Control por realimentación de estados

Control Automático (EL-5408)

Escuela de de Ingeniería Electrónica

I Semestre
2016

Contenidos

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeñas, llamadas variables de estado.

Variables de estado

Sí se requieren al menos n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico, entonces, éstas son un conjunto de variables de estado.

Considere un sistema cuya función de transferencia la cual se define como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \tag{1}$$

En este sistema, el espacio de estados se representa con:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$

$$y = Cx + Du \tag{3}$$

En donde x describe el vector de estado, u la señal de entrada, y y la salida.

Relación entre el comportamiento en el tiempo y la ubicación de los polos

Representaciones en el espacio de estados de sists. definidos por su FT (III)

Al aplicar la transformada de Laplace a (2) y (3):

$$L\{\dot{x}\} = L\{Ax + Bu\} \tag{4}$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \tag{5}$$

Suponiendo que x(0)=0, entonces:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \tag{6}$$

$$X(s)(sI - A) = BU(s) \tag{7}$$

$$X(s) = \frac{BU(s)}{(sI - A)} \tag{8}$$

Ahora se aplica la transformada de Laplace a (3):

$$L\{y\} = L\{Cx + Du\} \tag{9}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{10}$$

Sustituyendo (8) en (10):

$$Y(s) = \frac{CB}{(sI - A)}U(s) + DU(s) \tag{11}$$

$$Y(s) = U(s)\left(\frac{CB}{sI - A} + D\right) \tag{12}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \left(\frac{CB + D(sI - A)}{|sI - A|} \right) \tag{13}$$

En donde $|sI - A|$ e el polinomio característico de $G(s)$. Los valores propios de una matriz A nxn, los valores propios son las raíces de la ecuación característica tal que:

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{14}$$

Una vez que se determina este polinomio, se procede a definir la matriz de transición de estados:

$$\varphi(t) = e^{At} \tag{15}$$

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} \tag{16}$$

$$\varphi(t, t_0) = L^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} \tag{17}$$

Propiedades de la matriz de transferencia de estados

- $\varphi(0) = e^{A0} = I$
- $\varphi^{-1}(t) = |e^{At}|^{-1} = e^{-At} = \varphi(-t)$
- $\varphi(t_1 + t_2) = |e^{A(t_1+t_2)}| = e^{At_1}e^{At_2} = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$
- $(\varphi(t))^n = \varphi(nt)$
- $\varphi(t_2 - t_1)\varphi(t_1 - t_0) = \varphi(t_2 - t_0) = \varphi(t_1 - t_0)\varphi(t_2 - t_1)$

Se definen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y \\ &= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} \tag{19}$$

Forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{20}$$

$$y = [b_n - a_n b_0 | b_{n-1} - a_{n-1} b_0 | \dots | b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{21}$$

Relación entre el comportamiento en el tiempo y la ubicación de los polos

Representaciones en el espacio de estados de sists. definidos por su FT (VIII)

Forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (22)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (23)$$

Forma canónica diagonal:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s+p_n}\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{25}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{26}$$

Forma canónica de Jordan:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4)(s+p_5)\ldots(s+p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \ldots + \frac{c_n}{s+p_n} \quad (27)$$

Forma canónica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & \dots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{28}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{29}$$

Ejemplo 1: (Ejercicio 9-1 [1])

Considere el sistema definido por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \tag{30}$$

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, en la observable y en la diagonal.

Solución:
FCC: se identifican los términos a_n y b_n.

$$\begin{aligned} n &= 2 \quad & b_0 &= 0 \\ a_1 &= 3 \quad & b_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \quad & b_2 &= 3 \end{aligned} \tag{31}$$

Ahora, se sustituyen estos valores en (20):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{32}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

FCO: Ahora, se sustituyen estos valores en (22):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{34}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

FCD: Ahora, se sustituyen estos valores en (25):

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] u \tag{36}$$

$$y = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] \tag{37}$$

■

Controlabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{38}$$

Donde:

- u es la señal de control
- B es una matriz nx1
- x es un vector de estados
- A es una matriz nxn

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{39}$$

Si el $det[M] \neq 0$, el sistema es controlable.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

Otros criterios para determinar controlabilidad incluyen:

- M cuya forma es (nxnr), tiene rango n.
- Si M no es cuadrada, se forma MM', la cual tiene forma nxn, y si ésta no es singular, M tiene rango.
- El par $[A, B]$, es completamente controlable si están en la forma canónica controlable o son transformables a esta.
- A está en la forma FCD, sus valores propios son diferentes y todos los elementos de B no son 0.
- A está en la forma FCJ y los elementos de B en los renglones que corresponden al último renglón de cada bloque de Jordan no son todos 0.

