绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟二）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$，则（ ）.

（A） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

【答案】（C）.

【解】 $f(x)=\begin{cases} x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}, & |x|>1, \\ 0, & x=-1, \\ -x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}, & 0<|x|<1, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$ 与

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[-x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}]$ 均不存在，所以应选答案（C）.

（2）对于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}(p>0,q>0)$ ，下列结论正确的是（ ）

（A） $0<p<1$， $0<q<1$ 时收敛. （B） $0<p<1$， $q\ge 1$ 时收敛.

（C） $p\ge 1$， $0<q<1$ 时收敛. （D） $p\ge 1$， $q\ge 1$ 时收敛.

【答案】（A）.

【解】由于 $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ 都是被积函数的瑕点，因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^p\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{x^p}dx$ 当 $p\ge 1$ 时发散，当 $0<p<1$ 时收敛，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当

$0<p<1$ 时收敛；同时由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)^q\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，可知 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当 $0<q<1$ 收敛，$q\ge 1$ 发散，故选择（A）.

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2},(x,y)\ne(0,0),\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　）.

（A）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均连续

（B）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均不连续但可微

（C）不可微但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在

（D）连续但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均不存在

【答案】（A）.

【解】 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$f_y'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y\arctan\dfrac{1}{y^2}}{y}=\dfrac{\pi}{2}$，

由 $f_x'(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x(x+y)}{1+(x^2+y^2)^2},(x,y)\ne(0,0),\\ \dfrac{\pi}{2}, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$ 可知偏导数 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，同理 $f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处也连续．答案为（A）.

（4）已知微分方程 $y''+ay'+by=xe^{\lambda x}$ 的通解形式是 $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+(Ax+B)e^{\lambda x}$，其中 c_1,c_2 是任意常数，则必有（　　）.

（A）　$a=2,b=1,\lambda=-1$　　　（B）$a=2,b=1,\lambda\ne-1$

（C）$a=-2,b=1,\lambda=-1$　　　（D）$a=-2,b=1,\lambda\ne-1$

【答案】（B）.

【解】由题意，-1 为二重特征根，$\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda+1)^2\Rightarrow a=2,b=1.$

$(Ax+B)e^{\lambda x}$ 是 $y''+ay'+by=xe^{\lambda x}$ 的特解，所以 $\lambda\ne-1$．选（B）.

（5）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}3&a&0\\a&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同但不相似，则 a 的取值为（　　）.

(A)　$a=3$　　　(B)　$-9<a<0,0<a<9$

(C) $-3<a<0,0<a<3$　　　　(D) $a=-3$

【答案】(C).

【解】矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 的特征值为 $3,3,0$；

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}3-\lambda&a&0\\a&3-\lambda&0\\0&0&0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-6\lambda+9-a^2),$$

要使矩阵 A,B 合同但是不相似，则 $\lambda^2-6\lambda+9-a^2=0$ 有两个正根且不都是 3，则

$$9-a^2>0\Rightarrow -3<a<0,0<a<3.\text{选（C）}.$$

（6）已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

① α_1,α_3 线性无关；　② α_1 可由 α_2,α_3 线性表示；

③ α_3,α_4 线性无关；　④ $r(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=3$

其中正确的是（　　）.

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）①④

【答案】(C).

【解】$\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系可知 $\begin{cases}4-r(A)=2,\\\alpha_1-\alpha_3=0,\\\alpha_2+\alpha_4=0.\end{cases}$ 所以②

③正确，$r(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=r(\alpha_1,-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=r(\alpha_1,-\alpha_2,0)=2$.选（C）.

（7）　设随机变量 (X,Y) 在由 $(0,0),(0,1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域内服从均匀分布，则当 $0<y\le x$ 且 $y\le1$ 时，(X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)=($　　$)$.

（A）$2xy-x^2$　　（B）y^2　　（C）$2x-x^2$　　（D）1

【答案】(B).

