绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥三套卷之数学（二）试卷 （模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x-\sin x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 也在 $x=0$ 处连续，则有（ ）.

（A） $\varphi(0)=0,\varphi'(0)$ 未必存在 （B） $\varphi(0)=1,\varphi'(0)$ 未必存在

（C） $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$ （D） $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\dfrac{1}{2}$

（2）设非常值函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续，若对 $[-1,1]$ 上的任意偶函数 $g(x)$，积分 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$，则下列不正确的是（ ）

（A） $\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$ （B） $\int_{-1}^{1}[f(x)-f(-x)]g(x)dx=0$

（C） $f(x)$ 为奇函数 （D） $f(x)$ 未必一定是奇函数

（3）设 $\varphi(x,y)$ 为非零函数，且具有连续的偏导数，函数 $u(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varphi(x,y)}$，则下列等式成立的是（ ）.

（A） $x\varphi_y'(x,y)=y\varphi_x'(x,y)$ （B） $x\varphi_y'(x,y)=-y\varphi_x'(x,y)$

（C） $x\varphi_x'(x,y)=y\varphi_y'(x,y)$ （D） $x\varphi_x'(x,y)=-y\varphi_y'(x,y)$

（4）设 $f(u)$ 为可导函数,曲线 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\dfrac{1}{2},4)$,且在该点处切线过原点 $(0,0)$,那么函数 $f(u)$ 在 $u=-3$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=-0.1$ 时相应的函数值增量的线性主部是( ).

（A） -0.2 （B） 0.2 （C） -0.1 （D） 0.1

（5）已知 $y=c_1+c_2\sin x+xe^{-x}$ (其中 c_1,c_2 为任意常数)是某二阶微分方程的通解，则该方程是（ ）.

（A） $\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（B） $\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(x-2)\sin x+(1-x)\cos x]e^{-x}$

（C） $\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（D） $\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(x-2)\cos x+(1-x)\sin x]e^{-x}$

（6）设函数 $f(x)$ 具有四阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1,$ 则（　）.

(A) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f'(x)$ 的拐点，点 $x=0$ 为 $f''(x)$. 的极小值点

(B) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f'(x)$ 的拐点，点 $x=0$ 为 $f''(x)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f''(x)$ 的拐点, 点 $x=0$ 为 $f'(x)$ 的极小值点

(D) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f''(x)$ 的拐点, 点 $x=0$ 为 $f'(x)$ 的极大值点

（7）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维非零列向量组，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$， A^* 为 A 的伴随矩阵，已知方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,0,-1,0)^T$，则方程组 $A^*x=0$ 的基础解系为（　　）.

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C） $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　（D） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

（8）设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=O$，若 $r(A-E)=1$，则二次型 x^TAx 的规范形是（　）.

（A） $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$　　（B） $y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$

（C） $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$　　（D） $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)+e^x-xy=0$ 确定，则 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}=$ ________.

（10）设 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\dfrac{dt}{1+(\tan t^2)^2}$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ________.

（11）设 $y=xe^x+e^{-x}$ 为二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{-x}$ 的一个特解，则该方程满足初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 的特解是____________.

（12）设 $z=\varphi(u),u=f(x+y,x^2-y^2),$ 其中 φ 具有连续的导数， f 具有连续的偏导数，则

$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ___________ .

(13) 若折线 $y=1-|x|$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$ ____ .

（14）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组， $\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，且

$(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)X=\alpha_4$，则 $X=$_____ .

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\left[e^x-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt\right]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}}=e^{\frac{2}{3}},$$

求 $f''(0)$.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $z=f(e^x\cos y, e^x\sin y)+g(xy)$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，g 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）（**本题满分 10 分**）设 D 是由直线 $x+y=1$，$x+y=2$ 及 x 轴和 y 轴围成的四边形区域，计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} e^{(x+y)^2}(\cos^2 x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）高温物体的冷却速度遵循所谓的冷却定理：“物体冷却速度与该物体与周围介质的温度差成正比”．设某物体开始温度为$100^{\circ}C$，放在$20^{\circ}C$的空气中，经过600秒后下降到$60^{\circ}C$，问从$100^{\circ}C$下降到$25^{\circ}C$需要多少时间？

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$，在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $(x, f(x))(x\neq 0)$，设该点处曲线切线在 x 轴上的截距为 a_x，

（I）证明：$\lim\limits_{x\to 0} a_x = 0$；（II）证明：当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $\dfrac{x^2}{2}$ 为等价无穷小；

（III）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(a_x)}{a_x f(x)}$.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）证明：（I）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均连续，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$ （柯西-施瓦兹不等式）；

（II）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=1$，则 $\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\ge\dfrac{4}{\pi}$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\alpha_4)$ 是 4 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量．若方程组 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1,2,2,1)^T+k(1,-2,4,0^T)$，又 $B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)$，(I) 求方程组 $Bx=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 的通解；（II）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？说明理由.

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设三阶实对称矩阵 A 满足 $|E-A|=0$，且

$$A\begin{pmatrix}2&2\\4&-2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\0&4\\0&-2\end{pmatrix},$$

（I）求矩阵 A 的特征值和特征向量；（II）如果 $\beta=(1,-1,5)^T$，求 $A^n\beta$.