绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥三套卷之数学（二）试卷 （模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$，则（ ）.

（A） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

【答案】(C).

【解】 $f(x)=\begin{cases} x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}, & |x|>1,\\ 0, & x=-1,\\ -x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}, & 0<|x|<1,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$ 与

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}[-x\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}]$ 均不存在，所以应选答案（C）.

（2）对于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}(p>0,q>0)$ ，下列结论正确的是（ ）

（A） $0<p<1$，$0<q<1$ 时收敛. （B） $0<p<1$，$q\ge1$ 时收敛.

（C） $p\ge1$，$0<q<1$ 时收敛. （D） $p\ge1$，$q\ge1$ 时收敛.

【答案】(A).

【解】由于 $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ 都是被积函数的瑕点，因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^p\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{x^p}dx$ 当 $p\ge1$ 时发散，当 $0<p<1$ 时收敛，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当

$0<p<1$时收敛；同时由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)^q\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，可知$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$当$0<q<1$收敛，$q\ge1$发散，故选择（A）.

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0,\qquad\qquad 其他.\end{cases}$，则 $f(x,y)$在点$(0,0)$处（　）.

（A）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均连续

（B）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均不连续但可微

（C）不可微但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在

（D）连续但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均不存在

【答案】（A）.

【解】：$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$f_y'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y\arctan\frac{1}{y^2}}{y}=\dfrac{\pi}{2}$，

由 $f_x'(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x(x+y)}{1+(x^2+y^2)^2},(x,y)\neq(0,0),\\ \dfrac{\pi}{2},\qquad\qquad 其他.\end{cases}$ 可知偏导数 $f_x'(x,y)$在点$(0,0)$处连续，同理 $f_y'(x,y)$在点$(0,0)$处也连续．答案为（A）.

（4）已知微分方程 $y''+ay'+by=xe^{\lambda x}$ 的通解形式是 $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+(Ax+B)e^{\lambda x}$，其中$c_1,c_2$是任意常数，则必有（　　）.

（A）　$a=2,b=1,\lambda=-1$　　（B）$a=2,b=1,\lambda\neq-1$

（C）$a=-2,b=1,\lambda=-1$　　（D）$a=-2,b=1,\lambda\neq-1$

【答案】（B）.

【解】由题意，-1为二重特征根，$\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda+1)^2\Rightarrow a=2,b=1$.

$(Ax+B)e^{\lambda x}$是$y''+ay'+by=xe^{\lambda x}$的特解，所以$\lambda\neq-1$.

（5）设$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\cos(xy)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le1}\cos(xy)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\le1}\cos(xy)d\sigma$，

则（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_2<I_1<I_3$　（C）$I_3<I_1<I_2$　（D）$I_1<I_3<I_2$

【答案】（B）

【解】被积函数相同，只需要比较积分区域，由$x^2+y^2\le1$，$|x|+|y|=1$，及$\max\{|x|,|y|\}\le1$的图形

面积知，I_3积分区域面积最大，I_1次之，I_2最小，因此（B）正确.

（6）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, x\le 0, \\ \sin\sqrt{x}+1, x>0. \end{cases}$ $F(x)$为$f(x)$的原函数，则$F(x)=$（ ）.

（A）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c_1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$

（B）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（D）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

【答案】（B）.

【解】当$x\le 0$时，$F(x)=\int f(x)dx=\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+c_1$，

当$x>0$，$F(x)=\int f(x)dx=\int(\sin\sqrt{x}+1)dx=x+\int\sin\sqrt{x}dx$. 其中，令$t=\sqrt{x}$，

$\int\sin\sqrt{x}dx=\int\sin t\cdot 2tdt=-2t\cos t+2\sin t+c_2=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2$，

故当$x>0$时，$F(x)=x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2$，由$F(0^+)=c_2$，$F(0^-)=1+c_1$及$F(x)$在$x=0$处连续得$c_2=1+c_1$，令$c_2=c$，则$c_1=c-1$，故选择（B）.

