**绝密 * 启用前**

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

# 森哥五套卷之数学（一）试卷答案解析（模拟一）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）当 $x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1$ 与 $x^n$ 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（B）.

【解】$x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln(1+\sin x-x)}{x}}-1\sim\dfrac{\ln(1+\sin x-x)}{x}\sim\dfrac{\sin x-x}{x}\sim-\dfrac{x^2}{6}$，因此 $n=2$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{(n+i+j)^2}=$（　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$

（C）$\int_0^1 dy\int_{1-y}^1\dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$　　（D）$\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$

【答案】（A）.

【解】原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{(1+i/n+j/n)^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\iint\limits_D\dfrac{dxdy}{(1+x+y)^2}$，$D:\begin{cases}0\le y\le x,\\0\le x\le 1.\end{cases}$因此，（A）正确.

（3）设 $I_1=\int_{\frac12}^1\dfrac{\arcsin x}{x}dx$，$I_2=\int_{\frac12}^1\dfrac{x}{\arcsin x}dx$，$I_3=\int_{\frac12}^1\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$，$I_4=\int_{\frac12}^1\dfrac{x}{\ln(1+x)}dx$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2$ 且 $I_3<I_4$　　（B）$I_1<I_2$ 但 $I_3>I_4$

（C）$I_1>I_2$ 且 $I_3>I_4$　　（D）$I_1>I_2$ 但 $I_3<I_4$

【答案】（D）.

【解】由于 $1>x>\dfrac12$ 时，$\arcsin x>x,\ \ln(1+x)<x$；故 $\dfrac{\arcsin x}{x}>1>\dfrac{x}{\arcsin x}$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1<\dfrac{x}{\ln(1+x)}$，

因此 $I_1 > I_2$ 且 $I_3 < I_4$，选择（D）.

（4）设 $a$ 为正数．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}$ 均为收敛的，则（ ）.

（A）$0<a\le\frac{1}{2}$ （B）$\frac{1}{2}<a<e$ （C）$a=e$ （D）$a>e$

【答案】(B).

【解】因为 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}a(\frac{n}{n+1})^n=\frac{a}{e}$，若 $a=e$，则有

$$\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛，必有 $a<e$，$n\to\infty$ 时

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}=\frac{2}{(1+n^a)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}\sim\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}},$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}$ 收敛，则必有 $a+\frac{1}{2}>1\Rightarrow a>\frac{1}{2}$,，所以答案为(B).

（5）已知 4 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_i^T\beta_j=0$，$\beta_j\ne 0,(i=1,2,3,\ j=1,2,3,4)$，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$（ ）.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

【答案】(A).

【解】记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$A$ 是秩为 3 的 $3\times4$ 的矩阵，由于 $\beta_j$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交，故 $\beta_j$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的非零解，由于 $\beta_j$ 非零，故 $1\le r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le 4-r(A)=1$，所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=1$.

（6）已知 $A,B$ 均为 3 阶矩阵，$|A|=0$，且满足 $AB+3B=O$，若 $r(B)=2$，则行列式 $|A+2E|=$（ ）.

（A）1 （B）2 (C) 4 (D) 8

【解】设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由 $(A+3E)B=O$ 知，$\lambda=-3$ 是矩阵 $A$ 的特征值，且 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是特征值 $\lambda=-3$ 的特征向量.由 $r(B)=2$，所以 $\lambda=-3$ 至少有 2 个线性无关的特征向量.所以 $\lambda=-3$ 至少是二重特征值.又因 $|A|=0$，$\lambda=0$ 必是矩阵 $A$ 的特征值.从而 $A$ 的特征值是 $-3,-3,0$，$A+2E$ 的特征值为 $-1,-1,2$，故 $|A+E|=(-1)\times(-1)\times2=2$.

(7) 设 $0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,$ 且 $P(B|A)>P(B)$，则以下正确的是（ ）.

(A) $P(B|\bar{A})>P(B)$ (B) $P(A|B)>P(A)$

(C) $P\left(A\middle|\bar{B}\right)>P\left(A\right)$　　　(D) $P\left(\bar{B}\middle|A\right)>P\left(\bar{B}\right)$

【答案】$(B)$.

【解】$P\left(B\middle|A\right)>P\left(B\right)\Rightarrow P\left(AB\right)>P\left(A\right)P\left(B\right)$，$P\left(A\middle|B\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}>P\left(A\right)$.选（B）.

