Tecnológico de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Ingeniería Electrónica

EL-5408 Curso de Control Automático
I Semestre, 2016

Ejercicios y soluciones propuestos

por

Mauricio Muñoz Arias
Ludwin Valverde Jiménez
Rolando Esquivel Sancho
Karol Quirós Espinoza

Índice general

Capítulo 1

Introducción al control automático

Ejemplo 1 (Ejercicio 14.1, p.383, [1]) *La función de transferencia de lazo abierto de un sistema esta dada por*

$$\boldsymbol{T}_{OL} = \frac{K}{(s+5)(s+2)^2}.$$

Determine el rango de K para que el sistema de lazo cerrado cumpla las siguientes condiciones: a. El error de estado estable para un escalón unitario sea menor al 10 % de la señal de entrada, y b. El sistema sea estable.

Solución 1 (del Ejemplo 1) *a. Para obtener el error en estado estacionario, con una entrada escalón debe resolverse de la siguiente forma*

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s + sT_{OL}(s)}. \tag{1.1}$$

Conociendo que la función de transferencia de lazo abierto es

$$\boldsymbol{T}_{OL} = \frac{K}{(s+5)(s+2)^2}, \tag{1.2}$$

se precede a substituir (1.2) *en* (1.1)*. Entonces, se obtiene*

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} \frac{s(s+5)(s+2)^2}{s(k+(s+5)(s+2)^2)} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{(s+5)(s+2)^2}{k+(s+5)(s+2)^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Seguidamente se evalúa el límite de (1.3)*. De esta forma e_{ss} depende de K de la siguiente forma*

$$e_{ss} = \frac{20}{20+K}. \tag{1.4}$$

En el enunciado se solicita que el error de estado estacionario debe ser menor al 10 %. Para lograr esto se procede a resolver las siguientes inecuaciones

$$\frac{20}{20+K} < 0{,}1 \tag{1.5}$$

$$200 < 20 + K. \tag{1.6}$$

Basados en (1.5) *y* (1.6) *se concluye que*

$$K > 180. \tag{1.7}$$

b. *Para la segunda condición, se debe obtener la ecuación característica del sistema y verificar que sus raíces sean reales. Se selecciona entonces el denominador de la siguiente función de transferencia a lazo cerrado,*

$$T_{CL} = \frac{T_{OL}}{1+T_{OL}}, \tag{1.8}$$

y se obtiene que

$$\begin{aligned} 1+T_{OL} =&(s+5)(s+2)^2+k \\ =&(s+5)(s^2+4s+4)+k \\ =&s^3+4s^2+4s+5s^2+20s+20+k \\ =&s^3+9s^2+24s+20+k. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Se verifica que todas las raíces de (1.9) *sean reales. Entonces se aplica el criterio de Routh-Hurwitz de la siguiente forma,*

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 24 \\ s^2 & 9 & 20+k \\ s^1 & \dfrac{196-k}{9} & 0 \\ s^0 & 20+k. & \end{array} \tag{1.10}$$

Para que todas las raíces de (1.9) *sean reales, es necesario que la segunda columna de la matriz* (1.10) *sea positiva, i.e.,*

$$\frac{196-K}{9} >0 \tag{1.11}$$

$$196-K >0 \tag{1.12}$$

Basados ahora en (1.11) *y* (1.12) *se obtiene que*

$$K < 196. \tag{1.13}$$

Finalmente para cumplir las dos condiciones solicitadas en el problema se hace uso de los resultados preliminares (1.7) *y* (1.13)*. Por lo tanto, el rango de K para que se cumplan ambas es*

$$180 < k < 196. \tag{1.14}$$

■

Ejemplo 2 (Ejercicio 14.5, p.385, [1]) *La función de transferencia de un sistema de lazo abierto es la mostrada en la siguiente ecuación.*

$$T_{OL}(s) = \frac{k}{s^2(s\tau+1)}. \tag{1.15}$$

Encuentre el error de estado estacionario en el sistema de lazo abierto sometido a la entrada $u(t) = t^2$. Exprese el Error de estado estacionario en términos del coeficiente de error de la aceleración estática K_a, definido como en la ecuación siguiente.

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 T_{OL}(s). \tag{1.16}$$

Solución 2 (del Ejemplo 2) *Basado en las ecuaciones* (1.15) *y* (1.16) *del Ejemplo 2, obtenemos la solución mostrada a continación. La función de tranferencia de la entrada corresponde a:*

$$\begin{aligned} T_E(s) =& \frac{1}{1 + T_{OL}(s)} \\ =& \frac{s^2(\tau s + 1)}{s^2(\tau s + 1) + k}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

El error de estado estacionario es:

$$\begin{aligned} e_{ss} =& \lim_{s\to 0} sU(s)\,T_E(s) \\ =& \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s^3}\frac{s^2(\tau s + 1)}{s^2(\tau s + 1) + k} \\ =& \frac{2}{k}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

El coeficiente de error de la aceleración estática para este sistema es:

$$\begin{aligned} K_a =& \lim_{s\to 0} s^2 T_{OL}(s) \\ =& k. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Por lo tanto, el error estacionario corresponde a:

$$e_{ss} = \frac{2}{K_a}. \tag{1.20}$$

■

Ejemplo 3 (Libre adaptación del ejercicio 14.7, p.385, [1]) *El sistema retroalimentado de la Figura 1.1 presenta una planta $P(s)$ dada por*

$$P(s) = \frac{K_a}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)} \tag{1.21}$$

donde

$$K_a = \frac{K}{\tau_1 \tau_2} \tag{1.22}$$

con $K > 0$, $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 > 0$. Además, el sistema presenta una retroalimentación $H(s)$, y controladores $C(s) = C_{PD}(s)$ y $C(s) = C_{PID}(s)$, tal que,

$$H(s) = 1 \tag{1.23}$$

$$C_{PD}(s) = K_P + K_D s \tag{1.24}$$

$$C_{PID}(s) = K_P + K_D s + K_i \frac{1}{s} \tag{1.25}$$

respectivamente, y con las ganancias $K_P > 0$, $K_D > 0$ y $K_i > 0$. Compare entre controladores $C_{PD}(s)$ y $C_{PID}(s)$,

1. *La razón de amortiguamiento ("damping coefficient") para el sistema de lazo cerrado.*

2. *El error de estado estacionario para la función de transferencia vista desde la entrada, es decir,*

$$T_E = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{E(s)}{U(s)} \tag{1.26}$$

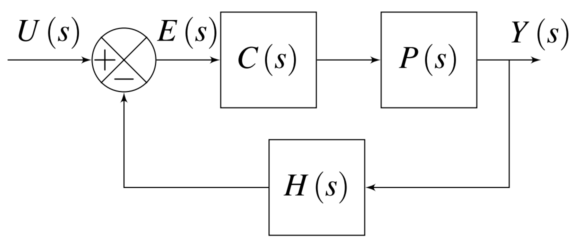

Figura 1.1: Sistema retroalimentado del Ejemplo 3.

Solución 3 (del Ejemplo 3) *1. Basado en el sistema retroalimentado de la Figura 1.1 con $H(s) = 1$, obtenemos una función de transferencia tal que*

$$\frac{T(s)}{U(s)} = \frac{K_a C(s)}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) + K_a C(s)} \tag{1.27}$$

Si substituimos $C(s)$ de (1.27) por $C_{PD}(s)$ de (1.24), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{T(s)}{U(s)} &= \frac{K_a C_{PD}(s)}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) + K_a C_{PD}(s)} \\ &= \frac{K_a (K_P + K_D s)}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) + K_a (K_P + K_D s)} \\ &= \frac{K_a (K_P + K_D s)}{s^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + K_a K_D\right) s + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} + K_a K_D}\end{aligned} \tag{1.28}$$

Basados en (1.28)*, obtenemos un polinomio característico* $p(s)$*, tal que*

$$\begin{aligned} p(s) =& s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \\ =& s^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + K_a K_D\right) s + \frac{1}{\tau_1\tau_2} + K_a K_P \end{aligned} \tag{1.29}$$

donde finalmente la razón de amortiguamiento ζ *está dada por*

$$\begin{aligned} \zeta =& \frac{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + K_a K_D}{2\sqrt{\frac{1}{\tau_1\tau_2} + K_a K_P}} \\ =& \frac{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \left(\frac{K}{\tau_1\tau_2}\right) K_D}{2\sqrt{\frac{1}{\tau_1\tau_2} + \left(\frac{K}{\tau_1\tau_2}\right) K_P}} \\ =& \frac{\tau_1 + \tau_2 + K K_D}{2\sqrt{\tau_1\tau_2\left(1 + K K_P\right)}} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Si ahora reemplazamos el controlador $C(s)$ *en* (1.27) *por* $C_{PID}(s)$ *en* (1.25)*, obtenemos un lazo cerrado de la siguiente forma,*

$$\begin{aligned} \frac{T(s)}{U(s)} =& \frac{K_a C_{PID}(s)}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) + K_a C_{PID}(s)} \\ =& \frac{K_a\left(K_P + K_D s + K_i \frac{1}{s}\right)}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) + K_a\left(K_P + K_D s + K_i \frac{1}{s}\right)} \\ =& \frac{K_a K_D s^2 + K_P K_a s + K_a K_i}{s^3 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + K_a K_D\right) s^2 + \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2} + K_a K_P\right) s + K_a K_i} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Claramente el sistema de lazo de cerrado en (1.31) *posee un polinomio característico de orden tres. Por esta razón, no se puede comparar una razón de amortiguamiento con el sistema de lazo cerrado del sistema* (1.28)*.* [1]

2. *Dada una función de transferencia vista desde la entrada, es decir,* $T_E(s)$*, con un controlador PD en* (1.24) *y una planta* (1.21)*, se procede a calcular el error de estado estacionario* e_{SS}*, ante un*

[1] Una forma de analizar un sistema de orden tres, es reescribiendo su polinomio característico de la siguiente forma: $(s+\alpha)\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\right)$ y analizando la influencia del polo en α que esté más cercano al origen. Sin embargo, este método está fuera del alcance de este ejercicio.

escalón unitario, es decir, $U(s) = \frac{1}{s}$*. Entonces se obtiene,*

$$\begin{aligned}
e_{SS_{PD}} &= \lim_{t\to\infty} e_{PD}(t) \\
&= \lim_{s\to 0} sE_{PD}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sU(s)\, T_{E_{PD}}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s} T_{E_{PD}}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} T_{E_{PD}}(s) \qquad (1.32)\\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + C_{PD}(s)\, P(s)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + (K_P + K_D s)\dfrac{K_a}{\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}} \\
&= \frac{1}{1+K_P K} \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

Basados en (1.33) *y dado que* $K > 0$ *y* $K_P > 0$*, se concluye que el* $e_{SS_{PD}}$ *se acerca a cero conforme se aumente la ganancia de la parte proporcional, es decir,* K_P*, y sin influencia de la ganancia del controlador derivativo, i.e.,* K_D*.*

Ahora, una función de transferencia vista desde la entrada con un controlador PID en (1.25) *genera un error de estado estacionario dado por*

$$\begin{aligned}
e_{SS_{PID}} &= \lim_{t\to\infty} e_{PID}(t) \\
&= \lim_{s\to 0} sE_{PID}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sU(s)\, T_{E_{PID}}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s} T_{E_{PID}}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} T_{E_{PID}}(s) \qquad (1.34)\\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + C_{PID}(s)\, P(s)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \left(K_P + K_D s + K_i\frac{1}{s}\right)\dfrac{K_a}{\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}} \\
&= 0 \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

El resultado anterior demuestra el hecho de que un sistema retroalimentado con $H(s) = 1$ *con un controlador PID en serie con la planta, genera un error de estado estable igual a cero gracias a la acción integral.*

■

Ejemplo 4 (Ejercicio B-5-9, p.265, [3]) *Considere el sistema de la Figura 1.2.Determine el valor de k de modo que el factor de amortiguamiento ξ sea 0.5. Después obtenga el tiempo de subida t_r, el tiempo pico t_p, la sobreelongación máxima M_p y el tiempo de asentamiento t_s en la respuesta escalón unitario.*

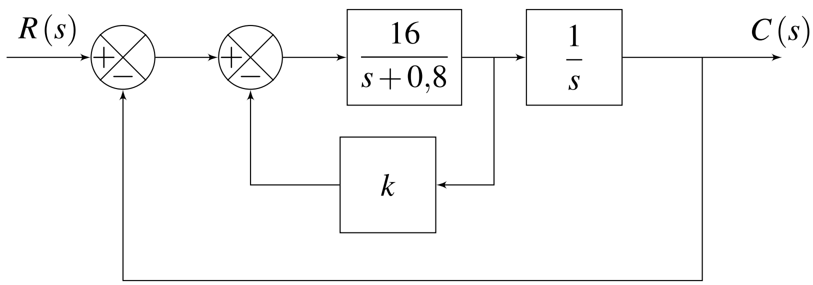

Figura 1.2: Diagrama de bloques del sistema.

Solución 4 (del Ejemplo 4) *De la Figura 1.2 se determina la función de transferencia de lazo cerrado de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \\ &= \frac{\dfrac{16}{(s+0{,}8+16k)\,s}}{1+\dfrac{16}{(s+0{,}8+16k)\,s}} \\ &= \frac{16}{s^2+(0{,}8+16k)\,s+16}\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{1.37}$$

Utilizando la forma estándar de un sistema de segundo orden (1.37) *y con* (1.36) *se determina del polinomio característico:*

$$\omega_n = 4 \tag{1.38}$$

$$2\xi\omega_n = 0{,}8+16k \tag{1.39}$$

Sustituyendo el valor ξ y de ω_n en (1.39) *, se obtiene el valor de k de la siguiente forma:*

$$2\cdot 0{,}5\cdot 4 = 0{,}8+16k \tag{1.40}$$

$$k = 0{,}2 \tag{1.41}$$

El tiempo de subida t_r se obtiene por:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{1.42}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \omega_d =& \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ &= 4\sqrt{1-0{,}5^2} \\ &= 3{,}46 \end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned} \beta =& \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} \\ =& \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\xi\omega_n} \\ =& \tan^{-1}\frac{3{,}46}{0{,}5\cdot 4} \\ &= 1{,}047 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Sustituyendo (1.43) *y* (1.44) *en* (1.42)*, se obtiene:*

$$\begin{aligned} t_r =& \frac{\pi - 1{,}047}{3{,}46} \\ &= 0{,}605s \end{aligned} \tag{1.45}$$

El tiempo pico corresponde a:

$$\begin{aligned} t_p =& \frac{\pi}{\omega_d} \\ =& \frac{\pi}{3{,}46} \\ &= 0{,}907s \end{aligned} \tag{1.46}$$

La sobreelongación máxima M_p es:

$$\begin{aligned} M_p &= e^{-\frac{\xi\cdot\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\ &= e^{-\frac{0{,}5\cdot\pi}{\sqrt{1-0{,}5^2}}} \\ &= 0{,}163 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Por último, el tiempo de asentamiento t_s es:

$$\begin{aligned} t_s =& \frac{4}{\xi\omega_n} \\ =& \frac{4}{0{,}5\cdot 4} \\ &= 2s \end{aligned} \tag{1.48}$$

■

Ejemplo 5 (Ejercicio B-5-12, p.265, [3]) *Obtenga de forma analíntica y de forma computacional el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento como respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo cerrado dado por*

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{36}{s^2+2s+36} \tag{1.49}$$

Solución 5 (del Ejemplo 5) *De* (1.49) *se determina:*

$$\omega_n = 6 \tag{1.50}$$

$$2\xi\omega_n = 2 \tag{1.51}$$

De manera que,

$$\xi = \frac{1}{6} \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= 6\sqrt{1-\frac{1}{6}^2} \\ &= \sqrt{35} \\ &= 5{,}916 \end{aligned} \tag{1.53}$$

El tiempo de subida t_r se obtiene:

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \tag{1.54}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \beta &= \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} \\ &= \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\xi\omega_n} \\ &= \tan^{-1}\frac{5{,}916}{\frac{1}{6}\cdot 6} \\ &= 1{,}403rad \end{aligned} \tag{1.55}$$

Sustituyendo (1.53) *y* (1.55) *en* (1.54)*, se obtiene:*

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{\pi-1{,}403}{5{,}916} \\ &= 0{,}294s \end{aligned} \tag{1.56}$$

El tiempo pico se determina como:

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{\pi}{\omega_d} \\ &= \frac{\pi}{5{,}916} \\ &= 0{,}531s \end{aligned} \tag{1.57}$$

La sobreelongación máxima M_p esla siguiente:

$$
\begin{aligned}
M_p &= e^{-\frac{\xi\cdot\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
&= e^{-\frac{\frac{1}{6}\cdot\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{6}^2}}} \\
&= 0{,}588
\end{aligned} \tag{1.58}
$$

Por último, el tiempo de asentamiento t_s utilizando el criterio del 2 % es:

$$
\begin{aligned}
t_s &= \frac{4}{\xi\omega_n} \\
&= \frac{4}{\frac{1}{6}\cdot 6} \\
&= 4s
\end{aligned} \tag{1.59}
$$

■

Ejemplo 6 (Ejercicio B-5-19, p.267, [3]) *Considere la ecuación diferencial de un sistema dada por*

$$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=0, \quad y(0)=0{,}1, \quad \dot{y}(0)=0{,}05 \tag{1.60}$$

Obtenga la respuesta $y(t)$, sujeta a la condición inicial dada.

