绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x-\sin x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 也在 $x=0$ 处连续，则有（ ）.

（A） $\varphi(0)=0,\varphi'(0)$ 未必存在　　（B） $\varphi(0)=1,\varphi'(0)$ 未必存在

（C） $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$　　（D） $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\dfrac{1}{2}$

【答案】（D）.

【解】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\varphi(x)}{x}=1$,从而有

$$\varphi(0)=\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0,\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\frac{1}{2}.$$ 选（D）.

（2）设非常值函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续，若对 $[-1,1]$ 上的任意偶函数 $g(x)$，积分 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$，则下列不正确的是（ ）

（A） $\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$　　（B） $\int_{-1}^{1}[f(x)-f(-x)]g(x)dx=0$

（C） $f(x)$ 为奇函数　　（D） $f(x)$ 未必一定是奇函数

【答案】（D）.

【解】由于 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$，$g(-x)=g(x)$，故 $\int_{-1}^{1}f(-x)g(x)dx=0$，$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$，因此（A）（B）结论是正确的，不是选项；又由于 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，在（A）中令 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 得 $\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]^2dx=0$，故 $f(x)+f(-x)\equiv 0$， $f(x)$ 为奇函数，故选择（D）.

（3）设 $\varphi(x,y)\neq 0$ 且具有连续的一阶偏导数，函数 $u(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varphi(x,y)}$，则下列等式成立的是（ ）.

（A） $x\varphi_y'(x,y)=y\varphi_x'(x,y)$　　（B） $x\varphi_y'(x,y)=-y\varphi_x'(x,y)$

（C） $x\varphi_x'(x,y)=y\varphi_y'(x,y)$　　（D） $x\varphi_x'(x,y)=-y\varphi_y'(x,y)$

【答案】（C）.

【解】因为 $\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varphi(x,y)}$， $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{\varphi(x,y)}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{\varphi(x,y)}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\varphi(x,y)-y\varphi_y'(x,y)}{\varphi^2(x,y)}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\varphi(x,y)-x\varphi_x'(x,y)}{\varphi^2(x,y)}$，显然 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 均连续，由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 可得 $y\varphi_y'(x,y)=x\varphi_x'(x,y)$．答案为(C)．

（4）设 $b_n>0(n=1,2,\cdots)$，下述命题正确的是（　　）.

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛

（D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛

【答案】（C）.

【解】可以证明若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛.

首先证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.事实上，左边级数的前 n 项部分和

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_nb_n|}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在及比较判别法的极限形式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

（A）不正确，反例 $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$a_n=\dfrac{2+(-1)^n n}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^n n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{2}{n}+(-1)^n]$ 不存在，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{n^{3/2}}+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}})$ 收敛.

(B)不正确，反例 $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$a_n=\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛.

（D）不正确，反例 $b_n=\dfrac{1}{n^2}$，$a_n=n$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 也发散.

（5）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维非零列向量组，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，已知方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,0,-1,0)^T$，则方程组 $A^*x=0$ 的基础解系为（　　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

【答案】（C）.

【解】已知方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,0,-1,0)^T$，故 $r(A)=4-1=3$，$r(A^*)=1$，故方程组 $A^*x=0$ 的

基础解系含 3 个解向量，所以（D）不正确.由 $A^*A=O$，知 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 $A^*x=0$ 的解向量.由题设方程组 $Ax=0$ 的解为 $(1,0,-1,0)^T$，故 $\alpha_1-\alpha_3=0$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，故(A),(B)不正确.因 $r(A)=3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 存在 3 个线性无关的向量，由 $\alpha_1-\alpha_3=0$ 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 均线性相关，还剩下两组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，由 $\alpha_1=\alpha_3$ 知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性无关.否则与 $r(A)=3$ 矛盾.选（C）.

（6）设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=O$，若 $r(A-E)=1$，则二次型 x^TAx 的规范形是（　）.

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$　　（B）$y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$

（C）$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$　　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$

【答案】（A）.

【解】$A^2+2A-3E=O\Rightarrow(A+3E)(A-E)=O\Rightarrow r(A+3E)+r(A-E)=4,r(A-E)=1$ 知 1 是 A 的三重特征值，-3 是一重特征值，所以规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$.选（A）.

（7）设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，X 和 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为（　　）.

（A）$1-[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$　　（B）$1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)]$

（C）$F_X(x)+F_Y(y)-F(x,y)$　　（D）$F_X(x)+F_Y(x)-F(x,x)$

【答案】（D）.

【解】$F_Z(x)=P\{\min(X,Y)\le x\}=P\{(X\le x)\cup(Y\le x)\}$

$$=P\{X\le x\}+P\{Y\le x\}-P\{X\le x,Y\le x\}$$

$$=F_X(x)+F_Y(x)-F(x,x)$$.选（D）.

