绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥三套卷之数学（二）试卷 （模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）当 $x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】(B).

【解】$x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln(1+\sin x-x)}{x}}-1\sim\frac{\ln(1+\sin x-x)}{x}\sim\frac{\sin x-x}{x}\sim-\frac{x^2}{6}$，因此 $n=2$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{1}{(n+i+j)^2}=$（　　）

（A）$\int_0^1dx\int_0^x\frac{dy}{(1+x+y)^2}$　　（B）$\int_0^1dx\int_0^1\frac{dy}{(1+x+y)^2}$

（C）$\int_0^1dy\int_{1-y}^1\frac{dx}{(1+x+y)^2}$　　（D）$\int_0^1dy\int_0^{1-y}\frac{dx}{(1+x+y)^2}$

【答案】(A).

【解】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{1}{(1+i/n+j/n)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\iint\limits_D\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$，$D:\begin{cases}0\le y\le x,\\0\le x\le 1.\end{cases}$因此，(A) 正确的.

（3）设 $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin x}{x}dx$，$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x}{\arcsin x}dx$，$I_3=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$，$I_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x}{\ln(1+x)}dx$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2$ 且 $I_3<I_4$　　（B）$I_1<I_2$ 但 $I_3>I_4$

（C）$I_1>I_2$ 且 $I_3>I_4$　　（D）$I_1>I_2$ 但 $I_3<I_4$

【答案】(D).

【解】由于 $1>x>\frac{1}{2}$ 时，$\arcsin x>x$, $\ln(1+x)<x$；故 $\frac{\arcsin x}{x}>1>\frac{x}{\arcsin x}$，$\frac{\ln(1+x)}{x}<1<\frac{x}{\ln(1+x)}$，

因此 $I_1 > I_2$ 且 $I_3 < I_4$，选择（D）.

（4）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间（ ）.

(A) 没有交点　　(B) 仅有一个交点　　(C) 有两个交点　　(D) 有三个交点

【答案】(A).

【解法一】 两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$，令

$$f(x)=kx^2-\ln x,\ f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0, x=\frac{1}{\sqrt{2k}},\ f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k),$$

当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时有 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{2k}})$ 上单减，在 $(\dfrac{1}{\sqrt{2k}},+\infty)$ 上单增，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根，即两个曲线没有交点，选（A）.

【解法二】 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}, f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{e}, 0<x<\sqrt{e}, f'(x)>0, f(x)$ 单调增，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$；$x>\sqrt{e}, f'(x)<0, f(x)$ 单调减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{e}$ 处取到最到最大值 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$，$k>\dfrac{1}{2e}$ 时，两曲线无交点，答案为（A）.

（5）曲线 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}, & x<-1,\\ \dfrac{x}{x+2}\arctan x^2, & x\ge -1\end{cases}$ 的渐近线条数是（　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】(C).

【解】$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\infty, x=-1$ 为铅锤渐近线；$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$，左边无水平渐近线；

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-1}}=-1, b=\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})+x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{[x^2-x^2(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{2x^2}))]+x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$=-1, y=-x-1$ 是斜渐近线；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+2}\arctan x^2=\dfrac{\pi}{2}, y=\dfrac{\pi}{2}$ 为水平渐近线.一共三条渐近线，选（C）.

（6）将极坐标系下的二次积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr$ 化为直角坐标系下的二次积分，则

$I=$（　）

(A) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.　　(B) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$. (D) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

【答案】（C）.

【解】极坐标下的区域$D:\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le 2\sin\theta$在直角坐标系下的区域为

$D: y=x, x=\sqrt{2y-y^2}, x=0$所围成，$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dx$$,选（C）.

（7）已知 4 维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若$\alpha_i^T\beta_j$=0，$\beta_j\ne 0,(i=1,2,3,\ j=1,2,3,4)$，则向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$（ ）.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

【答案】（A）.

【解】记$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$A$是秩为 3 的$3\times 4$的矩阵，由于$\beta_j$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均正交，故$\beta_j$是齐次方程组$Ax=0$的非零解，由于$\beta_j$非零，故$1\le r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le n-r(A)=1$，所以$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=1$.

（8）已知A,B均为 3 阶矩阵，$|A|=0$，且满足$AB+3B=O$，若$r(B)=2$，则行列式$|A+2E|=$（ ）.

