

Introducción a los sistemas en tiempo discreto

Control Automático (EL-5408)

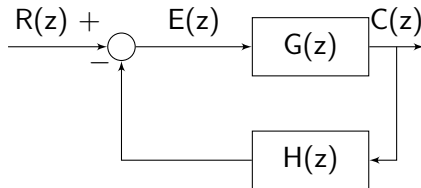
Escuela de de Ingeniería Electrónica

I Semestre
2016

- 1 Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto
 - Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto
 - Métodos para probar la estabilidad absoluta
- 2 Error de estado estacionario de los sistemas en tiempo discreto
 - Clasificación de los sistemas de control
 - Error de estado estacionario
- 3 Realización de controladores y filtros discretos
 - Definición y tipos de programación
 - Clasificación de filtros
 - Realización de un filtro de respuesta al impulso finita

Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

Análisis de estabilidad en sistemas de lazo cerrado (I)



Considere la siguiente ecuación, la cual describe el sistema realimentado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (1)$$

Así como su ecuación característica:

$$P(z) = 1 + G(z)H(z) = 0 \quad (2)$$

Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

Análisis de estabilidad en sistemas de lazo cerrado (II)

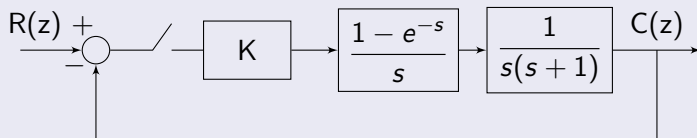
La estabilidad de un sistema como el anterior, se puede determinar por la localización de los polos, por las raíces de las ecuaciones (1) y (2). Condiciones:

- Los polos de (1) o las raíces de (2) deben estar en el círculo unitario en el plano z .
- Un polo en $z=1$ o si un par de polos conjugados se presentan sobre el círculo unitario, se determina al sistema como críticamente estable.
- Los ceros en lazo cerrado no afectan la estabilidad absoluta.

Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

Análisis de estabilidad en sistemas de lazo cerrado (III)

Ejemplo 1 [Ejercicio 4.2, [2]]



Determine la estabilidad del sistema de la figura cuando $K=1$, sabiendo que:

$$Z \{ G(s) \} = Z \left\{ \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \left(\frac{1}{s(s+1)} \right) \right\} = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z - 0.3679)(z - 1)} \quad (3)$$

Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

Análisis de estabilidad en sistemas de lazo cerrado (IV)

Solución:

$$P(z) = 1 + G(z) = 0, \quad (4)$$

$$P(z) = 1 + \frac{(0.3679z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z - 1)}, \quad (5)$$

$$z^2 - 1.3679z + 0.3679 + 0.3679z + 0.2642 = 0, \quad (6)$$

$$z^2 - z + 0.6321 = 0 \quad (7)$$

Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

Análisis de estabilidad en sistemas de lazo cerrado (V)

$$z_1 = 0.5 + 0.6181i$$

y

$$z_2 = 0.5 - 0.6181i,$$

$$|z_1| = |z_2| < 1, \quad (8)$$

El sistema es estable. ■

Métodos para probar la estabilidad absoluta

General

Existen 3 pruebas a las que se puede someter a la ecuación característica para determinar la estabilidad de un sistema:

- Método de Jury
- Transformación bilineal y criterio de Routh
- Método de Schur-Cohn

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (I)

Se define la ecuación característica:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (9)$$

$$\Rightarrow a_0 > 0$$

Tabla 1: Tabla para evaluar el criterio de Jury

Renglón	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	—
4	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	—
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0	—	—
6	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}	—	—
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	\dots	—	—	—
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	\dots	—	—	—
$2n-3$	q_2	q_1	q_0	\dots	—	—	—

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (II)

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (III)

Criterio de estabilidad de Jury

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (13)$$

$$\Rightarrow a_0 > 0$$

Es estable sí:

- $|a_n| < a_0$
- $P(z) \big|_{z=1} > 0$
- $P(z) \big|_{z=-1} \begin{cases} > 0, & \text{para } n \text{ par} \\ < 0, & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$
- $|b_{n-1}| > |b_0|, |c_{n-2}| > |c_0|, \dots, |q_2| > |q_0|$