Solución 6 (del Ejemplo 6) *Aplicando la transformada de Laplace a* (1.60) *se obtiene:*

$$s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=0 \tag{1.61}$$

Así, sustituyendo las condiciones iniciales en (1.61) *obtenemos*

$$
\begin{aligned}
s^2Y(s)-0{,}1s-0{,}05+3[sY(s)-0{,}1]+2Y(s)&=0 \\
s^2Y(s)-0{,}1s-0{,}05+3sY(s)-0{,}3+2Y(s)&=0 \\
Y(s)\left[s^2+3s+2\right]&=0{,}1s+0{,}35
\end{aligned} \tag{1.62}
$$

Resolviendo (1.62) *para Y(s), obtenemos*

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{0{,}1s+0{,}35}{s^2+3s+2} \\
&= \frac{0{,}1s+0{,}35}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{0{,}25}{(s+1)}-\frac{0{,}15}{(s+2)}
\end{aligned} \tag{1.63}
$$

Ahora, aplicando la transformada invesa de Laplace a (1.63) *finalmente se obtiene*

$$y(t)=0{,}25\mathrm{e}^{-t}-0{,}15\mathrm{e}^{-2t} \tag{1.64}$$

■

Ejemplo 7 (Ejercicio B-5-20, p.267, [3]) *Determine el rango de valores de K para la estabilidad de un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es*

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{1.65}$$

Solución 7 (del Ejemplo 7) *Utilizando* (1.65) *se obtiene la siguiente función de tranferencia en lazo cerrado:*

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}\\ &= \frac{\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}\\ &= \frac{K}{s(s+1)(s+2)+K}\\ &= \frac{K}{s^3+3s^2+2s+K}\end{aligned} \tag{1.66}$$

A partir de (1.66) *se obtiene la siguiente ecuación característica:*

$$s^3+3s^2+2s+K=0 \tag{1.67}$$

Ahora, utilizando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se determinar el rango de valores de K para los cuales el sistema es estable.

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s & \frac{6-K}{3} & 0 \\ 1 & K & \end{array} \tag{1.68}$$

Finalmente mediante el análisis en (1.68) *se concluye que todas las raices de* (1.67) *sean reales se debe cumplir:*

$$0 < K < 6 \tag{1.69}$$

■

Ejemplo 8 (Ejercicio B-5-21, p.267, [3]) *Considere el siguiente polinomio que representa la ecuación característica de un sistema lineal:*

$$s^4+2s^3+(4+K)s^2+9s+25=0. \tag{1.70}$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Routh, determine el rango de estabilidad de K.

Solución 8 (del Ejemplo 8) *Basados en el polinomio de* (1.70), *determinamos el arreglo de coeficientes de Routh de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{lccc} s^4 & 1 & 4+K & 25 \\ s^3 & 2 & 9 & 0 \\ s^2 & \left(\dfrac{2K-1}{2}\right) & 25 & \\ s^1 & \left(\dfrac{18K-109}{2K-1}\right) & 0 & \\ s^0 & 25. & & \end{array} \tag{1.71}$$

Por tanto, para que el sistema sea estable se requiere que las siguientes condiciones se cumplan:

$$\frac{2K-1}{2} > 0 \tag{1.72}$$

$$\frac{18K-109}{2K-1} > 0. \tag{1.73}$$

Finalmente, de (1.72) *y* (1.73) *se obtiene que K debe tener un valor en el rango de:*

$$K > \frac{109}{18} \approx 6{,}056 \tag{1.74}$$

■

Ejemplo 9 (Ejercicio B-5-22, p.267, [3]) *Considere el sistema en lazo cerrado que se muestra en la Figura 1.3. Determine el rango de estabilidad para K. Suponga que $K > 0$ y $H(s) = 1$.*

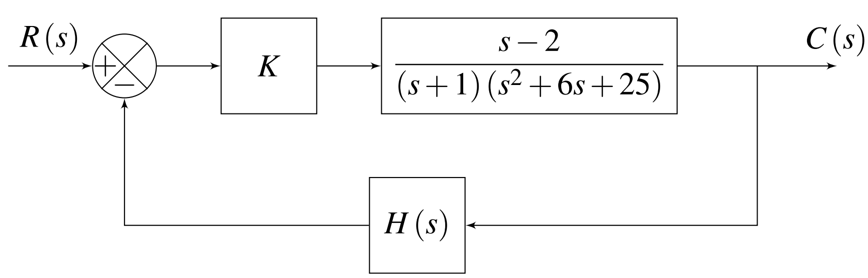

Figura 1.3: Sistema de lazo cerrado.

Solución 9 (del Ejemplo 9) *Basado en la Figura 1.3 se obtiene la siguiente función de tranferencia en* *lazo cerrado:*

$$\begin{aligned}
\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} \\
&= \frac{\dfrac{K(s-2)}{(s+1)(s^2+6s+25)}}{1+\dfrac{K(s-2)}{(s+1)(s^2+6s+25)}} \\
&= \frac{K(s-2)}{(s+1)(s^2+6s+25)+K(s-2)} \\
&= \frac{K(s-2)}{s^3+7s^2+(31+k)s+25-2K}
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Ahora, a partir de (1.75) *se obtiene de la ecuación característica:*

$$s^3+7s^2+(31+k)s+25-2K=0 \tag{1.76}$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se determina el rango de valores de K para los cuales el sistema es estable.

$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 31+K \\
s^2 & 7 & 25-2K \\
s & \dfrac{192-9K}{7} & 0 \\
1 & 25-2K &
\end{array} \tag{1.77}$$

Finalmente se concluye que todas las raices de (1.76) *son reales y* $K>0$ *si*

$$0<K<12{,}5 \tag{1.78}$$

■

Ejemplo 10 (Ejercicio B-5-23, p.267, [3]) *Considere que el sistema de la Figura 1.4 representa un control de altitud de satélites. La salida de este sistema ofrece constantes oscilaciones no deseadas. El sistema puede ser estabilizado mediante el uso de realimentación tacométrica, como se muestra en la Figura 1.5. Si* $\dfrac{K}{J}=4$*, ¿que valor de* K_h *llevará a que el coeficiente de amortiguamiento relativo 0.6?*

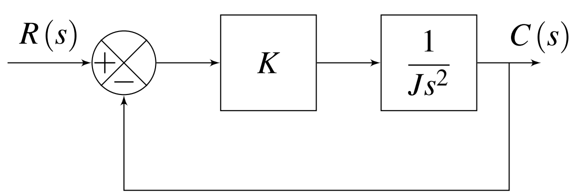

Figura 1.4: Sistema de control de altura del Ejemplo 10.

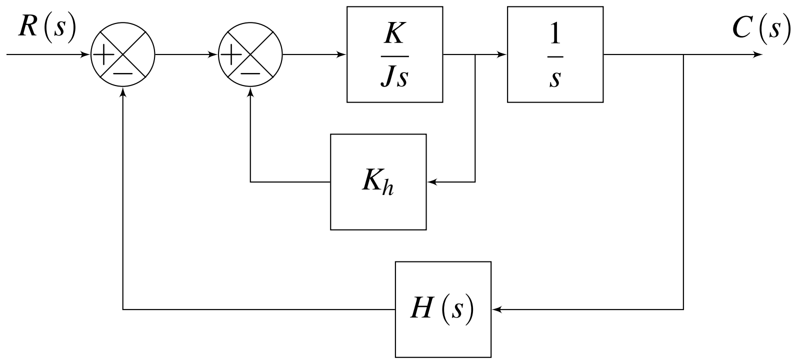

Figura 1.5: Sistema realimentación tacométrica.

Solución 10 (del Ejemplo 10) *1. Basadose en el sistema retroalimentado de la Figura 1.4 , se obtiene una función de transferencia tal que*

$$
\begin{aligned}
\frac{C(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{K}{Js^2}}{1+\frac{K}{Js^2}} \\
&= \frac{K}{Js^2\left(1+\frac{K}{Js^2}\right)} \\
&= \frac{K}{Js^2+K}
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

Al tomar el sistema estabilizado de la Figura 1.5, se obtiene del lazo interno la siguiente función de transferencia

$$
\begin{aligned}
\frac{Out(s)}{In(s)} &= \frac{\frac{K}{Js}}{1+\frac{KK_h}{Js}} \\
&= \frac{K}{Js+KK_h}
\end{aligned}
\tag{1.80}
$$

Sustituyendo el lazo interno por la función de transferencia en (1.80)*, y obteniendo una nueva* *función de transferencia total*

$$\begin{aligned}
\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\dfrac{K}{s(Js+KK_h)}}{1+\dfrac{K}{s(Js+KK_h)}} \\
&= \frac{\dfrac{K}{Js^2+KK_hs}}{1+\dfrac{K}{Js^2+KK_hs}} \\
&= \frac{K}{Js^2+KK_hs+K} \qquad (1.81)
\end{aligned}$$

Conociendo del enunciado que $\dfrac{K}{J}=4$ *y se solicita que* $\zeta=0{,}6$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\dfrac{K}{J}}{s^2+K_h\dfrac{K}{J}s+\dfrac{K}{J}} \\
&= \frac{4}{s^2+4K_hs+4} \qquad (1.82)
\end{aligned}$$

Teniendo como ecuación característica

$$s^2+4K_hs+4 \qquad (1.83)$$

Y dado que la ecuación característica de un sistema de segundo orden se puede definir como

$$s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2 \qquad (1.84)$$

Al comparar (1.83) *y* (1.84)*, se obtienen las siguientes igualdades*

$$\omega_n=2 \qquad (1.85)$$

$$2\zeta\omega_n=4K_h \qquad (1.86)$$

Por lo que al sustituir los valores en (1.86) *se obtiene*

$$\begin{aligned}
2*2*0{,}6 &= 4K_h \\
K_h &= 0{,}6 \qquad (1.87)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 11 (Libre adaptación del ejercicio B-5-24, p.268 [3]) *Considere el servosistema con realimentación tacométrica y* $H(s)=1$ *que se muestra en la Figura 1.5. En lugar de la planta y compensador* $C(s)=\dfrac{K}{Js}$*, se considera una planta y compensador tal que:*

$$C(s)=\frac{20K}{(s+1)(s+4)} \qquad (1.88)$$

Determine entonces los rangos de estabilidad para K *y* K_h*, con* $K_h>0$*.*

Solución 11 (del Ejemplo 1.88) *De la Figura 1.5 se obtiene el sistema a lazo cerrado, i.e.,*

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20K}{s^3+5s^2+(4+20KK_h)s+20K} \tag{1.89}$$

La estabilidad del sistema entonces se determina mediante el denominador de (1.89). *Este es el polinomio característico cuyo arreglo de Routh se calcula como:*

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 4+20KK_h \\ s^2 & 5 & 20K \\ s^1 & 4+20KK_h-4K & 0 \\ s^0 & 20K. & \end{array} \tag{1.90}$$

Para obtener estabilidad en el lazo cerrado se requiere que:

$$\begin{aligned} 4+20KK_h-4K &> 0 \\ 20K &> 0, \end{aligned} \tag{1.91}$$

es decir,

$$\begin{aligned} K_h &> \frac{K-1}{5K} \\ K &> 0. \end{aligned} \tag{1.92}$$

■

Ejemplo 12 (Ejercicio B-5-26, p.268, [3]) *Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo cerrado*

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ks+b}{s^2+as+b}$$

Determine la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$.

Demuestre que el error en estado estacionario en la respuesta rampa unitaria se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{K_e} = \frac{a-K}{b}$$

Solución 12 (del Ejemplo 12) *1. Tomando del enunciado la función de transferencia de lazo cerrado*

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ks+b}{s^2+as+b} \tag{1.93}$$

Y conociendo que una función de transferencia de lazo cerrado se obtiene de forma general como

$$\boldsymbol{T}_{CL} = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} \tag{1.94}$$

Al tener realimentación unitaria (1.94) *se transforma en*

$$\boldsymbol{T}_{CL} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \tag{1.95}$$

Al igualar (1.93) *y* (1.95) *se puede despejar la función de transferencia de lazo abierto de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ks+b}{s^2+as+b} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ G(s)\left(s^2+as+b\right) =&(ks+b)(1+G(s)) \\ G(s)\left(s^2+as+b\right) =&(ks+b)+G(s)(ks+b) \\ G(s)\left(\left(s^2+as+b\right)-(ks+b)\right) =&(ks+b) \end{aligned} \tag{1.96}$$

Al despejar $G(s)$ de (1.96) *se obtiene*

$$G(s) = \frac{Ks+b}{s^2+(a-k)s} \tag{1.97}$$

2. *Para obtener el error en estado estacionario se aplica la formula*

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)} \tag{1.98}$$

Sustituyendo (1.97) *en* (1.98) *se obtiene el siguiente despeje*

$$\begin{aligned} e_{ss} =& \lim_{s\to 0} \frac{s^2+(a-k)s}{s(ks+b)} \\ =& \lim_{s\to 0} \frac{s(s+(a-k))}{s(ks+b)} \\ =& \lim_{s\to 0} \frac{s+(a-k)}{ks+b} \end{aligned} \tag{1.99}$$

Evaluando el limite en (1.99) *se obtiene ya el valor de e_{ss} de la siguiente forma*

$$e_{ss} = \frac{a-k}{b} \tag{1.100}$$

Como se puede observar, el resultado de (1.100) *es el mismo que se solicitaba en el enunciado.*

■

Capítulo 2

Introducción a los sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 13 (Ejercicio 15.2 p. 408, [1]) *Seleccione la frecuencia de muestreo para un sistema de adquisición de datos digital para la medición de la velocidad v de masa m en el sistema mecánico considerado en el Ejemplo 4.1. Los parámetros mecánicos del sistema son $m = 5kg$ y $b = 2Ns/m$.*

Solución 13 (del Ejemplo 13) *Del Ejemplo 4.1, p.90 [1], se obtiene la ecuación de entrada-salida del sistema mecánico, la cual se muestra a continuación:*

$$mv_{1g} + bv_{1g} = F(t), \tag{2.1}$$

Al sustituir los valores brindados de m y b, se obtiene:

$$5v_{1g} + 2v_{1g} = F(t), \tag{2.2}$$

La función de transferencia del sistema corresponde a :

$$\begin{aligned} T(s) =& \frac{V_{1g}(s)}{F(s)} \\ =& \frac{1}{5s+2}. \\ =& \frac{0,5}{2,5s+1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Expresando (2.3) *en términos de $j\omega$ se obtiene:*

$$T(j\omega) = \frac{0,5}{2,5j\omega+1}, \tag{2.4}$$

El ancho de banda del sistema se determina mediante la frecuencia de ruptura de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \omega_b =& \frac{2\pi}{2,5} \\ =& 2,5rad/s \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ahora bien, la frecuencia de muestreo debe ser mayor a dos veces la frecuencia de ruptura, o también mayor a 5 rad/s esto según el Teorema de Shannon, ver ecuación (15.27), p.398 [1]. Seleccionando un factor de por ejemplo 10, se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_s &= 10\omega_b \\ &= 25rad/s \end{aligned} \tag{2.6}$$

■

Ejemplo 14 (Libre adaptación del ejercicio 15.6 p. 408, [1]) *Obtenga la transformada z de las secuencias $x(k)$ discritas a continuacion.*

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k \leqslant 1 \\ 0{,}5, & k = 2 \\ 1, & k \geqslant 3 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ e^{0{,}5k} + U_s(k-2), & k \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Solución 14 (del Ejercicio 14) *Al comparar* (2.7) *en la serie infinita*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \tag{2.9}$$

Se obtiene la transformada z en forma de secuencia,

$$X(z) = 0{,}5z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots \tag{2.10}$$

Ahora, utilizando las propiedades de la Tabla 2-2 en [2] se tiene que:

$$X(z) = 0{,}5z^{-2} + \frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}} \tag{2.11}$$

Reacomodando los terminos finalmente se obtiene la transformada z de (2.7)*,*

$$X(z) = 0{,}5\frac{z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}} \tag{2.12}$$

Ahora, utilizando la Tabla 2-1 y Tabla 2-2 de [2], se obtiene la transformada z de (2.8)*,*

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{0{,}5} z^{-1}} + z^{-2} U_s(z) \tag{2.13}$$

. ■

Ejemplo 15 (Ejercicio 15.7, p. 408, [1]) *Encuentre la respuesta a un escalón del sistema con función de transferencia*

$$T(z) = \frac{z+1}{z^2 - 1{,}1z + 0{,}28}. \tag{2.14}$$

Verifique la solución por medio del teorema del valor final.

