Sistemas muestreados y control discreto

Tecnológico de Costa Rica (TEC)

February 11, 2016

Sistemas de control continuos

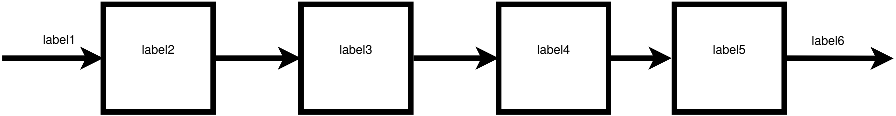
- Hasta ahora hemos supuesto sólo plantas y controladores continuos.
- En varios casos es recomendable utilizar controladores continuos, por ejemplo cuando se disponen sistemas de implementación hidráulicos, neumáticos o analógicos.
- Para sistemas con dinámicas muy rápidas podría ser recomendable (o incluso es la única opción) utilizar controles analógicos.

Sistemas de control discretos

- El bajo costo de los microcontroladores, microprocesadores y otros dispositivos programables ha potenciado el uso de controladores digitales.
- Además un control digital es más flexible que un control analógico.

TEC

Control digital



Componentes de un sistema de control digital

- El control digital implementado en un dispositivo programable (uC, PLC, PLD)
- Un elmento muestreador (convertidor analógico a digital (ADC))
- Un elemento que tome las señales generadas por el control digital y las procese de forma tal que puedan ser aplicadas al proceso físico (convertidor digital analógico (DAC))

TEC

Ecuaciones en diferencia

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1y(k+1)+a_0y_k = b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\ldots+b_1u(k+$$

- Describen sistemas dinámicos que cambian sólo en un instante de tiempo determinado, T, denominado periodo.

Ecuaciones en diferencia

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1y(k+1)+a_0y_k = b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\ldots+b_1u(k+$$

- Describen sistemas dinámicos que cambian sólo en un instante de tiempo determinado, T, denominado periodo.
- Utilizado para describir modelos económicos o inclusive modelos poblaciones.

Ejemplo 1: Modelado de poblaciones

Población de cuervos crece a una tasa de 4 % por año. Tome como x_0 como el tamaño inicial de la población de cuervos y x_n como la población de curvos los años siguientes.

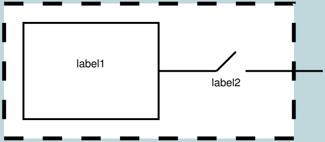
$$x_{n+1} = x_n + 0.04x_n = 1.05x_n$$

Ecuaciones en diferencia

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1y(k+1)+a_0y_k = b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\ldots+b_1u(k+$$

- Describen sistemas dinámicos que cambian sólo en un instante de tiempo determinado, T, denominado periodo.
- Utilizado para describir modelos económicos o inclusive modelos poblaciones.
- Utilizado para describir sistemas muestreados.

Ejemplo 2: Sistemas muestreados



Herramientas: Transformada Z

Definición

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}$$

Características

- Es un método operacional similar a la transformada de Laplace.
- Posee las mismas propiedades que la transformada de Laplace (linealidad, multiplicación por constante, etc).

Definición

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}$$

Características

- Es un método operacional similar a la transformada de Laplace.
- Posee las mismas propiedades que la transformada de Laplace (linealidad, multiplicación por constante, etc).

de Ec. en dif. a Transformada Z

- Ec. en dif.: $2x(k) + 2x(k-1) + x(k-2)$
- Transformada Z: $2X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$

Definición

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}$$

Características

- Es un método operacional similar a la transformada de Laplace.
- Posee las mismas propiedades que la transformada de Laplace (linealidad, multiplicación por constante, etc).

de Transf. Z a ec. en dif

- Transf. Z: $1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$
- Ec. en dif.: $x(k) + 2x(k-1) + 3x(k-3) + 4x(k-4)$

Definición

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}$$

Características

- Es un método operacional similar a la transformada de Laplace.
- Posee las mismas propiedades que la transformada de Laplace (linealidad, multiplicación por constante, etc).

Existen tablas de transformada Z para señales y funciones más complejas

Definición

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}$$

Características

- Es un método operacional similar a la transformada de Laplace.
- Posee las mismas propiedades que la transformada de Laplace (linealidad, multiplicación por constante, etc).

Teorema del valor final

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) X(z) \right]$$

TEC

Antes de seguir considerado los sistemas de control digitales, se introducirán algunas herramientas útiles para el análisis de sisemas discretos. Para ello se comparan con los sistemas continuos.

