, \{1\}, \{2,3,4,5\}\Big\} \\ B_3 &= \Big\{S\text{的所有子集}\Big\} \end{aligned}$$

其中集合 B_3 一共有 32 个元素，包括空集和全集。

2.7　随机等概地从区间 $[0,1]$ 中任取两个数，试求这两个数的差大于 $1/2$ 的概率。

解：这两个数是互相独立的随机变量，分别设为 X 和 Y ，因此 $|X-Y|>1/2$ 。如图所示，点 (X,Y) 必须落在图示的阴影部分。由于 (X,Y) 是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内的均匀分布，因此 $|X-Y|>1/2$ 的概率为阴影部分面积，即 $\frac{1}{4}$ 。



2.12　某实验室从 A 、 B 、 C 三个芯片制造商处购得某芯片，数量比为 $1:2:2$ 。已知 A 、 B 、 C 三个制造商的芯片次品率分别为 $0.001, 0.005$ 和 0.01 。若该实验室随机使用的某芯片是次品，问该次品芯片购自制造商 A 或 C 的概率分别是多少？

解：用符号 D 表示芯片为次品这个事件， A,B,C 分别表示芯片购自 A 、 B 、 C 三个芯片制造商。由 Bayes 公式知道

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}.$$

又由题意知道，$P(A)=1/5, P(B)=2/5, P(C)=2/5$，$P(D|A)=0.001, P(D|B)=0.005, P(D|C)=0.01$，代入上式计算得到 $P(A|D)=1/31$。同样道理，可以得到

$$P(C|D)=\frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}=\frac{20}{31}.$$

2.19 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=Ae^{-|x|}$，试求： 1) 系数 A； 2) X 落在区间 $(0,1)$ 内的概率； 3) X 的概率分布函数。

解: 1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$ 知道， $A=1/I$，其中

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx=2\int_0^{\infty} e^{-x}dx=2,$$

因此 $A=1/2$；

2) 由概率密度函数的性质知

$$P(0<X<1)=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

3) 由概率分布函数和概率密度函数之间的关系知道

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

2.21 维随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=k(x+y),\qquad 0<x<1,\quad 0<y<1$$

试求： 1) k； 2) (X,Y) 的联合概率分布函数； 3) X 和 Y 的边界概率密度函数。

解: 1) 由

$$\int_0^1\int_0^1 k(x+y)dxdy=1$$

知道 $k=1$；

2) 当 $x\le 0$ 或者 $y\le 0$ 时，显然 $F(x,y)=0$；当 $x>1$ 且 $y>1$ 时， $F(x,y)=1$；当 $x\ge 1$ 且 $0<y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^1\left[\int_0^y (x+t)dt\right]dx=y(y+1)/2$$

同理，当 $y \geq 1$ 且 $0 < x < 1$ 时，

$$F(x,y) = \int_0^1 \left[\int_0^x (t+y)dt\right] dy = x(x+1)/2$$

当 $0 < x < 1$ 且 $0 < y < 1$ 时，

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y (s+t)dsdt = xy(x+y)/2$$

所以

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ or } y \leq 0, \\ xy(x+y)/2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ y(y+1)/2, & x \geq 1, 0 < y < 1, \\ x(x+1)/2, & y \geq 1, 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1, y > 1 \end{cases}$$

2.26　已知随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且其相应的概率密度函数分别为 $f_{X_1}(x_1)$, $f_{X_2}(x_2), \cdots, f_{X_n}(x_n)$，又已知 $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2, \cdots, Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，求证：随机向量 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1) \cdots f_{X_n}(y_n - y_{n-1})$$

解：由概率分布函数的定义知道

$$\begin{aligned} F_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= P\{Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \cdots, Y_n \leq y_n\} \\ &= P\{X_1 \leq y_1, X_1 + X_2 \leq y_2, \cdots, X_1 + \cdots + X_n \leq y_n\} \\ &= \int \cdots \int_D f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

其中 $D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \big| x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n \leq y_n\}$。令 $u_1 = x_1, u_2 = x_1 + x_2, \cdots, u_n = x_1 + \cdots + x_n$，则上述积分成为

$$\begin{aligned} F_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= \int \cdots \int_D f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{D'} f_{X_1}(u_1) f_{X_2}(u_2 - u_1) \cdots f_{X_n}(u_n - u_{n-1}) du_1 du_2 \cdots du_n \end{aligned}$$

