绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（一）试卷 （模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，两曲线（　　）.

(A) 没有交点　　(B) 仅有一个交点　　(C) 有两个交点　　(D) 有三个交点

【答案】（A）.

【解法一】两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$,令

$$f(x)=kx^2-\ln x,\ f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0,\ x=\frac{1}{\sqrt{2k}},\ f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k),$$

当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时有 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{2k}})$ 上单减，在 $(\dfrac{1}{\sqrt{2k}},+\infty)$ 上单增，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根，即两个曲线没有交点，选（A）.

【解法二】 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2},\ f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{e},0<x<\sqrt{e},\ f'(x)>0,\ f(x)$ 单调增，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$；$x>\sqrt{e},\ f'(x)<0,\ f(x)$ 单调减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{e}$ 处取到最到最大值 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$，$k>\dfrac{1}{2e}$ 时，两曲线无交点，答案为（A）.

（2）设 $f'(x)+f^2(x)\sin x^2=e^x-1$，且 $f(0)=0$，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$（　　）.

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）敛散性不定

【答案】（A）.

【解】由题设知 $f(0)=f'(0)=0,\ f''(0)=1$，由麦克劳林公式有 $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$，则当 $n\to\infty$ 时有 $\left|(-1)^n f(\dfrac{1}{n})\right|\sim\dfrac{1}{2n^2}$，由正项级数比较审敛法极限形式知该级数绝对收敛，因此答案为（A）.

（3）曲线 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}, & x<-1,\\ \dfrac{x}{x+2}\arctan x^2, & x\ge-1\end{cases}$ 的渐近线条数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）.

【解】 $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\infty, x=-1$为铅锤渐近线； $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$，左边无水平渐近线；

$$k=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-1}}=-1, b=\lim_{x\to -\infty}(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}+x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x+1+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{(x^2-x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})+x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{[x^2-x^2(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{2x^2}))]+x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$=-1, y=-x-1$是斜渐近线；

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x+2}\arctan x^2=\dfrac{\pi}{2}, y=\dfrac{\pi}{2}$为水平渐近线.一共三条渐近线，选（C）.

（4）设 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\cos(xy)d\sigma$， $I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\cos(xy)d\sigma$， $I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\le 1}\cos(xy)d\sigma$，则（　　）.

（A） $I_1<I_2<I_3$　　（B） $I_2<I_1<I_3$　　（C） $I_3<I_1<I_2$　　（D） $I_1<I_3<I_2$

【答案】（B）

【解】被积函数相同，只需要比较积分区域的大小，由 $x^2+y^2\le 1$，$|x|+|y|\le 1$，及 $\max\{|x|,|y|\}\le 1$的图形面积知， I_3积分区域面积最大， I_1次之， I_2最小，因此（B）正确.

（5）对三阶矩阵A的伴随矩阵A^*先交换第一行与第三行得到矩阵B ，然后再将B的第二列的-2倍加到第三列得单位矩阵E，且$|A|>0$，则$A=($　　$)$.

(A) $\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&2\\-1&0&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

【答案】（A）

【解】由 $A^*\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}B\xrightarrow{c_3-2c_2}E,\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=E$得

$$A^*=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\left|A^*\right|=1\overset{|A|>0}{\Rightarrow}|A|=1\Rightarrow A^*=A^{-1}\Rightarrow A=(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$,选（A）.

（6）设 A 是三阶实对称矩阵,且各行元素之和均为 0 ，α,β 是线性无关的三维列向量，且满足 $A\alpha=3\beta,A\beta=3\alpha$,则 $A+4E$ 为（ ）.

（A）正定矩阵 （B）负定矩阵

（C）正交矩阵 （D）对角矩阵

【答案】（A）.

【解】矩阵 A 的各行元素之和均为 0 ，即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，知 0 是 A 的特征值，$\alpha_1=(1,1,1)^T$ 是矩阵 A 的属于特征值 0 的特征向量；又 $A(\alpha+\beta)=3(\alpha+\beta),A(\alpha-\beta)=-3(\alpha-\beta)$,且由 α,β 是线性无关的，知 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 均不是零向量，从而 3 和 -3 都是矩阵 A 的特征值，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 分别是特征值 3 和 -3 对应的特征向量. $A+4E$ 的特征值为 4,7,1.从而为正定矩阵.

