Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

Применение различных схем для численного решения уравнения переноса

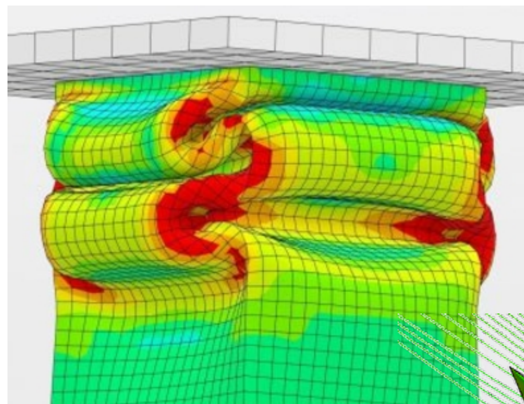
Студент 621 группы
Сенченок Григорий Антонович.
Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Меньшов Игорь Станиславович.

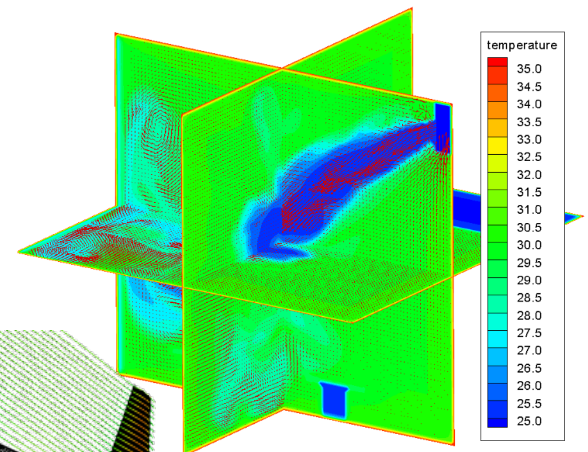
Введение

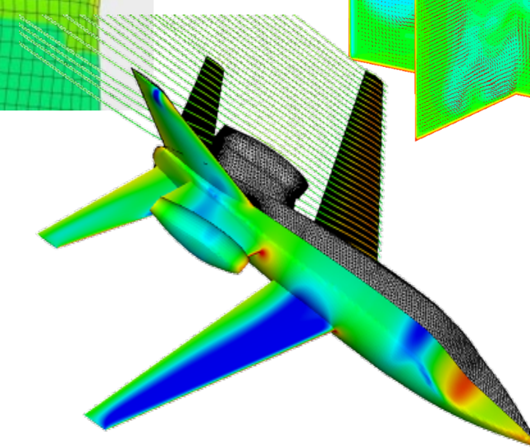
- Важный аспект решения прикладных задач - описание геометрии и области решения
- Пространственно – сложная форма исследуемых объектов

Примеры:

- Задачи теории упругости: описание деформируемых тел
- Задачи аэродинамики: геометрия летательных аппаратов
- Механика сплошной среды: описание параметров среды в пространстве