其中 $D' = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) \big| u_1 \leq y_1, u_2 \leq y_2, \cdots, u_n \leq y_n\}$。因此

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= \frac{\partial^n F_{Y_1Y_2\cdots Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_n} \\ &= f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2 - y_1) \cdots f_{X_n}(y_n - y_{n-1}) \end{aligned}$$

2.27 已知 X, Y, Z 为互相独立的随机变量，且其概率密度函数分别为 $f_X(x), f_Y(y), f_Z(z)$ ，试求：

1) $P\{|X| < 5, Y > 2, Z^2 \geq 2\}$ ；

2) $P\{\min(X, Y, Z) > 2\}$ ；

3) $P\{\max(X, Y, Z) < 6\}$ ；

4) 随机变量 $U = \max(X, Y, Z)$ 和 $V = \min(X, Y, Z)$ 的概率密度函数。

解: 1) 由随机变量的独立性知道

$$P\{|X| < 5, Y > 2, Z^2 \geq 2\} = \int_{-5}^{5} f_X(x)dx \int_{2}^{\infty} f_Y(y)dy \left(\int_{-\infty}^{-2} f_Z(z)dz + \int_{2}^{\infty} f_Z(z)dz \right)$$

2) 由随机变量的独立性知道

$$\begin{aligned} P\{\min(X, Y, Z) > 2\} &= P\{X > 2, Y > 2, Z > 2\} \\ &= \int_{2}^{\infty} f_X(x)dx \int_{2}^{\infty} f_Y(y)dy \int_{2}^{\infty} f_Z(z)dz \end{aligned}$$

3) 类似于 2) 有

$$\begin{aligned} P\{\max(X, Y, Z) < 6\} &= P\{X < 6, Y < 6, Z < 6\} \\ &= \int_{-\infty}^{6} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{6} f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{6} f_Z(z)dz \end{aligned}$$

4) 先计算概率分布函数

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P\{U \leq u\} \\ &= P\{\max(X, Y, Z) \leq u\} \\ &= P\{X \leq u, Y \leq u, Z \leq u\} \\ &= \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) =& F'_U(u) \\ =& f_X(u) \int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)dz \\ &+ f_Y(u) \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)dz \\ &+ f_Z(z) \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_V(v) &= P\{V \le v\} \\
&= P\{\min(X,Y,Z) \le v\} \\
&= 1 - P\{\min(X,Y,Z) > v\} \\
&= 1 - P\{X > v, Y > v, Z > v\} \\
&= 1 - \int_{v^+}^{\infty} f_X(x)dx \int_{v^+}^{\infty} f_Y(y)dy \int_{v^+}^{\infty} f_Z(z)dz \\
&= 1 - (1 - F_X(v))(1 - F_Y(v))(1 - F_Z(v))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_V(v) =& F_V'(v) \\
=& f_X(v)(1 - F_Y(v))(1 - F_Z(v)) \\
&+ f_Y(v)(1 - F_X(v))(1 - F_Z(v)) \\
&+ f_Z(v)(1 - F_X(v))(1 - F_Y(v))
\end{aligned}
$$

2.30 设 K 为掷骰子试验所得随机变量，其样本空间为 $\{1,2,3,4,5,6\}$ ，每个样本点的概率都是 $1/6$ 。定义随机过程

$$X(t) = \cos(\frac{2\pi K}{6})t, \qquad t > 0$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一阶概率分布函数和一阶概率密度函数。

解：由题意，根据离散 VR 的概率分布函数定义易得

$$
\begin{aligned}
F_X(x;t) &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} U(t - \cos\frac{2\pi i}{6} t) \\
f_X(x;t) &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \delta(t - \cos\frac{2\pi i}{6} t)
\end{aligned}
$$

2.31 一个离散时间随机过程 $X[n]$ 定义如下：若抛均匀硬币，出现正面，则 $X[n] = (-1)^n$ ；若抛均匀硬币出现反面，则 $X[n] = (-1)^{n+1}$ 。试给出：

