

绝密 \* 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试  
森哥五套卷之数学（三）试卷（模拟三）

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合要求, 把所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设  $\varphi(x)$  在  $x=0$  处连续, 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x - \sin x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$  且  $f(x)$  也在  $x=0$  处连续, 则有 ( ).

(A)  $\varphi(0)=0, \varphi'(0)$  未必存在 (B)  $\varphi(0)=1, \varphi'(0)$  未必存在

(C)  $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$  (D)  $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=\frac{1}{2}$

(2) 设非常值函数  $f(x)$  在  $[-1,1]$  连续, 若对  $[-1,1]$  上的任意偶函数  $g(x)$ , 积分  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$ , 则下列不正确的是 ( ).

(A)  $\int_{-1}^1 [f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$  (B)  $\int_{-1}^1 [f(x)-f(-x)]g(x)dx=0$

(C)  $f(x)$  为奇函数 (D)  $f(x)$  未必一定是奇函数

(3) 设  $\varphi(x, y)$  为非零函数, 且具有连续的偏导数, 函数  $u(x, y)$  的全微分为  $du = \frac{ydx + xdy}{\varphi(x, y)}$ , 则下列等式成立的是 ( ).

(A)  $x\varphi'_y(x, y) = y\varphi'_x(x, y)$  (B)  $x\varphi'_y(x, y) = -y\varphi'_x(x, y)$

(C)  $x\varphi'_x(x, y) = y\varphi'_y(x, y)$  (D)  $x\varphi'_x(x, y) = -y\varphi'_y(x, y)$

(4) 设  $b_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ , 下述命题正确的是 ( ).

(A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  必发散

(B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  必发散

(C) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  必收敛

(D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  必收敛

(5) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是 4 维非零列向量组, 矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 已知方程组

$Ax=0$  的通解为  $k(1, 0, -1, 0)^T$ , 则方程组  $A^*x=0$  的基础解系为 ( ).

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$   
 (C)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  (D)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$

(6) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + 2A - 3E = O$ , 若  $r(A - E) = 1$ , 则二次型  $x^T A x$  的规范形是 ( ).

- (A)  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$  (B)  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$   
 (C)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$  (D)  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$

(7) 设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $F(x, y)$ ,  $X$  和  $Y$  的边缘分布函数分别为  $F_X(x)$  和  $F_Y(y)$ , 则  $Z = \min\{X, Y\}$  的分布函数为 ( ).

- (A)  $1 - [1 - F_X(x)][1 - F_Y(y)]$  (B)  $1 - [1 - F_X(x)][1 - F_Y(x)]$   
 (C)  $F_X(x) + F_Y(y) - F(x, y)$  (D)  $F_X(x) + F_Y(x) - F(x, x)$

(8) 设总体  $X \sim B(n, p)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_m$  为来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别为样本均值和样本方差, 则以下说法正确的是 ( ).

- (A)  $E(\bar{X}) = mp$ ,  $E(S^2) = mp(1 - p)$   
 (B)  $E(\bar{X}) = np$ ,  $E(S^2) = (m - 1)np(1 - p)$   
 (C)  $D(\bar{X}) = \frac{1}{n}mp(1 - p)$ ,  $E\left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2\right] = (n - 1)mp(1 - p)$   
 (D)  $D(\bar{X}) = \frac{1}{m}np(1 - p)$ ,  $E\left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2\right] = (m - 1)np(1 - p)$

得分	评卷人

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设  $y = y(x)$  由方程  $\ln(x^2 + y) + e^x - xy = 0$  确定, 则  $dy|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设  $f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1 + (\tan t)^2}$ , 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx =$  \_\_\_\_\_.

(11) 设  $y = xe^x + e^{-x}$  为二阶常系数线性微分方程  $y'' + ay' + by = ce^{-x}$  的一个特解, 则该方程满足初始条件  $y(0) = 2, y'(0) = -1$  的特解是\_\_\_\_\_.

(12) 设  $z = \varphi(u), u = f(x + y, x^2 - y^2)$ , 其中  $\varphi$  具有连续的导数,  $f$  具有连续的偏导数, 则

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(13) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性无关的 3 维列向量组,  $\alpha_4 = -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 且

$$(-\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3)X = \alpha_4, \text{ 则 } X = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(14) 设随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X=k\} = \frac{A}{2^k}, k=1, 2, \dots$ ,  $A$  为常数, 则  $E[X(X-1)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15) (本题满分 10 分) 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} [e^x - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}} = e^{\frac{2}{3}},$$

求  $f''(0)$ .

得分	评卷人

(16) (本题满分 10 分) 假设生产某种产品需要  $A, B, C$  三种原料, 该产品的产量  $q$  与

三种原料  $A, B, C$  的用量  $x, y, z$  之间有如下关系:  $q = 5x^2yz$ , 已知三种原料价格分

别为 1 元、2 元、3 元, 现用 2400 元购买原料, 问三种原料各购进多少, 可以使该产品产量最大?

得分	评卷人

(17) (本题满分 10 分) 计算  $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx$ .

关注微信公众号【考研成长笔记】  
点滴记录，用心成长

得分	评卷人

(18) (本题满分 10 分) 计算二重积分  $I = \iint_D (x-y)^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $x^2 + y^2 \geq 2x$

与  $x^2 + y^2 \leq 4$  所确定的平面区域.

得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分) 设  $f(x)$  具有二阶连续导数,  $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$ , 在曲线  $y = f(x)$  上任取一点  $(x, f(x)) (x \neq 0)$ , 设该点处曲线切线在  $x$  轴上的截距为  $a_x$ ,

(I) 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} a_x = 0$ ; (II) 证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $\frac{x^2}{2}$  为等价无穷小;

(III) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(a_x)}{a_x f(x)}$ .

得分	评卷人

(20) (本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  是 4 阶方阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是 4 维列向量. 若方程组  $Ax = \beta$  的通解是  $(1, 2, 2, 1)^T + k(1, -2, 4, 0^T)$ , 又

$B = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta - \alpha_4)$ , (I) 求方程组  $Bx = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$  的通解; (II)  $\alpha_4$  能否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出?

说明理由.



得分	评卷人

(21) (本题满分 11 分) 设三阶实对称矩阵  $A$  满足  $|E - A| = 0$ , 且

$$A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

(I) 求矩阵  $A$  的特征值和特征向量; (II) 如果  $\beta = (1, -1, 5)^T$ , 求  $A^n \beta$ .

关注微信公众号【考研成长笔记】  
点滴记录，用心成长

得分	评卷人

(22) (本题满分 11 分) 设有  $A$  和  $B$  两类电子产品,  $A$  类产品的寿命服从  $E(1)$  分布,

$B$  类产品的寿命服从  $E(2)$  分布, 现甲盒中有 2 个  $A$  类产品和 4 个  $B$  类产品, 乙盒中

有  $A$  类和  $B$  类电子产品各 3 个, 从甲盒中任取一个产品放入乙盒, 再从乙盒中任取一个电子产品,

(I) 求从乙盒中取出的是  $A$  类电子产品的概率;

(II) 以  $X$  表示从乙盒中所取出电子产品的寿命, 求  $X$  的概率密度函数;

(III) 求  $E(X^2)$ .

得分	评卷人

(23) 设总体  $X$  的概率密度函数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{4x^2}{\theta^3 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad \theta > 0 \text{ 为未知参数,}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值,

(I) 求  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}_M$ ; (II) 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_L$ .