袖珍经典

相对论的意义

[美] 阿尔伯特·爱因斯坦 著　　郝建纲　刘道军 译　李新洲 审校

上海世纪出版集团

相对论的意义

[美] 阿尔伯特 · 爱因斯坦 著　　郝建纲　刘道军 译
李新洲 审校

世纪出版集团　上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

相对论的意义/(美)爱因斯坦(Einstein，A.)著；郝建纲，刘道军译．—上海：上海科技教育出版社，2005．4

(世纪人文系列丛书)

ISBN 7-5428-3787-7

Ⅰ．相…　Ⅱ．①爱…　②郝…　③刘…

Ⅲ．相对论—研究　Ⅳ．0412．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 010051 号

责任编辑　郑华秀

装帧设计　陆智昌

相对论的意义

[美]阿尔伯特·爱因斯坦 著

郝建纲　刘道军 译

李新洲 审校

出　　版　世纪出版集团　上海科技教育出版社

(200235 上海冠生园路 393 号　www.ewen.cc)

发　　行　上海世纪出版集团发行中心

印　　刷　山东新华印刷厂临沂厂

开　　本　787 × 965 mm　1/32

印　　张　6

插　　页　4

字　　数　110 000

版　　次　2005 年 4 月第 1 版

印　　次　2005 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-5428-3787-7/N·655

图　　字　09-2000-302 号

定　　价　15.00 元

相对论的意义

出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演

化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓乐于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团
世纪人文系列丛书编辑委员会
2005年1月

相对论的意义

原出版者说明

1921年，爱因斯坦在关于广义相对论的详尽论文发表5年之后及他永久离开欧洲加入高等研究院(Institute for Advanced Study)12年之前，访问了普林斯顿大学，在那里做了当年的斯塔福德·利特尔讲演（Stafford Little Lectures）。这四次讲演，构成了对他那时尚有争议的相对论的概述。普林斯顿大学出版社以《相对论的意义》为题汇集了这些讲演，这是第一本由一家美国出版社出版的爱因斯坦著作。在该出版社出版的后续版本中，爱因斯坦添加了详述该理论的新材料。附录“非对称场的相对论性理论”的修订版本，是爱因斯坦最后一篇科学论文，添加于他逝世后的1956年版本中。

版本说明

本书第一版于 1922 年由梅休因公司(Methuen and Company)在英国、并由普林斯顿大学出版社(Princeton University Press)在美国出版，包括爱因斯坦先生 1921 年 5 月在普林斯顿大学所做的斯塔福德 · 利特尔讲演的原文。在第二版中，爱因斯坦先生添加了一个附录，讨论自 1921 年以来相对论的一些进展。在第三版中，爱因斯坦又添加一个附录(附录二)论述其“引力理论的推广”。在第五版中，这一个附录已被完全修订了。

第五版说明

在现在这个版本里，我全面修订了原来的附录“引力理论的推广”，并将标题更新为“非对称场的相对论性理论”。因为我已成功地简化了场方程的推导及形式，其中部分工作是与我的助手考夫曼(B. Kaufman)合作完成的。这样整个理论在不改变其内容的情况下就变得更为明晰了。

爱因斯坦

1954 年 12 月

目录

相对论前物理学中的空间与时间

相对论(theory of relativity)和空间与时间的理论(theory of space and time)是紧密相连的。因此，我将首先对我们的空间与时间观念起源进行一番简要的探讨。尽管我知道在这样做时，会引入一个引起争议的话题。一切科学，不论是自然科学抑或心理学，其目的都在于使我们的经验互相协调并将它们纳入一个逻辑体系。然而，我们习以为常的空间与时间观念又是如何与我们经验的特征相联系的呢?

个体的经验是以事件序列的形式呈现在我们面前的。在这个序列里我们记忆中的各个事件看来是依照“早”和“迟”的标准排列的，而对于这个标准则不能再做进一步的分析了。因此，对于个体来说，就存在着一个“我”的时间(I-time)，或曰“主观时间”(subjective time)，这个时间本身是不可测度的。我们确实可以把每个事件与一个数字联系起来，依照这样一种方式，即较迟的事件与较早的事件相比对应于较大的数，然而这种

联系的本质却可以是十分随意的。将一个时钟所指出的事件顺序和既定事件序列的顺序相比较，我就能用这个时钟来定义这种联系。我们将时钟理解成提供了一连串可以计数的事件的东西，它还有其他一些性质，我们将在以后再讨论。

借助于语言，不同的个体能在一定的程度上比较各自的经验。通过比较，人们就会发现不同个体的某些感觉(sense perceptions)是彼此一致的，而对于另一些感觉，却无法建立起这样的一致性。我们习惯于把对不同个体而言是共同的因而多少是非个体特有的感觉当作真实的感觉。自然科学，尤其是其中最基本的物理学，就是研究这样的感觉。物理客体的概念，特别是刚体的概念，便是这样一类感觉的一种相对恒定的复合。在同样的意义上，一个时钟也是一个物体，或者说是一个体系，它有一个附加的性质：它所计数的一连串事件是由全可视为相等的元素构成的。

我们的概念与概念体系之所以能得到承认，其唯一理由在于它们代表的是我们经验的复合。除此之外，它们并无其他的理性依据。我坚信，哲学家曾对科学思想的进步起过有害的影响，他们把某些基本概念从经验论(empiricism)的领域里(在那儿它们是受人们驾驭的)取出来，提升到先验论(the *a priori*)的难以捉摸的高处。因为即使观念世界看起来并不能借助逻辑的方法从我们的经验中演绎出来，但就一定的意义而言，它还是人类心

智(human mind)的产物，没有人类的心智便无科学可言。不过，这个观念世界很难独立于我们经验的性质之外，正如衣服依赖于人体的形状一样。这对于我们的时间与空间概念尤为正确。迫于事实，物理学家只好使时间与空间概念从先验论的奥林帕斯山降落到人间的土地上来，以整理这些概念并使之适用于实际情况。

现在，我们来讨论对于空间的概念和判断。在这里，密切注意经验和我们的概念之间的关系仍然是非常重要的。在我看来，庞加莱(Poincaré)在其著作《科学与假设》(La Science et l'Hypothese)的叙述中，已经清楚地认识了这一道理。在我们所能感觉到的所有刚体变化中间，那些可以被我们身体的主动运动抵消的变化是以简单性(simplicity)为其标志的；庞加莱称之为位置变化。通过简单的位置变化，能使两个物体相接触。在几何学中有基本意义的全等定理，就与支配这类位置变化的定律有关。下面的讨论对于空间概念来说是很重要的。将物体 B，C，…附加到物体 A 上去可以形成新的物体，我们说我们**延伸**了物体 A。我们可以这样延伸物体 A，使其与任意其他物体 X 相接触。物体 A 的所有延伸的集合，我们可以定义为“物体 A 的空间”。于是，一切物体都在“(随意选定的)物体 A 的空间”里的说法是正确的。在这种意义下，我们不能抽象地谈论空间，而只能谈论“属于物体 A 的空间”。在日常生活中，当我们要判定物体的相对位置时，地壳扮演了一个

如此重要的角色，它导致了一个抽象的空间概念，而这当然是无法论证的。为了使我们自己免于这项致命的错误，我们将只提到“参考物体”或“参考空间”(space of reference)。我们将会看到，只是由于广义相对论才使得这些概念的精确化成为必要。

我不打算详细地讨论参考空间的某些性质，正是这些性质导致我们认为点是空间的基本元素，并将空间设想为一个连续统(continuum)。我也不打算进一步分析一些表明连续点列或曰线的概念为合理的空间性质。如果假定了这些概念以及它们和大量的坚实经验之间的关系，就很容易说出我们所指的空间三维性(three-dimensionality)是什么：每一个点都可以用这样一种方式与3个数 x_1，x_2，x_3(坐标)相联系，即这种相互联系是唯一的，而且当这个点描绘一个连续的点列(一条线)时，它们就作连续变化。

在相对论前物理学(pre-relativity physics)里，假设理想刚体位形的定律是符合于欧几里得几何学(Euclidean geometry)的。它的意义可以表述如下：标记在刚体上的两点构成一个**间隔**。可以采取多种方式使得这个间隔与我们的参考系相对静止。如果现在能用坐标 x_1，x_2，x_3 表示这个空间里的点，使得该间隔两端的坐标差 Δx_1，Δx_2，Δx_3，对于该间隔所取的每个方向都有相同的平方和：

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2, \tag{1}$$

则称这样的参考空间为欧几里得空间，这样的坐标为笛卡儿坐标*。对于一个无穷小间隔，我们事实上取这个假设的极限情况就可以了。还有一些不那么特殊的假设包含在这个假设里，鉴于这些假设具有根本的意义，我们也必须给予重视。首先，假设了我们可以任意移动理想刚体。其次，假设了理想刚体对于取向所表现的行为与物体的材料及其位置的改变无关，换言之，只要能使两个间隔重合一次，则随时随地都能使它们重合。上述两个假设对于几何学(特别是物理测量)都至关重要，它们都是自然而然地由经验得来的；在广义相对论里，必须假定这两个假设只有对于那些与天文尺度相比无限小的物体与参考空间才是有效的。

我们将量 s 称为间隔的长度。为了能唯一确定这个量，需要任意确定一个具体的间隔长度；例如，令它等于1(单位长度)，那么所有其他间隔长度就可以确定了。如果我们使 x_ν 线性地依赖于参量 λ，即

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

那么我们就得到了一条线，该线具有欧几里得几何中直线应具有的一切性质。特别地，这明显意味着把间隔 s 沿着一条直线放置 n 次，就能获得长度为 $n \cdot s$ 的间隔。

---

* 这个关系必须对于任意选择的原点和间隔方向(比值 $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$)都能成立。

所以，长度所指的就是用单位量杆沿直线测量的结果。下面将会看到，和直线一样，长度与坐标系无关。

现在，我们已有了这样一条思路，它在狭义相对论与广义相对论中是处于相类似的地位的。我们会问：除了已经使用过的笛卡儿坐标外，还有与之等价的其他坐标吗？间隔具有与坐标选择无关的物理意义；由此，在参考空间中的任一点取相等的间隔，所有的间隔端点的轨迹为一球面，可知这个球面也同样具备与坐标选择无关的物理意义。如果 x_ν 和 x'_ν（ν 从 1 到 3）都是参考空间的笛卡儿坐标，则球面在两个坐标系中将表示为如下方程

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{常数}。 \tag{2}$$

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \text{常数}。 \tag{2a}$$

必须怎样用 x_ν 表示 x'_ν 才能使(2)式和(2a)式彼此等价呢？如果认为 x'_ν 可以表示成 x_ν 的函数，那么根据泰勒定理(Taylor's theorem)，对于很小的 Δx_ν，可以写出

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta x_\alpha \Delta x_\beta \cdots$$

如果将(2a)式代入上式并与(1)式相比较，便会看出 x'_ν 必须是 x_ν 的线性函数。因此，如果令

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

或

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha} \Delta x_\alpha, \tag{3a}$$

那么(2)式和(2a)式的等效性就可以表述成

$$\sum \Delta x'^2_\nu = \lambda \sum \Delta x^2_\nu \quad (\lambda \text{ 与 } \Delta x_\nu \text{ 无关})。 \tag{2b}$$

所以 λ 必须是一个常数。如果取 $\lambda = 1$，则由(2b)、(3a)两式可导出条件

$$\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

其中按照 $\alpha = \beta$ 或 $\alpha \neq \beta$，有 $\delta_{\alpha\beta} = 1$ 或 $\delta_{\alpha\beta} = 0$。条件(4)称为正交条件，而变换(3)和(4)称为线性正交变换。如果要求 $s^2 = \sum \Delta x^2_\nu$ 在所有坐标系里都等于长度的平方，并且总以同一单位标尺去量度，则 λ 必须等于 1。所以，线性正交变换是我们能用来从参考空间中的一个笛卡儿坐标系变换到另一个的唯一变换方式。我们看到，在运用这种变换时，直线方程仍化为直线方程。将(3a)式两边同时乘以 $b_{\nu\beta}$ 并对所有的 ν 求和，便可以反过来导出

$$\begin{aligned} \sum b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu &= \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha \\ &= \sum_\alpha \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta。 \end{aligned} \tag{5}$$

系数 b 同样也决定了 Δx_ν 的逆代换。在几何上，$b_{\nu\alpha}$ 是 x'_ν 轴与 x_ν 轴间夹角的余弦。

综上所述，我们可以认为在欧几里得几何学中(对于

一个给定的参考空间）存在一种优先坐标系（preferred systems of co-ordinates），即笛卡儿坐标系，它们之间可以通过线性正交变换来彼此变换。参考空间中两点间用量杆测得的距离 s，在这种坐标系中就可以用特别简单的形式来表达。整个几何学都可以建立在这个距离概念的基础之上。在当前的论述中，几何学是与实物（刚体）相联系的，它的定理就是对这些实物的行为所作的陈述，而这些陈述又可以被证实或证伪。

通常人们习惯于离开那些概念与经验之间的任何联系来研究几何学。把那些纯逻辑的并且与在原则上不完备的经验论无关的东西分离出来，是有益的。这样能使纯数学家满意。如果能从公理中正确地（即无逻辑错误地）推导出定理来，他就心满意足了。至于欧几里得几何学究竟是否真确之类的问题，他并不关心。但是，对于我们的目的来说，必须将几何学的基本概念与自然对象联系起来；没有这样的联系，几何学对于物理学家毫无用处可言。物理学家所关心的是几何学定理究竟是否真确之类的问题。从这个观点上讲，欧几里得几何学肯定了某些东西，这些东西不仅仅是根据定义并通过逻辑推导而得出的结论。我们将会在下面的简单考察中看到这一点。

在空间中的 n 个点之间，有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个距离 $s_{\mu\nu}$，它们与 $3n$ 个坐标之间有下述关系：

$$s_{\mu\nu}{}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \cdots。$$

可以从这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个方程里消去 $3n$ 个坐标，由这样的消去法，至少会得到 $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ 个有关 $s_{\mu\nu}$ 的方程*。因为 $s_{\mu\nu}$ 是可测量的量，而根据定义，它们之间是彼此无关的，所以 $s_{\mu\nu}$ 之间的上述关系并不必是先验的。

从前面的讨论中，容易看出变换(3)式、(4)式决定了从一个笛卡儿坐标系到另一个的变换关系，因此它们在欧几里得几何学里具有根本的意义。在笛卡儿坐标系中，两点间的可测量距离 s 是用方程

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

表示的，这个性质表示着笛卡儿坐标系的特征。

如果 $K_{(x_\nu)}$ 和 $K'_{(x_\nu)}$ 是两个笛卡儿坐标系，则有

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2。$$

考虑到线性正交变换方程，上式中的左边恒等于右边，而右边和左边的区别只在于 x_ν 换成了 x'_ν。这可表述为 $\sum \Delta x_\nu^2$ 在线性正交变换下是不变量。在欧几里得几何学中，显然所有这样的量，而且也只有这样的量才具有客观意义。因为这样的量与笛卡儿坐标系的选择无

---

* 事实上有 $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ 个方程。

关，并且能够用线性正交变换下的不变量来表示。这就是不变量理论(theory of invariants)——它涉及那些支配着不变量形式的定律——对于解析几何学十分重要的理由。

作为几何不变量的第二个例子，考察体积。它可以表述成

$$V=\iiint \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3。$$

依照雅可比定理(Jacobi's theorem)，可以写出

$$\iiint \mathrm{d}x'_1\mathrm{d}x'_2\mathrm{d}x'_3=\iiint \frac{\partial(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)}{\partial(x_1,\ x_2,\ x_3)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$

其中最后那个积分中的被积函数是 x'_ν 对 x_ν 的函数行列式，而由(3)式，这就等于代换系数 $b_{\nu\alpha}$ 的行列式 $|b_{\mu\nu}|$。如果由(4)式组成 $\delta_{\mu\alpha}$ 的行列式，则根据行列式的乘法定理，有

$$\begin{aligned}1&=|\delta_{\alpha\beta}|=\left|\sum_\nu b_{\nu\alpha}b_{\nu\beta}\right|\\&=|b_{\mu\nu}|^2;\quad |b_{\mu\nu}|=\pm 1。\end{aligned}\tag{6}$$

如果我们只限于具有行列式+1的变换*(只有这类变换是由坐标系的连续变换而来的)，则 V 是不变量。

然而，不变量并不是可以用来表示与具体笛卡儿坐标系选择无关的唯一形式。矢量(vectors)和张量(tensors)就

---

* 因此存在两种笛卡儿坐标系，称为"左手"系和"右手"系。所有的物理学家和工程师都熟悉两者之间的差别。有趣的是，不能在几何学上规定这两种坐标系，而只能做两者之间的对比。

是其他的表示形式。 现在我们来描述这样的情况，具有当前坐标 x_ν 的点位于一条直线上。 于是有

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \quad (\nu \text{ 从 } 1 \text{ 到 } 3)。$$

为不失普遍性计，可令

$$\sum B_\nu^2 = 1。$$

如果将上述方程两边同乘以 $b_{\beta\nu}$[比较(3a)式与(5)式]并对所有的 ν 求和，我们得到

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

其中我们已令

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \quad A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu。$$

这些就是在第二个笛卡儿坐标系 K' 中的直线方程。它们和原笛卡儿坐标系中的直线方程有相同的形式。 因此，直线显然有一种与坐标系无关的性质。 就形式而论，这依赖于下述事实：$(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ 这些量像间隔的分量 Δx_ν 那样变换。 对所有笛卡儿坐标系定义，并像间隔分量那样变换的 3 个量的集合，称为矢量。 由于变换方程是齐次的，如果矢量的 3 个分量在某个笛卡儿坐标系中为零，那么它在所有的坐标系中的分量都将为零。 于是我们在不借助几何表示法的情况下就获得了矢量概念的意义。 直线方程的这种行为可以这样表示：直线方程对于线性正交变换是协变的(co-variant)。

现在，我们要简短地证明存在一些导致张量概念的几何客体。设 P_0 为二次曲面的中心，P 为曲面上的任一点，ξ_ν 为间隔 P_0P 在坐标轴上的投影。于是曲面方程为

$$\sum a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1。$$

在这里以及类似的情形下，我们将略去求和号，并且约定求和是对出现两次的指标进行的。于是我们将曲面方程写成

$$a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1。$$

对于所选择的笛卡儿坐标系，当中心位置给定时，量 $a_{\mu\nu}$ 就可以完全确定曲面。由已知的 ξ_ν 在线性正交变换下的变换律(3a)式，我们容易导出 $a_{\mu\nu}$ 的变换律*

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu}b_{\tau\nu}a_{\mu\nu}。$$

这个变换对于 $a_{\mu\nu}$ 是齐次的，而且是一次的。由于有这样的变换性质，这些 $a_{\mu\nu}$ 被称为 2 秩张量的分量(因为具有两个指标，所以称为 2 秩的)。如果张量的所有分量 $a_{\mu\nu}$ 在任一笛卡儿坐标系中为零，则其在所有其他笛卡儿坐标系中也都为零。二次曲面的形状和位置是以(a)这个张量来描述的。

高秩(具有更多个指标)张量也可以在解析上定义。我们可以将矢量看作是 1 秩张量，不变量(标量)当成是 0

---

* 利用(5)式，方程 $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ 可以改写成 $a'_{\sigma\tau}b_{\mu\sigma}b_{\nu\tau}\xi_\sigma\xi_\tau = 1$，这样就直接有上述结果。

秩张量，这样做是有好处的。就此而论，不变量理论的问题可以这样提出：遵照怎样的规律可从给定的张量组成新张量？为了以后能够应用，我们现在就来考虑这些规律。我们首先只处理在同一个参考空间里，当一个笛卡儿坐标系通过线性正交变换变换到另一个笛卡儿坐标系时张量的性质。这些定律完全与维数无关，因此我们先不确定维数 n。

定义 在 n 维参考空间的每个笛卡儿坐标系中，某个量是由 n^{α} 个数 $A_{\mu\nu\rho\ldots}$（α = 指标的个数）规定的，如果变换律为

$$A'_{\mu'\nu'\rho'}\ldots = b_{\mu'\mu}b_{\nu'\nu}b_{\rho'\rho}\ldots A_{\mu\nu\rho\ldots} \tag{7}$$

则这些数就是 α 秩张量的分量。

附注 只要(B)，(C)，(D)…是矢量，则由这个定义可知

$$A_{\mu\nu\rho\ldots}B_{\mu}C_{\nu}D_{\rho}\ldots \tag{8}$$

是不变量。反之，如果已知对于任选的矢量(B)、(C)等，(8)式总能导致不变量，则可推断(A)的张量属性。

加法和减法 将同秩张量的对应分量相加或相减，便得到等秩张量：

$$A_{\mu\nu\rho\ldots} \pm B_{\mu\nu\rho\ldots} = C_{\mu\nu\rho\ldots} \tag{9}$$

这可由上述张量的定义直接证明。

乘法 由一个 α 秩张量和一个 β 秩张量，将第一个张量的所有分量乘以第二个张量的所有分量，就能得到

一个$(\alpha+\beta)$秩的张量：

$$T_{\mu\nu\rho\cdots\alpha\beta\gamma\cdots} = A_{\mu\nu\rho\cdots} B_{\alpha\beta\gamma\cdots} \tag{10}$$

缩并 通过令α秩张量的两个指标相等，然后对这个指标求和，就可以得到$(\alpha-2)$秩张量：

$$T_{\rho\cdots} = A_{\mu\mu\rho\cdots}\left(=\sum_{\mu} A_{\mu\mu\rho\cdots}\right)。 \tag{11}$$

其证明如下：

$$\begin{aligned} A'_{\mu\mu\rho\cdots} = b_{\mu\alpha} b_{\mu\beta} b_{\rho\gamma\cdots} A_{\alpha\beta\gamma\cdots} &= \delta_{\alpha\beta} b_{\rho\gamma\cdots} A_{\alpha\beta\gamma\cdots} \\ &= b_{\rho\gamma\cdots} A_{\alpha\alpha\gamma\cdots} \end{aligned}$$

除了这些初等的运算规则以外，还有用微分来构成张量的方法（“扩充”）：

$$T_{\mu\nu\rho\cdots\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu\rho\cdots}}{\partial x_{\alpha}} \tag{12}$$

利用这些运算规则，可以由已知张量得到线性正交变换下的新张量。

张量的对称性质 如果张量的分量在互换指标μ和ν后，彼此相等或相等而反号，则称该张量关于指标μ和ν是对称或斜称的(skew-symmetrical)。

对称的条件：$A_{\mu\nu\rho} = A_{\nu\mu\rho}$。

斜称的条件：$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}$。

定理 对称性或斜称性的存在与坐标的选择无关，其重要性正寓于此。证明可以由定义张量的方程得到。

特殊张量

Ⅰ. 量 $\delta_{\rho\sigma}$(4)是张量的分量(基本张量)。

证明 如果在变换式 $A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}A_{\alpha\beta}$ 右边，用 $\delta_{\alpha\beta}$(它在 $\alpha=\beta$ 时为1，在 $\alpha\neq\beta$ 时为0)代替 $A_{\alpha\beta}$，我们得到

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}。$$

如果将(4)式用于逆变换(5)式中，那么上式中最后一个等号的证明是显然的。

Ⅱ. 存在一个张量($\delta_{\mu\nu\rho\ldots}$)，它对于所有的指标对(pairs of indices)都是斜称的，它的秩等于维数 n。当 $\mu\nu\rho\cdots$ 是 $123\cdots$ 的偶置换时，其分量取值 $+1$；当为奇置换时，分量取值为 -1。

其证明可以借助前面所证明的定理 $|b_{\rho\sigma}|=1$ 来进行。

这几个简单的定理，构成从不变量理论建立相对论前物理学和狭义相对论的方程的工具。

我们已经看到，在相对论前物理学中，为了确定空间关系(relations in space)，需要参考物体或参考空间。除此以外，还需要笛卡儿坐标系。把笛卡儿坐标系想像成由单位长度的量杆所构成的立方体框架，这两个概念就可以合二为一。在此框架上，所有格点(lattice points)的坐标都是整数。由基本关系式

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \qquad (13)$$

可知，这样的一个空间格子的每条边长都为单位长度。

为了确定时间关系(relations in time),我们还需要在(比方说)笛卡儿坐标系或参考框架的原点处再放置一个标准时钟。如果某处发生一个事件,只要在事件发生的同时,我们确定了原点处的时钟所记录下的时间,我们就可以赋予这个事件三个空间坐标 x_ν 和一个时间坐标 t。这样,处于不同位置的事件的同时性(simultaneity)就被(假设地)赋予了客观意义,而先前我们只考虑了个体的两种经验的同时性。这样确定的时间无论如何与我们参考空间中坐标系的位置无关,所以在变换(3)下,它是不变量。

假定表述相对论前物理学定律的方程组如同欧几里得几何中的关系一样,都是在变换(3)下协变的。空间的各向同性(isotropy)和均匀性(homogeneity)就是以这种方式表述的*。现在,我们就以这种观点来考察一些更为重要的物理学方程。

质点的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_\nu}{\mathrm{d}t^2}=X_\nu。\tag{14}$$

$(\mathrm{d}x_\nu)$是矢量,$\mathrm{d}t$ 因而$\frac{1}{\mathrm{d}t}$都是不变量,所以$\left(\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}\right)$是矢

* 甚至在空间中有某个优先方向时,物理学定律仍然可以按照在变换(3)下协变的这种方式来表述,但是在这种情况下,这种表述方式就不合适了。因为如果有一个优先的空间方向的话,那么根据这个方向,按照一定的方式来选择坐标系的方向,就可以使自然现象的描述得以简化。但是,在另一方面,如果在空间中没有一个唯一的方向,那么在表述自然定律时,如果掩盖了不同取向的坐标系之间的等价性,就不合逻辑了。在狭义和广义相对论中,我们将再次遇到这种观点。

量；按同样的方式，可以证明$\left(\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}\right)$也是矢量。总而言之，对时间微分的运算不改变张量的属性。因m是不变量(0 秩张量)，故$\left(m\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}\right)$是矢量或曰 1 秩张量(根据张量的乘法定理)。如果力(X_ν)有矢量特性，则差$\left(m\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)$也同样具有。因此，这些运动方程在参考空间的任何其他笛卡儿坐标系中也成立。当力是保守力时，我们可以容易看出X_ν的矢量属性。因为存在仅依赖于粒子间的相互距离的势能Φ，而且它是不变量。所以，力$X_\nu=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}$的矢量特性就是我们前面关于 0 秩张量导数的普遍定理的必然结果。

用速度(1 秩张量)乘以上式，我们得到张量方程

$$\left(m\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\frac{dx_\mu}{dt}=0。$$

乘以标量dt，并且缩并，我们得到动能方程

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right)=X_\nu dx_\nu。$$

如果ξ_ν代表质点与空间中固定点的坐标之差，那么ξ_ν具有矢量特性。显然我们有$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}=\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$，所以质点的运动方程可以写成

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}-X_\nu=0。$$

再用 ξ_μ 乘上这个方程，我们得到张量方程

$$\left(m\frac{\mathrm{d}^2\xi_\nu}{\mathrm{d}t^2}-X_\nu\right)\xi_\mu=0。$$

缩并左边的张量，并对时间取平均，我们得到位力定理(virial theorem)，这里将不对它进行深入的讨论。交换指标，然后相减，再经过一个简单的变换，我们得到矩定理(theorem of moments)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(\xi_\mu\frac{\mathrm{d}\xi_\nu}{\mathrm{d}t}-\xi_\nu\frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}t}\right)\right]$$
$$=\xi_\mu X_\nu-\xi_\nu X_\mu。\tag{15}$$

显然，按照这种方式我们可以看出矢量的矩不是矢量，而是张量。由于它们的斜称性，这个体系里只有 3 个独立方程，而不是 9 个。能否用矢量代替三维空间中的 2 秩斜称张量，取决于能否按下述方式构成矢量：

$$A_\mu=\frac{1}{2}A_{\sigma\tau}\delta_{\sigma\tau\mu}。$$

如果我们用前面引入的特殊斜称张量 δ 去乘 2 秩斜称张量，然后再缩并两次，就可以得到矢量，其分量与张量的分量数值上相等。这些就是所谓的轴矢量(axial vectors)，它们从右手系变到左手系时的变换性质与 Δx_ν 不同。把 2 秩斜称张量看作三维空间中的矢量，可以增加它的形象性，但是这样做不能像把它考虑为张量时那样很好地表示出相应量的一些确切

性质。

接下来，我们考虑连续介质的运动方程。设 ρ 是密度，u_ν 是速度分量(它们是坐标和时间的函数)，X_ν 是单位质量的体积力(volume force)，$p_{\nu\sigma}$ 是在与 σ 轴垂直的平面上沿着 x_ν 增加的方向上的应力。根据牛顿定律(Newton's law)，运动面积的方程为：

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_\nu}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \rho X_\nu,$$

其中 $\frac{\mathrm{d}u_\nu}{\mathrm{d}t}$ 为在 t 时刻位于坐标 x_ν 处的粒子的加速度。如果我们用偏微分系数来表示这个加速度，则在除以 ρ 后我们得到

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\sigma = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + X_\nu。 \tag{16}$$

我们必须证明，这个方程的有效性与笛卡儿坐标系的具体选择无关。(u_ν)是矢量，故 $\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ 也是矢量。$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}$ 是 2 秩张量，故 $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\tau$ 是 3 秩张量。上式中左边的第二项来自于对指标 σ 和 τ 的缩并。很显然，右边的第二项也具有矢量特性。为了保证右边第一项也是矢量，$p_{\nu\sigma}$ 必须是张量。通过对它进行微分并且缩并，就得到 $\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}$，故它是矢量。用标量的倒数 $\frac{1}{\rho}$ 乘以它之后，它仍然是矢量。$p_{\nu\sigma}$ 是张量，因而按

照方程

$$p'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} p_{\alpha\beta}$$

进行变换，这在力学中是通过在一个无穷小的四面体上对方程进行积分来证明的。同样，如果把矩定理应用于无穷小的平行六面体，也可以证明 $p_{\nu\sigma} = p_{\sigma\nu}$，从而可知应力张量是对称张量。通过前面的讨论，并利用前面所给出的规则可以证明，上述方程在空间坐标的正交变换(转动变换)下是协变的；同时，为使方程是协变的，方程中各个量所应遵循的变换规则也就明显了。

有了前面的讨论，连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \tag{17}$$

的协变性也就无需再特别讨论了。

我们还将检验那些表述应力分量与物质属性之间关系的方程的协变性，并利用协变性条件，对可压缩黏性流体建立起这些方程。如果我们忽略流体的黏性，那么压强 p 将是标量，它只依赖于流体的温度和密度。于是对于应力张量的贡献显然是

$$p\delta_{\mu\nu},$$

其中 $\delta_{\mu\nu}$ 是特殊对称张量。对于黏性流体，也存在这一项。但这时还存在一些依赖于 u_ν 的空间导数的压强

项。我们将假定这种依赖关系是线性的。鉴于这些项必须是对称张量，所以唯一可能出现的形式就是

$$\alpha\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)+\beta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$\left(\text{因为}\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\text{是标量}\right)$。出于物理学理由（没有滑动），对于所有方向的对称膨胀，即当

