绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）当 $x \to 0$ 时，$(1+\sin x - x)^{\frac{1}{x}} - 1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n =$（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{(n+i+j)^2} =$（　　）

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$

（C）$\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 \dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$　　（D）$\int_0^1 dy\int_0^{1-y} \dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$

（3）设 $I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\arcsin x}{x}dx$，$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{x}{\arcsin x}dx$，$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$，$I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{x}{\ln(1+x)}dx$，则（　　）.

（A）$I_1 < I_2$ 且 $I_3 < I_4$　　（B）$I_1 < I_2$ 但 $I_3 > I_4$

（C）$I_1 > I_2$ 且 $I_3 > I_4$　　（D）$I_1 > I_2$ 但 $I_3 < I_4$

（4）设 a 为正数．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}$ 均为收敛的，则（　）.

（A）$0 < a \le \dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2} < a < e$　　（C）$a = e$　　（D）$a > e$

（5）已知 4 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_i^T\beta_j = 0$，$\beta_j \ne 0, (i = 1,2,3, j = 1,2,3,4)$，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) =$（　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（6）已知 A,B 均为 3 阶矩阵，$|A| = 0$，且满足 $AB + 3B = O$，若 $r(B) = 2$，则行列式 $|A + 2E| =$（　）.

（A）1　　（B）2　　(C) 4　　(D) 8

(7) 设 $0 < P(A) < 1,\ 0 < P(B) < 1,$ 且 $P(B|A) > P(B)$，则以下正确的是（　　）.

(A) $P\left(B\middle|\bar{A}\right)>P\left(B\right)$ (B) $P\left(A\middle|B\right)>P\left(A\right)$

(C) $P\left(A\middle|\bar{B}\right)>P\left(A\right)$ (D) $P\left(\bar{B}\middle|A\right)>P\left(\bar{B}\right)$

(8) 设总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则统计量 $Y=\dfrac{X_1+X_2}{\left|X_3-X_4\right|}$ 服从的分布为（ ）.

(A) $F\left(1,1\right)$ (B) $F\left(2,1\right)$ (C) $t\left(1\right)$ (D) $t\left(2\right)$

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为____________________.

（10） $I=\int_{-1}^{1}x(1+x^{2019})(e^x-e^{-x})dx=$ __________ .

（11）函数 $z=(x-1)\arcsin\dfrac{x}{y}+\ln(1+x^2+y)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=$ __________ .

（12） $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\sin\dfrac{y}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\sin\dfrac{y}{x}dx=$ ________ .

（13）设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$_________ .

(14) 设 $\left(X_1,Y_1\right)\sim N\left(1,2;1,1;\dfrac{1}{3}\right)$，$\left(X_2,Y_2\right)\sim N\left(3,4;1,1;-\dfrac{1}{3}\right)$，分别记 $\left(X_1,Y_1\right),\left(X_2,Y_2\right)$ 的概率密度函数为 $\varphi_1\left(x_1,y_1\right),\varphi_2\left(x_2,y_2\right)$，设 $\left(X,Y\right)$ 的概率密度函数为 $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi_1\left(x,y\right)+\varphi_2\left(x,y\right)\right]$，则 $E\left(X\right)=$ __________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases} ax+x^b\cos\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-x}\right)^n+c, & x\le 0, \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试确定常数 a,b,c 的取值情况.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=1, f'(0)=-1$，且当 $x \neq 0$ 时 $z=f(x^2-y^2)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=(y^2-x^2)(z+\cos\frac{x^2-y^2}{2}),$$

求函数 $f(u)$ 的表达式.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D x(x+ye^{x^2})\operatorname{sgn}(y-|x|)d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le 1,0\le y\le 1$，$\operatorname{sgn}(\quad)$是符号函数.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n$的和函数为$s(x)$，求$s(x)$的表达式.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值及最小值均在 $(0,1)$ 内取到．证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $f'(\xi_k)=f(\xi_k),k=1,2$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$．

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）

（I）设有向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$，（II）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$.

（I）问 a,b 为何值时，向量组（II）不能由向量组（I）线性表示？

（II）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\1&b\end{pmatrix}$，问 a,b 为何值时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，有解时求出其全部解.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$（A 为实对称矩阵）经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $6y_3^2$，且 $AB=O$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,-1)^T$，$\alpha_2=(-2,1,0)^T$，

(I) 求所用的正交变换 $x=Qy$ 及二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的表达式;（II）求 $(A-3E)^8$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，且 X,Y 不相关.

（I）求 $\left(X,Y\right)$ 的联合分布律；（II）判断 X,Y 是否相互独立；（III）求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布律.

得分	评卷人

（23）设总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ 1-e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\geq\theta.\end{cases}$ 其中未知参数 $\lambda>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，

（I）$\theta=1$时，求λ的矩估计量；（II）$\theta=1$时，求λ的最大似然估计量；（III）$\lambda=2$时，求θ的最大似然估计量.