绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

森哥五套卷之数学（三）试卷 （模拟五）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(u)$ 为可导函数,曲线 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\frac{1}{2},4)$,且在该点处切线过原点 $(0,0)$，那么函数 $f(u)$ 在 $u=-3$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=-0.1$ 时相应的函数值增量的线性主部是(　　).

（A）-0.2　　（B）0.2　　（C）-0.1　　（D）0.1

【答案】（D）.

【解】曲线 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 过点 $(\frac{1}{2},4)$ 的切线方程为 $y-4=\left(f(\frac{x+1}{x-1})\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})$, 切线过原点 $(0,0)$ 得

$\left(f(\frac{x+1}{x-1})\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=8$, 而 $\left(f(\frac{x+1}{x-1})\right)'=f'(\frac{x+1}{x-1})\frac{-2}{(x-1)^2}$, $x=\frac{1}{2}$ 时 $\frac{x+1}{x-1}=-3$, 由此可得 $f'(-3)\times(-8)=8$，

所以 $f'(-3)=-1$，当 $\Delta u=-0.1$ 时，相应函数值的增量的线性主部即为微分就是 $f'(-3)\Delta u=0.1$.

（2）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x, x\le 0, \\ \sin\sqrt{x}+1, x>0. \end{cases}$ $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)=$（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c_1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$

（B）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

（D）$F(x)=\begin{cases} e^{\sin x}+c-1, & x\le 0, \\ x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, & x>0 \end{cases}$

【答案】（B）.

【解】当 $x\le 0$ 时，$F(x)=\int f(x)dx=\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+c_1$，

当 $x>0$，$F(x)=\int f(x)dx=\int(\sin\sqrt{x}+1)dx=x+\int\sin\sqrt{x}dx$. 其中，令 $t=\sqrt{x}$，

$\int\sin\sqrt{x}dx=\int\sin t\cdot 2tdt=-2t\cos t+2\sin t+c_2=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2$，

故当$x>0$时，$F(x)=x-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c_2$，由$F(0^+)=c_2$，$F(0^-)=1+c_1$及$F(x)$在$x=0$处连续得$c_2=1+c_1$，令$c_2=c$，则$c_1=c-1$，故选择（B）.

（3）设函数$f(x)$具有四阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1,$ 则

(A) 点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点，点$x=0$为$f''(x)$的极小值点.

(B) 点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点，点$x=0$为$f''(x)$的极大值点.

(C) 点$x=0$为$f'(x)$极小值点，点$(0,0)$为曲线$y=f''(x)$的拐点.

(D) 点$x=0$为$f'(x)$极大值点，点$(0,0)$为曲线$y=f''(x)$的拐点.

【答案】（A）.

【解】由题意知：$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=24$，

利用 Taylor 公式 $f''(x)=f''(0)+f'''(0)x+\dfrac{1}{2!}f^{(4)}(0)x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow f''(x)-f''(0)=12x^2+o(x^2)\Rightarrow$点$x=0$为$f''(x)$的极小值点.

$f'''(x)=f'''(0)+f^{(4)}(0)x+o(x)\Rightarrow f'''(x)-f'''(0)=24x+o(x)\Rightarrow$

点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点. 也可赋值 $f(x)=x^4$.

（4）将极坐标系下的二次积分$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$化为直角坐标系下的二次积分，则$I=$（ ）

(A) $\int_0^1dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$. (B) $\int_0^1dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^1dy\int_0^{y}f(x,y)dx+\int_1^2dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$. (D) $\int_0^1dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$.

【答案】（C）.

【解】极坐标下的区域$D:\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le2\sin\theta$在直角坐标系下的区域为

$D:y=x,x=\sqrt{2y-y^2},x=0$所围成，$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

$$=\int_0^1dy\int_0^{y}f(x,y)dx+\int_1^2dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$$

$$=\int_0^1dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dx$$,选（C）.