(8) 设总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,X_3,X_4$是来自总体 $X$ 的简单随机样本，则统计量$Y=\dfrac{X_1+X_2}{\left|X_3-X_4\right|}$服从的分布为（　　）.

(A) $F\left(1,1\right)$　　(B) $F\left(2,1\right)$　　(C) $t\left(1\right)$　　(D) $t\left(2\right)$

【答案】(C).

【解】$Y=\dfrac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}=\dfrac{X_1+X_2}{\left|X_3-X_4\right|}\sim t(1)$.选（C）.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为____________________.

【答案】 $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

【解】由题设有 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(\sin x)=1$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=2f'(0)=1\text{，得 }f'(0)=\frac{1}{2}\text{，}$$

故所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

（10）$I=\int_{-1}^{1}x(1+x^{2019})(e^x-e^{-x})dx=$__________.

【答案】 $4e^{-1}$.

【解】由于 $e^x-e^{-x}$ 为奇函数，故 $x(e^x-e^{-x})$ 为偶函数，故 $x^{2020}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数.

$$I=2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=2\int_0^1 xd(e^x+e^{-x})=2x(e^x+e^{-x})\Big|_0^1-2\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$$

$$=2(e+e^{-1})-2(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=4e^{-1}.$$

（11）函数 $z=(x-1)\arcsin\dfrac{x}{y}+\ln(1+x^2+y)$，则 $\mathbf{grad}z\big|_{(1,\sqrt{2})}=$__________.

【答案】$\{\frac{\pi}{4}+2-\sqrt{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

【解】$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\sqrt{2})}=\arcsin\frac{x}{y}+(x-1)(\arcsin\frac{x}{y})'_x+\left.\frac{2x}{1+x^2+y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=\frac{\pi}{4}+2-\sqrt{2}$,

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=(x-1)(\arcsin\frac{x}{y})'_y+\left.\frac{1}{1+x^2+y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$gradz|_{(1,\sqrt{2})}=\{\frac{\pi}{4}+2-\sqrt{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

（12）$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{x}dx=$______.

【答案】$\sin1+\frac{5}{8}\cos1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}$.

【解】设 $D_1:\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{y}$，$\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2}$；$D_2:y\le x\le\sqrt{y}$，$\frac{1}{2}\le y\le1$；

将它们表示为 $X$ 型区域，

$$D:x^2\le y\le x,\ \frac{1}{2}\le x\le1;$$

故 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}\sin\frac{y}{x}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x\cos\frac{y}{x}|_{x^2}^{x})dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\cos x-\cos1)dx$

$$=x\sin x|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin xdx-\frac{x^2}{2}\cos1|_{\frac{1}{2}}^{1}=\sin1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}+\cos1-\cos\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\cos1$$

$$=\sin1+\frac{5}{8}\cos1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}.$$

（13）设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

【答案】$(-1)^{n+1}n!\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&\frac{1}{n}\\1&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\frac{1}{n-1}&0\end{pmatrix}$.

关注微信公众号【考研成长笔记】点滴记录，用心成长

【解】 由于 $(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}=(-1)^{n+1}n!\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

(14) 设 $(X_1,Y_1)\sim N\left(1,2;1,1;\frac{1}{3}\right)$，$(X_2,Y_2)\sim N\left(3,4;1,1;-\frac{1}{3}\right)$，分别记 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ 的概率密度函数为 $\varphi_1(x_1,y_1),\varphi_2(x_2,y_2)$，设 $(X,Y)$ 的概率密度函数为 $f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)\right]$，则 $E(X)=$ ________.

【答案】填 2.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_1(x,y)dxdy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_2(x,y)dxdy$

$$=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=2.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases} ax+x^b\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-x})^n+c, & x\le 0, \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试确定常数 $a,b,c$ 的取值情况.

**【解】** $f(x)=\begin{cases} ax+x^b\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-x})^n+c, & x\le 0, \end{cases}=\begin{cases} ax+x^b\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ e^{2x}+c, & x\le 0, \end{cases}$ ……4 分

由于可导一定连续因此有 $\lim\limits_{x\to0^+}(ax+x^b\cos\frac{1}{x})=f(0)=c+1$，必有 $c=-1,b>0$， ……6 分

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax+x^b\cos\frac{1}{x}}{x}=a+\lim\limits_{x\to0^+}x^{b-1}\cos\frac{1}{x}=2$，

