绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷答案解析 （模拟二）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$，则（　）.

（A） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

【答案】（C）.

【解】 $f(x)=\begin{cases} x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}, & |x|>1, \\ 0, & x=-1, \\ -x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}, & 0<|x|<1, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0, \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$ 与

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}[-x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}]$ 均不存在，所以应选答案（C）.

（2）对于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}(p>0,q>0)$ ，下列结论正确的是（　　）.

（A） $0<p<1$， $0<q<1$ 时收敛.　　　　（B） $0<p<1$， $q\ge1$ 时收敛.

（C） $p\ge1$， $0<q<1$ 时收敛.　　　　（D） $p\ge1$， $q\ge1$ 时收敛.

【答案】（A）.

【解】由于 $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ 都是被积函数的瑕点，因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^p\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{x^p}dx$ 当 $p\ge1$ 时发散，当 $0<p<1$ 时收敛，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当

$0<p<1$时收敛；同时由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)^q\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，可知$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$当$0<q<1$收敛，$q\geq 1$发散，故选择（A）.

（3）设$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处（　）.

（A）偏导数$f_x'(x,y)$与$f_y'(x,y)$均连续

（B）偏导数$f_x'(x,y)$与$f_y'(x,y)$均不连续但可微

（C）不可微但偏导数$f_x'(0,0)$与$f_y'(0,0)$均存在

（D）连续但偏导数$f_x'(0,0)$与$f_y'(0,0)$均不存在

【答案】（A）.

【解】$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$f_y'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y\arctan\dfrac{1}{y^2}}{y}=\dfrac{\pi}{2}$，

由$f_x'(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x(x+y)}{1+(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{其他}.\end{cases}$可知偏导数$f_x'(x,y)$在点$(0,0)$处连续，同理$f_y'(x,y)$在点$(0,0)$处也连续．答案为（A）.

（4）已知$y=c_1+c_2\sin x+xe^{-x}$(其中c_1,c_2为任意常数)是某二阶微分方程的通解，则该方程是（　　）.

（A）$\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（B）$\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(x-2)\sin x+(1-x)\cos x]e^{-x}$

（C）$\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（D）$\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(x-2)\cos x+(1-x)\sin x]e^{-x}$

【答案】（D）.

【解】$y=\sin x$所满足的齐次微分方程为$\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=0$，因此答案应该在（C）或者（D）中选取，又函数$y=xe^{-x}$满足方程（D），因此答案为（D）.

（5）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}3&a&0\\a&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同但不相似，则 a 的取值为（　）.

(A) $a=3$　　(B) $-9<a<0,0<a<9$

(C) $-3<a<0,0<a<3$　　(D) $a=-3$

【答案】（C）.

【解】矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 的特征值为 $3,3,0$；

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}3-\lambda&a&0\\a&3-\lambda&0\\0&0&0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-6\lambda+9-a^2),$$

要使矩阵 A,B 合同但是不相似，则 $\lambda^2-6\lambda+9-a^2=0$ 有两个正根且不都是 3，则

$$9-a^2>0\Rightarrow -3<a<0,0<a<3.$$

（6）已知 5×4 矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，若 $\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

① α_1,α_3 线性无关；　② α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；

③ α_3,α_4 线性无关；　④ $r\left(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\right)=3$

其中正确的是（　）.

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）①④

【答案】（C）.

【解】$\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系可知 $\begin{cases}4-r(A)=2,\\ \alpha_1-\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_4=0.\end{cases}$ 所以②③正确，$r\left(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\right)=r\left(\alpha_1,-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\right)=r\left(\alpha_1,-\alpha_2,0\right)=2.$

（7）　设随机变量 $\left(X,Y\right)$ 在由 $\left(0,0\right),\left(0,1\right),\left(1,1\right)$ 为顶点的三角形区域内服从均匀分布，则当 $0<y\le x$ 且 $y\le1$ 时，$\left(X,Y\right)$ 的联合分布函数 $F\left(x,y\right)=($　$)$.

（A）$2xy-x^2$　　（B）　y^2　　（C）$2x-x^2$　　（D）　1

【答案】(B).

【解】当 $0<y\le x$ 且 $y\le 1$ 时，$F\left(x,y\right)=\int_0^y dv\int_0^v 2du=y^2$,选（B）.