（5）设三阶矩阵A有特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，且$A$不能相似于对角阵，则

$r(A+E)+r(A-E)+r(A-2E)=$（　　）

（A）3　　（B） 4　　（C）6　　（D）7

【答案】(D).

【解】A 不能相似于对角阵，$r(A+E)=2$，又 $r(A-2E)=2$，$r(A-E)=3$，则

$$r(A+E)+r(A-E)+r(A-2E)=7.$$

（6）设 $A=2E+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，其中 $\alpha=(1,-1,-1)^T,\beta=(-2,1,0)^T$，则矩阵 A 的最小特征值对应的的特征向量是（　）.

（A）α　　（B） β

（C）$\alpha+\beta$　　（D）$\alpha-\beta$

【答案】（A）.

【解】$\alpha\beta^T$ 的特征值为 $\lambda_1=\alpha^T\beta=-3,\lambda_2=\lambda_3=0$，$\lambda_1=-3$ 对应的特征向量为 α，$A=2E+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$ 的特征值为 $-1,2,2$，-1 对应的特征向量为 α.

（7）设随机变量 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的指数分布，$0<a<b<2a$，

记 $p_1=P\{X>a\}$，$p_2=P\{X>b\}$，$p_3=P\{X>b|X>a\}$，则（　　）.

（A）$p_1>p_2>p_3$　　(B) $p_2>p_1>p_3$

(C) $p_3>p_1>p_2$　　(D) $p_3>p_2>p_1$

【答案】选 (C)

【解】$p_1=P\{X>a\}=e^{-\lambda a}$，$p_2=P\{X>b\}=e^{-\lambda b}$，$p_3=P\{X>b-a\}=e^{-\lambda(b-a)}$，

因为 $b-a<a<b$，所以 $p_3>p_1>p_2$.

（8）设随机变量 $X\sim U\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，$U=\sec X$，$V=\tan X$，则（　　）.

(A) U^2 与 V^2 相互独立　　(B) U 与 V 相互独立

(C) U^2 与 V^2 不相关　　(D) U 与 V 不相关

【答案】(D).

【解】因为 $U^2-V^2=\sec^2 X-\tan^2 X=1$，所以 $\rho_{U^2V^2}=1$，即 U^2 与 V^2 相关，U^2 与 V^2 不相互独立，从而 U 与 V 不相互独立.

$$E(U)=E(\tan X)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\frac{2}{\pi}dx=0,E(UV)=E(\tan X\cdot\sec X)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\sec x\cdot\frac{2}{\pi}dx=0,$$

所以$E(UV)=E(U)E(V)$，U 与V 不相关.

得分	评卷人

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $f(x)=x^n(x-1)^n\cos x$，此处n为正整数，那么 $f^{(n)}(0)=$________.

【答案】$(-1)^n n!$.

【解】设$u(x)=x^n,v(x)=(x-1)^n\cos x$，则 $f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}(x)v^{(n-i)}(x)$，

$u^{(i)}(0)=0\ (i=0,1,\cdots,n-1),u^{(n)}(0)=n!$，$v(0)=(-1)^n$，所以有 $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$.

（10）若折线 $y=1-|x|$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$_____ .

【答案】2.

【解】两折线交点分别为$(-\frac{1}{1+a},\frac{a}{1+a})$与$(\frac{1}{1+a},\frac{a}{1+a})$，由题设有

$$\int_{-\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{1+a}}(1-|x|-a|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{1+a}}[1-(1+a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+a}=\frac{1}{3},\text{解得 }a=2.$$

（11）已知可微函数 $f(x)$ 满足$\int_1^x\frac{f(t)\mathrm{d}t}{f^2(t)+t}=f(x)+1$，则 $f(x)=$______________.

【答案】$-\sqrt{x}$.

