绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）当 $x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（B）.

【解】$x\to 0$ 时，$(1+\sin x-x)^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln(1+\sin x-x)}{x}}-1\sim\dfrac{\ln(1+\sin x-x)}{x}\sim\dfrac{\sin x-x}{x}\sim-\dfrac{x^2}{6}$，因此 $n=2$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{(n+i+j)^2}=$（　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{dy}{(1+x+y)^2}$

（C）$\int_0^1 dy\int_{1-y}^1\dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$　　（D）$\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\dfrac{dx}{(1+x+y)^2}$

【答案】（A）.

【解】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{(1+i/n+j/n)^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\iint\limits_D\dfrac{dxdy}{(1+x+y)^2}$，$D:\begin{cases}0\le y\le x,\\0\le x\le 1.\end{cases}$因此，（A）正确的.

（3）设 $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\arcsin x}{x}dx$，$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x}{\arcsin x}dx$，$I_3=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$，$I_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x}{\ln(1+x)}dx$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2$ 且 $I_3<I_4$　　（B）$I_1<I_2$ 但 $I_3>I_4$

（C）$I_1>I_2$ 且 $I_3>I_4$　　（D）$I_1>I_2$ 但 $I_3<I_4$

【答案】（D）.

【解】由于$1>x>\dfrac{1}{2}$时，$\arcsin x>x,\ \ln(1+x)<x$；故$\dfrac{\arcsin x}{x}>1>\dfrac{x}{\arcsin x}$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1<\dfrac{x}{\ln(1+x)}$，

因此$I_1>I_2$且$I_3<I_4$，选择（D）.

（4）设a为正数．若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}$均为收敛的，则（　）.

（A）$0<a\le\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}<a<e$　　（C）$a=e$　　（D）$a>e$

【答案】（B）.

【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{a}{e}$，若$a=e$，则有

$\dfrac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=\dfrac{a}{(1+\dfrac{1}{n})^n}>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$收敛，必有$a<e$，$n\to\infty$时有

$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}=\dfrac{2}{(1+n^a)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}\sim\dfrac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{1+n^a}$收敛，则必有

$a+\dfrac{1}{2}>1$，所以答案为(B).

（5）已知 4 维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若$\alpha_i^T\beta_j=0$，$\beta_j\ne 0,(i=1,2,3,\ j=1,2,3,4)$，则向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$（　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（A）.

【解】记$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$A$是秩为 3 的$3\times4$的矩阵，由于$\beta_j$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均正交，故$\beta_j$是齐次方程组$Ax=0$的非零解，由于$\beta_j$非零，故$1\le r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le n-r(A)=1$，所以$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=1$.

（6）已知A,B均为 3 阶矩阵，$|A|=0$，且满足$AB+3B=O$，若$r(B)=2$，则行列式$|A+2E|=$（　）.

（A）1　　（B）2　　(C) 4　　(D) 8

【解】设$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由$(A+3E)B=O$知，$\lambda=-3$是矩阵$A$的特征值，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是特征值$\lambda=-3$的特征向量.由$r(B)=2$，所以$\lambda=-3$至少有 2 个线性无关的特征向量.所以$\lambda=-3$至少是二重特征值.又因$|A|=0$，$\lambda=0$必是矩阵$A$的特征值.从而$A$的特征值是$-3,-3,0$，$A+2E$的特征值为$-1,-1,2$，故$|A+E|=(-1)\times(-1)\times2=2$.

(7) 设$0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,$ 且$P(B|A)>P(B)$，则以下正确的是（　　）.

(A) $P\left(B\middle|\bar{A}\right)>P\left(B\right)$　　(B) $P\left(A\middle|B\right)>P\left(A\right)$

(C) $P\left(A\middle|\bar{B}\right)>P\left(A\right)$　　(D) $P\left(\bar{B}\middle|A\right)>P\left(\bar{B}\right)$

【答案】(B).

【解】$P\left(B\middle|A\right)>P\left(B\right)\Rightarrow P\left(AB\right)>P\left(A\right)P\left(B\right)$，$P\left(A\middle|B\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}>P\left(A\right)$.

(8) 设总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则统计量 $Y=\dfrac{X_1+X_2}{\left|X_3-X_4\right|}$ 服从的分布为（　　）.

(A) $F\left(1,1\right)$　　(B) $F\left(2,1\right)$　　(C) $t\left(1\right)$　　(D) $t\left(2\right)$

【答案】(C).

【解】$Y=\dfrac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}=\dfrac{X_1+X_2}{\left|X_3-X_4\right|}\sim t(1)$.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为____________________.

【答案】$y=\dfrac{1}{2}x+1$.