（8）设 $X\sim N(0,1)$，$P\left\{X>U_\alpha\right\}=\alpha$;$Y\sim\chi^2(1)$，$P\left\{Y>\chi_\alpha^2(1)\right\}=\alpha$;

$Z\sim t(n)$，$P\left\{Z>t_\alpha(n)\right\}=\alpha$;$W\sim F(1,n)$，$P\left\{W>F_\alpha(1,n)\right\}=\alpha$，

其中 $0<\alpha<1$，现有如下四个命题:

① $\chi_\alpha^2(1)=U_{\frac{\alpha}{2}}^2$；　② $F_\alpha(1,n)=t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$；　③ $F_\alpha(1,n)F_{1-\alpha}(1,n)=1$；　④ $t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)F_{1-\alpha}(n,1)=1$

其中正确的个数为（　）.

（A）　0　　　　（A）1　　　　（C）2　　　　（D）　3

【答案】（D）.

【解】由于 $X\sim N(0,1), X^2\sim\chi^2(1), P\{Y>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha\Rightarrow P\{X^2>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha$

$\Rightarrow P\{|X|>\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}\}=2P\{X>\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}\}=\alpha\Rightarrow P\{X>\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}\}=\dfrac{\alpha}{2}$,

$\Rightarrow\sqrt{\chi_\alpha^2(1)}=U_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\chi_\alpha^2(1)=U_{\frac{\alpha}{2}}^2$，①正确；

由于 $Z\sim t(n), Z^2\sim F(1,n)$，同理② $F_\alpha(1,n)=t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 正确；

若 $W\sim F(1,n)$，则 $\dfrac{1}{W}\sim F(n,1)$，$P\left\{W>F_\alpha(1,n)\right\}=\alpha\Rightarrow P\left\{\dfrac{1}{W}<\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}\right\}=\alpha$，

$\Rightarrow 1-P\left\{\dfrac{1}{W}\ge\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}\right\}=\alpha\Rightarrow P\left\{\dfrac{1}{W}>\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}\right\}=1-\alpha$，又 $P\left\{\dfrac{1}{W}>F_{1-\alpha}(n,1)\right\}=1-\alpha$，所以

$F_{1-\alpha}(n,1)=\dfrac{1}{F_\alpha(1,n)}$；①,②,④正确.选（D）.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$__________.

【答案】1.

【解】 $1<(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}<n^{\frac{1}{n}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=1$.

（10）$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=$____________.

【答案】$\dfrac{4}{15}(2+\sqrt{2})$.

【解】$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=\int_0^2\sqrt{x}\,|x-1|\,dx=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)dx+\int_1^2\sqrt{x}(x-1)dx=\frac{4}{15}(2+\sqrt{2})$.

（11）设 $e^z=(x^2-1)z+x(2+y)-1$ 确定了 $z=z(x,y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$________.

【答案】$2dx+dy$.

【解】由题设知 $x=1,y=0$ 时 $z=0$，等式两边同时求微分可得，

$e^z dz=2xzdx+(x^2-1)dz+(2+y)dx+xdy$，把 $x=1,y=0,z=0$ 代入可得

$$dz\big|_{(1,0)}=2dx+dy.$$

（12）$I=\oint_\Gamma\frac{(x+2)^2+(y-3)^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}ds=$________. 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y=0,\end{cases}(a>0)$.

【答案】 $2\pi a+\frac{26\pi}{a}$.

【解】利用曲线方程化简，有 $I=\frac{1}{a^2}\oint_\Gamma[(x+2)^2+(y-3)^2+z^2]ds$，由于 Γ 关于 x，y 轮换对称，则有

$\oint_\Gamma x^2ds=\oint_\Gamma y^2ds$，$\oint_\Gamma xds=\oint_\Gamma yds=\frac{1}{2}\oint_\Gamma(x+y)ds=0$.

从而 $I=\frac{1}{a^2}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2+4x-6y+13)ds$

$$=\frac{1}{a^2}\oint_\Gamma(a^2+13)ds=\frac{a^2+13}{a^2}\cdot2\pi a=2\pi a+\frac{26\pi}{a}.$$

（13）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则矩阵

$B=$________.

