1 Уравнение Переноса

Уравнение переноса в общем случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \overrightarrow{u}) = 0 \tag{1}$$

Где u – векторное поле скоростей, f - переносимая скалярная величина, ∇ – оператор дивергенции. Определим f как функцию Хевисайда, принимающую значения 0 и 1:

$$f(x,t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in liquid \\ 0 & \mathbf{x} \notin liquid \end{cases} \tag{2}$$

В одномерном случае уравнение сводится к виду:

$$\frac{\mathrm{d} f_x}{\mathrm{d} t} + \frac{\mathrm{d}(f_x u_x)}{\mathrm{d} x} = 0 \tag{3}$$

В дальнейшем будем обозначать f_x u_x просто как f и u, подразумевая значения, взятые вдоль направлений соответствующих осей.

2 Численное решение

Для численного решения проводится дискретизация:

Отрезок $[0; X]$, на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на $cellCount$ последовательных подотрезков, длиной Δx_i каждый – ячейки сетки. i=1..cellCount. Положения $x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_{i+\frac{1}{2}}$ являются узлами данной сетки (ребрами ячеек). $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Для реализации программы была выбрана равномерная сетка с ячейками равной длины Δx. Зададим длину временного шага Δt и построим схему для вычисления средних значений функции $f(x,t)$ в каждой ячейке.

$$\overline{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t_n) dx \tag{4}$$

- среднее по ячейке значение функции $f(x,t)$ на i-ом отрезке Δx_i на n-ом временном шаге. В дальнейшем будем обозначать его как просто f_i^n.

Проинтегрируем уравнение переноса в одномерном случае (3) по времени на шаге $[t_n; t_{n+1}]$:

$$(f^{n+1} - f^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} d\tau = 0$$

Для численного дифференцирования используем явную разностную схему 2 порядка:

$$\frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i}$$

В результате уравнение переноса преобразуется к виду:

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} d\tau - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} d\tau = 0 \tag{5}$$

3 Поле скоростей твердого тела

Поле скоростей твердого тела связано по формуле Эйлера:

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{v_c}(t) + [\overrightarrow{\omega}(t) \times \overrightarrow{r}(t)]$$

А значит, для любой его компоненты (по направлению соответствующей оси) $u(x,t)$ - линейная функция по координате x.Зафиксируем шаг по времени t_n и найдем функцию $u(x)$:
Исходя из численного решения уравнения Эйлера интегрированием методом квадратур, нам известны значения $u_{i\pm\frac{1}{2}}$ на границах ячеек. Обозначим значения скорости и координаты на границах ячейки Δx_i:

$$u_{i-\frac{1}{2}} = u_L$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u_R$$

А сами границы ячейки:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = x_L$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_R$$

Тогда согласно тому, что u(x) - линейная функция:

$$\frac{u - u_L}{u_R - u_L} = \frac{x - x_L}{x_R - x_L}$$

Функция скорости на ячейке Δx_i задается как:

$$u(x) = kx + b \tag{6}$$

где

$$k = \frac{u_R - u_L}{\Delta x}$$

$$b = u_L - \frac{u_R - u_L}{\Delta x} x_L$$

4 Метод характеристик

Рассмотрим решение уравнения переноса с помощью метода характеристик.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{7}$$

Нам бы хотелось свести это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль соответствующей кривой, то есть получить уравнение вида:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x(s), t(s)) = F(f, x(s), t(s))$$

где кривая $(x(s), t(s))$ — характеристика.
Установим, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(x(s), t(s)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$