（8）设总体 $X\sim B(n,p)$，$X_1,X_2\cdots,X_m$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则以下说法正确的是（　　）.

（A）$E(\bar{X})=mp,\quad E(S^2)=mp(1-p)$

（B）$E(\bar{X})=np,\quad E(S^2)=(m-1)np(1-p)$

（C）$D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}mp(1-p),\quad E\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\right]=(n-1)mp(1-p)$

（D） $D\left(\bar{X}\right)=\dfrac{1}{m}np\left(1-p\right)$， $E\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\right]=\left(m-1\right)np\left(1-p\right)$

【答案】（D）

【解】因为 $E\left(X\right)=np,\ \ D\left(X\right)=np\left(1-p\right)$，

所以 $E\left(\bar{X}\right)=np,\ \ D\left(\bar{X}\right)=\dfrac{np(1-p)}{m},E\left(S^2\right)=np\left(1-p\right)$，

所以 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\right]=\left(m-1\right)np\left(1-p\right)$.选（D）.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)+e^x-xy=0$ 确定，则 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}=$ ________.

【答案】 $\dfrac{1-e}{e^2}\mathrm{d}\,x$

【解】由题设可知 $x=0$ 时 $y=\dfrac{1}{e}$，对原方程式两边同时求微分可得 $\dfrac{2x\,\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}\,y}{x^2+y}+e^x\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x=0$，

将 $x=0,y=\dfrac{1}{e}$ 代入可得 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}=\dfrac{1-e}{e^2}\mathrm{d}\,x$.

（10）设 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\dfrac{dt}{1+(\tan t^2)^2}$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ________.

【答案】 $-\dfrac{\pi}{4}$.

【解】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)d2\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=-\frac{\pi}{4}.$$

（11）设 $y=xe^x+e^{-x}$ 为二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{-x}$ 的一个特解，则该方程满足初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 的特解是____________.

【答案】 $y=(1-x)e^x+e^{-x}$.

【解】由题设可得 $a=-2,b=1,c=4$ ，该方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+e^{-x}$，把初始条件代入可得 $C_1=1,C_2=-1$，因此所求特解为 $y=(1-x)e^x+e^{-x}$.

（12）设 $z=\varphi(u),u=f(x+y,x^2-y^2)$, 其中 φ 具有连续的导数， f 具有连续的偏导数，则

$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【答案】$(x+y)\varphi'\cdot f_1'$.

【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot(f_1'+2xf_2'),\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot(f_1'-2yf_2')$，因此 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)\varphi'\cdot f_1'$.

（13）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，$\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，且

$(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)X=\alpha_4$，则 $X=$_____.

【答案】$\begin{pmatrix}k+\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\k\end{pmatrix},k$ 任意.

【解】由 $(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)X=\alpha_4$ 得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}X=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，解得 $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},k$ 任意.

（14）设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{A}{2^k},k=1,2,\cdots$，$A$ 为常数，则 $E\left[X\left(X-1\right)\right]=$ ________.

【答案】4.

【解】 由规范性知 $A=1$. $E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{1}{2^k}$.

考虑 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\cdot x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\cdot x^{n-2}=x^2\left(2\cdot1+3\cdot2x+4\cdot3x^2+\cdots\right)$

$$=x^2\left(x^2+x^3+x^4+\cdots\right)''=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=x^2\frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=4,\ E\left[X\left(X-1\right)\right]=4.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}[e^x-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}}=e^{\frac{2}{3}},$$

求 $f''(0)$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}[e^x-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt}}\right\}^{\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}x^3}}=e^{\frac{2}{3}}$$

可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}x^3}=\dfrac{2}{3}$，　　……4 分

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^3}=\dfrac{1}{3}$，因此有　　……6 分

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{3}{2}x^2}=\dfrac{1}{3}$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，由此可得 $f(0)=f'(0)=0$，　……8 分

从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

即 $f''(0)=1$.　　……10 分

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）设二元函数 $z=z(x,y)$ 的全微分为

$$dz=(2xy^3+ae^y\sin x)dx+(bx^2y^2+e^y\cos x)dy,$$

且 $z(0,0)=1$. 求：（I）$z=z(x,y)$ 的表达式；（II）$z(x,y)$ 在点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 处沿各个方向的方向导数的最大值.

