绝密 ＊ 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥三套卷之数学（二）试卷 （模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x-\sin x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 也在 $x=0$ 处连续，则有（ ）.

（A）$\varphi(0)=0,\varphi'(0)$ 未必存在 （B）$\varphi(0)=1,\varphi'(0)$ 未必存在

（C）$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$ （D）$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\dfrac{1}{2}$

【答案】（D）.

【解】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)(e^{x^2}-1)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\varphi(x)}{x}=1$，从而有 $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0,\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$. 选（D）.

（2）设非常值函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续，若对 $[-1,1]$ 上的任意偶函数 $g(x)$，积分 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$，则下列不正确的是（ ）

（A）$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$ （B）$\int_{-1}^{1}[f(x)-f(-x)]g(x)dx=0$

（C）$f(x)$ 为奇函数 （D）$f(x)$ 未必一定是奇函数

【答案】（D）.

【解】由于 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$，$g(-x)=g(x)$ 故 $\int_{-1}^{1}f(-x)g(x)dx=0$，$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)dx=0$，因此（A）（B）结论是正确的，不是选项；又由于 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，在（A）中令 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 得 $\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]^2dx=0$，故 $f(x)+f(-x)\equiv0$，$f(x)$ 为奇函数，故选择（D）.

（3）设 $\varphi(x,y)$ 为非零函数，且具有连续的偏导数，函数 $u(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varphi(x,y)}$，则下列等式成立的是（ ）.

（A）$x\varphi_y'(x,y)=y\varphi_x'(x,y)$ （B）$x\varphi_y'(x,y)=-y\varphi_x'(x,y)$

（C）$x\varphi_x'(x,y)=y\varphi_y'(x,y)$ （D）$x\varphi_x'(x,y)=-y\varphi_y'(x,y)$

【答案】（C）.

【解】 因为$\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varphi(x,y)}$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{\varphi(x,y)}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{\varphi(x,y)}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\varphi(x,y)-y\varphi_y'(x,y)}{\varphi^2(x,y)}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\varphi(x,y)-x\varphi_x'(x,y)}{\varphi^2(x,y)}$，由$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$可得$y\varphi_y'(x,y)=x\varphi_x'(x,y)$．选（C）．

（4）设$f(u)$为可导函数,曲线$y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$过点$(\dfrac{1}{2},4)$,且在该点处切线过原点$(0,0)$,那么函数$f(u)$在$u=-3$处当u取得增量$\Delta u=-0.1$时相应的函数值增量的线性主部是(　　).

（A）-0.2　　（B）0.2　　（C）-0.1　　（D）0.1

【答案】（D）.

【解】 曲线$y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$过点$(\dfrac{1}{2},4)$的切线方程为$y-4=\left(f(\dfrac{x+1}{x-1})\right)'|_{x=\frac{1}{2}}(x-\dfrac{1}{2})$,切线过原点$(0,0)$得

$\left(f(\dfrac{x+1}{x-1})\right)'|_{x=\frac{1}{2}}=8$,而$\left(f(\dfrac{x+1}{x-1})\right)'=f'(\dfrac{x+1}{x-1})\dfrac{-2}{(x-1)^2}$,$x=\dfrac{1}{2}$时$\dfrac{x+1}{x-1}=-3$,由此可得$f'(-3)\times(-8)=8$,

所以$f'(-3)=-1$，当$\Delta u=-0.1$时，相应函数值的增量的线性主部即为微分就是$f'(-3)\Delta u=0.1$.

（5）已知$y=c_1+c_2\sin x+xe^{-x}$(其中c_1,c_2为任意常数)是某二阶微分方程的通解，则该方程是（　　）.

（A）$\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（B）$\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(x-2)\sin x+(1-x)\cos x]e^{-x}$

（C）$\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（D）$\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(x-2)\cos x+(1-x)\sin x]e^{-x}$

【答案】（D）.

【解】 $y=\sin x$所满足的齐次微分方程为$\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=0$，因此答案应该在（C）或者（D）中选取，又函数$y=xe^{-x}$满足方程（D），因此答案为（D）.

（6）设函数$f(x)$具有四阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1$,则（　）.