（7）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$合同但不相似，则$a$的取值为（ ）.

(A) a=3 (B) $-9<a<0,0<a<9$

(C) $-3<a<0,0<a<3$ (D) $a=-3$

【答案】（C）.

【解】矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$的特征值为$3,3,0$；

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}3-\lambda & a & 0\\ a & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-6\lambda+9-a^2),$$

要使矩阵 A,B 合同但是不相似，则 $\lambda^2-6\lambda+9-a^2=0$ 有两个正根且不都是3，则

$$9-a^2>0\Rightarrow -3<a<0,0<a<3.$$

（8）已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

① α_1,α_3 线性无关；　② α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；

③ α_3,α_4 线性无关；　④ $r(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=3$

其中正确的是（　　）.

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）①④

【答案】（C）.

【解】$\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系可知 $\begin{cases}4-r(A)=2,\\ \alpha_1-\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_4=0.\end{cases}$ 所以②③正确，$r(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=r(\alpha_1,-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=r(\alpha_1,-\alpha_2,0)=2.$

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac1n}=$ ________.

【答案】1.

【解】 $1<(1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac1n}<n^{\frac1n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac1n}=1$，由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac1n}=1.$

（10）$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=$ ____________.

【答案】$\frac{4}{15}(2+\sqrt2)$.

【解】$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=\int_0^2\sqrt{x}\,|x-1|\,dx=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)dx+\int_1^2\sqrt{x}(x-1)dx=\frac{4}{15}(2+\sqrt2)$.

(11) 曲线 $y=\frac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的斜渐近线是____________.

【答案】$y=x$.

【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x-1}}-1)-\dfrac{x-1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}]=0$，所以 $y=x$ 是它的斜渐近线.

（12）设 $f(x)=x^n(x-1)^n\cos x$，此处 n 为正整数，那么 $f^{(n)}(0)=$________.

【答案】$(-1)^n n!$.

【解】设 $u(x)=x^n,v(x)=(x-1)^n\cos x$，则 $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}(x)v^{(n-i)}(x)$，

$u^{(i)}(0)=0\,(i=0,1,\cdots,n-1),u^{(n)}(0)=n!$，$v(0)=(-1)^n$，所以有 $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$.

(13) 由 $x^2+y^2=1(y\ge 0),x=-1,x=1,y=-1$ 所围的平面图形 D 的形心坐标为____________.

【答案】$(0,\dfrac{-2}{3(4+\pi)})$.

【解】由对称性，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\,d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}=\dfrac{\int_0^\pi d\theta\int_0^1 r\sin\theta rdr+\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^0 ydy}{2+\frac{1}{2}\pi}=\dfrac{\frac{2}{3}-1}{2+\frac{1}{2}\pi}=\dfrac{-2}{3(4+\pi)}$，

D 的形心坐标为 $(0,\dfrac{-2}{3(4+\pi)})$.

（14）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则矩阵

$B=$________.

【答案】$\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【解】　关系式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$-2B=2A\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{E}\text{，即 }AB+B=4\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=4\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $x\to 0$ 时，函数 $a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$ 与 kx^3 是等价无穷小，求常数 a,b,c,k 的值.

【解法一】由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}}{x^3}=k$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}]=0$，因此有 $a-1=0, a=1$，　　…… 2 分

$$左式=\lim_{x\to 0}\frac{1+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{b-c\sqrt{1+x}\sec^2 x-\dfrac{1+c\tan x}{2\sqrt{1+x}}}{3x^2},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2b\sqrt{1+x}-2c(1+x)\sec^2 x-1-c\tan x}{6x^2}，因此有\ 2b-2c-1=0，$$

$$左式=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{b}{\sqrt{1+x}}-4c(1+x)\sec^2 x\tan x-3c\sec^2 x}{12x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{b-4c(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x-3c\sqrt{1+x}\sec^2 x}{12x\sqrt{1+x}}$$