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (IV)

Ejemplo 2: (Problema 4-4, [2])

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0 \quad (14)$$

Determine la estabilidad del sistema descrito por (a) utilizando el método de Jury

Solución:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1.2 \quad a_2 = 0.07 \quad a_3 = 0.3 \quad a_4 = 0.08 \quad (15)$$

1. $|-0.08| < 1$

2. $P(1) = (1)^4 - 1.2(1)^3 + 0.07(1)^2 + 0.3(1) - 0.08 \rightarrow P(1) = 0.09$

$$P(1) > 0$$

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (V)

3. n es par, por lo que $P(-1)$ debe ser mayor a 0:

$$P(-1) = (-1)^4 - 1.2(-1)^3 + 0.07(-1)^2 + 0.3(-1) - 0.08 \rightarrow P(-1) = 1.89$$
$$\therefore P(-1) > 0$$

4. Para este caso se deben calcular:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ 1 & -1.2 \end{vmatrix} = -0.204 \quad (16)$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.07 \\ 1 & 0.07 \end{vmatrix} = -0.0756 \quad (17)$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_1 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & -1.2 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix} = 1.176 \quad (18)$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & 1 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix} = -0.9936 \quad (19)$$

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (VI)

Así como:

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9936 & 1.176 \\ -0.204 & -0.0756 \end{vmatrix} = 0.3150 \quad (20)$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_0 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9936 & -0.204 \\ -0.204 & -0.9936 \end{vmatrix} = 0.9456 \quad (21)$$

Ahora se analiza:

$$\begin{aligned} |b_3| > |b_0| &\rightarrow |-0.9936| > |-0.204| \\ |c_2| > |c_0| &\rightarrow |0.9456| > |0.3150| \end{aligned}$$

∴ Estable



Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (VII)

Ejemplo 3: (Problema 4-5, [2])

$$P(z) = z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2 = 0 \quad (22)$$

Determine la estabilidad del sistema descrito por (b) utilizando el método de Jury

Solución:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1.1 \quad a_2 = -0.1 \quad a_3 = 0.2 \quad a_4 = 0.2 \quad (23)$$

1. $|0.2| < 1$

2. $P(1) = (1)^3 - 1.1(1)^2 - 0.1(1) + 0.2 \rightarrow P(1) = 0$

Ya que $P(1) = 0$, el sistema se define como críticamente estable, lo que no es deseable, y genera que se pueda detener el análisis en este punto.

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (VIII)

3. n es impar, por lo que $P(-1)$ debe ser menor a 0:

$$P(-1) = (-1)^3 - 1.1(-1)^2 - 0.1(-1) + 0.2 \rightarrow P(-1) = -1.8$$

$$\therefore P(-1) < 0$$

4. Para este caso se deben calcular:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 1 & -1.1 \end{vmatrix} = -0.12 \quad (24)$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 0.2 \end{vmatrix} = -0.96 \quad (25)$$

Ahora se analiza:

$$|b_2| > |b_0| \rightarrow |-0.96| > |-0.12|$$

\therefore Críticamente estable



Métodos para probar la estabilidad absoluta

Transformación bilineal y criterio de Routh (I)

$$z = \frac{w + 1}{w - 1} \quad (26)$$

o bien,

$$w = \frac{z + 1}{z - 1} \quad (27)$$

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (28)$$

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \dots + b_n \quad (29)$$

El proceso consiste en una sustitución de variables en la ecuación característica (28), la cual se transforma a (29) y es analizada con el criterio de estabilidad de Routh.

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Transformación bilineal y criterio de Routh (II)

Ejemplo 4: (Problema A-4-3, [2])

$$P(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24 = 0 \quad (30)$$

Determine si alguna de las raíces de la ecuación característica se encuentra fuera del círculo unitario del plano z . Utilice la transformación bilineal y criterio de estabilidad de Routh.

