绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}\sin^2\dfrac{1}{x(x-1)}$，则（　）.

（A） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 及 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（2）对于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}(p>0,q>0)$ ，下列结论正确的是（　　）

（A） $0<p<1$，$0<q<1$ 时收敛.　　（B） $0<p<1$，$q\ge 1$ 时收敛.

（C） $p\ge 1$，$0<q<1$ 时收敛.　　（D） $p\ge 1$，$q\ge 1$ 时收敛.

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　）.

（A）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均连续

（B）偏导数 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 均不连续但可微

（C）不可微但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在

（D）连续但偏导数 $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均不存在

（4）已知微分方程 $y''+ay'+by=xe^{\lambda x}$ 的通解形式是 $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+(Ax+B)e^{\lambda x}$，其中 c_1,c_2 是任意常数，则必有（　　）.

（A） $a=2,b=1,\lambda=-1$　　（B） $a=2,b=1,\lambda\ne-1$

（C） $a=-2,b=1,\lambda=-1$　　（D） $a=-2,b=1,\lambda\ne-1$

（5）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}3&a&0\\a&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同但不相似，则 a 的取值为（　　）.

(A) $a=3$　　(B) $-9<a<0,0<a<9$

(C) $-3<a<0,0<a<3$　　(D) $a=-3$

（6）已知5×4矩阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，若$\eta_1=(2,1,-2,1)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，那么下列命题

① α_1,α_3线性无关；　② α_1可由α_2,α_3线性表示；

③ α_3,α_4线性无关；　④ $r\left(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\right)=3$

其中正确的是（　　）.

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）①④

（7）　设随机变量$\left(X,Y\right)$在由$\left(0,0\right),\left(0,1\right),\left(1,1\right)$为顶点的三角形区域内服从均匀分布，则当$0<y\le x$且$y\le 1$时，$\left(X,Y\right)$的联合分布函数$F\left(x,y\right)=$(　　).

（A）$2xy-x^2$　　（B）　y^2　　（C）$2x-x^2$　　（D）　1

（8）设$X\sim N(0,1)$，$P\left\{X>U_\alpha\right\}=\alpha$；$Y\sim\chi^2(1)$，$P\left\{Y>\chi_\alpha^2(1)\right\}=\alpha$；

$Z\sim t(n)$，$P\left\{Z>t_\alpha(n)\right\}=\alpha$；$W\sim F(1,n)$，$P\left\{W>F_\alpha(1,n)\right\}=\alpha$，

其中$0<\alpha<1$，现有如下四个命题:

① $\chi_\alpha^2(1)=U_{\frac{\alpha}{2}}^2$；　② $F_\alpha(1,n)=t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$；　③ $F_\alpha(1,n)F_{1-\alpha}(1,n)=1$；　④ $t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)F_{1-\alpha}(n,1)=1$

其中正确的个数为（　）.

（A）　0　　（A）1　　（C）2　　（D）　3

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$___________.

（10）$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=$_______________.

（11）设$e^z=(x^2-1)z+x(2+y)-1$确定了$z=z(x,y)$，则$dz\big|_{(1,0)}=$_________.

（12）曲线$y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$的斜渐近线是______________.

（13）设矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则矩阵

$B=$ ________.

（14）一射手对一目标独立重复地射击 4 次，若至少命中一次的概率为$\frac{80}{81}$，则他第四次射击恰好是第二次命中的概率为____________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（本题满分 10 分）设 $x\to 0$ 时，函数 $a+bx-(1+c\tan x)\sqrt{1+x}$ 与 kx^3 是等价无穷小，求常数 a,b,c,k 的值.

得分	评卷人

（16）（本题满分 10 分）求函数 $z=f(x,y)=(x^2+y-1)e^{-2x-y}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,y\geq 0,2x+y\leq 4\}$ 上的最大值及最小值.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $I=\iint\limits_{D}xydxdy$，其中 D 由直线 $y=0, y=2, x=-2$，及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，其中 $0<a<1$，切线与抛物线及 x 轴所围图形面积为 S_1，切线与抛物线及 $y=1$ 所围图形面积为 S_2，$S=S_1+S_2$，（I）问 a 为何值时，S 最小.（II）当 S 最小时，求 S_1 绕 x 轴旋转所得立体体积.

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x \in (0,\dfrac{\pi}{2})$，证明：

（I）$\dfrac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x} > x$；　　（II）$\csc^2 x < \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；（II）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，

（I） 求参数 a ； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下，Y 在 $(x,1)$ 上服从均匀分布.

（I）求随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；（II）求 $P\{X+Y\le 1\}$；

（III）求 $D(X-Y)$.

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2\end{pmatrix}$，其中 $\theta\ (0<\theta<1)$ 为未知参数，利用总体 X 的如下样本值

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 3$$

（I）求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M$；（II）求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_L$；（III）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，N 表示样本 2 出现的次数，在 $\theta=\hat{\theta}_L$ 时，求 $E(N)$.