由此可得 $b=3c$，再由 $2b-2c-1=0$ 可得 $b=\dfrac{3}{4}, c=\dfrac{1}{4}$　　…… 6 分

$$因而有\ k=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{4}-(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x-\dfrac{3}{4}\sqrt{1+x}\sec^2 x}{12x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{3}{48}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}\sec^2 x}{x\sqrt{1+x}}-\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sec^2 x\tan x}{x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{3}{48}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sqrt{1+x}\sec^2 x\tan x-\dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+x}}}{1}-\frac{1}{12}=-\frac{11}{96}.$$　　…… 10 分

【解法二】

$a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$

$=a+bx-[1+cx+\dfrac{cx^3}{3}+o(x^3)][1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-\dfrac{1}{2})x-(\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{8})x^2-(\dfrac{1}{16}-\dfrac{c}{8}+\dfrac{c}{3})x^3+o(x^3)$，　　…… 6 分

$=kx^3+o(x^3)$，因此有

$a-1=0, b-c-\dfrac{1}{2}=0, \dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{8}=0, -(\dfrac{1}{16}-\dfrac{c}{8}+\dfrac{c}{3})=k$，解得

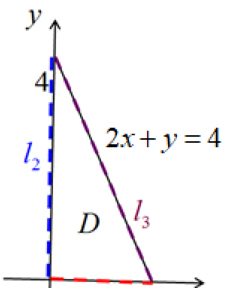
$$a=1, b=\frac{3}{4}, c=\frac{1}{4}, k=-\frac{11}{96}.$$　　…… 10 分

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）求函数 $z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, 2x+y\le 4\}$ 上的最大值及最小值.

【解】 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=[2x-2(x^2+y-1)]e^{-2x-y}=0, \\ f_y'(x,y)=[1-(x^2+y-1)]e^{-2x-y}=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ 因此函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有唯一的一个驻点，且有 $z=f(1,1)=e^{-3}$.　　…… 2 分

如图所示 D 的边界由三条线段组成.



记 $l_1: y=0, 0\le x\le 2$，当 $(x,y)\in l_1$ 时，

$$z=f(x,0)=(x^2-1)e^{-2x}, \frac{dz}{dx}=2(1+x-x^2)e^{-2x},$$

令 $\frac{dz}{dx}=0$，解得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或者 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

$f(0,0)=-1, f(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-(1+\sqrt{5})}, f(2,0)=3e^{-4}>f(0,0)$，因 $x\in(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2)$ 时 $\frac{dz}{dx}<0$，因此

$z=f(x,y)$ 在 l_1 取到的最大值为 $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-(1+\sqrt{5})}$，最小值为 $f(0,0)=-1$；…… 4 分

记 $l_2: x=0, 0\le y\le 4$，当 $(x,y)\in l_2$ 时，$z=f(0,y)=(y-1)e^{-y}, \frac{dz}{dy}=(2-y)e^{-y}$，令 $\frac{dz}{dy}=0$，解得 $y=2$，

$f(0,0)=-1, f(0,2)=e^{-2}, f(0,4)=3e^{-4}>f(0,0)$，因 $y\in(2,4)$ 时 $\frac{dz}{dy}<0$，因此 $z=f(x,y)$ 在 l_2 取到

的最大值为 $f(0,2)=e^{-2}$，最小值为 $f(0,0)=-1$；　　…… 6 分

记 $l_3: y=4-2x, 0\le x\le 2$，当 $(x,y)\in l_3$ 时，

$$z=f(x,4-2x)=(x^2-2x+3)e^{-4}=[(x-1)^2+2]e^{-4},$$

因此 $z=f(x,y)$ 在 l_3 取到的最大值为 $f(0,4)=f(2,0)=3e^{-4}$，最小值为 $f(1,2)=2e^{-4}$. ……8 分

综合上述，$z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, 2x+y\le 4\}$ 上的最大值

最大值为 $f(0,2)=e^{-2}$，最小值为 $f(0,0)=-1$.　　……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $I=\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由直线 $y=0, y=2, x=-2$，及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