Solución 15 (del Ejemplo 15) *Para iniciar la solución del problema, se debe conocer que*

$$Z\{u(t)\} = \frac{z}{z-1}. \tag{2.15}$$

Al multiplicar (2.15) *con* (2.14)*, se obtiene el comportamiento del sistema ante una entrada escalón, el cual es*

$$\begin{aligned} Y(z) =& \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-1{,}1z+0{,}28)} \\ =& \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0{,}7)(z-0{,}4)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Expresando (2.16) *como* $Y(z)/z$ *se procede a realizar la expansión en fracciones parciales*

$$Y(z)/z = \frac{z+1}{(z-1)(z-0{,}7)(z-0{,}4)} \tag{2.17}$$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}7} + \frac{C}{z-0{,}4}. \tag{2.18}$$

Seguidamente se obtienen los valores de A, B, y C por el siguiente método

$$A = \frac{z+1}{(z-0{,}7)(z-0{,}4)}|_{z\to 1} = 11{,}11 \tag{2.19}$$

$$B = \frac{z+1}{(z-1)(z-0{,}4)}|_{z\to 0{,}7} = -18{,}88 \tag{2.20}$$

$$C = \frac{z+1}{(z-0{,}7)(z-1)}|_{z\to 0{,}4} = 7{,}77 \tag{2.21}$$

Luego de sustituir en (2.18) *los valores de* (2.19), (2.20) *y* (2.21)*, y multiplicando por z, se obtiene*

$$Y(z) = \frac{11{,}11z}{z-1} - \frac{18{,}88z}{z-0{,}7} + \frac{7{,}77z}{z-0{,}4}. \tag{2.22}$$

Aplicando la transformada inversa directa se llega a

$$y(k) = 11{,}11 - 18{,}88(0{,}7)^k + 7{,}77(0{,}4)^k \tag{2.23}$$

Finalmente aplicando el teorema del valor final a (2.23)*, se verifica que*

$$y_{ss} = \lim_{k\to \text{ínf}} y(k) = 11{,}11 \tag{2.24}$$

$$Y_{ss} = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = 11{,}11 \tag{2.25}$$

■

Ejemplo 16 *(Ejercicio 15.8, p.409, [1]) Una secuencia de ponderación de un sistema linear discreto se midió en instantes igualmente espaciados en el tiempo y los resultados se muestran en la Tabla 2.1. Luego del tiempo* $10T$*, la señal en la salida fue cero. Encuentre entonces la respuesta de este sistema ante una función escalón* $U_s(k)$ *en la frecuencia compleja.*

Time	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$	$9T$	$10T$
$w(kT)$	1,0	0,5	0,25	0,125	0,063	0,031	0,016	0,008	0,004	0,002	0,001

Tabla 2.1: Secuencia de ponderación del Ejemplo 16

Solución 16 (del Ejemplo 16) *De los valores de la Tabla 2.1, se observa que la secuencia se puede describir matemáticamente por*

$$w(kT) = 0{,}5^k. \tag{2.26}$$

Por tanto, la función de transferencia de (2.26) *se calcula con la Transformada z, i.e.,*

$$X(z) = Z\{w(k)\} = \frac{z}{z-0{,}5}. \tag{2.27}$$

Finalmente, la salida del sistema ante una función escalón en el dominio de la frecuencia compleja se calcula como

$$Y(z) = U(z)\,T(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{z}{z-0{,}5}\right) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)} \tag{2.28}$$

■

Ejemplo 17 *(Ejercicio B-2-1, p.70, [2]) Obtenga la transformada z de:*

$$X(t) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right), \tag{2.29}$$

donde a es una constante.

Solución 17 (del Ejemplo 17) *Para obtener la transformada z de* (2.29)*, se procede de la siguiente manera,*

$$X(z) = Z\left[\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)\right]. \tag{2.30}$$

De acuerdo con la Tabla 2-1 [2], se tiene lo siguiente:

$$X(z) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right). \tag{2.31}$$

Finalmente, simplificando (2.30) *se obtiene el siguiente resultado:*

$$X(z) = \frac{1}{a}\left(\frac{z^{-1}\left(1-e^{-aT}\right)}{(1-z^{-1})\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)}\right). \tag{2.32}$$

■

Ejemplo 18 (Ejercicio B-2-4, p.71, [2]) *Obtenga la transformada z de la siguiente $x(k)$:*

$$x(k) = 9k(2^{k-1}) - 2^k + 3, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.33}$$

Suponga que $x(k) = 0$ para $k < 0$.

Solución 18 (del Ejemplo 18) *A partir de la Tabla 2-1 en [2] se tiene que la transformada z de* (2.33) *es:*

$$X(z) = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-2z^{-1}} \tag{2.34}$$

Ahora multiplicando y reacomodando los términos en (2.34)*, finalmente se obtiene:*

$$X(z) = \frac{2+z^{-2}}{(1-2z^{-1})^2(1-z^{-1})}. \tag{2.35}$$

■

Ejemplo 19 (Ejercicio B-2-5, p.71, [2]) *Encuentre la transformada z de la siguiente expresión*

$$x(k) = \sum_{h=0}^{k} a^h. \tag{2.36}$$

Solución 19 (del Ejemplo 19) *Para el cálculo de la transformada z del sistema en 2.36, se necesita los resultados del Ejercicio A-2-4, p. 56, [2]. Es decir, la transformada z de 2.36 se obtiene directamente como:*

$$Z\left[\sum_{h=0}^{k} a^h\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \tag{2.37}$$

donde

$$X(z) = Z\left[a^h\right] = \frac{1}{1-az^{-1}}. \tag{2.38}$$

Entonces cuando se substituye (2.38) *en* (2.37)*, se obtiene:*

$$Z\left[\sum_{h=0}^{k} a^h\right] = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right). \tag{2.39}$$

■

Ejemplo 20 (Libre adaptación del ejercicio B-2-9, p. 72, [2]) *Encuentre la transformada z inversa de*

$$X(z) = \frac{z^{-1}(0{,}5-z^{-1})}{(1-0{,}5z^{-1})(1-0{,}8z^{-1})^2}. \tag{2.40}$$

Utilice el método de fracciones parciales.

Solución 20 (del Ejemplo 20) *Para poder realizar la separación en fracciones parciales, primero se debe obtener* $X(z)$ *en términos de z con exponentes positivos, para ello se debe multiplicar* $\frac{z^2}{z^2}$ *a* (2.40)*, de lo cual se obtiene*

$$X(z) = \frac{z(0{,}5z-1)}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)^2}. \tag{2.41}$$

A continuación, se debe transformar (2.41) *en la forma* $\frac{X(z)}{z}$*, dando como resultado*

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(0{,}5z-1)}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)^2}. \tag{2.42}$$

Luego de obtener (2.42)*, se procede a la expansión en fracciones parciales de la siguiente forma*

$$\frac{(0{,}5z-1}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)^2} = \frac{A}{(z-0{,}5)} + \frac{B}{(z-0{,}8)} + \frac{C}{(z-0{,}8)^2}. \tag{2.43}$$

Para la obtención de los valores de A y de C en (2.43)*, debe realizarse lo siguiente*

$$A = \frac{(0{,}5z-1)}{(z-0{,}8)^2}|_{z\to 0{,}5} = -8{,}333. \tag{2.44}$$

$$C = \frac{(0{,}5z-1)}{(z-0{,}5)}|_{z\to 0{,}8} = -2. \tag{2.45}$$

Para la obtención de B, al ser un polo repetido, se debe realizar otro tipo de procedimiento

$$B = \frac{d}{dz}\left(\frac{0{,}5z-1}{z-0{,}5}\right)|_{z\to 0{,}8} = 8{,}333. \tag{2.46}$$

Al sustituir en (2.43) *los valores obtenidos de* (2.44)*,* (2.45) *y* (2.46)*, se obtiene la siguiente expansión en fracciones parciales de* (2.42)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-8{,}33}{(z-0{,}5)} + \frac{8{,}33}{(z-0{,}8)} - \frac{2}{(z-0{,}8)^2}. \tag{2.47}$$

Finalmente al multiplicar z en (2.47)*, y utilizar la tabla de transformada z, se obtiene que*

$$X(k) = -8{,}33(0{,}5)^k + 8{,}33(0{,}8)^k + 2k(0{,}8)^{k-1}. \tag{2.48}$$

■

Ejemplo 21 *(Ejercicio B-2-10, p.72, [2]) Dada la transformada z:*

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1{,}3z^{-1}+0{,}4z^{-2})}, \tag{2.49}$$

determine los valores inicial y final de $x(k)$*. También encuentre* $x(k)$*, la transformada z inversa de* $X(z)$*, en una forma cerrada.*

Solución 21 (del Ejemplo 21) *Para el cálculo del valor inicial, i.e.* $x(0)$*, se procede de la siguiente forma,*

$$\begin{aligned} x(0) &= \lim_{z\to\infty} X(z) \\ &= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1{,}3z^{-1}+0{,}4z^{-1})}, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Por otro lado, el valor final se calcula como:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x(k) =& \lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right]\\ =& \lim_{z\to 1}\frac{z^{-1}}{(1+1{,}3z^{-1}+0{,}4z^{-1})}\\ \approx& 0{,}370.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Ahora reescribimos (2.49) *en fracciones parciales, tal que:*

$$\begin{aligned}X(z) =& \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1{,}3z^{-1}+0{,}4z^{-1})}\\ =& \frac{z^2}{(z-1)(z+0{,}8)(z+0{,}5)}\\ =& \frac{1}{2{,}7}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{4z}{z+0{,}8}+\frac{3z}{z+0{,}5}\right).\end{aligned} \tag{2.52}$$

Basados finalmente en las fracciones parciales de (2.52)*, se procede a calcular su transformada inversa directa z. Es decir,* $x(k)$ *se obtiene como:*

$$x(k) = \frac{1}{2{,}7}\left[1-4(-0{,}8)^k+3(-0{,}5)^k\right] \tag{2.53}$$

■

Ejemplo 22 (Libre adaptación del ejercicio B-2-16, p. 73, [2]) *Encuentre la solución de la siguiente ecuación en diferencias:*

$$x(k+2)-1{,}3x(k+1)+0{,}4x(k) = u(k), \tag{2.54}$$

donde $x(0) = x(1) = 0$ *y* $x(k) = 0$ *para* $k < 0$*. Para la función de entrada* $u(k)$*, considere los siguientes dos casos:*

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,\ldots \\ 0, & k < 0 \end{cases} \tag{2.55}$$

y,

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 \\ u(k) &= 0, \quad k \neq 0 \end{aligned}. \tag{2.56}$$

Solución 22 (del Ejemplo 22) *Para la solución de la ecuación de diferencias* (2.54)*, se dispone a resolver el primer caso* (2.55)*. Utilizando la Tabla 2-3 [2], se tiene la siguiente transformada z:*

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)-1{,}3zX(z)-1{,}3zx(0)+0{,}4zX(z) = U(z). \tag{2.57}$$

Teniendo que $x(0) = x(1) = 0$*, y* $x(k) = 0$ *para* $k < 0$*, se obtiene lo siguiente:*

$$z^2X(z)-1{,}3zX(z)+0{,}4zX(z) = U(z). \tag{2.58}$$

Dadas a las características de la entrada $u(k)$ *consideradas en el primer caso, se tiene que esta corresponde a una función escalón que expresada en el dominio z en* (2.58)*, se obtiene:*

$$z^2X(z)-1{,}3zX(z)+0{,}4zX(z) = \frac{z}{z-1}, \tag{2.59}$$

Simplificando (2.59) *se tiene:*

$$\begin{aligned} X(z) =& \frac{z}{(z-1)(z^2-1{,}3z+0{,}4)} \\ =& \frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)(z-0{,}8)}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

Seguidamente, se realiza la expansin en fracciones parciales, como se muestra a continuacin:

$$\frac{1}{(z-1)(z-0{,}5)(z-0{,}8)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-0{,}5)} + \frac{C}{(z-0{,}8)}, \tag{2.61}$$

Al obtener los valores correspondientes de A, B, y C; y multiplicando por z se obtiene lo siguiente forma:

$$X(z) = \frac{-16{,}666z}{(z-1)} + \frac{6{,}666z}{(z-0{,}5)} + \frac{10z}{(z-0{,}8)}, \tag{2.62}$$

Finalmente, mediante la utilización de la Tabla de transformada z, se obtiene la transformada inversa de (2.67)*, utilizando la siguiente propiedad:*

$$x_k = a^k = \frac{z}{z-a} \tag{2.63}$$

Con (2.63)*, se obtiene:*

$$x(k) = -16{,}666(0{,}8^k) + 6{,}666(0{,}5)^k + 10, \quad para\ k = 0,1,2,... \tag{2.64}$$

Para el caso 2 (2.56)*, se tiene que la entrada* $u(k)$ *es una función impulso, de manera que:*

$$\begin{aligned} X(z)\left(z^2-1{,}3z+0{,}4\right) =& U(z) \\ =& 1 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Expresando (2.65) *de la siguiente manera:*

$$X(z) = \frac{1}{z^2-1{,}3z+0{,}4}, \tag{2.66}$$

Seguidamente, se realiza la expansin en fracciones parciales :

$$\frac{1}{z^2-1{,}3z+0{,}4} = \frac{A}{(z-0{,}5)} + \frac{B}{(z-0{,}8)}, \tag{2.67}$$

Al obtener los valores correspondientes de A y B se obtiene lo siguiente:

$$X(z) = \frac{3{,}3333}{(z-0{,}8)} - \frac{3{,}3333}{(z-0{,}5)}, \tag{2.68}$$

Finalmente, mediante la utilización de la Tabla de transformada z, se obtiene la transformada inversa de (2.68)*, utilizando la siguiente propiedad:*

$$x_k = a^k = \frac{z}{z-a} \tag{2.69}$$

Con (2.69) *y dado a que* $x(0) = 0$*, se tiene:*

$$x(k) = 3{,}3333(0{,}8)^{k-1} - 3{,}3333(0{,}5)^{k-1}, \quad para\ k = 1,2,3,... \tag{2.70}$$

■

Ejemplo 23 (Libre adaptación del ejercicio B-2-17, p. 73, [2]) *Resuelva la siguiente ecuación en diferencias de forma analítica*

$$x(k+2) - x(k+1) + 0{,}25x(k) = u(k+2) \tag{2.71}$$

donde $x(0) = 1$ *y* $x(1) = 2$ *para* $k < 0$*. La función de entrada* $u(k)$ *esta dada por*

$$u(k) = 1, k = 0, 1, 2, ... \tag{2.72}$$

Solución 23 (del Ejemplo 23) *Para la solución de una ecuación de diferencias, se debe tener claro que*

$$x(k+a) = z^a X(z). \tag{2.73}$$

Aplicando (2.73) *en* (2.71) *y simplificando el resultado, se obtiene lo siguiente*

$$X(z)\left(z^2 - z + 0{,}25\right) = \frac{z^3}{z-1}. \tag{2.74}$$

Para obtener la transformada inversa de (2.74)*, se debe expresar la ecuación en la forma* $X(z)/z$ *mediante el siguiente proceso*

$$\begin{aligned} X(z) =& \frac{z^3}{(z^2 - z + 0{,}25)(z-1)} \\ =& \frac{z^3}{(z-1)(z-0{,}5)^2} \\ \frac{X(z)}{z} =& \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)^2}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Seguidamente se procede a expandir (2.75) *en fracciones parciales*

$$\frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5^2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}5} + \frac{C}{(z-0{,}5)^2}, \tag{2.76}$$

obteniendo los valores de A, B, y C de forma tradicional

$$A = \frac{z^2}{(z-0{,}5)^2}|_{z\to 1} = 4 \tag{2.77}$$

$$B = \frac{d}{dz}\frac{z^2}{z-1}|_{z\to 0{,}5} = -3 \tag{2.78}$$

$$C = \frac{z^2}{z-1}|_{z\to 0{,}5} = -0{,}5. \tag{2.79}$$

Sustituyendo en (2.75) *los valores de* (2.77)*,* (2.78) *y* (2.79) *y multiplicando por z, se obtiene la siguiente expresión*

$$X(z) = \frac{4z}{z-1} - \frac{3z}{z-0{,}5} - \frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)^2} \tag{2.80}$$

Finalmente, mediante la utilización de una tabla de transformada z, se obtiene la transformada inversa de (2.80)*, dando como resultado*

$$x(k) = 4 - 3(0{,}5)^k - 0{,}5k(0{,}5)^{k-1} \tag{2.81}$$

■

Ejemplo 24 (Libre adaptación del ejercicio B-2-18, p.73, [2]) *Considere la ecuación en diferencias:*

$$x(k+2) - 1{,}3679x(k+1) + 0{,}3679x(k) = 0{,}3679u(k+1) + 0{,}2642u(k) \tag{2.82}$$

donde $x(k) = 0$ *para* $k \leqslant 0$*. La entrada* $u(k)$ *está dada por*

$$\begin{aligned} &u(k) = 0, \quad k < 0 \\ &u(0) = 1{,}5820 \\ &u(1) = -0{,}5820 \\ &u(k) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned} \tag{2.83}$$

Determine la salida $x(k)$*.*

Solución 24 (del Ejemplo 24) *A partir de la Tabla 2-2 en [2] se tiene que la transformada z de* (2.82) *es:*

$$\begin{aligned} z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 1{,}3679[zX(z) - zx(0)] + 0{,}3679X(z) = \\ 0{,}3679[zU(z) - zu(0)] + 0{,}2642U(z) \end{aligned} \tag{2.84}$$

Ahora, sustituyendo las condiciones de (2.83) *en* (2.84)*, se obtiene:*

$$\left(z^2 - 1{,}3679z + 0{,}3679\right)X(z) = (0{,}3679z + 0{,}2642)U(z) \tag{2.85}$$

Reacomodando los términos de (2.85) *se tiene:*

$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{0{,}3679z^{-1} + 0{,}2642z^{-2}}{1 - 1{,}3679z^{-1} + 0{,}3679z^{-2}} \tag{2.86}$$

Además a partir de las condiciones presentadas en (2.83) *se describe la forma de* $U(z)$ *como:*

$$U(z) = 1{,}5820 - 0{,}5820z^{-1} \tag{2.87}$$

Si sustituimos (2.87) *en* (2.86) *se obtiene:*

$$X(z) = \frac{0{,}5820z^{-1} + 0{,}2038z^{-2} - 0{,}1538z^{-3}}{1 - 1{,}3679z^{-1} + 0{,}3679z^{-2}} \tag{2.88}$$

Posteriormente se factoriza (2.88) *por divisón sintética, como se presenta a continuación:*

$$\begin{array}{r|l} & 0{,}5820z^{-1} + 0{,}9999z^{-2} + z^{-3} \ldots \\ \hline 1 - 1{,}3679z^{-1} + 0{,}3679z^{-2} & 0{,}5820z^{-1} + 0{,}2038z^{-2} - 0{,}1538z^{-3} \\ & -0{,}5820z^{-1} + 0{,}7961z^{-2} - 0{,}2141z^{-3} \\ \cline{2-2} & 0{,}9999z^{-2} - 0{,}3679z^{-3} \\ & -0{,}9999z^{-2} + 1{,}3679z^{-3} + 0{,}3679z^{-4} \\ \cline{2-2} & 1z^{-3} \quad + \quad 0{,}3679z^{-4} \end{array} \tag{2.89}$$

obteniendo como resultado la expansión:

$$X(z) = 0{,}5820z^{-1} + 0{,}9999z^{-2} + z^{-3} \ldots \tag{2.90}$$

Ahora, comparando (2.90) *con la serie infinita*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \tag{2.91}$$

se obtiene finalmente la salida $x(k)$*:*

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 0{,}5820 \\ x(2) &= 0{,}9999 \\ x(k) &= 1, \quad k = 3,4,5,\ldots \end{aligned} \tag{2.92}$$

■

Ejemplo 25 (del Ejercicio B-3-1, p. 166, [2]) *Muestre que el circuito que se muestra en la Figura 2.1 actúa como un retenedor de orden cero. Donde*

$$R_i << R_O$$

.