【答案】$\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【解】 关系式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$-2B=2A\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{E}，\text{即 } AB+B=4\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=4\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

（14）一射手对一目标独立重复地射击 4 次，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则他第四次射击恰好是第二次命中的概率为____________.

【答案】$\frac{4}{27}$.

【解】设每次命中目标的概率为 p，由题意知 $1-(1-p)^4=\frac{80}{81}$，则 $p=\frac{2}{3}$.

则他第四次射击恰好是第二次命中的概率为$C_3^1\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设$x\to 0$时，函数$a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$与$kx^3$是等价无穷小，求常数$a,b,c,k$的值.

【解法一】由题设有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}}{x^3}=k$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}]=0$，因此有$a-1=0,a=1$， …… 2 分

$$左式=\lim_{x\to 0}\frac{1+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{b-c\sqrt{1+x}\sec^2 x-\frac{1+c\tan x}{2\sqrt{1+x}}}{3x^2},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2b\sqrt{1+x}-2c(1+x)\sec^2 x-1-c\tan x}{6x^2}，因此有 2b-2c-1=0，$$

$$左式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{b}{\sqrt{1+x}}-4c(1+x)\sec^2 x\tan x-3c\sec^2 x}{12x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{b-4c(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x-3c\sqrt{1+x}\sec^2 x}{12x\sqrt{1+x}}$$

由此可得$b=3c$，再由$2b-2c-1=0$可得$b=\frac{3}{4},c=\frac{1}{4}$ …… 6 分

$$因而有 k=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}-(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x-\frac{3}{4}\sqrt{1+x}\sec^2 x}{12x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{3}{48}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}\sec^2 x}{x\sqrt{1+x}}-\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x}{x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{3}{48}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sqrt{1+x}\sec^2 x\tan x-\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+x}}}{1}-\frac{1}{12}=-\frac{11}{96}.$$ …… 10 分

【解法二】

$a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$

$=a+bx-[1+cx+\frac{cx^3}{3}+o(x^3)][1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-\frac{1}{2})x-(\frac{c}{2}-\frac{1}{8})x^2-(\frac{1}{16}-\frac{c}{8}+\frac{c}{3})x^3+o(x^3)$， …… 6 分

$=kx^3+o(x^3)$，因此有

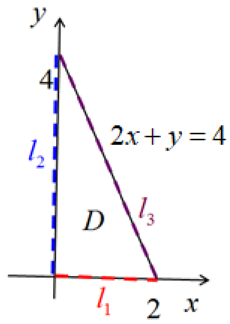
$a-1=0,b-c-\frac{1}{2}=0,\frac{c}{2}-\frac{1}{8}=0,-(\frac{1}{16}-\frac{c}{8}+\frac{c}{3})=k$，解得

$a=1,b=\frac{3}{4},c=\frac{1}{4},k=-\frac{11}{96}$. …… 10 分

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）求函数 $z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, 2x+y\le 4\}$ 上的最大值及最小值.

【解】 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=[2x-2(x^2+y-1)]e^{-2x-y}=0, \\ f_y'(x,y)=[1-(x^2+y-1)]e^{-2x-y}=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ 因此函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有唯一的一个驻点，且有 $z=f(1,1)=e^{-3}$.　　…… 2 分



如图所示 D 的边界由三条线段组成.

记 $l_1: y=0, 0\le x\le 2$，当 $(x,y)\in l_1$ 时，

$z=f(x,0)=(x^2-1)e^{-2x}, \dfrac{dz}{dx}=2(1+x-x^2)e^{-2x}$，

令 $\dfrac{dz}{dx}=0$，解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或者 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

$f(0,0)=-1, f(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},0)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-(1+\sqrt{5})}, f(2,0)=3e^{-4}>f(0,0)$，因 $x\in(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},2)$ 时 $\dfrac{dz}{dx}<0$，因此

$z=f(x,y)$ 在 l_1 取到的最大值为 $f(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},0)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-(1+\sqrt{5})}$，最小值为 $f(0,0)=-1$；…… 4 分

记 $l_2: x=0, 0\le y\le 4$，当 $(x,y)\in l_2$ 时，$z=f(0,y)=(y-1)e^{-y}, \dfrac{dz}{dy}=(2-y)e^{-y}$，令 $\dfrac{dz}{dy}=0$，解得 $y=2$，

