绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟五）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(u)$ 为可导函数,曲线 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\frac{1}{2},4)$，且在该点处切线过原点 $(0,0)$，那么函数 $f(u)$ 在 $u=-3$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=-0.1$ 时相应的函数值增量的线性主部是(　　).

（A）-0.2　　（B）0.2　　（C）-0.1　　（D）0.1

（2）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, x\le 0, \\ \sin\sqrt{x}+1, x>0. \end{cases}$ $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)=$（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c_1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$

（B）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（D）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（3）设函数 $f(x)$ 具有四阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=1$，则

(A) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f'(x)$ 的拐点，点 $x=0$ 为 $f''(x)$ 的极小值点.

(B) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f'(x)$ 的拐点，点 $x=0$ 为 $f''(x)$ 的极大值点.

(C) 点 $x=0$ 为 $f'(x)$ 极小值点，点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f''(x)$ 的拐点.

(D) 点 $x=0$ 为 $f'(x)$ 极大值点，点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f''(x)$ 的拐点.

（4）将极坐标系下的二次积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$（　）

(A) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.　　(B) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

（5）设三阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=2$，且 A 不能相似于对角阵，则

$r(A+E)+r(A-E)+r(A-2E)=$（　　）

（A）3　　（B） 4　　（C）6　　（D）7

（6）设 $A=2E+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，其中 $\alpha=(1,-1,-1)^T, \beta=(-2,1,0)^T$，则矩阵 A 的最小特征值对应的的特征向量是（　）.

（A）α　　（B） β

（C）$\alpha+\beta$　　（D）$\alpha-\beta$

（7）设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，$0<a<b<2a$，记 $p_1=P\{X>a\}$，$p_2=P\{X>b\}$，$p_3=P\{X>b|X>a\}$,则（　　）.

（A） $p_1>p_2>p_3$　　(B) $p_2>p_1>p_3$

(C) $p_3>p_1>p_2$　　(D) $p_3>p_2>p_1$

（8）设随机变量 $X\sim U\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$，$U=\sec X, V=\tan X$，则（　　）.

(A) U^2 与 V^2 相互独立　　(B) U 与 V 相互独立

(C) U^2 与 V^2 不相关　　(D) U 与 V 不相关

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $f(x)=x^n(x-1)^n\cos x$，此处 n 为正整数，那么 $f^{(n)}(0)=$________.

（10）若折线 $y=1-|x|$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$_____.

（11）已知可微函数 $f(x)$ 满足 $\int_1^x \dfrac{f(t)\mathrm{d}t}{f^2(t)+t}=f(x)+1$，则 $f(x)=$______________.

（12）差分方程 $2y_{t+1}-6y_t=5\cdot 3^t$ 满足 $y_0=0$ 的特解为________________.

（13）已知三阶非零矩阵 B 的列向量是下列方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+ax_3=2 \end{cases}$ 与方程 $3x_1+x_2-x_3=-1$ 的公共

解，令 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & a\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $(AB)^n=$______.

（14）$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，对任意的 α，（$0<\alpha<1$），自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 定义为 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$. 则

$$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\underline{\qquad\qquad}.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}]=1$，求 $f'(0)$.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 - xy + 2y^2 - x - 3y + ze^z = 2(e^2 - 1)$$

确定，求 $z = z(x, y)$ 的极值.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设有幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$.

（I）求该级数的收敛区间；

（II）设上述级数在收敛区间内的和函数是$y(x)$，证明$y(x)$满足方程$y'=\frac{-x}{1+x^2}y$；

（III）求级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$在收敛区间内和函数的表达式.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）某商品的需求函数$Q=75-p^2$，p为价格，试求：（I）当$p=4$时的边际需求，并说明其经济意义；（II）当$p=4$时的需求价格弹性$E_d(E_d>0)$，并说明其经济意义；（III）当$p=4$时，若价格提高1% ，总收益是增加还是减少多少？

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$x_0\in(0,1)$，且在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值.试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi\in(x_0,1)$，使得 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中的 ξ, 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设有向量组$\alpha_1=(1,1,1,2)^T$,$\alpha_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$,$\alpha_3=(4,6,8,10)^T$,$\alpha_4=(2,3,2a+3,5)^T$，

（I）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩及一个极大线性无关组；

（I）令$\beta=(0,2,4,b)^T$,若任意的 4 维列向量γ均可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性表示，求$a,b$.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，（I）证明 $\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；（II）若 $A^3\boldsymbol{\beta}=A^2\boldsymbol{\beta}+2A\boldsymbol{\beta}$，求 $|A+3E|$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量$\left(X,Y\right)$的联合分布函数

$$F\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ \dfrac{1}{4}y, & 0\le x<1\text{且}0\le y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<1\text{且}y\ge 1,\\ y, & x\ge 1\text{且}0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1\text{且}y\ge 1.\end{cases}$$

（I）判断X,Y是否相互独立？（II）求$Z=XY$的分布函数$F_Z\left(z\right)$，并问Z是否是连续型的随机变量？

（III）求$Z=XY$的方差$D(Z)$.

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设区域G是x轴、y轴和直线$y=2x+1$围成的三角形区域，(X,Y)在区域G上服从均匀分布.

（I）求条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；（II）求$Z=2X-Y$的概率密度函数$f_Z(z)$.