【解】当 $0<y\le x$ 且 $y\le1$ 时，$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 2du=y^2$,选（B），

（8）设 $X\sim N(0,1)$，$P\{X>U_\alpha\}=\alpha$；$Y\sim\chi^2(1)$，$P\{Y>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha$；

$Z\sim t(n)$，$P\{Z>t_\alpha(n)\}=\alpha$；$W\sim F(1,n)$，$P\{W>F_\alpha(1,n)\}=\alpha$，

其中$0<\alpha<1$，现有如下四个命题:

① $\chi_\alpha^2(1)=U_{\frac{\alpha}{2}}^2$； ② $F_\alpha(1,n)=t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$； ③ $F_\alpha(1,n)F_{1-\alpha}(1,n)=1$； ④ $t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)F_{1-\alpha}(n,1)=1$

其中正确的个数为（ ）.

（A） 0 （A）1 （C）2 （D） 3

【答案】(D).

【解】由于 $X\sim N(0,1),X^2\sim\chi^2(1),\ P\{Y>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha\Rightarrow P\{X^2>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha$

$\Rightarrow P\{|X|>\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}\}=2P\{X>\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}\}=\alpha\Rightarrow P\{X>\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}\}=\dfrac{\alpha}{2}$,

$\Rightarrow\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}=U_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\chi_\alpha^2(1)=U_{\frac{\alpha}{2}}^2$,①正确;

由于 $Z\sim t(n),Z^2\sim F(1,n)$，同理② $F_\alpha(1,n)=t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 正确;

若 $W\sim F(1,n)$，则 $\dfrac{1}{W}\sim F(n,1)$，$P\{W>F_\alpha(1,n)\}=\alpha\Rightarrow P\left\{\dfrac{1}{W}<\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}\right\}=\alpha$，

$\Rightarrow 1-P\left\{\dfrac{1}{W}\geq\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}\right\}=\alpha\Rightarrow P\left\{\dfrac{1}{W}>\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}\right\}=1-\alpha$，又 $P\left\{\dfrac{1}{W}>F_{1-\alpha}(n,1)\right\}=1-\alpha$，所以

$F_{1-\alpha}(n,1)=\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}$；①,②,④正确.选（D）.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$ ________.

【答案】1.

【解】$1<(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}<n^{\frac{1}{n}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=1$.

（10）$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=$ ____________.

【答案】$\dfrac{4}{15}(2+\sqrt{2})$.

【解】$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=\int_0^2\sqrt{x}\,|x-1|\,dx=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)dx+\int_1^2\sqrt{x}(x-1)dx=\dfrac{4}{15}(2+\sqrt{2})$.

（11）设 $e^z=(x^2-1)z+x(2+y)-1$ 确定了 $z=z(x,y)$，则 $dz|_{(1,0)}=$ ________.

【答案】$2dx+dy$.

【解】由题设知 $x=1,y=0$ 时 $z=0$，等式两边同时求微分可得,

$e^zdz=2xzdx+(x^2-1)dz+(2+y)dx+xdy$，把 $x=1,y=0,z=0$ 代入可得 $dz|_{(1,0)}=2dx+dy$.

（12）曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的斜渐近线是_____________.

【答案】 $y=x$.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x-1}}-1)-\dfrac{x-1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}]=0$，所以 $y=x$ 是它的斜渐近线.

（13）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则矩阵

$B=$________.

【答案】 $\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【解】　关系式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$-2B=2A\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{E}，\text{即 } AB+B=4\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=4\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

（14）一射手对一目标独立重复地射击 4 次，若至少命中一次的概率为 $\dfrac{80}{81}$，则他第四次射击恰好是第二次命中的概率为____________.

【答案】 $\dfrac{4}{27}$.

【解】设每次命中目标的概率为 p，由题意知 $1-\left(1-p\right)^4=\dfrac{80}{81}$，则 $p=\dfrac{2}{3}$.

则他第四次射击恰好是第二次命中的概率为 $C_3^1\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{27}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设 $x\to 0$ 时，函数 $a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$ 与 kx^3 是等价无穷小，求常数 a,b,c,k 的值.