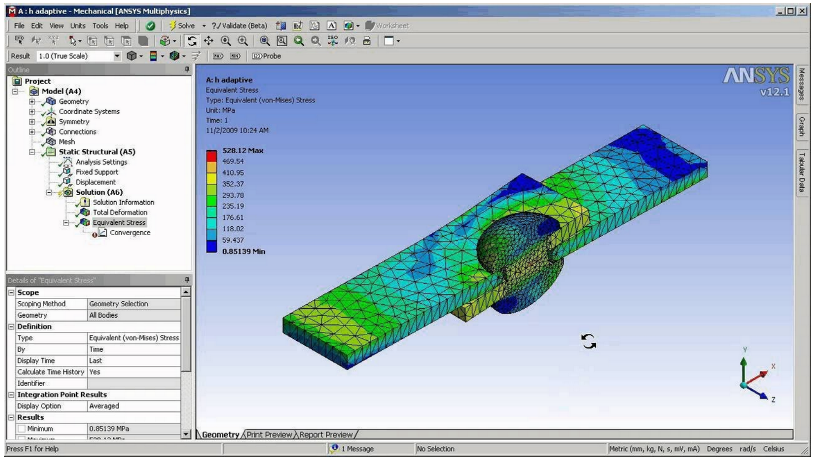


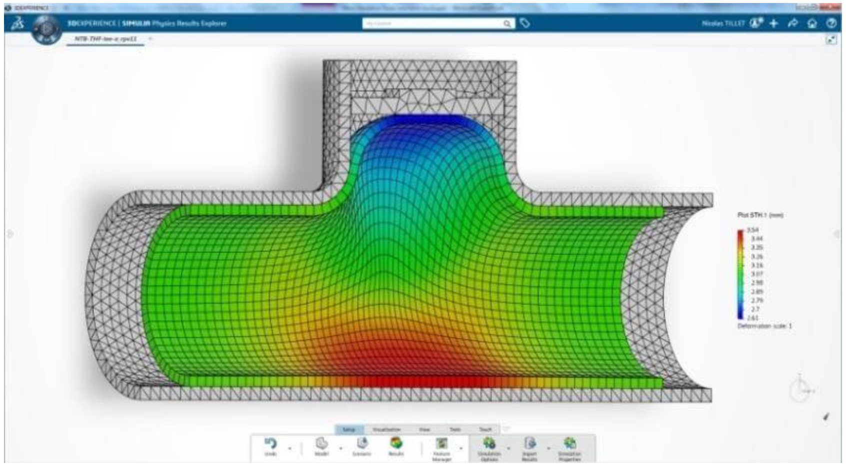


Геометрия – важный элемент вычислительного эксперимента в механике

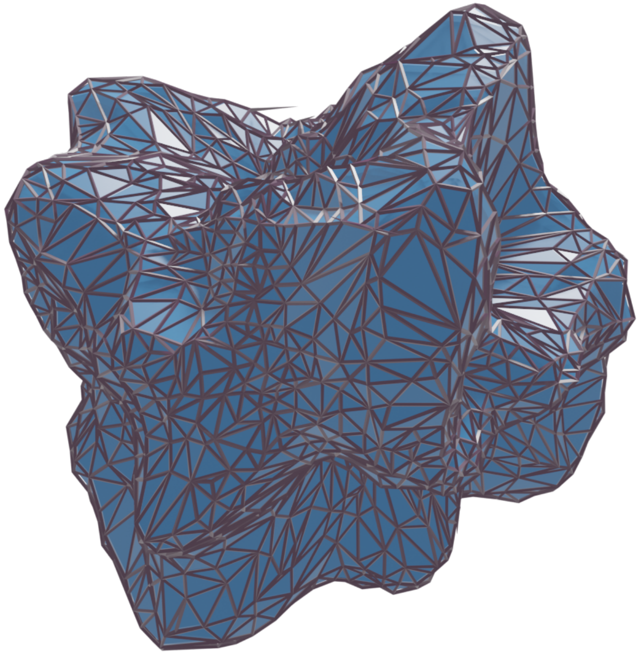
Введение

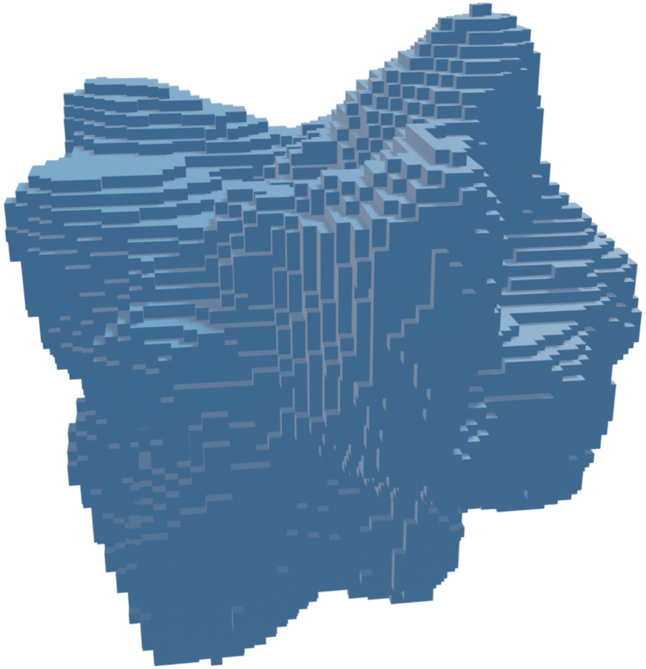
- Стандартный подход – геометрическое описание поверхности и согласованные с геометрией объекта сетки
- Реализация - компьютерные программы CAD: SolidWorks, Catia, Ansys…
- Более 50% времени решения задачи - описание геометрии и построение сетки





Digital Geometry





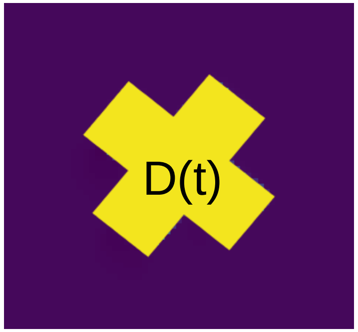
- Стандартный подход: на всей исследуемой области вводится сетка, состоящая из примитивов.
- Происходит точный расчет для большого числа малых конечных элементов,
- Большие вычислительные мощности для описания каждого примитива и сложного разбиения

- **Цифровая геометрия**: геометрия тела задается характеристической функцией
- Ее эволюция описывается уравнением переноса.
- Значительное упрощение введения сетки и облегчение расчетов, с сохранением точности на высоком уровне.