1) $X[n]$ 一阶概率质量函数；

2) $X[n]$ 和 $X[n+k]$ 的联合概率质量函数。

解：1) 由题义知， $X[n]$ 的样本空间为 $\{+1,-1\}$ ，又由于硬币质量均匀，所以 $+1,-1$ 等概，从而有

$$P\{x[n]=+1\}=P\{x[n]=-1\}=1/2$$

2) 易知， $(X[n],X[n+k])$ 的样本空间为 $\{(+1,+1),(+1,-1),(-1,+1),(-1,-1)\}$ ，当 k 为偶数时，样本点只有可能为 $\{(+1,+1),(-1,-1)\}$ ，样本点 $\{(+1,-1),(+1,-1)\}$ 不可能出现，又由于硬币质量均匀，所以

$$P\{(+1,+1)\}=P\{(-1,-1)\}=1/2,\qquad P\{(+1,-1)\}=P\{(-1,+1)\}=0$$

当 k 为奇数时，样本点只有可能为 $\{(+1,-1),(+1,-1)\}$ ，样本点 $\{(+1,+1),(-1,-1)\}$ 不可能出现，又由于硬币质量均匀，所以

$$P\{(+1,+1)\}=P\{(-1,-1)\}=0,\qquad P\{(+1,-1)\}=P\{(-1,+1)\}=1/2$$

2.36 证明性质 2.7 中生成函数满足的两个等式。

证明：1 ）由生成函数的定义知道：

$$G_N^{'}(Z)=\sum_{k=1}^{\infty}kZ^{k-1}P_N(k)$$

所以

$$G_N^{'}(1)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_N(k)=E\{N\}$$

2 ）同样，由生成函数的定义知道

$$G_N^{''}(Z)=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)Z^{k-2}P_N(k)$$

所以

$$\begin{aligned}
G_N^{''}(1)&=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)P_N(k)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P_N(k)-\sum_{k=1}^{\infty}kP_N(k)\\
&=E\{N^2\}-E\{N\}\\
\mathrm{Var}\{N\}&=E\{N^2\}-(E\{N\})^2\\
&=G_N^{''}(1)+G'_N(1)-(G_N^{'}(1))^2
\end{aligned}$$

2.40　设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y)=A\sin(x+y),\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}$$

求： 1) 系数 A ； 2) 均值 m_X 和 m_Y ； 3) 方差 σ_X^2 和 σ_Y^2 ； 4) 协相关矩 C_{XY} 和相关系数 ρ_{XY} 。

解: 1 ）由题意知：

$$A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dxdy=1$$

又因为

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)dxdy\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin ydy\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy\\
&=2(-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})(-\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=2
\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{1}{2}$ 。

(2) 由 X 和 Y 的对称性易知 $m_X=m_Y$ 。首先 X 的概率密度函数为

$$\begin{aligned}
f_X(x)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(x+y)dy\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)dy\\
&=\frac{1}{2}\sin x\left[\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]+\frac{1}{2}\cos x\left[\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]\\
&=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)
\end{aligned}$$

所以， X 的均值为

$$\begin{aligned}
m_X=E\{X\}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)dx\\
&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx\right]
\end{aligned}$$

计算积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-d\cos x) = -\left[x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right]\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(d\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx\\ &= \frac{\pi}{2} - (-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

所以 $m_X = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ 。

(3) 由 X 和 Y 的对称性易知 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ 。

$$\begin{aligned}\psi_x^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2x\sin x - (x^2-2)\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[2x\cos x - (x^2-2)\sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{2}[\pi + (-2)] + \frac{1}{2}[(\pi^2/4 - 2)] = \pi^2/8 + \pi/2 - 2\\ \sigma_X^2 &= \psi_x^2 - m_X^2 = \sigma_Y^2 = \pi^2/16 + \pi/2 - 2\end{aligned}$$

(4) 相关矩为

$$\begin{aligned}E\{XY\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(xy\sin x\cos y + xy\cos x\sin y)dxdy\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos y dy = \pi/2 - 1\end{aligned}$$

所以，协方差为

$$C_{XY} = R_{XY} - m_X m_Y = \pi/2 - 1 - \pi^2/16$$

相关系数为

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\pi/2 - 1 - \pi^2/16}{\pi^2/16 + \pi/2 - 2}$$