绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，两曲线（ ）.

(A) 没有交点 (B) 仅有一个交点 (C) 有两个交点 (D) 有三个交点

（2）设 $f'(x)+f^2(x)\sin x^2=e^x-1$，且 $f(0)=0$，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$（ ）.

（A）绝对收敛 （B）条件收敛 （C）发散 （D）敛散性不定

（3）曲线 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}, & x<-1,\\ \dfrac{x}{x+2}\arctan x^2, & x\ge -1\end{cases}$ 的渐近线条数是（ ）.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

（4）设 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\cos(xy)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\cos(xy)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\le 1}\cos(xy)d\sigma$，则（ ）.

（A）$I_1<I_2<I_3$ （B）$I_2<I_1<I_3$ （C）$I_3<I_1<I_2$ （D）$I_1<I_3<I_2$

（5）对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行得到矩阵 B ，然后再将 B 的第二列的 -2 倍加到第三列得单位矩阵 E，且 $|A|>0$，则 $A=$( ) .

(A) $\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&2\\-1&0&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

（6）设 A 是三阶实对称矩阵,且各行元素之和均为 0 ，α,β 是线性无关的三维列向量，且满足 $A\alpha=3\beta, A\beta=3\alpha$,则 $A+4E$ 为（ ）.

（A）正定矩阵 （B）负定矩阵 （C）正交矩阵 （D）对角矩阵

（7）设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个相互独立的连续型随机变量的分布函数，其相应的概率密度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则下列说法不正确的是（ ）.

（A） $0.4F_1(x)+0.6F_2\left(\frac{x-4}{2}\right)$ 必为某一随机变量的分布函数

（B） $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（C） $0.4f_1(x)+0.6f_2\left(\frac{x-4}{2}\right)$ 必为某一随机变量的概率密度函数

（D） $f_1(x)+f_2(x)-\left[f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)\right]$ 必为某一随机变量的概率密度函数

（8）设总体 X 的方差 $\sigma^2>0$，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $Y=\sum_{i=1}^{3}X_i$，则（ ）.

（A） $Cov(X_1,Y)=0$ （B） $Cov(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{3}$

（C） $D(X_1+2Y)=5\sigma^2$ （D） $D(X_1-2Y)=9\sigma^2$

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设曲线 $y=\ln\frac{1+2x}{1+x}$ 在横坐标 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴的交点的纵坐标为 y_{x_0}，则 $\lim_{x_0\to+\infty}y_{x_0}=$ __________ .

（10） $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1-\sin\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\sin\frac{n\pi}{n}}\right)=$ __________ .

（11）设 $s(x)$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，而 $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ e^x, & \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$

则 $s(\frac{7}{2})=$ __________ .

（12）设 $\begin{cases}z=xf(y-x),\\ x+y+ze^z=1\end{cases}$ 确定了 $y=y(x),\ z=z(x)$，其中 f 为可导函数，且 $f(1)=1$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ __________ .

（13）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$ 为其三个特征值，对应的线性无关的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 令 $P=(\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)$，则 $P^{-1}(A^*+E)P=$ __________ .

（14）设随机变量$\left(X,Y\right)$的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,|y|<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

则$P\left\{\min\left(X,Y\right)\le\dfrac{1}{2}\right\}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设$x>0$，求使不等式$x^a\le e^x$成立的正数a的最大值.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $z=f(e^x\cos y,e^x\sin y)+g(xy)$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，g 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 满足方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-1)y=\dfrac{1}{2}+2x-x^2, x>0$ 且 $y(1)=a$.（Ⅰ）求 $y=y(x)$ 的表达式；（Ⅱ）求常数 a，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 存在，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 的值.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 Γ 为 $x^2+y^2=2x(y\geq 0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段弧，连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2+\int_\Gamma y[f(x)+e^x]dx+(e^x-xy^2)dy$，求 $f(x)$ 的表达式.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}$.

（I）证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限值；

（II）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan(\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1)$的敛散性，并说明理由.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$为 4 维列向量组，且$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$已知线性方程组$Ax=\beta$的通解为：

$$\xi_0+k\xi_1=(1,2,0,-1)^T+k(1,1,-2,0)^T，$$

（I）考察β是否可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；

（II）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$的一个极大线性无关组.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设 A,B,C 均是三阶矩阵，满足 $AB=B,CA^T=4C$，

其中 $B=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix},\xi=\begin{pmatrix}1\\3\\a\end{pmatrix}$，

(I)求 A； (II)问 a 为何值时，有 $A^{2018}\xi=\xi$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & -2<x<0,\\ \dfrac{1}{3}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（I）求 X 的分布函数 $F_X\left(x\right)$；（II）记 $Y=\begin{cases}1, & X<0,\\ -X^2+1, & X\geq 0.\end{cases}$ 求 Y 的分布函数 $F_Y\left(y\right)$.

得分	评卷人

（23）设随机变量$(X,Y)\sim N(0,1;6,6;0)$，记$U=X+Y$，$V=X-Y$，

（I）写出U的概率密度函数$f_U(x)$；（II）判断U,V是否不相关？U,V是否相互独立？并说明理由；（III）求$P\{(U-1)(V+1)\le 0\}$.