绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$，则（ ）.

（A） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（2）对于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}(p>0,q>0)$ ，下列结论正确的是（ ）.

（A） $0<p<1$， $0<q<1$ 时收敛. （B） $0<p<1$， $q\ge 1$ 时收敛.

（C） $p\ge 1$， $0<q<1$ 时收敛. （D） $p\ge 1$， $q\ge 1$ 时收敛.

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）.

（A）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均连续

（B）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均不连续但可微

（C）不可微但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在

（D）连续但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均不存在

（4）已知 $y=c_1+c_2\sin x+xe^{-x}$ (其中 c_1,c_2 为任意常数)是某二阶微分方程的通解，则该方程是（ ）.

（A） $\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（B） $\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'=[(x-2)\sin x+(1-x)\cos x]e^{-x}$

（C） $\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(2-x)\sin x+(x-1)\cos x]e^{-x}$

（D） $\cos x\cdot y''+\sin x\cdot y'=[(x-2)\cos x+(1-x)\sin x]e^{-x}$

（5）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同但不相似，则 a 的取值为（　）.

(A) $a=3$　　(B) $-9<a<0, 0<a<9$

(C) $-3<a<0, 0<a<3$　　(D) $a=-3$

（6）已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

① α_1,α_3 线性无关；　② α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；

③ α_3,α_4 线性无关；　④ $r(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=3$

其中正确的是（　）.

（A）①③　（B）②④　（C）②③　（D）①④

（7）设随机变量 (X,Y) 在由 $(0,0),(0,1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域内服从均匀分布，则当 $0<y\le x$ 且 $y\le1$ 时，(X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)=$(　).

（A）$2xy-x^2$　（B）y^2　（C）$2x-x^2$　（D）1

（8）设 $X\sim N(0,1)$，$P\{X>U_\alpha\}=\alpha$；$Y\sim\chi^2(1)$，$P\{Y>\chi^2_\alpha(1)\}=\alpha$；

$Z\sim t(n)$，$P\{Z>t_\alpha(n)\}=\alpha$；$W\sim F(1,n)$，$P\{W>F_\alpha(1,n)\}=\alpha$，

其中 $0<\alpha<1$，现有如下四个命题:

① $\chi^2_\alpha(1)=U^2_{\frac{\alpha}{2}}$；　② $F_\alpha(1,n)=t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$；　③ $F_\alpha(1,n)F_{1-\alpha}(1,n)=1$；　④ $t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)F_{1-\alpha}(n,1)=1$

其中正确的个数为（　）.

（A）0　（A）1　（C）2　（D）3

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

（10）$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}\,dx=$ ____________.

（11）设 $e^z=(x^2-1)z+x(2+y)-1$ 确定了 $z=z(x,y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ________.

（12）$I=\oint_\Gamma\frac{(x+2)^2+(y-3)^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}ds=$ ________. 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y=0,\end{cases}(a>0)$.

（13）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则矩阵

$B=$ ________.

（14）一射手对一目标独立重复地射击 4 次，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则他第四次射击恰好是第二次命中的概率为____________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $x\to 0$ 时，函数 $a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$ 与 kx^3 是等价无穷小，求常数 a,b,c,k 的值.

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）求函数 $z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,y\geq 0,2x+y\leq 4\}$ 上的最大值及最小值.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $I=\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由直线 $y=0,y=2,x=-2$，及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，其中 $0<a<1$，切线与抛物线及 x 轴所围图形面积为 S_1，切线与抛物线及 $y=1$ 所围图形面积为 S_2，$S=S_1+S_2$，（I）问 a 为何值时，S 最小.（II）当 S 最小时，求 S_1 绕 x 轴旋转所得立体体积.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，证明：

（I）$\dfrac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} > x$；（II）$\csc^2 x < \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；（II）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，

（I） 求参数 a 的值； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^T Ax$ 为标准形.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下，Y 在 $(x,1)$ 上服从均匀分布.

（I）求随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；（II）求 $P\{X+Y\le 1\}$；（III）求 $D(X-Y)$.

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$，其中 $\theta\ (0<\theta<1)$ 为未知参数，利用总体 X 的如下样本值

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 3,$$

（I）求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M$；（II）求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_L$；

（III）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，N 表示样本 2 出现的次数，在 $\theta=\hat{\theta}_L$ 时，求 $E(N)$.