绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟五）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(u)$ 为可导函数,曲线 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\dfrac{1}{2},4)$,且在该点处切线过原点 $(0,0)$,那么函数 $f(u)$ 在 $u=-3$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=-0.1$ 时相应的函数值增量的线性主部是(　　).

（A）-0.2　　（B）0.2　　（C）-0.1　　（D）0.1

（2）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, x\le 0, \\ \sin\sqrt{x}+1, x>0. \end{cases}$ $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)=$（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c_1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$

（B）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（D）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（3）曲面 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{8}=1$ 在点 $(0,1,-2)$ 处的切平面与曲面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{2}=1$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的切平面的交线方程为（　）.

（A）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$　　（B）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

（C）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$　　（D）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

（4）将极坐标系下的二次积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$（　）

(A) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.　　(B) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$.

（5）设三阶矩阵A有特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=2$，且$A$不能相似于对角阵，则$r(A+E)+r(A-E)$

$+r(A-2E)=$（　　）

（A）3　　（B） 4　　（C）6　　（D）7

（6）设$A=2E+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，其中$\alpha=(1,-1,-1)^T$，$\beta=(-2,1,0)^T$，则矩阵$A$的最小特征值对应的的特征向量是（　　）.

（A）α　　（B） β

（C）$\alpha+\beta$　　（D）$\alpha-\beta$

（7）设随机变量X服从参数为$\lambda\,(\lambda>0)$的指数分布，$0<a<b<2a$，记$p_1=P\left\{X>a\right\}$，

$p_2=P\left\{X>b\right\}$，$p_3=P\left\{X>b\middle|X>a\right\}$,则（　　）.

（A） $p_1>p_2>p_3$　　(B) $p_2>p_1>p_3$

(C) $p_3>p_1>p_2$　　(D) $p_3>p_2>p_1$

（8）设随机变量$X\sim U\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$，$U=\sec X,\ V=\tan X$，则（　　）.

(A) U^2与V^2相互独立　　(B) U与V相互独立

(C) U^2与V^2不相关　　(D) U与V不相关

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设$f(x)=x^n(x-1)^n\cos x$，此处n为正整数，那么$f^{(n)}(0)=$________.

（10）若折线$y=1-|x|$与x轴围成的图形被折线$y=a|x|(a>0)$分割成面积相等的三个部分，则$a=$_____.

（11）已知可微函数$f(x)$满足$\int_1^x\dfrac{f(t)\mathrm{d}t}{f^2(t)+t}=f(x)+1$，则$f(x)=$______________.

（12）设$\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint\limits_{\Sigma}[\tan(xy)+|x|]dS=$__________.

（13）已知三阶非零矩阵B的列向量是下列方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1-x_2+ax_3=2\end{cases}$与方程$3x_1+x_2-x_3=-1$的公共解，令$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$，则$(AB)^n=$______.

（14）$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，对任意的 α，（$0<\alpha<1$），自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 定义为 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$. 则

$$P\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}]=1$，求 $f'(0)$.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$$

确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设有幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$.

（I）求该级数的收敛区间；

（II）设上述级数在收敛区间内的和函数是$y(x)$，证明$y(x)$满足方程$y'=\dfrac{-x}{1+x^2}y$；

（III）求级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$在收敛区间内和函数的表达式.

得分	评卷人

（18）（本题满分 10 分）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中，$\Sigma: z=2-x^2-y^2(z\geq -2)$，取上侧.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$x_0 \in (0,1)$，且在 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值.试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi \in (x_0,1)$，使得 $f(\xi) = x_0 f(x_0)$；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中的 ξ, 存在 $\eta \in (0,1)$ 使得 $(\xi - x_0) f'(\eta) = (x_0 - 1) f(x_0)$.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设有向量组$\alpha_1=(1,1,1,2)^T$，$\alpha_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$，$\alpha_3=(4,6,8,10)^T$，$\alpha_4=(2,3,2a+3,5)^T$，

（I）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩及一个极大线性无关组；

（II）令$\beta=(0,2,4,b)^T$,若任意的 4 维列向量γ均可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性表示，求$a,b$.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，（I）证明 $\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；（II）若 $A^3\boldsymbol{\beta}=A^2\boldsymbol{\beta}+2A\boldsymbol{\beta}$，求 $|A+3E|$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量$\left(X,Y\right)$的联合分布函数

$$F\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ \dfrac{1}{4}y, & 0\le x<1\text{且}0\le y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<1\text{且}y\ge 1,\\ y, & x\ge 1\text{且}0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1\text{且}y\ge 1.\end{cases}$$

（I）判断X,Y是否相互独立？（II）求$Z=XY$的分布函数$F_Z\left(z\right)$，并问Z是否是连续型的随机变量？

（III）求$Z=XY$的方差$D(Z)$.

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设区域G是x轴、y轴和直线$y=2x+1$围成的三角形区域，(X,Y)在区域G上服从均匀分布.

（I）求条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；（II）求$Z=2X-Y$的概率密度函数$f_Z(z)$.