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Transformación bilineal y criterio de Routh (III)

Solución:

$$P(w) = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 1.3 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0.08 \left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0.24 = 0 \quad (31)$$

$$\frac{(w+1)^3 - 1.3(w+1)^2(w-1) - 0.08(w+1)(w-1)^2 + 0.24(w-1)^3}{(w-1)^3} = 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} &w^3 + 3w^2 + 3w + 1 - 1.3w^3 - 1.3w^2 + 1.3w + 1.3 + \dots \\ &- 0.08w^3 + 0.08w^2 + 0.08 - 0.08 + 0.24w^3 - 0.72w^2 + 0.72w - 0.24 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Transformación bilineal y criterio de Routh (IV)

$$-0.14w^3 + 1.06w^2 + 5.1w + 1.98 = 0 \quad (34)$$

$$\frac{-0.14w^3 + 1.06w^2 + 5.1w + 1.98}{-0.14} = 0 \quad (35)$$

Se divide entre -0.14 para simplificar la aplicación del criterio de Routh:

$$w^3 - 7.5714w^2 - 36.4286w - 14.1429 = 0 \quad (36)$$

Arreglo de Routh:

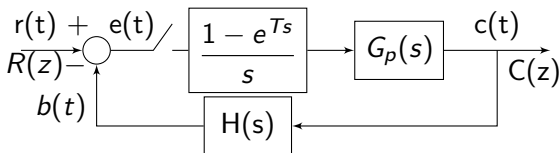
$$\begin{array}{ccc} w^3 & 1 & -36.43 \\ w^2 & -7.57 & -14.14 \\ w^1 & -38.30 & - \\ w^0 & -14.14 & \end{array}$$

Como se puede observar, hay un cambio de signo en las primeras filas, por lo que se determina como un sistema inestable.

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Clasificación de los sistemas de control (I)

Se clasifican según su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parábola.



La función de transferencia a lazo abierto, se define como:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} \quad (37)$$

$\Rightarrow s^N$:

En (37), este término representa un polo de multiplicidad N. Este valor N es el tipo de sistema. Es importante resaltar que al aumentar el número de tipo, la precisión aumenta, pero se compromete la estabilidad.

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (I)

El error de estado estacionario se define como el error después que se termina la respuesta transitoria del sistema. Se calcula por medio del teorema de valor final. Basándose en la figura anterior se obtiene:

$$GH(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{G_p(s)H(s)}{s} \right\} \quad (38)$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (39)$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \quad (40)$$

Finalmente, el error de estado estacionario se calcula como:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \right] \quad (41)$$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (II)

Como ya se mencionó, el tipo de entrada afecta el valor de error de estado estacionario y se procede al cálculo de las siguientes constantes:

- Constante de error de posición estática (Escalón unitario)

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \quad (42)$$

Con un error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (43)$$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (III)

- Constante de error de velocidad estática (Rampa unitaria)

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})GH(z)}{T} \quad (44)$$

Con un error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (45)$$

Un polo doble en $z=1$, indica una constante $K_v = \infty$.

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (IV)

- Constante de error de aceleración estática (Aceleración unitaria)

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 GH(z)}{T^2} \quad (46)$$

Con un error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (47)$$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (V)

Lo anterior se puede representar de la siguiente manera:

Tabla 2: Errores en estado permanente según el tipo de entrada

Sistema	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada de aceleración
Tipo 0	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (VI)

Ejemplo 5: (Ejercicio 16.4 [1])

Un algoritmo de control se usa en un sistema digital, el cual se muestra en la figura, y el cual se caracteriza la ecuación diferencial:

$$u(k) = u(k-1) + K_p e(k) - 0.9512 K_p e(k-1). \quad (48)$$

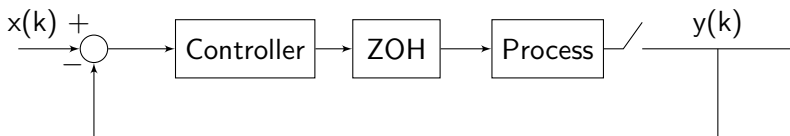
Además se da un tiempo de muestreo de $0.1s$, y la función de transferencia:

$$T_p(s) = \frac{0.25}{s+1} \quad (49)$$

Derive una expresión para el error de estado estacionario del sistema en respuesta a una entrada de rampa unitaria. Además, encuentre el valor del error de estado estacionario para el valor dado para la ganancia del controlador.