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\text{；}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\text{，等等}=0\text{ 时，}$$

假定不存在摩擦力，由此可得 $\beta=-\dfrac{2}{3}\alpha$。如果只有$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}$不为零，令 $p_{31}=-\eta\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}$，这样 α 也就确定了。于是，我们得到了完整的应力张量

$$p_{\mu\nu}=p\delta_{\mu\nu}-\eta\left[\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{\mu\nu}\right]\tag{18}$$

在这个例子中，我们可以很明显地看到产生于空间的各向同性——所有的方向都等价——的不变量理论的启发性价值。

最后，我们考察作为洛伦兹电子论（electron theory of Lorentz）基础的麦克斯韦方程组（Maxwell's equations）的形式。

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial h_3}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_3}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{1}{c}i_1\\
&\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{1}{c}i_2\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}+\frac{\partial e_3}{\partial x_3}=\rho
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial e_3}{\partial x_2}-\frac{\partial e_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t}\\
&\frac{\partial e_1}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3}{\partial x_1}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t}\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}+\frac{\partial h_3}{\partial x_3}=0
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

由于电流密度定义为电荷密度乘以电荷的矢量速度，所以 $\boldsymbol{i}$ 是矢量。由前三个方程，很显然 $\boldsymbol{e}$ 也是矢量。因而 $\boldsymbol{h}$ 不能被看作矢量*。不过如果把 $\boldsymbol{h}$ 看作是 2 秩斜称张量，就很容易诠释上面这些方程了。于是，我们用 h_{23}，h_{31}，h_{12}分别代替 h_1，h_2，h_3。注意到 $h_{\mu\nu}$的斜称性，我们可以把方程组(19)和(20)中前三个方程写成如下的形式：

$$
\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_\mu}{\partial t}+\frac{1}{c}i_\mu \tag{19a}
$$

---

* 这些讨论将使读者熟悉张量运算的过程，避开了在处理四维问题时出现的特殊困难。这样当我们在狭义相对论［场的闵可夫斯基（Minkowski）诠释］中再讨论麦克斯韦方程组时，就不会遇到太多麻烦了。

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial e_\nu}{\partial x_\mu} = + \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \tag{20a}$$

与 $\boldsymbol{e}$ 相比，$\boldsymbol{h}$ 呈现为与角速度具有相同对称性的量，因此散度方程具有如下的形式：

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\nu} = \rho \tag{19b}$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial h_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{20b}$$

后一个方程是 3 秩斜称张量方程(如果注意到 $h_{\mu\nu}$ 具有斜称性，就很容易证明方程左边对于每一对指标都是斜称的)。这种记法比通常的记法更为自然，因为与通常的记法相比，它既可以用于左手笛卡儿坐标系，又可以用于右手笛卡儿坐标系，而且无需改变符号。

狭义相对论

前面关于刚体位形的考察，是建立在空间中的所有方向(或者笛卡儿坐标系的所有位形)在物理上都是等效的这一基础之上的，而不涉及那些有关欧几里得几何有效性的假设。我们也可以把它表述成“关于方向的相对性原理”，而且我们已看到如何借助于张量运算来寻求符合这一原理的方程[自然定律(laws of nature)]。现在，我们要问的是，是否存在着对于参考空间的运动状态的相对性；换句话说，是否存在物理上等效并且彼此相对运动的参考空间。从力学的观点来看，等效的参考空间看起来是确实存在的。因为在地球上进行的实验，并不会告诉我们，我们正以每秒大约30千米的速度绕着太阳公转。另一方面，这种物理等效性(physical equivalence)看来并非对任意运动的参考空间都成立；因为颠簸的列车上的力学效应与匀速运动的列车上的力学效应看来并不遵循同样的定律。当写出相对于地球运动的方程时，还必须要考虑到地球的转动。因而似乎存在

着一种笛卡儿坐标系，即所谓的惯性系(inertial systems)，在这种坐标系中，力学定律(或更普遍地说是物理学定律)表述为最简单的形式。显然，我们可以推断下述命题是正确的：如果 K 是惯性系，那么任何一个相对于 K 做均匀无转动运动的参考系 K' 也是惯性系；自然定律对所有的惯性系都是一致的。我们将把这个陈述称为“狭义相对性原理”。跟处理方向的相对性(relativity of direction)一样，我们将从这一“平移相对性”(relativity of translation)原理中得出一些结论。

为了达到这个目的，我们必须首先解决下面的问题。如果相对于惯性系 K，一个事件的笛卡儿坐标 x_ν 和时间 t 都已经给定，那么我们怎样计算同一事件相对于惯性系 K' (它相对于 K 作匀速平移)的坐标 x'_ν 和时间 t' 呢？在相对论前物理学中，这个问题是通过无意识地作了两个假设而解决的。

1. 时间是绝对的；一个事件相对于 K' 的时间 t' 与它相对于 K 的时间是相同的。如果瞬时信号可以传到远处，并且我们知道时钟的运动状态不会影响它的快慢，那么这个假设从物理学上讲就是正确的。因为这样就可以把一些彼此相同并且校准过的时钟分别放置在 K 系和 K' 系中，而且分别相对于它们静止，时钟的读数则与系统的运动状态无关。此时，一个事件的时间就由与它最邻近的时钟给出。

2. 长度是绝对的；如果相对于 K 静止的间隔具有长度

s，那么在相对于 K 运动的 K' 系中，它具有相同的长度 s。

如果 K 系和 K' 系的坐标轴彼此平行，那么在前面两个假设的基础上，经过简单的计算就可以得到如下的变换方程

$$\left.\begin{aligned} x'_\nu &= x_\nu - a_\nu - b_\nu t \\ t' &= t - b \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

这个变换称为"伽利略变换"（Galilean Transformation）。对时间求两次导数，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x_\nu}{\mathrm{d}t^2}。$$

进而，对于两个同时的事件，有

$$x'^{(1)}_\nu - x'^{(2)}_\nu = x^{(1)}_\nu - x^{(2)}_\nu。$$

把它平方然后相加，便得到了两点间距离的不变性。由此，很容易证明牛顿运动方程（Newton's equations of motion）在伽利略变换（21）式下是协变的。因此，如果有了上面两个关于尺度和时钟的假设，那么经典力学符合狭义相对性原理。

但是，当运用到电磁现象时，这种在伽利略变换下建立平移相对性的企图却遭到了失败。麦克斯韦—洛伦兹电磁方程（Maxwell-Lorentz electro-magnetic equations）在伽利略变换下不是协变的。特别是，从（21）式我们注意到，如果一束光线在 K 系中的速度是 c，那么它在 K' 系中就会有不同的速度，这依赖于 K' 系的运动方向。

所以，根据参考空间 K 的物理性质，我们可以把它与那些相对它(静止以太)运动的参考空间区分开来。但是，所有的实验都表明，相对于作为参考系的地球，电磁现象和光学现象并没有受到地球平动速度的影响。这些实验中最为著名的就是迈克耳孙(Michelson)和莫雷(Morley)所做的那些实验(我假定大家已经了解它们了)。由此可见，对于电磁现象而言，狭义相对性原理的正确性也是毋庸置疑的。

另一方面，麦克斯韦—洛伦兹方程对于运动物体中光学问题的处理，也证明了它的正确性。没有其他的理论可以令人满意地解释光行差、运动物体中的光传播[菲佐(Fizeau)]以及在双星中观察到的现象[德西特(De Sitter)]。麦克斯韦—洛伦兹方程的一个推论是：我们必须认为至少是对于一个确定的惯性系 K，光在真空中以速度 c 传播这一假设是已被证实的。根据狭义相对性原理，我们还必须假定这一原理对于其他任意一个惯性系都成立。

在从这两条原理得出任何结论之前，我们必须首先回顾一下“时间”和“速度”这两个概念的物理意义。由前面的讨论可以知道，惯性系的坐标在物理上是通过用刚体来测量和构建而定义的。为了测量时间，我们需要假设一个时钟 U，它位于与 K 系相对静止的某个地方。但是，当事件与时钟之间的距离不可忽略时，我们就不能再用这个时钟来确定这个事件的时间了。因为我

们没有一种“瞬时信号”来比较钟的时间与事件的时间。为了完成对时间的定义，我们可以借助于光在真空中传播速度恒定这一原理。我们假定在 K 系的各个点上放置了与其相对静止的相同的时钟，并且都按照下面的方式进行了校准：某个时钟 U_m 在其指向时刻 t_m 时发出的一束光，在真空中传播了 r_{mn} 距离后到达了时钟 U_n，这时 U_n 的时间可以表示成为 $t_n = t_m + \frac{r_{mn}}{c}$ *。光速不变原理意味着，这种校准时钟的方法是不会引起矛盾的。利用以这种方式校准的时钟，我们可以确定在任何一个时钟附近发生的事件的时间。需要特别指出的是，因为我们利用了一系列相对于 K 静止的时钟，所以按照这种方法定义的时间只与惯性系 K 相关。根据这个定义，在相对论前物理学中所假定的时间的绝对性（即时间与惯性系的选择无关）也就不再成立了。

由于未加论证就把时间概念建立在光传播定律基础之上，从而使光传播在理论中处于中心地位，狭义相对论遭到了许多批评。然而，情况实际上大致是这样的：为了赋予时间概念以物理意义，我们需要某种能够在不同地点之间建立起联系的过程。至于为这样一种时间定

* 严格地讲，首先定义同时性会更为恰当一些。它的定义大致如下：对于发生在 K 系中的 A 点和 B 点的两个事件，如果从间隔 AB 的中点 M 进行观测时，它们看起来在同一时刻，那么这两个事件就是同时发生的。时间于是定义为相同时钟的读数的集合，这些时钟相对于 K 系静止，并且同时显示相同的时间。

义具体选择什么样的过程则并不重要。然而，选择那些我们已有所了解的过程显然对理论会更有益一些。由于麦克斯韦(Maxwell)和洛伦兹(H. A. Lorentz)的工作，我们对光在真空中传播过程的了解，比其他任何可以想到的过程都要清楚。

基于所有这些考察，空间和时间的数值不仅仅是主观构思出来的，它们还具有物理上真实的意义。这特别是对于所有含有坐标和时间的关系式[如(21)式]都成立。因而，有意义的问题是：这些方程是否真确呢？或者说，当我们从惯性系 K 变换到另一个相对它运动的惯性系 K' 时，所应遵循的真实变换方程是什么？接下来就会看到，这些问题可以被光速不变原理和狭义相对性原理唯一地解决。

为此，我们考虑在两个惯性系 K 和 K' 中，利用上面的方法从物理上定义的空间和时间。再进一步，令一束光线在 K 系中从点 P_1 经过真空传播到点 P_2。如果 r 为所测得的两点之间的距离，那么光线的传播必须满足方程

$$r = c \cdot \Delta t。$$

如果对方程两边进行平方，并且用坐标差 Δx_ν 来表示 r^2，我们就得到了替代原方程的方程

$$\sum (\Delta x_\nu)^2 - c^2 \Delta t^2 = 0。\tag{22}$$

这个方程所表达的是在坐标系 K 中的光速不变原理。不

论发出这束光的光源如何运动，这个方程都成立。

光的传播也同样可以在坐标系 K' 中考察，这时光速不变原理也必须得到满足。所以在 K' 系中，我们有方程

$$\sum(\Delta x'_\nu)^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0。 \tag{22a}$$

在从 K 系到 K' 系的变换下，方程(22)和(22a)必须彼此相洽。能达到这一要求的变换我们将称为“洛伦兹变换”(Lorentz transformation)。

在具体考察这些变换之前，我们先要对空间和时间做些一般性的评述。在相对论前物理学中，空间和时间是分离的客体(separate entities)。时间的确定与参考空间的选择无关。牛顿力学对于参考空间来说，是具有相对性的，因此，像“两个在同一地点非同时发生的事件”这样的陈述就没有客观意义(也就是说与参考空间无关)。但是这个相对性对于理论的建立没有起任何作用。人们谈论空间上的点和时间上的时刻，就好像它们是绝对的实在(absolute realities)。人们没有认识到确定时空(space-time)的真正元素是那些由 4 个数 x_1，x_2，x_3，t 所确定的事件。“某事件正在发生”这一概念总是四维连续统的概念；但是对于这一点的认识却被相对论前物理学中时间的绝对性所模糊了。当放弃了时间的绝对性，尤其是同时性的绝对性这一假设之后，就会立刻认识到时空概念(time-space concept)的四维性

(four-dimensionality)。某个事件发生的空间上的点和时间上的时刻都不具有物理实在，只有事件本身才具有物理实在。两个事件之间在空间上没有绝对（与参考空间的选择无关）的关系，在时间上也没有绝对的关系，但是却有绝对（与参考空间无关）的空间与时间关系，下面就会看到这点。没有任何客观合理的方法能够把四维连续统分离成三维空间连续统和一维时间连续统，因此从逻辑上讲，在四维时空连续统（space-time continuum）中表述自然定律会更令人满意。相对论在方法上的巨大进步正是建立在这个基础之上的，这种进步归功于闵可夫斯基。从这个观点上来考虑，我们必须把 x_1，x_2，x_3，t 看作是四维连续统中事件的四个坐标。我们对四维连续统中各种关系的想像，要远逊于对三维欧几里得连续统中各种关系的想像。但需要强调的是，甚至在三维欧几里得几何中，那些概念和关系在我们头脑中也是很抽象的，它们与我们通过视觉和触觉所感知到的印象完全不同。然而，四维事件连续统的不可分离性（non-divisibility）并不表示空间坐标与时间坐标是等价的。恰恰相反，我们必须牢记，物理上对时间坐标的定义完全不同于对空间坐标的定义。当令(22)式和(22a)式相等时，就定义了洛伦兹变换，这进一步表明了空间坐标与时间坐标所扮演的角色是不同的，因为 Δt^2 项的符号与空间项 Δx_1^2，Δx_2^2，Δx_3^2 的符号相反。

在进一步分析定义洛伦兹变换的条件之前，我们先要引入光时(light-time) $l = ct$ 来代替时间 t。这样，以后导出的公式中就不会显含常量 c。于是洛伦兹变换按照下述方式来定义：首先，在这个变换下方程

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 = 0 \tag{22b}$$

是协变的，也就是说，如果它在两个给定事件(发射和接受光束)所对应的惯性系里成立，那么它在任何一个惯性系里都成立。最后，根据闵可夫斯基的观点，我们引入虚的(imaginary)时间坐标

$$x_4 = \mathrm{i}l = \mathrm{i}ct \quad (\sqrt{-1} = \mathrm{i})$$

来代替实的(real)时间坐标 $l = ct$。这样，确定光传播的方程(它在洛伦兹变换下必须是协变的)就变为

$$\sum_{(4)} \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = 0。 \tag{22c}$$

如果

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 \tag{23}$$

在该变换下是不变量(这是一个更宽的条件)，那么前面的条件就总是可以满足*。这一条件只有当变换是线性变换时才能被满足，即变换应当有下述形式

$$x'_\mu = a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha , \tag{24}$$

* 到后面将会明白，这一特殊化乃是基于这种情况的性质。

其中对 α 的求和是从 $\alpha=1$ 到 $\alpha=4$。看一下(23)式和(24)式就会发现，如果不考虑维数和与实在的关系(relations of reality)，那么按照上面这种方式定义的洛伦兹变换与欧几里得几何中的平移转动变换是相同的。我们也可以推定系数 $b_{\mu\alpha}$ 必须满足条件

$$b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha}=\delta_{\mu\nu}=b_{\alpha\mu}b_{\alpha\nu}。\tag{25}$$

因为 x_ν 的比值都是实数，所以除了 a_4，b_{41}，b_{42}，b_{43}，b_{14}，b_{24} 和 b_{34} 是纯虚数以外，其他系数 a_μ 和 $b_{\mu\alpha}$ 都是实数。

特殊洛伦兹变换 如果只对两个坐标进行变换，并且所有的 a_μ(它们仅仅确定了新的坐标原点)都为 0，我们就得到(24)式和(25)式类型的最简单变换。对于指标 1 和 2，考虑到由关系式(25)所给出的三个独立条件，我们得到

$$\left.\begin{aligned}x_1'&=x_1\cos\phi-x_2\sin\phi\\x_2'&=x_1\sin\phi+x_2\cos\phi\\x_3'&=x_3\\x_4'&=x_4\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

这是(空间)坐标系在空间中绕 x_3 轴的一个简单转动。我们可以看出，以前所研究的空间转动变换(不含时间变换)只是作为一个特殊情况包含于洛伦兹变换之中。对于指标 1 和 4，按照类似的方法，我们得到

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\psi - x_4\sin\psi \\ x_4' &= x_1\sin\psi + x_4\cos\psi \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\} \tag{26a}$$

考虑到与实在的关系，ψ 必须是虚数。为了从物理上诠释这些方程，我们引入实光时（real light-time）l 和 K' 系相对于 K 系的运动速度 v 来代替虚数角（imaginary angle）ψ。首先会有

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\psi - \mathrm{i}\,l\sin\psi \\ l' &= -\mathrm{i}x_1\sin\psi + l\cos\psi. \end{aligned}$$

因为对于 K' 系的原点 $x_1'=0$，我们必须要有 $x_1 = vl$，所以根据第一个方程我们得到

$$v = \mathrm{i}\tan\psi \tag{27}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{-\mathrm{i}v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

由此我们得到

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vl}{\sqrt{1-v^2}} \\ l' &= \frac{l - vx_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

这些方程构成了著名的特殊洛伦兹变换，它在普遍的理论中表示四维坐标系中的转动，这一转动所转过的角度是虚的。如果用普通时间 t 来代替光时 l，那么在(29)式中就必须用 ct 代替 l，用 $\frac{v}{c}$ 代替 v。

现在，我们必须要补一个漏洞。根据光速不变原理可知，方程

$$\sum \Delta x_\nu^2 = 0$$

具有与惯性系的选择无关这一特征；但是由此却根本无法推断出量 $\sum \Delta x_\nu^2$ 的不变性。这个量在变换时，可能带有一个因子。这是因为(29)式的右边可以乘一个与 v 有关的因子 λ。但我们接下来要证明，狭义相对性原理不允许这一因子不为 1。假设有一个刚性圆柱体沿着它的轴向运动。如果在静止时，用单位长度量杆量得它的半径为 R_0，那么由于相对论并没有假定物体在某个参考空间中的形状与这个参考空间的运动状态无关，所以当这个刚性圆柱体运动时，它的半径 R 有可能与 R_0 不同。但是，参考空间中的所有方向都必须是等价的。所以 R 只能与速度的大小 q 有关，而与它的方向无关；由此可见，R 必须是 q 的偶函数。如果这个圆柱体在 K' 系中是静止的，那么它的底面方程就是

$$x'^2 + y'^2 = R_0^2。$$

如果我们把(29)式中最后两个方程写为更一般的形式：

$$x_2' = \lambda x_2,$$

$$x_3' = \lambda x_3,$$

那么在 K 系中，圆柱体的底面满足方程

$$x^2 + y^2 = \frac{R_0{}^2}{\lambda^2}。$$

于是因子 λ 表示了圆柱体的横向伸缩，而且根据前面的讨论，它只能是 v 的偶函数。

如果我们引入第三个坐标系 K''，使它沿 K 系中负 x 轴方向相对于 K' 以速度 v 运动，那么应用(29)式两次，我们得到：

$$x_1'' = \lambda(v)\lambda(-v)x_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$l'' = \lambda(v)\lambda(-v)l。$$

现在，由于 $\lambda(v)$ 必须等于 $\lambda(-v)$，而且由于我们假定在所有坐标系中都使用相同的量杆，所以从 K'' 系到 K 系的变换必定是恒等变换（因为无须考虑 $\lambda=-1$ 的可能性）。在前面的整个讨论中，我们都假定了量杆的行为(behaviour)与它以前的运动历史(history)无关，这一点至关重要。

运动的量杆与时钟 在确定的 K 系中时间 $t=0$ 时，由整数 $x_1' = n$ 所给出的点在 K 系中的坐标为

$x_1 = n\sqrt{1-v^2}$；这可由方程组(29)中的第一个方程得到，它表述了洛伦兹收缩(Lorentz contraction)。一个位于 K 系原点 $x_1=0$ 并静止的时钟，如果它的走速用 $l=n$ 刻划，那么当从 K' 系进行观察时，它的走速就变成了

$$l' = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}};$$

这可由方程组(29)中的第二个方程得到，它表明，时钟的走速比它在相对于坐标系 K' 静止时的走速要慢一些。上面的两个结果，酌情做一些细节上的修改之后，对于任何参考系都成立。这就是洛伦兹变换突破了陈规的物理内涵。

速度相加定理 如果把这两个相对速度分别是 v_1 和 v_2 的特殊洛伦兹变换合为一个变换，那么根据(27)式，代替两个分立变换的单个洛伦兹变换的速度是

$$\begin{aligned} v_{12} &= \mathrm{i}\tan(\psi_1+\psi_2) = \mathrm{i}\,\frac{\tan\psi_1+\tan\psi_2}{1-\tan\psi_1\tan\psi_2} \\ &= \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}。 \end{aligned} \tag{30}$$

洛伦兹变换及其不变量理论的一般陈述 整个狭义相对论的不变量理论都是建立在不变量 s^2[(23)式]上的。从形式上讲，s^2 在四维时空连续统中的地位与欧几里得几何和相对论前物理学中的不变量 $\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2$ 的地位相同。但是后者对于所有洛伦兹变换而言，

并不是不变量，而(23)式中的 s^2 才具有这种不变量的角色。 对于任意一个惯性系，都可以通过测量来确定 s^2，而且在测量单位给定时， s^2 是与任意两个事件相对应的一个完全确定的量。

不变量 s^2 除了在维数上与欧几里得几何中相应的不变量不同，还在以下几方面与之不同：在欧几里得几何中， s^2 必然为正。 只有当所涉及的两个点重合时，它才为零。 另一方面，由

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 \ ^*$$

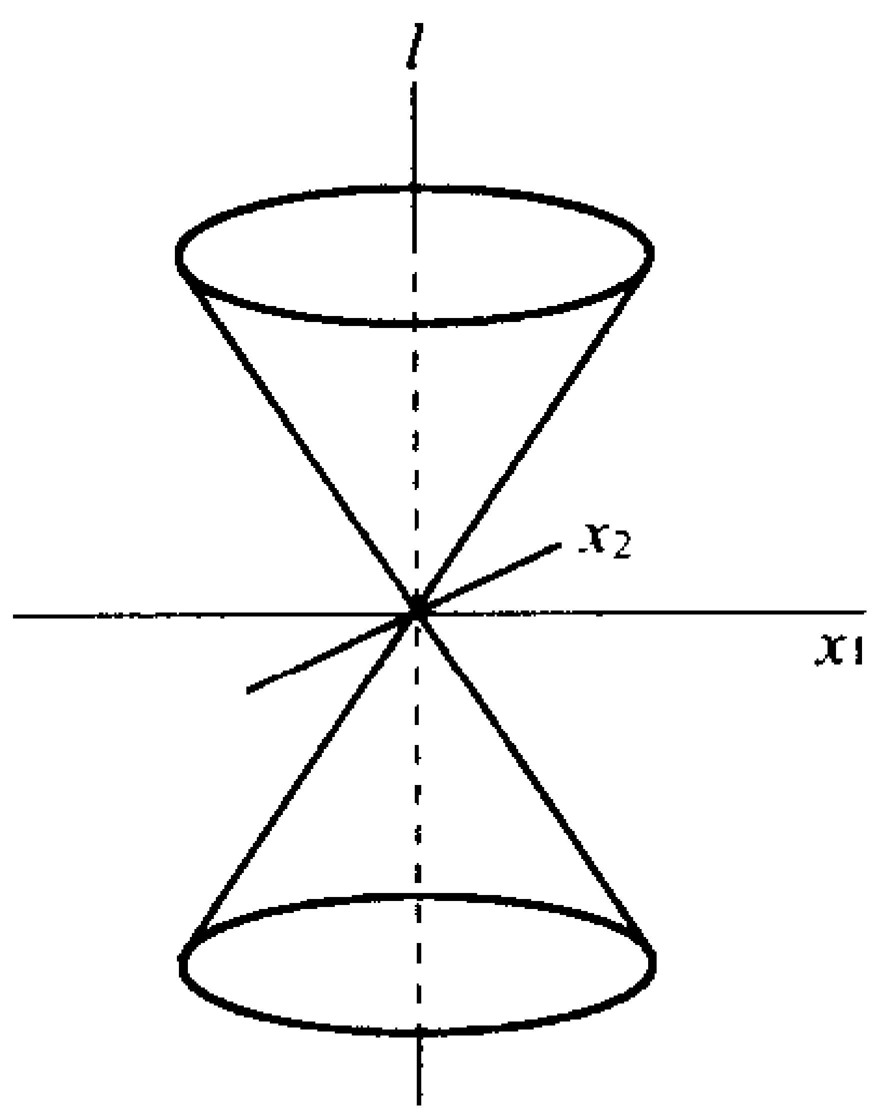


图 1

为零并不能推论出两个时空点(space-time points)重合。它只是一个不变量条件，该条件表明了两个时空点可以

* 原文 Δl^2 误为 Δt^2。 ——译者

通过真空中的光信号相联系。如果点 P 是 x_1，x_2，x_3，l 所张成的四维空间中的一个点(事件)，那么，所有可以通过光信号与 P 联系起来的“点”都位于光锥 $s^2=0$ 上(如图 1，图中略去了 x_3 轴)。光锥的“上”半部分包含的是那些光信号可以从点 P 传到它们的“点”，光锥的“下”半部分包含的是那些光信号可以由它们传到点 P 的“点”。被光锥面包围着的点 P' 可以与 P 构成一个负的 s^2，从而根据闵可夫斯基的观点，PP' 以及$P'P$都是类时的(time-like)。这些间隔代表那些可能的运动轨迹的元素，其运动速度小于光速*。在这种情况下，通过恰当选取惯性系的运动状态，可以使 l 轴沿着 PP' 的方向。如果 P' 位于“光锥”(light-cone)之外，那么 PP' 就是类空的(space-like)；此时，通过适当选取惯性系可以使Δl 为 0。

闵可夫斯基通过引入虚时间变量 $x_4=\mathrm{i}l$，使物理现象的四维连续统不变量理论与三维欧几里得空间连续统不变量理论完全相似。从而狭义相对论中的四维张量理论与欧几里得空间中三维张量理论的不同点仅仅在于维数以及与实在的关系。

如果一个物理实体，在 x_1，x_2，x_3，x_4 所张成的任意惯性系里，都由 4 个量 A_ν 来规定，而且 A_ν 在其与

---

* 由于在特殊洛伦兹变换(29)式中含有根号 $\sqrt{1-v^2}$ 项，所以超过光速的物质的运动速度是不可能的。

实在的关系及变换性质中都与 Δx_ν 相对应，那么这个物理实体叫作四维矢量(4-vector)，A_ν 是它的分量。 矢量可以是类空的，也可以是类时的。 由此推广，如果 16 个量 $A_{\mu\nu}$ 按照法则

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}$$

变换，那么它们就构成 2 秩张量的分量。 由此而得：$A_{\mu\nu}$ 的变换性质(properties of transformation)及其实在性质(properties of reality)与两个四维矢量(U)和(V)的分量 U_μ 和 V_ν 之积相同。 除了那些只含有一个指标为 4 的分量是虚数以外，其余的分量都是实数。 利用类似的方法，可以定义 3 秩或更高秩的张量。 这些张量的加、减、乘、缩并以及微分运算，都与三维空间中张量的相应运算类似。

在我们把张量理论运用到四维时空连续统之前，需要先着重研究一下斜称张量。 一般而言，2 秩张量有 $4 \cdot 4 = 16$ 个分量。 对于斜称张量，具有两个相同指标的分量为 0，而具有不同指标的张量则两两大小相等，符号相反。 因此，跟电磁场的情况一样，2 秩斜称张量只有 6 个独立分量。 实际上可以证明，如果我们把电磁场看作是斜称张量，那么麦克斯韦方程组就可以被看作是张量方程。 进一步，3 秩斜称张量(对于所有指标对都是斜称的)显然只有 4 个独立分量，因为 3 个不同的指标只有 4 种组合方式。

现在，我们转向麦克斯韦方程组(19a)，(19b)，(20a)，(20b)，并引入以下记法*：

$$\left.\begin{matrix} \phi_{23} & \phi_{31} & \phi_{12} & \phi_{14} & \phi_{24} & \phi_{34} \\ h_{23} & h_{31} & h_{12} & -ie_x & -ie_y & -ie_z \end{matrix}\right\} \tag{30a}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 & \mathcal{J}_4 \\ \frac{1}{c}i_x & \frac{1}{c}i_y & \frac{1}{c}i_z & i\rho \end{matrix}\right\} \tag{31}$$

且约定 $\phi_{\mu\nu}$ 等于 $-\phi_{\nu\mu}$。那么麦克斯韦方程组可以合并成如下的形式：

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathcal{J}_\mu \tag{32}$$

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0。 \tag{33}$$

将(30a)式和(31)式代入麦克斯韦方程组，就可以很容易得证。如果我们假设 $\phi_{\mu\nu}$ 和$\mathcal{J}_\mu dx$ 具有张量特性，那么方程(32)和方程(33)就具有张量特性，因此，它们在洛伦兹变换下是协变的。于是，这些量由一个可容许的(惯性)坐标系变换到另一个惯性系时所遵循的变换定律也就唯一地确定了。狭义相对论在方法上对电动力学(electro-dynamics)的改进主要就在于此：它使独立假设的数目减少了。例如，当我们只从方向相对性的观

---

* 为了避免混淆，今后我们用三维空间指标 x，y，z 来代替 1，2，3。我们将只把数字指标 1，2，3，4 用于四维时空连续统。

点来考察方程(19a)时(我们在前面正是这样做的),就会看到它有三个在逻辑上彼此独立的项。电场强度进入这些方程的方式与磁场强度进入方程的方式完全无关。如果把 $\frac{\partial e_\mu}{\partial l}$ 换成(比方说) $\frac{\partial^2 e_\mu}{\partial l^2}$,或者没有这一项,也并不令人惊奇。从另一方面来看,方程(32)中只有两个独立的项。电磁场呈现为形式单元(formal unit),电场进入方程的方式则必然要由磁场进入方程的方式所决定。除了电磁场以外,只有电流密度是作为独立的实体(independent entity)出现的。这种方法上的进步主要在于,通过运动的相对性(relativity of motion),电场和磁场不再是分离的存在(separate existences)。一个由某个惯性系来看完全是纯电场的场,如果从另一个惯性系来看,也具有磁场分量。对于特殊洛伦兹变换这种特别情形,在应用于电磁场时,变换的普遍规律给出如下方程:

$$\left.\begin{aligned} e'_x &= e_x & h'_x &= h_x \\ e'_y &= \frac{e_y - v h_z}{\sqrt{1-v^2}} & h'_y &= \frac{h_y + v e_z}{\sqrt{1-v^2}} \\ e'_z &= \frac{e_z + v h_y}{\sqrt{1-v^2}} & h'_z &= \frac{h_z - v e_y}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