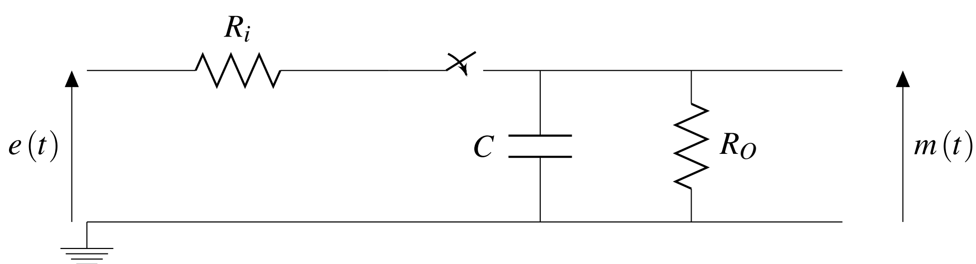

Figura 2.1: Circuito RC para el Ejemplo 25

Solución 25 (del Ejemplo 25) *Inicialmente se considera el switch como cerrado, y se simplifica el circuito de la Figura 2.1 en el dominio s, transformando el paralelo de* R_O *y* C *en una sola impedancia equivalente* R_{eq}

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{1}{Cs + \dfrac{1}{R_O}} \\ &= \frac{R_O}{1 + R_O Cs}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Seguidamente, se obtiene la función de transferencia del sistema equivalente de dos impedancias en serie de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{M(s)}{E(s)} &= \frac{\dfrac{R_O}{1 + R_O Cs}}{\dfrac{Ro}{1 + R_O Cs} + R_i} \\ &= \frac{R_O}{R_O + R_i + R_O R_i Cs}. \end{aligned} \tag{2.94}$$

A continuación se simplifica (2.94) *convenientemente de la siguiente forma*

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{R_O}{R_O(1+R_iCs)+R_i}. \tag{2.95}$$

Tomando la condición del enunciado, (2.95) *se transforma en*

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1}{1+RiCs}, \tag{2.96}$$

de donde se observa que la constante de carga del sistema es R_iC; debido al valor pequeño de R_i, el capacitor se carga con el valor de la entrada de forma casi inmediata.
Al abrir el switch, el sistema se transforma en el paralelo de R_O y C, al tener R_O un valor mucho mayor que R_i, el capacitor se descarga a una velocidad muy inferior a la que se cargo, por lo que el sistema al cerrar nuevamente el switch, tendrá un valor de carga muy similar al valor de la entrada, demostrando así el comportamiento de un retenedor. ■

Ejemplo 26 (Ejercicio B-3-2, p.166, [2]) *Considere el circuito que se muestra en la Figura 2.2. Obtenga una ecuación de diferencias que describa la dinámica del sistema cuando el voltaje de entrada aplicado es una constante seccionalmente continua, i.e.,*

$$e(t) = e(kT), \quad kT \leqslant t < (k+t)T. \tag{2.97}$$

Puede obtener primero una ecuación diferencial y luego discretizarla para obtener una ecuación de diferencias.

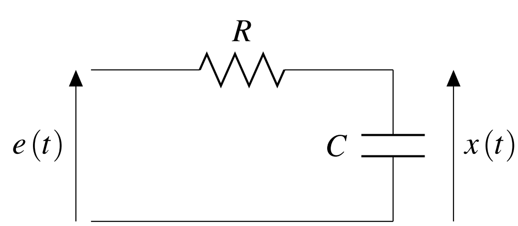

Figura 2.2: Circuito RC para el Ejemplo 26

Solución 26 (del Ejemplo 26) *Para el circuito de la Figura 2.2, se obtiene primero la ecuación diferencial*

$$RC\dot{x}(t) + x(t) = e(t), \tag{2.98}$$

para el rango $kT \leqslant t < (k+t)T$, con $e(t) = e(kT)$ constante. Entonces, se tiene que

$$RC\dot{x}(t) + x(t) = e(kT), \quad kT \leqslant t < (k+t)T. \tag{2.99}$$

Se calcula ahora la transformada de Laplace de (2.99) *de forma que*

$$RC[sX(s) - x(kT)] + X(s) = \frac{e(kT)}{s}, \tag{2.100}$$

y de (2.100) *obtenemos* $X(s)$ *en términos de* $e(kT)$, $x(kT)$, *R y C. Es decir,*

$$X(s)=\frac{1}{RCs+1}\left[\frac{e(kT)}{s}+RCx(kT)\right]=\frac{e(kT)}{s}+\frac{RC[x(kT)-e(kT)]}{RCs+1}. \tag{2.101}$$

Además, la transformada inversa de Laplace aplicada a (2.101) *genera el voltaje de entrada* $x(t)$, *i.e.,*

$$x(t)=e(kT)+[x(kT)-e(kT)]e^{-\frac{1}{RC}(t-kT)}, \quad kT\leqslant t<(k+1)T. \tag{2.102}$$

Si finalmente se sustituye el límite superior de la condición para intervalo de tiempo, i.e., $t=(k+1)T$ *en* (2.102)*, se obtiene la ecuación de diferencias deseada:*

$$x((x+1)T)=e(kT)+[x(kT)-e(kT)]e^{-\frac{T}{RC}}. \tag{2.103}$$

Nota: En (2.102) *y* (2.103)*, no confundir el voltaje discreto de entrada* $e(kT)$ *con la función exponencial e.* ■

Ejemplo 27 (Ejercicio B-3-15, p. 168, [2]) *Obtenga la función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema que se muestra en la Figura 2.3.*

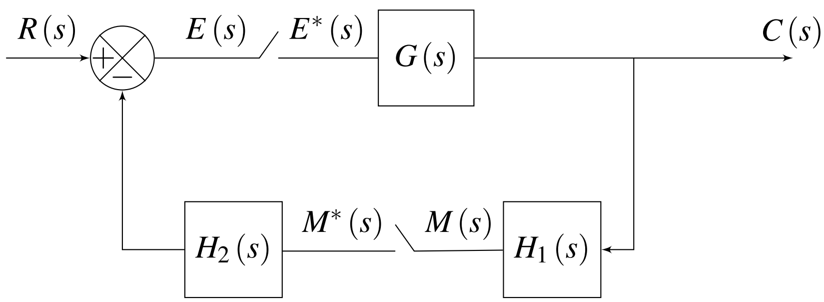

Figura 2.3: Sistema de control en tiempo discreto

Solución 27 (del Ejemplo 27) *Para el sistema mostrado en la Figura 2.3 se tiene:*

$$\begin{aligned} C(s)&=G(s)E^*(s)\\ E(s)&=R(s)-H_2(s)M^*(s)\\ M(s)&=H_1(s)G(s)E^*(s). \end{aligned} \tag{2.104}$$

Es importante mencionar que las señales asterisco representan señales muestreadas mediante impulsos, para obtener funciones de transferencia pulso y analizar el sistema de control discreto se requiere hacer los sistemas periódicos bajo la operación de la transformada de Laplace asterisco, como referencia se puede consultar p.103, [2]. Aplicando la transformada de Laplace asterisco en (2.104) *se obtiene:*

$$\begin{aligned} C^*(s)&=G^*(s)E^*(s)\\ E^*(s)&=R^*(s)-H_2^*(s)M^*(s)\\ M(s)&=H_1^*(s)G^*(s)E^*(s) \end{aligned} \tag{2.105}$$

Despejando $E^*(s)$:

$$
\begin{aligned}
E^*(s) &= R^*(s) - H_2^*(s)H_1^*(s)G^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{R^*(s)}{1 + H_2^*(s)H_1^*(s)G^*(s)}
\end{aligned} \tag{2.106}
$$

Por lo tanto:

$$
C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + H_2^*(s)H_1^*(s)G^*(s)} \tag{2.107}
$$

Finalmente se obtiene la función de transferencia:

$$
\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + H_2^*(s)H_1^*(s)G^*(s)} \tag{2.108}
$$

Transformando a z:

$$
\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + H_2(z)H_1(z)G(z)} \tag{2.109}
$$

■

Ejemplo 28 (Libre adaptación del Ejercicio B-3-16 p. 169, [2]) *Obtenga la función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema que se muestra a continuación:*

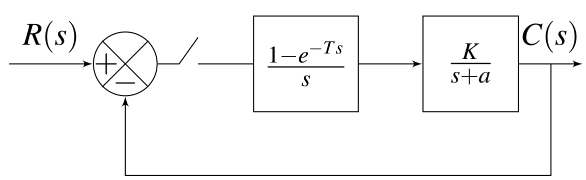

Figura 2.4: Sistema de control en tiempo discreto

Solución 28 (del Ejemplo 28) *Utilizando el sistema mostrado en la Figura 2.4 se obtiene la siguiente función de transferencia pulso en lazo abierto*

$$
G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s + a} \tag{2.110}
$$

Luego aplicando la transformada z según la Tabla 2.1 en [2], se obtiene

$$
\begin{aligned}
G(z) &= Z\left\{\frac{K\left(1 - e^{-Ts}\right)}{s(s+a)}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s(s+a)}\right\} \\
&= \frac{K}{a} \cdot \frac{\left(1 - e^{-aT}\right)z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}}
\end{aligned} \tag{2.111}
$$

Sustituyendo $T = 1$ *en* (2.111), *se obtiene*

$$G(z) = \frac{K}{a} \cdot \frac{(1-e^{-a})\,z^{-1}}{1-e^{-a}z^{-1}} \tag{2.112}$$

Ahora, a partir de (2.112) *y sabiendo que el sistema tiene realimentación unitaria, finalmente se obtiene la función de transferencia pulso en lazo cerrado.*

$$\begin{aligned}\frac{C(z)}{R(z)} =& \frac{G(z)}{1+G(z)}\\ =& \frac{K(1-e^{-a})\,z^{-1}}{a+[K-(K+a)\,e^{-a}]\,z^{-1}}\end{aligned} \tag{2.113}$$

■

Ejemplo 29 (Libre adaptación del Ejercicio B-3-18, p. 169, [2]) *Considere el sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la Figura 2.5. Obtenga la secuencia de salida del sistema* $c(kT)$ *del sistema cuando éste está sujeto a una entrada escalón unitario. Suponga que el periodo de muestreo* T *es 1 segundo.*

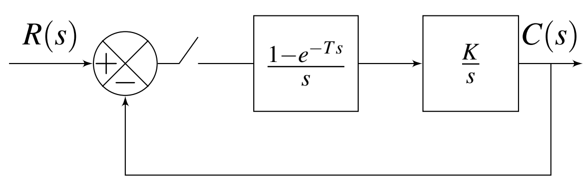

Figura 2.5: Sistema de Control para el Ejemplo 29

Solución 29 (del Ejemplo 29) *Para obtener* $c(kT)$ *se debe trabajar el problema en el dominio Z, por lo que se realiza la transformación del sistema a este dominio.*

$$\begin{aligned}G(z) =& Z\left\{\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2}\right\}\\ =& (1-z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s^2}\right\}\\ =& \frac{KTz^{-1}}{1-z^{-1}}\end{aligned} \tag{2.114}$$

Al sustituir el valor de T *en* (2.114) *se obtiene*

$$\frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{2.115}$$

Seguidamente se procede a obtener la función de transferencia en lazo cerrado de la siguiente forma

$$G(z)_{CL} = \frac{G(z)}{1+G(z)}. \tag{2.116}$$

Sustituyendo (2.115) *en* (2.116) *se logra obtener*

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\dfrac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\dfrac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{Kz^{-1}}{1+(K-1)z^{-1}}. \tag{2.117}$$

Transformando la seal de entrada al dominio Z, se obtiene

$$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}. \tag{2.118}$$

Luego de esto, se despeja una expresión para $C(z)$ *en terminos de* (2.118) *de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} C(z) =& G(z)_{CL} \cdot R(z) \\ =& \frac{Kz^{-1}}{1+(K-1)z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \\ =& \frac{K}{z+(K-1)} \cdot \frac{z}{z-1} \end{aligned} \tag{2.119}$$

Aplicando Fracciones parciales a (2.119) *se obtiene*

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{z} = \frac{K}{(z+(K-1))(z-1)} =& \frac{A}{z+(K-1)} + \frac{B}{z-1} \\ =& \frac{1}{z+K-1} + \frac{1}{z-1} \end{aligned} \tag{2.120}$$

Finalmente al multiplicar (2.120) *por z, y aplicando Transformada Inversa directa se obtiene la expresión para c(kT)*

$$c(kT) = 1-(k-1)^k \tag{2.121}$$

■

Ejemplo 30 (Ejercicio B-3-19, p.170, [2]) *Obtenga de forma cerrada la secuencia de respuesta* $c(kT)$ *del sistema que se muestra en la Figura 2.6 cuando éste está sujeto a una entrada* delta de Kronecker $r(k)$. *Suponga que el período de muestreo* T *es de* 1 *segundo.*

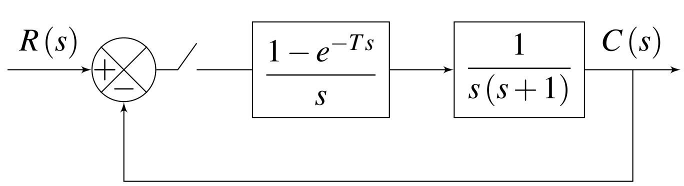

Figura 2.6: Sistema de control discreto para el Ejemplo 30.

Solución 30 (del Ejemplo 30) *Primero se define la función de transferencia $G(s)$ como*

$$G(s)=\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)=\frac{1-e^{-Ts}}{s^{2}(s+1)}. \tag{2.122}$$

Dado que el tiempo de muestro es $T=1$, se procede entonces a calcular la transformada Z de (2.122). *El resultado es*

$$G_{z}(z)=Z\{G(s)\}=\frac{e^{-1}z^{-1}+\left(1-2e^{-1}\right)z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)}. \tag{2.123}$$

Compare (2.123) *con el resultado (3.58), p.118 de [2]. Por otro lado, se calcula la transformada Z de la referencia de entrada del sistema, i.e. $r(k)$, tal que*

$$R_{z}(z)=Z\{r(k)\}=Z\{\delta(k)\}=1, \tag{2.124}$$

donde $\delta(k)$ es el delta de Kronecker. De esta forma se procede a calcular la salida el sistema con una lazo cerrado de control $C_{z}(z)$, es decir

$$\begin{aligned}C_{z}(z)=&\frac{G_{z}(z)}{1+G_{z}(z)}R_{z}(z)\\=&\frac{z^{-1}\left(e^{-1}+\left(1-2e^{-1}\right)z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+\left(1-e^{-1}\right)z^{-2}}\\=&\frac{z^{-1}\left(0{,}3679+0{,}2642z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+0{,}6321z^{-2}}.\end{aligned} \tag{2.125}$$

con $G_{z}(z)$ en (2.123) *y $R_{z}(z)$ en* (2.124). *Finalmente se calcula la transformada Z inversa de* (2.125) *y se obtiene*

$$\begin{aligned}c(k)=&0{,}3679(0{,}7951)^{k-1}\cos(0{,}8907(k-1))\\&+0{,}7250(0{,}7951)^{k-1}\sin(0{,}8907(k-1))\end{aligned} \tag{2.126}$$

■

Ejemplo 31 (Ejercicio B-3-22, p. 170, [2]) *Suponga que un filtro digital está dado mediante la siguiente ecuación en diferencias:*

$$y(k)+a_{1}y(k-1)+a_{2}y(k-2)=\ b_{1}x(k)+b_{2}x(k-1). \tag{2.127}$$

Dibuje los diagramas de bloques para el filtro mediante 1) programación directa, 2) programación estándar y 3) programación en escalera.