（7）设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个相互独立的连续型随机变量的分布函数，其相应的概率密度函数 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则下列说法不正确的是（ ）.

（A） $0.4F_1(x)+0.6F_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$ 必为某一随机变量的分布函数

（B） $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（C） $0.4f_1(x)+0.6f_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$ 必为某一随机变量的概率密度函数

（D） $f_1(x)+f_2(x)-\left[f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)\right]$ 必为某一随机变量的概率密度函数

【答案】（C）.

【解】 $F_2(x)$ 是分布函数，则 $F_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$ 也是分布函数，$0.4F_1(x)+0.6F_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$ 是分布函数;

设 X 的分布函数为 $F_1(x)$，Y 的分布函数为 $F_2(x)$，则 $\min\{X,Y\}$ 的分布函数

$$F(x)=P\{\min(X,Y)\le x\}=P\{(X\le x)\cup(Y\le x)\}=P\{X\le x\}+P\{Y\le x\}-P\{X\le x,Y\le x\}$$

$=F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$, $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$ 求导即得到（D）.

因为 $f_2\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$ 不是概率密度函数. 所以（C）不正确.

（8）设总体 X 的方差 $\sigma^2>0$，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $Y=\sum_{i=1}^{3}X_i$，则（　　）.

（A）$Cov(X_1,Y)=0$　　（B）$Cov(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{3}$

（C）$D(X_1+2Y)=5\sigma^2$　　（D）$D(X_1-2Y)=9\sigma^2$

【答案】(D).

【解】$D(X_1-2Y)=D\left[X_1-2(X_1+X_2+X_3)\right]=D(-X_1-2X_2-2X_3)$

$=D(X_1)+4D(X_2)+4D(X_3)=9D(X_1)=9\sigma^2$.选（D）.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设曲线 $y=\ln\dfrac{1+2x}{1+x}$ 在横坐标 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴的交点的纵坐标为 y_{x_0}，则 $\lim\limits_{x_0\to+\infty}y_{x_0}=$__________.

【答案】$\ln 2$.

【解】曲线在点 $x=x_0$ 处的切线方程为

$$y=\frac{1}{(1+2x_0)(1+x_0)}(x-x_0)+\ln\frac{1+2x_0}{1+x_0},$$

它与 y 轴交点的纵坐标为

$$y_{x_0}=\ln\frac{1+2x_0}{1+x_0}-\frac{x_0}{(1+2x_0)(1+x_0)},$$

所以有

$$\lim_{x_0\to+\infty}y_{x_0}=\lim_{x_0\to\infty}[\ln\frac{1+2x_0}{1+x_0}-\frac{x_0}{(1+2x_0)(1+x_0)}]=\lim_{x_0\to\infty}[\ln\frac{\frac{1}{x_0}+2}{\frac{1}{x_0}+1}-\frac{x_0}{(1+2x_0)(1+x_0)}]=\ln 2.$$

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\sqrt{1-\sin\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1-\sin\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\sin\dfrac{n\pi}{n}})=$__________.

【答案】$\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi}$.

【解】原式 $=\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\pi}{n}\sqrt{1-\sin\dfrac{i\pi}{n}}=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right|\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi}.$$

（11）设 $s(x)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx$，而 $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ e^x, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$

则 $s(\dfrac{7}{2})=$ ________.

【答案】$-\dfrac{1+2e^{\frac{1}{2}}}{4}$.

【解】由题意，应该对 $f(x)$ 做周期为 2 的奇延拓，由收敛定理，

$$s(\frac{7}{2})=s(-\frac{1}{2})=-s(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}^-)+f(\frac{1}{2}^+)]=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})=-\frac{1}{4}(1+2e^{\frac{1}{2}}).$$

（12）设 $\begin{cases}z=xf(y-x),\\ x+y+ze^z=1\end{cases}$ 确定了 $y=y(x),\ z=z(x)$，其中 f 为可导函数，且 $f(1)=1$，则

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

【答案】-2.