如果对于 K 系只存在磁场 $\boldsymbol{h}$,而没有电场 $\boldsymbol{e}$,那么对于 K' 系,会存在电场 $\boldsymbol{e}'$,这个电场作用于相对 K' 系静止的荷电粒子上。这时,一个相对于 K 系静止的观

察者就会把这个力看作是毕奥—萨伐尔力(Biot-Savart force)或洛伦兹电动势(Lorentz electromotive force)。所以,这样看来似乎电动势与电场强度合并成单个实体(single entity)。

为了从形式上看出这一关系,我们来考察作用于单位体积电荷上的力的表达式:

$$\boldsymbol{k} = \rho \boldsymbol{e} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{h} \tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 是电荷的矢量速度(以光速为单位)。如果再根据(30a)式和(31)式引入$\mathcal{J}_\mu$和 ϕ_μ,那么我们得到的第一分量表达式为:

$$\phi_{12}\mathcal{J}_2 + \phi_{13}\mathcal{J}_3 + \phi_{14}\mathcal{J}_4\text{。}$$

考虑到张量(ϕ)的斜称性,所以 ϕ_{11} 为 0,从而 k 的分量由四维矢量

$$K_\mu = \phi_{\mu\nu}\mathcal{J}_\nu \tag{36}$$

的前三个分量给出,它的第四个分量则由

$$\begin{aligned} K_4 &= \phi_{41}\mathcal{J}_1 + \phi_{42}\mathcal{J}_2 + \phi_{43}\mathcal{J}_3 \\ &= \mathrm{i}(e_x i_x + e_y i_y + e_z i_z) = \mathrm{i}\lambda \end{aligned} \tag{37}$$

给出。因此,存在一个单位体积上的四维力矢量,它的前三个分量 k_1, k_2, k_3 是单位体积上有质动力(ponderomotive force)的分量,它的第四分量是单位体积的场的功率乘以 $\sqrt{-1}$。

比较(36)和(35)式,就会发现相对论从形式上统一

了电场的有质动力 ρe 和毕奥—萨伐尔力或洛伦兹力 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{h}$。

质量和能量 从四维矢量 K_μ 的存在及意义，可以得出一个重要的结论。我们设想电磁场在一个物体上作用了一段时间，如图 2 所示，Ox_1 是 x_1 轴，同时也代表了三个空间轴 Ox_1，Ox_2，Ox_3；Ol 代表实时间轴。在此图中，间隔 AB 表示在确定时间 l 时一个有限大小的物体；这个物体的整个时空存在则由一条带表示，这条带的边界相对于 l 轴的倾角处处都小于 45°。在时间段 $l = l_1$ 到 $l = l_2$ 之间(但不包括两端)的部分，我们用阴影表示。它表示有电磁场作用在物体上(或者说是作用于物体所包含的电荷上，然后这种作用再传递到物体上)时的那部分时空流形(space-time manifold)。接下来我们将考察由于这一作用而导致的动量和能量的改变。

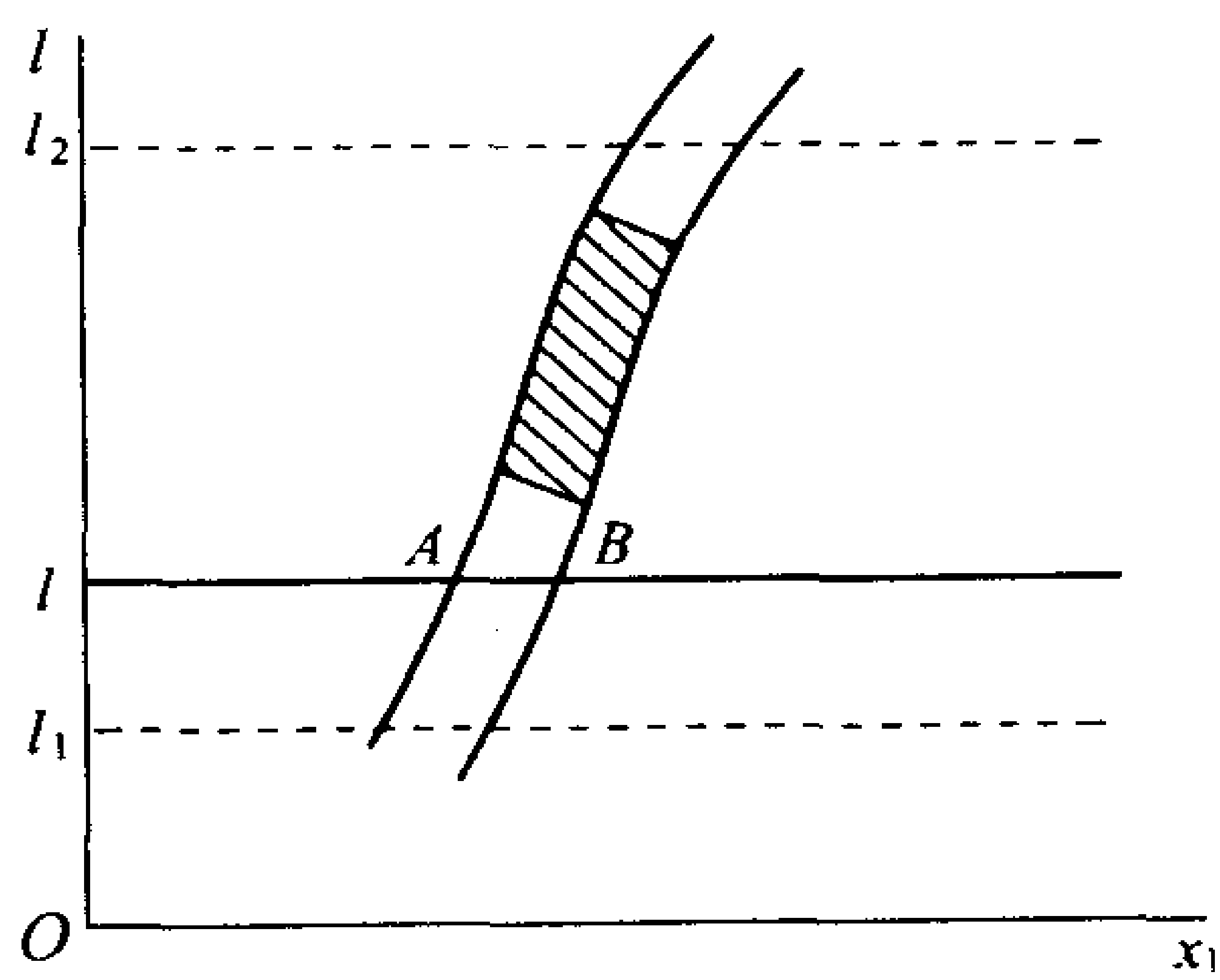


图 2

我们将假定动量能量原理(principles of momentum and energy)对于该物体成立。那么动量的改变 ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z 以及能量的改变 ΔE 由下面的表达式给出*:

$$\Delta I_x = \int_{l_1}^{l_2} \mathrm{d}l \int k_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}}\int K_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\Delta E = \int_{l_1}^{l_2} \mathrm{d}l \int \lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}}\int \frac{1}{\mathrm{i}} K_4 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 。$$

由于四维体积元是不变量,而且(K_1, K_2, K_3, K_4)构成四维矢量,所以在阴影部分上的四维积分以四维矢量的方式进行变换;鉴于作用在阴影区域之外(l_1 和 l_2 之间)的积分对于整个积分没有贡献,所以在极限 l_1 和 l_2 之间的积分也应如此。由此可见 ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, $\mathrm{i}\Delta E$ 构成四维矢量。因为可以认为一个量本身的变换方式与其增量的变换方式相同,所以我们推断 4 个量

$$I_x, \quad I_y, \quad I_z, \quad \mathrm{i}E$$

的集合本身就具有矢量特性。这些量表示这个物体的瞬时状况(例如在 $l = l_1$ 时)。

当把物体看作是质点时,也可以用它的质量 m 和速度来表示这个四维矢量。为了得到它的表达式,首先我

---

* 英文版公式中积分上下限误为 l_1 和 l_0。——译者

们注意到

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 &= -(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) - \mathrm{d}x_4^2 \\
&= \mathrm{d}l^2(1 - q^2)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

是不变量，它就是表示质点运动的四维线（four-dimensional line）的一段无穷小部分。不变量 $\mathrm{d}\tau$ 的物理意义很容易给出。如果把时间轴选择得与所考虑的微分线元方向相同，换言之就是把质点变换到静止，我们将有 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}l$，于是这可以通过与质点相对静止，并且处于同一地点的光秒钟（light-seconds clock）来测量。故我们把 τ 称为该质点的固有时（proper time）。因而 $\mathrm{d}\tau$ 与 $\mathrm{d}l$ 不同，它是不变量，当质点的运动速度比光速小得多时，它实际上与 $\mathrm{d}l$ 等价。所以我们看到

$$
u_\sigma = \frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}\tau}
\tag{39}
$$

如同 $\mathrm{d}x_\nu$ 一样，具有矢量特性；我们将把（u_σ）称为速度的四维矢量（简称四维矢量），根据（38）式可知，它的分量满足条件

$$
\sum u_\sigma^2 = -1。
\tag{40}
$$

在通常的记法中，此四维矢量的分量为：

$$
\frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}},\quad \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}},\quad \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}},\quad \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-q^2}}。
\tag{41}
$$

它是由在三维空间中定义的质点的速度分量

$$q_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l},\quad q_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l},\quad q_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$$

所能构成的唯一四维矢量。因此我们看到

$$\left(m\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{42}$$

必须是与动量能量四维矢量(我们前面证明了它的存在性)相等的四维矢量。令它们的分量相等，并采用三维记号，我们得到

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ E &= \frac{m}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

事实上我们认识到，当速度远小于光速时，这些动量的分量与经典力学中的一样。而速度很大时，动量的增加要比按照速度的线性关系增加得更快，以至于当速度趋近光速时，动量趋于无穷大。

如果我们把方程组(43)的最后一个方程运用到一个静止的质点上($q=0$)，就会发现一个静止物体的能量 E_0 等于它的质量。假如我们选择秒作为我们的时间单位*，就会得到

---

* 事实上，并非一定要选择秒作为时间单位来导出这个著名的爱因斯坦质能关系。依照第 34、35 页上的相关叙述，即可得到(44)式。——译者

$$E_0 = mc^2。 \tag{44}$$

由此可见，质量和能量在本质上是类同的（essentially alike）；它们只是同一事物的不同表达形式而已。物体的质量不是一个常量，它随着其能量的变化而变化*。由方程组(43)中的最后一个方程可以看出，当 q 趋于 1，即速度趋于光速时，E 变为无穷大。如果我们把 E 展开为 q^2 的级数，则有

$$E = m + \frac{m}{2}q^2 + \frac{3}{8}mq^4 + \cdots \tag{45}$$

这个展开式中的第二项对应于经典力学中质点的动能。

质点的运动方程 由方程组(43)，对时间 l 微分，并利用动量原理，我们将会得到（利用三维矢量记法）

$$\mathbf{K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{m\mathbf{q}}{\sqrt{1-q^2}}\right) \tag{46}$$

这个方程最初是由洛伦兹提出来描述电子运动的，它已经被 β 射线实验以高精度证实。

电磁场的能量张量 在相对论产生以前，已经知道电磁场的能量动量原理还可以用微分方式表述。此原理的四维表述产生了一个重要的概念——能量张量（energy tensor），它对于相对论的进一步发展非常重要。

---

* 放射过程中的能量释放显然与原子量不是整数这一事实有关。近几年来，由方程(44)所表达的静止质量与静止能量之间的等价性已在许多事例中得到证实。在放射性衰变中，衰变以后的质量之和总是小于未衰变原子的质量。其差异以新生成粒子的动能以及放出的辐射能形式出现。

如果在单位体积的力的四维矢量表达式

$$K_\mu = \phi_{\mu\nu}\mathscr{J}_\nu$$

中，我们利用场方程(32)，把$\mathscr{J}_\mu$写成场强$\phi_{\mu\nu}$的形式，那么经过一些变换，并且反复使用场方程(32)和(33)之后，就可以得到表达式

$$K_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \tag{47}$$

其中已令*

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\phi_{\alpha\beta}^2\delta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\alpha}\phi_{\nu\alpha}。 \tag{48}$$

如果我们采用一种新的记法来表述方程(47)，就会很容易看出它的物理意义：

$$\left.\begin{aligned}
k_x &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial(\mathrm{i}b_x)}{\partial(\mathrm{i}l)} \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
\mathrm{i}\lambda &= -\frac{\partial(\mathrm{i}s_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathrm{i}s_y)}{\partial y} \\
&\quad - \frac{\partial(\mathrm{i}s_z)}{\partial z} - \frac{\partial(-\eta)}{\partial(\mathrm{i}l)}
\end{aligned}\right\} \tag{47a}$$

去掉虚数后，可以写作：

---

* 按指标α和β求和。

$$\left.\begin{aligned}
k_x &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial b_x}{\partial l} \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
\lambda &= -\frac{\partial s_x}{\partial x} - \frac{\partial s_y}{\partial y} - \frac{\partial s_z}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial l}
\end{aligned}\right\} \quad (47b)$$

当写成后一种形式时，我们看到前三个方程表述的是动量原理，其中 $p_{xx}\cdots\cdots p_{zx}$ 是电磁场的麦克斯韦应力(Maxwell stresses)，(b_x， b_y， b_z)是场的单位体积的矢量动量；(47b)中的最后一个方程表述的是能量原理，**s** 是能量矢量流，η 是场的单位体积能量。 实际上，通过引入场强的实分量，我们由(48)式得到如下在电动力学中所熟知的表达式：

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= -h_x h_x + \frac{1}{2}(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) \\
&\qquad - e_x e_x + \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) \\
p_{xy} &= -h_x h_y - e_x e_y \\
p_{xz} &= -h_x h_z - e_x e_z \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
b_x &= s_x = e_y h_z - e_z h_y \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
\eta &= +\frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)
\end{aligned}\right\} \quad (48a)$$

从(48)式我们注意到，电磁场的能量张量是对称张量；与此相联系，单位体积的动量与能量流彼此相等(能量与惯性的关系)。

因此，通过上面这些考察，我们得出结论：单位体积的能量具有张量特性。我们只是对电磁场直接地证明了这一点，尽管我们可以宣称它普遍成立。如果已知电荷和电流的分布，那么麦克斯韦方程组就确定了相应的电磁场。但是我们不知道那些支配电荷以及电流分布的定律。尽管我们确实知道电是由基本粒子(电子、带正电的原子核)构成的，但是从理论的角度上我们无法理解它。我们不清楚在大小及电荷数都确定的粒子中决定电荷分布的能量因素，而且所有意在完成这一方向的理论尝试都没有成功。如果说利用麦克斯韦方程组可以做什么的话，我们也只能确定带电粒子以外的电磁场的能量张量*。只有在带电粒子以外的这些区域，我们才能确信有完整的能量张量表达式。利用(47)式，我们有

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0。\tag{47c}$$

守恒原理的一般表述 在所有其他情况下，我们几乎都无法避免作出以下假定：能量的空间分布是由对称

* 人们曾试图通过假定带电粒子都是本征奇点(proper singularities)来弥补这种认识上的不足。但我认为，这样做意味着我们放弃真正理解物质的结构。对我而言，与其仅仅满足于一种表面上的解决，远不如承认我们目前对此无能为力要好得多。

张量 $T_{\mu\nu}$ 来描述的，这个总能量张量处处满足(47c)式。我们将会看到，在任何情况下，利用这个假定，都可以得到积分能量原理(integral energy principle)的正确表述。

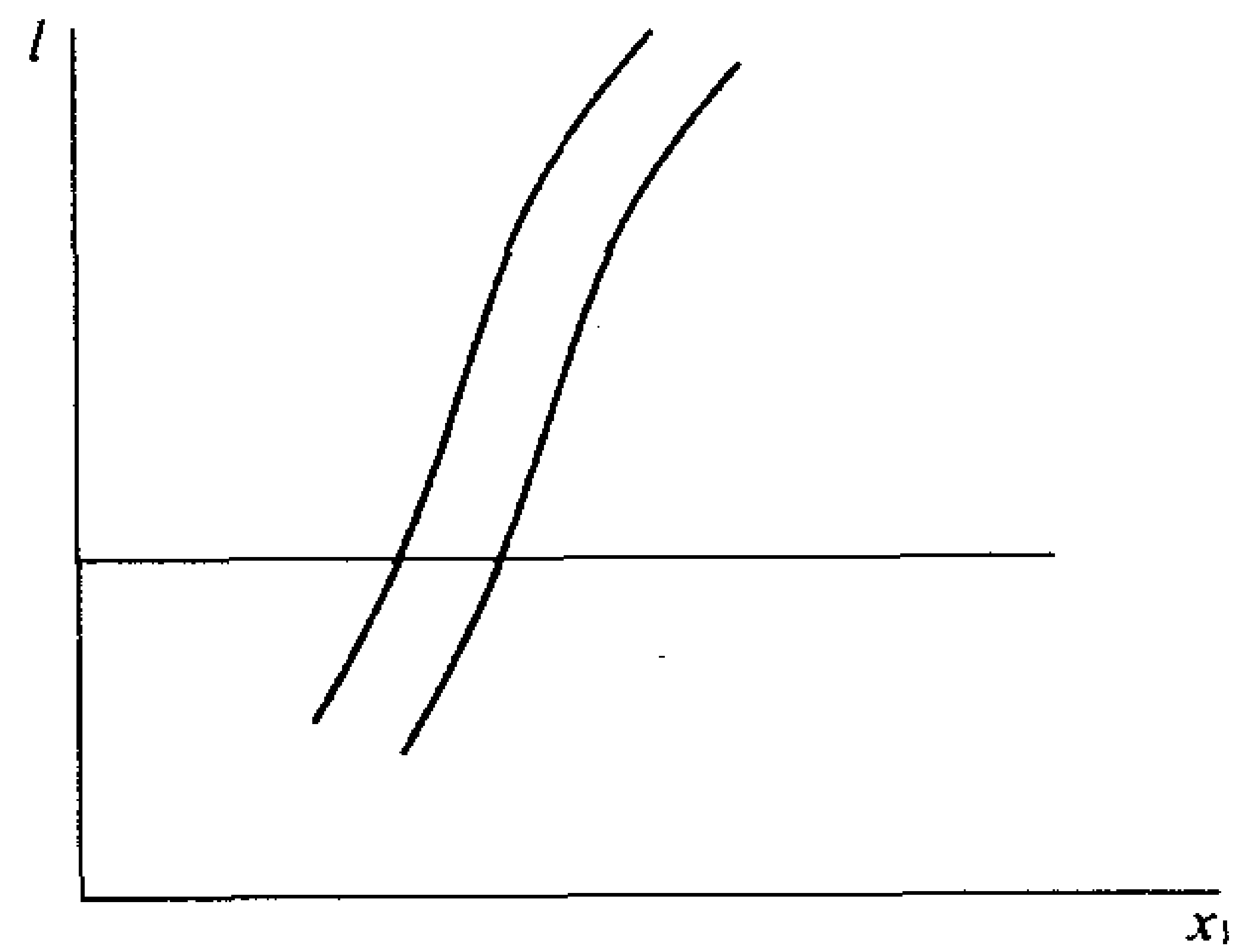


图 3

我们来考察一个封闭系统，它在空间上有界，可以表示成为一条四维的带子，在其外 $T_{\mu\nu}$ 为 0。把方程(47c)在一段空间上进行积分。因 $T_{\mu\nu}$ 在积分限处为 0，故 $\frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x_1}$，$\frac{\partial T_{\mu 2}}{\partial x_2}$ 和 $\frac{\partial T_{\mu 3}}{\partial x_3}$ 的积分皆为 0，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial l}\left\{\int T_{\mu 4}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\right\}=0。\tag{49}$$

在大括号里面，是整个系统的动量与虚数 i 的积，以及系统的负能量(negative energy)，因此(49)式是积分形式的守恒原理。它给出了正确的能量概念。通过下面的考

察，我们将看出这一守恒原理。

物质的能量张量的唯象表示

流体动力学方程 我们知道物质是由带电粒子构成的，但是我们不知道支配这些粒子分布的定律。所以在处理力学问题时，我们不得不采用一种不太精确的方法来描述物质(它与经典力学中的情况相对应)。这种描述方法乃建立在物质密度 σ 和流体动压强(hydrodynamical pressures)这两个基本概念之上。

令 σ_0 为某处的物质密度，它是在一个与物质一起运动的参考系中被估量的。因此静止密度 σ_0 是不变量。如果我们考虑以任意方式运动的物质，并且忽略其压强(比如，忽略了大小和温度的真空中的尘埃粒子)，那么能量张量就只与速度的分量 u_ν 和 σ_0 有关。我们取

$$T_{\mu\nu} = \sigma_0 u_\mu u_\nu \tag{50}$$

以确保 $T_{\mu\nu}$ 的张量特性，其中 u_μ 在三维表示中由(41)式给出。实际上，根据(50)式，当 $q = 0$ 时，$T_{44} = -\sigma_0$ (等于单位体积的负能量)，而根据质能等效原理(principle of the equivalence of mass and energy)以及前面对能量张量的物理解释，它也正应当如此。如果有外力(四维矢量 K_μ)作用在该物质上，那么根据动量能量原理，方程

$$K_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

必成立。我们将会表明，从这个方程也可以导出前面已经得到的质点运动定律。设想物质在空间中的体积无穷小，即该物质是一条四维丝线(thread)，如果在整条丝线上对空间坐标 x_1，x_2，x_3 进行积分，我们得到

$$\int K_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = \int \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$
$$= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left\{\int \sigma_0 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\right\}。$$

既然 $\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4$ 是一个不变量，因此，$\int \sigma_0 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4$ 也是不变量。我们将首先在已选定的惯性系中计算这个积分，然后再在与物质相对静止的惯性系里计算这个积分。积分将沿着丝线上的一根纤维(filament)进行，在这根纤维上，σ_0 可以在整个截面上被看作常数。如果这条纤维在上面两个惯性系中的空间体积分别是 $\mathrm{d}V$ 和 $\mathrm{d}V_0$，我们就有

$$\int \sigma_0 \mathrm{d}V \mathrm{d}l = \int \sigma_0 \mathrm{d}V_0 \mathrm{d}\tau,$$

因此，也就会有

$$\int \sigma_0 \mathrm{d}V = \int \sigma_0 \mathrm{d}V_0 \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l} = \int \mathrm{d}m\,\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x_4}。$$

如果用上式右边的那一项代替前一个积分中的左边项，并且把 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau}$ 提到积分号外面，就得到

$$K_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(m\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}\right)。$$

由此可以看出，推广了的能量张量概念与我们前面得到的结果是一致的。

理想流体的欧拉方程 为了能更接近真实物质的行为，我们必须在能量张量的表达式中添加一个对应于压强的项。最简单的情况就是理想流体的情况，它的压强是由标量 p 来决定的。对于理想流体，因为其切向应力 p_{xy} 等都为 0，所以压强对能量张量的贡献必须是以 $p\delta_{\nu\mu}$ 的形式出现，故此，我们要令

$$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu + p\delta_{\mu\nu}。\tag{51}$$

在静止时，物质的密度（或单位体积的能量）在这种情形里不是 σ，而是 $\sigma - p$。这是因为

$$-T_{44} = -\sigma\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau} - p\delta_{44} = \sigma - p$$

的缘故。当没有任何力时，我们有

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma u_\nu\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + u_\mu\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0。$$

如果用 $u_\mu\left(=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$ 去乘这个方程，并对 μ 指标求和，再利用(40)式，我们得到

$$-\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = 0。\tag{52}$$

其中，我们已经令 $\frac{\partial p}{\partial x_\mu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}$。这个公式就是连续性方程(equation of continuity)，它与经典力学中连续性方程的不同之处在于多了 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}$ 项，实际上，这一项小到接近于零。观察(52)式，我们发现守恒原理可以写成如下形式：

$$\sigma\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}+u_\mu\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial p}{\partial x_\mu}=0。\tag{53}$$

很显然，对于前三个指标，这个方程对应于欧拉方程(Eulerian equations)。方程(52)和(53)在一阶近似下对应于经典力学中的流体力学方程，这进一步证实了推广的能量原理。物质密度(或能量密度)具有张量特性(具体来说，它构成了一个对称张量)。

广义相对论

前面全部的考察都建立在如下假设之上：所有惯性系对于描述物理现象都是等效的，而且在表述自然定律时，惯性系要优于其他具有不同运动状态的参考空间。根据我们先前的考察，我们可以设想不论是对于那些可以感知的物体还是对于运动这个概念来说，某些确定运动状态优于其他所有的运动状态，是毫无理由的；相反，这必须被视为时空连续统的一个独立特性。特别是惯性原理(principle of inertia)，它似乎迫使我们把物理上客观的性质归结于时空连续统。正如从牛顿学说的观点看来，下面两个陈述是相容的：*tempus est absolutum*，*spatium est absolutum*(时间是绝对的，空间是绝对的)。而从狭义相对论的观点来看，我们应当这样说：*continuum spatii et temporis est absolutum*(时空连续统是绝对的)。在后一陈述中，*absolutum*(绝对的)并不仅仅是指“物理上真实”，它还指“物理性质上的独立性，即尽管它有物理效应，但是它本身并不受物理条件的影响”。

既然惯性原理被视为物理学的奠基石，上述观点当然也就是唯一被公认正确的观点了。但这个普通的概念还是遭到了两个方面的严厉批评。首先，设想一种自己能发生作用，但不能承受作用的东西(时空连续统)是不符合科学思维模式的。这乃是使得马赫(E. Mach)试图取消空间在力学系统中作为主动原因(active cause)的地位的原因。马赫认为，质点并不是相对于空间在做无加速运动，而是相对于宇宙中所有其他质量的中心在做无加速运动。与牛顿和伽利略(Galileo)的力学相比，按照这种方法，力学现象的一系列原因是闭合的。为了能够在通过介质传递作用的现代理论范围内发展这种思想，必须把那些决定惯性的时空连续统的性质看作是空间的场性质(与电磁场类似)。经典力学的概念无从表达这一点。由于这个原因，马赫寻求解决方案的企图暂时失败了。后面我们将再次回到这个观点。其次，经典力学还有一个不足之处，它直接要求我们把相对性原理推广到相互间作非匀速运动的参考空间中去。在经典力学中，两个物体的质量比是按照两种本质上不同的方式来定义的：按照第一种方式，质量比被定义为物体在相同动力作用下的加速度之比的倒数(惯性质量)；按照第二种方式，质量比被定义为在同一引力场中作用于其上的引力之比(引力质量)。这两种按照如此不同的方式定义的质量的相等，已经被高精度的实验[厄缶(Eötvös)实验]所证实，而经典力学却无法对这种相等做出解释。不

过很显然，只有在将这种数值相等化为这两个概念真正性质的相等之后，我们才能够从科学上讲这种数值相等是正确的。

根据下面的考察可知，通过对相对性原理进行推广，我们实际上就可以达到上述目的。稍加思考就会发现，惯性质量与引力质量相等这一定理等价于以下陈述：物体在引力场作用下所产生的加速度与物体的性质无关。因为在引力场中，牛顿方程的完整表述为：

（惯性质量）·（加速度）=（引力场强度）·（引力质量）。

只有当惯性质量与引力质量在数值上相等时，加速度才与物体的性质无关。现在令 K 系为惯性系。于是在 K 系中彼此之间相距很远而且和其他物体也相距很远的质量，是没有加速度的。我们再从一个相对于 K 系做匀加速运动的 K' 坐标系中看这些质量。所有质量都有相对于 K' 系的相等且平行的加速度。相对于 K' 系，这些质量的行为就如同在 K' 系中存在一个引力场而 K' 系并没有加速度一样。此时，如果暂且不考虑这种引力场的“原因”之类的问题（后面我们将会面临这个问题），那么我们完全可以认为这个引力场是实在的，也就是说，我们可以认为，K' 系“静止”并且引力场存在的想法，等效于认为只有 K 系是“可容许的”坐标系而并不存在引力场。我们把坐标系 K 和 K' 在物理上完全等效这个假设称为“等效原理”（principle of equivalence）。显然，等

效原理与惯性质量等价于引力质量这个定律是密切相关的，而且它把相对性原理推广到了彼此做非匀速运动的坐标系。实际上，正是通过这一概念，我们实现了惯性与引力本质的统一。同一质量，由于我们看它的方式不同，它既可以是只在惯性作用下运动（相对于 K 系），也可以是在惯性和引力的共同作用下运动（相对于 K' 系）。通过惯性与引力本质的统一来解释惯性质量与引力质量在数值上的相等，这种可能性使广义相对论与经典力学的概念相比有了如此之大的优越性，我深信与这一进步相比，所遇到的所有困难都是微不足道的。

惯性系比所有其他的坐标系都优越，这种优越性似乎是由经验非常牢固地建立起来的，我们有什么合理的理由来丢弃这一优越性呢？惯性原理的弱点在于它引入了一个循环论证：如果一个物体距离其他物体足够远，那么它将做无加速运动；而只有通过该物体做无加速运动，我们才能认定它离其他物体足够远。对于大范围的时空连续统（或者实际上整个宇宙）而言，究竟是否存在着惯性系呢？如果忽略太阳和其他行星的摄动，在很高的近似度下，可以认为在我们的行星系空间中，惯性原理是成立的。更准确地讲，存在有限的区域，相对于适当选取的参考空间，质点在其中做无加速度自由运动，而且我们前面所建立的狭义相对论的定律也在其中极为精确地成立。我们将这些区域称为“伽利略区域”（Galilean regions）。我们将把这些区域的性

质看作是已知性质的特殊情况，并在这个基础上继续我们的讨论。

等效原理使我们在处理伽利略区域时，同样也可以使用非惯性系，即那些相对于惯性系有加速度和转动的坐标系。进一步而言，如果我们完全不考虑某些坐标系具有优先地位的客观原因这种麻烦的问题，那么应当允许使用任意运动的坐标系。只要我们认真进行这种尝试，就会发现它与狭义相对论对空间与时间的物理诠释之间的矛盾。因为如果令 K' 系的 z' 轴与 K 系的 z 轴相重合，并且使 K' 系绕着该轴以恒定的角速度旋转，那么在 K' 系中静止的刚体的位形还符合欧几里得几何定律吗？由于 K' 系不是惯性系，所以我们无法直接知道支配 K' 系中刚体位形的定律，总的说来，也无法直接知道自然定律。但是我们确实知道这些定律在惯性系 K 中的形式，因而我们也可以推断出它们在 K' 系中的形式。设想在 K' 系的 $x'y'$ 平面上以原点为圆心画一个圆，并且画出圆的一条直径。再设想我们有许多彼此相等的刚性量杆。现在我们把它们分别沿着圆周和直径摆放好，与 K' 系相对静止。如果 U 是沿着圆周摆放的量杆数目，而 D 为沿着直径摆放的量杆数目，那么，当 K' 系不相对于 K 系旋转时，应当有

$$U/D = \pi。$$

但如果 K' 系有旋转，我们得到不同结果。假定在 K 系

的某一确定时刻 t，我们确定了所有量杆的端点。相对于 K 系而言，所有沿着圆周摆放的量杆都会有洛伦兹收缩，而沿着直径摆放的量杆则未体验(沿着其长度方向上!)这种收缩*，所以有

$$U/D > \pi。$$

可见，在 K' 系中，刚体位形的定律不符合遵循欧几里得几何学的刚体位形定律。进一步来说，如果把两个相同的时钟(与 K' 系一起转动)，一个放在圆周，另一个放在圆心，那么从 K 系来看，放在圆周上的时钟将比放在圆心的时钟走得慢。如果我们不以一种极其不自然的方式定义相对于 K' 系的时间(也就是说，如果按照这种方式来定义时间，那么将会使 K' 系中的运动方程显含时间)，那么从 K' 系中看来，同样的情况必然发生。因此，对于 K' 系，不能像在狭义相对论中对惯性系那样去定义空间和时间。但是根据等效原理，可以认为 K' 系相对于一个其内有引力场[离心力和科里奥利力(force of Coriolis)的场]的参考系静止。由此，我们得到以下结果：引力场会影响，乃至会决定时空连续统的度规定律(metrical laws)。如果要将理想刚体位形的定律进行几何表述，那么在引力场存在时这种几何不是欧几里得几何。