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (VII)



Busque la solución sabiendo que:

$$T_c(z) = K_p \frac{z - 0.9512}{z - 1} \quad (50)$$

$$T_p(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{0.25}{s(s+1)} \right] = \frac{0.0238}{z - 0.905} \quad (51)$$

$$T_{OL}(z) = T_c(z) T_p(z) = \frac{0.0238 K_p (z - 0.9512)}{(z - 1)(z - 0.905)} \quad (52)$$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (VIII)

Solución:

$$T_E = \frac{1}{1 + T_{OL}} = \frac{1}{1 + \frac{0.0238K_p(z - 0.9512)}{(z - 1)(z - 0.905)}} \quad (53)$$

$$T_E = \frac{1}{\frac{(z - 1)(z - 0.905) + 0.0238K_p(z - 0.905)}{(z - 1)(z - 0.905)}} \quad (54)$$

$$T_E = \frac{(z - 1)(z - 0.905)}{z^2 - z - 0.905z + 0.905 + 0.0238K_pz - 0.02264K_p} \quad (55)$$

$$T_E = \frac{(z - 1)(z - 0.905)}{z^2 + (0.0238K_p - 1.905)z + (0.905 - 0.2264K_p)} \quad (56)$$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (IX)

De T_E tenemos que la ecuación característica es:

$$EC : z^2 + (0.0238K_p - 1.905)z + (0.905 - 0.2264K_p) = 0 \quad (57)$$

Por medio de la transformación bilineal, se llega a la ecuación en términos de w :

$$\begin{aligned} (1 + 0.0238K_p - 1.905 + 0.905 - 0.02264K_p)w^2 + \dots \\ (2 - 1.81 + 0.04528K_p)w + \dots \\ +(1 - 0.0238K_p + 1.905 + 0.905 - 0.02264K_p) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

$$0.00116K_p w^2 + (0.19 + 0.04528K_p)w + (3.81 - 0.04644K_p) = 0 \quad (59)$$

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Error de estado estacionario (X)

Lo anterior, permite determinar el rango de K_p para asegurar la estabilidad del sistema en $-4.19 < K_p < 82.04$. Al conocer el valor máximo de K_p , se procede a calcular e_{ss} :

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1})T_{OL}(z)} \quad (60)$$

Sustituyendo los valores dados en (52) y el valor de T , para un valor máximo de $K_{p_{max}} = 82.04$ se obtiene:

$$e_{ss} = 0.1. \quad (61)$$



Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (I)

Un filtro digital es un algoritmo de cálculo que convierte una secuencia de números de entrada de una secuencia de salida, de modo que las características de la señal se cambien de manera predeterminada. Para este tema, se define una función de transferencia de entrada $X(z)$ y salida $Y(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_n z^{-n}} \quad (62)$$
$$\rightarrow n \geq m$$

En esta, los valores a_i y b_i generalmente son coeficientes reales. Los esquemas de diagramas de bloque en donde estos valores aparecen directamente como multiplicadores, se denominan estructuras directas.

Realización de controladores y filtros discretos

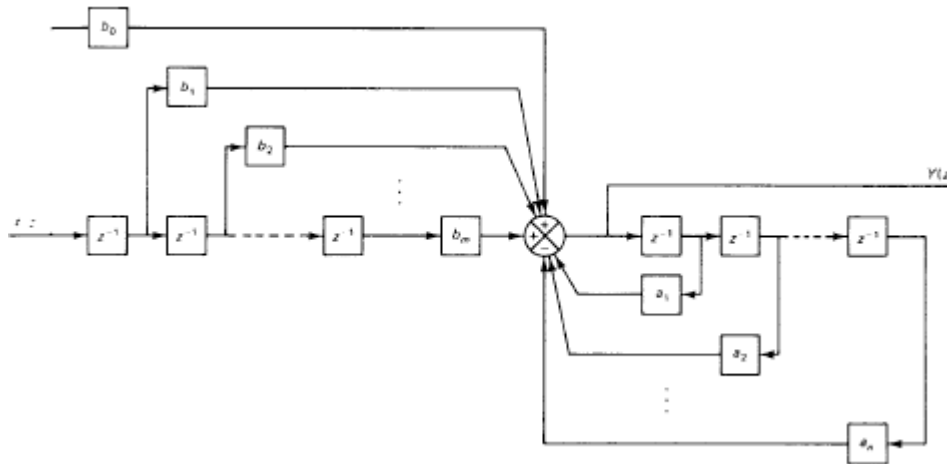
Definición y tipos de programación (II)