所以有 $a=2,b>1$，$c=-1$.. ……10 分

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=1,f'(0)=-1$，且当 $x\ne0$ 时 $z=f(x^2-y^2)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=(y^2-x^2)(z+\cos\frac{x^2-y^2}{2}),$$

求函数 $f(u)$ 的表达式.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf',\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+4x^2f'',\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf',\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f'+4y^2f''$， ……4 分

代入题设等式可得

$$4(x^2-y^2)f''(x^2-y^2)=(y^2-x^2)[f(x^2-y^2)+\cos\frac{x^2-y^2}{2}]$$

因此 $f(u)$ 满足方程 $f''(u)+\frac{1}{4}f(u)=-\frac{1}{4}\cos\frac{u}{2}$， ……6 分

方程 $f''(u)+\frac{1}{4}f(u)=0$ 的通解为 $f(u)=C_1\cos\frac{u}{2}+C_2\sin\frac{u}{2}$，

方程 $f''(u)+\frac{1}{4}f(u)=-\frac{1}{4}\cos u$ 的特解可设为 $f^*(u)=u(A\cos\frac{u}{2}+B\sin\frac{u}{2})$，代入方程可得

$$-A\sin\frac{u}{2}+B\cos\frac{u}{2}=-\frac{1}{4}\cos\frac{u}{2},\text{解得 }A=0,B=-\frac{1}{4}.$$

因而方程 $f''(u)+\frac{1}{4}f(u)=-\frac{1}{4}\cos\frac{u}{2}$ 的通解为 $f(u)=C_1\cos\frac{u}{2}+C_2\sin\frac{u}{2}-\frac{1}{4}u\sin\frac{u}{2}$，由 $f(0)=1,f'(0)=-1$ 可得 $C_1=1,C_2=-2$，因此 $f(u)=\cos\frac{u}{2}-(\frac{1}{4}u+2)\sin\frac{u}{2}$. ……10 分

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

（17）（**本题满分 10 分**）求 $I=\oint_L(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中 $L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx\ (z\ge 0)$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线，从 $z$ 轴正向看，$L$ 为逆时针方向.

【解】$L$ 所围的 $\Sigma$ 外侧法向量 $\vec{n}=\{x-b,y,z\}$，单位法向量 $\vec{n}^0=\{\frac{x-b}{b},\frac{y}{b},\frac{z}{b}\}$. ……2 分

取 $\Sigma: z=\sqrt{2bx-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D: x^2+y^2\le 2ax$，由斯托克斯公式,

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{x-b}{b} & \frac{y}{b} & \frac{z}{b}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}dS=2\iint_\Sigma(z-y)dS,$$ ……6 分

由于 $\Sigma$ 关于 $xOz$ 面对称, 故 $\iint_\Sigma ydS=0$，

$$I=2\iint_\Sigma zdS=2\iint_{x^2+y^2\le 2ax}\sqrt{2bx-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=2\iint_D bdxdy=2b\pi a^2=2\pi a^2b.$$ ……10 分

关注微信公众号【考研成长笔记】，点滴记录，同心成长

或者 $I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}=2\iint_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$ ……6 分

$$=2\iint_{\Sigma}[(y-z)\cdot\frac{x-b}{z}+(z-x)\cdot\frac{y}{z}+(x-y)]dxdy$$

$$=2b\iint_{\Sigma}\frac{z-y}{z}dxdy$$

$$=2b\iint_{x^2+y^2\le 2ax}(1-\frac{y}{\sqrt{2bx-x^2-y^2}})dxdy$$

$$=2b\iint_{x^2+y^2\le 2ax}dxdy=2\pi a^2 b.$$ ……10 分

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（18）（**本题满分 10 分**）设幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n$ 的和函数为 $s(x)$，求 $s(x)$ 的表达式.

**【解】** 令 $t=-x$ ，级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}t^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$ . ……2 分

因为

$$\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}=3+\frac{3}{n}-\frac{7}{n+2},1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3+\frac{3}{n}-\frac{7}{n+2})t^n,$$

由于 $t\in(-1,1)$ 时有 $3\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{3t}{1-t}$, ……4 分

$$3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=3\int_0^t(\sum_{n=0}^{\infty}u^n)du=3\int_0^t\frac{1}{1-u}du=-3\ln(1-t),$$ ……6 分

$$7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+2}=\frac{7}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+2}}{n+2}=\frac{7}{t^2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}-t-\frac{t^2}{2})=-\frac{7}{t^2}[\ln(1-t)+t+\frac{t^2}{2}],t\in[-1,0)\cup(0,1),$$ ……8 分