（A）1 （B）2 (C) 4 (D) 8

【解】设$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由$(A+3E)B=O$知，$\lambda=-3$是矩阵$A$的特征值，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是特征值$\lambda=-3$的特征向量.由$r(B)=2$，所以$\lambda=-3$至少有 2 个线性无关的特征向量.所以$\lambda=-3$至少是二重特征值.又因$|A|=0$，$\lambda=0$必是矩阵$A$的特征值.从而$A$的特征值是$-3,-3,0$，$A+2E$的特征值为$-1,-1,2$，故$|A+E|=(-1)\times(-1)\times 2=2$.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设$y=f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=1$，则曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为____________________.

【答案】$y=\dfrac{1}{2}x+1$.

【解】由题设有$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(\sin x)=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=2f'(0)=1，得 f'(0)=\frac{1}{2}，$$

故所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

（10）$I=\int_{-1}^{1}x(1+x^{2019})(e^x-e^{-x})dx=$________.

【答案】 $4e^{-1}$.

【解】由于 e^x-e^{-x} 为奇函数，故 $x(e^x-e^{-x})$ 为偶函数，故 $x^{2020}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数.

$$I=2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=2\int_0^1 xd(e^x+e^{-x})=2x(e^x+e^{-x})\Big|_0^1-2\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$$

$$=2(e+e^{-1})-2(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=4e^{-1}.$$

（11）心形线 $r=1+\cos\theta$ 在 $(1,\dfrac{\pi}{2})$ 处的曲率半径 $R=$_______.

【答案】 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

【解】 $\begin{cases}x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta},\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{d\theta}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{d\theta}(\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta})\cdot\frac{1}{-\sin\theta-\sin 2\theta}$$

$$=\frac{(-\sin\theta-2\sin 2\theta)(-\sin\theta-\sin 2\theta)-(\cos\theta+\cos 2\theta)(-\cos\theta-2\cos 2\theta)}{(-\sin\theta-\sin 2\theta)^3},$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-3$，曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$，曲率半径 $R=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（12）已知可微函数 $f(x)$ 满足 $\int_1^x\dfrac{f(t)\mathrm{d}t}{f^2(t)+t}=f(x)+1$，则 $f(x)=$____________.

【答案】 $-\sqrt{x}$.

【解】等式两边对 x 求导可得 $\dfrac{f(x)}{f^2(x)+x}=f'(x)$，因此函数 $y=f(x)$ 满足方程

$\dfrac{y}{y^2+x}=y'$，变形后可得 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=y$，该方程是一阶非齐次线性微分方程，通解为

$$x=e^{\ln y}(\int ye^{-\ln y}dy+C)=y^2+Cy,$$

由题设知 $f(1)=-1,C=0$，因此有

$x=y^2,y=f(x)=-\sqrt{x}$ 或者 $f(x)=\sqrt{x}$，由 $f(1)=-1$，因此有 $f(x)=-\sqrt{x}$.

（13）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\sqrt{1-\sin\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1-\sin\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\sin\dfrac{n\pi}{n}})=$__________.

【答案】$\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi}$.

【解】原式$=\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\pi}{n}\sqrt{1-\sin\dfrac{i\pi}{n}}=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi}.$$

（14）设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

【答案】$(-1)^{n+1}n!\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&\frac{1}{n}\\1&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\frac{1}{n-1}&0\end{pmatrix}$.

【解】 由于 $(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}=(-1)^{n+1}n!\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&\frac{1}{n}\\1&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\frac{1}{n-1}&0\end{pmatrix}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}ax+x^b\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+x}{n-x})^n+c, & x\le 0,\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试确定常数 a,b,c 的取值情况.

【解】$f(x)=\begin{cases}ax+x^b\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+x}{n-x})^n+c, & x\le 0,\end{cases}=\begin{cases}ax+x^b\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^{2x}+c, & x\le 0,\end{cases}$ ……4 分

由于可导一定连续因此有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+x^b\cos\frac{1}{x})=f(0)=c+1$，必有 $c=-1,b>0$，　　$\cdots\cdots$6 分

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$，　$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax+x^b\cos\frac{1}{x}}{x}=a+\lim\limits_{x\to 0^+}x^{b-1}\cos\dfrac{1}{x}=2$，

所以有 $a=2,b>1$.　　$\cdots\cdots$10 分

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=1,f'(0)=-1$，且当 $x\neq 0$ 时 $z=f(x^2-y^2)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=(y^2-x^2)(z+\cos\frac{x^2-y^2}{2}),$$

求函数 $f(u)$ 的表达式.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+4x^2f'',\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf',\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f'+4y^2f''$，　　$\cdots\cdots$4 分