【解】记半圆形区域为 D_1，则 $I=\iint\limits_D xydxdy=\iint\limits_{D+D_1} xydxdy-\iint\limits_{D_1} xydxdy$，　　…… 2 分

其中 $\iint\limits_{D+D_1} xydxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_0^2 xydy=(\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{0}\cdot(\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^2=-4$，　　…… 4 分

$$\iint\limits_{D_1} xydxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sin\theta}\cdot\sin\theta\cos\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}\cdot16\sin^5\theta\cos\theta d\theta=4\cdot\frac{1}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{2}{3},$$ …… 8 分

因此，原式 $I=-4+\frac{2}{3}=-\frac{10}{3}$. …… 10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，其中 $0<a<1$，切线与抛物线及 x 轴所围图形面积为 S_1，切线与抛物线及 $y=1$ 所围图形面积为 S_2，$S=S_1+S_2$，（I）问 a 为何值时，S 最小.（II）当 S 最小时，求 S_1 绕 x 轴旋转所得立体体积.

分析：先求出切线方程，再求在 x 轴截距，求出 $S(a)$ 利用导数求出最值，最后利用公式求出体积.

【解】在点 (a,a^2) 处的切线方程为 $Y-a^2=2a(X-a)$，即 $Y=2aX-a^2$，

在 x 轴的截距为 $\frac{a}{2}$，则 $S(a)=\int_0^1(\frac{1}{2a}(y+a^2)-\sqrt{y})dy=\frac{1}{4a}+\frac{a}{2}-\frac{2}{3}$， …… 2 分

（I）$S'(a)=-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}$，令 $S'(a)=0$ 得惟一驻点 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $S''(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}>0$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S 最小，

最小值 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}$. …… 6 分

（II）$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$V_x=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^4dx-\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{2}x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{\pi}{5}(\frac{1}{\sqrt{2}})^5-\pi\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-\frac{1}{2})^3\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{120\sqrt{2}}$.

…… 10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 满足方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-1)y=\frac{1}{2}+2x-x^2,x>0$ 且 $y(1)=a$.（Ⅰ）求 $y=y(x)$ 的表达式；（Ⅱ）求常数 a，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$ 存在，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$ 的值.

【解】（Ⅰ）方程可变化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{x-1}{x}y=2-x+\frac{1}{2x}$，解得

$$y=e^{\int\frac{x-1}{x}dx}[\int(2-x+\frac{1}{2x})e^{\int\frac{-x+1}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{e^x}{x}[\int(2x-x^2+\frac{1}{2})e^{-x}dx+C]$$

$$=x-\frac{1}{2x}+C\frac{e^x}{x},$$ …… 4 分

由 $y(1)=a$ 得 $C=(a-\frac{1}{2})e^{-1}$，因此 $y=x-\frac{1}{2x}+(a-\frac{1}{2})e^{-1}\frac{e^x}{x}$.　　…… 6 分

（II） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[1-\frac{1}{2x^2}+(a-\frac{1}{2})e^{-1}\frac{e^x}{x^2}]$，

若 $a-\frac{1}{2}\neq 0$，则上式最后一项趋于 ∞，故应取 $a=\frac{1}{2}$，此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=1$.　　…… 10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 证明：

(I) $\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}>x$; (II) $\csc^2 x<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$.