$f(0,0)=-1, f(0,2)=e^{-2}, f(0,4)=3e^{-4}>f(0,0)$，因 $y\in(2,4)$ 时 $\dfrac{dz}{dy}<0$，因此 $z=f(x,y)$ 在 l_2 取到的最大值为 $f(0,2)=e^{-2}$，最小值为 $f(0,0)=-1$；　　…… 6 分

记 $l_3: y=4-2x, 0\le x\le 2$，当 $(x,y)\in l_3$ 时，

$$z=f(x,4-2x)=(x^2-2x+3)e^{-4}=[(x-1)^2+2]e^{-4},$$

因此 $z=f(x,y)$ 在 l_3 取到的最大值为 $f(0,4)=f(2,0)=3e^{-4}$，最小值为 $f(1,2)=2e^{-4}$.　……8 分

综合上述，$z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, 2x+y\le 4\}$ 上的最大值

最大值为 $f(0,2)=e^{-2}$，最小值为 $f(0,0)=-1$.　　……10 分

得分	评卷人

（17）（本题满分 10 分）计算 $I=\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由直线 $y=0, y=2, x=-2$，及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

【解】记半圆形区域为 D_1，则 $I=\iint\limits_{D} xydxdy=\iint\limits_{D+D_1} xydxdy-\iint\limits_{D_1} xydxdy$，　　　　…… 2 分

其中 $\iint\limits_{D+D_1} xydxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_0^2 xydy=(\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{0}\cdot(\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^2=-4$，　　　　…… 4 分

$$\iint\limits_{D_1} xydxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sin\theta}\cdot\sin\theta\cos\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}\cdot 16\sin^5\theta\cos\theta d\theta=4\cdot\frac{1}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{2}{3},$$ …… 8 分

因此，原式 $I=-4+\frac{2}{3}=-\frac{10}{3}$.　　　　…… 10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，其中 $0<a<1$，切线与抛物线及 x 轴所围图形面积为 S_1，切线与抛物线及 $y=1$ 所围图形面积为 S_2，$S=S_1+S_2$，（I）问 a 为何值时，S 最小.（II）当 S 最小时，求 S_1 绕 x 轴旋转所得立体体积.

【解】在点 (a,a^2) 处的切线方程为 $Y-a^2=2a(X-a)$，即 $Y=2aX-a^2$，

在 x 轴的截距为 $\frac{a}{2}$，则 $S(a)=\int_0^1(\frac{1}{2a}(y+a^2)-\sqrt{y})dy=\frac{1}{4a}+\frac{a}{2}-\frac{2}{3}$，　　　　…… 2 分

（I）$S'(a)=-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}$，令 $S'(a)=0$ 得惟一驻点 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $S''(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}>0$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S 最小，

最小值 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}$.　　　　…… 6 分

（II）$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$V_x=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^4dx-\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{2}x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{\pi}{5}(\frac{1}{\sqrt{2}})^5-\pi\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-\frac{1}{2})^3\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{120\sqrt{2}}$.

…… 10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，证明：

(I) $\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}>x$；(II) $\csc^2 x<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$.

【证明】(I) 原不等式等价于 $\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x>0$，令 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x, x\in[0,\frac{\pi}{2})$,　　　　…… 1 分

$f'(x)=\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}}x-1=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x-1$，

$f''(x)=-\frac{4}{9}\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x+\frac{4}{9}\sin x\cos^{-\frac{7}{3}}x=\frac{4\sin x(1-\cos^2 x)}{9\cos^{\frac{7}{3}}x}$，　　…… 3 分

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f''(x)>0$，因此 $f'(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，又 $f'(0)=0$，因此当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有 $f'(x)>0$，由此可得 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，因而$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x>f(0)=0$，即

$\frac{\sin x}{x}>\cos^{\frac{1}{3}}x$；　　…… 5 分

（II）令 $g(x)=\csc^2 x-\frac{1}{x^2}(x\in(0,\frac{\pi}{2}])$，　　…… 6 分

$g'(x)=-2\csc^2 x\cot x+\frac{2}{x^3}=\frac{2(\sin^3 x-x^3\cos x)}{x^3\sin^3 x}$，　　…… 8 分

由(I)的结论知$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有$\sin x>x\cos^{\frac{1}{3}}x$，即$\sin^3 x-x^3\cos x>0$，所以$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有 $g'(x)>0$，因而函数 $g(x)$ 在区间$(0,\frac{\pi}{2}]$上单增，由此可得$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时有 $g(x)=\csc^2 x-\frac{1}{x^2}<g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{4}{\pi^2}$，即

$\csc^2 x<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$.　　…… 10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解；（II）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量.