【解】（I）由题设有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+ae^y\sin x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx^2y^2+e^y\cos x$，　　……2 分

因而有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2+ae^y\sin x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2bxy^2-e^y\sin x$，由此可得 $a=-1,b=3$，

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-e^y\sin x,\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+e^y\cos x\text{，}$$ ……4 分

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-e^y\sin x$ 对 x 积分可得 $z=\int(2xy^3-e^y\sin x)dx=x^2y^3+e^y\cos x+C(y)$，

由 $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+e^y\cos x$ 可得 $C(y)=C$ 为常数，因此 $z=x^2y^3+e^y\cos x+C$，$z(0,0)=1$ 得 $C=0$，所

所以 $z=x^2y^3+e^y\cos x$； ……6 分

（II）$\mathbf{grad}z\big|_{(\frac{\pi}{4},0)}=\{2xy^3-e^y\sin x,3x^2y^2+e^y\cos x\}\big|_{(\frac{\pi}{4},0)}=\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\}$， ……8 分

由梯度的性质可知所求 $z(x,y)$ 在点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 处沿各个方向的方向导数的最大值即为 $\left|\mathbf{grad}z\big|_{(\frac{\pi}{4},0)}\right|=1$．

……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $y=f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增且有一阶连续的导数，$f(0)=\frac{1}{2}$．曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上一段弧长的值是 $y=f(x)$ 与 x 轴，y 轴及 x 轴上过点 x 的垂线所围成图形的面积的两倍．

（I）求 $y=f(x)$ 的表达式；（II）求由曲线 $y=f(x)$ 位于 $x\in[0,1]$ 内的部分绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的侧面积．

【解】（I）由题意得 $2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\mathrm{d}t$． ……2 分

两边对 x 求导，得 $2f(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$． ……4 分

因此 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases}2y=\sqrt{1+y'^2},\\ y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 由 $y'\ge 0$ 可得 $y'=\sqrt{4y^2-1}$，分离变量并积分后可得

$\frac{1}{2}\ln(2y+\sqrt{4y^2-1})=x+C$，由 $f(0)=\frac{1}{2}$ 可得 $C=0$，所以有 $\ln(2y+\sqrt{4y^2-1})=2x$，解得

$$y=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})\text{；}$$ ……7 分

（II）所求旋转曲面的面积为

$$A=2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=4\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1(e^{4x}+e^{-4x}+2)dx=\frac{\pi(e^8+8e^4-1)}{16e^4}.$$ ……10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）计算积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2dV,\text{其中}\Omega:x^2+y^2+z^2\le R^2,a,b,c\text{均大于零}.$$

【解】$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{2yz}{bc}+\frac{2xz}{ac}\right)dV$，由于$\Omega$关于三个坐标面对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{2xy}{ab}dV=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2yz}{bc}dV=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2xz}{ac}dV=0,$$ ……3 分

再由轮换对称性有$\iiint\limits_{\Omega}x^2dV=\iiint\limits_{\Omega}y^2dV=\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$， ……6 分

因此，$I=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}x^2dV+\frac{1}{b^2}\iiint\limits_{\Omega}y^2dV+\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_{\Omega}x^2dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{4}{15}\pi R^5\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$ ……10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设$f(x)$具有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=1$，在曲线$y=f(x)$上任取一点$(x,f(x))(x\ne 0)$，设该点处曲线切线在x轴上的截距为a_x，

（I）证明：$\lim\limits_{x\to 0}a_x=0$；（II）证明：当$x\to 0$时，$f(x)$与$\frac{x^2}{2}$为等价无穷小；

（III）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(a_x)}{a_xf(x)}$.

【证明】（I）由题设可知$x\ne 0$时$f'(x)\ne 0$，曲线在$(x,f(x))$处切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令$Y=0$即得该切线在x轴上的截距为

$$a_x=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$ ……2 分

$$\lim_{x\to 0}a_x=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=0;$$ ……4 分

（II）由 Taylor 公式可得$x\ne 0$时有$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}x^2\sim\frac{x^2}{2},x\to 0$时，$\xi$介于$0$到$x$之间；……6 分

（III）$f(a_x)=\frac{f''(\eta)}{2}{a_x}^2$（$\eta$介于$0$到$a_x$之间），那么有

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(a_x)}{a_x f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{a_x^2}{2}}{a_x\cdot\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}[1-\frac{f(x)}{xf'(x)}]$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{\frac{f'(x)}{x}+f''(x)}=\frac{1}{2}.$$ ……10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\alpha_4)$ 是 4 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量．若方程组 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1,2,2,1)^T+k(1,-2,4,0^T)$，又 $B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)$，(I) 求方程组 $Bx=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 的通解；（II）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？说明理由.