---

* 这些考察实际上都假设了量杆和时钟的行为都只与速度有关，而与加速度无关，或者至少是加速度对它们的影响不会抵消速度对它们的影响。

我们这里所考察的情况与曲面的二维描述中存在的情况相类似。在后面这种情况，我们同样不可能在曲面上(例如椭球面)引入一个具有简单的度规关系的坐标系，而在平面上，笛卡儿坐标 x_1，x_2 就能够直接表示出可用单位量杆测量的长度。高斯(Gauss)在他的曲面理论中，通过引入曲线坐标而克服了这个困难。这些曲线坐标除了满足连续性条件以外，完全是任意的，只有在后来它才与曲面的度规性质联系起来。我们将用类似的方法在广义相对论中引入任意的坐标 x_1，x_2，x_3，x_4，它们的数值唯一地标记时空点，从而使相邻事件与相邻的坐标值联系起来，除此之外，坐标的选择则是任意的。如果我们要求定律在每个这种四维坐标系中都成立，即如果表述定律的方程对于任意的变换都是协变的，那么我们就在最普遍的意义上遵循了相对性原理。

高斯的曲面理论与广义相对论间最重要的交汇点在于它们的度规性质，这两种理论中的概念主要都建立在其基础之上。在曲面理论中，高斯的论点如下：两个无限接近的点之间的距离 ds，可以作为平面几何的基础。由于距离可以通过刚性量杆测量，因此它具有物理意义。通过适当选取笛卡儿坐标系，这个距离可以表示成公式 $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$。在这个量的基础上，我们可以把直线的概念理解为测地线 ($\delta\int ds = 0$)，进而有了间隔、圆以及角度等概念，欧几里得平面几何乃建立在这些概念

的基础上。如果我们注意到曲面上的一块无穷小区域可以在相对无穷小量的程度上被看作平面，那么也可以在其他连续曲面上建立一种几何学。在曲面的这个无穷小区域里，可以取笛卡儿坐标 X_1 和 X_2，两点之间（由量杆测量）的距离为

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2。$$

如果在曲面上引入任意曲面坐标 x_1，x_2，则 dX_1，dX_2 可以由 dx_1，dx_2 线性地表示。那么在曲面上处处都有

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2，^*$$

其中 g_{11}，g_{12}，g_{22} 由曲面的性质和坐标系的选择所决定。如果知道了这些量，我们也就知道了如何用由量杆构成的网络来覆盖曲面了。换言之，曲面几何也可以建立在 ds^2 的这个表达式之上，正如平面几何基于相应表达式一样。

在物理学的四维时空连续统里，也存在类似的关系。对于一个在引力场中自由下落的观察者，他的邻近区域里不存在引力场。因此，我们总是可以把时空连续统的一个无穷小区域看成是伽利略区域。对于这个无穷小区域，存在一个惯性系（它的空间坐标为 X_1，X_2，X_3，时间坐标为 X_4）。在这个惯性系里，我们认为狭义相对论的定律成立。如果我们使用放在一起比较时彼此

---

* 原文此公式中等号误排成加号。——译者

长度相同的量杆，以及放在一起比较时彼此走速一样的时钟，那么由这种单位量杆及时钟直接测量所得的量

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2$$

或其负值

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{54}$$

对于两个相邻事件(四维连续统中的两个相邻点)而言就是唯一确定的不变量。在这里，有一个物理假设非常重要：两个量杆的相对长度以及两个时钟的相对走速，原则上与它们先前的历史无关。当然，这个假设是符合经验的。如果该假设不成立，人们就不会观察到明锐的光谱线，因为同一种元素的不同原子显然有不同的历史，而且如果单个原子的相对可变性与它们先前的历史有关，那么认为这些原子的质量或本征频率竟然彼此相等将是荒谬的。

总的来说，有限范围的时空区域不是伽利略区域，因此在有限的区域里不能通过坐标系的选取来消除引力场。所以，在有限的区域里，不存在使狭义相对论度规关系在其中成立的坐标系选择。但对于连续统中的两个相邻点(事件)，不变量 ds 总是存在，这个不变量 ds 可以用任意坐标来表示。如果注意到局域的 dX_ν 可以由坐标微分 dx_ν 线性表示，那么 ds^2 可以表示成

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu 。 \tag{55}$$

函数 $g_{\mu\nu}$ 描述的是在任意选择的坐标系中，时空连续统以及引力场的度规关系。与在狭义相对论中一样，我们必须区分四维连续统中的类时线元和类空线元。由于引入符号的变化，所以类时线元 $\mathrm{d}s$ 是实数，而类空线元 $\mathrm{d}s$ 则是虚数。对于类时的 $\mathrm{d}s$，可以通过适当地选择时钟来直接测量。

根据前面的讨论，很显然，如果要表述广义相对论，就需要对不变量理论以及张量理论加以推广。这产生了一个问题，即要求方程的形式必须对于任意的点变换都是协变的。在相对论产生以前很久，数学家们就已经建立了推广的张量演算理论。黎曼(Riemann)首先把高斯的思路推广到了任意维连续统，他很有预见性地看到了对欧几里得几何进行这种推广的物理意义。随后，这个理论以张量微积分的形式得到了发展，对此里奇(Ricci)和莱维-齐维塔(Levi-Civita)做出了重要的贡献。现在，我们应当对这种张量微积分的一些最为重要的数学概念以及运算做一个简要的介绍了。

如果有四个量，它们在每个坐标系里都是坐标 x_ν 的函数，当坐标进行变换时，如果它们的变换性质与坐标微分 $\mathrm{d}x_\nu$ 的变换性质相同，就将它们称为反变(contravariant)矢量的分量 A^ν。从而我们有

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A^\nu 。 \tag{56}$$

除了这些反变矢量外，还有协变(co-variant)矢量。如果 B_ν 是协变矢量的分量，那么这些矢量将按照规则

$$B'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} B_\nu \tag{57}$$

变换。选择这样定义协变矢量，为的是当把它与反变矢量放在一起时，可以按照公式

$$\phi = B_\nu A^\nu \quad (\text{对指标 } \nu \text{ 求和})$$

构成标量。这是因为有

$$B'_\mu A^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha。$$

特别地，标量 ϕ 的导数 $\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}$ 是协变矢量的分量，它们与坐标微分构成标量 $\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \mathrm{d}x_\alpha$。由这个例子可以看出，协变矢量的定义是非常自然的。

这里还存在任意秩的张量，它们对于每个指标可以有协变或反变特性，与矢量一样，此特性也由指标的位置来表示。例如，A_μ^ν 表示的是一个 2 秩张量，它对于指标 μ 是协变的，对于指标 ν 是反变的。张量特性表明，变换方程为

$$A_\mu^{\nu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A_\alpha^\beta。 \tag{58}$$

与在线性正交代换的不变量理论中一样，也可以通

过利用秩数相同且张量特性相同的张量相加或者相减，来构造张量，例如

$$A_{\mu}^{\nu} + B_{\mu}^{\nu} = C_{\mu}^{\nu}。 \tag{59}$$

C_{μ}^{ν} 的张量特性可以直接利用(58)式来证明。

正如在线性正交变换的不变量理论中一样，利用乘法，并保留指标的特性，也可以构造张量，如

$$A_{\mu}^{\nu} B_{\sigma\tau} = C_{\mu\sigma\tau}^{\nu}。 \tag{60}$$

证明直接得自变换规则。

通过缩并两个不同特性的指标，也可以形成张量，例如

$$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu} = B_{\sigma\tau}。 \tag{61}$$

$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu}$的张量特性决定 $B_{\sigma\tau}$的张量特性。证明：

$$\begin{aligned} A_{\mu\sigma\tau}^{\mu'} &= \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x_{s}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{t}}{\partial x'_{\tau}} A_{\alpha st}^{\beta} \\ &= \frac{\partial x_{s}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{t}}{\partial x'_{\tau}} A_{\alpha st}^{\alpha}。 \end{aligned}$$

张量的对称性与斜称性(相对于相同特性的指标而言)与在狭义相对论中的一样，也有着同样的意义。

至此，有关张量代数性质的所有基本内容都已叙述过了。

基本张量 根据 ds^2 对于任意选择的 dx_{ν} 都是不变量，再考虑到与(55)式相一致的对称性条件，可以知道 $g_{\mu\nu}$是对称协变张量(基本张量)的分量。构造 $g_{\mu\nu}$的行列

式 g，以及不同的 $g_{\mu\nu}$ 对应的余子式，并除以 g。把这些除以 g 以后的余因子记作 $g^{\mu\nu}$，但是现在还并不知道它的协变特性。这样就有

$$g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=\delta_\alpha^\beta=\begin{cases}1 & \text{如果 } \alpha=\beta\\ 0 & \text{如果 } \alpha\neq\beta\end{cases}\tag{62}$$

如果我们构造一个无穷小量（协变矢量）

$$\mathrm{d}\xi_\mu=g_{\mu\alpha}\mathrm{d}x_\alpha,\tag{63}$$

然后乘以 $g^{\mu\beta}$，并对 μ 指标求和，那么利用(62)式我们得到

$$\mathrm{d}x_\beta=g^{\beta\mu}\mathrm{d}\xi_\mu.\tag{64}$$

因为这些 $\mathrm{d}\xi_\mu$ 之比是任意的，而且 $\mathrm{d}x_\beta$ 和 $\mathrm{d}\xi_\mu$ 都是矢量的分量，所以 $g^{\mu\nu}$ 是反变张量（反变基本张量）的分量*。通过(62)式，也相应可以得到 δ_α^β（混合基本张量）的张量特性。利用基本张量，我们可以引入具有反变指标特性的张量来代替具有协变指标特性的张量，反之亦然。例如：

---

* 如果我们用 $\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$ 乘以(64)式，并对 β 指标求和，然后用一个到带撇的坐标系的变换来替换 $\mathrm{d}\xi_\mu$，则可以得到

$$\mathrm{d}x'_\alpha=\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}g^{\mu\beta}\mathrm{d}\xi'_\sigma.$$

上面的陈述乃基于以下原因：由(64)式我们也必须有 $\mathrm{d}x'_\alpha=g^{\sigma\alpha'}\mathrm{d}\xi'_\sigma$，而且两个方程必须对于每一个 $\mathrm{d}\xi'_\sigma$ 的选择都成立。

$$A^{\mu}=g^{\mu\alpha}A_{\alpha}$$

$$A_{\mu}=g_{\mu\alpha}A^{\alpha}$$

$$T_{\mu}^{\sigma}=g^{\sigma\nu}T_{\mu\nu}\text{。}$$

体积不变量 体积元

$$\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4=\mathrm{d}x$$

不是不变量。因为根据雅可比定理，

$$\mathrm{d}x'=\left|\frac{\mathrm{d}x'_{\mu}}{\mathrm{d}x_{\nu}}\right|\mathrm{d}x\text{。}\tag{65}$$

但是我们可以为 $\mathrm{d}x$ 补充一些东西，从而使它成为不变量。如果我们构造量

$$g'_{\mu\nu}=\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}}\frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}g_{\alpha\beta}$$

的行列式，那么两次利用行列式的乘法定理，可以得到

$$g'=|g'_{\mu\nu}|=\left|\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}}\right|^{2}\cdot|g_{\mu\nu}|=\left|\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\right|^{-2}g\text{。}$$

从而得到不变量

$$\sqrt{g'}\,\mathrm{d}x'=\sqrt{g}\,\mathrm{d}x\text{。}$$

通过微分构造张量 尽管前面已经证明，形成张量的代数运算与线性正交变换下不变量理论的特殊情况是同样简单的，但不幸的是，在普遍情况下，不变量的微分

运算比特殊情况复杂得多。原因如下：如果 A^μ 是反变矢量，那么只有当变换是线性变换时，其变换系数 $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ 才与位置无关。于是在邻近点处的矢量分量 $A^\mu + \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha}dx_\alpha$ 以与 A^μ 同样的方式变换，这表明矢量的微分具有矢量特性，而 $\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha}$ 具有张量特性。但如果 $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ 是变量，那么上述结论不再成立。

在普遍情况下仍然存在张量的不变量微分运算，这可以极为满意地由下述方法得到，这一方法由莱维-齐维塔和外尔(Weyl)引入。令(A^μ)为反变矢量，它在 x_ν 坐标系中的分量已经给出。设 P_1 和 P_2 是连续统中无限接近的两点。按照我们考虑问题的方式，对于 P_1 点周围的一个无穷小区域，存在一个坐标系 X_ν(有着虚的 X_4 坐标)，在这个坐标系下，连续统是欧几里得的。令 $A^\mu_{(1)}$ 为该矢量在 P_1 点的坐标。设想在局域坐标系 X_ν 中，用同样的坐标通过点 P_2 作一个矢量(通过 P_2 的平行矢量)，则这个平行矢量由 P_1 点处的矢量以及位移所唯一确定。我们把这个操作(它的唯一性我们后面会证明)称为矢量(A^μ)* 从点 P_1 到与它无限邻近的邻点 P_2 的平移(parallel displacement)。如果我们把 P_2 点处的矢量(A^μ)与从 P_1 到 P_2 的平移所得到的矢量相减，所得的矢

* 英文版误为 A_μ。——译者

量差是一个矢量，它可以被看作是矢量(A^{μ})对于给定位移($\mathrm{d}x_{\nu}$)的微分。

在坐标系 x_{ν} 里，也可以很自然地考察这个矢量位移。如果 A^{ν} 是矢量在 P_1 点的坐标，$A^{\nu}+\delta A^{\nu}$ 为该矢量沿着间隔($\mathrm{d}x_{\nu}$)移到 P_2 点时的坐标，则 δA^{ν} 此时不为零。我们知道，这些不具有张量性质的量，必须对于 $\mathrm{d}x_{\nu}$ 和 A^{ν} 是线性齐次的。故我们令

$$\delta A^{\nu}=-\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}A^{\alpha}\mathrm{d}x_{\beta}。\qquad (67)^{*}$$

此外，我们还可以指出，$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$对于指标 α 和 β 必定是对称的。因为借助于局域欧几里得坐标系，可以假设元素 $\mathrm{d}^{(1)}x_{\nu}$ 沿另一元素 $\mathrm{d}^{(2)}x_{\nu}$ 的位移以及 $\mathrm{d}^{(2)}x_{\nu}$ 沿$\mathrm{d}^{(1)}x_{\nu}$ 的位移构成同一个平行四边形。因此就有：

$$\mathrm{d}^{(2)}x_{\nu}+(\mathrm{d}^{(1)}x_{\nu}-\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\mathrm{d}^{(1)}x_{\alpha}\mathrm{d}^{(2)}x_{\beta})$$

$$=\mathrm{d}^{(1)}x_{\nu}+(\mathrm{d}^{(2)}x_{\nu}-\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\mathrm{d}^{(2)}x_{\alpha}\mathrm{d}^{(1)}x_{\beta})。$$

这个陈述由将右边的求和指标 α，β 交换后所得。

由于 $g_{\mu\nu}$ 诸量确定连续统的所有度规性质，所以它们也必须确定 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$。考虑由矢量 A^{ν} 构成的不变量(即它的大小的平方)

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu},$$

它是不变量，在平移后不应当改变。于是我们有：

---

* 原书未标明(66)式。——译者

$$0=\delta(g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu})=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}A^{\mu}A^{\nu}\mathrm{d}x_{\alpha}$$
$$+g_{\mu\nu}A^{\mu}\delta A^{\nu}+g_{\mu\nu}A^{\nu}\delta A^{\mu},$$

或者由(67)式有：

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}-g_{\mu\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}-g_{\nu\beta}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\right)A^{\mu}A^{\nu}\mathrm{d}x_{\alpha}=0。$$

由于括号里的式子关于指标 μ 和 ν 对称，所以只有当这个式子对于所有的指标对都为 0 时，上面的方程才能对任意选择的矢量(A^{μ})和 $\mathrm{d}x_{\nu}$ 成立。通过循环交换指标 μ，ν，α，我们一共可以得到三个方程，利用这三个方程，并且考虑到 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ 的对称性，我们得到

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}=g_{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta},\tag{68}$$

其中利用了克里斯托费尔(Christoffel)所引入的简写符号

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\right)。\tag{69}$$

如果用 $g^{\alpha\sigma}$ 乘以(68)式，并且对 α 求和，我们得到

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}=\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\right)$$
$$=\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}。\tag{70}$$

这里的 $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}$ 称为第二类克里斯托费尔符号。这样，我

们由 $g_{\mu\omega}$ 导出Γ诸量。方程(67)和(70)是下面讨论的基础。

张量的协变微分 如果($A^\mu+\delta A^\mu$)是从 P_1 到 P_2 的无穷小平移所得的矢量，而($A^\mu+\mathrm{d}A^\mu$)是在 P_2 点的矢量 A^μ，那么两者之差

$$\mathrm{d}A^\mu-\delta A^\mu=\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma}+\Gamma^\mu_{\sigma\alpha}A^\alpha\right)\mathrm{d}x_\sigma$$

也是矢量。由于这是对于 $\mathrm{d}x_\sigma$ 可以任意选择的情况，因此可得

$$A^\mu_{;\sigma}=\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma}+\Gamma^\mu_{\sigma\alpha}A^\alpha \tag{71}$$

是张量，我们把它称为1秩张量(矢量)的协变导数。对这一张量进行缩并，我们得到反变张量 A^μ 的散度。在此必须注意到，根据(70)式有

$$\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}=\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x_\mu}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_\mu}。\tag{72}$$

如果进一步令

$$A^\mu\sqrt{g}=\mathfrak{A}^\mu \tag{73}$$

(外尔将其称为1秩反变张量密度*)，可得

$$\mathfrak{A}=\frac{\partial\mathfrak{A}^\mu}{\partial x_\mu} \tag{74}$$

---

* 因为 $A^\mu\sqrt{g}\mathrm{d}x=\mathfrak{A}^\mu\mathrm{d}x$ 具有张量特性，这种表示是很合理的。一个张量在乘以$\sqrt{g}$之后就变成了张量密度，我们用大写的哥特体字母表示张量密度。

就是标量密度。

通过规定平移保持标量

$$\phi = A^{\mu}B_{\mu}$$

不变，进而

$$A^{\mu}\delta B_{\mu} + B_{\mu}\delta A^{\mu}$$

对于(A^{μ})的所有指定值均为 0，我们得到协变矢量 B_{μ} 平移的定律。于是我们得到

$$\delta B_{\mu} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} A_{\alpha} \mathrm{d}x_{\sigma}。\tag{75}$$

这样，按照与得到(71)式相同的步骤，我们也可以得到协变矢量的协变导数：

$$B_{\mu;\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} B_{\alpha}。\tag{76}$$

通过交换指标 μ 和 σ，并且相减，我们得到斜称张量

$$\phi_{\mu\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial B_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}。\tag{77}$$

2 秩或更高秩张量的协变微分，也可以按照与导出(75)式相同的步骤得到。例如，令($A_{\sigma\tau}$)为 2 秩协变张量，如果 E 和 F 皆是矢量，那么 $A_{\sigma\tau}E^{\sigma}F^{\tau}$ 就是标量。这个表达式在 δ 位移(δ-displacement)下应当不变。将其表示成公式，利用(67)式，我们得到 $\delta A_{\sigma\tau}$，进而得到我们想要的协变导数：

$$A_{\sigma\tau;\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\alpha} A_{\alpha\tau} - \Gamma_{\tau\rho}^{\alpha} A_{\sigma\alpha}。\tag{78}$$

为了能更清楚地看出张量协变微分的普遍定律，我们写出用类似的方法导出的两个协变导数：

$$A^{\tau}_{\sigma;\rho} = \frac{\partial A^{\tau}_{\sigma}}{\partial x_{\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} A^{\tau}_{\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\rho} A^{\alpha}_{\sigma} \tag{79}$$

$$A^{\sigma\tau}_{;\rho} = \frac{\partial A^{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} A^{\alpha\tau} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\rho} A^{\sigma\alpha}。 \tag{80}$$

现在，形成协变微分的普遍定律就很清楚了。利用这些公式，我们还要导出其他一些公式，而这些公式对于这个理论的物理应用是很有意义的。

当 $A_{\sigma\tau}$ 是斜称张量时，通过指标轮换，并且相加，我们得到张量

$$A_{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}} + \frac{\partial A_{\tau\rho}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial x_{\tau}}, \tag{81}$$

它对于每一对指标都是斜称的。

如果在(78)式中用基本张量 $g_{\sigma\tau}$ 代替 $A_{\sigma\tau}$，则其右边就恒为 0；对于(80)式，相对于 $g^{\sigma\tau}$ 也有类似的陈述。这就是说，基本张量的协变导数为 0。从局域坐标系中，我们可以直接看出，上述结论一定成立。

如果 $A^{\sigma\tau}$ 是斜称的，那么通过对(80)式中指标 τ 和 ρ 进行缩并，我们得到

$$\mathfrak{A}^{\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\sigma\tau}}{\partial x_{\tau}}。 \tag{82}$$

在普遍情况下，由(79)式和(80)式，将指标 τ 和 ρ 进

行缩并，我们得到方程

$$\mathfrak{A}_\sigma = \frac{\partial \mathfrak{A}_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \mathfrak{A}_\alpha^\beta \tag{83}$$

$$\mathfrak{A}^\sigma = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\sigma\alpha}}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \mathfrak{A}^{\alpha\beta}。 \tag{84}$$

黎曼张量 在连续统中，如果给定一条从 P 点延伸到 G 点的曲线，则 P 点处给出的矢量 A^μ 可以沿着这条曲线通过平移运动到 G 点。如果是欧几里得连续统(更普遍地讲，如果通过对坐标系的适当选择，使 $g_{\mu\nu}$ 变成常量)，那么这一位移在 G 点所得的矢量就与连接点 P 和点 G 的曲线的选择无关。否则，这个结果就有赖于位移的路径。因此，在这种情况下，矢量从闭合曲线上的点 P 沿着闭合曲线移动并回到点 P 时，将会有一个改变量 ΔA^μ(方向上的改变，而不是大小上的改变)。现在，我们就来计算这个矢量的改变量：

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu。$$

与关于矢量沿闭合曲线的线积分的斯托克斯定理(Stokes' theorem)中一样，这个问题可以约化成在一段无穷小线度的闭合曲线上的积分。我们下面的讨论就限于这种情况。

首先，由(67)式，我们有

$$\Delta A^\mu = -\oint \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} A^\alpha \mathrm{d}x_\beta。$$

这里，$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$是这个量在积分路径上的可变点 G 处的值。如果我们令

$$\xi^{\mu} = (x_{\mu})_G - (x_{\mu})_P$$

并且用$\overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}$表示 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$在 P 点处的值，那么以足够的精度，我们有

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}}{\partial x_{\nu}} \xi^{\nu}。$$

我们进一步令 A^{α} 为 $\overline{A^{\alpha}}$沿着从 P 点到 G 点的曲线平移后的值。现在，可以很容易地由(67)式证明，$A^{\mu} - \overline{A^{\mu}}$是一阶无穷小，而对于一条具有一阶无穷小线度的曲线，ΔA^{μ} 是二阶无穷小。因此，如果我们令

$$A^{\alpha} = \overline{A^{\alpha}} - \overline{\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}}\ \overline{A^{\sigma}}\ \overline{\xi^{\tau}},$$

那么只存在二阶的误差。

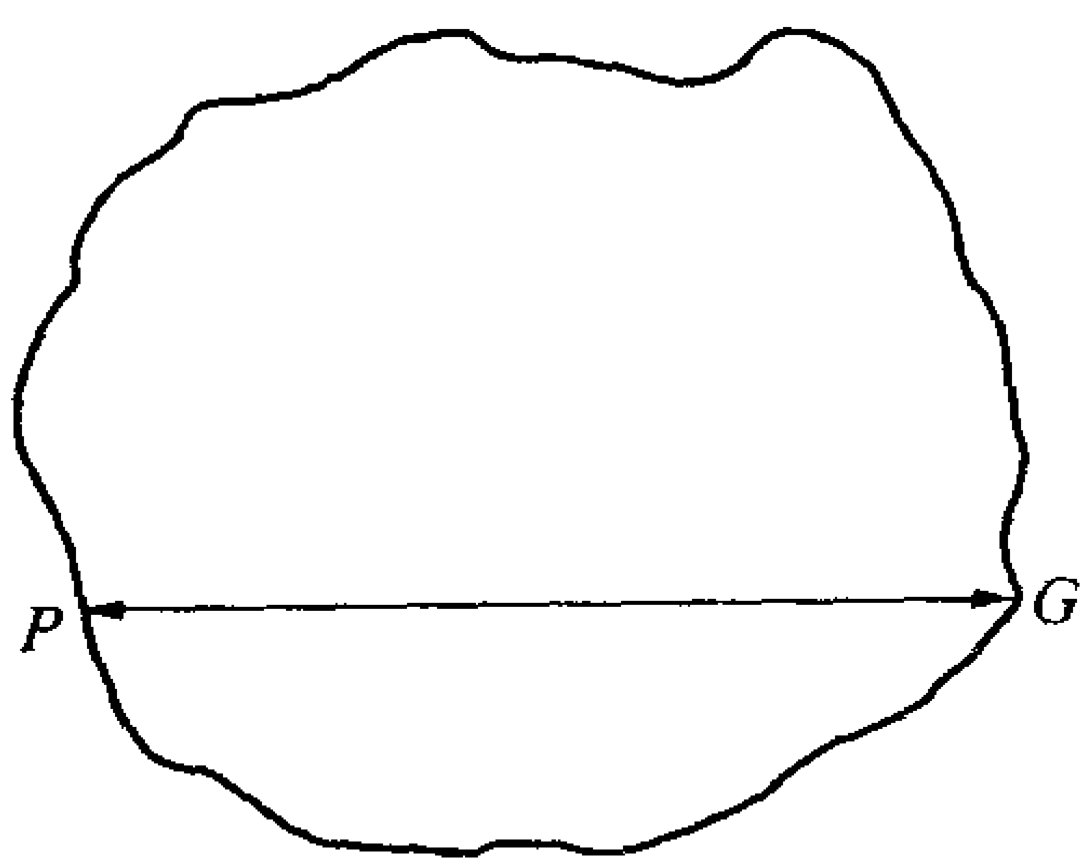


图 4

如果把这些 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$和 A^{α} 的值代入到积分式里，略去所

有高于二阶的小量，则我们得到

$$\Delta A^{\mu}=-\left(\frac{\partial \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}}{\partial x_{\alpha}}-\Gamma_{\rho\beta}^{\mu}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho}\right)A^{\sigma}\oint \xi^{\alpha}\mathrm{d}\xi^{\beta}。\qquad (85)$$

从积分号下移出的量是指它们在 P 点处的值。在积分号中减去 $\frac{1}{2}\mathrm{d}(\xi^{\alpha}\xi^{\beta})$，我们得到

$$\frac{1}{2}\oint(\xi^{\alpha}\mathrm{d}\xi^{\beta}-\xi^{\beta}\mathrm{d}\xi^{\alpha})。$$

这个 2 秩斜称张量 $f^{\alpha\beta}$ 表征的是被曲线包围着的面元的大小和位置。如果(85)式中括号里的量对于指标 α 和 β 是斜称的，那么我们就可以由(85)式得出它的张量特性。把(85)式中的求和指标 α 与 β 互换，然后把所得的方程加到(85)式上，这就可以实现。我们有

$$2\Delta A^{\mu}=-R_{\sigma\alpha\beta}^{\mu}A^{\sigma}f^{\alpha\beta}\qquad (86)$$

其中

$$R_{\sigma\alpha\beta}^{\mu}=-\frac{\partial \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}}{\partial x_{\beta}}+\frac{\partial \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}}{\partial x_{\alpha}}+\Gamma_{\rho\alpha}^{\mu}\Gamma_{\sigma\beta}^{\rho}-\Gamma_{\rho\beta}^{\mu}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho}。\qquad (87)$$

$R_{\sigma\alpha\beta}^{\mu}$ 的张量特性来自(86)式。这就是 4 秩黎曼曲率张量(Riemann curvature tensor)，对于它的对称性，我们这里无须深入研究。一个连续统是欧几里得连续统的充分条件，是黎曼曲率张量等于 0（无须考虑所选坐标系的实际意义）。

对黎曼曲率张量的指标 μ 和 β 进行缩并，我们得到 2

秩对称张量

$$R_{\mu\nu}=-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}+\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}。\tag{88}$$

如果选择坐标系使 $g=$ 常量，那么上式中的最后两项化为0。利用 $R_{\mu\nu}$，我们可以构造标量

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}。\tag{89}$$

最直线(测地线) 可以通过逐次平移线元来构造一条曲线。这是对欧几里得几何中直线的自然推广。对于这样的曲线，我们有

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}\right)=-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x_{\alpha}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x_{\beta}。$$

用 $\frac{\mathrm{d}^2x_{\mu}}{\mathrm{d}s^2}$ 代替左边的项*，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x_{\mu}}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x_{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s}=0。\tag{90}$$

如果寻求使两点间的积分

$$\int\mathrm{d}s\ 或\int\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_{\mu}\mathrm{d}x_{\nu}}$$

有稳定值的曲线(测地线)，我们得到同一曲线。

---

* 所考察的每一点的方向矢量，都可以通过沿线元($\mathrm{d}x_{\beta}$)的平移而成为曲线上邻近点的方向矢量。

广义相对论(续)

现在，我们已经具备了表述广义相对论定律所需要的数学工具。这里我并不打算对它进行系统完备的表述，只想在已有的知识和结果的基础上，逐步得到各个结果以及各种可能性。这样的一种表述方法，对于我们目前的知识状况来说，是非常适合的。

不受外力作用的质点，根据惯性原理，要做匀速直线运动。在狭义相对论的四维连续统中(具有实的时间坐标)，这是一条真正的直线。而在不变量的广义理论(黎曼理论)中，直线最自然也即最简单的有意义的推广，便是最直线或者测地线。于是，我们还必须假定在等效原理的意义上，只受惯性和引力作用的质点由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{90}$$

所描述。实际上，当引力场的所有分量 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ 都为 0 时，这个方程约化成直线方程。