【解】等式两边对x求导可得$\dfrac{f(x)}{f^2(x)+x}=f'(x)$，因此函数$y=f(x)$满足方程

$\dfrac{y}{y^2+x}=y'$，变形后可得$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=y$，该方程是一阶非齐次线性微分方程，通解为

$$x=e^{\ln y}(\int ye^{-\ln y}dy+C)=y^2+Cy,$$

由题设知 $f(1)=-1,C=0$，因此有

$x=y^2,y=f(x)=-\sqrt{x}$或者 $f(x)=\sqrt{x}$，由 $f(1)=-1$，因此有 $f(x)=-\sqrt{x}$.

（12）差分方程$2y_{t+1}-6y_t=5\cdot3^t$满足$y_0=0$的特解为_______________.

【答案】$\dfrac{5}{6}t\cdot3^t$.

【解】 $2y_{t+1}-6y_t=5\cdot3^t\Rightarrow y_{t+1}-3y_t=\dfrac{5}{2}\cdot3^t$，$y_{t+1}-3y_t=0$ 的通解 $y_t=C\cdot3^t$，特解形式为

$y_t^* = At\cdot 3^t \Rightarrow A=\dfrac{5}{6}$，$y_{t+1}-3y_t=\dfrac{5}{2}\cdot 3^t$ 的通解为 $C\cdot 3^t+\dfrac{5}{6}t\cdot 3^t$，满足 $y_0=0$ 的特解为 $\dfrac{5}{6}t\cdot 3^t$.

（13）已知三阶非零矩阵 B 的列向量是下列方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+ax_3=2 \end{cases}$ 与方程 $3x_1+x_2-x_3=-1$ 的公共解，令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $(AB)^n=$______.

【答案】$2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

【解】设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由题意，知 $\beta_i(i=1,2,3)$ 是方程组 $Ax=b$ 的解，其中 $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.从而

$$(AB)^n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^n=\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}(1,1,1)\right]^n=2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

（14）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，对任意的 α，（$0<\alpha<1$），自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 定义为 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$. 则

$$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【答案】$1-\alpha$.

【解】$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1), P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha.$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=1$，求 $f'(0)$.

【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=1$，所以有

$$\lim_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}+f(x)]=0,\quad f(0)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$ ……4 分

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to 0}[(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}]$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})+f'(0)\text{，}$$ ……8 分

而 $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$，所以有 $f'(0)=1$. ……10 分

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$$

确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解】分别对等式 $x^2-xy+2y^2-x-3y+ze^z=2(e^2-1)$ 两边关于 x 及 y 求偏导可得

$$2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$-x+4y-3+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0\text{，}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 可得 $\begin{cases}2x-y-1=0,\\-x+4y-3=0.\end{cases}$ 解得 $x=y=1$，代入原方程可得 $z=2$，因此点 $(1,1)$ 是函数 $z=z(x,y)$ 唯一的驻点，且有 $z(1,1)=2$. ……2 分

对等式 $2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边关于 x 再求偏导可得

$$2+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(z+2)e^z(\frac{\partial z}{\partial x})^2=0\text{，}$$

将 $x=y=1,z=2,\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 代入可得 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{2}{3e^2}$， ……4 分

对等式 $2x-y-1+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边关于 y 再求偏导可得

$$-1+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(z+2)e^z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\text{，}$$

将 $x=y=1,z=2,\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{3e^2}$， ……6 分

对等式 $-x+4y-3+(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 两边关于 y 再求偏导可得

$$4+(z+1)e^z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+(z+2)e^z(\frac{\partial z}{\partial y})^2=0\text{，}$$

将 $x=y=1, z=2, \frac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{4}{3e^2}$， ……8 分

因而有 $AC-B^2=\frac{7}{9e^4}>0, A=-\frac{2}{3e^2}<0$，因此 $z(1,1)=2$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值．……10 分

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设有幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$．

（I）求该级数的收敛区间；

（II）设上述级数在收敛区间内的和函数是 $y(x)$，证明 $y(x)$ 满足方程 $y'=\frac{-x}{1+x^2}y$；

（III）求级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}$ 在收敛区间内和函数的表达式.