代入题设等式可得

$$4(x^2-y^2)f''(x^2-y^2)=(y^2-x^2)[f(x^2-y^2)+\cos\frac{x^2-y^2}{2}]$$

因此 $f(u)$ 满足方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=-\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{u}{2}$，　　$\cdots\cdots$6 分

方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=0$ 的通解为 $f(u)=C_1\cos\dfrac{u}{2}+C_2\sin\dfrac{u}{2}$，

方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=-\dfrac{1}{4}\cos u$ 的特解可设为 $f^*(u)=u(A\cos\dfrac{u}{2}+B\sin\dfrac{u}{2})$，代入方程可得

$$-A\sin\frac{u}{2}+B\cos\frac{u}{2}=-\frac{1}{4}\cos\frac{u}{2}, \text{解得 } A=0,B=-\frac{1}{4}.$$

因而方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=-\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{u}{2}$ 的通解为 $f(u)=C_1\cos\dfrac{u}{2}+C_2\sin\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{4}u\sin\dfrac{u}{2}$，由 $f(0)=1,f'(0)=-1$ 可得 $C_1=1,C_2=-2$，因此 $f(u)=\cos\dfrac{u}{2}-(\dfrac{1}{4}u+2)\sin\dfrac{u}{2}$.　　$\cdots\cdots$10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D x(x+ye^{x^2})\mathrm{sgn}(y-|x|)d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le 1,0\le y\le 1$，$\mathrm{sgn}(\ )$ 是符号函数.

【解】 折线 $y=|x|$ 把 D 分为 D_1,D_2 则 $I=-\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D_2}x(x+ye^{x^2})d\sigma$　　$\cdots\cdots$2 分

$$=-\iint\limits_{D_1}x^2d\sigma+\iint\limits_{D_2}x^2d\sigma \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=-\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{|x|}x^2dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{1}x^2dy \qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}. \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$$

确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解】 分别对等式 $x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$ 两边关于 x 及 y 求偏导可得

$$2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$-x+4y-3+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0\text{，}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 可得 $\begin{cases}2x-y-1=0,\\-x+4y-3=0.\end{cases}$ 解得 $x=y=1$，代入原方程可得 $z=2$，因此点 $(1,1)$ 是函数 $z=z(x,y)$ 唯一的驻点，且有 $z(1,1)=2$. $\cdots\cdots$2 分

对等式 $2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边关于 x 再求偏导可得

$$2+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(z+2)e^z(\frac{\partial z}{\partial x})^2=0\text{，}$$

将 $x=y=1$, $z=2,\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 代入可得 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{2}{3e^2}$， $\cdots\cdots$4 分

对等式 $2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边关于 y 再求偏导可得

$$-1+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(z+2)e^z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\text{，}$$

将 $x=y=1$, $z=2,\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{3e^2}$， $\cdots\cdots$6 分

对等式 $-x+4y-3+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 两边关于 y 再求偏导可得

$$4+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+(z+2)e^z(\frac{\partial z}{\partial y})^2=0\text{，}$$

将 $x=y=1, z=2, \frac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{4}{3e^2}$， ……8 分

因而有 $AC-B^2=\frac{7}{9e^4}>0, A=-\frac{2}{3e^2}<0$，因此 $z(1,1)=2$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值． ……10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x>0$，求使不等式 $x^a \le e^x$ 成立的正数 a 的最大值．

【解】 $a>0$，当 $x\in(0,1]$ 时上述不等式显然成立； ……2 分

当 $x>1$ 时上述不等式等价于 $a\le\frac{x}{\ln x}$，因此只要取 a 为函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内最小值即可， $f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$， ……6 分

当 $x\in(1,e)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$， ……8 分

因而 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 在 $x=e$ 处取得最小值，且有 $f(e)=e$，因此 a 可以取的最大值为 e． ……10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导， $f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值及最小值均在 $(0,1)$ 内取到．证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $f'(\xi_k)=f(\xi_k), k=1,2$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$．

【证明】（Ⅰ）由题设知在 $(0,1)$ 存在两个不同的点 x_1,x_2，且有

$$\min_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(x_1)<0, \max_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(x_2)>0,$$

此处不妨设 $x_1<x_2$，由于 $f(x_1)f(x_2)<0$，由连续函数的零点定理知存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_0)=0,$$ ……2 分

令 $F(x)=f(x)e^{-x}$， ……4 分

则有 $F(0)=F(x_0)=F(1)=0$，由 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0), \xi_2\in(x_0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，由