(A) 点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点，点$x=0$为$f''(x)$.的极小值点

(B) 点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点，点$x=0$为$f''(x)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$为曲线$y=f''(x)$的拐点,点$x=0$为$f'(x)$的极小值点

(D) 点$(0,0)$为曲线$y=f''(x)$的拐点,点$x=0$为$f'(x)$的极大值点

【答案】（A）.

【解】 由题意知：$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=24$，

利用 Taylor 公式 $f''(x)=f''(0)+f'''(0)x+\dfrac{1}{2!}f^{(4)}(0)x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow f''(x)-f''(0)=12x^2+o(x^2)\Rightarrow$ 点 $x=0$ 为 $f''(x)$ 的极小值点.

$f'''(x)=f'''(0)+f^{(4)}(0)x+o(x)\Rightarrow f'''(x)-f'''(0)=24x+o(x)\Rightarrow$

点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f'(x)$ 的拐点. 也可赋值 $f(x)=x^4$.

（7）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维非零列向量组，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，已知方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,0,-1,0)^T$，则方程组 $A^*x=0$ 的基础解系为（　　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

【答案】（C）.

【解】已知方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,0,-1,0)^T$，故 $r(A)=4-1=3$，$r(A^*)=1$，故方程组 $A^*x=0$ 的基础解系含 3 个解向量，所以（D）不正确.由 $A^*A=O$，知 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 $A^*x=0$ 的解向量.由题设方程组 $Ax=0$ 的解为 $(1,0,-1,0)^T$，故 $\alpha_1-\alpha_3=0$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，故(A),(B)不正确.因 $r(A)=3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 存在 3 个线性无关的向量，由 $\alpha_1-\alpha_3=0$ 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 均线性相关，还剩下两组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，由 $\alpha_1=\alpha_3$ 知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性无关.否则与 $r(A)=3$ 矛盾.选（C）.

（8）设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=O$，若 $r(A-E)=1$，则二次型 x^TAx 的规范形是（　）.

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$　　（B）$y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$

（C）$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$　　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$

【答案】(A)

【解】$A^2+2A-3E=O\Rightarrow(A+3E)(A-E)=O\Rightarrow r(A+3E)+r(A-E)=4,r(A-E)=1$ 知 1 是三重特征值，-3 是一重特征值，所以规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)+e^x-xy=0$ 确定，则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=$ ________.

【答案】$\dfrac{1-e}{e^2}\mathrm{d}x$

【解】由题设可知 $x=0$ 时 $y=\dfrac{1}{e}$，对原方程式两边同时求微分可得 $\dfrac{2x\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2+y}+e^x\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=0$，将 $x=0,y=\dfrac{1}{e}$ 代入可得 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\dfrac{1-e}{e^2}\mathrm{d}x$.

（10）设 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\dfrac{dt}{1+(\tan t^2)^2}$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ________.

【答案】$-\dfrac{\pi}{4}$.

【解】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)d2\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=-\frac{\pi}{4}.$$

（11）设 $y=xe^x+e^{-x}$ 为二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{-x}$ 的一个特解，则该方程满足初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 的特解是____________.

【答案】$y=(1-x)e^x+e^{-x}$

【解】由题设可得 $a=-2,b=1,c=4$，该方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+e^{-x}$，把初始条件代入可得 $C_1=1,C_2=-1$，因此所求特解为 $y=(1-x)e^x+e^{-x}$.

（12）设 $z=\varphi(u),u=f(x+y,x^2-y^2)$，其中 φ 具有连续的导数，f 具有连续的偏导数，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ____________.

【答案】$(x+y)\varphi'\cdot f_1'$.

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot(f_1'+2xf_2'),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot(f_1'-2yf_2')$，因此 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x+y)\varphi'\cdot f_1'$.

(13) 若折线 $y=1-|x|$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$ ____.

【答案】2.

【解】两折线交点分别为 $(-\dfrac{1}{1+a},\dfrac{a}{1+a})$ 与 $(\dfrac{1}{1+a},\dfrac{a}{1+a})$，由题设有

$$\int_{-\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{1+a}}(1-|x|-a|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{1+a}}[1-(1+a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+a}=\frac{1}{3},\text{解得 }a=2.$$

（14）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的 3 维列向量组，$\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，且

$(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)X=\alpha_4$，则 $X=$_____ .

【答案】$\begin{pmatrix} k+\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix}$,$k$ 任意.

