绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥三套卷之数学（二）试卷 （模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合要求, 把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$，则（ ）.

（A） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（2）对于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}(p>0,q>0)$ ，下列结论正确的是（ ）

（A） $0<p<1$， $0<q<1$ 时收敛. （B） $0<p<1$， $q\geq 1$ 时收敛.

（C） $p\geq 1$， $0<q<1$ 时收敛. （D） $p\geq 1$， $q\geq 1$ 时收敛.

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 其他.\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）.

（A）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均连续

（B）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均不连续但可微

（C）不可微但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在

（D）连续但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均不存在

（4）已知微分方程 $y''+ay'+by=xe^{\lambda x}$ 的通解形式是 $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+(Ax+B)e^{\lambda x}$，其中 c_1,c_2 是任意常数，则必有（ ）.

（A） $a=2,b=1,\lambda=-1$ （B） $a=2,b=1,\lambda\neq-1$

（C） $a=-2,b=1,\lambda=-1$ （D） $a=-2,b=1,\lambda\neq-1$

（5）设 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\cos(xy)d\sigma$， $I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}\cos(xy)d\sigma$， $I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\leq 1}\cos(xy)d\sigma$，则（ ）.

（A） $I_1<I_2<I_3$ （B） $I_2<I_1<I_3$ （C） $I_3<I_1<I_2$ （D） $I_1<I_3<I_2$

（6）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, x\le 0, \\ \sin\sqrt{x}+1, x>0. \end{cases}$ $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)=$（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c_1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$

（B）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（D）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（7）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同但不相似，则 a 的取值为（　）.

(A) $a=3$　　　　(B) $-9<a<0, 0<a<9$

(C) $-3<a<0, 0<a<3$　　　　(D) $a=-3$

（8）已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

① α_1,α_3 线性无关；　　② α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；

③ α_3,α_4 线性无关；　　④ $r(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=3$

其中正确的是（　）.

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）①④

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$ ________.

（10）$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=$ ________.

(11）曲线 $y=\frac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的斜渐近线是________.

（12）设 $f(x)=x^n(x-1)^n\cos x$，此处 n 为正整数，那么 $f^{(n)}(0)=$ ________.

（13）由 $x^2+y^2=1(y\ge 0), x=-1, x=1, y=-1$ 所围的平面图形 D 的形心坐标为________.

（14）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则矩阵 $B=$ ________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $x\to 0$ 时，函数 $a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$ 与 kx^3 是等价无穷小，求常数 a,b,c,k 的值.

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）求函数 $z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0, 2x+y\leq 4\}$ 上的最大值及最小值.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $I=\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由直线 $y=0,y=2,x=-2$，及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，其中 $0<a<1$，切线与抛物线及 x 轴所围图形面积为 S_1，切线与抛物线及 $y=1$ 所围图形面积为 S_2，$S=S_1+S_2$，（I）问 a 为何值时，S 最小.（II）当 S 最小时，求 S_1 绕 x 轴旋转所得立体体积.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 满足方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-1)y=\dfrac{1}{2}+2x-x^2, x>0$ 且 $y(1)=a$．（Ⅰ）求 $y=y(x)$ 的表达式；（Ⅱ）求常数 a，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 存在，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 的值.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $x \in (0,\dfrac{\pi}{2})$，证明：

（I）$\dfrac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} > x$；（II）$\csc^2 x < \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $y = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$x_0 \in (0,1)$，且在 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值.试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi \in (x_0,1)$，使得 $f(\xi) = x_0 f(x_0)$；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中的 ξ, 存在 $\eta \in (0,1)$ 使得 $(\xi - x_0) f'(\eta) = (x_0 - 1) f(x_0)$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 仅有零解；（II）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量.

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，

（I） 求参数 a ； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^T Ax$ 为标准形.