1. Programación directa: significa que se obtiene la realización del numerador y el denominador mediante conjuntos de elementos de retraso por separado, siendo el total de estos elementos $m + n$.

$$Y(z) = -a_1z^{-1}Y(z) - a_2z^{-2}Y(z) - \dots - a_nz^{-n}Y(z) + \dots \\ + b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + \dots + b_mz^{-m}X(z) \quad (63)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (III)



Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (IV)

2. Programación estándar: en este caso, se reduce el número de elementos de retraso a n . Para lograrlo se reacomoda la función de transferencia pulso de la siguiente manera:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)} \frac{H(z)}{X(z)} \quad (64)$$

Lo que se ve puede plantear como:

$$\frac{Y(z)}{H(z)} \frac{H(z)}{X(z)} = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (65)$$

A partir de (64) y (65), se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \dots + b_m z^{-m} H(z) \quad (66)$$

$$H(z) = X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \dots + a_n z^{-n} X(z) \quad (67)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (V)

Existen 3 fuentes de error que afectan la exactitud de un filtro:

- Ruido de cuatificación: el error se debe a la cuantificación de la señal de entrada en un número finito de niveles descritos.
- Redondeo: se da la acumulación de errores de redondeo en las operaciones aritméticas en el sistema digital.
- Cuantificación de coeficientes y función de transferencia pulso: este tipo de error se caracteriza por aumentar proporcional al aumento del orden de la función de transferencia pulso.

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (VI)

La inexactitud o sensibilidad de los coeficientes se evita utilizando los siguientes 3 enfoques:

1. Programación en serie: la función de transferencia pulso $G(z)$ se designa como una conexión en serie de la función de transferencia pulso de primer y segundo orden.

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) \dots G_p(z) \quad (68)$$

$$G(z) = \prod_{i=1}^j \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^p \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \quad (69)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (VII)

2. Programación en paralelo: en este caso se trabaja con una sumatoria de o expansión de fracciones parciales de $G(z)$.

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_p(z) \quad (70)$$

$$G(z) = A + \sum_{i=1}^j \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} + \sum_{i=j+1}^p \frac{e_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \quad (71)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (VIII)

3. Programación en escalera: se expande la función de transferencia pulso, tal que:

$$G(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{\dots A_{n+1} + \frac{1}{B_n + \frac{1}{A_n}}}}}} \quad (72)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (IX)

Lo anterior se puede representar con las ecuaciones:

$$G_i^{(B)}(z) = \frac{1}{B_i(z) + G_i^{(A)}(z)}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (73)$$

$$G_i^{(A)}(z) = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (74)$$

$$G_n^{(B)}(z) = \frac{1}{B_n(z) + \frac{1}{A_n}} \quad (75)$$

$$G(z) = A_0 + G_1^{(B)}(z) \quad (76)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (X)

Ejemplo 6: (Ejercicio 3-8 [2])

Obtenga los diagramas de bloques para la función de transferencia pulso del sistema, el cual es un filtro digital, mediante programación directa, estándar y en escalera.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \quad (77)$$