【解法一】由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}}{x^3}=k$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}]=0$，因此有 $a-1=0,a=1$，　　…… 2 分

$$\text{左式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{b-c\sqrt{1+x}\sec^2x-\dfrac{1+c\tan x}{2\sqrt{1+x}}}{3x^2},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2b\sqrt{1+x}-2c(1+x)\sec^2 x-1-c\tan x}{6x^2}$$，因此有 $2b-2c-1=0$，

$$左式=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{b}{\sqrt{1+x}}-4c(1+x)\sec^2 x\tan x-3c\sec^2 x}{12x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{b-4c(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x-3c\sqrt{1+x}\sec^2 x}{12x\sqrt{1+x}}$$

由此可得 $b=3c$，再由 $2b-2c-1=0$ 可得 $b=\dfrac{3}{4},c=\dfrac{1}{4}$　　…… 6 分

$$因而有\ k=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{4}-(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x-\dfrac{3}{4}\sqrt{1+x}\sec^2 x}{12x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{3}{48}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}\sec^2 x}{x\sqrt{1+x}}-\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x}{x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{3}{48}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sqrt{1+x}\sec^2 x\tan x-\dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+x}}}{1}-\frac{1}{12}=-\frac{11}{96}.$$　　…… 10 分

【解法二】

$a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$

$=a+bx-[1+cx+\dfrac{cx^3}{3}+o(x^3)][1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-\dfrac{1}{2})x-(\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{8})x^2-(\dfrac{1}{16}-\dfrac{c}{8}+\dfrac{c}{3})x^3+o(x^3)$，　　…… 6 分

$=kx^3+o(x^3)$，因此有

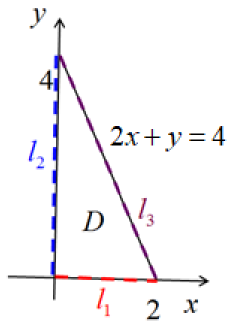
$a-1=0,b-c-\dfrac{1}{2}=0,\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{8}=0,-(\dfrac{1}{16}-\dfrac{c}{8}+\dfrac{c}{3})=k$，解得

$a=1,b=\dfrac{3}{4},c=\dfrac{1}{4},k=-\dfrac{11}{96}$.　　…… 10 分.

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）求函数 $z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x\ge 0,y\ge 0,2x+y\le 4\}$ 上的最大值及最小值.

【解】 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=[2x-2(x^2+y-1)]e^{-2x-y}=0,\\ f_y'(x,y)=[1-(x^2+y-1)]e^{-2x-y}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1,\\ y=1.\end{cases}$ 因此函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有唯一的一个驻点，且有 $z=f(1,1)=e^{-3}$.　　…… 2 分



如图所示 D 的边界由三条线段组成.

记 $l_1:y=0,0\le x\le 2$，当 $(x,y)\in l_1$ 时，

$z=f(x,0)=(x^2-1)e^{-2x},\dfrac{dz}{dx}=2(1+x-x^2)e^{-2x}$，

令 $\dfrac{dz}{dx}=0$，解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或者 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

$f(0,0)=-1,\ f(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},0)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-(1+\sqrt{5})},\ f(2,0)=3e^{-4}>f(0,0)$，因 $x\in(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},2)$ 时 $\dfrac{dz}{dx}<0$，因此

$z=f(x,y)$ 在 l_1 取到的最大值为 $f(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},0)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-(1+\sqrt{5})}$，最小值为 $f(0,0)=-1$；…… 4 分

记 $l_2: x=0,0\le y\le 4$，当 $(x,y)\in l_2$ 时，$z=f(0,y)=(y-1)e^{-y},\dfrac{dz}{dy}=(2-y)e^{-y}$，令 $\dfrac{dz}{dy}=0$，解得 $y=2$，

$f(0,0)=-1,\ f(0,2)=e^{-2},\ f(0,4)=3e^{-4}>f(0,0)$，因 $y\in(2,4)$ 时 $\dfrac{dz}{dy}<0$，因此 $z=f(x,y)$ 在 l_2 取到