Solución 31 (del Ejemplo 31) *Resolviendo mediante la programación directa, primero se utiliza la Transformada z de la ecuación de diferencias* (2.127)*:*

$$Y(z)+a_{1}z^{-1}Y(z)+a_{2}z^{-2}Y(z)=\ b_{1}X(z)+b_{2}z^{-1}X(z). \tag{2.128}$$

Donde:

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\ \frac{b_{1}+b_{2}z^{-1}}{1+a_{1}z^{-1}+a_{2}z^{-2}}. \tag{2.129}$$

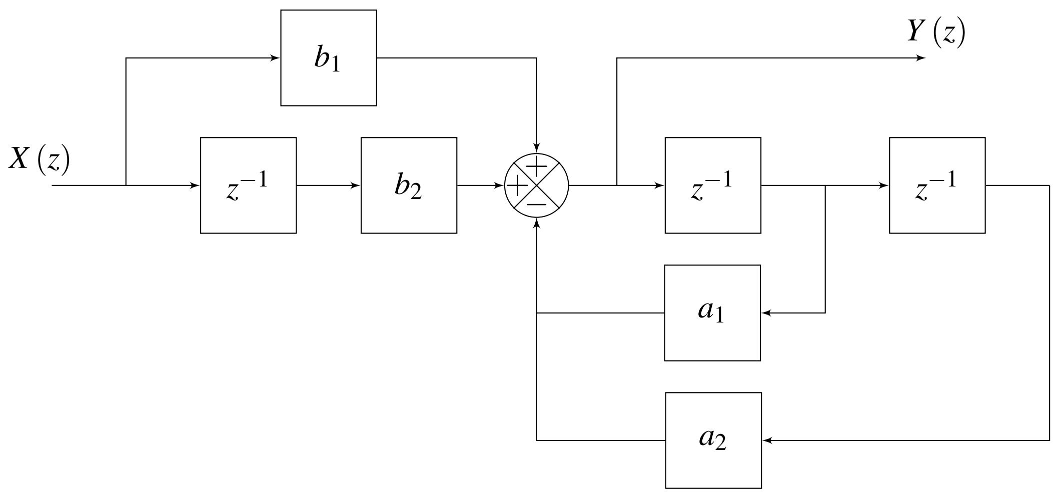

Figura 2.7: Diagrama del filtro digital mediante programación directa.

De (2.129) *se obtiene el diagrama del filtro digital mediante programación directa, el cual se muestra en la Figura 2.7. Resolviendo mediante la programación estándar, primero se utiliza lo siguiente:*

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = b_1 + b_2 z^{-1}. \tag{2.130}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \tag{2.131}$$

De (2.130)*y* (2.131) *se obtiene el diagrama del filtro digital mediante programación estándar, el cual se muestra en la Figura 2.8.*
Finalmente para resolver mediante programación en escalera se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &== \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ &= \frac{b_1 z^2 + b_2 z}{z^2 + a_1 z + a_2} \end{aligned} \tag{2.132}$$

Utilizando (3,69) *p.129, [2], se tiene:*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{A_2}}}} \tag{2.133}$$

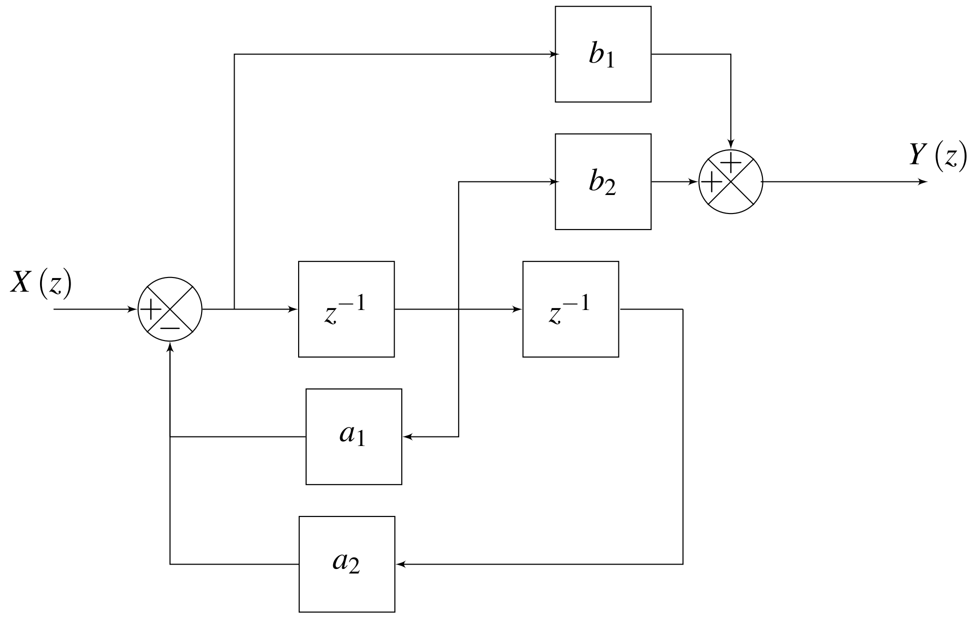

Figura 2.8: Diagrama del filtro digital mediante programación estándar.

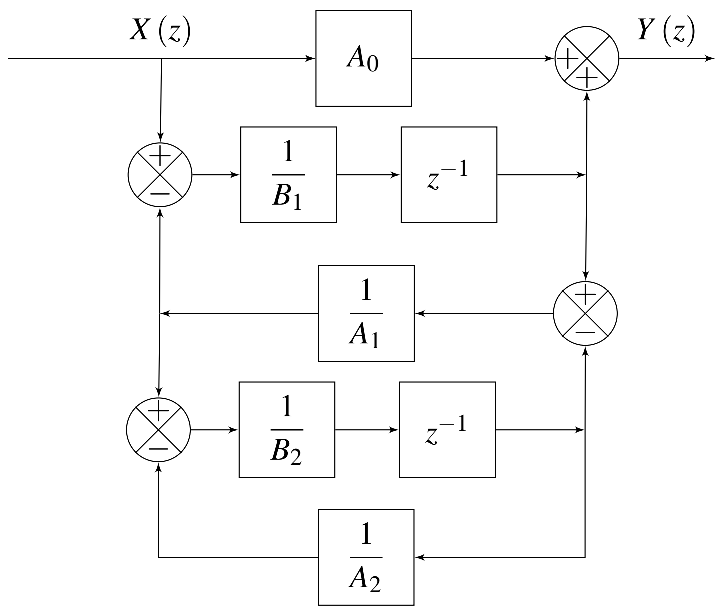

Figura 2.9: Diagrama del filtro digital mediante programación escalera.

Donde:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= b_1 \\
B_1 &= \frac{1}{b_2 - a_1 b_1} \\
A_1 &= \frac{b_2 - a_1 b_1}{\dfrac{a_2 b_1}{b_2 - a_1 b_1} + a_1}
\end{aligned}
\tag{2.134}
$$

$$B_2 = \frac{-\dfrac{a_2 b_1}{b_2 - a_1 b_1} + a_1}{\dfrac{a_2\left(b_2 - a_1 b_1\right)}{\dfrac{a_2 b_1}{b_2 - a_1 b_1} + a_1} + a_2 b_1}$$

$$\frac{1}{A_2} = \frac{-1}{\dfrac{b_2 - a_1 b_1}{\dfrac{a_2 b_1}{b_2 - a_1 b_1} + a_1} + b_1}. \tag{2.135}$$

Con lo anterior se obtiene el diagrama del filtro digital mediante programación escalera, el cual se muestra en la Figura 2.9. ■

Ejemplo 32 (Ejercicio B-3-23 p. 170, [2]) *Considere el filtro digital definido mediante*

$$G(z) = \frac{2 + 2{,}2z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}{1 + 0{,}4z^{-1} - 0{,}12z^{-2}} \tag{2.136}$$

Realice este filtro en el esquema en serie, en el esquema en paralelo y en el esquema en escalera.

Solución 32 (del Ejemplo 32) *Primero se realiza el filtro en el esquema en serie, para esto se separan los factores de* (2.136)*,*

$$G(z) = 2 \cdot \frac{1 + 0{,}1z^{-1}}{1 - 0{,}2z^{-1}} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0{,}6z^{-1}}. \tag{2.137}$$

De (2.137) *se obtiene el esquema en serie del filtro digital mostrado en la Figura 2.10. Ahora, para*

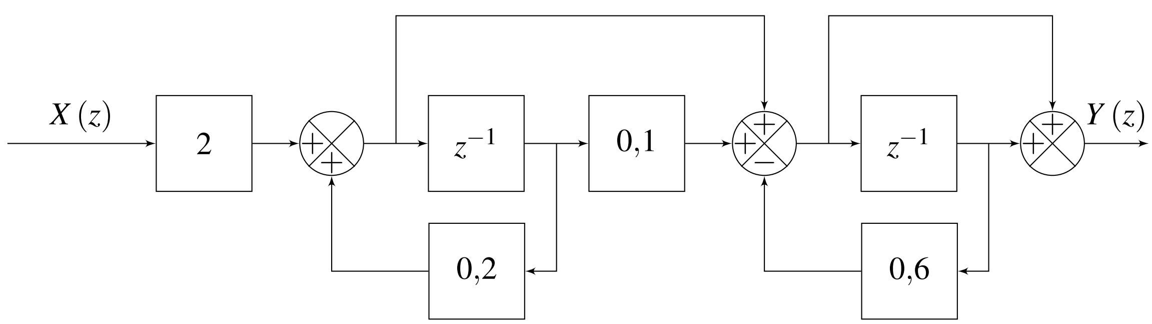

Figura 2.10: Esquema del filtro digital en serie del Ejemplo 32

obtener el esquema de filtro digital en paralelo se separan los términos de (2.136) *mediante fracciones parciales,*

$$G(z) = \frac{-5}{3} - \frac{\dfrac{5}{6}}{1 - 0{,}6z^{-1}} + \frac{\dfrac{9}{2}}{1 + 0{,}2z^{-1}}. \tag{2.138}$$

A partir de (2.138) *se obtiene el esquema en paralelo mostrado en la Figura 2.11 Ahora, expandiendo*

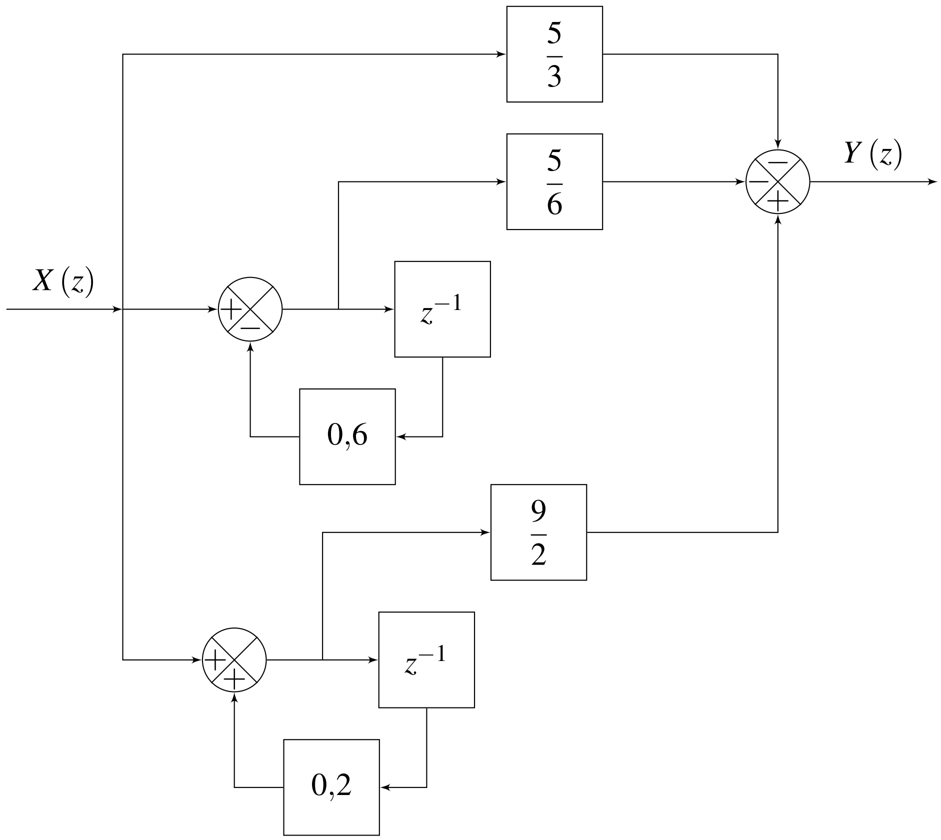

Figura 2.11: Esquema del filtro digital en paralelo del Ejemplo 32

(2.136) *se obtienen los términos en escalera,*

$$
\begin{aligned}
G(z) =& \frac{2z^2+2{,}2z+0{,}2}{z^2+0{,}4z-0{,}12} \\
=& 2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1{,}4}z+\cfrac{1}{\cfrac{49}{3}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{28}z-\cfrac{1}{20}}}}
\end{aligned}
\tag{2.139}
$$

Por último se realiza la programacion del esquema en escalera como se muestra en la Figura 2.12. ■

Ejemplo 33 (Libre adaptación del Ejercicio B-3-24, p. 171, [2]) *Refiriéndose a la aproximación del diferenciador que se muestra en la Figura 2.13, obtenga la salida $v(k)$ cuando la entrada $x(k)$ es un escalón unitario.*

Solución 33 (del Ejemplo 33) *Para iniciar la solución del problema, se obtiene la expresión de $V(z)$ en términos de $X(z)$ y los componentes del sistema de la siguiente forma*

$$V(z) = X(z)\left(\frac{1}{T}-\frac{z^{-1}}{T}\right) \tag{2.140}$$

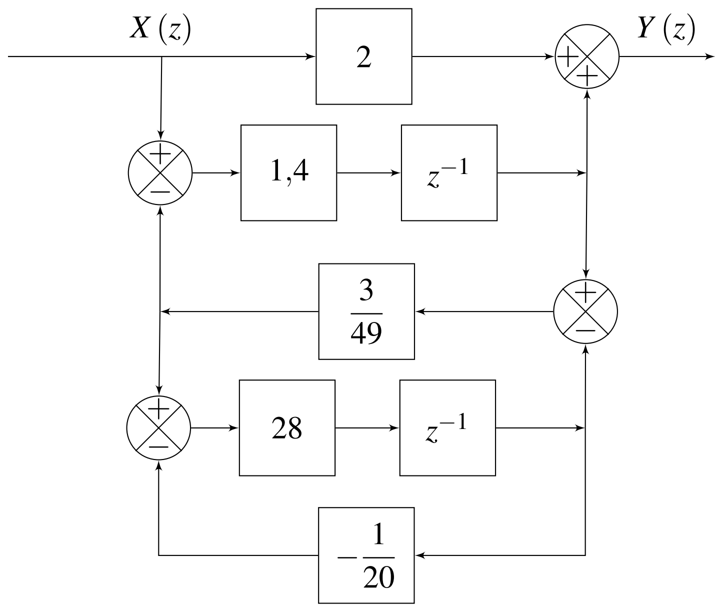

Figura 2.12: Esquema del filtro digital en escalera del Ejemplo 32

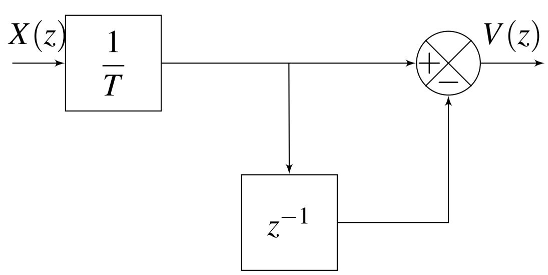

Figura 2.13: Sistema diferenciador para el Ejemplo 33

Al sustituir el valor de $X(z)$ en (2.140) *se obtiene*

$$V(z) = \frac{1}{T - Tz^{-1}} - \frac{z^{-1}}{T - Tz^{-1}} \tag{2.141}$$

Al tomar como factor común $\frac{1}{T}$ *en* (2.141)*, y aplicar la Transformada Inversa de forma directa, se obtiene finalmente la expresión de $v(k)$ que se muestra a continuación*

$$v(k) \begin{cases} \frac{1}{T} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \tag{2.142}$$

■

Ejemplo 34 (Libre adaptación del Ejercicio B-3-25, p.171, [2]) *Considere el sistema que se muestra* *en la Figura 2.14. Muestre que la función de transferencia* $\frac{Y(z)}{X(z)}$ *está dada por*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = T\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right). \tag{2.143}$$

Suponiendo que $y(kT) = 0$ *para* $k < 0$*, muestre que*

$$y(kT) = T\left[x(0) + x(T) + \ldots + x(kT)\right]. \tag{2.144}$$

De este modo, la salida $y(kT)$ *se aproxima al área formada por la entrada. Por tanto, el sistema actúa como un integrador. Debido a que* $y(0) = Tx(0)$*, la salida aparece tan pronto* $x(0)$ *entra al sistema. Este integrador comúnmente se denomina integrador digital sin retraso.*

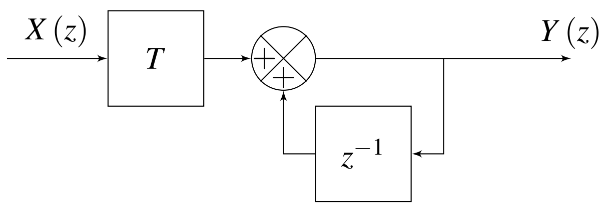

Figura 2.14: Integrador digital sin retardo para el Ejemplo 34.