Realización de controladores y filtros discretos

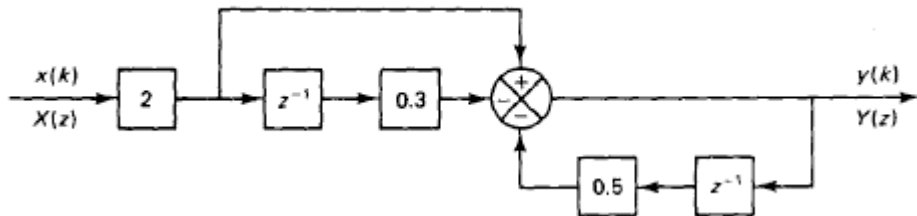
Definición y tipos de programación (XI)

Solución:

1. Directa: conociendo los valores dados por (77) y sustituyendo en (63), se obtiene:

$$Y(z) = -0.5z^{-1}Y(z) + 2X(z) - 0.6z^{-1}X(z) \quad (78)$$

Y gráficamente queda de la siguiente forma:



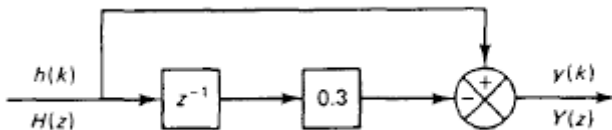
Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (XII)

2. Estándar: conociendo los valores dados por (77) y sustituyendo en (65),(66),(67), se obtiene:

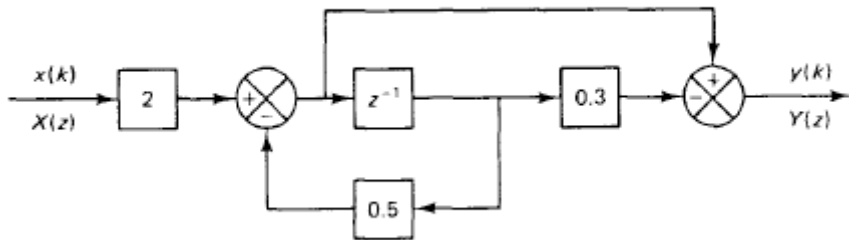
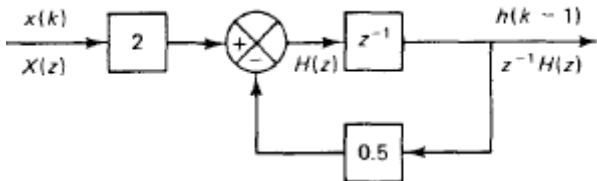
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - 0.3z^{-1}) \frac{2}{1 + 0.5z^{-1}} \quad (79)$$

Y gráficamente queda de la siguiente forma:



Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (XIII)



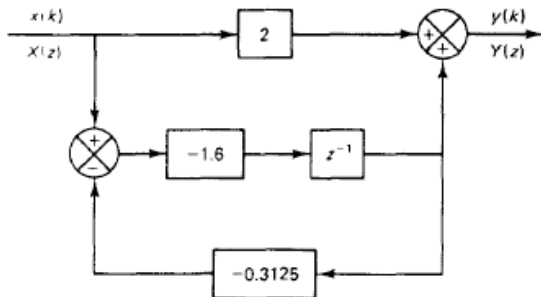
Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (XIV)

3. En escalera: conociendo los valores dados por (77) y sustituyendo en (72), se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z - 0.6}{z + 0.5} = 2 + \frac{-1.6}{z + 0.5} = 2 + \frac{1}{-0.625z + \frac{1}{-3.2}} \quad (80)$$

Y gráficamente queda de la siguiente forma:



Realización de controladores y filtros discretos

Clasificación de filtros (I)

Los filtros se pueden clasificar según su respuesta a una entrada de impulso de la siguiente manera:

- Filtro de respuesta infinita al impulso o filtro recursivo: se caracteriza porque aunque los coeficientes a_i sean de valores cercanos a 0, estos nunca son 0. Su naturaleza recursiva tiene la desventaja de que puede acumular errores de las salidas anteriores.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (81)$$
$$\rightarrow n \geq m$$

O bien,

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) + \dots + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m) \quad (82)$$

- Filtro de respuesta finita al impulso, no recursivo o de promedio móvil: la respuesta al impulso se limita a un número finito de muestras sobre un rango finito de intervalos de tiempo. Se reconoce debido a la ausencia de las a_i en el diagrama.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \quad (83)$$