这些方程如何与牛顿运动方程相联系呢？根据狭义

相对论，$g_{\mu\nu}$ 以及 $g^{\mu\nu}$ 在惯性系(具有实的时间坐标，并且适当地选取 ds^2 的正负号)中的值为：

$$\left.\begin{array}{cccc}-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right\} \tag{91}$$

于是，运动方程变为

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = 0。$$

我们称之为对 $g_{\mu\nu}$ 场的“一阶近似”(first approximation)。在考虑近似的情况下，采用虚的 x_4 坐标往往很有用处(如同在狭义相对论中所做的那样)，此时 $g_{\mu\nu}$ 的一阶近似值为

$$\left.\begin{array}{cccc}-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right\} \tag{91a}$$

这些值可以归结为如下关系：

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}。$$

则对于二阶近似(second approximation)，我们必须令

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{92}$$

其中 $\gamma_{\mu\nu}$ 应被视为一阶小量。

这样，运动方程中的两项都是一阶小量。如果略去那些相对于这些项是一阶小量的项，那么我们必须令

$$ds^2 = -dx_\nu^2 = dl^2(1-q^2) \tag{93}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= -\delta_{\mu\sigma}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\right)。\end{aligned} \tag{94}$$

现在，我们要引入第二种近似。设质点的运动速度远远小于光速。此时 ds 就等于时间微分 dl。进而，$\frac{dx_1}{ds}$，$\frac{dx_2}{ds}$，$\frac{dx_3}{ds}$ 与 $\frac{dx_4}{ds}$ 相比，都可以忽略不计。另外，我们假设引力场随时间变化很小，这样 $\gamma_{\mu\nu}$ 关于 x_4 的导数项也可以略去。因此，运动方程(对于 $\mu=1, 2, 3$) 约化成

$$\frac{d^2 x_\mu}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right)。 \tag{90a}$$

如果把 $\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right)$ 看作是引力场的势，那么这个方程就与质点在引力场中的牛顿运动方程等同。能否这样做，自然取决于引力场方程，也就是说，取决于这个量在一阶近似下是否与牛顿理论中的引力势满足同样的场的定律。比较一下(90)式和(90a)式，就会看到 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ 实际上确实扮演着引力场强度的角色。这些量不具有张量特性。

方程组(90)表述了惯性和引力对质点的影响。惯性

和引力的统一，在形式上可由下面的事实来表述：(90)式中等号的整个左边具有张量特性(对于任意的坐标变换)，但是这两项分开来却不具有张量特性。与牛顿方程相类似，第一项可以看作表示惯性的项，而第二项则表示引力。

我们下一步要做的，是找到引力场定律。为了达到这一目的，我们以牛顿理论中的泊松方程(Poisson's equation)

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho$$

作为范例。泊松方程是建立在有质量物质(ponderable matter)的密度 ρ 会产生引力场这一思想上的。在广义相对论中，它也应当如此。但我们的狭义相对论研究已经指出，应当用单位体积的能量张量来代替物质密度标量。单位体积的能量张量不仅包括有质量物质的能量张量，而且包括电磁能量张量。我们确实已经看到，在更完备的分析中，能量张量只能被看作是一种用来描述物质的临时方式。实际上，物质是由带电粒子构成的，它本身也应当被看作是电磁场的一部分(实际上是主要的部分)。只是由于我们对密集电荷的电磁场缺乏足够的了解，才迫使我们暂时放弃在表述理论时确定这个张量的真正形式。从这个角度来讲，引入一个结构未知的 2 秩张量 $T_{\mu\nu}$ 目前是很合适的，这个张量暂时把有质量物质的能量密度和电磁场的能量密度合而为一了，在下面的叙述中，我们将把它称为“物质的能量张量”。

根据我们前面的结果，动量和能量原理可以由这个张量的散度为0这一陈述[(47c)式]来表示。在广义相对论中，我们将不得不假定相应的广义协变方程成立。如果$(T_{\mu\nu})$表示物质的协变能量张量，$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$表示相应的混合张量密度，那么为了与(83)式相一致，必须要求

$$0=\frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}-\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta} \tag{95}$$

得到满足。必须记住，除了要有物质的能量密度以外，还必须要有引力场的能量密度，所以不能仅仅谈及物质的能量与动量守恒原理。在数学上是通过(95)式中的第二项来表述这一点的，它使我们无法推断形式为(49)式的积分方程的存在性。引力场通过对“物质”施加力的作用和赋予其能量，而把能量和动量传递给物质，这可由(95)式中的第二项来表述。

如果在广义相对论中也存在着一个与泊松方程类似的方程，那么这个方程必定是关于引力势张量$g_{\mu\nu}$的一个张量方程，物质的能量张量必须出现在这个方程的右边。而在方程的左边，必须是关于$g_{\mu\nu}$的一个微分张量。我们不得不找出这个微分张量。它完全由下面三个条件来确定：

1. 它不含有关于$g_{\mu\nu}$的二阶以上的微分系数。
2. 它对于这些二阶微分系数必须是线性的。
3. 它的散度必须恒为0。

可以很自然地从泊松方程得到上述条件中的前两

个。因为可以从数学上证明，所有这些张量微分都可以用代数的方法(即无需微分)从黎曼张量得到，所以我们的张量必须具有以下形式：

$$R_{\mu\nu}+ag_{\mu\nu}R,$$

这里的 $R_{\mu\nu}$ 和 R 分别由(88)式和(89)式定义。可以进一步证明，第三个条件要求 a 的值为 $-\frac{1}{2}$。这样，我们就得到了表述引力场定律的方程

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\kappa T_{\mu\nu}。\tag{96}$$

方程(95)是这个方程的一个结果。κ 是一个与牛顿引力常量相关的常量。

接下来，我将讨论该理论从物理学的角度上看有意义的一些性质，并将尽可能少用比较复杂的数学方法。首先，需要证明上式等号左边的散度实际上为0。利用(83)式，可以把物质的能量原理表述成

$$0=\frac{\partial\mathfrak{T}_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}-\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta}\tag{97}$$

其中 $$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\alpha}=T_{\sigma\tau}g^{\tau\alpha}\sqrt{-g}。$$

对(96)式中等号左边的项采用类似的处理方法，将得到一个恒等式。

在每一个世界点(world-point)的周围，都存在这样一些坐标系，对于这些坐标系(其中 x_4 坐标选为虚数)，

在给定点处有

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\begin{cases} = -1 & \text{如果 } \mu = \nu \\ = 0 & \text{如果 } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

而且 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 的一阶导数在该点处都为 0。下面我们将证明在这一点处，方程(96)式左边的项的散度为 0。由于分量 $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ 在该点为 0，所以我们只需证明

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\right]$$

等于 0。如果把(88)式和(70)式代入这一表达式，就会发现只有那些含有 $g_{\mu\nu}$ 的三次导数的项还存在。因为要用 $-\delta_{\mu\nu}$ 来代替 $g_{\mu\nu}$，所以最后我们只得到一些显然可以相互抵消的项。由于我们所构造的量具有张量特性，所以可以证明，它在其他任何坐标系中都为 0，而且很自然地，在其他任何四维点(four-dimensional point)上也都为 0。由此可见，物质的能量原理(97)式是场方程(96)的一个数学结果。

为了弄清方程(96)是否符合我们的经验，必须首先看一看它在一阶近似的时候能否得出牛顿理论。为此，我们必须在这些方程中引入各种近似。我们已经知道，欧几里得几何和光速不变原理对于大范围区域(如行星系)在一定近似下成立。如果我们像在狭义相对论中那样，把第四个坐标取为虚数，这就意味着必须令

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}。\tag{98}$$

其中 $\gamma_{\mu\nu}$ 远远小于 1，因而我们可以略去 $\gamma_{\mu\nu}$ 的高次幂及其导数。如果我们这样做，那我们将无法了解引力场的结构，或者宇宙尺度的度规空间的结构，然而我们确实可以了解邻近物质对物理现象的影响。

在采取这一近似之前，我们先对(96)式进行一些变换。用 $g^{\mu\nu}$ 乘以(96)式，并对指标 μ 和 ν 求和；观察由 $g^{\mu\nu}$ 的定义得到的关系

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4,$$

我们得到方程

$$R = \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \kappa T。$$

如果把 R 的这个值代回到(96)式，就得到

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) = -\kappa T^{*}_{\mu\nu}。\qquad (96a)$$

在作了我们前面所提到的近似之后，就可以得知方程的左边应为：

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}\right)$$

或

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right),$$

其中我们已经令

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\sigma\sigma}\delta_{\mu\nu}。\qquad (99)$$

现在，我们必须注意到方程(96)对于任何坐标系都成立。我们前面所选的是一个比较特殊的坐标系，其中 $g_{\mu\nu}$ 在所考察的区域里与常数 $-\delta_{\mu\nu}$ 只差一个无穷小量。但是由于这一条件在任意的无穷小坐标变换下都满足，所以还可以要求 $\gamma_{\mu\nu}$ 满足另外四个条件，当然这些条件不能与关于 $\gamma_{\mu\nu}$ 数量级的条件相冲突。我们现在假设所选的坐标系能使下面的四个关系

$$0=\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu} \tag{100}$$

得到满足。于是(96a)式取如下形式：

$$\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=2\kappa T^*_{\mu\nu}。 \tag{96b}$$

这些方程可以用一种类似于电动力学中的推迟势(retarded potential)的方法来求解，从而得到(这里采用了一种便于理解的记法)

$$\gamma_{\mu\nu}=-\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T^*_{\mu\nu}(x_0,y_0,z_0,t-r)}{r}\mathrm{d}V_0。 \tag{101}$$

为了能够看出这个理论在何种意义上包含了牛顿理论，我们必须更加仔细地考察物质的能量张量。从唯象的角度来考察，这个能量张量在更为狭窄的意义上是由电磁场的能量张量和物质的能量张量构成的。如果依其数量级来考察这个能量张量的不同部分，那么根据狭义相对论的结果，电磁场的贡献与有质量物质的贡献相比

实际上为 0。在我们所选的单位制中，1 克物质的能量等于 1，与它相比，电场的能量、物质的形变能、甚至化学能都可以忽略不计。如果我们令

$$\left.\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \sigma\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} \\ \mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu \end{aligned}\right\}, \tag{102}$$

那么我们得到对于我们的目的足够充分的近似。在上式中，σ 是静止时的物质密度，也就是在与物质一起运动的伽利略坐标系中，利用单位量杆所测得的通常意义上的有质量物质的密度。

进而，我们注意到，在所选的坐标系里，如果用 $-\delta_{\mu\nu}$ 代替 $g_{\mu\nu}$，那么也只会有一个相对小的误差。于是，我们令

$$\mathrm{d}s^2 = -\sum \mathrm{d}x_\mu^2。 \tag{102a}$$

不论产生引力场的物质以多快的速度相对于我们所选择的准伽利略坐标系运动，上面的讨论都成立。但是在天文学中，我们所要处理的物质，它们相对于所选坐标系的运动速度总是远远小于光速，即(用我们所选的时间单位)远远小于 1。因此，如果在(101)式中，我们用普通势(非推迟势)来代替推迟势，而且如果对于产生引力场的物质，令

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s} = 0,$$

$$\frac{dx_4}{ds}=\frac{\sqrt{-1}\,dl}{dl}=\sqrt{-1}, \qquad (103a)^{*}$$

那么我们得到对于几乎所有的实际目的都足够充分的近似。 于是得到 $T^{\mu\alpha}$ 和 $T_{\mu\alpha}$ 的值为

$$\left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{array}\right\} \qquad (104)$$

T 的值就是 σ，最终得到 $T^{*}_{\mu\alpha}$ 的值为

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{array}\right\} \qquad (104a)$$

从而由(101)式，我们得到

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11}&=\gamma_{22}=\gamma_{33}=-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r} \\ \gamma_{44}&=+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (101a)$$

---

* 原文未标明(103)式，且将 $\sqrt{-1}\,dl$ 误排成 $\sqrt{-1dl}$。 ——译者

而余下的 $\gamma_{\mu\nu}$ 都为 0。最后的这个方程，再加上方程(90a)，就包含了牛顿引力理论。如果我们用 ct 代替 l，则得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\kappa c^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \int \frac{\sigma \mathrm{d} V_0}{r}。 \tag{90b}$$

由此可以看出，牛顿引力常量 K 与我们场方程中的常数 κ 有如下的关系：

$$K = \frac{\kappa c^2}{8\pi}。 \tag{105}$$

由 K 的已知数值可得

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = \frac{8\pi \cdot 6.67 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 1.86 \cdot 10^{-27}。 \tag{105a}$$

从(101)式我们可以看出，甚至在一阶近似下，引力场的结构也与符合牛顿理论的引力场结构存在着根本的差别。差别就在于引力势具有张量特性而不是标量特性。过去，这所以未被认识到，乃是因为在一阶近似下，质点的运动方程仅仅包含 g_{44} 这一个分量。

现在，为了根据我们的结果考察量杆和时钟的行为，我们必须注意到下述情形。根据等效原理，欧几里得几何的度规关系对于无穷小维度的笛卡儿参考系以及在适当运动状态（自由下落且无旋转）中成立。对于相对这些坐标系有很小加速度的局域坐标系（从而对于与我们所选择的坐标系相对静止的那些坐标系），我们可以作出同样的陈述。在这样一个局域坐标系中，对于两个相邻

的事件点，我们有

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dT^2 = -dS^2 + dT^2,$$

其中 dS 和 dT 可分别由与坐标系相对静止的量杆和时钟直接测得：它们是自然测得的长度和时间。另一方面，已知 ds^2 可用有限区域内的坐标 x_ν 表示为如下形式：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu,$$

所以我们有可能得到自然测得的长度和时间(这是一方面)与相应坐标差(这是另一方面)之间的关系。因为空间和时间在两个坐标系中的划分是一致的，所以当我们令线元 ds^2 的两个表达式相等时，得到两个关系式。由(101a)式，若令

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(1 - \frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl^2$$

则在足够近似下，我们可得

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} \\ &\quad = \left(1 + \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \\ &dT = \left(1 - \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

因此，对于我们所选的坐标系，单位量杆具有坐标

长度

$$1-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma \mathrm{d}V_0}{r}。$$

我们所选择的这一特定坐标系，确保这一长度只与位置有关而与方向无关。若我们另选一个不同的坐标系，则不一定有这样的性质。但是无论我们选择什么坐标系，刚性杆的位形定律都不满足欧几里得几何的有关规律。换句话说，我们不能选择任意一个坐标系，使得无论相应的单位量杆的末端怎样取向，坐标差 Δx_1，Δx_2，Δx_3 将总是满足关系 $\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2=1$。从这个意义上讲，空间不是欧几里得的，而是“弯曲的”。从上述关系第二式可以看出，采用在我们坐标系中所使用的单位，单位时钟（$\mathrm{d}T=1$）的两次节拍间的间隔对应于“时间”

$$1+\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma \mathrm{d}V_0}{r}。$$

由此，时钟附近有质量物质的质量越大，则时钟的速率就越慢。因而我们得出结论：在太阳表面产生的光谱与在地球上产生的光谱相比，将向红色端移动大约其波长的 $2\cdot10^{-6}$。初看起来，这个重要的理论结果跟实验不相符，但是最近几年的实验结果却越来越显示出这一效应是可能存在的，几乎毋庸置疑，这一理论结果将在未来几年内得到证实。

　　广义相对论的另一个可用实验检验的重要结果，与

光线的路径有关。在广义相对论中，光速相对于局域惯性系处处相同。光速在我们的自然时间单位中为 1。所以，根据广义相对论，光传播定律在广义坐标中可由下式来表述：

$$ds^2 = 0。$$

在我们正使用的近似程度内，在我们所选择的坐标系中，根据(106)式，光速由下式决定：

$$\left(1+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma \mathrm{d}V_0}{r}\right)(\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2)$$
$$=\left(1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma \mathrm{d}V_0}{r}\right)\mathrm{d}l^2。$$

因而光速 L 在我们的坐标中可以表示为

$$\frac{\sqrt{\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2}}{\mathrm{d}l}=1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma \mathrm{d}V_0}{r}。\qquad(107)$$

由此我们可以得出结论：光线在经过质量巨大的物体附近时将会发生偏折。如果我们设想太阳(质量为 M)坐落于我们坐标系的原点，那么一条沿着与 x_3 轴平行方向在与原点相距 Δ 的 x_1—x_3 平面上传播的光线将会向太阳偏折，总的偏折量为

$$\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x_1}\mathrm{d}x_3。$$

积分后可得

$$\alpha=\frac{\kappa M}{2\pi\Delta}。\qquad(108)$$

当 Δ 等于太阳半径时，偏折角达 $1.7''$。1919 年，英国日食考察队以显著的精度证实了这种偏折的存在，并为能在 1922 年的日食中得到更加精确的观测数据而做了最精心的准备。应当注意，这一理论结果同样不受我们任意选择的坐标系的影响。

这里应该讨论广义相对论可以被观测检验的第三个结论，它与水星近日点的运动有关。行星轨道的长期变化已经知道得如此准确，使得我们一直沿用的近似方法将不足以进行理论值与观测值的比较。我们必须回到一般的场方程(96)式。为解决这一难题，我采用逐次近似法。但是，后来施瓦兹希尔德(Schwarzschild)等人完全解决了中心对称的静态引力场问题；外尔在他的著作《空间、时间、物质》(Raum-Zeit-Materie)中给出的推导尤其优美。如果我们不直接回到方程(96)，而是以与这一方程等价的变分原理作为依据，那么计算可能会在某种程度上得到简化。我将只对理解该方法必需的步骤做一个简单的介绍。

对于静态场情形，$\mathrm{d}s^2$ 必定有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}\sigma^2 + f^2\mathrm{d}x_4^2 \\ \mathrm{d}\sigma^2 &= \sum_{1-3}\gamma_{\alpha\beta}\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}x_\beta \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

其中第二式的右边仅对空间变量求和。场的中心对称性要求 $\gamma_{\mu\nu}$ 取如下形式：

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta。 \tag{110}$$

而 f^2，μ 和 λ 仅是 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 的函数。这三个函数的其中之一可任意选取，因为我们的坐标系是(先验地)完全任意的。做代换：

$$x'_4 = x_4$$

$$x'_\alpha = F(r)x_\alpha$$

后，我们总可以保证这三个函数中有一个能被取为关于 r' 的某个特定函数。不失一般性，我们可将(110)式代之以

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta。\tag{110a}$$

这样 $g_{\mu\nu}$ 可用 λ 和 f 这两个量来表示。将它们代入(96)式，由(109)式和(110a)式计算 $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ 之后，把它们确定为 r 的函数。我们有

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{x_\sigma}{r}\cdot\frac{\lambda' x_\alpha x_\beta + 2\lambda r\delta_{\alpha\beta}}{1+\lambda r^2}\\
&\qquad(\text{对于 } \alpha,\ \beta,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3)\\
&\Gamma^4_{44} = \Gamma^\alpha_{4\beta} = \Gamma^4_{\alpha\beta} = 0\\
&\qquad(\text{对于 } \alpha,\ \beta = 1,2,3)\\
&\Gamma^4_{4\alpha} = \frac{1}{2}f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha},\Gamma^\alpha_{44} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial f^2}{\partial x_\beta}
\end{aligned}\right\}\tag{110b}$$

靠这些结果，场方程就提供了施瓦兹希尔德解(Schwarzschild's solution)：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \left(1-\frac{A}{r}\right)\mathrm{d}l^2\\
&\quad -\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{A}{r}} + r^2(\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\theta^2)\right],
\end{aligned}\tag{109a}$$

其中我们已令

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= l \\ x_1 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x_2 &= r\sin\theta\cos\phi \\ x_3 &= r\cos\theta \\ A &= \frac{\kappa M}{4\pi} \end{aligned}\right\} \tag{109b}$$

M 表示太阳的质量，它以中心对称的方式集中分布在坐标原点附近。解(109a)式仅在这一质量之外成立，这时所有 $T_{\mu\nu}$ 为 0。如果行星在 x_1—x_2 平面上运动，那么(109a)式必须改写成

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right)\mathrm{d}l^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{A}{r}} - r^2\mathrm{d}\phi^2。 \tag{109c}$$

行星运动的计算，依赖于方程(90)。从方程(110b)的第一式和方程(90)可知，对于指标 1，2，3 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(x_\alpha \frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} - x_\beta \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\right) = 0。$$

若对上式积分，并将结果用极坐标系表示，可得

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = 常量。 \tag{111}$$

由(90)式，对于 $\mu = 4$，我们有

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{f^2}\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s}。$$

由此，对上式两边同乘以 f^2，然后积分，可得

$$f^2\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s}=\text{常量}。\tag{112}$$

这样，我们就得到了关于 s，r，l 和 ϕ 四个变量的三个方程(109c)、(111)和(112)。由这三个方程，我们可以按照与经典力学相同的方法来计算行星的运动。我们由此得到的最重要结果是，行星公转的椭圆轨道在缓慢地旋转，其速率以每公转所掠过的弧度为单位计，达

$$\frac{24\pi^3a^2}{(1-e^2)c^2T^2},\tag{113}$$

其中

a = 行星轨道的半主轴长，单位为厘米。

e = 偏心率的数值。

$c=3\cdot10^{10}$，真空中的光速。

T = 公转周期，单位为秒。

这个表达式给出了水星近日点运动问题的解释。这个问题自勒威耶(Leverrier)发现以来已达一百年之久，一直没有一个令人满意的理论天文学解释。

用广义相对论表述麦克斯韦电磁场理论并无什么困难，只需要运用张量构造公式(81)、(82)和(77)就行了。设 ϕ_μ 为 1 秩张量，并解释为四维电磁势，那么电磁场张量可以定义为关系

$$\phi_{\mu\nu}=\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}。\tag{114*}$$

---

* 英文版中此式误为 $\phi_{\mu\nu}=\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}$。——译者

于是麦克斯韦方程组的第二个方程由此为张量方程

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}} + \frac{\partial \phi_{\nu\rho}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \phi_{\rho\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \qquad (114a)$$

所定义，麦克斯韦方程组的第一个方程可以用张量密度关系(tensor-density relation)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mathfrak{F}^{\mu} \qquad (115)$$

所定义，其中

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \phi_{\sigma\tau}$$

$$\mathfrak{F}^{\mu} = \sqrt{-g} \rho \frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}。$$

对于 $\mathfrak{F}^{\mu} = 0$ 这一特殊情形，如果我们把电磁场的能量张量代入(96)式的右边，就可以由(96)式取散度得到(115)式。许多理论工作者都认为这种在广义相对论的框架下包含电学理论的方法过于随意，不令人满意。而且我们也不能用这种方法来理解构成基本带电粒子的电平衡。一个理论，如果引力场和电磁场不是作为逻辑上毫不相同的结构被引入其中，那么它将更为可取。外尔以及近来的卡鲁查(Th. Kaluza)等人沿着这一方向已经提出许多天才的思想。但是我相信，这些思想并未使我们更为接近这个根本性问题的真正解答。我不想在这个问题上深入讨论下去，我只想对所谓的宇宙学问题(cosmological problem)进行简要讨论。因为在某种

意义上讲，缺少这方面的讨论，对广义相对论的考察就不会令人满意。

先前基于场方程(96)的考察，乃是以这样一种观念为基础：空间在整体上是伽利略—欧几里得的，只有当质量嵌入其中，空间的这一特征才被破坏。只要我们在处理天文学最常见的数量级的空间，这个观念当然是合理的。至于宇宙的某些部分(不管这些部分有多大)究竟是不是准欧几里得(quasi-Euclidean)空间，则是完全不同的一个问题。我们可以用曾经多次使用过的曲面论(theory of surfaces)中的一个例子，来讲清楚这一点。如果曲面的某一部分实际上是平坦的，那也并不意味着整个曲面具有平面形式；这个曲面可能只是半径足够大的球面。在相对论建立之前，对于宇宙是否在整体上是非欧几里得(non-Euclidean)空间的问题，人们已经从几何的观点出发做了大量的讨论。但是，有了相对论，这一问题就进入了一个崭新的阶段，因为根据相对论，物体的几何性质不是独立的，而是依赖于质量分布的。

如果宇宙是准欧几里得空间，那么马赫对惯性跟引力一样依赖于物体之间的某种相互作用的思想就彻底错了。因为在这种情况下，对于一个适当选择的坐标系，$g_{\mu\nu}$将与它们在狭义相对论中一样，在无穷远处是一个常量，但是在有限的区域内，由于有限区域内的质量的影响，对于适当选择的坐标系，$g_{\mu\nu}$就会跟这些常量值有细小的差别。所以空间的物理性质不是完全独立的(即并

非不受到物质的影响)，不过它们基本上还是独立的，只在很小的程度上受到物质的影响。此种二元论观念(dualistic conception)本身就不能令人满意，何况还有我们将考察的一些重要的物理论点与之相悖。

宇宙是无限的而且在无穷远处是欧几里得的，这一假定从相对论观点来看是一个复杂假定。用广义相对论的语言来说，它要求4秩黎曼张量 R_{iklm} 在无穷远处为0。这提供了20个独立条件，而只有10个曲率分量 $R_{\mu\nu}$ 进入引力场定律。要求这么强的限制条件却没有任何物理依据，这当然不会令人满意。

但其次，根据相对论的观点，马赫关于惯性依赖于物质的相互作用的思想又似乎是正确的。因为下面我们将证明，根据我们的方程，在惯性相对性(relativity of inertia)的意义上，惯性质量之间的确存在相互作用，即便它是极其微弱的。那么，沿着马赫的思路，又可以得出什么结论呢?

1. 当有质量物体在其附近累积时，物体的惯性必然增大。
2. 当邻近质体被加速时，物体必然受到加速力的作用，且事实上加速力的方向必然与加速度同方向。
3. 中空的物体转动时，在其内部必定产生一个可以使得运动的物体沿转动方向偏转的“科里奥利场”(Coriolis field)和一个径向离心场。

现在我们将证明，根据马赫的思想应当出现的这三个效应，在我们的理论中确实存在，尽管它们的量值非常小，由

实验室实验证实它们是不可想像的。为此，我们回到质点的运动方程(90)，采用比(90a)式略进一步的近似。

首先，我们把 γ_{44} 当作一阶小量。根据能量方程，在引力作用下运动的质体，其速度的平方也处于同一数量级。因此，我们把所考察的质点的速度和产生引力场的质体的速度都看成是 1/2 阶小量是合乎逻辑的。现在，我们对由场方程(101)和运动方程(90)而来的方程进行近似处理，考察(90)式中的第二项在那些速度中呈线性的诸项。进一步，我们将不把 $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}l$ 当做相等的量，而是根据高阶近似，令

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_{44}}\,\mathrm{d}l = \left(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}\right)\mathrm{d}l。$$

首先，由(90)式可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left[\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}l}\right]\\&= -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}l}\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right)。\end{aligned}\tag{116}$$

由(101)式，根据所要求的近似，可得

$$\left.\begin{aligned}&-\gamma_{11} = -\gamma_{22} = -\gamma_{33} = \gamma_{44} = \frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\mathrm{d}V_0}{r}\\&\gamma_{4\alpha} = -\frac{i\kappa}{2\pi}\int\frac{\sigma\dfrac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}V_0}{r}\\&\gamma_{\alpha\beta} = 0\end{aligned}\right\}\tag{117}$$

在(117)式中，α 和 β 仅表示空间指标(space indices)。

我们可以把(116)式右边的 $1+\frac{\gamma_{44}}{2}$ 替换成 1，把 $-\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ 替换成 $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}$。另外容易看出，在这种近似程度下，我们必须令：

$$\begin{bmatrix}44\\ \mu\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_{4}}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha 4\\ \mu\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_{\alpha}}-\frac{\partial\gamma_{4\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}=0。$$

其中 α，β，μ 代表空间指标。因此，使用通常的矢量记号，我们从(116)式得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}[(1+\bar{\sigma})\mathbf{v}]=\operatorname{grad}\bar{\sigma}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l}+[\operatorname{curl}\mathfrak{A},\mathbf{v}]\\ &\bar{\sigma}=\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\sigma\mathrm{d}V_{0}}{r}\\ &\mathfrak{A}=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{\sigma\frac{\mathrm{d}x_{\alpha}}{\mathrm{d}l}\mathrm{d}V_{0}}{r}\end{aligned}\right\}\quad(118)$$

现在，运动方程(118)实际上表明：

1. 惯性质量与 $1+\bar{\sigma}$ 成正比，因此，当有质量物体靠近受试物体时，惯性质量会增加。
2. 加速的质量对受试物体有同符号的感应作用

(inductive action)。这就是$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l}$项。

3. 一个质点若在旋转的中空物体中做垂直于转动轴的运动，那么它将会沿旋转方向发生偏转(科里奥利场)。前面提及的在旋转的中空物体内部的离心作用(centrifugal action)，也能够根据广义相对论得到，这已经由梯林(Thirring)证明*。

虽然这三个效应都因为 κ 实在太小了而很难用实验验证，但是根据广义相对论，它们必定存在。我们必须在三个效应中找到一个强有力的依据，来支持马赫关于所有惯性作用的相对性的思想。如果我们认为这些思想从头至尾都是自洽的，则我们必然希望所有的惯性(即整个 $g_{\mu\nu}$ 场)都决定于宇宙的物质，而不是主要决定于无穷远处的边界条件。

对于宇宙尺度下的一个令人满意的 $g_{\mu\nu}$ 场概念来说，恒星的相对速度小于光速这一事实似乎具有重要意义。根据这一事实，通过选择适当的坐标系，g_{44} 在宇宙中将几乎是一个常量，至少在存在物质的那部分宇宙内它是这样。而且由于宇宙的所有部分内都存在恒星的假设看上去十分自然，所以我们也完全可以假设 g_{44} 之所以不是常量，仅仅是由于物质并非连续分布，而是集中分布在

* 在坐标系相对于惯性系均匀地做旋转运动的特殊情况下，甚至不用计算大家也能够意识到，离心作用必然与科里奥利场的存在有着不可分割的联系，我们的广义协变方程自然也一定适用于这一情况。

某个天体和天体系统中。如果我们愿意忽略这些物质密度和 $g_{\mu\nu}$ 场更为局域的不均匀分布，那么为了了解宇宙作为一个整体的一些几何性质，似乎可以自然而然地把物质的实际分布用一连续分布来代替，并且进一步赋予这一分布均匀密度 σ。在这个假想的宇宙当中，所有具有空间方向的点在几何上都是等价的。这个宇宙对于它的空间延展而言具有恒定曲率，并且对于它的 x_4 坐标而言是柱状的。宇宙可能在空间上是有界的，而且由于我们前面假设了 σ 为常量，故具有恒定曲率(不论是球形的，还是椭球形的)，这种可能性似乎特别令人满意，因为这样的话，广义相对论中那些难以应用的无穷远处边界条件，就可以用一个更为自然的封闭空间边界条件来代替。

根据以上讨论，我们令

$$ds^2 = dx_4^2 - \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{119}$$

其中指标 μ 和 ν 只取 1 到 3。$\gamma_{\mu\nu}$ 是 x_1，x_2，x_3 的某个函数，以使它与具有正的恒定曲率的三维连续统相对应。现在，我们必须考察这个假设是不是满足引力场方程。

为此，我们必须首先找到三维恒定曲率流形所满足的微分条件。一个嵌入四维欧几里得连续统中的三维球流形*，可由下式给出：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