Мотивация

- Альтернативное решение: переход от геометрического представления объекта к цифровому
- Исключение задачи генерации сетки в сложных пространственных областях
- Особенно важно – для задач с изменяющейся во времени геометрией (аэродинамика подвижных объектов)

Цифровая геометрия



- Характеристическая функция твердого тела представляет собой функцию - индикатор:

$$f(x,t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \notin D(t) \\ 0 & \mathbf{x} \in D(t) \end{cases}$$

- Уравнение переноса — дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее изменение скалярной величины в пространстве и времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}\nabla \cdot f = 0$$

$\vec{u}(\vec{x},t)$ – поле скорости, индуцированное движением твердого тела D(t).

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \overrightarrow{v_c}(t) + [\vec{\omega}(t) \times (\vec{x}_c(t) - \vec{x})]$$

Векторы $\vec{v_c}(t)$ - скорость центра т.т. и $\vec{\omega}(t)$ - угловая скорость т.т. считаются заданными. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_c}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_c(t)$ н.у.: $\vec{x}_c(0) = \vec{x}_c^{\,0}$

$\vec{u}(\vec{x},t)$ – бездивергентное поле скоростей

$$div(\vec{u}) = 0$$

- Поэтому уравнение переноса рассматривается в консервативной (дивергентной) форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\vec{u}) = 0$$

н.у.: $f\,|_{t=0} = f^0$

Дискретизация

Для простоты рассмотрим 1D случай

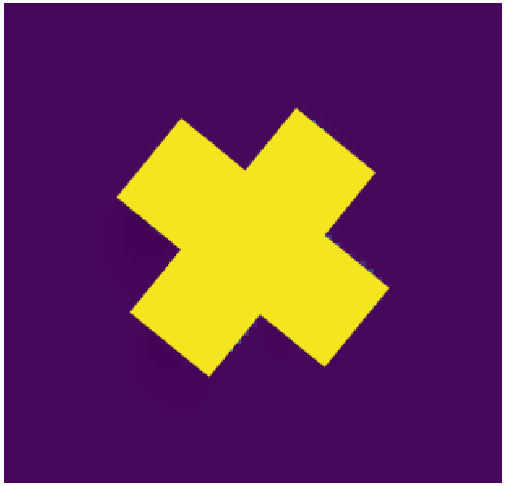
- После введения декартовой сетки производится дискретизация характеристической функции методом VoF.
- Данные значения представляют собой объемную долю части ячейки, отсекаемой геометрией

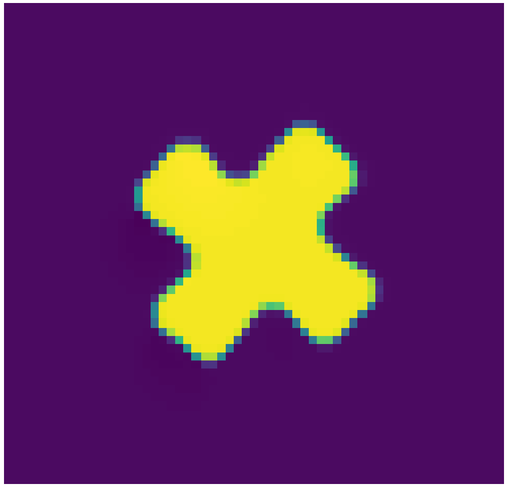
- Дискретная модель:

$$f(\vec{x}, t) \to \bar{f}_i^n$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \to u^n_{i\pm\frac{1}{2}}$$

$$\overline{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t_n) dx$$





Дискретные значения характеристической функции в ячейках сетки - это **цифровая геометрия**

Численный метод

Уравнение переноса в дивергентной форме имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\overrightarrow{u}) = 0$$

В одномерном случае:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (fu)}{\partial x} = 0$$

После интегрирования по времени:

$$(f^{n+1} - f^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial (fu)}{\partial x} d\tau = 0$$

Проинтегрируем по i-ой ячейке чтобы перейти к разностной схеме

Для твердого тела: u=const вдоль направления X

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i+\frac{1}{2}} d\tau - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i-\frac{1}{2}} d\tau = 0$$

Введем обозначение Ф для потоков через грани ячеек:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i+\frac{1}{2}} d\tau$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i-\frac{1}{2}} d\tau$$

Выражение для расчета объемной доли f на следующем шаге по времени:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{1}{\Delta x_i}(\Phi_{i+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}) = 0$$

Задача заключается в определении потоков как можно более **точно**

Метод характеристик

Пусть в момент времени tau=0 (t=tn) задано начальное распределение функции f

$$f^n = f^n(x) = \Phi_0(x)$$

Для вычисления значений f на гранях ячеек используется метод характеристик.