【证明】(I) 原不等式等价于 $\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x>0$，令 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x, x\in[0,\frac{\pi}{2})$,　　…… 1 分

$$f'(x)=\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}}x-1=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x-1,$$

$$f''(x)=-\frac{4}{9}\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x+\frac{4}{9}\sin x\cos^{-\frac{7}{3}}x=\frac{4\sin x(1-\cos^2 x)}{9\cos^{\frac{7}{3}}x},$$　　…… 3 分

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $f''(x)>0$，因此 $f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，又 $f'(0)=0$，因此当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $f'(x)>0$，由此可得 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，因而 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x>f(0)=0$，即

$$\frac{\sin x}{x}>\cos^{\frac{1}{3}}x;$$　　…… 5 分

（II）令 $g(x)=\csc^2 x-\frac{1}{x^2}(x\in(0,\frac{\pi}{2}]),$　　…… 6 分

$$g'(x)=-2\csc^2 x\cot x+\frac{2}{x^3}=\frac{2(\sin^3 x-x^3\cos x)}{x^3\sin^3 x},$$　　…… 8 分

由 (I) 的结论知 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $\sin x>x\cos^{\frac{1}{3}}x$，即 $\sin^3 x-x^3\cos x>0$，所以 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $g'(x)>0$，因而函数 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单增，由此可得 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时有 $g(x)=\csc^2 x-\frac{1}{x^2}<g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{4}{\pi^2}$，即

$$\csc^2 x<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}.$$　　…… 11 分

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续， $x_0\in(0,1)$，且在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值.试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi\in(x_0,1)$，使得 $f(\xi)=x_0 f(x_0)$；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中的 ξ, 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.

【证明】（Ⅰ）由题设有 $x_0 f(x_0)=\frac{1}{1-x_0}\int_{x_0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$，　　…… 2 分

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[x_0,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(x_0,1)$ 使得

$$\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(x_0)=F'(\xi)(1-x_0)=f(\xi)(1-x_0),$$

从而有 $f(\xi)=x_0 f(x_0)$；　　…… 6 分

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\xi]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$$f(\xi)-f(x_0)=f'(\eta)(\xi-x_0)，而\ f(\xi)=x_0 f(x_0),$$

因而有 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.故原命题成立.　　…… 11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；（II）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量.

【证】（I）因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以

$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，　　…… 3 分

即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$.

设存在一组数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\qquad (*)$$

用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘（*）两次，得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_3=0$．再用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘（*）一次，得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_2=0$．此时（*）为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_1=0$．故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 列满秩，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.　　…… 5 分

（II）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

则 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C,B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，　　…… 7 分

又 $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，　　…… 9 分

$B^{-1}(E-A)B=E-C,r(E-A)=r(E-C)=2,$ 因此属于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量个数

为$3-r\left(E-A\right)=1$，属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$的所有特征向量为$k\alpha_1\ (k\neq 0)$. …… 11 分

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，

（I） 求参数a的值； (II) 求正交变换$x=Qy$化二次型$f(x)=x^TAx$为标准形.

【解】（I）$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=\left(\lambda-6\right)^2\left(\lambda+2\right),\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2.$ ……2 分

由已知A可对角化，故$\lambda_1=\lambda_2=6$必有 2 个线性无关的特征向量，

由 $r\left(6E-A\right)=r\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$知$a=0$，因此 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$； ……4 分

(II) $x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$,该二次型矩阵$A_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$, ……6 分

由$\left|\lambda E-A_1\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-5&0\\-5&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=\left(\lambda-6\right)\left(\lambda-7\right)\left(\lambda+3\right),\lambda_1=6,\lambda_2=7,\lambda_3=-3$, ……8 分

对$\lambda_1=6$，解$\left(6E-A_1\right)x=0$，得 $\alpha_1=\left(0,0,1\right)^T$,

对$\lambda_2=7$，解$\left(7E-A_1\right)x=0$，得 $\alpha_2=\left(1,1,0\right)^T$,

对$\lambda_3=-3$，解$\left(-3E-A_1\right)x=0$，得 $\alpha_3=\left(1,-1,0\right)^T$,

单位化得$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,

令$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$,$x=Qy$化二次型为$6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$. ……11 分