【解】由题设有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(\sin x)=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=2f'(0)=1\text{，得 }f'(0)=\frac{1}{2}\text{，}$$

故所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

（10）$I=\int_{-1}^{1}x(1+x^{2019})(e^x-e^{-x})dx=$__________ .

【答案】$4e^{-1}$.

【解】由于 e^x-e^{-x} 为奇函数，故 $x(e^x-e^{-x})$ 为偶函数，故 $x^{2020}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数.

$$I=2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=2\int_0^1 xd(e^x+e^{-x})=2x(e^x+e^{-x})\Big|_0^1-2\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$$

$$=2(e+e^{-1})-2(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=4e^{-1}.$$

（11）函数 $z=(x-1)\arcsin\dfrac{x}{y}+\ln(1+x^2+y)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=$ ________ .

【答案】$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【解】$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=(x-1)(\arcsin\dfrac{x}{y})'_y+\left.\dfrac{1}{1+x^2+y}\right|_{(1,\sqrt{2})}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$..

（12）$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\sin\dfrac{y}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}\sin\dfrac{y}{x}dx=$ ______ .

【答案】$\sin1+\dfrac{5}{8}\cos1-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{1}{2}$.

【解】$D_1:\dfrac{1}{2}\le x\le\sqrt{y}$，$\dfrac{1}{4}\le y\le\dfrac{1}{2}$；$D_2:y\le x\le\sqrt{y}$，$\dfrac{1}{2}\le y\le1$；将它们表示为 x 型区域，$D:x^2\le y\le x$，$\dfrac{1}{2}\le x\le1$; 故 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}\sin\dfrac{y}{x}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x\cos\dfrac{y}{x}\Big|_{x^2}^{x})dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\cos x-\cos1)dx$

$$=x\sin x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin xdx-\frac{x^2}{2}\cos1\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\sin1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}+\cos1-\cos\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\cos1$$

$$=\sin1+\frac{5}{8}\cos1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}.$$

（13）设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$ ________ .

【答案】$(-1)^{n+1}n!\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&\frac{1}{n}\\1&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\frac{1}{n-1}&0\end{pmatrix}$.

【解】 由于 $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}=(-1)^{n+1}n!\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

(14) 设 $(X_1,Y_1)\sim N\left(1,2;1,1;\frac{1}{3}\right)$，$(X_2,Y_2)\sim N\left(3,4;1,1;-\frac{1}{3}\right)$，分别记 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ 的概率密度函数为 $\varphi_1(x_1,y_1),\varphi_2(x_2,y_2)$，设 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)\right]$，则 $E(X)=$ ________.

【答案】2.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_1(x,y)dxdy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_2(x,y)dxdy$

$$=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=2.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases} ax+x^b\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-x})^n+c, & x\le 0, \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试确定常数 a,b,c 的取值情况.

【解】 $f(x)=\begin{cases} ax+x^b\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-x})^n+c, & x\le 0, \end{cases}=\begin{cases} ax+x^b\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ e^{2x}+c, & x\le 0, \end{cases}$ ……4 分

由于可导一定连续因此有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+x^b\cos\frac{1}{x})=f(0)=c+1$，必有 $c=-1,b>0$， ……6 分

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax+x^b\cos\frac{1}{x}}{x}=a+\lim\limits_{x\to 0^+}x^{b-1}\cos\frac{1}{x}=2$，

所以有 $a=2,b>1,c=-1$. ……10 分

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=1,f'(0)=-1$，且当 $x\ne 0$ 时 $z=f(x^2-y^2)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=(y^2-x^2)(z+\cos\frac{x^2-y^2}{2}),$$

求函数 $f(u)$ 的表达式.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+4x^2f'',\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf',\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f'+4y^2f''$， ……4 分

代入题设等式可得

$$4(x^2-y^2)f''(x^2-y^2)=(y^2-x^2)[f(x^2-y^2)+\cos\frac{x^2-y^2}{2}]$$

因此 $f(u)$ 满足方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=-\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{u}{2}$， ……6 分

方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=0$ 的通解为 $f(u)=C_1\cos\dfrac{u}{2}+C_2\sin\dfrac{u}{2}$，

方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=-\dfrac{1}{4}\cos u$ 的特解可设为 $f^*(u)=u(A\cos\dfrac{u}{2}+B\sin\dfrac{u}{2})$，代入方程可得

$$-A\sin\frac{u}{2}+B\cos\frac{u}{2}=-\frac{1}{4}\cos\frac{u}{2}, \text{解得 } A=0,B=-\frac{1}{4}.$$

因而方程 $f''(u)+\dfrac{1}{4}f(u)=-\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{u}{2}$ 的通解为 $f(u)=C_1\cos\dfrac{u}{2}+C_2\sin\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{4}u\sin\dfrac{u}{2}$，由 $f(0)=1,f'(0)=-1$ 可得 $C_1=1,C_2=-2$，因此 $f(u)=\cos\dfrac{u}{2}-(\dfrac{1}{4}u+2)\sin\dfrac{u}{2}$. ……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D x(x+ye^{x^2})\operatorname{sgn}(y-|x|)d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le 1,0\le y\le 1$，$\operatorname{sgn}(\ )$ 是符号函数.