Полная производная f(x, t) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

Исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Тогда $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t),t) = u(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}$ =0

Таким образом, если выполняется **уравнение характеристик** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(t)$

То вдоль характеристики (x(t),t) исходное уравнение в частных производных будет иметь вид: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$

Данное уравнение говорит о том, что вдоль характеристик решение постоянное. Таким образом, f(x,t)=f(x0,0), где точки (x,t) и (x0,0) лежат на одной характеристике.

$$x(t_n+\tau) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+\tau} u(t)dt + C$$

Найдем такую характеристику, которая в tau* проходила через x*.

$$x(t_n+\tau) = \int_{t_n}^{t_n+\tau} u(t)dt + x^* - \int_{t_n}^{t_n+\tau^*} u(t)dt$$

Узнаем координату, из которой выходила данная характеристика в момент времени tau=0:

$$x\mid_{\tau=0} = x^* - \int_{t_n}^{t_n+\tau^*} u(t)dt$$

Теперь пространственная координата связана с временной

Аппроксимация интегралов

Выражение для точного расчета потоков через грани ячеек, полученное методом

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u\Phi_0(x_{i+\frac{1}{2}} - \int_{t_n}^{t_n+\tau} u(t)dt)d\tau \qquad \Phi_{i-\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u\Phi_0(x_{i-\frac{1}{2}} - \int_{t_n}^{t_n+\tau} u(t)dt)d\tau$$

Для вычисления потоков были исследованы следующие методы подсеточной реконструкции:

- MUSCL: восполнение ллинейной функцией
- THINC: восполнение гиперболическим тангенсом
- JR: восполнение скачком

Непрерывное распределение (методы MUSCL, THINC):
Квадратурная формула трапеции

$$x\mid_{\tau=0} = x^* - \int_{t_n}^{t_n+\tau^*} u(t)dt = x^* - \Delta t\frac{u(t_n) + u(t_n+\tau^*)}{2}$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i+\frac{1}{2}} d\tau = \frac{\Delta t}{2}(u^{n+1} f_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + u^n f_{i+\frac{1}{2}}^n)$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{\Delta t}{2}(u^{n+1} f_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + u^n f_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

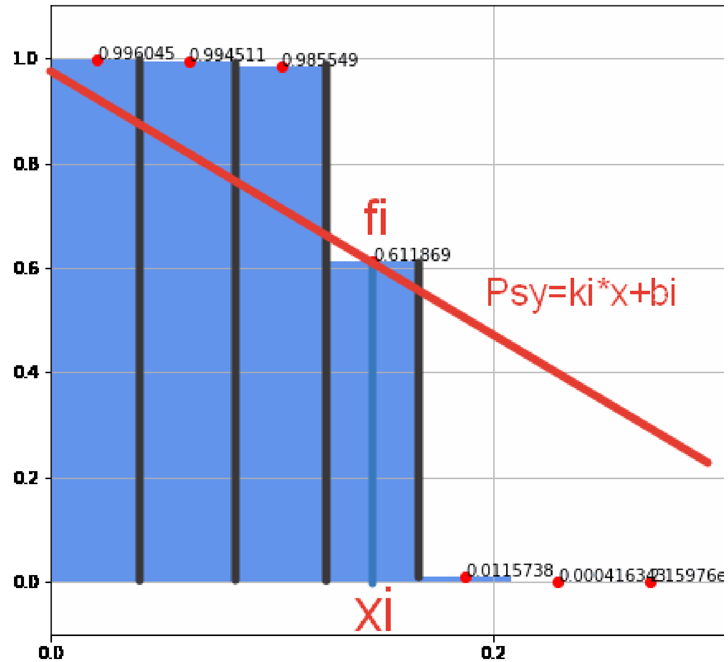
Финальное выражение для расчета потоков через грани ячеек:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2}(u^n\Psi_0(x_R) + u^{n+1}\Psi_0(x^R - \Delta t\frac{u^n + u^{n+1}}{2})))$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2}(u^n\Psi_0(x_L) + u^{n+1}\Psi_0(x^L - \Delta t\frac{u^n + u^{n+1}}{2})))$$

MUSCL

$$\Psi_{\mathrm{i}}(x) = k_i x + b_i$$



$$k_i = minmod\left(\tilde{f}_i^{R}, \tilde{f}_i^{L}\right)$$

$$\tilde{f}_i^{R} = \frac{\bar{f}_{i+1} - \bar{f}_i}{h}$$

$$\tilde{f}_i^{L} = \frac{\bar{f}_i - \bar{f}_{i-1}}{h}$$

$$minmod(a,b) = \begin{cases} 0 & , ab < 0 \\ sgn(a)\min\left(|a|, |b|\right) & , ab \geq 0 \end{cases}$$