【解】由 $z=xf(y-x)$ 可知 $x=0$ 时 $z=0$，由 $x+y+ze^z=1$ 可得此时 $y=1$，对两个等式两边同时求全微分可得 $\begin{cases}dz=f\cdot dx+xf'\cdot(dy-dx),\\ dx+dy+(z+1)e^z dz=0,\end{cases}$ 把 $x=0, y=1$， $z=0$ 及 $f(1)=1$ 代入可得 $2dx+dy=0$，因此有

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-2$.

（13）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$ 为其三个特征值，对应的线性无关的特征向量依次为

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 令 $P=(\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)$，则 $P^{-1}(A^*+E)P=$ ________.

【答案】$\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

【解】$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2, A\alpha_3=-\alpha_3\Rightarrow(A^*+E)\alpha_1=0,(A^*+E)\alpha_2=0,(A^*+E)\alpha_3=2\alpha_3$，

$$P^{-1}(A^*+E)P=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

（14）设随机变量$\left(X,Y\right)$的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,|y|<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

则 $P\left\{\min\left(X,Y\right)\le\dfrac{1}{2}\right\}=$______________.

【答案】$\dfrac{27}{32}$

【解】$P\left\{\min\left(X,Y\right)\le\dfrac{1}{2}\right\}=1-P\left\{\min\left(X,Y\right)>\dfrac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X>\dfrac{1}{2},Y>\dfrac{1}{2}\right\}$

$$=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{3}{2}xdy=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3}{2}x(x-\frac{1}{2})dx=\frac{27}{32}.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设 $x>0$，求使不等式 $x^a\le e^x$ 成立的正数 a 的最大值.

【解】 $a>0$，当 $x\in(0,1]$ 时上述不等式显然成立；　　……2 分

当 $x>1$ 时上述不等式等价于 $a\le\dfrac{x}{\ln x}$，因此只要取 a 为函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内最小值即可，$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$，　　……6 分

当 $x\in(1,e)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，　　……8 分

因而 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 在 $x=e$ 处取得最小值，且有 $f(e)=e$，因此 a 可以取的最大值为 e.　　……10 分

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $z=f(e^x\cos y,e^x\sin y)+g(xy)$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，g 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\cos y+f_2'\cdot e^x\sin y+yg',\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f_1'\cdot e^x\sin y+f_2'\cdot e^x\cos y+xg'$，　　……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f_{11}''\cdot e^x\cos y+f_{12}''e^x\sin y)e^x\cos y+e^x\cos yf_1'$$

$$+(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''e^x\sin y)e^x\sin y+e^x\sin yf_2'+y^2g'',$$

$$=e^x\cos yf_1'+e^x\sin yf_2'+e^{2x}\cos^2 yf_{11}''+e^{2x}\sin^2 yf_{22}''+2e^{2x}\sin y\cos yf_{12}''+y^2g'',$$　　……5 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos yf_1'-e^x\sin yf_2'+e^{2x}\sin^2 yf_{11}''+e^{2x}\cos^2 yf_{22}''-2e^{2x}\sin y\cos yf_{12}''+x^2g''\text{，}$$ ……8 分

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{2x}(f_{11}''+f_{22}'')+(x^2+y^2)g''.$ ……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 满足方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-1)y=\frac{1}{2}+2x-x^2,x>0$ 且 $y(1)=a$．（Ⅰ）求 $y=y(x)$ 的表达式；（Ⅱ）求常数 a，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$ 存在，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$ 的值.

【解】（Ⅰ）方程可变化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{x-1}{x}y=2-x+\frac{1}{2x}$，解得

$$y=e^{\int\frac{x-1}{x}dx}[\int(2-x+\frac{1}{2x})e^{\int\frac{-x+1}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{e^x}{x}[\int(2x-x^2+\frac{1}{2})e^{-x}dx+C]$$

$$=x-\frac{1}{2x}+C\frac{e^x}{x}\text{，}$$ …… 4 分

由 $y(1)=a$ 得 $C=(a-\frac{1}{2})e^{-1}$，因此 $y=x-\frac{1}{2x}+(a-\frac{1}{2})e^{-1}\frac{e^x}{x}$． …… 6 分

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[1-\frac{1}{2x^2}+(a-\frac{1}{2})e^{-1}\frac{e^x}{x^2}]$，

若 $a-\frac{1}{2}\neq 0$，则上式最后一项趋于 ∞，故应取 $a=\frac{1}{2}$，此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=1$． …… 10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 Γ 为 $x^2+y^2=2x(y\geq 0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段弧，连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2+\int_\Gamma y[f(x)+e^x]dx+(e^x-xy^2)dy$，求 $f(x)$ 的表达式.