---

* 引入第四个空间维度，除了是一个数学技巧外，自然没有其他意义。

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds^2。$$

消去 x_4，得

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}。$$

忽略 x_ν 的三次方项以及更高次项，在坐标原点附近，我们可令：

$$ds^2 = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{a^2}\right) dx_\mu dx_\nu。$$

括号里是流形在原点附近的 $g_{\mu\nu}$。 因为 $g_{\mu\nu}$ 的一阶导数在原点为 0，所以在原点 $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ 也为 0。 这样，用(88)式计算这一流形在原点的 $R_{\mu\nu}$ 就很简单了。 我们有

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}\delta_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}g_{\mu\nu}。$$

因为，关系式 $R_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}g_{\mu\nu}$ 一般来说是协变的，而且流形上所有的点在几何上都是等价的，所以上式对所有坐标系，且在流形上处处都成立。 为了避免与四维连续统相混淆，接下来我们用希腊字母表示与三维连续统相关的量，并且令

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu}。 \tag{120}$$

现在，我们着手将场方程(96)应用于我们这一特殊情形。 根据(119)式我们可知，对于四维流形，有

$$
\left.\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \mathrm{P}_{\mu\nu} \quad \text{对于指标 1 到 3} \\
R_{14} &= R_{24} = R_{34} = R_{44} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{121}
$$

至于(96)式的右边，我们必须考察如尘埃云状分布的物质的能量张量。根据上述讨论，专对静止情况，我们必须令

$$
T^{\mu\nu} = \sigma \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}。
$$

但是另外，我们还必须添加一压力项，这个压力项可以按以下方式在物理上确立。物质是由带电粒子构成的。根据麦克斯韦理论，很难把它们想像成没有奇点(singularities)的电磁场。为了与实际相符，有必要引入麦克斯韦理论中所没有包括的能量项。这样，尽管带有同号电荷的单个粒子之间存在相互排斥的作用力，但是它们仍然可以聚集在一起。为了符合这一事实，庞加莱曾经设想在这些粒子的内部存在一种压力，这种压力可与静电斥力相平衡。然而，不能断定在粒子外部这种压力为0。如果在我们的唯象表述中加上压力项，就可以与这一情况相符。但是，这不能与流体动压强相混淆，因其只是物质内部的动力学关系的能量表示。于是，我们令

$$
T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\sigma \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} - g_{\mu\nu}p。 \tag{122}
$$

因此，在我们这一特殊情形下，必须令

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} p \quad (\text{对于 } \mu \text{ 和 } \nu \text{ 从 1 到 3})$$

$$T_{44} = \sigma - p$$

$$T = -\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} p + \sigma - p = \sigma - 4p。$$

注意到场方程(96)可以改写成

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right),$$

所以从(96)式我们得到以下方程

$$+\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu} = \kappa\left(\frac{\sigma}{2} - p\right)\gamma_{\mu\nu}$$

$$0 = -\kappa\left(\frac{\sigma}{2} + p\right)。$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{\sigma}{2} \\ a &= \sqrt{\frac{2}{\kappa\sigma}} \end{aligned}\right\}。 \tag{123}$$

如果宇宙是准欧几里得的，从而它的曲率半径为无穷大，那么 σ 为 0。但是宇宙中的物质的平均密度不太会真的为 0。这是我们反对宇宙是准欧几里得的这一假定的第三个论点。另外，我们所假设的压力看起来也不太可能为 0。这个压力的物理意义，只有当我们有了更好的电磁场理论知识之后才能理解。根据(123)式的第二个方程，宇宙的半径 a 通过下式取决于物质的总质

量 M：

$$a = \frac{M\kappa}{4\pi^2}。\tag{124}$$

由这个方程，几何性质对物理性质的完全依赖性变得很清楚。

这样，我们可以列出以下论点，来反对空间无限(space-infinite)宇宙的观念，支持空间有界(space-bounded)宇宙或者闭合宇宙的思想：

1. 从相对论的观点来看，假设一个闭合宇宙比假设宇宙的准欧几里得结构在无穷远处的相应边界条件，要简单得多。

2. 马赫所表达的惯性取决于物体之间的相互作用的思想，在一级近似下包含在相对论的方程之中。从这些方程可以推知，惯性至少部分地决定于物质之间的相互作用。由此，马赫的思想很有可能得胜，因为假定惯性部分取决于相互作用，部分又取决于空间的独立性质，是不会令人满意的。但是马赫的这一思想只对应于空间上有界的有限宇宙，而不对应于准欧几里得的无限宇宙。从认识论的观点来看，假定空间的力学性质完全取决于物质更能使人满意，这只是闭合宇宙中的情形。

3. 只有当宇宙中物质的平均密度为 0 时，无限宇宙才是可能的。尽管这种假定在逻辑上可行，但是与宇宙中的物质存在有限平均密度的假定相比则不大可能。

第二版附录

关于“宇宙学问题”

自从这本小册子的第一版问世以来，人们对相对论的研究又取得了一些进展。其中的几个，我们将在这儿扼要提及：

第一个进展，是确证了存在由原点处的(负)引力势引起的谱线红移(red shift)现象(见第 92 页*)。正是由于发现了所谓的“矮星”，这一论证才有可能得到证实。“矮星”的密度比水的大 10^4 倍。这样的恒星(例如，天狼星的暗伴星)，其质量和半径是可以确定的**。理论计算预期，这一谱线红移幅度比太阳谱线红移大 20 倍，而观测结果也确实在此预言范围之内。

将作扼要介绍的第二个进展，涉及物体在引力作用下的运动定律。在最初的理论表述中，引力作用下的粒

* 此为原文页码，中文版为第 94 页。——译者

** 其质量可以利用光谱方法测量天狼星的反作用并由牛顿定律导出；其半径可以从总亮度和单位面积的辐射强度求出，而这些可以由其辐射温度得出。

子运动定律是作为独立于引力场理论之外的基本假定而引入的[见(90)式，它假定粒子在引力作用下沿测地线运动]。这就构成了一个从伽利略惯性定律到存在“真正”引力场情形的假想变换。已经证明，这一运动定律(推广到任意大引力质量的物体情形)可以单独从空无一物空间(empty space)的场方程中推导出来。根据这一推导，运动定律蕴含于下列条件：引力场除了产生场的各质点外，处处无奇性(singular)。

涉及所谓“宇宙学问题”的第三个进展，将要在此详加考察，这部分是因为它的根本重要性，还部分因为对这些问题的探讨尚无定论。我迫切要对这些问题做更为确切的讨论还有另外一个原因，那就是我无法摆脱这种印象，即认为目前在处理这一问题时，对一些最重要的基本观点不够注重。

这一问题大致可以这样表述：基于对恒星的观测，我们有充分的理由相信，这个恒星系统大体上并不像漂浮在空无一物的无限空间中的岛屿，而且并不存在任何诸如所有现存物质总体的引力中心之类的东西。或者毋宁说，我们越来越坚信空间中的物质平均密度不为零。

于是产生了这样的问题：这一由经验提出的假设是否与广义相对论相一致呢?

首先，我们必须对此问题做一个更加准确的表述。让我们考察宇宙的一个有限区域，这个区域足够大，以至于其内物质的平均密度为(x_1，x_2，x_3，x_4)的近似连

续函数。这样一个子空间可以被近似当作一个惯性系（闵可夫斯基空间），我们将使其与恒星运动相联系。在适当调整之后，物质相对于该系的平均速度在所有方向上都将为零。剩下的是个体恒星（近乎随机）的运动，与气体中分子的运动类似。有一点非常重要，那就是由经验所知的恒星运动速度比光速小得多。因此，这时完全忽略恒星的相对运动，考察用相互之间没有粒子的（随机）运动的物质尘（material dust）来代替恒星，是合情合理的。

以上条件绝不足以将此问题变成一个明确问题。最简单最根本的限定将是下列条件：（自然测得的）物质密度 ρ 在（四维）空间中处处相同；对于适当的坐标系，度规与 x_4 无关，并且对于 x_1，x_2，x_3 是均匀和各向同性的。

这正是我最初考察的对大尺度物理空间所做的一种最自然的理想化描述。在本书的第 103～108 页*，我们已经对之进行了讨论。对这个解的反对意见是，必须引入一个没有物理上的合理解释的负压强。为了使这个解成为可能，我最初并没有引进上述负压强而是引入一个新的项进方程，这么做从相对论的观点来看是容许的。于是，引力方程推广为：

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\Lambda g_{ik}+\kappa T_{ik}=0, \tag{1}$$

* 此为原书中的页码，中文版为第 105～110 页。——译者

其中 Λ 是一个普适常量[“宇宙学常量”(cosmologic constant)]。这个第二项的引入造成了理论的复杂化，并且严重地削弱了理论的逻辑简单性。引进第二项的唯一理由是它可以解决由于引入有限的物质平均密度而造成的几乎不可避免的困难。顺便提一句，我们认为牛顿理论中存在着同样的困难。

数学家弗里德曼(Friedman)找到了一个可以摆脱这一窘境的办法*。他的结果后来得到了令人吃惊的证实——哈勃(Hubble)发现星系在膨胀(谱线的红移随着距离的增大而均匀地变大)。下面不过是对弗里德曼的思想进行一番阐述。

对三维各向同性的四维空间

我们观测到，恒星系就跟我们所看到的那样，在各个方向以近乎相同的密度分布在空间中。这就促使我们假定星系的**空间**各向同性对于所有观测者都成立，对于相对于周围物质保持静止的观测者的任何位置和任何时间都成立。另一方面，我们不必假定对于一个与邻近物质保持相对静止的观测者，物质的平均密度对于时间是恒定的。由此，我们放弃了度规场的表达式与时间无关的假定。

---

* 他证明，根据场方程，在整个(三维)空间中不特地推广场方程，就能够让物质具有有限密度。*Zeitschr. f. Phys.* 10 (1922).

现在，我们需要找到一个能够表达宇宙(从空间上讲)处处各向同性的数学形式。通过(四维)空间中的任意一点 P，都存在一条粒子路径(这条路径下面将简称为“测地线”)。令 P 和 Q 是这样一条测地线上两个相距无穷小的点。那么，我们必须要求在任何保持 P 和 Q 固定的坐标系旋转变换下，场的表达形式保持不变。这对于任何测地线的任何元素(element)都应成立*。

上述不变性条件蕴涵着，整个测地线都位于旋转轴上，并且在坐标系的旋转变换下，测地线上的点保持不变。这意味着，解将在坐标系绕着三重无穷(triple infinity)**测地线的所有旋转下保持不变。

为简略起见，我不打算对这个问题的求解进行演绎推导。然而，直观上似乎可以明显看出，在三维空间中，如果一个度规在绕着双重无穷线(double infinity of lines)的转动变换下是不变的，那么这个度规本质上是中心对称型的(通过适当地选择坐标系)，其中转动轴就是径向直线，由对称性可知就是测地线。半径为常量的曲面则是恒定(正)曲率曲面，它们与(径向)测地线处处正交。因此，用不变性的语言，我们可以说：

存在一族与测地线正交的曲面。这些曲面每一个都是

---

* 这一条件不仅对度规有限制，而且还要求对于每一条测地线都存在着一个坐标系，相对于这个坐标系，围绕这一测地线转动的不变性是有效的。

** “三重无穷”线是指四维空间中的三个转动轴，下文“双重无穷”线则是指三维空间中的两个转动轴。——译者

恒定曲率曲面。曲面族中的任意两个曲面所夹的测地线段是相等的。

附注 这个根据直观想像而得到的结论并不能推广到一般情况，因为这族曲面还有可能是恒定负曲率曲面或者欧几里得曲面(零曲率)。

我们感兴趣的四维情形完全与此类似。此外，当度规空间的惯性指标为 1 时，两者没有本质区别。唯一不同的是，我们必须把径向选取为类时的，把相应曲面族的方向选取为类空的。所有点的局部光锥的轴线，都位于径线上。

坐标的选取

现在，我们不选取最能体现宇宙各向同性的四个坐标，而选取一些不同的坐标，它们从物理解释的观点来看更为方便。

我们将粒子的测地线(在中心对称情况下它们是通过中心的直线)选取为类时线，线上 x_1，x_2，x_3 是常量，只有 x_4 独自变化。再令 x_4 等于粒子到中心的度规距离。在这样的坐标系下，度规取如下形式：

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx_4^2 - d\sigma^2 \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ik}\,dx_i\,dx_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

其中 $d\sigma^2$ 是一个球形超曲面上的度规。这样，属于不同超曲面的 γ_{ik}(由于中心对称)在所有超曲面上皆有同样的

形式，除了会相差一个只与 x_4 相关的正因子：

$$\gamma_{ik} = \underset{0}{\gamma}_{ik} G^2, \tag{2a}$$

式中 $\underset{0}{\gamma}$ 只依赖于 x_1，x_2，x_3，而 G 仅是 x_4 的函数。则我们有：

$$\mathrm{d}\underset{0}{\sigma}^2 = \underset{0}{\gamma}_{ik} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2b}$$

是三维中恒定曲率的确定度规，对于每个 G 皆同。

这样一个度规由以下方程描写：

$$\underset{0}{R}_{iklm} - B(\underset{0}{\gamma}_{il}\underset{0}{\gamma}_{km} - \underset{0}{\gamma}_{im}\underset{0}{\gamma}_{kl}) = 0。 \tag{2c}$$

我们可以选取坐标系（x_1，x_2，x_3），使得线元变成共形欧几里得线元：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\underset{0}{\sigma}^2 &= A^2(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2), \\ \text{即 } \underset{0}{\gamma}_{ik} &= A^2\delta_{ik}, \end{aligned} \tag{2d}$$

其中 A 应仅是 r（$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$）* 的正函数。把它代入方程，我们可得 A 的两个方程：

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{Ar}\right)' + \left(\frac{A'}{Ar}\right)^2 &= 0 \\ -\frac{2A'}{Ar} - \left(\frac{A'}{A}\right)^2 - BA^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

第一个方程由

---

* 原文误作“$r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$”。——译者

$$A = \frac{c_1}{c_2 + c_3 r^2} \tag{3a}$$

所满足，其中常量 c_1，c_2，c_3 暂时是任意的。于是由第二个方程，得到

$$B = 4\frac{c_2 c_3}{c_1^2} \tag{3b}$$

对于常量 c_1，c_2 和 c_3，我们有：如果当 $r = 0$ 时 A 应为正数，那么 c_1 和 c_2 同号。因为这三个常量的符号变化并不改变 A，所以我们可以让 c_1 和 c_2 都取正值，也可令 c_2 等于 1。更进一步，因为正因子总可以并入 G^2 中，所以我们还可以不失普遍性地令 c_1 也等于 1。这样，我们可取

$$A = \frac{1}{1 + cr^2}; \quad B = 4c。 \tag{3c}$$

现在存在三种情况：

$c > 0$ （球空间）

$c < 0$ （伪球空间）

$c = 0$ （欧几里得空间）

通过坐标的相似性变换（$x_i' = ax_i$，其中 a 为常量），我们可以进一步得到在第一种情况下 $c = 1/4$，在第二种情况下 $c = -1/4$。

因此，对于这三种情况，我们分别有：

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1+\frac{r^2}{4}}; \quad B = +1 \\
A &= \frac{1}{1-\frac{r^2}{4}}; \quad B = -1 \\
A &= 1; \quad B = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3d}$$

在球空间情况中，单位空间（$G = 1$）的“周长”为 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{1+\frac{r^2}{4}} = 2\pi$，单位空间的“半径”为 1。在所有这三种情况下，时间的函数 G 都是两物质点间的距离（在空间截面上测得）随时间变化的度量。在球空间情况中，G 是在时刻 x_4 时的空间半径。

小结 我们的理想宇宙的**空间**各向同性假定，导致度规取如下形式：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_4^2 - G^2 A^2 (\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2), \tag{2}$$

其中 G 只取决于 x_4，而 A 仅依赖于 r（$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$）*，其中：

$$A = \frac{1}{1+\frac{z}{4}r^2}, \tag{3}$$

并且三种不同的情况可分别由 $z = 1$，$z = -1$ 和 $z = 0$ 来表征。

---

* 原文误排成“$(= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$”。——译者

场方程

现在我们必须进一步满足引力场方程，即不附加我们先前特地引入的“宇宙学项”的场方程：

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\kappa T_{ik}=0 \tag{4}$$

把基于空间各向同性假设的度规表达式代入上式，经过计算，可得：

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\left(\frac{z}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}+2\frac{G''}{G}\right)GA\delta_{ik}$$

$$(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

$$R_{44}-\frac{1}{2}g_{44}R=-3\left(\frac{z}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}\right) \tag{4a}$$

$$R_{i4}-\frac{1}{2}g_{i4}R=0\quad(i=1,\ 2,\ 3)$$

进一步，对于“尘埃”（dust），我们得到物质的能量张量 T_{ik}：

$$T^{ik}=\rho\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}。 \tag{4b}$$

物质沿之运动的测地线是 x_4 沿之变化的线，在测地线上 $\mathrm{d}x_4=\mathrm{d}s$，所以我们有

$$T^{44}=\rho \tag{4c}$$

这唯一一个不为零的分量。通过下降指标，我们得到 T_{ik} 的唯一非零分量：

$$T_{44}=\rho。 \tag{4d}$$

对此加以考察，场方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{z}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}+2\frac{G''}{G}&=0\\ \frac{z}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}-\frac{1}{3}\kappa\rho&=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中$\frac{z}{G^2}$表示在空间截面（x_4 = 常量）里的曲率。因为 G 作为时间的函数在所有情况下都表示两质点之间度规距离的相对度量，所以$\frac{G'}{G}$表示的是哈勃膨胀（Hubble's expanision）*。方程中不出现 A，这也是具有所要求的对称型的引力场方程有解的必要条件。两式相减，可得：

$$\frac{G''}{G}+\frac{1}{6}\kappa\rho=0\tag{5a}$$

因为 G 和 ρ 必须处处为正，所以对于非零的 ρ，G'' 处处为负。因此，$G(x_4)$既无极小值，亦无拐点，进而方程没有 G 为常量的解。

空间曲率为零（$z=0$）的特例

密度 ρ 不为零的最简单特例是 $z=0$ 的情形，此时截面（x_4 = 常量）不是弯曲的。如果我们令 $\frac{G'}{G}=h$，

---

* 在现代术语中，$\frac{G'}{G}$ 称为“哈勃常量”或“哈勃参量”。——译者

则这种情况下的场方程为：

$$\left.\begin{aligned} 2h' + 3h^2 &= 0 \\ 3h^2 &= \kappa\rho \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

哈勃膨胀 h 和平均密度 ρ 之间的关系（由第二个方程给出），至少就数量级而言是可与经验进行某种程度的比较。对于 10^6 秒差距的距离，膨胀为 432 千米/秒。若用通常使用的度量单位制（用厘米作长度单位，用光传播 1 厘米所需时间作时间单位）表示这一关系，我们可得：

$$h = \frac{432 \cdot 10^5}{3.25 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}\right)^2$$
$$= 4.71 \cdot 10^{-28}。$$

进一步，因为 $\kappa = 1.86 \cdot 10^{-27}$［见(105a)式］，所以由(5b)式的第二个方程可得

$$\rho = \frac{3h^2}{\kappa} = 3.5 \cdot 10^{-28} \text{ 克 / 厘米}^3。$$

这一数值在数量级上与天文学家（根据可见恒星和恒星系的质量及视差得出）的估计值基本一致。我在这里引用麦克维蒂（G. C. McVittie）的话［《伦敦物理学会会议录》(Proceedings of the Physical Society of London)，第 51 卷，1939 年，第 537 页］作为例证："平均密度肯定不大于 10^{-27} 克/厘米^3，它更有可能处于 10^{-29} 克/厘米^3 这一数量级上。"

由于确定 ρ 的大小是一件非常困难的事情，因此，

我认为这一数值暂且是一个令人满意的符合。因为所确定的 h 值比 ρ 值要准确得多，所以可以不过分地说，确定可测空间的结构与更准确地确定 ρ 的值之间有着非常紧密的关系。根据方程(5)的第二式，空间曲率在一般情况下可由下式给出：

$$zG^{-2} = \frac{1}{3}\kappa\rho - h^2。\tag{5c}$$

这样，如果上式右边为正，则空间具有正的恒定曲率，因而是有限的；它的数值可以用与上述差值一样的精度确定下来。而如果右边为负，则空间是无限的。目前 ρ 的确定尚不足以使我们从这一关系推导出空间（截面 x_4 = 常量）的非零平均曲率。

在忽略空间曲率的情况下，通过适当选取 x_4 的初始点，方程(5c)可以写成：

$$h = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x_4}。\tag{6}$$

这个方程在 $x_4 = 0$ 处具有奇点，所以该空间或者在负膨胀，从而时间的上限为 $x_4 = 0$；或者在正膨胀，时间开始于 $x_4 = 0$。后一种情况就对应于我们在自然界中所发现的。

从 h 的测量值，我们可以推算宇宙的年龄是 $1.5 \cdot 10^9$ 年。这一结果与从铀裂变所得到的地壳年龄大致相同。这是一个荒谬的结果，由于不止一个原因它已经使人们怀疑这一理论的有效性。

现在的问题是：在假设空间曲率实际上可以被忽略的前提下所产生的这一困难，是否可以通过引入一个适当的空间曲率来消除呢？（5）式的第一个方程决定 G 的时间依赖性，现在它可以派上用场了。

空间曲率不为零情况下方程的解

如果考察空间截面（x_4 = 常量）的空间曲率，我们可得如下方程：

$$\begin{aligned} zG^{-2} + \left(2\frac{G''}{G} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2\right) = 0 \\ zG^{-2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \frac{1}{3}\kappa\rho = 0。\end{aligned} \tag{5}$$

对于 $z=+1$，曲率为正；对于 $z=-1$，曲率为负。式中第一个方程是可积的(integrable)。我们首先把它写成如下形式：

$$z + 2GG'' + G'^2 = 0。\tag{5d}$$

如果把 $x_4(=t)$ 当作 G 的函数，则我们有：

$$G' = \frac{1}{t'},\ G'' = \left(\frac{1}{t'}\right)'\frac{1}{t'}。$$

若将 $\frac{1}{t'}$ 记为 $u(G)$，则有

$$z + 2Guu' + u^2 = 0 \tag{5e}$$

或

$$z + (Gu^2)' = 0。\tag{5f}$$

由此经过简单的积分，可得：

$$zG + Gu^2 = G_0, \tag{5g}$$

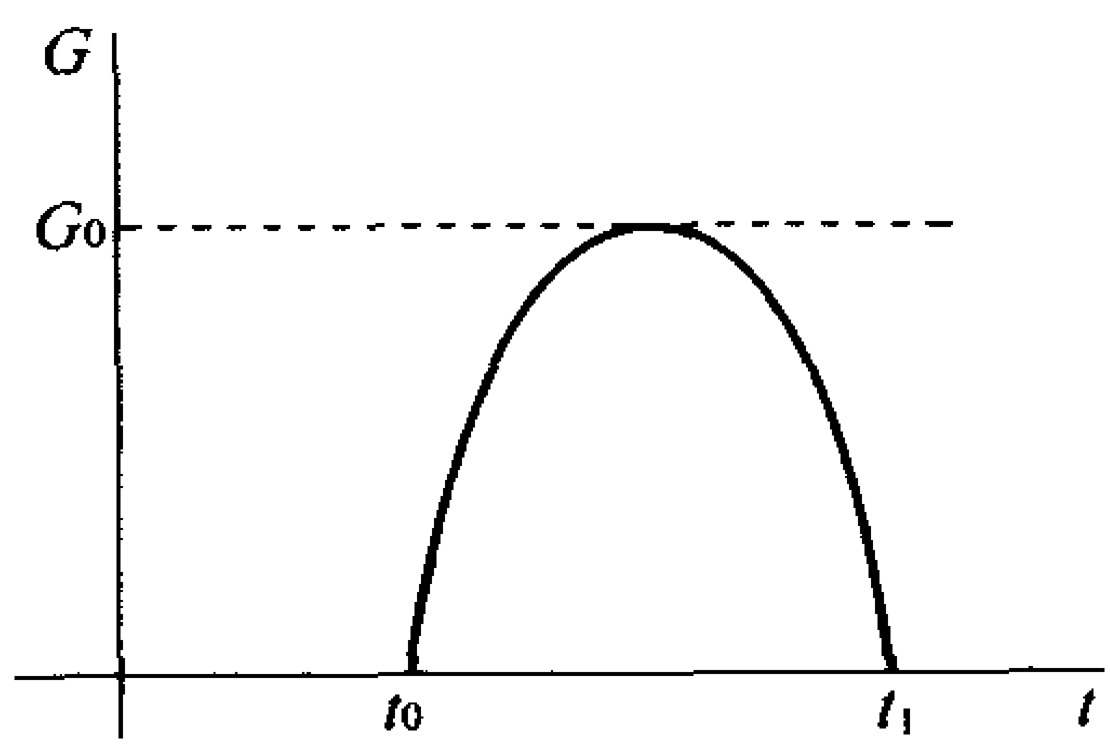
或者，由于我们已令 $u = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}G}} = \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{G_0 - zG}{G}, \tag{5h}$$

其中的 G_0 为常量。如果对(5h)式微分，并且考虑到 G'' 为负数[由(5a)式得出]，那么我们会发现这一常量不可能为负数。

(a) 正曲率空间

G 的取值区间为 $0 \leqslant G \leqslant G_0$，它可以定量地用草图(1)表示如下：



(1)

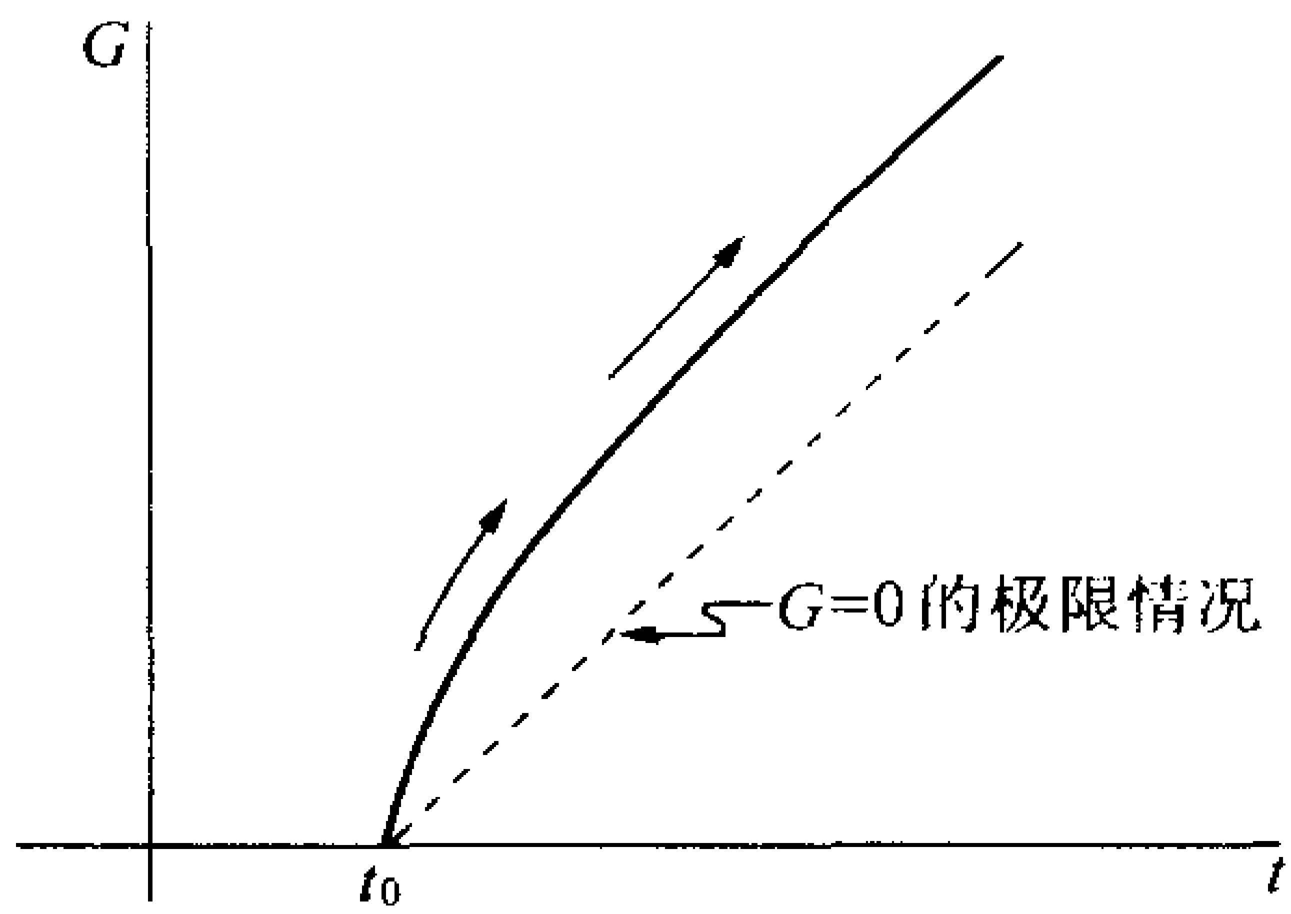
半径 G 先从 0 开始增大至 G_0，然后又连续地减小到 0。空间截面是有限的(球形的)：

$$\frac{1}{3}\kappa\rho - h^2 > 0。 \tag{5c}$$

(b) 负曲率空间

$$\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{G_0+G}{G}。$$

G 随着时间 t 从 $G=0$ 变到 $G=+\infty$（或者从 $G=\infty$ 变到 $G=0$）。因此，$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$ 在区间 $+\infty$ 到 1 内单调递减。用草图 (2) 可表示为



(2)

于是这是一个持续膨胀而不收缩的情况。空间截面是无限的，并且有

$$\frac{1}{3}\kappa\rho-h^2<0。\tag{5c}$$

根据方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{G_0}{G}\tag{5h}$$

可知，先前讨论的平面空间截面情形是介于这两种情况之间的一种情形。

附注 负曲率情形包含着一个 $\rho=0$ 的极限情况。

此时 $\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1$（见草图 2）。这是欧几里得情形，因为计算表明，这时曲率张量为 0。

假如具有非零 ρ 值的负曲率空间越来越接近这一极限情形，那么随着时间的推移，空间内的物质对空间结构的影响将越来越小。

根据以上对非零曲率情况的研究，可以得到如下结果。对于每一个非零（"空间"）曲率状态，跟零曲率状态一样，都存在着一个 $G = 0$ 的膨胀就是从此开始的初态。因而，这是一个物质密度为无穷大而场是奇性的截面。引入这样一个新的奇点本身看起来就存在着问题*。