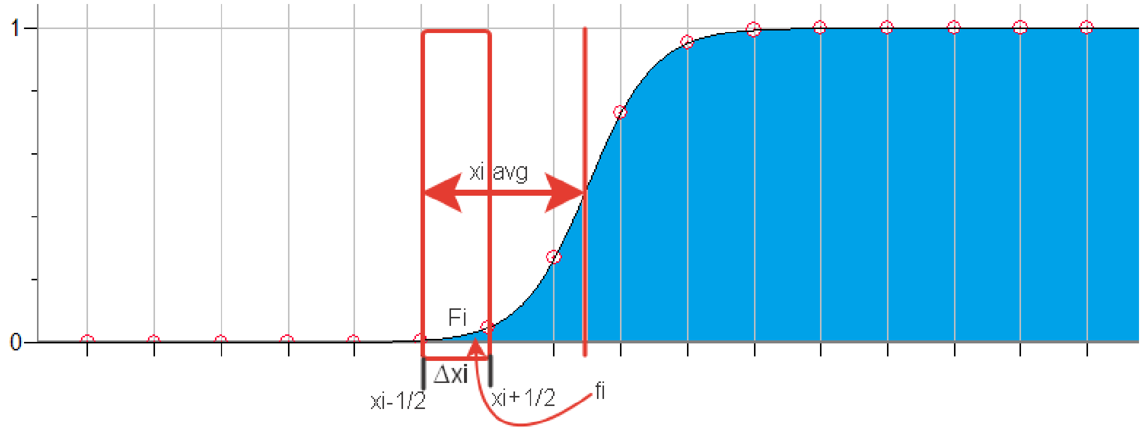
$$b_i = \bar{f}_i - k_i \mathrm{x_i}$$

THINC

- Аппроксимация f(i)n:

$$F_i(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_i \tanh\left(\beta\left(\frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} - \tilde{x}_i\right)\right)\right) \quad \gamma_i = sgn\left(\bar{f}_{i+1}^{n} - \bar{f}_{i-1}^{n}\right)$$

- Параметр $\tilde{x}_i$ - относительное расстояние до середины скачка f от левой границы отрезка X(i-1/2).



$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2\beta} log\left(\frac{\exp\left(\frac{\beta}{\gamma_i}\left(1 + \gamma_i - 2\bar{f}_i^{\,n}\right)\right) - 1}{1 - \exp\left(\frac{\beta}{\gamma_i}\left(1 - \gamma_i - 2\bar{f}_i^{\,n}\right)\right)}\right)$$

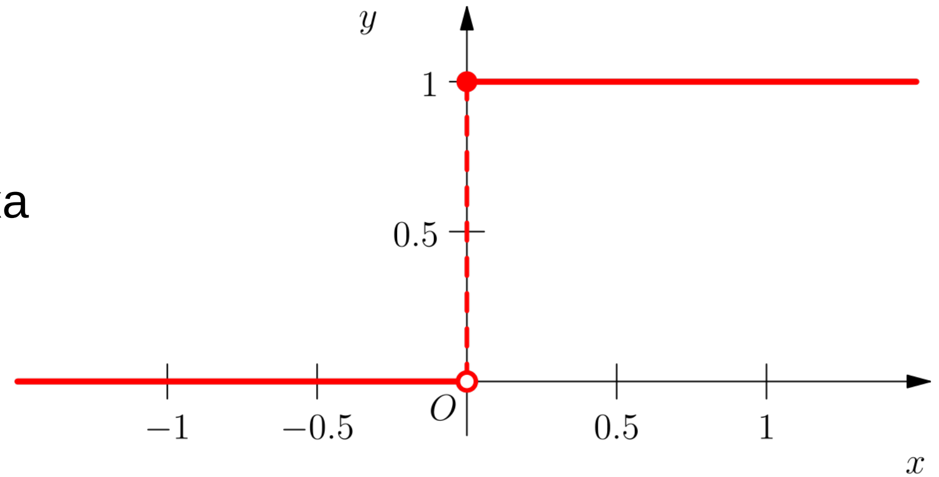
Jump Reconstruction (JR)