【解】（I）由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)(2n+2)}x^{2n+2}}{(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^{2n}}\right|=x^2$，

知当 $x^2>1$ 时，该级数发散，当 $x^2<1$ 时该级数收敛，因此它的收敛半径为 $R=1$．因此级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$； ……3 分

（II） $y'(x)=-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{2n-1}=-x(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n})$

$$=-x(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1})'=-x[xy(x)]'=-x^2y'(x)-xy(x),$$

故函数 $y(x)$ 满足方程 $y'(x)=\frac{-x}{1+x^2}y(x)$； ……8 分

（III）解方程 $y'(x)=\frac{-x}{1+x^2}y(x)$ 可得 $y(x)=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$，由，由 $y(0)=1$ 可得 $C=1$，

因此 $y(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$， ……10 分

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）某商品的需求函数 $Q=75-p^2$，p 为价格，试求：（I）当 $p=4$ 时的边际需求，并说明其经济意义；（II）当 $p=4$ 时的需求价格弹性 $E_d(E_d>0)$，并说明其经济意义；（III）当 $p=4$ 时，若价格提高 1% ，总收益是增加还是减少多少？

【解】（I）$Q=75-p^2,\dfrac{dQ}{dp}|_{p=4}=-2p|_{p=4}=-8,$ 它表明价格为4时，价格增加1个单位，需求下降8个单位；　　……3分

（II）需求价格弹性 $E_d=-\dfrac{d\ln Q}{d\ln p}=-\dfrac{p}{Q}\cdot\dfrac{dQ}{dp}=-\dfrac{p\times(-2p)}{75-p^2}=\dfrac{2p^2}{75-p^2},E_d|_{p=4}=\dfrac{32}{59}$，其经济学中的解释为：当价格 $p=4$ 时，若提价（或降价）1%，则需求量将减少（或增加）$\dfrac{32}{59}$%.　　……6分

（III）总收益函数 $R=pQ=p(75-p^2)=75p-p^3,$ 总收益对价格的弹性

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\cdot\frac{dR}{dp}=\frac{p(75-3p^2)}{75p-p^3}=\frac{75-3p^2}{75-p^2},\ \frac{ER}{Ep}|_{p=4}=\frac{27}{59},$$

当 $p=4$ 时，若价格提高1%　，总收益增加 $\dfrac{27}{59}$%.　　……10分

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$x_0\in(0,1)$，且在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值.试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi\in(x_0,1)$，使得 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中的 $\xi,$ 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.

【证明】（Ⅰ）由题设有 $x_0f(x_0)=\dfrac{1}{1-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，　　…… 2分

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[x_0,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(x_0,1)$ 使得

$$\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(x_0)=F'(\xi)(1-x_0)=f(\xi)(1-x_0),$$

从而有 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；　　…… 6分

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\xi]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$$f(\xi)-f(x_0)=f'(\eta)(\xi-x_0)，\text{而 } f(\xi)=x_0f(x_0),$$

因而有 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.故原命题成立.　　…… 10分

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设有向量组 $\alpha_1=(1,1,1,2)^T,\alpha_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$ $\alpha_3=(4,6,8,10)^T,\alpha_4=(2,3,2a+3,5)^T$，

（I）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩及一个极大线性无关组；

（I）令 $\beta=(0,2,4,b)^T$,若任意的 4 维列向量 γ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示，求 a,b.

【解】(I)$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \beta)=\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&2\\1&2a+5&8&2a+3&4\\2&a+7&10&5&b\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&2\\0&0&0&2a-1&0\\0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}\qquad (*)\qquad\cdots\cdots\ 4\text{ 分}$$

据（*）知 $a\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$,此时 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组.

据（*）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，所以 α_1,α_3 是一个极大线性无关组（不唯一）.