【解】折线 $y=|x|$ 把 D 分为 D_1,D_2 则 $I=-\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D_2}x(x+ye^{x^2})d\sigma$ ……2 分

$$=-\iint\limits_{D_1}x^2d\sigma+\iint\limits_{D_2}x^2d\sigma \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=-\int_{-1}^{1}dx\int_0^{|x|}x^2dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{1}x^2dy \quad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}. \quad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n$ 的和函数为 $s(x)$，求 $s(x)$ 的表达式.

【解】令 $t=-x$，级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}t^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$. ……2 分

因为

$$\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}=3+\frac{3}{n}-\frac{7}{n+2},1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3+\frac{3}{n}-\frac{7}{n+2})t^n,$$

由于 $t\in(-1,1)$ 时有 $3\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{3t}{1-t}$， ……4 分

$$3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=3\int_0^t(\sum_{n=0}^{\infty}u^n)du=3\int_0^t\frac{1}{1-u}du=-3\ln(1-t),\qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+2}=\frac{7}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+2}}{n+2}=\frac{7}{t^2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}-t-\frac{t^2}{2})=-\frac{7}{t^2}[\ln(1-t)+t+\frac{t^2}{2}],t\in[-1,0)\cup(0,1),\qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$t=0$ 时，显然有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+2}=0$． 因此有

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+6}{n(n+2)}t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3+\frac{3}{n}-\frac{7}{n+2})t^n=1+\frac{3t}{1-t}-3\ln(1-t)+\frac{7}{t^2}[\ln(1-t)+t+\frac{t^2}{2}],t\neq 0,$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+2n+6}{n(n+2)}x^n=1-\frac{3x}{1+x}-3\ln(1+x)+\frac{7}{x^2}[\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}],x\neq 0,$$

当 $x=0$ 时，该级数显然收敛于 1；所以

$$s(x)=\begin{cases}1-\frac{3x}{1+x}-3\ln(1+x)+\frac{7}{x^2}[\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}], & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}\qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值及最小值均在 $(0,1)$ 内取到．证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $f'(\xi_k)=f(\xi_k),k=1,2$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$．

【证明】（Ⅰ）由题设知在 $(0,1)$ 存在两个不同的点 x_1,x_2，且有

$$\min_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(x_1)<0,\max_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(x_2)>0,$$

此处不妨设 $x_1<x_2$，由于 $f(x_1)f(x_2)<0$，由连续函数的零点定理知存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_0)=0,\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

令 $F(x)=f(x)e^{-x}$， ……4 分

则有 $F(0)=F(x_0)=F(1)=0$，由 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0),\xi_2\in(x_0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，由

$F'(x)=[f'(x)-f(x)]e^{-x}$ 可得在 $(0,1)$ 存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得

$f'(\xi_k)=f(\xi_k),k=1,2$；　　……5 分

（Ⅱ）由于 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)\Leftrightarrow f''(\eta)-f'(\eta)+2(f'(\eta)-f(\eta))=0$，

令 $G(x)=[f'(x)-f(x)]e^{2x}$，　　……8 分

由（Ⅰ）的证明知 $G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得

$$F'(\eta)=[f''(\eta)-f'(\eta)]e^{2\eta}+2[f'(\eta)-f(\eta)]e^{2\eta}=0,$$

即有 $f''(\eta)+f'(\eta)=2f(\eta)$.　　……10 分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）

(I) 设有向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$，(II) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$.

(I) 问 a,b 为何值时，向量组（II）不能由向量组（I）线性表示？

(II) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\\1&b\end{pmatrix}$，问 a,b 为何值时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，有解时求出其全部解.