【解】 (I)由方程组 $Ax=\beta$ 解的结构，可知 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，且

$$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=\beta,\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0,$$

因为 $B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)$，

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，知 $r(B)=2$. ……4 分

由 $B\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，知 $\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ 是方程组 $Bx=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 一个特解；

$$B\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=4\alpha_3-2\alpha_2+\alpha_1=0,$$

$$B\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0,$$

可知 $(4,-2,1,0)^T$，$(2,-4,0,1)^T$ 是 $Bx=0$ 的两个线性无关的解.故 $Bx=0$ 的通解为

$$(3,2,1,0)^T+k_1(4,-2,1,0)^T+k_2(2,-4,0,1)^T.$$ ……7 分

（II）由（1）知：$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

进一步可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to(\alpha_1,\alpha_2,0,\alpha_4)$，由 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，

则 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. ……11 分

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设三阶实对称矩阵 A 满足 $|E-A|=0$，且

$$A\begin{pmatrix}2&2\\4&-2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\0&4\\0&-2\end{pmatrix},$$

（I）求矩阵 A 的特征值和特征向量；（II）如果 $\beta=(1,-1,5)^T$，求 $A^n\beta$.

【解】（I） 由于 $A\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$

知特征值 $\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$，相应的特征向量为 $\alpha_2=(1,2,2)^T$ 和 $\alpha_3=(2,-2,1)^T$. ……4 分

设特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\alpha_1=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0,\\2x_1-2x_2+x_3=0,\end{cases}$ 解得特征向量为

$$\alpha_1=(2,1,-2)^T.$$ ……6 分

所以特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$ 的特征向量依次为

$$k_1\alpha_1=k_1(2,1,-2)^T,\ k_2\alpha_2=k_2(1,2,2)^T, k_3\alpha_3=k_3(2,-2,1)^T,$$,其中 k_1,k_2,k_3 全不为 0.

……7 分

（II）设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，解得 $x_1=-1,x_2=1,x_3=1$，即 $\beta=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$， ……9 分

从而 $A^n\beta=A^n(-\alpha_1)+A^n\alpha_2+A^n\alpha_3$

$$=-\alpha_1+(-2)^n\alpha_3=(-2+(-1)^n2^{n+1},-1+(-2)^{n+1},2+(-2)^n)^T.$$ ……11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设有 A 和 B 两类电子产品，A 类产品的寿命服从 $E(1)$ 分布，B 类产品的寿命服从 $E(2)$ 分布，现甲盒中有 2 个 A 类产品和 4 个 B 类产品，乙盒中有 A 类和 B 类电子产品各 3 个，从甲盒中任取一个产品放入乙盒，再从乙盒中任取一个电子产品，

（I）求从乙盒中取出的是 A 类电子产品的概率；

（II）以 X 表示从乙盒中所取出电子产品的寿命，求 X 的概率密度函数；

（III）求 $E(X^2)$.

【解】（I）设 A_1 表示从甲盒中取出 A 类产品， $\bar{A}_1$ 表示从甲盒中取出 B 类产品，

A_2 表示从乙盒中取出 A 类产品，$\bar{A}_2$ 表示从乙盒中取出 B 类产品，

则 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{10}{21}$.　　……4 分

（II）设 X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\le x\}$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $x\ge 0$ 时，$F(x)=P(A_2)P\{X\le x|A_2\}+P(\bar{A}_2)P\{X\le x|\bar{A}_2\}$

$=\frac{10}{21}\left(1-e^{-x}\right)+\frac{11}{21}\left(1-e^{-2x}\right)=1-\frac{10}{21}e^{-x}-\frac{11}{21}e^{-2x}$.

X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{10}{21}e^{-x}+\frac{22}{21}e^{-2x}, & x\ge 0.\end{cases}$　　……8 分

（III）$E(X^2)=\int_0^{+\infty}\frac{10}{21}x^2e^{-x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{22}{21}x^2e^{-2x}dx$

$=\frac{20}{21}+\frac{11}{21}\times\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(2x)^2e^{-2x}d2x=\frac{20}{21}+\frac{11}{42}=\frac{51}{42}$.　　……11 分

得分	评卷人

（23）设总体 X 的概率密度函数

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad \theta>0\text{ 为未知参数，}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，

（I）求常数 C，使得 $C\bar{X}$ 为 θ 的无偏估计量；（II）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

【解】（I）$EC\bar{X}=ECX=C\int_0^{+\infty}\frac{4x^3}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=C\frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}d\frac{x^2}{\theta^2}=\frac{2C\theta}{\sqrt{\pi}}=\theta$,

解得 $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.　　……4 分

（II）最大似然估计：

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值，则似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\frac{4^n\left(x_1\cdots x_n\right)^2}{\theta^{3n}\left(\sqrt{\pi}\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta^2}},\quad x_i>0,$$　　……8 分

$$\ln L(\theta)=n\ln 4+2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-3n\ln\theta-\frac{n}{2}\ln\pi-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^2},$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{3n}{\theta}+\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^3}，\ 令\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0,$$

得

$$\theta^2=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,所以\hat{\theta}_L=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}.$$ ……11 分