…… 6 分

（II）任意 4 维列向量 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_5\end{pmatrix}=\gamma$ 均有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma)$

则必有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$，　…… 10 分

据（*）知，当 $a\neq\dfrac{1}{2}$ 且 $b\neq 2$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$，

故当 $a\neq\dfrac{1}{2}$，$b\neq 2$ 时，任意的 4 维列向量 γ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示.　…… 11 分

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，（I）证明 $\boldsymbol{\beta},A\boldsymbol{\beta},A^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；（II）若 $A^3\boldsymbol{\beta}=A^2\boldsymbol{\beta}+2A\boldsymbol{\beta}$，求 $|A+3E|$.

【证明】(I) 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2A\boldsymbol{\beta}+k_3A^2\boldsymbol{\beta}=0,\qquad (1)$$

由于 $A\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$ （i=1,2,3），于是

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\quad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3,$$

代入（1）整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0,$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$A$的三个不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$对应的特征向量，所以线性无关，从而

$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0, \\ k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0, \\ k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0, \end{cases}$ 由于系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}\neq 0$, 从而$k_1=k_2=k_3=0$，故$\beta, A\beta, A^2\beta$线性无关.

…… 4 分

（2） $A(\boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{\beta}, A^2\boldsymbol{\beta})=(A\boldsymbol{\beta}, A^2\boldsymbol{\beta}, A^3\boldsymbol{\beta})=(A\boldsymbol{\beta}, A^2\boldsymbol{\beta}, A^2\boldsymbol{\beta}+2A\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{\beta}, A^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

令$P=(\boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{\beta}, A^2\boldsymbol{\beta})$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，由（I）矩阵$P$可逆，从而由上式知矩阵$A$与矩阵$B$相似.

…… 8 分

进一步，$A+3E$相似于$B+3E$. 故$|A+3E|=|B+3E|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=30$.　　…… 11 分

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量(X,Y)的联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0, \\ \frac{1}{4}y, & 0\le x<1\text{且}0\le y<1, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1\text{且}y\ge 1, \\ y, & x\ge 1\text{且}0\le y<1, \\ 1, & x\ge 1\text{且}y\ge 1. \end{cases}$$

（I）判断X,Y是否相互独立？

（II）求$Z=XY$的分布函数$F_Z(z)$，并问Z是否是连续型的随机变量？

（III）求$Z=XY$的方差$D(Z)$.

【解】（I） X 的分布函数$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1, \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$　　…… 1 分

Y 的分布函数 $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$ …… 2 分

由于 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X,Y 相互独立. …… 4 分

（II）由于 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},Y\sim U(0,1)$,

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{XY\le z,X=0\}+P\{XY\le z,X=1\}$

$=P\{0\le z,X=0\}+P\{Y\le z,X=1\}$

$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}z, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$ 由于 Z 的分布函数不连续，所以 Z 不是连续型随机变量. …… 8 分

（III）$D(Z)=D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$

$=[\frac{3}{16}+(\frac{3}{4})^2][\frac{1}{12}+(\frac{1}{2})^2]-(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{2})^2=\frac{7}{64}.$ …… 11 分

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设区域 G 是 x 轴、y 轴和直线 $y=2x+1$ 围成的三角形区域，(X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布.

（I）求条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$；

（II）求 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

【解】（I）$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}4, & -1<x<0,0<y<2x+1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$， …… 2 分

X 的概率密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x+1}4dy, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$=\begin{cases}4(2x+1), & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$； …… 4 分

$-\dfrac{1}{2}<x<0$时， $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(X)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+1}, & 0<y<2x+1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ …… 6 分

（II） $Z=2X-Y$ 的分布函数 $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=\iint\limits_{2x-y\le z}f(x,y)dxdy$， …… 7 分

当 $z<-1$ 时， $F_Z(z)=0;$ …… 8 分

当 $-1\le z<0$ 时， $F_Z(z)=1-\int_{-\frac{z}{2}}^{0}dx\int_0^{2x-z}4dy=1-z^2;$ …… 10 分

当 $z\ge 0$ 时， $F_Z(z)=1;$ 所以 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}-2z, & -1<z<0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ …… 11 分