【解】由$(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)X=\alpha_4$得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}X=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得 $X=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,$k$ 任意.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}[e^x-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}}=e^{\frac{2}{3}},$$

求 $f''(0)$.

【解】由 $\lim_{x\to 0}[e^x-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt}}\right\}^{\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}x^3}}=e^{\frac{2}{3}}$$

可得 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}x^3}=\dfrac{2}{3}$， ……4 分

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^3}=\dfrac{1}{3}$，因此有 ……6 分

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{3}{2}x^2}=\dfrac{1}{3}$，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，由此可得 $f(0)=f'(0)=0$，……8 分

从而有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

即 $f''(0)=1$. ……10 分

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $z=f(e^x\cos y,e^x\sin y)+g(xy)$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，g 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\cos y+f_2'\cdot e^x\sin y+yg'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f_1'\cdot e^x\sin y+f_2'\cdot e^x\cos y+xg'$， ……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f_{11}''\cdot e^x\cos y+f_{12}''e^x\sin y)e^x\cos y+e^x\cos yf_1'$$

$$+(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''e^x\sin y)e^x\sin y+e^x\sin yf_2'+y^2g'',$$

$$=e^x\cos yf_1'+e^x\sin yf_2'+e^{2x}\cos^2 yf_{11}''+e^{2x}\sin^2 yf_{22}''+2e^{2x}\sin y\cos yf_{12}''+y^2g'',$$ ……5 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos yf_1'-e^x\sin yf_2'+e^{2x}\sin^2 yf_{11}''+e^{2x}\cos^2 yf_{22}''-2e^{2x}\sin y\cos yf_{12}''+x^2g'',$$ ……8 分

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{2x}(f_{11}''+f_{22}'')+(x^2+y^2)g''$. ……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $\displaystyle\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

【解】 原式 $=\displaystyle\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\frac{1}{2(1-x^2)}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1-x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}},$$ ……4 分

其中 $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\overset{令x=\tan t}{=}\int\frac{\sec^2 tdt}{(1-\tan^2 t)\sec t}$

$$=\int\frac{\cos tdt}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\int\frac{d\sin t}{1-2\sin^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C,$$

原式 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1-x^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C$. ……10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）（**本题满分 10 分**）设 D 是由直线 $x+y=1$，$x+y=2$ 及 x 轴和 y 轴围成的四边形区域，计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(\cos^2 x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解】由于积分区域关于 $y=x$ 对称，故

$$I=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy=\iint\limits_D e^{(y+x)^2}(\cos^2 y+\sin^2 x)dydx$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D e^{(x+y)^2}\cdot 2dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}rdr$$ ……6 分

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2}de^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2}e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}d\theta$$

$$=(e^4-e)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta=(e^4-e)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\cos^2(\theta-\frac{\pi}{4})}d\theta=\frac{e}{2}(e^3-1).$$ ……10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）高温物体的冷却速度遵循所谓的冷却定理：“物体冷却速度与该物体与周围介质的温度差成正比”．设某物体开始温度为 $100^{\circ}C$，放在 $20^{\circ}C$ 的空气中，经过 600 秒后下降到 $60^{\circ}C$，问从 $100^{\circ}C$ 下降到 $25^{\circ}C$ 需要多少时间？

【解】设物体的温度为 $T=T(t)$，则有

$$T'(t)=-k[T(t)-20],$$ ……4 分

其中 k 为待定正的常数，该方程的通解为

$$T=20+Ce^{-kt},T(0)=100,T(600)=60,C=80,k=\frac{\ln 2}{600},$$

即 $T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{600}t}$，将 25 带入解得 $t=2400$(秒). ……10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$，在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $(x, f(x))(x\neq 0)$，设该点处曲线切线在 x 轴上的截距为 a_x，

（I）证明：$\lim\limits_{x\to 0} a_x=0$；（II）证明：当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $\dfrac{x^2}{2}$ 为等价无穷小；

（III）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(a_x)}{a_x f(x)}$.

