绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥三套卷之数学（二）试卷 （模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）当 $x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{(n+i+j)^2}=$（　　）

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$　（B）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$

（C）$\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 \dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$　（D）$\int_0^1 dy\int_0^{1-y} \dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$

（3）设 $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\arcsin x}{x}dx$，$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x}{\arcsin x}dx$，$I_3=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$，$I_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x}{\ln(1+x)}dx$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2$ 且 $I_3<I_4$　（B）$I_1<I_2$ 但 $I_3>I_4$

（C）$I_1>I_2$ 且 $I_3>I_4$　（D）$I_1>I_2$ 但 $I_3<I_4$

（4）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间（ ）.

(A) 没有交点　(B) 仅有一个交点　(C) 有两个交点　(D) 有三个交点

（5）曲线 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}, & x<-1,\\ \dfrac{x}{x+2}\arctan x^2, & x\ge -1\end{cases}$ 的渐近线条数是（　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（6）将极坐标系下的二次积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdr$ 化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$（　）

(A) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.　(B) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

（7）已知 4 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_i^T\beta_j=0$，$\beta_j\neq 0,(i=1,2,3,\ j=1,2,3,4)$，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$（　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（8）已知 A,B 均为 3 阶矩阵，$|A|=0$，且满足 $AB+3B=O$，若 $r(B)=2$，则行列式 $|A+2E|=$（　）.

（A）1　　（B）2　　(C) 4　　(D) 8

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为____________________.

（10）$I=\int_{-1}^1 x(1+x^{2019})(e^x-e^{-x})dx=$_________.

（11）心形线 $r=1+\cos\theta$ 在 $(1,\dfrac{\pi}{2})$ 处的曲率半径 $R=$________.

（12）已知可微函数 $f(x)$ 满足 $\int_1^x \dfrac{f(t)\mathrm{d}t}{f^2(t)+t}=f(x)+1$，则 $f(x)=$______________.

（13）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1-\sin\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1-\sin\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\sin\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$___________.

（14）设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}ax+x^b\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-x}\right)^n+c, & x\le 0,\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试确定常数 a,b,c 的取值情况.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=1, f'(0)=-1$，且当 $x\neq 0$ 时 $z=f(x^2-y^2)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=(y^2-x^2)(z+\cos\frac{x^2-y^2}{2}),$$

求函数 $f(u)$ 的表达式.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} x(x+ye^{x^2})\operatorname{sgn}(y-|x|)d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le 1,0\le y\le 1$，$\operatorname{sgn}(\ )$是符号函数.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$$

确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x>0$，求使不等式 $x^a \le e^x$ 成立的正数 a 的最大值.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值及最小值均在 $(0,1)$ 内取到．证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $f'(\xi_k)=f(\xi_k),k=1,2$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$．

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）某容器的外表面是$y=x^2(0\le y\le H)$绕y轴旋转所围成的曲面，其容积为$450\pi\ m^3$，其中盛满水，如果将水全部抽出，问至少需要做多少功？

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）

（I）设有向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$，（II）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$.

（I）问 a,b 为何值时，向量组（II）不能由向量组（I）线性表示？

（II）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\1&b\end{pmatrix}$，问 a,b 为何值时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，有解时求出其全部解.

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$（A 为实对称矩阵）经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $6y_3^2$，且 $AB=O$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,-1)^T$，$\alpha_2=(-2,1,0)^T$，(I) 求所用的正交变换 $x=Qy$ 及二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的表达式;

（II）求 $(A-3E)^8$.