绝密 * 启用前

# 2019 年全国硕士研究生入学统一考试

# 森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟四）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间（ ）.

(A) 没有交点　　(B) 仅有一个交点　　(C) 有两个交点　　(D) 有三个交点

（2）设 $f'(x)+f^2(x)\sin x^2=e^x-1$，且 $f(0)=0$，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$（ ）.

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）敛散性不定

（3）曲线 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}, & x<-1,\\ \dfrac{x}{x+2}\arctan x^2, & x\geq -1\end{cases}$ 的渐近线条数是（ ）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）设 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\cos(xy)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}\cos(xy)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\leq 1}\cos(xy)d\sigma$，则（ ）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_2<I_1<I_3$　　（C）$I_3<I_1<I_2$　　（D）$I_1<I_3<I_2$

（5）对三阶矩阵 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 先交换第一行与第三行得到矩阵 $B$，然后再将 $B$ 的第二列的 $-2$ 倍加到第三列得单位矩阵 $E$，且 $|A|>0$，则 $A=($ $)$.

(A) $\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&2\\-1&0&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

（6）设 $A$ 是三阶实对称矩阵，且各行元素之和均为 $0$，$\alpha,\beta$ 是线性无关的三维列向量，且满足 $A\alpha=3\beta, A\beta=3\alpha$，则 $A+4E$ 为（ ）.

（A）正定矩阵　　（B）负定矩阵　　（C）正交矩阵　　（D）对角矩阵

（7）设$F_1(x), F_2(x)$为两个相互独立的连续型随机变量的分布函数，其相应的概率密度函数$f_1(x), f_2(x)$是连续函数，则下列说法不正确的是（　）.

(A) $0.4F_1(x)+0.6F_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$必为某一随机变量的分布函数

(B) $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

(C) $0.4f_1(x)+0.6f_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$必为某一随机变量的概率密度函数

(D) $f_1(x)+f_2(x)-\left[f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)\right]$必为某一随机变量的概率密度函数

（8）设总体$X$的方差$\sigma^2>0$，$X_1,X_2,X_3$为来自总体$X$的简单随机样本，记$Y=\sum\limits_{i=1}^{3}X_i$，则（　）.

(A) $Cov(X_1,Y)=0$　　(B) $Cov(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{3}$

(C) $D(X_1+2Y)=5\sigma^2$　　(D) $D(X_1-2Y)=9\sigma^2$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设曲线$y=\ln\dfrac{1+2x}{1+x}$在横坐标$x=x_0$处的切线与$y$轴的交点的纵坐标为$y_{x_0}$，则$\lim\limits_{x_0\to+\infty}y_{x_0}=$__________.

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1-\sin\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1-\sin\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\sin\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$__________.

（11）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n2^n}(x-2)^n$的收敛域是__________.

（12）设$\begin{cases}z=xf(y-x),\\x+y+ze^z=1\end{cases}$确定了$y=y(x),\ z=z(x)$，其中$f$为可导函数，且$f(1)=1$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$__________.

（13）设$\boldsymbol{A}$是三阶方阵，$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$为其三个特征值，对应的线性无关的特征向量依次为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$令$P=(\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)$，则$P^{-1}(A^*+E)P=$__________.

（14）设随机变量$(X,Y)$的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & 0<x<1,|y|<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则$P\left\{\min(X,Y)\le\frac{1}{2}\right\}=$____________.

**三、解答题:15～23小题，共94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（15）（**本题满分10分**）设$x>0$，求使不等式$x^a\le e^x$成立的正数$a$的最大值.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

（16）（**本题满分 10 分**）设 $z = f(e^x \cos y, e^x \sin y) + g(xy)$，其中 $f$ 具有二阶连续的偏导数，$g$ 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（17）（**本题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 满足方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-1)y=\dfrac{1}{2}+2x-x^2, x>0$ 且 $y(1)=a$ .（Ⅰ）求 $y=y(x)$ 的表达式；（Ⅱ）求常数 $a$ ，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 存在，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 的值.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（18）（**本题满分 10 分**）设 $D$ 是由直线 $x+y=1$，$x+y=2$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴围成的四边形区域，计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$ .

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

（19）（**本题满分 10 分**）设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}$.

（I）证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限值；

（II）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\left(\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1\right)$的敛散性，并说明理由.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（20）（**本题满分 11 分**）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$为 4 维列向量组，且$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$已知线性方程组$Ax=\beta$的通解为：

$$\xi_0+k\xi_1=(1,2,0,-1)^T+k(1,1,-2,0)^T,$$

（I）考察$\beta$是否可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；

（II）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$的一个极大线性无关组.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（21）（本题满分 11 分）设 $A,B,C$ 均是三阶矩阵，满足 $AB=B,CA^T=4C$，

其中 $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix},\xi=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ a\end{pmatrix}$，

(I)求 $A$；　(II)问 $a$ 为何值时，有 $A^{2018}\xi=\xi$.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X$ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & -2<x<0,\\ \frac{1}{3}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（I）求 $X$ 的分布函数 $F_X\left(x\right)$；（II）记 $Y=\begin{cases}1, & X<0,\\ -X^2+1, & X\geq 0.\end{cases}$ 求 $Y$ 的分布函数 $F_Y\left(y\right)$.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

（23）设随机变量$(X,Y)\sim N(0,1;6,6;0)$，记$U=X+Y,\ V=X-Y$，

(I)写出$U$的概率密度函数$f_U(x)$；(II)判断$U,V$是否不相关？$U,V$是否相互独立？

（III）求$P\{(U-1)(V+1)\le 0\}$.