【解】设 $\int_\Gamma y[f(x)+e^x]dx+(e^x-xy^2)dy=a$，则 $f(x)=x^2+a$．故 …… 2 分

$$a=\oint_{\Gamma+\overline{AO}}y(x^2+a+e^x)dx+(e^x-xy^2)dy-\int_{\overline{AO}}y(x^2+a+e^x)dx+(e^x-xy^2)dy$$

$$=-\iint_D(e^x-y^2-x^2-a-e^x)dxdy-0$$ …… 6 分

$$=\iint_D(x^2+y^2)dxdy+a\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3dr+\frac{\pi}{2}a$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 d\theta+\frac{\pi}{2}a=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}a\text{，}$$

所以 $a=\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$， $f(x)=x^2+\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$.　　　　…… 10 分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}$.

（I）证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限值；

（II）判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan(\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1)$ 的敛散性，并说明理由.

【证明】（I）由题设可知 $x_n>0$，又 $x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}<\dfrac{6+4x_n}{3+2x_n}=2$，因此该数列有界，…… 2 分

当 $n\ge 2$ 时， $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}-\dfrac{3+4x_{n-1}}{3+2x_{n-1}}=\dfrac{6(x_n-x_{n-1})}{(3+2x_n)(3+2x_{n-1})}$，

因此 $\dfrac{6}{(3+2x_n)(3+2x_{n-1})}>0$，由此可得 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，又 $x_2=\dfrac{7}{5}>x_1$，由数学归纳法可知数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的，　　　　…… 4 分

由单调有界收敛原理可知数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}$ 两边同时取极限可得 $2a^2-a-3=0$，解得 $a=\dfrac{3}{2}$ 或者 $a=-1$（舍去），因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.　　　　…… 5 分

有关数列 $\{x_n\}$ 单调性的证法二：

令 $f(x)=\dfrac{3+4x}{3+2x}$，则 $f'(x)=\dfrac{6}{(3+2x)^2}>0$， $x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{3+2x_n}=f(x_n)$，由拉格朗日中值定理知 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$，其中 ξ_n 为位于 x_{n-1} 到 x_n 之间的某个点，因 $f'(\xi_n)>0$，因此 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，又 $x_2=\dfrac{7}{5}>x_1$，由数学归纳法可知数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的.

（II）由（I）的证明可知

$$\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}-1>0，且 \lim_{n\to\infty}(\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}-1)=0，$$

因此有 $n\to\infty$ 时 $\tan(\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1)\sim\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1$.　　　　…… 7 分

考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1)$，当 $n=1,2,\cdots$ 时有

$$\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}-1=\frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}}\le\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}，$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n})$ 的前 n 项和为 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{x_{i+1}}-\sqrt{x_i})=\sqrt{x_{n+1}}-1$， $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n})$ 是收敛的．由正项级数比较审敛法的极限形式可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan(\sqrt{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}-1)$ 是收敛的.

…… 10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维列向量组，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 已知线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为：

$$\xi_0+k\xi_1=(1,2,0,-1)^T+k(1,1,-2,0)^T,$$

（I）考察 β 是否可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；

（II）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的一个极大线性无关组.

【解】（I）由方程组 $Ax=\beta$ 的通解为：$\xi_0+k\xi_1=(1,2,0,-1)^T+k(1,1,-2,0)^T$ 可知

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4=\beta,$$ …… 4 分

若 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 β 能由 α_1,α_2 线性表示，从而 α_4 可由 α_1,α_2 表示，这与 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ 矛盾,所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示； …… 7 分

或者 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0$

$$\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3,$$

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3,$$

而 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（II）由于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)\xrightarrow{c}(\alpha_1,\alpha_2,0,\alpha_4,0)$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$. …… 11 分

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设 A,B,C 均是三阶矩阵，满足 $AB=B,CA^T=4C$，

其中 $B=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix},\xi=\begin{pmatrix}1\\3\\a\end{pmatrix}$,

(I)求 A；　(II)问 a 为何值时，有 $A^{2018}\xi=\xi$.