Подсеточное восполнение разрывной функцией

$$F_i(x) = \frac{(1-\gamma_i)}{2} + \gamma_i H(x - x_i^*)$$

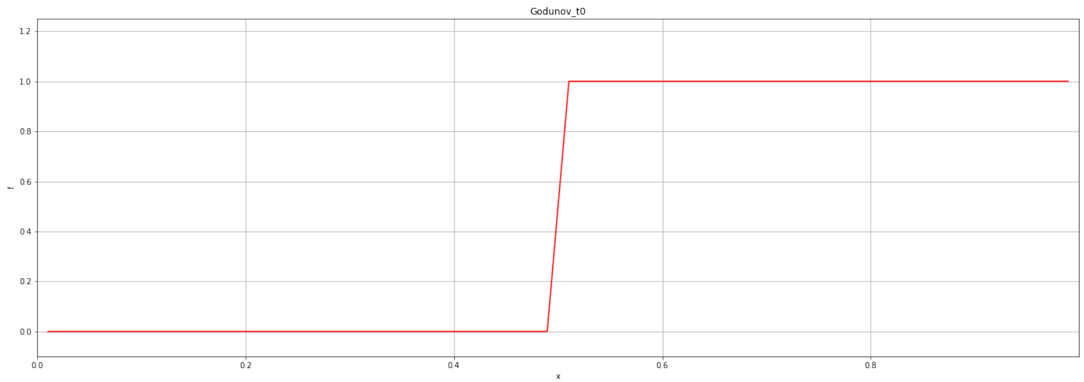
Параметр xi*– положение скачка

$$x_i^* = x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_i\left(\frac{f_i - f_{min}}{\Delta f_i \gamma_i} - \frac{1-\gamma_i}{2\gamma_i}\right)$$

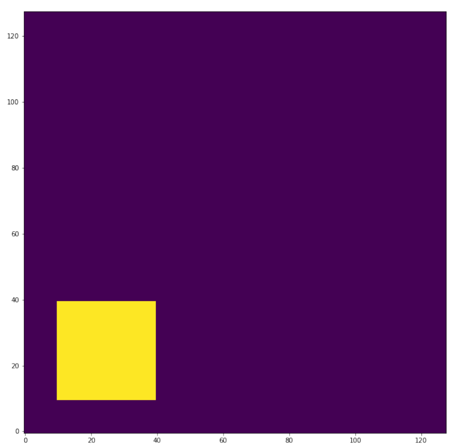


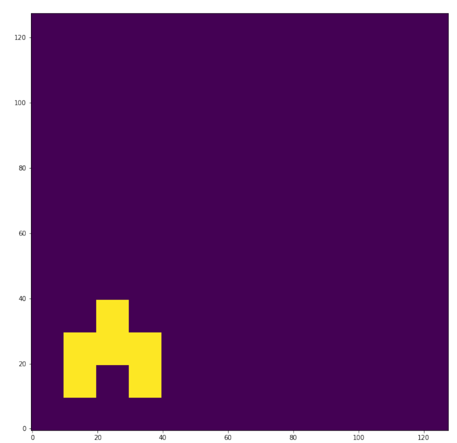
Численные результаты

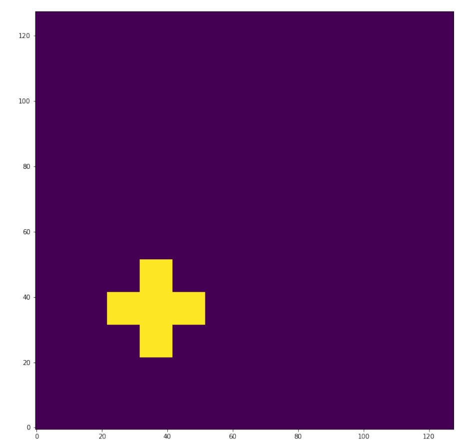
- 1D тесты с перемещением “полки” с постоянной скоростью. Заданы циклические граничные условия



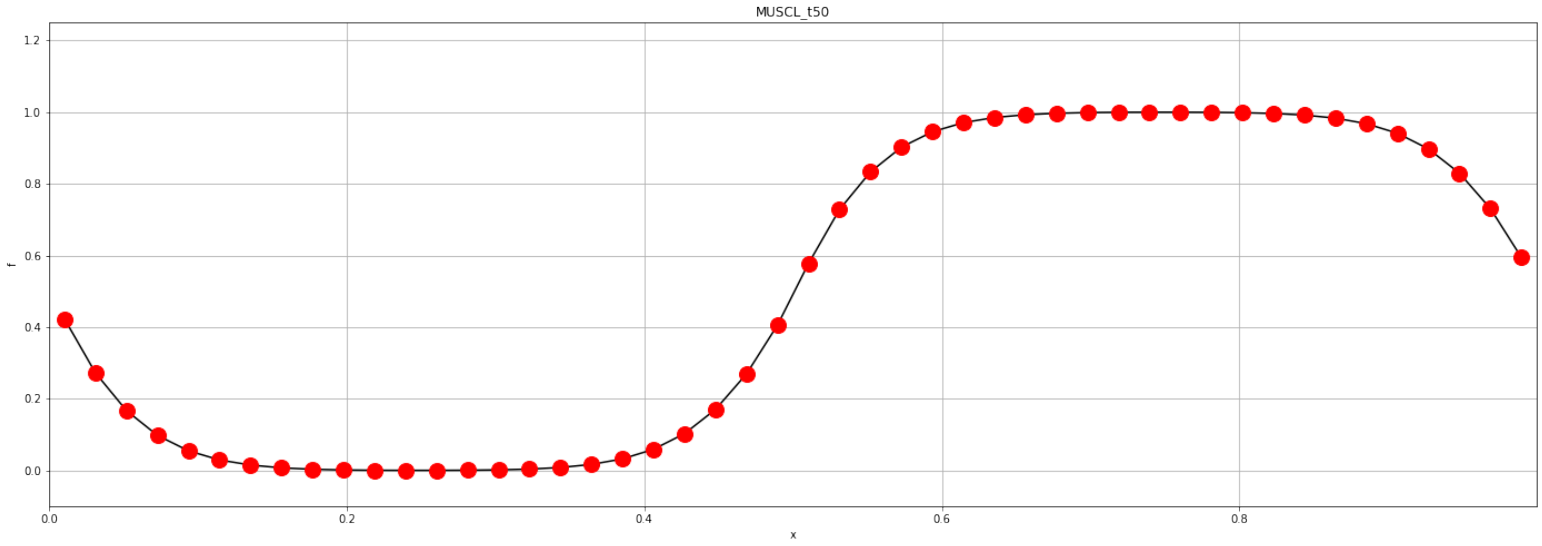
- 2D тесты с перемещением простых форм в поле постоянной скорости
- 2D тест с перемещением простых форм в поле скоростей твердого тела



