绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟五）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(u)$ 为可导函数,曲线 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\frac{1}{2},4)$,且在该点处切线过原点 $(0,0)$ ，那么函数 $f(u)$ 在 $u=-3$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=-0.1$ 时相应的函数值增量的线性主部是(　　).

（A） -0.2　　（B） 0.2　　（C） -0.1　　（D） 0.1

【答案】（D）.

【解】曲线 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\frac{1}{2},4)$ 的切线方程为 $y-4=\left(f(\frac{x+1}{x-1})\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})$, 切线过原点 $(0,0)$ 得

$\left(f(\frac{x+1}{x-1})\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=8$, 而 $\left(f(\frac{x+1}{x-1})\right)'=f'(\frac{x+1}{x-1})\frac{-2}{(x-1)^2}$, $x=\frac{1}{2}$ 时 $\frac{x+1}{x-1}=-3$, 由此可得 $f'(-3)\times(-8)=8$ ，

所以 $f'(-3)=-1$ ，当 $\Delta u=-0.1$ 时，相应函数值的增量的线性主部即为微分就是 $f'(-3)\Delta u=0.1$.

（2）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, x\le 0, \\ \sin\sqrt{x}+1, x>0. \end{cases}$ $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)=$（　　）.

（A） $F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c_1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$

（B） $F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（D） $F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

【答案】（B）.

【解】当 $x\le 0$ 时， $F(x)=\int f(x)dx=\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+c_1$ ，

当 $x>0$ ， $F(x)=\int f(x)dx=\int(\sin\sqrt{x}+1)dx=x+\int\sin\sqrt{x}dx$. 其中，令 $t=\sqrt{x}$ ，

$\int\sin\sqrt{x}dx=\int\sin t\cdot 2tdt=-2t\cos t+2\sin t+c_2=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2$ ，

故当$x>0$时，$F(x)=x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2$，由$F(0^+)=c_2$，$F(0^-)=1+c_1$及$F(x)$在$x=0$处连续得$c_2=1+c_1$，令$c_2=c$，则$c_1=c-1$，故选择（B）.

（3）曲面$x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{8}=1$在点$(0,1,-2)$处的切平面与曲面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{2}=1$在点$(1,2,-1)$处的切平面的交线方程为（ ）.

（A）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ （B）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

（C）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ （D）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

【答案】(B).

【解】$x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{8}=1$在点$(0,1,-2)$处的切平面方程为$2y-z=4$，曲面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{2}=1$在点$(1,2,-1)$处切平面方程为$x+y+z=2$，两平面交线方程为$\begin{cases}2y-z=4,\\ x+y+z=2.\end{cases}$化为对称式方程即为$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$，答案为(B).

（4）将极坐标系下的二次积分$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$化为直角坐标系下的二次积分，则$I=$（ ）

(A) $\int_0^1dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$. (B) $\int_0^1dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^1dy\int_0^{y}f(x,y)dx+\int_1^2dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$. (D) $\int_0^1dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$.

【答案】(C).

【解】极坐标下的区域$D:\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le 2\sin\theta$在直角坐标系下的区域为

$D:y=x,x=\sqrt{2y-y^2},x=0$所围成，$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$

$$=\int_0^1dy\int_0^{y}f(x,y)dx+\int_1^2dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$$

$$=\int_0^1dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dx$$,选（C）.

（5）设三阶矩阵A有特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，且$A$不能相似于对角阵，则$r(A+E)+r(A-E)+r(A-2E)=$（ ）

（A）3 （B） 4 （C）6 （D）7

【答案】(D).

【解】A不能相似于对角阵，$r(A+E)=2$，又$r(A-2E)=2$，$r(A-E)=3$，则

$$r(A+E)+r(A-E)+r(A-2E)=7.$$

（6）设 $A=2E+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，其中 $\alpha=(1,-1,-1)^T$，$\beta=(-2,1,0)^T$，则矩阵 A 的最小特征值对应的的特征向量是（ ）.

（A）α （B） β

（C）$\alpha+\beta$ （D）$\alpha-\beta$

【答案】(A）.

【解】$\alpha\beta^T$ 的特征值为 $\lambda_1=\alpha^T\beta=-3,\lambda_2=\lambda_3=0,$ $\lambda_1=-3$ 对应的特征向量为 α， $A=2E+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$ 的特征值为 $-1,2,2$， -1 对应的特征向量为 α.

（7）设随机变量 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的指数分布，$0<a<b<2a$，

记 $p_1=P\{X>a\}$， $p_2=P\{X>b\}$， $p_3=P\{X>b|X>a\}$，则（ ）.