O bien,

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m) \quad (84)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Realización de un filtro de respuesta finita al impulso (I)

La secuencia de la respuesta finita al impulso se define como $g(kT)$, donde la aplicación de una entrada $x(kT)$ al filtro, genera una salida $y(kT)$:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^k g(nT)x(kT - nT) \quad (85)$$

Al aumentar el valor de k , se debe limitar el número de valores anteriores de la entrada a procesar a N valores, tal que:

$$y(kT) = g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots + g(NT)x((k-N)T) \quad (86)$$

O bien,

$$Y(z) = g(0)X(z) + g(T)z^{-1}X(z) + \dots + g(NT)z^{-N}X(z) \quad (87)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Realización de un filtro de respuesta finita al impulso (II)

Características del filtro de respuesta finita al impulso

- Es no recursivo, por lo que se puede evitar la acumulación de errores.
- No requiere de alimentación (no recursivo), por lo que la programación directa y la estándar son iguales.
- Los polos de la función de transferencia pulso, están en el origen, por lo que siempre es estable.
- El uso de componentes de alta frecuencia incrementa el número de elementos de retraso necesarios, aumentando el tiempo de retardo.

Realización de controladores y filtros discretos

Realización de un filtro de respuesta finita al impulso (III)

Ejemplo 7: (Ejercicio 3-9 [2])

El filtro digital que se estudió en el ejemplo anterior es un filtro recursivo. Modifique este filtro y haga su realización como un filtro no recursivo. Luego obtenga la respuesta de este filtro no recursivo a una entrada delta de Kronecker

Realización de controladores y filtros discretos

Realización de un filtro de respuesta finita al impulso (IV)

Primero, se divide el numerador entre el denominador:

$$G(z) = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} G(z) = & 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + \dots \\ & + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} + \dots \end{aligned} \quad (89)$$

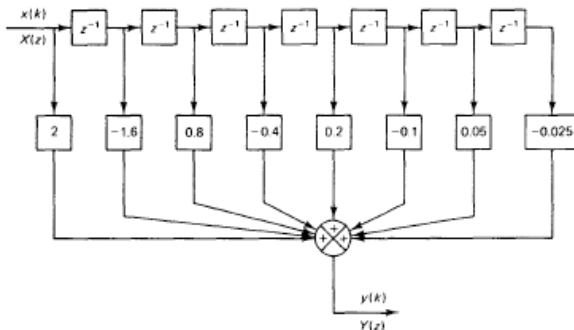
Se determina $N=7$, es decir, se trabaja con 7 valores previos.

Realización de controladores y filtros discretos

Realización de un filtro de respuesta finita al impulso (V)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} \quad (90)$$

Se determina $N=7$, es decir, se trabaja con 7 valores previos. Gráficamente se obtiene:



Realización de controladores y filtros discretos

Realización de un filtro de respuesta finita al impulso (VI)

El filtro digital descrito, es la transformada z de la secuencia de la respuesta al impulso, mientras que la transformada inversa da la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned} y(kT) = & 2x(kT) - 1.6x((k-1)T) + 0.8x((k-2)T) + \dots \\ & -0.4x((k-3)T) + 0.2x((k-4)T) - 0.1x((k-5)T) + \dots \\ & +0.05x((k-6)T) - 0.025x((k-7)T) \end{aligned} \quad (91)$$

En donde, para una entrada delta de Kronecker, con $x(0) = 1$ y $x(kT) = 0$, con k diferente de 0:

$$\begin{array}{llll} y(0) = 2 & y(T) = -1.6 & y(2T) = 0.8 & y(3T) = -0.4 \\ y(4T) = 0.2 & y(5T) = -0.1 & y(6T) = 0.05 & y(7T) = -0.025 \end{array}$$





B.T. Kulakowski, J.F. Gardner, and J.L. Shearer.
Dynamic modeling and control of engineering systems.
Cambridge University Press, EE.UU., 2007.



K. Ogata.
Sistemas de control en tiempo discreto.
Pearson educación, EE.UU., 1996.