绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x-\sin x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 也在 $x=0$ 处连续，则有（　）.

（A）$\varphi(0)=0,\varphi'(0)$ 未必存在　　（B）$\varphi(0)=1,\varphi'(0)$ 未必存在

（C）$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$　　（D）$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\dfrac{1}{2}$

（2）设非常值函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续，若对 $[-1,1]$ 上的任意偶函数 $g(x)$，积分 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$，则下列不正确的是（　）

（A）$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$　　（B）$\int_{-1}^{1}[f(x)-f(-x)]g(x)dx=0$

（C）$f(x)$ 为奇函数　　（D）$f(x)$ 未必一定是奇函数

（3）设 $\varphi(x,y)\neq 0$ 且具有连续的一阶偏导数，函数 $u(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varphi(x,y)}$，则下列等式成立的是（　）.

（A）$x\varphi_y'(x,y)=y\varphi_x'(x,y)$　　（B）$x\varphi_y'(x,y)=-y\varphi_x'(x,y)$

（C）$x\varphi_x'(x,y)=y\varphi_y'(x,y)$　　（D）$x\varphi_x'(x,y)=-y\varphi_y'(x,y)$

（4）设 $b_n>0(n=1,2,\cdots)$，下述命题正确的是（　）.

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛

（D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛

（5）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维非零列向量组，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，已知方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,0,-1,0)^T$，则方程组 $A^*x=0$ 的基础解系为（　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

（6）设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=O$，若 $r(A-E)=1$，则二次型 x^TAx 的规范形是（　）.

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$　　（B）$y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$

（C）$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$　　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$

（7）设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，X 和 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为（　　）.

（A）$1-[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$　　（B）$1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)]$

（C）$F_X(x)+F_Y(y)-F(x,y)$　　（D）$F_X(x)+F_Y(x)-F(x,x)$

（8）设总体 $X\sim B(n,p)$，$X_1,X_2\cdots,X_m$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则以下说法正确的是（　）.

（A）$E(\bar{X})=mp,\ \ E(S^2)=mp(1-p)$

（B）$E(\bar{X})=np,\ \ E(S^2)=(m-1)np(1-p)$

（C）$D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}mp(1-p),\ \ E\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\right]=(n-1)mp(1-p)$

（D）$D(\bar{X})=\dfrac{1}{m}np(1-p),\ \ E\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\right]=(m-1)np(1-p)$

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)+e^x-xy=0$ 确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ ________.

（10）设 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\dfrac{dt}{1+(\tan t^2)^2}$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ________.

（11）设 $y=xe^x+e^{-x}$ 为二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{-x}$ 的一个特解，则该方程满足初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 的特解是________.

（12）设 $z=\varphi(u),u=f(x+y,x^2-y^2)$, 其中 φ 具有连续的导数，f 具有连续的偏导数，则

$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

（13）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的 3 维列向量组，$\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，且

$(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)X=\alpha_4$，则 $X=$____ .

（14）设随机变量 X 的分布律为$P\left\{X=k\right\}=\dfrac{A}{2^k},k=1,2,\cdots$, A为常数，则$E\left[X\left(X-1\right)\right]=$ ________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}[e^x-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}}=e^{\frac{2}{3}},$$

求 $f''(0)$.

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设二元函数 $z=z(x,y)$ 的全微分为

$$dz=(2xy^3+ae^y\sin x)dx+(bx^2y^2+e^y\cos x)dy,$$

且 $z(0,0)=1$. 求:（I）$z=z(x,y)$ 的表达式;（II）$z(x,y)$ 在点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 处沿各个方向的方向导数的最大值.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $y = f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增且有一阶连续的导数，$f(0)=\dfrac{1}{2}$．曲线 $y = f(x)$ 在 $[0,x]$ 上一段弧长的值是 $y = f(x)$ 与 x 轴，y 轴及 x 轴上过点 x 的垂线所围成图形的面积的两倍．

（I）求 $y = f(x)$ 的表达式；（II）求由曲线 $y = f(x)$ 位于 $x\in[0,1]$ 内的部分绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的侧面积．

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）计算积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2dV,\text{其中}\Omega:x^2+y^2+z^2\le R^2,a,b,c\text{ 均大于零}.$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$，在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $(x, f(x))(x\neq 0)$，设该点处曲线切线在 x 轴上的截距为 a_x，

（I）证明：$\lim\limits_{x\to 0} a_x = 0$；（II）证明：当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $\dfrac{x^2}{2}$ 为等价无穷小；

（III）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(a_x)}{a_x f(x)}$.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\alpha_4)$ 是 4 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量．若方程组 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1,2,2,1)^T+k(1,-2,4,0^T)$，又 $B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)$，(I) 求方程组 $Bx=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 的通解；（II）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？说明理由.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设三阶实对称矩阵 A 满足 $|E-A|=0$，且

$$A\begin{pmatrix}2 & 2\\4 & -2\\4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\0 & 4\\0 & -2\end{pmatrix},$$

（I）求矩阵 A 的特征值和特征向量；（II）如果 $\beta=(1,-1,5)^T$，求 $A^n\beta$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设有 A 和 B 两类电子产品，A 类产品的寿命服从 $E(1)$ 分布，B 类产品的寿命服从 $E(2)$ 分布，现甲盒中有 2 个 A 类产品和 4 个 B 类产品，乙盒中有 A 类和 B 类电子产品各 3 个，从甲盒中任取一个产品放入乙盒，再从乙盒中任取一个电子产品，

（I）求从乙盒中取出的是 A 类电子产品的概率 ；

（II）以 X 表示从乙盒中所取出电子产品的寿命，求 X 的概率密度函数；

（III）求 $E(X^2)$.

得分	评卷人

（23）设总体 X 的概率密度函数

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad \theta>0 \text{ 为未知参数，}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，

（I）求常数 C，使得 $C\bar{X}$ 为 θ 的无偏估计量；　　（II）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.