此外，对于从膨胀开始到 h 下降到一个固定值$\frac{G'}{G}$的这段时间间隔，空间曲率的影响在数量级上是可以忽略的。这段时间间隔可以由(5h)式经过初等运算得到，这里从略。下面我们仅考虑 $\rho = 0$ 的膨胀空间。如前所述，这是负空间曲率的特例。由(5)式的第二个方程可得（记住要对第一项进行变号）：

$$G' = 1。$$

所以（通过适当选取 x_4 的初始点）我们有：

---

* 但是，有一点值得我们注意：目前的相对论性引力理论乃基于"引力场"和"物质"这两个概念的分离。或许有理由认为，正是由于这一原因使得该理论不适用于极高物质密度。很可能对于一个统一理论而言，奇点并不会出现。

$$G = x_4$$

$$h = \frac{G'}{G} = \frac{1}{x_4}。 \tag{6a}$$

因而在这一极端情形下所得到的膨胀时间，与在零空间曲率情形下[见方程(6)]所得到的结果几乎一样，只是差一个数量级为 1 的因子而已。

因此，在讨论方程(6)时所提及的疑难(也就是，理论给出的恒星及星系的演化年龄比我们目前可观测到的还要小很多)，并不能通过引入空间曲率来消除。

通过推广对于有质量物质的方程来延伸上述考察

对于所有目前得到的解，在系统中都存在着一个状态，在此状态下度规成为奇性的($G = 0$)，而且密度 ρ 变为无穷大。于是就产生了以下问题：这种奇点的出现是不是可归结为我们把物质当作一种不抵抗凝聚的尘埃的缘故呢？我们是否不曾毫无理由地忽略掉单颗恒星的随机运动(random motion)所带来的影响呢？

例如，我们可以认为尘埃中的微粒之间不是相互静止的，而是像气体中的分子一样相互之间存在着随机运动。这样的物质会产生抵抗绝热凝聚(adiabatic condensation)的阻力(resistance)，而且它随着凝聚作用的增强而变大。这样难道不能够防止发生无限凝聚吗？下面我们将证明，这一对物质描述方式的修改并不能改变上述解的主要性质。

依狭义相对论处理的"粒子气"

我们考察一群质量为 m 的粒子，它们彼此平行运动。经过适当变换后，这群粒子可以被认为是静止的。这样，粒子的空间密度 σ 在洛伦兹变换下保持不变。对于任意一个洛伦兹系统，

$$T^{\mu\nu} = m\sigma \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s} \tag{7}$$

都有不变的含义(粒子群的能量张量)。如果存在多个这样的粒子群，对它们求和，可得对其全体，有

$$T^{\mu\nu} = m \sum_{p} \sigma_{p} \left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}\right)_{p} \left(\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s}\right)_{p}。 \tag{7a}$$

关于这个形式，我们可以选择洛伦兹系统的时间轴，使 $T^{14} = T^{24} = T^{34} = 0$。进一步，由系统的空间转动，可得：$T^{12} = T^{23} = T^{31} = 0$。更进一步，假设粒子气(particle gas)是各向同性的。这意味着 $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$。它跟 $T^{44} = u$ 一样是不变量。因此，可用 u 和 p 表示下述不变量：

$$\begin{aligned}\mathscr{T} = T^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= T^{44} - (T^{11} + T^{22} + T^{33}) \\ &= u - 3p。\end{aligned} \tag{7b}$$

由 $T^{\mu\nu}$ 的表达式可知，T^{11}，T^{22}，T^{33} 和 T^{44} 都是正的；所以 T_{11}，T_{22}，T_{33} 和 T_{44} 也同样如此。

现在，引力方程为：

$$1 + 2GG'' + G^{2} + \kappa T_{11} = 0$$

$$-3G^{-2}(1+G'^{2})+\kappa T_{44}=0。\qquad(8)$$

由第一个方程可知，这里的G''也总为负(因为$T_{11}>0$)；而且，对于给定的G和G'，T_{11}项只能使G''值减小。

因此我们可以看出，考虑质点之间的随机相对运动并不能从根本上改变我们的结果。

小结及其他附注

(1) 虽然从相对论的观点来看，在引力方程中引入"宇宙学项"是可以的，但是从逻辑简单性(logical economy)的观点来看，它却应当被排除。因为弗里德曼首先证明，如果承认两质点之间的度规距离是随时间变化的，那么就可以调和引力方程的最初形式与物质密度处处有限之间的矛盾*。

(2) 仅要求宇宙具有空间各向同性，就可以导出弗里德曼形式(Friedman's form)。因此，毫无疑问，它就是适合宇宙学问题的普遍形式。

(3) 忽略空间曲率的影响，我们得到了平均密度和哈勃膨胀之间的关系，这在数量级上已经得到经验的证实。

我们进一步得知，宇宙从膨胀开始一直到现在所经

---

* 假如哈勃膨胀在广义相对论创立之时已被发现，那么宇宙学项决不会被引入。现在看来，在场方程中引入这样一项实在没有什么道理，因为它已经失去了当初引进它的唯一理由：得到宇宙学问题的一个自然的解。

历的时间是一个数量级为 10^9 年的值。这一时间太短了，它与恒星演化的有关理论不一致。

（4）后一结果既不能通过引入空间曲率而得到改变，也不会由于考虑到恒星以及恒星系彼此之间的随机运动而改变。

（5）有些人试图不用多普勒效应（Doppler effect）来解释谱线的哈勃红移。然而，在已知的物理事实中并没有证据支持这种想法。根据这一假想，两颗恒星 S_1 和 S_2 可以由一根刚性杆把它们连接在一起。假如沿着杆传播的光的波长数会在运动过程中随时间改变，则一束从 S_1 传送到 S_2 然后再反射回 S_1 的单色光，会以不同的频率到达（用 S_1 上的时钟测量）。这种观点意味着定域测量到的光速与时间有关，这甚至与狭义相对论也是相违背的。此外值得注意的是，光信号在 S_1 和 S_2 之间来回传播时会构成一个“时钟”，而它与 S_1 中的时钟（例如，原子钟）之间的关系也不是恒定的。这就意味着在相对论的意义上没有度规存在了。这不仅使我们无法明白相对论中的所有关系式，而且还与下述事实相抵触：原子理论的某些表现形式并不是以“相似性”，而是以“全等性”相关联（存在着锐光谱线以及原子体积等）。

但是，以上考察是基于波动理论的，而上述假设的某些支持者可能会设想光的膨胀过程全然不是按照波动理论而是按照类似于康普顿效应（Compton effect）的方式

进行的。这种由无散射的康普顿过程所构成的假说，从我们现在所掌握的知识来看，尚未得到证实。而且它也不能解释为什么频率的相对移动与原先的频率无关。因此，我们只能把哈勃的发现当作恒星系的膨胀。

(6) 对于“世界之初”(膨胀开始的时候)大约只在 10^9 年前这一结果的质疑，有着经验和理论性质两方面的根源。天文学家倾向于把不同光谱类型的恒星作为均一演化过程的年代标志，该过程所需要的时间将远远长于 10^9 年。因此，这种理论与相对论方程所得到的结果相抵触。然而，在我看来，恒星“演化理论”的根基不如场方程的稳固。

理论上的怀疑基于这样一个事实：在膨胀开始的时候，度规变成奇性的，密度 ρ 为无穷大。关于这一点，应当注意的是：目前的相对论乃基于把物理实在分成一边是度规场(引力)另一边是电磁场和物质的分割。但是实际上，空间可能有均一的特征，目前的理论只有在极限情况下才有效。对于高密度场和高密度物质，场方程甚至其中的场变量都将变得没有实际意义。因此，我们不能指望场方程适用于场和物质的密度都非常高的情况，也不能够认为“膨胀之初”必定意味着数学意义上的奇点。我们必须要认识到的是：场方程在这样的区域内可能不再有效了。

可是，从现有恒星和恒星系演化的观点来看，这种考察并不改变以下事实：“世界之初”确实构成了一个起

点，在这一起点上，恒星以及恒星系还没有作为独立的事物(individual entities)出现。

(7) 然而，还是有一些经验论点**支持**理论所需的动态空间概念(dynamic concept of space)。尽管铀的分裂速度比较快，而且也没有可能发现铀的产生过程，但是为什么铀依然存在？为什么空间没有到处充满着辐射而使得夜空看起来像一个闪烁的表面呢？这是一个静态宇宙观点至今也没有给出一个满意答案的老问题。但是如果探讨诸如此类的问题，我们就走得太远了。

(8) 根据这些理由，看来尽管存在“寿命”过短等问题，我们还是应当认真对待膨胀宇宙(expanding universe)这一思想。如果这样，那么主要问题就归结为空间到底具有正还是负的空间曲率。对于这个问题，我们要作如下附注。

从经验论观点来看，问题归结为表达式 $\frac{1}{3}\kappa\rho - h^2$ 是正的(球形情况)还是负的(伪球形情况)。在我看来，这是最重要的问题。在天文学目前的状态下，作出经验决定并非没有可能。因为 h(哈勃膨胀)有比较公认的值，所以一切都取决于以尽可能最高的精度确定 ρ 的值。

可以想像，宇宙将会被证明是球形的(很难想像有人能证明宇宙是伪球形的)。这是因为人们总是能够给出 ρ 的下限而不是上限。情况就是这样，因为我们很难确定天文学上不可观测的(无辐射)物质对 ρ 的贡献到底有多

大。我打算就此问题作一番更为详细的讨论。

我们可以仅仅考虑辐射恒星的质量而给出 ρ 的下限(ρ_s)。如果看起来 $\rho_s > \frac{3h^2}{\kappa}$，那么我们可以断定宇宙是球形空间。如果看起来 $\rho_s < \frac{3h^2}{\kappa}$，那么我们不得不试图确定无辐射物质所占的比例 ρ_d。我们想要表明，我们还可以找到$\frac{\rho_d}{\rho_s}$的下限。

考虑一个天文对象，它含有许多颗恒星，且可被以足够的精度当作一个静态系统，例如一个(已知视差的)球状星团。根据用光谱学的方法确定的各恒星的速度，我们可以(在合理的假设下)确定引力场，因而可以确定产生该场的物质质量。用这种方法计算得到的质量可以与星团中可见恒星的质量相比较，故至少得到产生引力场的物质质量比星团中可见恒星的质量多出多少的粗略近似。这样我们就可以求出特定星团$\frac{\rho_d}{\rho_s}$的一个估计值。

因为平均说来无辐射恒星比辐射恒星小，所以由于星团中各恒星之间的相互作用，它们的速度平均来说应当比质量较大的辐射恒星大。这样，它们比质量较大的恒星更容易从星团中“挥发”。因此可以预料，质量较轻的天体在星团内部的相对丰度比星团外部的要小一些。所以我们可以将$\left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)_k$(在上述星团中的密度比)作

为$\frac{\rho_d}{\rho_s}$在全空间中的下限。从而我们就得到了空间中物质的整个平均密度的下限：

$$\rho_s\left[1+\left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)_k\right]。$$

如果这个量大于$\frac{3h^2}{\kappa}$，则可断言空间具球形特性。另一方面，对于确定 ρ 的上限，我想不出任何既合理又可靠的方法。

（9）最后但并非最不重要的一点：从这里所使用的意义上讲，宇宙的年龄肯定必须要比根据放射性矿物所确定的地壳年龄大。因为无论从哪方面来看，用这些矿物质来确定年龄是可靠的，所以只要发现这里所表述的宇宙学理论与这种结果相悖，它就被否证。在这种情况下，我就看不出合理的解决方法。

附录二 非对称场的相对论性理论

在开始正题之前，我打算先讨论一般场方程组的“强度”。这一讨论不限于这里的特定理论，它有着本质上的重要性。然而，要更深入地理解我们将要讨论的问题，这部分内容几乎是不可或缺的。

关于场方程组的“相容性”和“强度”

给定某些场变量和关于它们的场方程组，在一般情况下，后者并不能完全确定一个场。对于场方程的解，它仍然保留着一些自由数据。与场方程组相容的自由数据数目越少，场方程组就越“强”。很明显，若不考虑其他方面的因素而单单从这一方面来选择场方程，那我们总希望选取较“强”的而非较弱的方程组。我们的目标就是要找到方程组的这一强度的量度。我们将要证明，可以定义这样的量度，甚至可以使我们比较那些场变量的数目和种类都不同的场方程组的强度。

下面我们将举一些越来越复杂的例子来介绍所涉及

的概念和方法，我们仅限于讨论四维场，并且还将在举例过程中陆续引入一些相关的概念。

例一：**标量波动方程***

$$\phi_{,11}+\phi_{,22}+\phi_{,33}-\phi_{,44}=0。$$

此处方程组由一个场变量的一个微分方程组成。我们让 ϕ 在点 P 的邻域内展开成泰勒级数(这已预设 ϕ 的解析特性)。那么，级数的全体系数就完全描述函数 ϕ。第 n 阶项系数的数目(即 ϕ 在 P 点处的第 n 阶导数)等于 $\frac{4\cdot 5\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdots n}$，简记为 $\binom{4}{n}$，而且，如果微分方程没有蕴含各系数之间的某种关系，则所有这些系数都可以任意选取。因为方程是二阶的，所以对方程进行 $(n-2)$ 重微分后可以得到这些关系。这样，我们就得到了第 n 阶系数的 $\binom{4}{n-2}$ 个条件。所以自由的第 n 阶系数的数目为：

$$z=\binom{4}{n}-\binom{4}{n-2}。\tag{1}$$

此值对于任意 n 都是正的。所以，如果确定了所有阶数小于 n 的自由系数，那么 n 阶系数的条件总能被满足，而不改变已经选取的系数。

类似的推理可应用于多个方程组成的方程组。如果

* 以下，逗号总表示偏微商，例如：$\phi_{,i}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$，$\phi_{,11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^1\partial x^1}$ 等等。

第 n 阶自由系数的数目不小于零，我们就称此方程组是**绝对相容的**(absolutely compatible)。现在我们仅限于考察这样的方程组。据我所知，物理学中使用的所有方程组都是这种类型的。

现在让我们重新写出方程(1)，我们有

$$\binom{4}{n-2} = \binom{4}{n}\frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \binom{4}{n}\left(1 - \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \cdots\right),$$

其中 $z_1 = +6$。

如果我们仅考虑 n 值较大的情况，那么我们可以忽略圆括号内的$\frac{z_2}{n^2}$等项，于是我们得到(1)式的**渐近**表达式

$$z \sim \binom{4}{n}\frac{z_1}{n} = \binom{4}{n}\frac{6}{n}。\qquad (1a)$$

我们称 z_1 为“自由系数”(coefficient of freedom)，在我们这种情况下它的值为 6。这个系数越大，相应的方程组就越弱。

例二：**空无一物空间的麦克斯韦方程组**

$$\phi^{is}_{,s} = 0; \qquad \phi_{ik,l} + \phi_{kl,i} + \phi_{li,k} = 0。$$

利用

$$\eta^{ik} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

提高反对称张量 ϕ_{ik} 的协变指标，可得 ϕ^{ik}。

这些是关于6个场变量的4+4个场方程。在这8个方程中有2个是恒等式。如果把场方程的左边分别记为 G^i 和 H_{ikl}，那么恒等式有如下形式：

$$G^i_{;i} \equiv 0; \quad H_{ikl,m} - H_{klm,i} + H_{lmi,k} - H_{mik,l} = 0。$$

对于这种情况，我们进行如下推理。

对6个场分量进行泰勒展开，可以产生

$$6\binom{4}{n}$$

个第 n 阶系数。对8个一阶方程进行（$n-1$）重微分后，得到第 n 阶系数必须满足的条件。因此这些条件的数目为

$$8\binom{4}{n-1}。$$

然而，这些条件并不相互独立，因为在这8个方程中存在着2个二阶的恒等式。对它们进行（$n-2$）重微分后，可以在由场方程推出的条件中产生

$$2\binom{4}{n-2}$$

个代数恒等式。因此，n 阶自由系数的个数为

$$z = 6\binom{4}{n} - \left[8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}\right]。$$

z 对所有 n 都为正。因此，这个方程组是“绝对相容

的”。如果我们在上式右边提出因子$\binom{4}{n}$，并且像上面一样对大 n 展开，我们得到如下渐近表达式：

$$
\begin{aligned}
z &= \binom{4}{n}\left[6-8\frac{n}{n+3}+2\frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)}\right]\\
&\sim \binom{4}{n}\left[6-8\left(1-\frac{3}{n}\right)+2\left(1-\frac{6}{n}\right)\right]\\
&\sim \binom{4}{n}\left[0+\frac{12}{n}\right]。
\end{aligned}
$$

由此，$z_1=12$。这表明——及到何种程度——此方程组对场的确定不如标量波动方程（$z_1=6$）的情况中那么强。在这两种情况下，圆括号内的常数项都为零，表明所涉及的方程组不让任何四变量函数自由。

例三：**空无一物空间的引力方程。** 我们把它们写成如下形式：

$$R_{ik}=0;\quad g_{ik,l}-g_{sk}\Gamma_{il}^{s}-g_{is}\Gamma_{lk}^{s}=0。$$

R_{ik}中只含有 Γ，而且对其是一阶的。在此我们把 g 和 Γ 当作独立的场变量。第二个方程表明把 Γ 当作一阶微商的量是很方便的。这就是说，在泰勒展开式

$$\Gamma=\underset{0}{\Gamma}+\underset{1}{\Gamma}_{s}x^{s}+\underset{2}{\Gamma}_{st}x^{s}x^{t}+\cdots$$

中，把 $\underset{0}{\Gamma}$ 当作一阶的，把 $\underset{1}{\Gamma}_{s}$ 当作二阶的，等等。于是，我们必须把 R_{ik} 当作二阶的。在这些方程之间，存在着 4 个比安基恒等式（Bianchi identities），根据我们的约定，它们应被看成是三阶的。

在一般的协变方程组中出现了一个新情况(这对于正确地计算自由系数的数目很重要):仅仅通过坐标变换就可以相互转化的场,应当被认为是一个且同一个场的不同表达方式。于是,在 g_{ik} 的

$$10\binom{4}{n}$$

个第 n 阶系数之中只有一部分描述了在本质上不同的场。因此,实际上确定场的展开系数的数目会减少到某一数值,现在我们必须来计算这个数值。

在 g_{ik} 的变换律

$$g_{ik}{}^{*}=\frac{\partial x^{a}}{\partial x^{i^{*}}}\frac{\partial x^{b}}{\partial x^{k^{*}}}g_{ab}$$

中,g_{ab} 和 $g_{ik}{}^{*}$ 实际上表示同一个场。如果将上式对 x^{*} 微分 n 次,会注意到 x 对于 x^{*} 的 4 个函数的所有 $(n+1)$ 阶导数都包含在 g^{*} 展开式的第 n 阶系数中。也就是说有 $4\binom{4}{n+1}$ 个系数不参与描写场。因此,在任意一个广义相对论性理论中,都必须从第 n 阶系数的总数中减去 $4\binom{4}{n+1}$,以便考虑理论的广义协变性。于是对第 n 阶自由系数个数的计算产生如下结果。

根据刚才推导的修正方案,10 个 g_{ik}(零阶导数的量)和 40 个 Γ^{l}_{ik}(一阶导数的量)产生

$$10\binom{4}{n}+40\binom{4}{n-1}-4\binom{4}{n+1}$$

个相关的第 n 阶系数。对于这些系数，场方程(10 个二阶方程和 40 个一阶方程)可以产生

$$N = 10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}$$

个条件。然而，我们必须从这个数目中减去这 N 个条件之间恒等式的数目

$$4\binom{4}{n-3},$$

这些恒等式来源于(三阶的)比安基恒等式。因此有，

$$z = \left[10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1}\right] - \left[10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}\right] + 4\binom{4}{n-3}。$$

再次提出因子$\binom{4}{n}$，对于大 n，我们得到如下渐近表达式：

$$z \sim \binom{4}{n}\left[0 + \frac{12}{n}\right]。\quad 故\ z_1 = 12。$$

这里 z 对所有 n 值也同样都为正，所以这个方程组在先前所定义的意义上来说，是绝对相容的。令人吃惊的是，空无一物空间的引力方程确定其场与电磁场情况中的麦克斯韦方程组所起的作用，竟然一样强。

相对论性场论

一般性讨论

把物理学从引入“惯性系”(或多个惯性系)的必然

性中解放出来，是广义相对论的主要功绩。“惯性系”这一概念不令人满意，其原因在于：它从所有可能的坐标系中挑选了某些坐标系，而并没有任何更深刻的依据。然后还要假设物理学定律(例如惯性定律和光速不变定律)仅在这样的惯性系中成立。这样，空间本身就在物理学系统中被指派了一个特殊的角色，使它与物理描述的所有其他要素区分开。空间在所有过程中都起着决定性作用，而它却从不受这些过程的影响。虽然这样一个理论在逻辑上可能，它却很不令人满意。牛顿早已充分地觉察了这一缺陷，但是他也清楚地明白，在他那个时代，物理学别无他途可走。在后来的物理学家中，最早关注这一问题的是马赫。

物理学基础的后牛顿进展(post-Newtonian development)中，是哪些革新使得我们能够克服惯性系呢？首先，是由法拉第(Faraday)和麦克斯韦所引入，并应用于他们的电磁理论中的场概念，更准确地说，乃是场这一独立的、不能进一步约化的基本概念的引入。就我们目前的判断而言，广义相对论只能被看作为一种场论(field theory)。如果我们还坚持认为现实世界由质点构成，各质点在彼此间相互作用的力影响下运动，那么，广义相对论就不可能得到发展。假如有人据等效原理向牛顿解释为什么惯性质量与引力质量相等，他势必要用下述异议来回答：物体相对于加速参考系的加速度，确实跟有一个引力天体靠近其表面时它所受到的加速度相同；但是，在

前一种情况下，产生加速度的物质在哪儿呢？ 很明显，相对论预设场概念的独立性。

使广义相对论得以建立的数学知识，我们归功于高斯和黎曼的几何学研究。 前者在他的曲面论中研究了嵌入到三维欧几里得空间中的曲面的度规性质，并且他还证明了这些性质能够用仅与曲面自身有关而同曲面与它所嵌入的空间之间的关系无关的概念来描述。 因为一般来说，在一个曲面上不存在优先的坐标系，所以他的这一研究第一次用广义坐标表达了相关量。 黎曼把这个二维曲面论推广到了任意维空间(具有黎曼度规的空间，这个度规由二秩对称张量场来描述)。 在他那令人钦佩的研究里，他发现了曲率在更高维度规空间中的一般表达式。

对于建立广义相对论至关重要的数学理论，刚才简单勾勒的发展首先使黎曼度规成了广义相对论中的基本概念，也为摒弃惯性系奠定了基础。 然而后来，莱维-齐维塔正确地指出，使摒弃惯性系成为可能的理论要素其实在于无穷小位移场 Γ_{ik}^{l}。 而定义它的度规场(对称张量场)g_{ik}就其确定位移场而言，与摒弃惯性系只有间接的联系。 以下考察将使这一点变得更清楚。

从一个惯性系到另一个惯性系的转换，是由一个(特殊类型的)线性变换决定的。 如果在相距任意远的两点 P_1 和 P_2 处，分别存在两个矢量 $\underset{1}{A}^i$ 和 $\underset{2}{A}^i$，而且它们的对应分量相等 ($\underset{1}{A}^i = \underset{2}{A}^i$)，那么在可允许的变换下，这

一关系保持不变。如果在变换公式

$$A^{i*}=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}A^a$$

中，系数$\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$与$x^a$无关，那么这个矢量分量的变换公式与位置无关。这样，若我们仅限于惯性系，则在不同点P_1和P_2处的这两个矢量，其对应分量的恒等是一个不变关系。然而，如果我们放弃惯性系概念，从而允许进行任意连续坐标变换，那么系数$\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$将依赖于$x^a$，进而隶属于空间中不同两点的两个矢量的分量之恒等丧失其不变含义。因此，不同点处的矢量就不再可以直接进行比较了。据此，在广义相对性理论中，我们不再能够通过对给定张量进行简单的微分而构成新的张量，在这样的理论中，不变构成也要少得多。但是，这一缺陷可以通过引入无穷小位移场来得到补救。无穷小位移场之所以可以取代惯性系，是因为它使我们能够比较两个无限接近的点处的矢量了。从这一概念出发，我们接下来将介绍相对论性场论，并将省略一切与我们的目的无关的内容。

无穷小位移场 Γ

对于点P(坐标为x^t)处的反变矢量A^i，我们用双线性表达式

$$\delta A^i=-\Gamma^i_{st}A^s\mathrm{d}x^t \tag{2}$$

把它与一个无限接近的点（$x^t + dx^t$）处的矢量（$A^i + \delta A^i$）关联起来，式中 Γ 是 x 的函数。另一方面，如果 A 是矢量场，那么在点（$x^t + dx^t$）处的（A^i）分量等于 $A^i + dA^i$，其中*

$$dA^i = A^i_{;t} dx^t。$$

在相邻点（$x^t + dx^t$）处的这两个矢量之差本身也是一个矢量

$$(A^i_{;t} + A^s \Gamma^i_{st}) dx^t \equiv A^i_t dx^t,$$

它联系着两个无限接近的点处的矢量场分量。这样，位移场取代了惯性系，因为它体现了以前由惯性系提供的这一联系。圆括号内的表达式（简记为 A^i_t）是一个张量。

A^i_t 的张量特性决定 Γ 的变换律。首先，我们有：

$$A^i_{k^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} A^i_k。$$

在两个坐标系中使用相同的指标，并不意味着它指的是对应的分量。也就是说，x 中的 i 和 x^* 中的 i 相互独立地从 1 到 4 取值。经过一些运算之后，这种记法使方程变得更加清晰明了。现在我们作代换，用

$$A^{i^*}_{;k^*} + A^{s^*} \Gamma^{i}_{sk}{}^* \qquad 替换\ A^i_k{}^*,$$

---

* 跟以前一样，“$_{,t}$”表示普通微商$\frac{\partial}{\partial x^t}$。

$$A^i_{;k} + A^s \Gamma^i_{sk} \qquad 替换 A^i_k,$$

然后再用

$$\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} A^i \qquad 替换\ A^{i^*},$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad 替换 \frac{\partial}{\partial x^{k^*}},$$

这样可以导出一个方程，这个方程除了 Γ^* 之外，只包含原来系统的场量及其对原来坐标 x 的导数。从这个方程中解出 Γ^*，就可得到我们想要的变换公式：

$$\Gamma^{i}_{kl}{}^{*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}} \Gamma^i_{kl} - \frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}}。 \tag{3}$$

公式（右边）的第二项在一定程度上可以被化简：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}} &= -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}}\left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\right)\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}}\left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{k^*}}\right) + \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{l^*}} \\ &= \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{l^*}}。 \end{aligned} \tag{3a}$$

我们称这样的量为**赝张量**（pseudo tensor）。在线性变换下，它像张量一样变换；而在非线性变换下，变换后会包含一个附加项，它不含有待变换的表达式，而仅仅跟变换系数有关。

关于位移场的一些评注

1．把下标对调可得量 $\tilde{\Gamma}^{i}_{kl}(\equiv \Gamma^{i}_{lk})$，它也是按照(3)式变换的，因此也是一个位移场。

2．对(3)式进行关于下标 k^* 和 l^* 的对称化(symmetrizing)或反对称化(anti-symmetrizing)后，我们得到两个等式：

$$\Gamma^{i}_{\underline{kl}}{}^{*}\left(=\frac{1}{2}(\Gamma^{i}_{kl}{}^{*}+\Gamma^{i}_{lk}{}^{*})\right)$$

$$=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^{l}}{\partial x^{l^*}}\Gamma^{i}_{\underline{kl}}-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^{s}\partial x^{t}}\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^{t}}{\partial x^{l^*}}$$

$$\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{kl}}{}^{*}\left(=\frac{1}{2}(\Gamma^{i}_{kl}{}^{*}-\Gamma^{i}_{lk}{}^{*})\right)=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^{l}}{\partial x^{l^*}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{kl}}。$$

因此，对于 Γ^{i}_{lk} 的两个(对称和反对称)组分，其变换是彼此独立的，即无混合。这样，从变换律的观点来看，它们是独立的量。第二个等式表明，$\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{kl}}$ 像张量一样变换。因此，从变换群的观点来讲，乍一看把这两个组分相加合并成一个量是不自然的。

3．另一方面，Γ 的两个下标与定义(2)式中的下标所起的作用截然不同，所以我们没有强制性的理由用对于下标的对称性条件来限制 Γ。如果我们进行这样的限制，那么我们将会得到一个纯粹的引力场理论。不过，如果我们不对 Γ 施加限制性对称条件，那么我们将会得到引力定律的推广，而这在我看来是很自然的。

曲率张量

虽然 Γ 场自身不具有张量特性，它却隐含着存在一个张量。要得到这个张量，最容易的办法就是根据(2)式，让矢量 A^i 沿着二维无穷小曲面元的周边(circumference)移动，计算它移动一周后的变化量。这个变化量具有矢量特性。

设 $\underset{0}{x}^t$ 是不动点的坐标，x^t 是周边上另一点的坐标。那么，$\xi^t = x^t - \underset{0}{x}^t$ 对于周边上所有的点都是小量，它可以用作数量级定义的基础。

这样一来，待计算的积分 $\oint \delta A^i$ 可以更加明了地写成

$$-\oint \underline{\Gamma^i_{st}}\, \underline{A^s} \mathrm{d}x^t \quad 或 \quad -\oint \underline{\Gamma^i_{st}}\, \underline{A^s} \mathrm{d}\xi^t。$$

在被积函数中，量下面划线表示它们应在周边上相继各点取值(而不是取初始点 $\xi^t = 0$ 处的值)。

我们首先在最低级近似下计算周边上任意一点 ξ^t 处的$\underline{A^i}$ 值。这个最低级近似就是先把积分路径展开成开放路径，然后把被积函数$\underline{\Gamma^i_{st}}$和$\underline{A^s}$用积分初始点($\xi^t = 0$)处的 Γ^i_{st}和 A^s 值来代替。这样积分给出

$$\underline{A^i} = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \int \mathrm{d}\xi^t = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \xi^t。$$

这里我们所忽略掉的，是 ξ 中二阶及二阶以上的高阶项。采用同样的近似，马上可得

$$\underline{\Gamma^i_{st}} = \Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,r} \xi^r。$$

把这些表达式代入上面的积分公式中，通过选取适当的求和指标，我们首先得到

$$-\oint\left(\Gamma^{i}_{st}+\Gamma^{i}_{st,q}\xi^{q}\right)\left(A^{s}-\Gamma^{s}_{pq}A^{p}\xi^{q}\right)\mathrm{d}\xi^{t},$$

式中除了 ξ 以外，所有量都须取其在积分初始点上的值。然后我们求得

$$-\Gamma^{i}_{st}A^{s}\oint\mathrm{d}\xi^{t}-\Gamma^{i}_{st,q}A^{s}\oint\xi^{q}\mathrm{d}\xi^{t}$$
$$+\Gamma^{i}_{st}\Gamma^{s}_{pq}A^{p}\oint\xi^{q}\mathrm{d}\xi^{t},$$

其中积分沿着闭合周边进行。（因为第一项中的积分部分为零，所以第一项等于零。）与 $(\xi)^2$ 成正比的项都被忽略掉了，因为它们属于高阶项。剩下的两项可以合并写成

$$\left[-\Gamma^{i}_{pt,q}+\Gamma^{i}_{st}\Gamma^{s}_{pq}\right]A^{p}\oint\xi^{q}\mathrm{d}\xi^{t}。$$