（A） $p_1>p_2>p_3$ (B) $p_2>p_1>p_3$

(C) $p_3>p_1>p_2$ (D) $p_3>p_2>p_1$

【答案】选 (C)

【解】 $p_1=P\{X>a\}=e^{-\lambda a}$， $p_2=P\{X>b\}=e^{-\lambda b}$， $p_3=P\{X>b-a\}=e^{-\lambda(b-a)}$，

因为 $b-a<a<b$，所以 $p_3>p_1>p_2$.

（8）设随机变量 $X\sim U\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$， $U=\sec X$，$V=\tan X$，则（ ）.

(A) U^2 与 V^2 相互独立 (B) U 与 V 相互独立

(C) U^2 与 V^2 不相关 (D) U 与 V 不相关

【答案】(D).

【解】因为 $U^2-V^2=\sec^2 X-\tan^2 X=1$，所以 $\rho_{U^2V^2}=1$，即 U^2 与 V^2 相关，U^2 与 V^2 不相互独立，从而 U 与 V 不相互独立.

$$E(U)=E(\tan X)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\frac{2}{\pi}dx=0\,,E(UV)=E(\tan X\cdot\sec X)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\sec x\cdot\frac{2}{\pi}dx=0\,,$$

所以 $E(UV)=E(U)E(V)$，U 与 V 不相关.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $f(x)=x^n(x-1)^n\cos x$，此处 n 为正整数，那么 $f^{(n)}(0)=$________.

【答案】$(-1)^n n!$.

【解】设 $u(x)=x^n, v(x)=(x-1)^n\cos x$，则 $f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}(x)v^{(n-i)}(x)$，

$u^{(i)}(0)=0\,(i=0,1,\cdots,n-1), u^{(n)}(0)=n!$，$v(0)=(-1)^n$，所以有 $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$.

（10）若折线 $y=1-|x|$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$_____.

【答案】2.

【解】两折线交点分别为 $(-\frac{1}{1+a},\frac{a}{1+a})$ 与 $(\frac{1}{1+a},\frac{a}{1+a})$，由题设有

$$\int_{-\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{1+a}}(1-|x|-a|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{1+a}}[1-(1+a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+a}=\frac{1}{3},\text{解得 } a=2\,.$$

（11）已知可微函数 $f(x)$ 满足 $\int_1^x\frac{f(t)\mathrm{d}t}{f^2(t)+t}=f(x)+1$，则 $f(x)=$____________.

【答案】$-\sqrt{x}$.

【解】等式两边对 x 求导可得 $\frac{f(x)}{f^2(x)+x}=f'(x)$，因此函数 $y=f(x)$ 满足方程

$\frac{y}{y^2+x}=y'$，变形后可得 $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=y$，该方程是一阶非齐次线性微分方程，通解为

$$x=e^{\ln y}(\int ye^{-\ln y}dy+C)=y^2+Cy,$$

由题设知 $f(1)=-1,C=0$，因此有

$x=y^2, y=f(x)=-\sqrt{x}$ 或者 $f(x)=\sqrt{x}$，由 $f(1)=-1$，因此有 $f(x)=-\sqrt{x}$.

（12）设 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_{\Sigma}[\tan(xy)+|x|]dS=$_________.

【答案】$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【解】曲面关于平面 $z=0,x=0,y=0$ 对称，故 $\oiint_{\Sigma}\tan(xy)dS=0$. 又由于 Σ 关于 x,y,z 轮换对称，有

$$\oiint_{\Sigma}|x|dS=\oiint_{\Sigma}|y|dS=\oiint_{\Sigma}|z|dS=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)dS=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}dS=\frac{4}{3}\sqrt{3}\,.$$

（13）已知三阶非零矩阵 B 的列向量是下列方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1-x_2+ax_3=2\end{cases}$ 与方程 $3x_1+x_2-x_3=-1$ 的公共

解，令 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$，则 $(AB)^n=$______.

【答案】$2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

【解】设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由题意，知 $\beta_i(i=1,2,3)$ 是方程组 $Ax=b$ 的解，其中 $b=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.从而

$$(AB)^n=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}^n=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(1,1,1)\right]^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

（14）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，对任意的 α，（$0<\alpha<1$），自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 定义为 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$. 则

$$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】$1-\alpha$.

【解】$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha.$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=1$，求 $f'(0)$.