【解】 (I)设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,由 $AB=B$，知

$$A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

即 $A\beta_i=\beta_i$, 故 $\beta_i(i=1,2,3)$ 是 λ_1=1 的特征向量, …… 2 分

由已知 $CA^T=4C\Rightarrow AC^T=4C^T$,令 $C^T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$　则

$A\alpha_i=4\alpha_i\Rightarrow\alpha_i(i=1,2,3)$ 是 A 的特征值 $\lambda_3=4$ 的特征向量. …… 4 分

取 $P=(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$. 故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$ …… 6 分

(II) 由(I)知，$A\beta_i=\beta_i$，故有 $A^{2018}\beta_i=\beta_i(i=1,2)$，且 $A^{2018}(k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1\beta_1+k_2\beta_2$.

故当 ξ 可由 β_1,β_2 线性表示时，有 $A^{2018}\xi=\xi$， …… 8 分

设 $\xi=x_1\beta_1+x_2\beta_2$，由

$$(\beta_1,\beta_2,\xi)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&3\\0&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&-1&4\\0&0&a+4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-4\\0&0&a+4\end{pmatrix},$$

当 $a=-4$ 时，$\xi=3\beta_1-4\beta_2$，有 $A^{2018}\xi=\xi$. …… 11 分

【注】也可以认为 ξ **是** $(A^{2018}-E)x=0$ **的解，使得** ξ 可以由 $(A^{2018}-E)x=0$ 的基础解系线性表示.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & -2<x<0,\\ \frac{1}{3}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（I）求 X 的分布函数 $F_X(x)$；

（II）记 $Y=\begin{cases}1, & X<0,\\ -X^2+1, & X\ge 0.\end{cases}$ 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

【解】（I）$F_X(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{x+2}{6}, & -2\le x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{3}+\frac{x-1}{3}, & 1\le x<3,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ …… 5 分

（II）$F_Y\left(y\right)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0, & y<-8,\\ \int_{\sqrt{1-y}}^{3}\frac{1}{3}dx, & -8\le y<0,\\ \int_{1}^{3}\frac{1}{3}dx, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<-8,\\ \frac{3-\sqrt{1-y}}{3}, & -8\le y<0,\\ \frac{2}{3}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$ …… 11 分

得分	评卷人

（23）设随机变量$\left(X,Y\right)\sim N(0,1;6,6;0)$，记$U=X+Y,\ V=X-Y$，

（I）写出U的概率密度函数$f_U\left(x\right)$；

（II）判断U,V是否不相关？U,V是否相互独立？

（III）求$P\left\{\left(U-1\right)\left(V+1\right)\le 0\right\}$.

【解】（I）$\left(X,Y\right)\sim N\left(0,1;6,6;0\right)\Rightarrow X\sim N(0,6),Y\sim N(1,6),$

且X,Y独立；所以$U=X+Y\sim N\left(1,12\right)$， …… 2 分

$$f_U\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{24}},-\infty<x<+\infty;$$ …… 4 分

（II）$Cov\left(U,V\right)=Cov\left(X+Y,X-Y\right)=Cov\left(X+Y,X-Y\right)=0$，故$U,V$不相关. …… 6 分

又$\begin{cases}U=X+Y,\\ V=X-Y,\end{cases}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\ne 0,\left(U,V\right)$为二维正态分布，故$U,V$相互独立. …… 8 分

（III）$P\left\{\left(U-1\right)\left(V+1\right)\le 0\right\}=P\left\{U\le 1,V\ge -1\right\}+P\left\{U\ge 1,V<-1\right\}$

$=P\left\{U\le 1\right\}P\left\{V\ge -1\right\}+P\left\{U\ge 1\right\}P\left\{V\le -1\right\}=\frac{1}{2}.$ …… 11 分