$t=0$ 时，显然有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+2}=0$ . 因此有

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+6}{n(n+2)}t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3+\frac{3}{n}-\frac{7}{n+2})t^n=1+\frac{3t}{1-t}-3\ln(1-t)+\frac{7}{t^2}[\ln(1-t)+t+\frac{t^2}{2}],t\neq 0,$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n=1-\frac{3x}{1+x}-3\ln(1+x)+\frac{7}{x^2}[\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}],x\neq 0,$$

当 $x=0$ 时，该级数显然收敛于 1；所以

$$s(x)=\begin{cases}1-\frac{3x}{1+x}-3\ln(1+x)+\frac{7}{x^2}[\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}], & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$ ……10 分

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值及最小值均在 $(0,1)$ 内取到．证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2$ 使得 $f'(\xi_k)=f(\xi_k),k=1,2$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$．

**【证明】**（Ⅰ）由题设知在 $(0,1)$ 存在两个不同的点 $x_1,x_2$，且有

$$\min_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(x_1)<0,\max_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(x_2)>0,$$

此处不妨设 $x_1<x_2$，由于 $f(x_1)f(x_2)<0$，由连续函数的零点定理知存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_0)=0,$$ ……2 分

令 $F(x)=f(x)e^{-x}$， ……4 分

则有 $F(0)=F(x_0)=F(1)=0$，由 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0),\xi_2\in(x_0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，由 $F'(x)=[f'(x)-f(x)]e^{-x}$ 可得在 $(0,1)$ 存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2$ 使得

$f'(\xi_k)=f(\xi_k),k=1,2$； ……5 分

（Ⅱ）由于 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)\Leftrightarrow f''(\eta)-f'(\eta)+2(f'(\eta)-f(\eta))=0$，

令 $G(x)=[f'(x)-f(x)]e^{2x}$， ……8 分

由（Ⅰ）的证明知 $G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得

$$F'(\eta)=[f''(\eta)-f'(\eta)]e^{2\eta}+2[f'(\eta)-f(\eta)]e^{2\eta}=0,$$

即有 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$． ……10 分

关注微信公众号【考研成长笔记】点滴记录，用心成长

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（20）（本题满分 11 分）

（I）设有向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$,（II）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$.

（I）问 $a,b$ 为何值时，向量组（II）不能由向量组（I）线性表示？

（II）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\1&b\end{pmatrix}$，问 $a,b$ 为何值时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，有解时求出其全部解.

【解】（I）$(\boldsymbol{\alpha}_1,,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\1&2&a&1&b\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&1&a-1&2&b-1\end{array}\right)$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right),\qquad\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$a=3,b\neq1$时，$\beta_1,\beta_2$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，

$a\neq3,b$ 任意，$\beta_1,\beta_2$ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，且表示法唯一；

$a=3,b=1$时，$\beta_1,\beta_2$ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，且表示法不唯一；　　……5 分

（II）$a=3,b=1$时 $(A\,|\,B)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，解得

$$X=\begin{pmatrix}-3+k&1+l\\2-2k&-2l\\k&l\end{pmatrix},k,l\text{ 为任意常数.}\qquad\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

当 $a\neq3,b$ 任意时，$(A\,|\,B)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right)$ $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，且

$$X=\begin{pmatrix}-3&1+\dfrac{b-1}{a-3}\\2&\dfrac{-2(b-1)}{a-3}\\0&\dfrac{b-1}{a-3}\end{pmatrix}.\qquad\cdots\cdots 11\text{ 分}$$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（21）（本题满分 11 分）设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $6y_3^2$，且 $AB=O$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,-1)^T$，$\alpha_2=(-2,1,0)^T$，

(I) 求所用的正交变换 $x=Qy$ 及二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的表达式;（II）求 $(A-3E)^8$ .