【证】（I）因为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以

$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，　　…… 3 分

即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$.

设存在一组数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \qquad (*)$$

用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘（*）两次，得$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_3=0$．再用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘（*）一次，得$k_2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_2=0$．此时（*）为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_1=0$．故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，于是$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$列满秩，因此齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解.　　…… 5 分

（II）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

则 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C,B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，　　…… 7 分

又 $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，　　…… 9 分

$B^{-1}(E-A)B=E-C,r(E-A)=r(E-C)=2,$ 因此属于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量个数为 $3-r(E-A)=1$，属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的所有特征向量为 $k\alpha_1\ (k\neq0)$.　　…… 11 分

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，

（I） 求参数 a 的值； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形.

【解】（I） $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2),\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2.$　　……2 分

由已知 A 可对角化，故 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 必有 2 个线性无关的特征向量，

由 $r(6E-A)=r\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$ 知 $a=0$，因此 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$；　　……4 分

(II) $x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$,该二次型矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，　　……6 分

由 $|\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-5&0\\-5&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3),\lambda_1=6,\lambda_2=7,\lambda_3=-3$，　　……8 分

对 $\lambda_1=6$，解 $(6E-A_1)x=0$，得 $\alpha_1=(0,0,1)^T$，

对 $\lambda_2=7$，解 $(7E-A_1)x=0$，得 $\alpha_2=(1,1,0)^T$，

对 $\lambda_3=-3$，解 $(-3E-A_1)x=0$，得 $\alpha_3=(1,-1,0)^T$，

单位化得 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$， $\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，

令 $Q=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$，$x=Qy$ 化二次型为 $6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$．　　……11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下，Y 在 $(x,1)$ 上服从均匀分布.

（I）求随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；

（II）求 $P\{X+Y\le 1\}$；

（III）求 $D(X-Y)$．

【解】（I）$0<x<1$ 时， $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　……1 分

所以 $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}6x, & 0<x<1,x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　……3 分

（II）$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy=\dfrac{1}{4}$．　　……6 分

（III）$D(X-Y)=E(X-Y)^2-[E(X-Y)]^2$　　……8 分

$$=\int_0^1 dy\int_0^y 6x(x-y)^2dx-[\int_0^1 dy\int_0^y 6x(x-y)dx]^2$$

$$=\frac{1}{10}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{80}.$$　　……11 分

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\ \theta^2&2\theta(1-\theta)&(1-\theta)^2\end{pmatrix}$，其中 $\theta\,(0<\theta<1)$ 为未知参数，利用总体 X 的如下样本值

1, 2, 3, 1, 3

（I）求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M$；

（II）求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_L$；

（III）$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，N 表示样本 2 出现的次数，在 $\theta = \hat{\theta}_L$ 时，求 $E(N)$.

【解】（I）$\bar{x} = \dfrac{1+2+3+1+3}{5} = 2, EX = 1\times\theta^2 + 2\times 2\theta(1-\theta) + 3\times(1-\theta)^2 = -2\theta + 3$，

令 $\bar{x} = EX, 2 = -2\theta + 3 \Rightarrow \hat{\theta}_M = \dfrac{1}{2}$.　　…… 4 分

（II）似然函数 $L(\theta) = P\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 1, X_5 = 3\}$

$$= (\theta^2)^2 \times 2\theta(1-\theta) \times [(1-\theta)^2]^2$$

$$= 2\theta^5(1-\theta)^5,$$　　……7 分

$\ln L(\theta) = \ln 2 + 5\ln\theta + 5\ln(1-\theta),$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \dfrac{5}{\theta} - \dfrac{5}{1-\theta} = 0$, 得 $\hat{\theta}_L = \dfrac{1}{2}$.　　……9 分

（III）由题意 $N \sim B(n, \dfrac{1}{2}), EN = \dfrac{n}{2}$.　　……11 分