$F'(x)=[f'(x)-f(x)]e^{-x}$ 可得在 $(0,1)$ 存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得

$f'(\xi_k)=f(\xi_k), k=1,2$； ……6 分

（Ⅱ）由于 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta) \Leftrightarrow f''(\eta)-f'(\eta)+2(f'(\eta)-f(\eta))=0$，

令 $G(x)=[f'(x)-f(x)]e^{2x}$， ……9 分

由（Ⅰ）的证明知 $G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得

$$F'(\eta)=[f''(\eta)-f'(\eta)]e^{2\eta}+2[f'(\eta)-f(\eta)]e^{2\eta}=0,$$

即有 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$.　　$\cdots\cdots$11 分

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）

某容器的外表面是 $y=x^2(0\le y\le H)$ 绕 y 轴旋转所围成的曲面，其容积为 $450\pi\ m^3$，其中盛满水，如果将水全部抽出，问至少需要做多少功？

【解】由公式 $V=\pi\int_0^H(\sqrt{y})^2dy=\pi\frac{1}{2}H^2=450\pi$，因此，$H=30m$.　　$\cdots\cdots$6 分

取 y 为积分变量，$y\in[0,30]$，任取子区间 $[y,y+dy]$，功的微元为

$dW=\pi x^2\rho g(30-y)dy=\pi\rho gy(30-y)dy$,其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度,　　$\cdots\cdots$9 分

将水全部抽出，至少需要做功 $W=\int_0^{30}\pi gy(30-y)dy=4500\pi\rho g(\mathrm{J})$.（J 为功的单位焦耳）　$\cdots\cdots$11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）

（I）设有向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$,（II）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$.

（I）问 a,b 为何值时，向量组（II）不能由向量组（I）线性表示？

（II）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\1&b\end{pmatrix}$，问 a,b 为何值时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，有解时求出其全部解.

【解】（I）$(\boldsymbol{\alpha}_1,,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\1&2&a&1&b\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&1&a-1&2&b-1\end{array}\right)$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right),$$　　$\cdots\cdots$4 分

$a=3,b\ne1$ 时，β_1,β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，

$a\ne3,b$ 任意，β_1,β_2 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，且表示法唯一；

$a=3,b=1$ 时，β_1,β_2 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，且表示法不唯一；　　$\cdots\cdots$5 分

（II）$a=3,b=1$ 时 $(A|B)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，解得

$$X=\begin{pmatrix}-3+k&1+l\\2-2k&-2l\\k&l\end{pmatrix},k,l\text{ 为任意常数.}$$　　$\cdots\cdots$8 分

当 $a\neq 3,b$ 任意时，$(A|B)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right)$ $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，且

$$X=\begin{pmatrix}-3&1+\dfrac{b-1}{a-3}\\2&\dfrac{-2(b-1)}{a-3}\\0&\dfrac{b-1}{a-3}\end{pmatrix}.$$

……11 分

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $6y_3^2$，且 $AB=O$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,-1)^T$，$\alpha_2=(-2,1,0)^T$，

(I) 求所用的正交变换 $x=Qy$ 及二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的表达式;（II）求 $(A-3E)^8$.

【解】(I）由 $A\alpha_1=0=0\alpha_1,A\alpha_2=0=0\alpha_2$，知特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，α_1,α_2 是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的线性无关的特征向量，又 $\lambda_3=6$ 是 A 的特征值，设其对应的特征向量为为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0,\\-2x_1+x_2=0,\end{cases}$ 解得特征向量为 $\alpha_3=(1,2,-1)^T$；……3 分

将 α_1,α_2 正交得

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化有 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

令 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，经 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,化二次型

$f=x^TAx=y^T\Lambda y=6y_3^2$；……5 分

由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,6\alpha_3)$,得 $A=(0,0,6\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$,

或者 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = Q\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{pmatrix}Q^T = 6\gamma_1\gamma_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$. ……7 分

(II)因为 $Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$,有 $Q^{-1}(A-3E)Q = \Lambda - 3E = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$,从而

$$Q^{-1}(A-3E)^8 Q = (\boldsymbol{\Lambda} - 3E)^8 \Rightarrow Q^{-1}(A-3E)^8 Q = (\boldsymbol{\Lambda} - 3E)^8 = 3^8 E,$$

所以

$$(A-3E)^8 = Q(\boldsymbol{\Lambda} - 3E)^8 Q^{-1} = 3^8 E = \begin{pmatrix} 3^8 & & \\ & 3^8 & \\ & & 3^8 \end{pmatrix}.$$ ……11 分