Solución 34 *Por inspección de la Figura 2.14 se observa que*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{1-z-1} \tag{2.145}$$

o bien

$$Y(z) = \frac{T}{1-z-1}X(z). \tag{2.146}$$

Del Problema A-2-4, p.56, [2], se ha demostrado que

$$Z\left\{\sum_{h=0}^{k} x(h)\right\} = \frac{1}{1-z-1}X(z). \tag{2.147}$$

Basados en 2.147, se obtiene la transformada Z inversa de $Y(z)$ *en* (2.146) *como*

$$\begin{aligned} y(kT) =& T\sum_{h=0}^{k} x(h) \\ =& T\left[x(0) + x(T) + \ldots x(kT)\right]. \end{aligned} \tag{2.148}$$

De esta forma, $y(kT)$ *se aproxima como una área hecha por la entrada. Nótese que en* $y(0) = Tx(0)$*. De esta forma el sistema actúa como un integrador. Por ejemplo, cuando la entrada* $x(kT)$ *es un secuencia tipo escalón unitario,* (2.148) *se puede reescribir como*

$$\begin{aligned} y(kT) =& \left[x(0) + x(T) + \ldots x(kT)\right] \\ =& T\left[1 + 1 + \ldots 1\right] = T(k+1). \end{aligned} \tag{2.149}$$

■

Ejemplo 35 (Ejercicio B-4-2, p. 288, [2]) *Considere la siguiente ecuación característica:*

$$z^3 + 2{,}1z^2 + 1{,}44z + 0{,}32 = 0. \tag{2.150}$$

Determine si cualquiera de las raíces de la ecuación característica están o no fuera del círculo unitario con centro en el origen del plano z.

Solución 35 (del Ejemplo 35) *Para la solución de este ejercicio, se utiliza el Criterio de estabilidad de Jury, donde la ecuación característica $P(z)$ corresponde a:*

$$P(z) = z^3 + 2{,}1z^2 + 1{,}44z + 0{,}32. \tag{2.151}$$

Además, se determinan los coeficientes $a0,\ a1,\ a2$ y $a3$ de la siguiente manera:

$$P(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3. \tag{2.152}$$

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 2{,}1, \qquad a_2 = 1{,}44, \qquad a_3 = 0{,}32 \tag{2.153}$$

Utilizando la prueba de estabilidad de Jury, se tienen las siguientes condiciones:

1. $|a_3| < a_0$.
   La primera condición de estabilidad se cumple, debido a que $|0{,}32| < 1$.

2. $P(1) > 0$
   Donde,
   $$P(1) = 1^3 + 2{,}1\cdot 1^2 + 1{,}44\cdot 1 + 0{,}32. = 4{,}86, \tag{2.154}$$
   Por lo tanto, se cumple que $P(1) > 0$.

3. $P(-1) < 0$
   Donde,
   $$P(-1) = -1^3 + 2{,}1\cdot -1^2 + 1{,}44\cdot -1 + 0{,}32. = -0{,}02, \tag{2.155}$$
   De esta forma, se cumple que $P(-1) < 0$.

4. $|b_2| > |b_0|$
   Para el último criterio de estabilidad se determinan b_0 y b_2, como se muestra a continuación:
   $$\begin{aligned} b_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0{,}32 & 1 \\ 1 & 0{,}32 \end{vmatrix} \\ &= -0{,}8976. \end{aligned} \tag{2.156}$$
   $$\begin{aligned} b_0 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0{,}32 & 1{,}44 \\ 1 & 2{,}1 \end{vmatrix} \\ &= -0{,}768. \end{aligned} \tag{2.157}$$
   La última condición de estabilidad se cumple dado a que $|b_2| > |b_0|$, de acuerdo con (2.156) y (2.157).

Finalmente, al cumplir con las condiciones de estabilidad según el Criterio de Jury, se concluye que ninguna de las raíces de la ecuación característica queda fuera del círculo unitario centrado en el origen del plano z.

■

Ejemplo 36 (Ejercicio B-4-3 p. 288, [2]) *Determine la estabilidad del siguiente sistema en tiempo discreto:*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-3}}{1+0{,}5z^{-1}-1{,}34z^{-2}+0{,}24z^{-3}} \tag{2.158}$$

Solución 36 (del Ejemplo 36) *Multiplicando* (2.158) *con* $\frac{z^3}{z^3}$ *se obtiene:*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^3+0{,}5z^2-1{,}34z+0{,}24} \tag{2.159}$$

A partir de (2.159) *se obtiene la ecuación característica del sistema y se compara con la forma general, como se muestra a continuación:*

$$\begin{aligned} P(z) =&=z^3+0{,}5z^2-1{,}34z+0{,}24 \\ &=a_0z^3+a_1z^2+a_3z+a_4 \end{aligned} \tag{2.160}$$

Así, de (2.160) *se pueden separar los términos de la ecuación característica*

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0{,}5 \\ a_2 &= -1{,}34 \\ a_3 &= 0{,}24 \end{aligned} \tag{2.161}$$

Utilizando la prueba de estabilidad de Jury, se tienen las siguientes condiciones:

1. $|a_3| < a_0$.
   La primera condición de estabilidad se cumple, debido a que $|0{,}24| < 1$.

2. $P(1) > 0$
   Donde,
   $$P(1) = 1^3+0{,}5\cdot 1^2-1{,}34\cdot 1+0{,}24 = 0{,}4 \quad > 0, \tag{2.162}$$
   Por lo tanto, se cumple la segunda condición.

3. $P(-1) < 0$
   Donde,
   $$P(-1) = -1^3+0{,}5\cdot -1^2-1{,}34\cdot -1+0{,}24 = -1{,}08 \quad > 0, \tag{2.163}$$
   No se satisface la tercera condición, por lo tanto no es necesario realizar la cuarta condición.

Finalmente se concluye que el sistema es inestable

Ejemplo 37 (Ejercicio B-4-5, p. 289, [2]) *Considere el sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado mostrado en la Figura 4.13, p.184, [2]. Determine el intervalo de ganancia K para estabilidad mediante la transformación bilineal junto con el criterio de estabilidad de Routh.*

Solución 37 (del Ejemplo 37) *Partiendo de la ecuación característica para el sistema de control, definida en el Ejercicio B-4-5, p. 289, [2], se tiene:*

$$P(z) = z^2 - (1{,}3679 - 0{,}3679)\, z + 0{,}2642K. \tag{2.164}$$

Utilizando el método de la transformación bilineal, primero se sustituye $z = (w+1)/(w-1)$ en la ecuación (2.164) *de la siguiente manera:*

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - (1{,}3679 - 0{,}3679)\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0{,}2642K = 0. \tag{2.165}$$

Simplificando (2.165) *se obtiene:*

$$0{,}6321Kw^2 + (1{,}2642 - 0{,}5284K)\, w + 2{,}7358 - 0{,}1037K = 0 \tag{2.166}$$

Ahora bien, utilizando (2.166) *y el criterio de estabilidad de Routh, se tiene:*

$$\begin{array}{lcc} w^2 & 0{,}6321K & 2{,}7358 - 0{,}1037K \\ w^1 & 1{,}2642 - 0{,}5284K & 0 \\ w^0 & 2{,}7358 - 0{,}1037K. & \end{array} \tag{2.167}$$

Para asegurar la estabilidad se requiere el siguiente rango de valores de K:

$$\begin{array}{cc} 0{,}6321K > 0 & K > 0 \\ 1{,}2642 - 0{,}5284K > 0 & K < 2{,}3925 \\ 2{,}358 - 0{,}1037K > 0 & K < 26{,}38 \end{array} \tag{2.168}$$

Con lo anterior se determina el intervalo de ganancia para K:

$$0 < K < 2{,}3925 \tag{2.169}$$

■

Ejemplo 38 (Ejercicio B-4-6, p. 289, [2]) *Considere el sistema*

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}. \tag{2.170}$$

Suponga que la secuencia de entrada $\{x(k)\}$ es acotada. Esto es

$$|x(k)| \leqslant M_1 = \textit{constante, siendo } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.171}$$

Demuestre que, si todos los puntos de $G(z)$ están dentro del circulo unitario en el plano z, entonces la salida $y(k)$ también es acotada; esto es,

$$|y(k)| \leqslant M_1 = \textit{constante, siendo } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.172}$$

Solución 38 (del Ejemplo 38) *Iniciando con*

$$Y(z) = G(z)X(z), \tag{2.173}$$

y tomando como referencia (3-39), p. 100, [2], se puede expresar (2.173) *como*

$$\begin{aligned} |y(k)| &= \left| \sum_{h=0}^{k} g(k-h)x(h) \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{h=0}^{k} g(k-h)M_1 \right| \\ &\leqslant \left| [g(k)+g(k-1)+\ldots+g(0)]\, M_1 \right|. \end{aligned} \tag{2.174}$$

Para que todos los polos de $G(z)$ *se encuentren dentro del circulo unitario, se debe cumplir que*

$$|g(k)| \leqslant a^k \leqslant 1 \tag{2.175}$$

Siendo a una constante $0 < a < 1$.

Si se sustituye (2.175) *en* (2.174)*, se obtiene*

$$|y(k)| \leqslant \left| \left(a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1\right) M_1 \right|. \tag{2.176}$$

La expresión entre paréntesis en (2.176) *se puede expresar mediante la serie*

$$\frac{1-a^{k+1}}{1-a}, \tag{2.177}$$

realizando el cambio de (2.177) *en* (2.176) *se observa una expresión más simple*

$$|y(k)| \leqslant \left| \frac{1-a^{k+1}}{1-a} M_1 \right|. \tag{2.178}$$

Finalmente definiendo convenientemente

$$M_2 = \frac{1}{1-a} M_1, \tag{2.179}$$

se puede expresar (2.178) *como*

$$\begin{aligned} |y(k)| &\leqslant \frac{1-a^{k+1}}{1-a} M_1 \\ &\leqslant M_2 - \frac{a^{k+1}}{1-a} M_1 \\ &\leqslant M_2 \end{aligned} \tag{2.180}$$

Con (2.180) *se demuestra que* $y(k)$ *es acotada.* ■

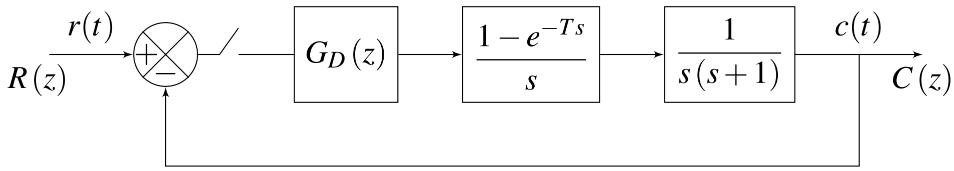

Figura 2.15: Sistema de control digital para el ejercicio 39

Ejemplo 39 (Ejercicio B-4-9, p. 289, [2]) *Según el sistema de control digital mostrado en la Figura 2.15, diseñe un controlador digital $G_p(z)$ tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea* 0,5 *y el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada sea* 8*. Suponga que el período de muestreo es de* 0,1*s, es decir $T = 0{,}1$. Determine la constante de error de velocidad estática. También, determine la respuesta del sistema diseñado a una entrada escalón unitario.*

Solución 39 (del Ejemplo 39) *Primeramente, se determina $G(z)$, de la siguiente manera:*

$$
\begin{aligned}
G(s) &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] \\
&= \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\
&= \frac{\left(T-1+e^{-T}\right)z^{-1}+\left(1-e^{-T}-Te^{-T}\right)z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-T}z^{-1}\right)}.
\end{aligned}
\tag{2.181}
$$

Ahora bien, se sustituye $T = 0{,}1s$ en (2.181)*:*

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\left(0{,}1-1+e^{-0{,}1}\right)z^{-1}+\left(1-e^{-0{,}1}-0{,}1e^{-0{,}1}\right)z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-0{,}1}z^{-1}\right)} \\
&= \frac{(0{,}004837)z^{-1}+(0{,}004679)z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0{,}9048z^{-1}\right)} \\
&= \frac{(0{,}004837)z^{-1}(1+0{,}9674)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0{,}9048z^{-1}\right)} \\
&= \frac{0{,}004837(z+0{,}9674)}{(z-1)(z-0{,}9048)}.
\end{aligned}
\tag{2.182}
$$

Además, para la realización del ejercicio se puede tomar como referencia el problema resuelto A-4-9, p.268, [2]. Se tienen las siguientes ecuaciones para un lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante.

$$
|z| = e^{\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)}
\tag{2.183}
$$

$$
\angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s} = \theta
\tag{2.184}
$$

Según se indica en el ejercicio, el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada es 8, de forma que el polo dominante en lazo cerrado en la parte superior del plano z deberá estar localizado *sobre una línea con un ángulo de* 45° *y que pase a través del origen.*

$$\theta = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$
$$\angle z = 45^\circ = \frac{\pi}{4} = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}. \tag{2.185}$$

Con (2.185) *se determina la relación:*

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = \frac{1}{8}, \tag{2.186}$$

Dado a que el período de muestreo se ha especificado como $T = 0{,}1s$*, se tiene:*

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi, \tag{2.187}$$

Por lo tanto,

$$\omega_d = \frac{1}{8}\omega_s = \frac{20\pi}{8} = 7{,}8540. \tag{2.188}$$

Al sustituir $\zeta = 0{,}5$ *y* (2.186) *en* (2.183)*, se obtiene:*

$$\begin{aligned} |z| &= e^{\left(\frac{-2\pi\cdot 0{,}5}{\sqrt{1-0{,}5^2}}\frac{7{,}854}{20\pi}\right)} \\ &= 0{,}6354 \end{aligned} \tag{2.189}$$

Por lo tanto, se puede localizar el polo en lazo cerrado deseado en la parte superior del plano z *de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} z =& 0{,}6354\angle 45^\circ \\ =& 0{,}4493 + j0{,}4493. \end{aligned} \tag{2.190}$$

Mediante las localizaciones de polos y ceros en el plano z *del sistema, se determina que se debe aadir un ángulo de adelanto de fase de* $78{,}59^\circ$*, este ángulo es dado por el controlador digital. De esta manera se elige que el controlador* $G_D(z)$ *debe ser:*

$$\begin{aligned} G_D(z) &= K\frac{z+\alpha}{z+\beta} \\ &= K\frac{z-0{,}9048}{z+\beta}. \end{aligned} \tag{2.191}$$

Se elige $\alpha = -0{,}9048$*, con lo cual se obtiene que el polo del controlador se obtiene que* $\beta = -0{,}1554$*, así el polo se localiza en* $z = 0{,}1554$*. Con esto el controlador* $G_D(z)$ *adquiere la siguiente forma:*

$$G_D(z) = K\frac{z-0{,}9048}{z-0{,}1554}. \tag{2.192}$$

La función de transferencia de lazo abierto, se expresa como:

$$G_D(z)\,G(z) = K\frac{0{,}004837\,(z+0{,}9674)}{(z-0{,}1554)\,(z-1)}. \tag{2.193}$$

La ganancia K se determina como se muestra a continuación:

$$\left| K\frac{0{,}004837\,(z+0{,}9674)}{(z-0{,}1554)\,(z-1)} \right|_{z=0{,}4493+j0{,}4493} = 1,$$
$$K = 53{,}08. \tag{2.194}$$

Se determina la constante de error de velocidad esttica K_v como sigue:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{1-z^{-1}}{T}G_D\,(z)\,G\,(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{1-z^{-1}}{0{,}1}53{,}08\frac{z-0{,}9048}{z-0{,}1554}\,\frac{(0{,}004837)\,(z+0{,}9674)}{(z-1)\,(z-0{,}9048)} \\ &= 5{,}98. \end{aligned} \tag{2.195}$$

Para determinar la respuesta del sistema diseñado a una entrada escalón unitario, primero se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \frac{C\,(z)}{R\,(z)} &= \frac{G_D\,(z)\,G\,(z)}{1+G_D\,(z)\,G\,(z)} \\ &= \frac{0{,}2567\,(z+0{,}9674)}{(z-0{,}1554)\,(z-1)+0{,}2567\,(z+0{,}9674)} \\ &= \frac{0{,}2567z^{-1}+0{,}2483z^{-2}}{1-0{,}8987z^{-1}+0{,}4037z^{-2}}. \end{aligned} \tag{2.196}$$