【解】(I）由 $A\alpha_1=0=0\alpha_1, A\alpha_2=0=0\alpha_2$, 知特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$， $\alpha_1,\alpha_2$ 是矩阵 $A$ 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的线性无关的特征向量，又 $\lambda_3=6$ 是 $A$ 的特征值，设其对应的特征向量为为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ ,则

$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=0, \\ -2x_1+x_2=0, \end{cases}$ 解得特征向量为 $\alpha_3=(1,2,-1)^T$ ; ······3 分

将 $\alpha_1,\alpha_2$ 正交得

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， 单位化有 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$， $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,

令 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ ，经 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,化二次型

$f=x^TAx=y^T\Lambda y=6y_3^2$ ; ······5 分

由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,6\alpha_3)$ ,得 $A=(0,0,6\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$,

或者 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}\Rightarrow A=Q\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}Q^T=6\gamma_1\gamma_1^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$,

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$ . ······7 分

(II)因为 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}$ ,有 $Q^{-1}(A-3E)Q=\Lambda-3E=\begin{pmatrix}-3&&\\&-3&\\&&3\end{pmatrix}$ ,从而

$$Q^{-1}(A-3E)^8Q=(\Lambda-3E)^8\Rightarrow Q^{-1}(A-3E)^8Q=(\Lambda-3E)^8=3^8E,$$

所以

$$(A-3E)^8=Q(\Lambda-3E)^8Q^{-1}=3^8E=\begin{pmatrix}3^8&&\\&3^8&\\&&3^8\end{pmatrix}. \quad ······11\text{ 分}$$

关注微信公众号【考研成长笔记】点滴记录，用心成长

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，且 $X,Y$ 不相关.

（I）求 $\left(X,Y\right)$ 的联合分布律；（II）判断 $X,Y$ 是否相互独立；（III）求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布律.

【解】(I) $E\left(X\right)=0,E\left(Y\right)=\dfrac{1}{2}$, $X,Y$ 不相关知 $E\left(XY\right)=0$.　　……1 分

设

| **X** \ **Y** | −1 | 1 |
|---|---|---|
| −1 | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ |
| 1 | $\boldsymbol{x_3}$ | $\boldsymbol{x_4}$ |

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{1}{2},\\ x_2+x_4=\dfrac{3}{4},\\ x_3+x_4=\dfrac{1}{2},\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$　　解得 $x_1=\dfrac{1}{8},x_2=\dfrac{3}{8},x_3=\dfrac{1}{8},x_4=\dfrac{3}{8}$.

故

| **X** \ $Y$ | **−1** | **1** |
|---|---|---|
| **−1** | $\mathbf{\frac{1}{8}}$ | $\mathbf{\frac{3}{8}}$ |
| **1** | $\mathbf{\frac{1}{8}}$ | $\mathbf{\frac{3}{8}}$ |

……5 分

（II）$P\left\{X=-1,Y=-1\right\}=P\left\{X=-1\right\}\cdot P\left\{Y=-1\right\}$，$P\left\{X=-1,Y=1\right\}=P\left\{X=-1\right\}\cdot P\left\{Y=1\right\}$

$P\left\{X=1,Y=-1\right\}=P\left\{X=1\right\}\cdot P\left\{Y=-1\right\}$，$P\left\{X=1,Y=1\right\}=P\left\{X=1\right\}\cdot P\left\{Y=1\right\}$，

所以 $X,Y$ 相互独立；　　……9 分

（III）$Z\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.　　……11 分

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

（23）设总体 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ 1-e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\ge\theta.\end{cases}$ 其中未知参数 $\lambda>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，

（I）$\theta=1$时，求 $\lambda$ 的矩估计量；

（II）$\theta=1$时，求 $\lambda$ 的最大似然估计量；

（III）$\lambda=2$时，求 $\theta$ 的最大似然估计量.

【解】（I）总体 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\ge\theta.\end{cases}$ $\theta=1$时 $f(x;\lambda)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$

$EX=\int_1^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda(x-1)}dx\overset{x-1=t}{=}\int_0^{+\infty}(t+1)e^{-\lambda t}d\lambda t=\frac{1}{\lambda}+1$，令 $\overline{X}=EX=\frac{1}{\lambda}+1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\overline{X}-1}$；　……3 分

（II）$\theta=1$时 $f(x;\lambda)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$ 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值，则似然函数

$$L(\lambda)=f(x_1;\lambda)f(x_2;\lambda)\cdots f(x_n;\lambda)=\lambda^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i-1)},$$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i-1),\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=0$$

得到 $\lambda$ 的最大似然估计量 $\lambda=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)}=\dfrac{1}{\overline{X}-1}$.　……7 分

（III）$\lambda=2$时，$f(x,\theta)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ 2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta.\end{cases}$，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值，则似然函数

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=2^n e^{-\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\theta)}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\theta),\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0,$$

$\theta$ 的最大似然估计量 $\theta=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.　……11 分

关注微信公众号【考研成长笔记】
点滴记录，用心成长