的最大值为 $f(0,2)=e^{-2}$，最小值为 $f(0,0)=-1$；　　…… 6 分

记 $l_3: y=4-2x,0\le x\le 2$，当 $(x,y)\in l_3$ 时，

$$z=f(x,4-2x)=(x^2-2x+3)e^{-4}=[(x-1)^2+2]e^{-4},$$

因此 $z=f(x,y)$ 在 l_3 取到的最大值为 $f(0,4)=f(2,0)=3e^{-4}$，最小值为 $f(1,2)=2e^{-4}$．……8 分

综合上述，$z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,y\ge 0,2x+y\le 4\}$ 上的最大值

最大值为 $f(0,2)=e^{-2}$，最小值为 $f(0,0)=-1$.　　……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $I=\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由直线 $y=0,y=2,x=-2$，及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

【解】记半圆形区域为 D_1，则 $I=\iint\limits_D xydxdy=\iint\limits_{D+D_1} xydxdy-\iint\limits_{D_1} xydxdy$，　　…… 2 分

其中 $\iint\limits_{D+D_1} xydxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_0^2 xydy=(\dfrac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{0}\cdot(\dfrac{1}{2}y^2)\Big|_0^2=-4$，　　…… 4 分

$$\iint\limits_{D_1} xydxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sin\theta}\cdot\sin\theta\cos\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}\cdot 16\sin^5\theta\cos\theta d\theta=4\cdot\frac{1}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{2}{3},$$ …… 8 分

因此，原式 $I=-4+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{10}{3}$.　　…… 10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，其中 $0<a<1$，切线与抛物线及 x 轴所围图形面积为 S_1，切线与抛物线及 $y=1$ 所围图形面积为 S_2，$S=S_1+S_2$，（I）问 a 为何值时，S 最小.（II）当 S 最小时，求 S_1 绕 x 轴旋转所得立体体积.

分析：先求出切线方程，再求在 x 轴截距，求出 $S(a)$ 利用导数求出最值，最后利用公式求出体积.

【解】在点 (a,a^2) 处的切线方程为 $Y-a^2=2a(X-a)$，即 $Y=2aX-a^2$，

在 x 轴的截距为 $\frac{a}{2}$，则 $S(a)=\int_0^1(\frac{1}{2a}(y+a^2)-\sqrt{y})dy=\frac{1}{4a}+\frac{a}{2}-\frac{2}{3}$，　　…… 2 分

（I）$S'(a)=-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}$，令 $S'(a)=0$ 得惟一驻点 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $S''(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}>0$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S 最小，

最小值 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}$.　　…… 6 分

（II）$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$V_x=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^4dx-\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{2}x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{\pi}{5}(\frac{1}{\sqrt{2}})^5-\pi\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-\frac{1}{2})^3\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{120\sqrt{2}}$.

…… 10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，证明：

（I）$\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}>x$；（II）$\csc^2 x<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$.

【证明】（I）原不等式等价于 $\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x>0$，令 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x, x\in[0,\frac{\pi}{2})$,　　…… 1 分

$f'(x)=\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}}x-1=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x-1$，

$f''(x)=-\frac{4}{9}\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x+\frac{4}{9}\sin x\cos^{-\frac{7}{3}}x=\frac{4\sin x(1-\cos^2 x)}{9\cos^{\frac{7}{3}}x}$，　　…… 3 分

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f''(x)>0$，因此 $f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，又 $f'(0)=0$，因此当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $f'(x)>0$，由此可得 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，因而 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x>f(0)=0$，即

$\frac{\sin x}{x}>\cos^{\frac{1}{3}}x$；　　…… 5 分

（II）令 $g(x)=\csc^2 x-\frac{1}{x^2}(x\in(0,\frac{\pi}{2}])$,　　…… 6 分

$g'(x)=-2\csc^2 x\cot x+\frac{2}{x^3}=\frac{2(\sin^3 x-x^3\cos x)}{x^3\sin^3 x}$，　　…… 8 分

由(I)的结论知$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有$\sin x > x\cos^{\frac{1}{3}} x$，即$\sin^3 x - x^3\cos x>0$，所以$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有$g'(x)>0$，因而函数$g(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{2}]$上单增，由此可得$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有$g(x)=\csc^2 x-\frac{1}{x^2}<g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{4}{\pi^2}$，即

$\csc^2 x<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$.　　…… 10 分

得分	评卷人

(20)(**本题满分 11 分**)设$\boldsymbol{A}$是3阶方阵，矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：(I)齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解；(II)求$\boldsymbol{A}$的特征值及特征向量.