La entrada de escalón unitario corresponde a:

$$R\,(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}. \tag{2.197}$$

Al sustituir (2.197) *en* (2.196) *se obtiene finalmente:*

$$\begin{aligned} C\,(z) &= \frac{0{,}2567z^{-1}+0{,}2483z^{-2}}{(1-0{,}8987z^{-1}+0{,}4037z^{-2})\,(1-z^{-1})} \\ &= \frac{0{,}2567z^{-1}+0{,}2483z^{-2}}{1-0{,}8987z^{-1}+1{,}3024z^{-2}-0{,}4037z^{-3}} \\ &= 0{,}2567z^{-1}+0{,}7357z^{-2}+1{,}062z^{-3}+1{,}1629z^{-4}+1{,}1212z^{-5} \\ &\quad +1{,}0431z^{-6}+0{,}9898z^{-7}+0{,}9735z^{-8}+\ldots \end{aligned} \tag{2.198}$$

■

Ejemplo 40 (Ejercicio B-4-12, p. 290, [2]) *Diseñe un controlador proporcional y derivativo digital para la planta cuya función de transferencia es* $\frac{1}{s^2}$ *tal y como se muestra en la Figura 2.16. Se desea que el factor de amortiguamiento relativo* ζ *de los polos dominantes en lazo cerrado sea de* 0,5 *y la frecuencia natural no amortiguada sea de* 4 *rad/s. El periodo de muestreo es 0.1 s, es decir* $T = 0{,}1$*. Después de diseñar el controlador, determine el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada.*

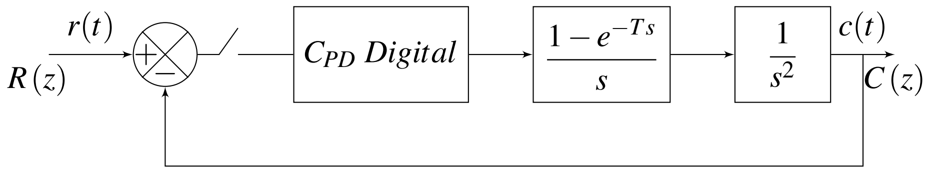

Figura 2.16: Sistema de control digital para el Ejemplo 40

Solución 40 (del Ejemplo 40) *Para comenzar, expresamos las condiciones iniciales tanto del enunciado como de la Figura 2.16 de forma adecuada*

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s^2} \tag{2.199}$$
$$\zeta = 0{,}5 \tag{2.200}$$
$$\omega_n = 4 \tag{2.201}$$
$$T = 0{,}1 \tag{2.202}$$

Seguidamente, tomando como referencia el problema resuelto A-4-9, p.268, [2], se procede a resolver el problema.
Primeramente se calcula el punto en el cual se cumplen las condiciones solicitadas mediante

$$|z| = e^{\dfrac{-2\pi\zeta\omega_d}{\omega_s\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{2.203}$$
$$\angle z = \frac{2\pi\omega_d}{\omega_s} \tag{2.204}$$

donde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3{,}4641 \tag{2.205}$$
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 62{,}8182 \tag{2.206}$$

Al sustituir (2.205) *y* (2.206) *en* (2.203) *y* (2.204) *se obtiene*

$$|z| = 0{,}8187 \tag{2.207}$$
$$\angle z = 19{,}87^\circ \tag{2.208}$$

por lo que

$$\begin{aligned} z &= |z|\angle z \\ &= 0{,}7701 + j0{,}2780. \end{aligned} \tag{2.209}$$

Posterior a obtener el punto de interés, se obtiene la Función de Transferencia total del sistema de la siguiente forma

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G_{PD}(z) \cdot G(z) \tag{2.210}$$

En la cuál $G_{PD}(z)$ es la Función de transferencia del controlador que se está diseñando, y se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned} G_{PD}(z) =& K_P + K_D(1 - z^{-1}) \\ =& K_P + K_D\left(\frac{z-1}{z}\right) \\ =& (K_P + K_D)\left(\frac{z - \dfrac{K_D}{K_P + K_D}}{z}\right) \end{aligned} \tag{2.211}$$

Mientras que $G(z)$ es la Función de transferencia del sistema discreto, esta función se obtiene mediante

$$\begin{aligned} G(z) =& Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s^3}\right\} \\ =& (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\ =& (1 - z^{-1})\left(\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}\right) \\ =& \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} \end{aligned} \tag{2.212}$$

Sustituyendo (2.211) *y* (2.212) *en* (2.210)*, así como el valor de T, se obtiene*

$$\frac{C(z)}{R(z)} = (K_P + K_D)\left(\frac{z - \dfrac{K_D}{K_P + K_D}}{z}\right) \cdot \frac{0{,}005(z+1)}{(z-1)^2} \tag{2.213}$$

Definiendo convenientemente

$$\alpha = \frac{K_D}{K_D + K_P} \tag{2.214}$$

$$\beta = (K_D + K_P) \tag{2.215}$$

Realizando la sustitución de (2.214) *y* (2.215) *en* (2.213)*, y re-ordenando los términos se obtiene*

$$\frac{C(z)}{R(z)} = 0{,}005\beta\left(\frac{(z-\alpha)(z+1)}{z(z-1)^2}\right). \tag{2.216}$$

Ahora, se debe verificar que se cumplan los requerimientos de magnitud y fase para el punto en el cual se esta diseñando el controlador PD, los cuales son

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(\angle(z - z_i))\right) - \left(\sum_{i=0}^{n}(\angle(z - p_n))\right) = \pm 180^\circ \tag{2.217}$$

$$\left|\frac{C(z)}{R(z)}\right|_{z=0{,}7701+j0{,}2780} = 1. \tag{2.218}$$

Para obtener los valores de α *y* β *debe evaluarse primero la condición de fase, sustituyendo en* (2.217) *los valores obtenidos de* (2.216)

$$\begin{aligned}\angle(z-\alpha)+\angle(z+1)-\angle(z-0)-2\angle(z-1) &= \pm 180^\circ \\ \angle(z-\alpha)-270{,}10^\circ &= -180^\circ \\ \angle(z-\alpha) &= 90{,}10^\circ \end{aligned} \tag{2.219}$$

De lo cual se obtiene

$$\alpha = 0{,}7705. \tag{2.220}$$

Seguidamente, se sustituye (2.216)*, así como* (2.220) *en* (2.218) *para evaluar la condición de magnitud*

$$\begin{aligned}\left|0{,}005\beta\frac{(z-0{,}7705)(z+1)}{z(z-1)^2}\right|_{z=0{,}7701+j0{,}2780} &= 1 \\ 0{,}2337\,|\beta| &= 1.\end{aligned} \tag{2.221}$$

Por lo tanto

$$\beta = 42{,}779. \tag{2.222}$$

Igualando (2.214) *y* (2.220)*, así como* (2.215) *y* (2.222) *se obtienen las siguientes expresiones*

$$\frac{K_D}{K_P+K_D} = 0{,}7719 \tag{2.223}$$

$$K_D+K_P = 42{,}779 \tag{2.224}$$

Finalmente mediante (2.223) *y* (2.224) *se obtiene*

$$K_D = 33{,}0211 \tag{2.225}$$

$$K_P = 9{,}7579 \tag{2.226}$$

Al sustituir (2.225) *y* (2.226) *en* (2.211) *se obtiene la Función de transferencia del controlador PD*

$$G_{PD}(z) = 42{,}779\left(\frac{z-0{,}7719}{z}\right) \tag{2.227}$$

El número de muestras por ciclo se obtiene de

$$n = \frac{360^\circ}{\angle z} = 18{,}14 \tag{2.228}$$

■

Capítulo 3

Introducción al control por realimentación de estado

Ejemplo 41 (del Ejercicio B-5-1, p. 370, [2]) *Obtenga una representación en el espacio de estado en la forma canónica controlable del siguiente sistema con función de transferencia pulso*

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}+2z^{-2}}{1+4z^{-1}+3z^{-2}} \tag{3.1}$$

Solución 41 (del Ejemplo 41) *Tomando como guía el problema A-5-1, p. 336 [2], se inicia con la separación de* (3.1) *en dos ecuaciones equivalentes, y realizando un cambio de variable de la siguiente forma*

$$\frac{Y(z)}{z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{U(z)}{1+4z^{-1}+3z^{-2}} = Q(z) \tag{3.2}$$

Seguidamente (3.2) *se puede expandir en dos ecuaciones independientes de la manera siguiente*

$$Y(z) = Q(z)z^{-1} + 2Q(z)z^{-2} \tag{3.3}$$

$$Q(z) = U(z) - 4Q(z)z^{-1} - 3Q(z)z^{-2} \tag{3.4}$$

Seguidamente se definen las variables de estado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} X_1(z) &= z^{-2}Q(z) \\ X_2(z) &= z^{-1}Q(z) \\ X_3(z) &= Q(z) \end{aligned} \tag{3.5}$$

De donde se observa que

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= X_2(z) \\ zX_2(z) &= X_3(z) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Al sustituir (3.6) *en* (3.3) *y* (3.4) *se obtienen las siguientes expresiones*

$$\begin{aligned} zX_2(z) &= -4X_2(z) - 3X_1(z) + U(z) \\ Y(z) &= X_2(z) + 2X_1(z) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aplicando la Transformada Z inversa de forma directa a (3.7) *se obtiene*

$$\begin{aligned} x_2(k+1) =& -4x_2(k) - 3x_1(k) + u(k) \\ y(k) =& x_2(k) + 2x_1(k) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Finalmente ordenando las ecuaciones en forma matricial, se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{3.9}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

■

Ejemplo 42 (Ejercicio B-5-11, p. 372, [2]) *Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema siguiente en la forma canónica diagonal.*

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0{,}7z^{-1} + 0{,}12z^{-2}} \tag{3.11}$$

Solución 42 (del Ejemplo 42) *Primero se simplifica $Y(z)/U(z)$:*

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} =& \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0{,}7z^{-1} + 0{,}12z^{-2}} \\ =& \frac{z+2}{z^2 + 0{,}7z + 0{,}12} \\ =& \frac{z+2}{(z+0{,}4)(z+0{,}3)} \\ =& \frac{17}{(z+0{,}3)} - \frac{16}{(z+0{,}4)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tomando como referencia la forma canónica diagonal de la ecuación $(5-16)$ *p. 299, [2] y utilizando los polos y ceros de la función de transferencia pulso* (3.12)*, se obtiene:*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 17 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

■

Ejemplo 43 (del Ejercicio B-6-2, p. 510, [2]) *El sistema de control definido por*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} u(k) \tag{3.14}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

es de estado completamente controlable. Determine una secuencia de señales de control $u(0)$ y $u(1)$ tales que el estado $x(2)$ sea

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Solución 43 (del Ejemplo 43) *Para obtener los valores de $x(2)$, se debe seguir el siguiente método*

$$x(2) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \tag{3.17}$$

Al sustituir en (3.17) *las matrices A y B, se obtiene*

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}16 & -1 \\ 0{,}16 & 0{,}84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}66 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} u(1) \tag{3.18}$$

Al expandir (3.18) *en dos ecuaciones se obtiene*

$$x_1(2) = -0{,}16x_1(0) - x_2(0) + 0{,}5u(0) + u(1) \tag{3.19}$$
$$x_2(2) = 0{,}16x_1(0) - 0{,}84x_2(0) + 0{,}66u(0) + 0{,}5u(1) \tag{3.20}$$

Finalmente al realizar la sustitución de (3.15) *en* (3.19) *y* (3.20) *se obtiene*

$$u(0) = -3{,}9560, \qquad u(1) = 0{,}1380 \tag{3.21}$$

■

Ejemplo 44 (del Ejercicio B-6-5, p. 511, [2]) *Para el sistema definido por*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

suponga que se observan las siguientes salidas:

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 2 \tag{3.23}$$

Las señales de control dadas son

$$u(0) = 2, \quad u(1) = -1 \tag{3.24}$$

Determine el estado inicial $x(0)$. También determine los estados $x(1)$ y $x(2)$.

Solución 44 (del Ejemplo 44) *A partir de* (3.22) *se observa que*

$$y(0) = x_1(0)$$
$$y(1) = x_1(1) \tag{3.25}$$

Asi de (3.23) *y* (3.25) *se obtiene*

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_1(1) &= 2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Mediante de la ecuación de estados se tiene que

$$\begin{aligned} x_1(1) &= x_2(1) \\ x_2(0) &= 2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Por lo tanto el estado inicial $x(0)$ *es*

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Los estados $x(1)$ *y* $x(2)$ *se obtienen utilizando su estado anterior, para* $x(1)$ *se utiliza el estado* $x(0)$ *y la señal de control* $u(0)$ *de* (3.24).

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [2] = \begin{bmatrix} 2 \\ -0{,}16 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Y por ultimo para el estado $x(2)$ *se utiliza el mismo procedimiento con* $x(1)$ *de* (3.30) *y la señal de control* $u(1)$ *de* (3.24).

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1{,}16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-1] = \begin{bmatrix} -0{,}16 \\ -0{,}16 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

■

Ejemplo 45 (Ejercicio B-6-10, p. 513, [2]) *Considere el sistema siguiente que se da en la forma canónica controlable:*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \tag{3.31}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \vdots b_2 - a_2 b_0 \vdots b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k). \tag{3.32}$$

Se desea transformar las ecuaciones del sistema a dicha forma canónica observable, mediante la transformación del vector de estado:

$$x = Q\hat{x}.$$

Determine una matriz de transformación $\boldsymbol{Q}$ *de la forma canónica deseada.*

Solución 45 (del Ejemplo 45) *La ecuación de estado en tiempo discreto y la ecuación de salida son:*

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \tag{3.33}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \tag{3.34}$$

Sustituyendo la transformación de $x(k) = Q\hat{x}(k)$ *en* (3.33) *y* (3.34)*, se tiene:*

$$\begin{aligned} Q\hat{x}(k+1) &= GQ\hat{x}(k) + Hu(k) \\ \hat{x}(k+1) &= Q^{-1}GQ\hat{x}(k) + Q^{-1}Hu(k), \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$y(k) = CQ\hat{x}(k) + Du(k). \tag{3.36}$$

Utilizando los pasos para la transformación a forma canónica observable, p. 398, [2]:

$$Q^{-1}GQ = \hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

$$Q^{-1}H = \hat{H} = \begin{bmatrix} b_3 - a_3b_0 \\ b_2 - a_2b_0 \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

Tomando como referencia la matriz $\boldsymbol{Q}$ *que dara la forma de* $\hat{G}$ *de* (3.37)*, p. 398, [2], se tiene lo siguiente:*

$$Q = (WN^*)^{-1}, \tag{3.39}$$

Donde se tiene que la matriz W *corresponde a:*

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

Y se define la matriz de observabilidad como:

$$N = \begin{bmatrix} C^* & \vdots & G^*C^* & \vdots & G^{*2}C^* \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

Definiendo que C^* *es:*

$$C^* = \begin{bmatrix} b_3 - a_3b_0 \\ b_2 - a_2b_0 \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

Por lo tanto, N^* *corresponde a:*

$$N^* = \begin{bmatrix} b_3 - a_3b_0 & a_1a_3b_0 - a_3b_1 & a_2a_3b_0 - a_3b_2 - a_1^2a_3b_0 + a_1a_3b_1 \\ b_2 - a_2b_0 & a_1b_0a_2 - a_2b_1 - a_3b_0 + b_3 & -a_1^2a_2b_0 + a_1a_2b_1 + a_1a_3b_0 + a_2^2b_0 - a_2b_2 - a_3b_1 \\ b_1 - a_1b_0 & a_1^2b_0 - a_1b_1 - a_2b_0 + b_2 & -a_1^3b_0 + a_1^2b_1 + a_1a_2b_0 - a_1b_2 + a_1a_2b_0 - a_2b_1 - a_3b_0 + b_3 \end{bmatrix}^T. \tag{3.43}$$

Ahora bien, con (3.40)*y* (3.43) *se obtiene* WN^**:*

$$WN^* = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_1b_3 - a_3b_1 & b_3 - a_3b_0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 + b_3 - a_3b_0 & b_2 - a_2b_0 \\ b_3 - a_3b_0 & b_2 - a_2b_0 & b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

*Finalmente, se tiene que la matriz de transformación **Q** deseada es:*

$$Q = (WN^*)^{-1}.$$

■

Ejemplo 46 (del Ejercicio B-6-12, p. 513, [2]) *Considere el sistema definido por*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}16 & 0{,}84 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{3.45}$$

Determine la matriz de ganancia de realimentación del estado, K, tal que cuando la señal de control esté dada por

$$u(k) = -Kx(k) \tag{3.46}$$

el sistema en lazo cerrado mostrará una respuesta con oscilaciones muertas a cualquier estado inicial x(0).