Controlabilidad a la salida

$$M = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix} \tag{40}$$

La cual tiene la forma mx(n+1)r

- El sistema es controlable a la salida si ésta matriz posee rango m.
- Un sistema no es controlable si tiene un subsitema que esté desconectado físicamente de la entrada.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo discreto

$$x((k+1)T) = A_d x(kT) + B_d u(kT) \tag{41}$$

$$y(kT) = A_d x(kT) + B_d u(kT) \tag{42}$$

$$M = \left[\begin{array}{cccccc} B_d & A_d B_d & A_d^2 B_d & \ldots & A_d^{n-1} B_d & D \end{array}\right] \tag{43}$$

De salida se tiene la ecuación:

$$M = \left[\begin{array}{cccccc} CB_d & CA_d B_d & CA_d^2 B_d & \ldots & CA_d^{n-1} B_d & D \end{array}\right] \tag{44}$$

Observabilidad

El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible.

Observabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax \tag{45}$$

$$y = Cx \tag{46}$$

Donde:

- C es una matriz mxn
- x es un vector de estados de dimensión n
- y es un vector de salida de dimensión m

$$S = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{47}$$

Si el $det[S] \neq 0$, el sistema es observable.

Observabilidad

Otros criterios para determinar observabilidad incluyen:

- Si el sistema tiene solo una salida, C es una matriz de renglón de 1xn y S es una matriz cuadrada de nxn, entonces el sistema es completamente observable si S no es singular.
- Para un sistema SISO, el par $[A, C]$ es completamente observable si A y C están o son transformables a la FCO mediante ua trasformación de similitud.
- Si A está en la forma FCD, el par $[A, C]$ es completamente observable si todos los elementos en las columnas de C son diferentes de 0.
- A está en la forma FCJ, el par $[A, C]$ es completamente observable si todos los elementos en las columnas de C que corresponden al primer renglón de cada bloque de Jordan no son todos 0.

Observabilidad en tiempo discreto

$$x((k+1)T) = Gx(kT) \tag{48}$$

$$y(kT) = Cx(kT) \tag{49}$$

$$S = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Ejemplo 2: (Ejercicio 9-14 [1])

Sea el sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{51}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Es este sistema controlable y observable?

Solución: se identifican las matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Sustituyendo los valores en (39):

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Por lo que:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (0)(-1) - (1)(1) = -1 \tag{57}$$

Ahora, se conoce a C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Sustituyendo los valores en (47):

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{59}$$

Por lo que:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{60}$$

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(0) = 1 \tag{61}$$

Ahora, se conoce que los determinantes $|M|$ y $|S|$ son diferentes de 0, por lo que que puede decir que el sistema es controlable y observable.

■

Se determina un sistema de control:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{62}$$

$$y = Cx + Du \tag{63}$$

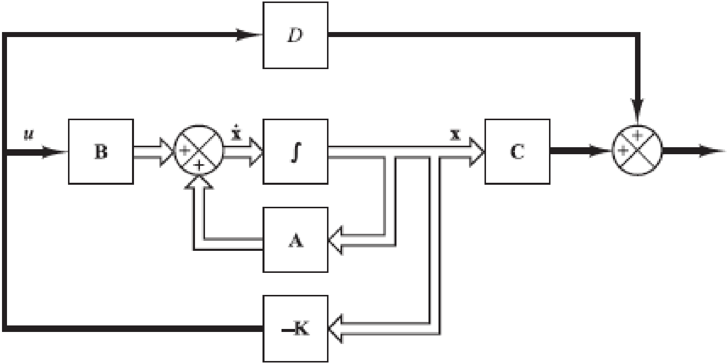
Donde:
x = vector de estado de dimensión de n.
y = señal de salida, que es un valor escalar.
u = señal de control, que es un valor escalar.
A = matriz nxn.
B = matriz nx1.
C = matriz 1xn.
D = constante.

Se selecciona una señal de control u, tal que:

$$u = -Kx \tag{64}$$

K se define como una matriz $1xn$, la cual se llama matriz de ganancia de realimentación de estado.
Se puede definir un sistema el cual no tenga restricciones sobre u, el cual se conoce como un sistema regulador, y se caracteriza por ser un de lazo cerrado y sin entradas, el cual se espera tenga salida igual a 0, sin embargo, el efecto de perturbaciones, hace que esta se desvíe de este valor.