这就是矢量 A^i 沿着周边移动之后的变化量 ΔA^i。我们有

$$\oint\xi^{q}\mathrm{d}\xi^{t}=\oint\mathrm{d}(\xi^{q}\xi^{t})-\oint\xi^{t}\mathrm{d}\xi^{q}=-\oint\xi^{t}\mathrm{d}\xi^{q}。$$

所以，这一积分关于 t 和 q 反对称，另外，它还具有张量特性。我们把它记为 f^{tq}。如果 f^{tq} 是任意张量，那么 ΔA^i 的矢量特性，意味着倒数第二个式子中括号内的表达式具有张量特性。即便如此，我们只能推断括号中的表达式在关于指标 t 和 q 反对称化之后有张量特性。这就是**曲率张量**

$$R^i_{klm} \equiv \Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}。 \tag{4}$$

所有指标的位置也都由此而固定了。缩并 i 指标和 m 指标，可得**缩并的曲率张量**：

$$R_{ik} \equiv \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{is,k} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}。 \tag{4a}$$

λ 变换

曲率有一个性质，这个性质对于后面的讨论很重要。对于位移场 Γ，我们可以根据公式

$$\Gamma^l_{ik}{}^* = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_{,k} \tag{5}$$

定义新的位移场 Γ^*，式中 λ 是坐标的一个任意函数，δ^l_i 是克罗内克张量(Kronecker tensor，“λ 变换”)。如果用(5)式的右边替换 Γ^* 而得到 $R^i_{klm}(\Gamma^*)$，那么 λ 就被消去了。因此

$$\left.\begin{aligned} R^i_{klm}(\Gamma^*) &= R^i_{klm}(\Gamma) \\ R_{ik}(\Gamma^*) &= R_{ik}(\Gamma) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

曲率在 λ 变换下保持不变(“λ 不变性”)。所以，一个理论如果只在曲率张量内含有 Γ，那么它将不能完全确定 Γ 场，而只能确定到保持任意的函数 λ。在这样一个理论中，Γ 和 Γ^* 将被看成是同一个场的不同表示，就像 Γ^* 仅仅是由 Γ 通过坐标变换而得来的一样。

值得注意的是，λ 变换跟坐标变换不同，它从关于 i 指标和 k 指标对称的 Γ 得到了非对称的 Γ^*。在这样的理论中，Γ 的对称性条件丧失了客观意义。

我们将看到，λ 不变性的主要意义在于它能对场方程组的“强度”产生影响。

“转置不变性”要求

引入非对称场(non-symmetric fields)将会遇到下列困难。若 Γ^l_{ik} 是位移场，则 $\tilde{\Gamma}^l_{ik}(=\Gamma^l_{ki})$ 也是位移场；若 g_{ik} 是张量，则 $\tilde{g}_{ik}(=g_{ki})$ 也是张量。这样就产生了一大堆协变形式，我们不可能仅根据相对性原理从中做出选择。下面，我们将通过一个例子来说明这一困难，同时还将说明可以用怎样一种自然的方式克服它。

在对称场理论中，张量

$$(W_{ikl}\equiv)g_{ik,l}-g_{sk}\Gamma^s_{il}-g_{is}\Gamma^s_{lk}$$

起着重要的作用。如果令它等于零，那么我们得到一个方程，它允许通过 g 表示 Γ，即消去 Γ。我们知道：(1) $A^i_{;t}\equiv A^i_{,t}+A^s\Gamma^i_{st}$ 是张量(前已证明)，(2)任意一个反变张量都可以写成 $\sum_t \underset{(t)}{A^i}\underset{(t)}{B^k}$ 的形式。从这两个事实出发，我们可以很容易证明：如果场 g 和 Γ 不再是对称的，上述表达式也仍然具有张量特性。

但是，在后一种情况下，如果(比方说)把最后一项中的 Γ^s_{lk} 转置，即用 Γ^s_{kl} 替换之*，张量特性并不失去[这是因为 $g_{ik}(\Gamma^s_{kl}-\Gamma^s_{lk})$ 是张量]。还有其他一些形式，虽然并不这么简单，但是它们仍能保持张量特性，而

* 英文版误为 Γ^s_{lk}。——译者

且我们还可以把它们作为上述表达式在非对称场情况下的推广。因此，如果我们要通过令上述表达式等于零来把 g 和 Γ 之间的关系式推广到非对称场的情况，那么这似乎包含任意的选择。

但是，上述形式有一个可以把它和其他可能的形式区分开来的性质。如果同时用 $\tilde{g}_{ik}$ 替换 g_{ik}，用 $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$ 替换 Γ^l_{ik}，然后再对换 i 指标和 k 指标，它就变换成它自身：它对指标 i 和 k 是“转置对称的”（transposition symmetric）。通过令这个表达式等于零而得到的方程是“转置不变的”（transposition invariant）。如果 g 和 Γ 是对称的，这个条件当然也满足；它是场量对称这一条件的推广。

对于非对称场的场方程，我们假定它们是**转置不变的**。我认为这个假定从物理上来说对应于一个要求：正电和负电对称地进入物理学定律中。

看一眼(4a)式就可发现，张量 R_{ik} 并不是完全转置对称的，因为转置后它变成了

$$(R^*_{ik} =)\ \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{sk,i} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{ts}。\tag{4b}$$

这个情况是我们在建立转置不变的场方程的努力过程中所碰到的诸多困难的根源。

赝张量 U^l_{ik}

可以证明，通过引入稍微有些不同的赝张量 U^l_{ik} 而不是 Γ^l_{ik}，可以由 R_{ik} 构造出转置对称的张量。在(4a)式

中，两个关于 Γ 的线性项可以在形式上合并成一项。用 $(\Gamma^s_{ik}-\Gamma^t_{it}\delta^s_k)_{,s}$ 替换 $\Gamma^s_{ik,s}-\Gamma^s_{is,k}$，并定义一个新的赝张量 U^l_{ik}：

$$U^l_{ik}\equiv\Gamma^l_{ik}-\Gamma^t_{it}\delta^l_k。\tag{7}$$

因为在(7)式中缩并 k 指标和 i 指标，可得

$$U^t_{it}=-3\Gamma^t_{it},$$

所以我们可以用 U 把 Γ 写成：

$$\Gamma^l_{ik}=U^l_{ik}-\frac{1}{3}U^t_{it}\delta^l_k。\tag{7a}$$

把它代入(4a)式，我们可得用 U 表示的缩并的曲率张量：

$$S_{ik}\equiv U^s_{ik,s}-U^s_{it}U^t_{sk}+\frac{1}{3}U^s_{is}U^t_{tk}。\tag{8}$$

然而，这一表示式是转置对称的，正因为这样，才使得赝张量 U 在非对称场的理论中如此有价值。

U 的 λ 变换　如果在(5)式中用 U 替换 Γ，经过简单的计算后，我们可得

$$U^{l}_{ik}{}^{*}=U^l_{ik}+(\delta^l_i\lambda_{,k}-\delta^l_k\lambda_{,i})。\tag{9}$$

这个方程定义了 U 的 λ 变换。(8)式在这个变换下保持不变 $[S_{ik}(U^*)=S_{ik}(U)]$。

U 的变换律　如果在(3)式和(3a)式中用 U 替换 Γ，根据(7a)式，我们可得

$$U_{ik}^{l}{}^{*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k^*}} U_{ik}^{l} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^{s}} \frac{\partial^2 x^{s}}{\partial x^{i^*} \partial x^{k^*}}$$

$$- \delta_{k}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{s}} \frac{\partial^2 x^{s}}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}}。 \tag{10}$$

再一次注意到，此处两个系统的指标都彼此**相互独立地**从 1 到 4 取值，即使它们使用了相同的字母。 关于这一公式，值得注意的是，因为存在最后那一项，所以它不是关于指标 i 和 k 转置对称的。 这一特殊事实可以这样来澄清，即证明这一变换可当作转置对称的坐标变换和 λ 变换的复合变换。 为了看清这一点，我们首先把最后一项写成如下形式：

$$-\frac{1}{2}\left[\delta_{k}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{s}} \frac{\partial^2 x^{s}}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}} + \delta_{i}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{s}} \frac{\partial^2 x^{s}}{\partial x^{k^*} \partial x^{t^*}}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\delta_{i}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{s}} \frac{\partial^2 x^{s}}{\partial x^{k^*} \partial x^{t^*}} - \delta_{k}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{s}} \frac{\partial^2 x^{s}}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}}\right]。$$

在这两项中，第一项是转置对称的。 我们把它和(10)式右边的前两项合并为一个表达式 $K_{ik}^{l}{}^{*}$。 现在，我们考虑：如果在变换

$$U_{ik}^{l}{}^{*} = K_{ik}^{l}{}^{*}$$

之后，再进行 λ 变换

$$U_{ik}^{l}{}^{**} = U_{ik}^{l}{}^{*} + \delta_{i}^{l^*} \lambda_{,k^*} - \delta_{k}^{l^*} \lambda_{,i^*},$$

那么，我们能够从中得到什么。 联立以上两式，可得

$$U_{ik}^{l}{}^{**} = K_{ik}^{l}{}^{*} + (\delta_{i}^{l^*} \lambda_{,k^*} - \delta_{k}^{l^*} \lambda_{,i^*})。$$

这意味着只要(10a)式能够写成 $\delta_{i}^{l^{\cdot}}\lambda_{,k^{\cdot}}-\delta_{k}^{l^{\cdot}}\lambda_{,i^{\cdot}}$ 这样的形式，那么(10)式就可以被看作是这种复合变换。为此只须证明，存在着一个 λ，它能使得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^{\cdot}}}{\partial x^{s}}\frac{\partial^{2}x^{s}}{\partial x^{k^{\cdot}}\partial x^{t^{\cdot}}}=\lambda_{,k^{\cdot}} \tag{11}$$

$$\left(\text{及 }\frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^{\cdot}}}{\partial x^{s}}\frac{\partial^{2}x^{s}}{\partial x^{i^{\cdot}}\partial x^{t^{\cdot}}}=\lambda_{,i^{\cdot}}\right)。$$

为了对到现在为止仍只是假设方程的左边进行变换，我们必须先用逆变换的系数 $\frac{\partial x^{a}}{\partial x^{b^{\cdot}}}$ 来表示$\frac{\partial x^{t^{\cdot}}}{\partial x^{s}}$。一方面，

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{t^{\cdot}}}\frac{\partial x^{t^{\cdot}}}{\partial x^{s}}=\delta_{s}^{p}。 \tag{a}$$

另一方面，

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{t^{\cdot}}}V_{t}^{s^{\cdot}}=\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{t^{\cdot}}}\frac{\partial D}{\partial\left(\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{t^{\cdot}}}\right)}=D\delta_{s}^{p}。^{*}$$

这里，$V_{t}^{s^{\cdot}}$ 表示$\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{t^{\cdot}}}$的余子式，因而它反过来也可以被表示成行列式 $D=\left|\frac{\partial x^{a}}{\partial x^{b^{\cdot}}}\right|$ 对$\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{t^{\cdot}}}$ 的导数。因此，我们还有

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{t^{\cdot}}}\cdot\frac{\partial \lg D}{\partial\left(\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{t^{\cdot}}}\right)}=\delta_{s}^{p}。 \tag{b}$$

---

* 英文版此式误为 $\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{t^{\cdot}}}V_{t}^{s^{\cdot}}=\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{t^{\cdot}}}\frac{\partial D}{\partial\left(\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{t}}\right)}=D\delta_{s}^{p}$。——译者

由(a)式和(b)式，得

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}=\frac{\partial \lg D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}。$$

根据这一关系，(11)式的左边可以写成

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \lg D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)_{,k^*}=\frac{1}{2}\frac{\partial \lg D}{\partial x^{k^*}}。$$

实际上，这暗示着

$$\lambda=\frac{1}{2}\lg D$$

满足(11)式。这就证明了变换(10)可以看作是转置对称变换

$$\begin{aligned}U_{ik}^{l}{}^{*}=&\frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U_{ik}^l+\frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}}\\&-\frac{1}{2}\left[\delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}\right.\\&\left.+\delta_{i^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}}\right]\end{aligned}\qquad(10\text{b})^*$$

和 λ 变换的复合变换。因此，(10b)式可以取代变换(10)式成为 U 的变换公式。U 场的任何变换只要仅仅改变其表达式的形式，就可以表示成一个由(10b)式所示

---

* 原文未标明(10a)式。——译者

的坐标变换和 λ 变换的复合变换。

变分原理和场方程

根据变分原理(variational principle)推导场方程具有以下优点：它能保持所得到的方程组的相容性；它可以系统地得到与广义协变性相联系的恒等式("比安基恒等式")以及守恒定律。

对积分进行变分，要求被积函数 $\mathfrak{H}$ 是标量密度。我们将用 R_{ik} 或 S_{ik} 来构造这样一个密度函数。最简单的办法就是为 Γ 或 U 各引入一个权重为 1 的张量密度 $\mathfrak{g}^{ik}$，令

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} (= \mathfrak{g}^{ik} S_{ik})。 \tag{12}$$

则 $\mathfrak{g}^{ik}$ 的变换律必定是

$$\mathfrak{g}^{ik^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right|, \tag{13}$$

其中，虽然不同坐标系的指标再次使用相同的字母，但是它们仍然必须被看作是相互独立的。这样我们实际上得到

$$\begin{aligned}\int \mathfrak{H}^* \mathrm{d}\tau^* &= \int \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right| \cdot \\ &\qquad \frac{\partial x^s}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{k^*}} S_{st} \left| \frac{\partial x^{r^*}}{\partial x^r} \right| \mathrm{d}\tau \\ &= \int \mathfrak{H} \mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

即，积分是变换不变的。而且，因为 R_{ik} 可以分别由 Γ

或 U 表示，所以积分在 λ 变换(5)式或(9)式下是不变的，因而 $\mathfrak{H}$ 是 λ 变换不变的。由此可得，通过对 $\int \mathfrak{H} \mathrm{d}\tau$ 进行变分而导出的场方程，也同样具有关于坐标变换和 λ 变换的协变性。

但是，我们还假定场方程对 $\mathfrak{g}$，Γ 两场(或场 $\mathfrak{g}$，U)转置不变。如果 $\mathfrak{H}$ 是转置不变的，那么这一点就可以得到保证。我们已经知道 R_{ik} 用 U 表示是转置对称的，而用 Γ 表示则不是。因此，只有在 $\mathfrak{g}^{ik}$ 之外再引入 U(而不是 Γ)作为场变量，$\mathfrak{H}$ 才是转置不变的。在那种情况下，我们从一开始就确信：通过对 $\int \mathfrak{H} \mathrm{d}\tau$ 进行关于场变量的变分而导出的场方程是转置不变的。

通过对 $\mathfrak{H}$[方程(12)和(8)]进行关于 $\mathfrak{g}$ 和 U 的变分，我们求得，

$$\left.\begin{aligned}
\delta\mathfrak{H} &= S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ik}\delta U_{ik}^{l} + (\mathfrak{g}^{ik}\delta U_{ik}^{s})_{,s} \\
\text{其中}\quad S_{ik} &= U_{ik,s}^{s} - U_{it}^{s}U_{sk}^{t} + \frac{1}{3}U_{is}^{s}U_{tk}^{t}, \\
\mathfrak{N}_l^{ik} &= \mathfrak{g}_{,l}^{ik} + \mathfrak{g}^{sk}\left(U_{sl}^{i} - \frac{1}{3}U_{st}^{t}\delta_l^{i}\right) \\
&\quad + \mathfrak{g}^{is}\left(U_{ls}^{k} - \frac{1}{3}U_{ts}^{t}\delta_l^{k}\right)。
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

场　方　程

我们的变分原理是：

$$\delta\left(\int \mathfrak{H}\mathrm{d}\tau\right) = 0。\tag{15}$$

对 $\mathfrak{g}^{ik}$ 和 U^{l}_{ik} 的变分是独立进行的，它们的变分在积分区域的边界上为零。这一变分将首先给出

$$\int \delta\mathfrak{H}\mathrm{d}\tau = 0。$$

若把(14)式中的表达式代入上式，则 $\delta\mathfrak{H}$ 表达式的最后一项不起任何作用，因为 δU^{l}_{ik} 在边界处为零。因此，我们得到场方程：

$$S_{ik} = 0 \tag{16a}$$

$$\mathfrak{N}^{ik}_{l} = 0。\tag{16b}$$

从我们对变分原理的选择就明显知道，它们是关于坐标变换和 λ 变换不变的，亦是转置变换不变的。

恒 等 式

这些场方程彼此并不独立。在它们之间存在着 $4+1$ 个恒等式。也就是说，不论 $\mathfrak{g}$-U 场是否满足场方程，方程中左边部分之间总有 $4+1$ 个等式成立。

因为 $\int \mathfrak{H}\mathrm{d}\tau$ 在坐标变换和 λ 变换下都不变，所以这些恒等式可以用公认的方法推导出来。

变分 $\delta\mathfrak{g}$ 和 δU 分别来源于无穷小坐标变换和无穷小 λ 变换。如果我们把它们代入 $\delta\mathfrak{H}$ 中，那么由于 $\int \mathfrak{H}\mathrm{d}\tau$ 的不变性，它的变分恒为零。

无穷小坐标变换可以由下式描述：

$$x^{i^*} = x^{i} + \xi^{i}, \tag{17}$$

其中 ξ^i 是任意的无穷小矢量。现在，我们必须根据方程(13)或(10b)，用 ξ^i 表示 $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ 和 δU_{ik}^l。由于(17)式，我们必须用

$$\delta_b^a + \xi^a_{;b} \text{ 替代} \frac{\partial x^{a^*}}{\partial x^b}, \quad \delta_b^a - \xi^a_{;b} \text{ 替代} \frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}},$$

并忽略所有 ξ 的阶数大于 1 的项。这样，我们可得：

$$\delta\mathfrak{g}^{ik}(=\mathfrak{g}^{ik^*}-\mathfrak{g}^{ik}) = \mathfrak{g}^{sk}\xi^i_{;s} + \mathfrak{g}^{is}\xi^k_{;s} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{;s} + [-\mathfrak{g}^{ik}_{,s}\xi^s] \tag{13a}$$

$$\delta U_{ik}^l(=U_{ik}^{l\,*}-U_{ik}^l) = U_{ik}^s\xi^l_{;s} - U_{sk}^l\xi^s_{;i} - U_{is}^l\xi^s_{;k} + \xi^l_{;ik} + [-U^l_{ik,s}\xi^s]\text{。} \tag{10c}$$

这里请大家注意：变换公式使场变量在**连续统的同一点**上有了新的值。上述计算首先给出 $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ 和 δU_{ik}^l 的表达式(不含方括号中的项)。另一方面，在变分计算中，$\delta\mathfrak{g}^{ik}$ 和 δU_{ik}^l 表示的是对**坐标固定值**的变分。为了得到这些结果，我们必须在最初的结果中添加方括号项。

如果我们把这些“变换变分”$\delta\mathfrak{g}$ 和 δU 代入(14)式中，那么积分 $\int \mathfrak{H}\,\mathrm{d}\tau$ 的变分恒为零。而且，如果选择 ξ^i 使其及其一阶导数在积分区域的边界上为零，那么(14)式中的最后一项贡献为零。因此，如果分别用(13a)式和(10c)式来代替 $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ 和 δU_{ik}^l，那么积分

$$\int (S_{ik}\,\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ik}\,\delta U_{ik}^l)\,\mathrm{d}\tau$$

恒为零。因为这一积分线性齐次地依赖于 ξ^i 及其导数，所以我们可以通过反复地进行分部积分，把它写成如下形式：

$$\int \mathfrak{M}_i \xi^i \mathrm{d}\tau ,$$

其中 $\mathfrak{M}_i$ 是一个已知的（S_{ik} 的一次和 $\mathfrak{N}_l^{ik}$ 的二次）表达式。由此可得以下恒等式：

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0。\tag{18}$$

这些是关于场方程左边的 S_{ik} 和 $\mathfrak{N}_l^{ik}$ 的四个恒等式，它们对应于比安基恒等式。用先前介绍的术语来说，这些恒等式是三阶的。

另外还存在着第五个恒等式，它对应于积分 $\int \mathfrak{H} \mathrm{d}\tau$ 在无穷小 λ 变换下的不变性。这里，我们必须把

$$\delta \mathfrak{g}^{ik} = 0 \text{ 和 } \delta U_{ik}^l = \delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}$$

代入(14)式。其中，λ 是无穷小量，它在积分区域的边界处为零。这样，首先得到

$$\int \mathfrak{N}_l^{ik} (\delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}) \mathrm{d}\tau = 0。$$

或者，经过分步积分，可得

$$2\int \mathfrak{N}_{\underset{\vee}{s},i}^{is} \lambda \mathrm{d}\tau = 0。$$

［在一般情况下，其中的 $\mathfrak{N}_{\underset{\vee}{l}}^{is} = \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_l^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ki})$］。

这就得到了想要的恒等式

$$\mathfrak{N}^{is}_{\vee s,\ i} \equiv 0。\tag{19}$$

用我们的术语来说，这是二阶恒等式。 对于 $\mathfrak{N}^{is}_{\vee s}$，我们可以从(14)式直接计算得到，

$$\mathfrak{N}^{is}_{\vee s} \equiv \mathfrak{g}^{is}_{\vee,s}。\tag{19a}$$

因此，如果场方程(16b)能够满足，那么我们有

$$\mathfrak{g}^{is}_{\vee,s} = 0。\tag{16c}$$

对物理解释的注释 跟电磁场的麦克斯韦理论加以比较，我们可以把(16c)式解释为磁流密度为零。 如果接受这一观点，那么哪一个表达式应该表示电流密度就清楚了。 我们可以通过令

$$\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}\sqrt{-|g_{st}|}\tag{20}$$

而给出张量密度 $\mathfrak{g}^{ik}$ 所对应的张量 g^{ik}。 其中，协变张量 g_{ik} 与反变张量存在以下关系：

$$g_{is}g^{ks} = \delta_i^k。\tag{21}$$

根据这两个等式，我们有

$$g^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}(-|\mathfrak{g}^{st}|)^{-\frac{1}{2}}。$$

然后由等式(21)可得 g_{ik}。 这样，我们就可以假设

$$(a_{ikl}) = g_{\underset{\vee}{ik},\,l} + g_{\underset{\vee}{kl},\,i} + g_{\underset{\vee}{li},\,k}\tag{22}$$

或

$$a^m = \frac{1}{6}\eta^{iklm}a_{ikl} \tag{22a}$$

代表电流密度。其中 η^{iklm} 是莱维-齐维塔张量密度(具有分量 ± 1)，它对所有指标都是反对称的。这个量的散度恒为零。

方程组(16a)，(16b)的强度

在应用先前所述的计算方法之前，我们必须注意到这样一个事实：所有从一个给定的 U 通过(9)式形式的 λ 变换而得到的 U^*，实际上都表示同一个 U 场。于是有如下推论：在 U^l_{ik} 展开的第 λ 阶系数中含有 $\binom{4}{n}$ 个 λ 的 n 阶导数，对它们的选择实际上并不影响对不同 U 场的区分。因此，在计算与计量 U 场相关的展开系数的数目时，应当减去 $\binom{4}{n}$。用这样的计量方法，我们得到的 n 阶自由系数的数目是

$$\begin{aligned} z = &\left[16\binom{4}{n}+64\binom{4}{n-1}-4\binom{4}{n+1}-\binom{4}{n}\right] \\ &-\left[16\binom{4}{n-2}+64\binom{4}{n-1}\right] \\ &+\left[4\binom{4}{n-3}+\binom{4}{n-2}\right]。 \end{aligned} \tag{23}$$

第一个方括号表示的是相关的 n 阶系数的总数(这些系数确定了 g-U 场)；第二个方括号是因存在场方程而须减去的数目；第三个方括号是在考虑到恒等式(18)和(19)

后，对这个减少的修正。对大 n 计算其渐近值，我们求得

$$z \sim \left(\frac{4}{n}\right)\frac{z_1}{n}, \tag{23a}$$

其中

$$z_1 = 42。$$

因此，非对称场的场方程比纯引力场的场方程（$z_1 = 12$）弱得多。

λ 不变性对方程组强度的影响 也许可以尝试从转置不变的表达式

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{ik}R_{ik} + \tilde{\mathfrak{g}}^{ik}\tilde{R}_{ik})$$

开始（而不是引进 U 作为场变量）来构造理论的转置不变性。当然，这样得到的理论肯定与先前所详细阐述的理论有所不同。我们可以看出，对于这个 $\mathfrak{H}$，不存在 λ 不变性。这里，我们也可以得到与(16a)式和(16b)式相类似的场方程，而且它们还是（关于 $\mathfrak{g}$ 和 Γ）转置不变的。但是，在这些场方程之间，只存在四个“比安基恒等式”。这样，如果把方程组强度的计量方法应用于这个方程组中，那么我们可以得到与(23)式相对应的公式，只是少了第一个方括号内的第四项和第三个方括号内的第二项而已。我们可得

$$z_1 = 48。$$

因此，此方程组比我们所选择的方程组弱，因而不予采纳。

与先前的场方程组进行比较 两者比较如下：

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0 \qquad\qquad R_{\underline{ik}} = 0$$

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk} = 0 \quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0$$

其中 R_{ik} 由(4a)式定义为 Γ 的函数$\left[\text{其中} R_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki}),\ R_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki})\right]$。

此方程组与新的方程组(16a)和(16b)完全等价，因为它们是对同一个积分进行变分而得到的。该方程组关于 g_{ik}和 Γ^{l}_{ik}转置不变。但是，两者之间也存在着以下差别。应取变分的积分本身不是转置不变的，取其变分而首先获得的方程组也不是；然而，它却在 λ 变换(5)下保持不变。为了得到转置不变性，我们必须使用一些技巧。现在，我们在形式上引进四个新的场变量 λ_i，并且进行适当的选择，使得它们在变分后满足方程 $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0$ *。这样，在进行了关于 Γ 的变分后，我们得到了场方程，它们具有转置不变的形式。但是，关于 R_{ik}的方程仍然含有辅助变量 λ_i。然而，我们有办法把

---

* 通过令 $\Gamma^{l}_{ik}{}^{*} = \Gamma^{l}_{ik} + \delta^{l}_{i}\lambda_k$。

它们消除，这将会导致这些方程按上述方式分解。这样得到的方程也是(对于 $\mathfrak{g}$ 和 Γ)转置不变的。

假设方程 $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}}=0$ 能够对 Γ 场进行归一化，而这会使方程组失去 λ 不变性。结果，并非 Γ 场所有的等价表示都是方程组的解。这里发生的情况，可与在纯引力场方程中附加任意方程(它限制坐标的选择)的过程相比较。而且在我们的情况下，方程组将变得不必要地复杂。但是只要我们从关于 $\mathfrak{g}$ 和 U 转置不变的变分原理出发，并自始至终把 $\mathfrak{g}$ 和 U 当作场变量，就完全可以在新的表示中避免这些困难。

散度定律及动量与能量守恒定律

如果场方程得到满足，且变分是变换变分，那么在(14)式中不但 S_{ik} 和 $\mathfrak{N}^{ik}_{l}$ 为零，而且 $\delta\mathfrak{H}$ 也等于零，所以由场方程可得

$$(\mathfrak{g}^{ik}\delta U^{s}_{ik})_{,s}=0,$$

其中 δU^{s}_{ik} 由(10c)式给出。这一散度定律(divergence law)对任意选择的矢量 ξ^{i} 都成立。最简单的特殊选择是让 ξ^{i} 独立于 x，由此产生以下四个方程

$$\mathfrak{T}^{s}_{t,s}\equiv(\mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,t})_{,s}=0。$$

这些可被解释和应用为动量与能量守恒方程。应当注意，这样的守恒方程决不能被场方程组唯一地确定。有趣的是，根据方程

$$\mathfrak{T}_t^s \equiv \mathfrak{g}^{ik} U_{ik,\,t}^s,$$

对于一个与 x^4 无关的场，能流密度($\mathfrak{T}_4^1$，$\mathfrak{T}_4^2$，$\mathfrak{T}_4^3$)和能量密度 $\mathfrak{T}_4^4$ 都等于零。由此，我们可以得出结论：这个无奇点的静态场理论决不能表示非零质量。

如果采用场方程的最初表述，那么这一推导过程以及守恒定律的形式都将变得非常复杂。

总结

A. 在我看来，这里所陈述的理论是可能的相对论性场论中逻辑上最为简单的。但是，这并不意味着自然(nature)不会遵循一个更为复杂的场论。

一些更为复杂的场论曾经屡被提出。它们大致可以根据以下特征进行分类：

(a) 增加连续统的维数。在这种情况下，我们必须解释为什么连续统表观上限于四维。

(b) 除了位移场及其相关张量场 g_{ik}(或 $\mathfrak{g}^{ik}$)以外，还引进了其他不同类型的场(比如矢量场)。

(c) 引进更高(微分)阶数的场方程。

在我看来，只有当存在物理—经验理由(physical-empirical reasons)时，才应当考虑这些更为复杂的系统及其组合。

B. 场论尚未完全由场方程组所决定。我们应当承认会出现奇点吗？我们应当假定边界条件吗？对于第

一个问题，我认为奇点必须被排除。在我看来，在连续统理论中引进场方程对之失效的点(或线等等)是不合理的。而且，引进奇点等价于在围绕奇点的紧邻“曲面”上假定边界条件(它从场方程的观点来看是任意的)。没有这样的假定，理论就太含糊了。我认为，第二个问题的答案是：边界条件的假定是不可缺少的。我将举一个初等例子来说明这一点。我们假定势 ϕ 具有 $\phi = \sum \frac{m}{r}$ 的形式，这类似于要求在质点以外(三维中) ϕ 满足方程 $\Delta\phi = 0$。但如果我们不添加 ϕ 在无穷远处为0(或保持有限)这一边界条件，就存在这样的解：它们是 x 的整函数 $\left[\text{例如} x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)\right]$，而在无穷远处为无穷大。对于这样的场，如果空间是“开放”空间，那么只有通过假定一个边界条件来排除。

C. 是否可以想像一个场论能让人们去理解实在(reality)的原子结构和量子结构(quantum structure)？对于这一问题，几乎人人都会给出否定的回答。但是，我相信目前无人知道关于这一问题的可靠依据。这是因为我们无法判断，在排除了奇点之后，解的流形将会在多大程度上得到约化。我们根本没有任何办法来系统地导出没有奇点的解。近似方法在此是失效的，因为我们永远不会知道对于一个特定的近似解，是否存在着**没有奇点**的精确解。正因如此，我们目前仍不能拿非线性场论

(nonlinear field theory)的内容跟经验相比较。只有在数学方法上的重大进展，方可有所助益。目前盛行的观点是，场论首先必须根据大致确立的规则，通过“量子化”(quantization)，变换成一个关于场概率的统计理论(statistical theory of field probabilities)。我认为，这种方法仅仅是一种用线性方法(linear methods)描述本质上非线性特性(nonlinear character)的关系的尝试。

D. 人们可以给出一个很好的理由回答为什么实在根本不能用连续场来表示。根据量子现象(quantum phenomena)，可以肯定：一个有限能量的有限系统可以用一组有限的数字(量子数)来描述。这看上去与连续统理论并不一致，因而必然导致人们试图寻求一个纯粹的代数理论来描述实在。但没有人知道怎样获得这样一个理论的基础。