Sistemas Continuos

1. Tiempo continuo
2. Ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

3. Método operacional: Laplace

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

Sistemas Discreto

1. Tiempo discreto, definido por un período de muestreo T
2. Ecuaciones en diferencia

$$x(k) = a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2)$$

3. Método operacional: Transformada Z

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

Sistemas Continuos

1. Método operacional: Laplace

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

2. Ejemplo sist. cont. en Laplace

$$e^{-at} \rightarrow \frac{1}{s+a}$$

3. Sist. estable cuando func. trans. tiene polos en el semiplano izquierdo del plano s (Routh).

Sistemas Discreto

1. Método operacional: Transformada Z

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

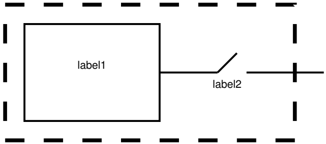
2. Ejemplo sist. discreto en Z

$$e^{-at} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

3. Sist. estable cuando func. trans. tiene polos dentro de un círculo unitario en el plano z (Jury).

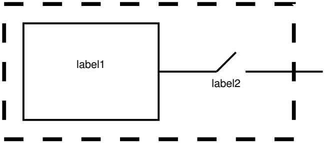
TEC

Muestreador



- En el caso en que se desee controlar un sistema continuo por medio de un sistema digital es necesario muestrearlo.
- Muestrear implica medir valores de interés de la planta a intervalos de tiempo específicos, definidos por un periodo T denominado periodo de muestreo.
- El sistema se verá afectado por la selección de T, este deberá ser escogido al menos 5 a 10 veces más pequeño que la constante de tiempo más pequeña del sistema estudiado.

Muestreador



La señal muestreada, $x^*(t)$ se puede derivar de la señal original $x(t)$ y un tren de impulso unitarios $\delta(t)$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

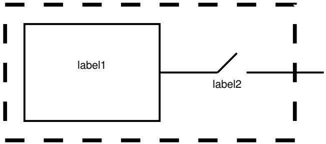
Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

y defininedo $z = e^{Ts}$ se llega a

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

Muestreador



Para un muestreador de impulsos se tiene que

$$X^*(s)\big|_{z=e^{sT}} = X(z)$$

Para efectos prácticos un muestreador de impulsos es imposible de implementar. El muestreador utilizado en la práctica tiene asociado un retenedor de orden cero (que se verá más adelante).

Para efectos de la implementación, un muestreador es una convertidor analógico digital. Tenga en cuenta que el ADC **cuantiza** las señales, efecto que puede tener consecuencias negativas en el sistema.

Reconstrucción de señales

- El controlador digital recibirá del muestreador señales discretas y cuantizadas,
- procesará dichas señales y generará una señal de control.
- Esta señal de control será también cuantizada y definida por una ecuación en diferencias,
- es decir, estará sólo definida en valores de tiempo múltiplos del tiempo de muestreo T.
- La planta continua necesita recibir una señal de control definida para todo t.

TEC

Retenedor de orden cero

- La forma más sencilla y común de obtener la señal de control para la planta es por medio de un retenedor de orden cero.
- El retenedor de orden cero interpola la secuencia generada por el control en una función tipo escalera, de forma tal que se tiene que para $0 \leq t < T$

$$x(kT + t) = x(kT)$$

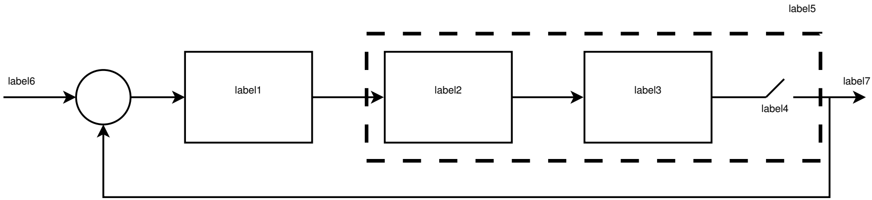
- La tranformada de Laplace de un retenedor de orden cero es

$$\frac{1 - e^{Ts}}{s}$$

- de esta forma se puede trasladar todo el sistema como un sistema continuo o discreto y realizar el análisis correspondiente.

TEC

Sistema de control digital + planta continua



El procedimiento general para diseñar el control digital es el siguiente

1. Transformar la planta (con su muestreador) al dominio de z

$$G_{\mathrm{p}}(z) = \mathcal{Z}\frac{1-e^{Ts}}{s}G_{\mathrm{p}}(s)$$

2. Diseñar el controlador en el dominio de z por las técnicas tradicionales (lugar de las raíces, frecuencia, ubicación de polos y ceros, etc).

También se podría diseñar el control en el dominio de s y luego discretizarlo para su implementación. En este caso es necesario que el tiempo de muestreo sea lo suficientemente pequeño (e.g., ¿ 10 veces menor que el tiempo de levantamiento del sistema) para que el control digital tenga un comportamiento similar al control continuo.

Procedimiento resumido

- Obtener la ecuación en diferencias de la función de transferencia en z del controlador diseñado,
- Representar la ecuación en diferencia de forma adecuada para el control,
- De ser necesario, utilizar alguna técnica de implementación para reducir el tiempo de cálculo.

Ejemplo Ilustrativo

Suponga el siguiente controlador

$$G_{\mathrm{c}}(z) = \frac{z+a}{z+b} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

Escribiendo en ec. de dif. se obtiene

$$u(k) = e(k) + ae(k-1) - bu(k-1)$$

De donde se puede obtener la señal de control u que se implementará.

Existen distintas técnicas para reducir el tiempo de cálculo tales como procesamiento paralelo o precálculo de operaciones.