【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=1$，所以有

$$\lim_{x\to0}[\frac{\sin x}{x}+f(x)]=0,\quad f(0)=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-1,\qquad\cdots\cdots 4\text{分}$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to0}[(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}]$

$$=\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})+f'(0),\qquad\cdots\cdots 8\text{分}$$

而 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0$，所以有 $f'(0)=1$.　　……10 分

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$$

确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解】分别对等式 $x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$ 两边关于 x 及 y 求偏导可得

$$2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$-x+4y-3+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0\,,$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 可得 $\begin{cases}2x-y-1=0,\\-x+4y-3=0.\end{cases}$ 解得 $x=y=1$，代入原方程可得 $z=2$，因此点 $(1,1)$ 是函数 $z=z(x,y)$ 唯一的驻点，且有 $z(1,1)=2$.　　$\cdots\cdots$2 分

对等式 $2x-y-1+(z+1)e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边关于 x 再求偏导可得

$$2+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(z+2)e^z(\frac{\partial z}{\partial x})^2=0\,,$$

将 $x=y=1\,,z=2,\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 代入可得 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{2}{3e^2}$，　　$\cdots\cdots$4 分

对等式 $2x-y-1+(z+1)e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边关于 y 再求偏导可得

$$-1+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(z+2)e^z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\,,$$

将 $x=y=1\,,z=2,\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\dfrac{1}{3e^2}$，　　$\cdots\cdots$6 分

对等式 $-x+4y-3+(z+1)e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 两边关于 y 再求偏导可得

$$4+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+(z+2)e^z(\frac{\partial z}{\partial y})^2=0\,,$$

将 $x=y=1\,,z=2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{4}{3e^2}$，　　$\cdots\cdots$8 分

因而有 $AC-B^2=\dfrac{7}{9e^4}>0,A=-\dfrac{2}{3e^2}<0$，因此 $z(1,1)=2$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值.　$\cdots\cdots$10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设有幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$.

（I）求该级数的收敛区间；

（II）设上述级数在收敛区间内的和函数是$y(x)$，证明$y(x)$满足方程$y'=\frac{-x}{1+x^2}y$；

（III）求级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$在收敛区间内和函数的表达式.

【解】(I) 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)(2n+2)}x^{2n+2}}{(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}}\right|=x^2$,

知当$x^2>1$时，该级数发散，当$x^2<1$时该级数收敛，因此它的收敛半径为$R=1$．因此级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$的收敛区间为$(-1,1)$；　……3 分

(II) $y'(x)=-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{2n-1}=-x(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n})$

$$=-x(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1})'=-x[xy(x)]'=-x^2y'(x)-xy(x),$$

故函数$y(x)$满足方程$y'(x)=\frac{-x}{1+x^2}y(x)$；　……8 分

(III) 解方程$y'(x)=\frac{-x}{1+x^2}y(x)$可得$y(x)=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$，由，由$y(0)=1$可得$C=1$，

因此$y(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，　……10 分

得分	评卷人

（18）（本题满分 10 分）计算$I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中，$\Sigma: z=2-x^2-y^2\,(z\ge -2)$，取上侧.

【解】作$\Sigma_0: z=-2, x^2+y^2\le 4$，取下侧，　……2 分

再取充分小的$\varepsilon>0$，做$\Sigma_1: x^2+y^2+4z^2=\varepsilon^2$取内侧，　……4 分

设Σ,Σ_0,Σ_1所围的立体为Ω，对各个坐标积分的被积函数依次为P,Q,R，记$r=\sqrt{x^2+y^2+4z^2}$，则

$P=\dfrac{x}{r^3},Q=\dfrac{y}{r^3},R=\dfrac{z}{r^3}$， $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{r^2-3x^2}{r^5},\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{r^2-3y^2}{r^5},\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{r^2-12z^2}{r^5}$， $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$，故

$I=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_0}-\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_0})Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_0}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=0, \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma_0}Rdxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\frac{-2}{(x^2+y^2+16)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{rdr}{(r^2+16)^{\frac{3}{2}}}=(1-\frac{2}{\sqrt{5}})\pi, \qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+4z^2\le\varepsilon^2}3dv=-\frac{1}{\varepsilon^3}\times\frac{4}{3}\pi\times\varepsilon\times\varepsilon\times\frac{\varepsilon}{2}=-2\pi.$$

故 $I=0-(1-\dfrac{2}{\sqrt{5}})\pi-(-2\pi)=(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}})\pi$. ……10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续， $x_0\in(0,1)$，且在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值.试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi\in(x_0,1)$，使得 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中的 ξ, 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.