【解】(I) $(\boldsymbol{\alpha}_1,,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\1&2&a&1&b\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&1&a-1&2&b-1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right),$$　　……4 分

$a=3,b\neq1$时，β_1,β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，

$a\neq3,b$ 任意，β_1,β_2 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，且表示法唯一；

$a=3,b=1$时，β_1,β_2 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表出，且表示法不唯一；　　……5 分

(II) $a=3,b=1$时 $(A|B)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，解得

$$X=\begin{pmatrix}-3+k&1+l\\2-2k&-2l\\k&l\end{pmatrix},k,l\text{ 为任意常数.}$$　　……8 分

当 $a\neq 3,b$ 任意时，$(A\,|\,B)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right)$ $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，且

$$X=\begin{pmatrix}-3&1+\dfrac{b-1}{a-3}\\2&\dfrac{-2(b-1)}{a-3}\\0&\dfrac{b-1}{a-3}\end{pmatrix}.\qquad\cdots\cdots 11\text{ 分}$$

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $6y_3^2$，且 $AB=O$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,-1)^T$，$\alpha_2=(-2,1,0)^T$，

(I) 求所用的正交变换 $x=Qy$ 及二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的表达式;（II）求 $(A-3E)^8$.

【解】（I）由 $A\alpha_1=0=0\alpha_1,A\alpha_2=0=0\alpha_2$,知特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，α_1,α_2 是矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的线性无关的特征向量，又 $\lambda_3=6$ 是 A 的特征值，设其对应的特征向量为为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$,则

$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0,\\-2x_1+x_2=0,\end{cases}$ 解得特征向量为 $\alpha_3=(1,2,-1)^T$；　　$\cdots\cdots$3 分

将 α_1,α_2 正交得

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化有 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

令 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，经 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,化二次型

$f=x^TAx=y^T\Lambda y=6y_3^2$；　　$\cdots\cdots$5 分

由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,6\alpha_3)$,得 $A=(0,0,6\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$,

或者 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}\Rightarrow A=Q\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}Q^T=6\gamma_1\gamma_1^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$，

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$. ……7 分

(II)因为 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}$,有 $Q^{-1}(A-3E)Q=\Lambda-3E=\begin{pmatrix}-3&&\\&-3&\\&&3\end{pmatrix}$,从而

$$Q^{-1}(A-3E)^8Q=(\Lambda-3E)^8\Rightarrow Q^{-1}(A-3E)^8Q=(\Lambda-3E)^8=3^8E,$$

所以

$$(A-3E)^8=Q(\Lambda-3E)^8Q^{-1}=3^8E=\begin{pmatrix}3^8&&\\&3^8&\\&&3^8\end{pmatrix}.$$ ……11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-1&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1&1\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$，且 X,Y 不相关.

（I）求 (X,Y) 的联合分布律；（II）判断 X,Y 是否相互独立；（III）求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布律.

【解】(I) $E(X)=0,E(Y)=\dfrac{1}{2}$, X,Y 不相关知 $E(XY)=0$. ……1 分

设

X \ Y	-1	1
-1	x_1	x_2
1	x_3	x_4

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{1}{2},\\x_2+x_4=\dfrac{3}{4},\\x_3+x_4=\dfrac{1}{2},\\x_1-x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$ 解得 $x_1=\dfrac{1}{8},x_2=\dfrac{3}{8},x_3=\dfrac{1}{8},x_4=\dfrac{3}{8}$.

故

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

……5 分

（II）$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}$，$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=-1\}\cdot P\{Y=1\}$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=-1\}$，$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}$，

所以 X,Y 相互独立；　　……9 分

（III）$Z\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.　　……11 分

得分	评卷人

（23）设总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ 1-e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\ge\theta.\end{cases}$ 其中未知参数 $\lambda>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，

（I）$\theta=1$ 时，求 λ 的矩估计量；

（II）$\theta=1$ 时，求 λ 的最大似然估计量；

（III）$\lambda=2$ 时，求 θ 的最大似然估计量.

【解】（I）总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\ge\theta.\end{cases}$ $\theta=1$ 时 $f(x;\lambda)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$

$EX=\int_1^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda(x-1)}dx\overset{x-1=t}{=}\int_0^{+\infty}(t+1)e^{-\lambda t}d\lambda t=\frac{1}{\lambda}+1$，令 $\overline{X}=EX=\frac{1}{\lambda}+1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\overline{X}-1}$；　……3 分

（II）$\theta=1$ 时 $f(x;\lambda)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$ 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值，则似然函数

$$L(\lambda)=f(x_1;\lambda)f(x_2;\lambda)\cdots f(x_n;\lambda)=\lambda^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i-1)},$$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i-1),\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=0$$

得到 λ 的最大似然估计量 $\lambda=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)}=\dfrac{1}{\overline{X}-1}$.　　……7 分

（III）$\lambda = 2$ 时， $f(x,\theta)=\begin{cases} 0, & x<\theta, \\ 2e^{-2(x-\theta)}, & x \ge \theta. \end{cases}$，设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本的观测值，则似然函数

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta) = 2^n e^{-\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\theta)}$$

$$\ln L(\theta) = n\ln 2 - \sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\theta), \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 2n > 0,$$

θ 的最大似然估计量 $\theta = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.　　$\cdots\cdots$11 分