Solución 46 (del Ejemplo 46) *Primeramente se debe calcular la matriz de controlabilidad de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} H & \vdots & GH & \vdots & G^2H \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}68 \\ 1 & 0{,}68 & 0{,}68 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Posteriormente se procede a la verificación de controlabilidad mediante el calculo del determinante de (3.47)*, el cual da como resultado* $-0{,}1024$*, por lo que se determina que el sistema es controlable.*

Para el cálculo de K, se procede a resolver la siguiente fórmula

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_3 - a_3 & \vdots & \alpha_2 - a_2 & \vdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} \tag{3.48}$$

Del enunciado se conoce que

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \\ a_1 = 0, \qquad a_2 = -0{,}84, \qquad a_3 = 0{,}16 \end{gathered} \tag{3.49}$$

El cálculo de T, se realiza de la siguiente forma

$$T = MW \tag{3.50}$$

Los valores de M, se obtienen de (3.47)*, mientras que W se obtiene con el método a continuación descrito*

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0{,}84 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Al realizar la sistitución de (3.47) *y* (3.51) *en* (3.50) *se obtiene*

$$T=\begin{bmatrix} 0{,}16 & 1 & 1\\ -0{,}16 & 1 & 1\\ -0{,}16 & 0{,}68 & 1\end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Por lo tanto T^{-1} sería

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} 3{,}125 & -3{,}125 & 0\\ 0 & 3{,}125 & -3{,}125\\ 0{,}5 & -2{,}625 & 3{,}125\end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Finalmente al sustituir (3.49) *y* (3.53) *en* (3.48) *se obtiene*

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} -0{,}16 & 0{,}84 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3{,}125 & -3{,}125 & 0\\ 0 & 3{,}125 & -3{,}125\\ 0{,}5 & -2{,}625 & 3{,}125\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -0{,}5 & 3{,}125 & -2{,}625\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.54}$$

■

Ejemplo 47 (Ejercicio B-6-14, p. 514, [2]) *Considere el sistema:*

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k), \tag{3.55}$$

$$y(k)=Cx(k). \tag{3.56}$$

Donde,

$$\begin{gathered} x(k) = \textit{vector de estado (de dimensión 3)}\\ u(k) = \textit{señal de control (escalar)}\\ y(k) = \textit{señal de salida (escalar)} \end{gathered}$$

y

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}25\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0{,}5\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Si se supone que es medible la salida $y(k)$, diseñe un observador de orden mínimo, tal que la respuesta al error de observador inicial sea con oscilaciones muertas.

Solución 47 (del Ejemplo 47) *De acuerdo con la ecuación (6-138) p. 446 [2], primero se deben tomar en cuenta las sustituciones para observador de orden mínimo. Asismismo se puede consultar la Tabla 6-1, p. 448 [2].*

$$G_{aa}=0, \qquad G_{ab}=\begin{bmatrix}0 & -0{,}25\end{bmatrix}, \qquad G_{ba}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

$$G_{bb}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0{,}5\end{bmatrix}, \qquad H_a=1, \qquad H_b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \tag{3.58}$$

La matriz de ganancia de realimentación del observador K_e se determina utilizando la fórmula de Ackermann modificada, según la ecuación (6-153) p. 450, [2], se tiene:

$$K_e = \phi\left(G_{bb}\right)\begin{bmatrix} G_{ab} \\ G_{ab}G_{bb} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

Para que la respuesta al error de observador inicial sea con oscilaciones muertas, se tiene:

$$\phi\left(G_{bb}\right) = \left(G_{bb}\right)^{n-1} = \left(G_{bb}\right)^2$$

Donde se tiene:

$$\phi\left(G_{bb}\right) = \left(G_{bb}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

$$\left(G_{ab}\right)\left(G_{bb}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}25 & -0{,}125 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Con lo anterior, se puede expresar K_e de la siguiente manera:

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}125 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Finalmente, las ecuaciones para el observador de orden mínimo son:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2(k) \\ \tilde{\eta}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} y(k), \tag{3.63}$$

$$\tilde{\eta}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tilde{\eta}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(k). \tag{3.64}$$

■

Ejemplo 48 (Ejercicio B-9-13, p. 721, [3]) *Considere el sistema definido mediante:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{3.65}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{3.66}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable?

Solución 48 (del Ejemplo 50) *Para determinar si el sistema es completamente controlable, se utiliza la matriz de controlabilidad* (3.67).

$$\left[B|AB|\ldots|A^{n-1}B\right]. \tag{3.67}$$

Sustituyendo las matrices A y B de (3.65) *en* (3.67) *se obtiene:*

$$\left[B|AB|\ldots|A^{n-1}B\right] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}. \tag{3.68}$$

La matriz (3.68) *es no singular debido a que su determinante es diferente de cero, además su rango es 3, es decir, posee 3 vectores columna linealmente independientes, lo que demuestra que es un sistema de estado completamente controlable.*

Para determinar si el sistema es completamente observable, se utiliza la matriz de observabilidad (3.69).

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.69}$$

Ahora bien, se sustituyen las matrices A y C de (3.65) *y* (3.66) *en* (3.69) *de la siguiente forma:*

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

La matriz (3.70) *tiene un rango de 3, asimismo es una matriz no singular; lo cual demuestra que es un sistema de estado completamente observable.*

Con lo anterior se demuestra que el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable. ■

Ejemplo 49 (Libre adaptación del Ejercicio B-9-14, p. 721, [3]) *Considere el sistema dado por*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.71}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable?

Solución 49 (del Ejemplo 49) *Para comprobar la controlabilidad completa del sistema descrito en* (3.71) *se utiliza el criterio de controlabilidad de Kalman*

$$Rango\left(\begin{bmatrix} B \quad AB \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n \tag{3.72}$$

Se obtienen las matrices del sistema.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

Ahora se obtiene la matriz de controlabilidad

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

Utilizando la definición de rango se obtiene

$$Rango\left(P_c\right) = 3 \tag{3.75}$$

Cumple con el criterio de controlabilidad por lo cual (3.71) *es completamente controlable.*
Para determinar la observabilidad se realiza el mismo procedimiento con la matriz de observabilidad.

$$Rango\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n \tag{3.76}$$

Se obtienen las matrices del sistema.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

A partir de (3.77) *se obtiene la matriz de observabilidad*

$$P_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

Utilizando nuevamente la definición de rango se obtiene

$$Rango\left(P_o\right) = 2 \tag{3.79}$$

Por lo cual (3.71) *no cumple el criterio de observabilidad, el sistema no es completamente observable.*
Sec concluye que el sistema es de estado completamente controlable, pero no es de estado completamente observable. ∎

Ejemplo 50 (Ejercicio B-9-17, p. 721, [3]) *Sea el sistema:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{3.81}$$

(a) *Demuestre que el sistema es completamente observable.*
(b) *Demuestre que el sistema es completamente observable si la salida se obtiene mediante*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{3.82}$$

Solución 50 (del Ejemplo 50) *De* (3.80) *y* (3.81) *se tiene lo siguiente:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

(a) *Para determinar si el sistema es completamente observable, se utiliza la matriz de observabilidad de la siguiente forma:*

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

El determinante de la matriz (3.85) *es:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.86}$$

La matriz (3.85) *tiene un rango de 2, asimismo es una matriz singular* (3.86)*; lo cual demuestra que es un sistema de estado no completamente observable.*

(b) *Sabiendo que el vector de salida está dado por:*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \hat{C}x. \tag{3.87}$$

Donde, para este caso se utiliza la matriz de observabilidad transpuesta, esto por las dimensiones de $\hat{C}x$:

$$\left[\hat{C}^{*}|A^{*}\hat{C}^{*}|\ldots|\hat{C}^{*}A^{*2}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 13 & 35 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.88}$$

La matriz (3.88) *posee un rango mayor o igual que 3 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3, tal que su determinante no sea nulo. Por lo tanto:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \tag{3.89}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 13 & 35 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -42 \tag{3.90}$$

Finalmente, utilizando las filas 1, 2 y 3; y las filas 1, 4 y 6 de la matriz (3.88) *se obtienen determinantes diferentes a cero. De manera que* (3.88) *tiene un rango de 3 , por lo tanto, el sistema es completamente observable.* ■

Ejemplo 51 (del Ejercicio B-10-3, p. 855, [3]) *Sea el sistema definido por*

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.91}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

Usando el control mediante realimentación del estado u=-Kx, se desea tener los polos en lazo cerrado en $s = -2 \pm j4$, $s = -10$. Determine la matriz de ganancias de realimantación del estado K.

Solución 51 (del Ejemplo 51) *Asumiendo que ya se comprobó la condición de controlabilidad del sistema, se procede a determinar la matriz K utilizando la fórmula de Ackermann donde*

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & AB & A^2B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) \tag{3.93}$$

donde

$$\phi(A) = A^3 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 I \tag{3.94}$$

La matriz $\phi(A)$ se puede extraer del ejemplo 10-1 en [3]

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

Luego se calcula la matriz

$$\begin{bmatrix} A & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -11 \\ 1 & -11 & 60 \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

Ahora, sustituyendo (3.95) *y* (3.96) *en* (3.93) *finalmente se obtiene la matriz de ganancias de realimentación del estado K.*

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -11 \\ 1 & -11 & 60 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28{,}7831 & 5{,}5181 & 2{,}4819 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.97}$$

■

Ejemplo 52 (del Ejercicio B-10-5, p. 855, [3]) *Sea el sistema definido mediante*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{3.98}$$

Demuestre que el sistema no puede estabilizarse mediante el control de realimentación de estado $u = -Kx$, cualquiera que sea la matriz K que se elija.

Solución 52 (del Ejemplo 52) *Para iniciar, se sustituye $u = -Kx$ en* (3.98) *de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1-k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.99}$$

Finalmente al obtener la ecuación característica del sistema se obtiene

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+k_1 & -1+k_2 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s+k_1)(s-2) \tag{3.100}$$

Como se observa en (3.100)*, el sistema posee un polo al lado derecho del plano s sin importar los valores de k_1 y k_2, por lo tanto no se puede estabilizar por este método de control.* ■

Ejemplo 53 (Libre adaptación del ejercicio B-10-9, p. 856, [3]) *Sea el sistema del péndulo invertido que se muestra en la Figura 3.1. Suponga que:*

$$M = 2\,kg, \qquad m = 0{,}5\,kg, \qquad l = 1\,m,$$

Defina las variables de estado como:

$$x_1 = \theta, \qquad x_2 = \dot{\theta}, \qquad x_3 = x, \qquad x_4 = \dot{x},$$

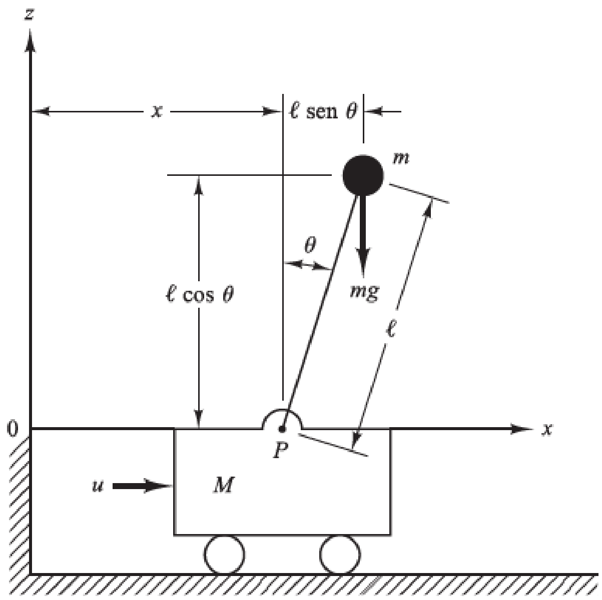

Figura 3.1: Sistema del péndulo invertido [3].

y las variables de salida como:

$$y_1 = \theta = x_1, \qquad y_2 = x = x_3,$$

Obtenga las ecuaciones en el espacio de estados para este sistema. Se quiere tener polos en lazo cerrado en:

$$s = -4 + j4, \qquad s = -4 - j4, \qquad s = -20, \qquad s = -20,$$

*Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K**.*

Solución 53 (del Ejemplo 53) *Utilizando el Ejemplo 10-5 p. 746, [3]; se determina el siguiente modelo matemático para el péndulo invertido de la Figura 3.1:*

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} &= mgl\theta.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Modificando (3.101) *se obtiene:*

$$\begin{aligned}ml\ddot{\theta} &= (M+m)\,g\theta - u \\ M\ddot{x} &= u - mg\theta.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Con las variables de estado definidas en el ejercicio, se obtiene:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{Ml}\\ 0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u. \tag{3.103}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{3.104}$$

Sustiyendo los valores numéricos brindados $\left(M = 2kg, m = 0{,}5kg, l = 1m, g = 9{,}8m/s^2\right)$ *, en* (3.103) *y* (3.104)*, se tiene:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} u. \tag{3.105}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{3.106}$$

Con lo anterior se determinan las matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}. \tag{3.107}$$

Para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** *se utiliza la Fórmula de Ackermann, p.756 [3].*

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[B|AB|A^2B|A^3B\right]^{-1} \phi(A). \tag{3.108}$$

Donde el polinomio característico deseado corresponde a:

$$\phi(s) = (s+4+j4)(s+4-j4)(s+20)^2 = s^4 + 48s^3 + 752s^2 + 12800.$$

$$\begin{aligned} \phi(A) &= A^4 + 48A^3 + 752A^2 + 12800I \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4 + 48 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + 752 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 12800I \\ &= \begin{bmatrix} 22162{,}06 & 5068 & 0 & 0 \\ 62083 & 22162{,}06 & 0 & 0 \\ -1872{,}41 & -117{,}6 & 12800 & 4480 \\ -12416{,}6 & -1872{,}41 & 0 & 12800 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Ahora bien, sustituyendo en (3.108) *se tiene:*

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 & -6{,}125 \\ -0{,}5 & 0 & -6{,}125 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1{,}225 \\ 0{,}5 & 0 & 1{,}225 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 22162{,}06 & 5068 & 0 & 0 \\ 62083 & 22162{,}06 & 0 & 0 \\ -1872{,}41 & -117{,}6 & 12800 & 4480 \\ -12416{,}6 & -1872{,}41 & 0 & 12800 \end{bmatrix}$$

*Finalmente, la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** es:*

$$K = \begin{bmatrix} -4140{,}74 & -1010{,}29 & -2612{,}24 & -914{,}286 \end{bmatrix}. \tag{3.110}$$

*Ahora bien, con la matriz **K** se determina la ecuación para el observador de estado:*

$$u = -Kx$$

$$\dot{x} = (A - BK)\,x$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4140{,}74 & -1010{,}29 & -2612{,}24 & -914{,}286 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2058{,}12 & -505{,}143 & -1306{,}12 & -457{,}143 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2067{,}92 & 505{,}143 & 1306{,}12 & 457{,}143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.111}$$

■

Ejemplo 54 (del Ejercicio B-10-12, p. 856, [3]) *Sea el sistema definido por*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1{,}244 & 0{,}3956 & -3{,}145 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}244 \end{bmatrix} u \tag{3.112}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

Dado el conjunto de polos deseados para el observador en

$$s = -5 + j5\sqrt{3}, \qquad s = -5 - 5j\sqrt{3}, \qquad s = -10 \tag{3.114}$$

diseñe un observador de estado de orden completo.

Solución 54 (del Ejemplo 52) *Inicialmente se debe obtener la matriz de observabilidad de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.115}$$

El determinante de (3.115) *es* 1*, por lo que el sistema es totalmente observable.*

Para obtener la ganancia de un observador de estados de orden completo se debe seguir el método presentado a continuación

$$K_e = Q\begin{bmatrix}\alpha_3 - a_3\\ \alpha_2 - a_2\\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Donde Q se obtiene de

$$Q = (WN)^{-1} \tag{3.117}$$

En (3.117)*, W es la siguiente matriz*

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1\\ a_1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.118}$$

Los valores de a_1 *y* a_2 *solicitados en* (3.118) *se obtienen de la ecuación característica del sistema resultando*

$$a_1 = 3{,}145, \qquad a_2 = -0{,}3956, \qquad a_3 = -1{,}244 \tag{3.119}$$

Al sustituir en (3.118) *los valores de* (3.119) *se obtiene*

$$W = \begin{bmatrix} -0{,}3956 & 3{,}145 & 1\\ 3{,}145 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.120}$$

Combinando (3.117) *y* (3.120) *se logra*

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} -0{,}3956 & 3{,}145 & 1\\ 3{,}145 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3{,}145\\ 1 & -3{,}145 & 10{,}2866\\ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.121}$$

Seguidamente los valores de α_1*,* α_2*,* α_3 *so determinados por la ecuación característica deseada de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} EC_D =&(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)\\ =&(s+5-j5\sqrt{3})(s+5+j5\sqrt{3})(s+10)\\ =&s^3+20s^2+200s+1000 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Por lo tanto

$$\alpha_1 = 20, \qquad \alpha_2 = 200, \qquad \alpha_3 = 1000 \tag{3.123}$$

Tomando los valores de (3.119)*,* (3.123)*,* (3.121) *y sustituyendolos en* (3.116) *se obtiene*

$$K_e = Q\begin{bmatrix}\alpha_3 - a_3\\ \alpha_2 - a_2\\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16{,}855\\ 147{,}387\\ 549{,}381\end{bmatrix} \tag{3.124}$$

Finalmente, luego de obtener (3.124)*, el observador completo de estados tiene la forma*

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_e y \tag{3.125}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\\ \dot{\tilde{x}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16{,}855 & 1 & 0\\ -147{,}387 & 0 & 1\\ -543{,}137 & 0{,}3956 & -3{,}145\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1{,}244\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}16{,}855\\ 147{,}387\\ 549{,}381\end{bmatrix}y \tag{3.126}$$

■

Bibliografía

[1] B.T. Kulakowski, J.F. Gardner, and J.L. Shearer. *Dynamic modeling and control of engineering systems*. Cambridge University Press, EE.UU., 2007.

[2] K. Ogata. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Pearson educación, EE.UU., 1996.

[3] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación, EE.UU., 2010.