【证明】（Ⅰ）由题设有 $x_0f(x_0)=\dfrac{1}{1-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^1f(x)\,\mathrm{d}x$， …… 2 分

令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[x_0,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(x_0,1)$ 使得

$$\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(x_0)=F'(\xi)(1-x_0)=f(\xi)(1-x_0),$$

从而有 $f(\xi)=x_0f(x_0)$； …… 6 分

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\xi]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$$f(\xi)-f(x_0)=f'(\eta)(\xi-x_0)\text{，而 } f(\xi)=x_0f(x_0),$$

因而有 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.故原命题成立. …… 10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设有向量组 $\alpha_1=(1,1,1,2)^T,\alpha_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$，$\alpha_3=(4,6,8,10)^T,\alpha_4=(2,3,2a+3,5)^T$，

（I）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩及一个极大线性无关组；

（II）令 $\beta=(0,2,4,b)^T$，若任意的 4 维列向量 γ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示，求 a,b.

【解】（I）$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \beta)=\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&2\\1&2a+5&8&2a+3&4\\2&a+7&10&5&b\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&2\\0&0&0&2a-1&0\\0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}\qquad(*)$$ …… 4 分

据（*）知 $a\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，此时 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组.

据（*）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，所以 α_1,α_3 是一个极大线性无关组（不唯一）.

…… 6 分

（II）任意 4 维列向量 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示

$$\Leftrightarrow \text{方程组}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_5\end{pmatrix}=\gamma\ \text{均有解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma)$$

则必有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$， …… 10 分

据（*）知，当 $a\neq\dfrac{1}{2}$ 且 $b\neq 2$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$，

故当 $a\neq\dfrac{1}{2}$，$b\neq 2$ 时，任意的 4 维列向量 γ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示. …… 11 分

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，（I）证明 $\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；（II）若 $A^3\boldsymbol{\beta}=A^2\boldsymbol{\beta}+2A\boldsymbol{\beta}$，求 $|A+3E|$.

【证明】（I）设 $$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2A\boldsymbol{\beta}+k_3A^2\boldsymbol{\beta}=0,\qquad(1)$$

由于 $A\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$ （i=1,2,3），于是

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\quad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3,$$

代入（1）整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0,$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 A 的三个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 对应的特征向量，所以线性无关，从而

$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0,\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0,\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0,\end{cases}$ 由于系数行列式 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq 0$, 从而 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关.

…… 4 分

（2） $A(\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta})=(A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta},A^3\boldsymbol{\beta})=(A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta}+2A\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$,

令 $P=(\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta})$， $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，由（I）矩阵 P 可逆，从而由上式知矩阵 A 与矩阵 B 相似.

…… 8 分

进一步， $A+3E$ 相似于 $B+3E$. 故 $|A+3E|=|B+3E|=\begin{vmatrix}3&0&0\\1&3&2\\0&1&4\end{vmatrix}=30$.　　…… 11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ \frac{1}{4}y, & 0\le x<1\text{且}0\le y<1,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1\text{且}y\ge 1,\\ y, & x\ge 1\text{且}0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1\text{且}y\ge 1.\end{cases}$$

（I）判断 X,Y 是否相互独立?

（II）求 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$，并问 Z 是否是连续型的随机变量?

（III）求 $Z=XY$ 的方差 $D(Z)$.

【解】(I) X 的分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ …… 1 分

Y 的分布函数 $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$ …… 2 分

由于 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X,Y 相互独立. …… 4 分

(II) 由于 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\end{pmatrix}, Y\sim U(0,1),$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{XY\le z, X=0\}+P\{XY\le z, X=1\}$$

$$=P\{0\le z, X=0\}+P\{Y\le z, X=1\}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}z, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

由于 Z 的分布函数不连续，所以 Z 不是连续型随机变量. …… 8 分

(III) $D(Z)=D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$

$$=[\frac{3}{16}+(\frac{3}{4})^2][\frac{1}{12}+(\frac{1}{2})^2]-(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{2})^2=\frac{7}{64}.$$ …… 11 分

得分	评卷人

(23)(本题满分 11 分) 设区域 G 是 x 轴、y 轴和直线 $y=2x+1$ 围成的三角形区域，(X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布.

(I) 求条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$；

(II) 求 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

【解】(I) $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}4, & -1<x<0, 0<y<2x+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$， …… 2 分

X 的概率密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x+1}4dy, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases}4(2x+1), & -\dfrac{1}{2}<x<0, \\ 0, & 其他.\end{cases};$$ …… 4 分

$-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(X)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+1}, & 0<y<2x+1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ …… 6 分

（II）$Z=2X-Y$ 的分布函数 $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)dxdy$， …… 7 分

当 $z<-1$ 时，$F_Z(z)=0$; …… 8 分

当 $-1\le z<0$ 时，$F_Z(z)=1-\int_{-\frac{z}{2}}^{0}dx\int_0^{2x-z}4dy=1-z^2$; …… 10 分

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=1$; 所以 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}-2z, & -1<z<0, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ …… 11 分