【证】(I)因为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以

$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，　　…… 3 分

即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$.

设存在一组数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \qquad (*)$$

用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$左乘(*)两次，得$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_3=0$. 再用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$左乘(*)一次，得$k_2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_2=0$. 此时(*)为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_1=0$. 故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，于是$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$列满秩，因此齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解.　　…… 5 分

(II) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

则$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C,B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，　　…… 7 分

又$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$的特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，　　…… 9 分

$B^{-1}(E-A)B=E-C,r(E-A)=r(E-C)=2,$因此属于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$的线性无关的特征向量个数为$3-r(E-A)=1$，属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$的所有特征向量为$k\alpha_1\ (k\neq0)$.　　…… 11 分

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，

（I） 求参数 a 的值； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形.

【解】（I） $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2),\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2.$ ……2 分

由已知 A 可对角化，故 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 必有 2 个线性无关的特征向量，

由 $r(6E-A)=r\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$ 知 $a=0$，因此 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$； ……4 分

.

(II) $x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$，该二次型矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$， ……6 分

由 $|\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-5&0\\-5&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3),\lambda_1=6,\lambda_2=7,\lambda_3=-3$， ……8 分

对 $\lambda_1=6$，解 $(6E-A_1)x=0$，得 $\alpha_1=(0,0,1)^T$，

对 $\lambda_2=7$，解 $(7E-A_1)x=0$，得 $\alpha_2=(1,1,0)^T$，

对 $\lambda_3=-3$，解 $(-3E-A_1)x=0$，得 $\alpha_3=(1,-1,0)^T$，

单位化得 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$， $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$，$x=Qy$ 化二次型为 $6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$. ……11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下，Y 在 $(x,1)$ 上服从均匀分布.

（I）求随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；

（II）求 $P\{X+Y\le 1\}$；

（III）求 $D(X-Y)$.

【解】（I）$0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ……1 分

所以 $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}6x, & 0<x<1, x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ……3 分

（II）$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy=\dfrac{1}{4}$. ……6 分

（III）$D(X-Y)=E(X-Y)^2-[E(X-Y)]^2$ ……8 分

$$=\int_0^1 dy\int_0^y 6x(x-y)^2dx-[\int_0^1 dy\int_0^y 6x(x-y)dx]^2$$

$$=\frac{1}{10}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{80}.$$ ……11 分

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2\end{pmatrix}$，其中 $\theta\,(0<\theta<1)$ 为未知参数，利用总体 X 的如下样本值

1，2，3，1，3

（I）求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M$；

（II）求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_L$；

（III）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，N 表示样本 2 出现的次数，在 $\theta=\hat{\theta}_L$ 时，求 $E(N)$.

【解】（I）$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+1+3}{5}=2, EX=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=-2\theta+3$，

令 $\bar{x}=EX, 2=-2\theta+3\Rightarrow\hat{\theta}_M=\frac{1}{2}$. …… 4 分

（II）似然函数 $L(\theta)=P\{X_1=1,X_2=2,X_3=3,X_4=1,X_5=3\}$

$$=(\theta^2)^2\times2\theta(1-\theta)\times[(1-\theta)^2]^2$$

$$=2\theta^5(1-\theta)^5,$$ ……7 分

$\ln L(\theta)=\ln2+5\ln\theta+5\ln(1-\theta)$,

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{5}{1-\theta}=0$, 得 $\hat{\theta}_L=\frac{1}{2}$. ……9 分

（III）由题意 $N\sim B(n,\frac{1}{2}), EN=\frac{n}{2}$. ……11 分