Una forma básica de este tipo de sistemas se puede describir gráficamente como:



La única condición para la asignación de polos es que el sistema debe ser completamente controlable. Si esta condición no se cumple, se debe comenzar por demostrar que los valores propios de la matriz $A - BK$ no se pueden controlar por realimentación de estado.
Para lograr lo propuestos, se debe comenzar con la determinación del rango de la matriz de controlabilidad M.

$$rango\,[M] = q < n \tag{65}$$

Lo que significa que existen q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad.

Los vectores q se definen como f_1, f_2, $\ldots$, f_q y junto a los $n - q$ vectores adicionales v se forma la ecuación:

$$P = [f_1|\ldots|f_q|v_{q+1}|\ldots|v_n] \tag{66}$$

P tiene rango n, y permite la formación de las matrices las matrices:

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \tag{67}$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline 0 \end{array}\right] \tag{68}$$

$$\hat{K} = KP = \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \end{array}\right] \tag{69}$$

Realimentación de estado

Ubicación o asignación de polos (VI)

Estas matrices se definen por medio de la determiaci'o de las matrices A_{11}, A_{12},A_{21} y A_{22}:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} \end{bmatrix} \tag{70}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1q+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2q+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{qq+1} & \dots & a_{qn} \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{72}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{q+1q+1} & \cdots & a_{q+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{73}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \end{bmatrix} \tag{74}$$

Al observar lo anterior, se puede observar que los valores de A_{22} bo depende de K, por lo que se comprueba a su vez, que para colocar de manera arbitraria los valores propios de $A - BK$, el sistema debe ser completamente controlable.

Luego de determinar que el sistema es controlable, se debe transformar el sistema a su forma canónica controlable:

$$T = MW \tag{75}$$

Recordando que:

$$M = \left[B | AB | \ldots | A^{n-1} B \right] \tag{76}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{77}$$

Recordando que los coeficientes a_i son los coeficientes del polinomio característico:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \tag{78}$$

Se define un nuevo vector de estado, el cual se llama $\hat{x}$:

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \tag{79}$$

Para esta ecuación se determina :

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \tag{80}$$

En donde:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{81}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Luego, se seleccionan los valores propios deseados $\mu_1, \ldots, \mu_n$, los cuales dan forma a la ecuación característica:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \ldots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0 \tag{83}$$

Seguidamente se denota:

$$KT = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{bmatrix} \tag{84}$$

Por último, se usa la identidad $u = KT\hat{x}$ y se sustituye en (79):

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT + T^{-1}BKT\hat{x} \tag{85}$$

Por último, relacionando todas los valores definidos en la ecuación característica, se puede obtener la matriz K de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} \delta_n & \delta n - 1 & \dots & \delta_1 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \dots \mid \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} \end{aligned} \tag{86}$$

Determinación de la matriz K utilizando T

- Comprobar la controlabilidad del sistema.
- Determinar los valores a_i a partir del polinomio característico.
- Calcular T a partir del cálculo previo de M y W.
- Por medio de los valores propios deseados, escriba el polinomio característico de la forma (83) y determine los valores α_i.
- Determine K por medio de la ecuación (86).

Determinación de la matriz K utilizando el método de sustitución directa
Si $n \leqslant 3$:

- Escriba K de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \tag{87}$$

- Sustituya K en el polinomio característico $|sI - A + BK|$ e igualelo a $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$.
- Por último, ya que ambos lados de la ecuación está en términos de s, calcule los términos k_i por medio de la igualación de coeficientes de las potencias iguales de s.

Determinación de la matriz K utilizando fórmula de Ackermann
Se define un sistema de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{88}$$

Usando una señal de control de la forma

$$u = -Kx \tag{89}$$

El cálculo de K se realiza de la siguiente manera:

$$K = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{array}\right]^{-1} \phi(A) \tag{90}$$

En donde $\phi(A)$ es el polinomio característico evaluado en la matriz A original.

Ejemplo 3 [Ejercicio 10-1 [1]]

Sea el sistema regulador:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{91}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema usa el cotrol mediante realimentación del estado $u = -Kx$. Se escogen los polos en lazo cerrado en:

$$s = -2 + j4,\ s = -2 - j4,\ s = -10$$

Determine la matriz de realimentación del estado K.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \tag{92}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \\ 6 & 29 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 31 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{94}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ -1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \tag{95}$$

Métodos:

- Cálculo de K por medio de T

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & (s+6) \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 5s + 1 = 0 \tag{96}$$

De lo anterior se identifican los valores a_i:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 1$$

Ya que se conocen los polos deseados, entoces se calcula la ecuación característica:

$$(s+2-j4)(s+2+j4)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0 \tag{97}$$