【证明】（I）由题设可知 $x\neq 0$ 时 $f'(x)\neq 0$，曲线在 $(x, f(x))$ 处切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$ 即得该切线在 x 轴上的截距为

$$a_x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$\lim_{x\to 0} a_x=\lim_{x\to 0}[x-\frac{f(x)}{f'(x)}]=-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=0; \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

（II）由 Taylor 公式可得 $x\neq 0$ 时有 $f(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2\sim\dfrac{x^2}{2}, x\to 0$ 时，ξ 介于 0 到 x 之间；……6 分

（III）$f(a_x)=\dfrac{f''(\eta)}{2}a_x{}^2$（$\eta$ 介于 0 到 a_x 之间），那么有

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(a_x)}{a_x f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{a_x^2}{2}}{a_x\cdot\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}[1-\frac{f(x)}{xf'(x)}]$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{\frac{f'(x)}{x}+f''(x)}=\frac{1}{2}. \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）证明：（I）设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均连续，则

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx \text{（柯西-施瓦兹不等式）；}$$

（II）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=1,$ 则 $\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\geq\dfrac{4}{\pi}.$

【证明】（I）对任意 $t\in R, [f(x)+tg(x)]^2\geq 0,$

$$\int_a^b[f(x)+tg(x)]^2=t^2\int_a^b g^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0,$$

若 $\int_a^b g^2(x)dx=0,$ 则 $g(x)\equiv 0,$ 结论成立；

若 $\int_a^b g^2(x)dx>0,$ 则关于 t 的一元二次不等式非负知

$$\Delta=(2\int_a^b f(x)g(x)dx)^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\le 0,$$ 易得结论成立； ……5 分

（II）$1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$\le\left[\int_0^1 f^2(x)(1+x^2)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right]^{\frac12}$$

$$=\left[\int_0^1 f^2(x)(1+x^2)dx\right]^{\frac12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac12}\ ,$$

$$\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\ge\frac{4}{\pi}.$$ ……11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\alpha_4)$ 是 4 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量．若方程组 $Ax=\beta$ 的通解是 $(1,2,2,1)^T+k(1,-2,4,0^T)$，又 $B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)$，(I) 求方程组 $Bx=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 的通解；（II）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？说明理由.

【解】 (I)由方程组 $Ax=\beta$ 解的结构，可知 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，且

$$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=\beta,\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0,$$

因为 $B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)$，

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，知 $r(B)=2$. ……4 分

由 $B\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，知 $\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ 是方程组 $Bx=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 一个特解；

$$B\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta-\alpha_4)\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=4\alpha_3-2\alpha_2+\alpha_1=0,$$

$$B\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0,$$

可知 $(4,-2,1,0)^T$，$(2,-4,0,1)^T$ 是 $Bx=0$ 的两个线性无关的解.故 $Bx=0$ 的通解为

$$(3,2,1,0)^T+k_1(4,-2,1,0)^T+k_2(2,-4,0,1)^T.$$ ……7 分

（II）由（1）知：$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

进一步可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to(\alpha_1,\alpha_2,0,\alpha_4)$，由$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，可得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，

则α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.　　……11 分

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设三阶实对称矩阵A满足$|E-A|=0$，且

$$A\begin{pmatrix}2&2\\4&-2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\0&4\\0&-2\end{pmatrix},$$

（I）求矩阵A的特征值和特征向量；（II）如果$\beta=(1,-1,5)^T$，求$A^n\beta$.

【解】（I）　由于$A\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$

知特征值$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$，相应的特征向量为$\alpha_2=(1,2,2)^T$和$\alpha_3=(2,-2,1)^T$.　　……4 分

设特征值$\lambda_1=1$的特征向量为$\alpha_1=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0,\\2x_1-2x_2+x_3=0,\end{cases}$解得特征向量为

$$\alpha_1=(2,1,-2)^T.$$　　……6 分

所以特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$的特征向量依次为

$$k_1\alpha_1=k_1(2,1,-2)^T,\quad k_2\alpha_2=k_2(1,2,2)^T,k_3\alpha_3=k_3(2,-2,1)^T,$$,其中k_1,k_2,k_3全不为 0.

……7 分

（II）设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，解得$x_1=-1,x_2=1,x_3=1$，即$\beta=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，　　……9 分

从而$A^n\beta=A^n(-\alpha_1)+A^n\alpha_2+A^n\alpha_3$

$$=-\alpha_1+(-2)^n\alpha_3=(-2+(-1)^n2^{n+1},-1+(-2)^{n+1},2+(-2)^n)^T.$$　　……11 分