De lo anterior se identifican los valores α_i:

$$\alpha_1 = 14, \quad \alpha_2 = 60, \quad \alpha_3 = 200$$

$$k_1 = \alpha_3 - a_3 = 200 - 1 = 199 \tag{98}$$

$$k_2 = \alpha_2 - a_2 = 60 - 5 = 55 \tag{99}$$

$$k_3 = \alpha_1 - a_1 = 14 - 6 = 8 \tag{100}$$

$$K = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \tag{101}$$

- Cálculo de K por sustitución directa:

Como se explicó anteriormente, se inicia con la definición de la matriz (87), para luego sustituir en la ecuación característica $|sI - A + BK|$:

$$
\begin{aligned}
&\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ (1 + k_1) & (5 + k_2) & (s + 6 + k_3) \end{vmatrix} \\
&= s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + 1 + k_1 \qquad (102)
\end{aligned}
$$

De esta forma, se realiza la igualación de coeficientes, con la ecuación característica definida en (97).

De modo que:

$$\begin{aligned} 6 + k_3 &= 14 \\ k_3 &= 8 \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned} 5 + k_2 &= 60 \\ k_2 &= 55 \end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 &= 200 \\ k_1 &= 199 \end{aligned} \tag{105}$$

$$K = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \tag{106}$$

- Cálculo de K por medio de la fórmula de Ackermann:

Conociendo que $s^3+14s^2+60s+200$ es la ecuación característica definida, se procede de la siguiente manera:

$$K = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} B & AB & A^2B \end{array}\right]^{-1} \phi(A) \tag{107}$$

$$\phi(A) = A^3 + 14A^2 + 60A + 200I \tag{108}$$

$$\begin{aligned} \phi(A) = &\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \\ &+ 60\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{109}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \tag{110}$$

Además, conociendo (105), se sustituye en (90), obteniendo:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ -1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{111}$$

Se define un sistema de control a lazo abierto:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \tag{112}$$

Donde:

- x(k): vector de estado de dimensión *n*, en el k-ésimo instante de muestreo.
- u(k): señal de control escalar, en el k-ésimo instante de muestreo.
- G: matriz nxn.
- H: matriz nx1.

Si se define a la señal de control como:

$$u(k) = -Kx(k) \tag{113}$$

Donde K es la matriz de ganancia de realimentación del estado, de forma $1xn$, por lo que a su vez se define un sistema a lazo cerrado:

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) \tag{114}$$

Finalmente se determina que los valores propios de $(G - HK)$ son los polos deseados.

En este caso se determina la matriz de controlabilidad como:

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{array}\right] \tag{115}$$

Cuyo rango determina el número de vectores columna linealmente independientes, los cuales se denotan f_q, además de los vectores adicionales v_n, lo que a su vez define las matrices:

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} f_1 & \dots & f_q & v_{q+1} & \dots & v_n \end{array}\right] \tag{116}$$

$$\hat{G} = P^{-1}GP \tag{117}$$

$$\hat{H} = P^{-1}H \tag{118}$$

Por último, la matriz K se define como:

$$\hat{K} = KP \tag{119}$$

$$K = \hat{K}T^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{array}\right] T^{-1} \tag{120}$$

Por medio de la matriz de controlabilidad M, y la definición de la matriz W, se define la matriz de transformación T.

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{array} \right] \tag{121}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{122}$$

$$T = MW \tag{123}$$

Ahora, se definen las matrices $\hat{G}$ y $\hat{H}$ en función de esta matriz T:

$$\hat{G} = T^{-1}GT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & --a_1 \end{bmatrix} \tag{124}$$

$$\hat{H} = T^{-1}H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{125}$$

Seguidamente, se defie la ecuación característica está dada por:

$$(z-\mu_1)(z-\mu_2)\ldots(z-\mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0 \tag{126}$$

En este caso, por medio de (120) y de (126), se define:

$$\alpha_i = a_i + \delta_i \tag{127}$$

Y a su vez podemos sustituir (127) en (120):

$$K = \hat{K}T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \ldots & \alpha_1 - a_1 \end{array} \right] T^{-1} \tag{128}$$

La fórmula de Ackermann al simplificarse, mantiene la forma de la caracterización en tiempo continuo, y se define como:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \mid GH \mid \dots \mid G^{n-1}H \end{bmatrix}^{-1} \phi(G) \qquad (129)$$

Bibliografía

K. Ogata.
Ingeniería de control moderna.
Pearson educación, EE.UU., 2010.