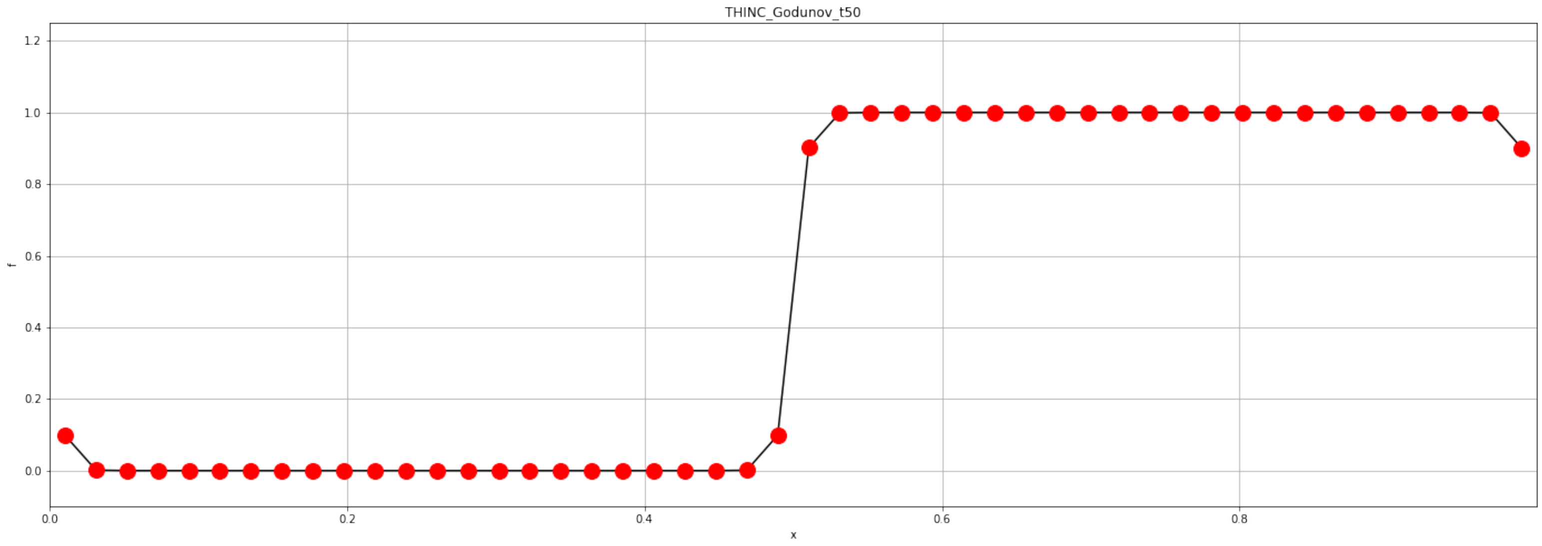




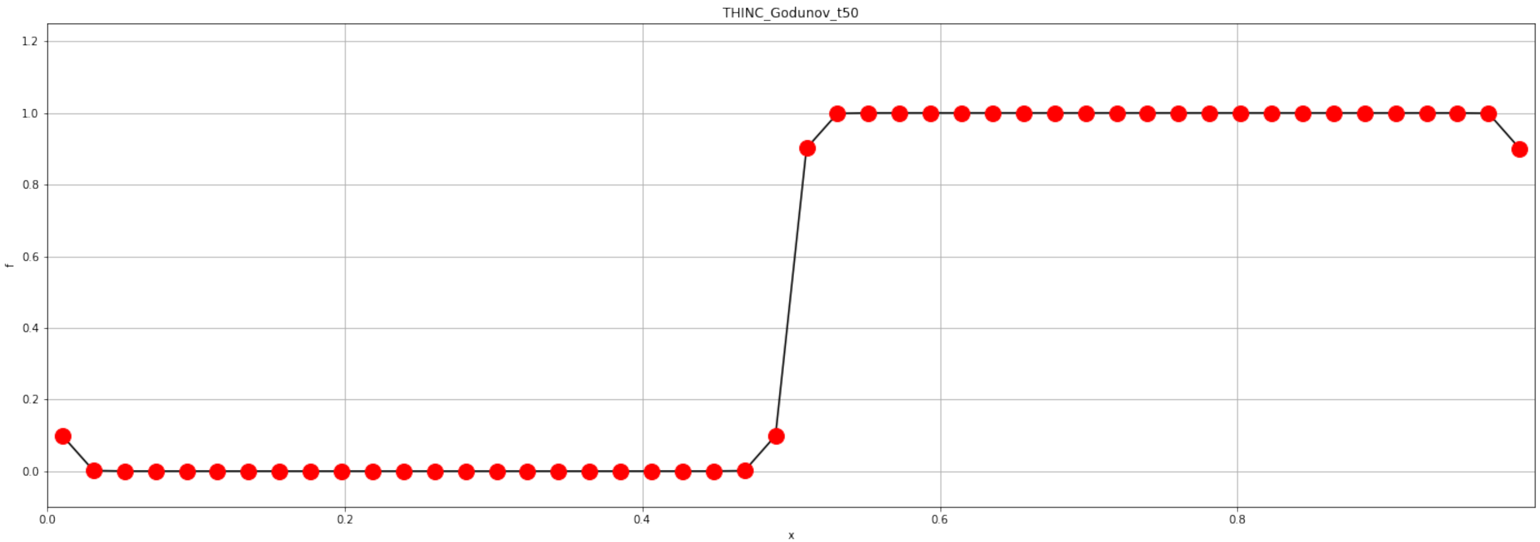
MUSCL


MUSCL_t50
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
f
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

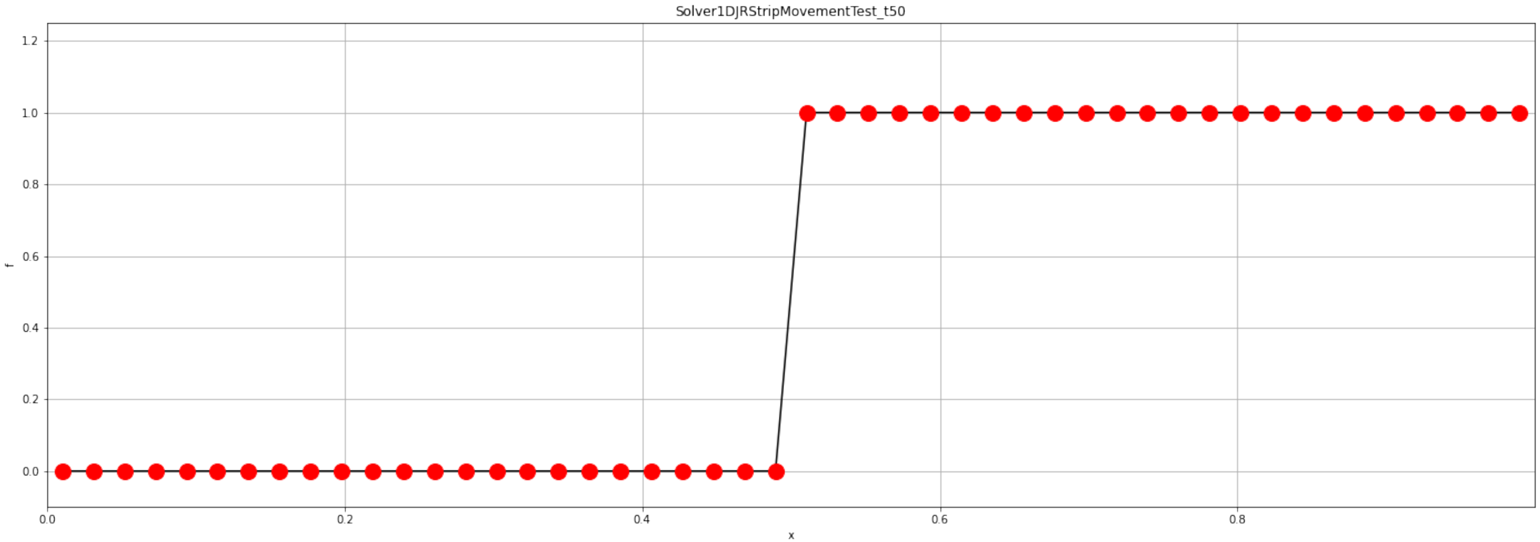
THINC


THINC_Godunov_t50
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
f
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

THINC


THINC_Godunov_t50
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
f
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

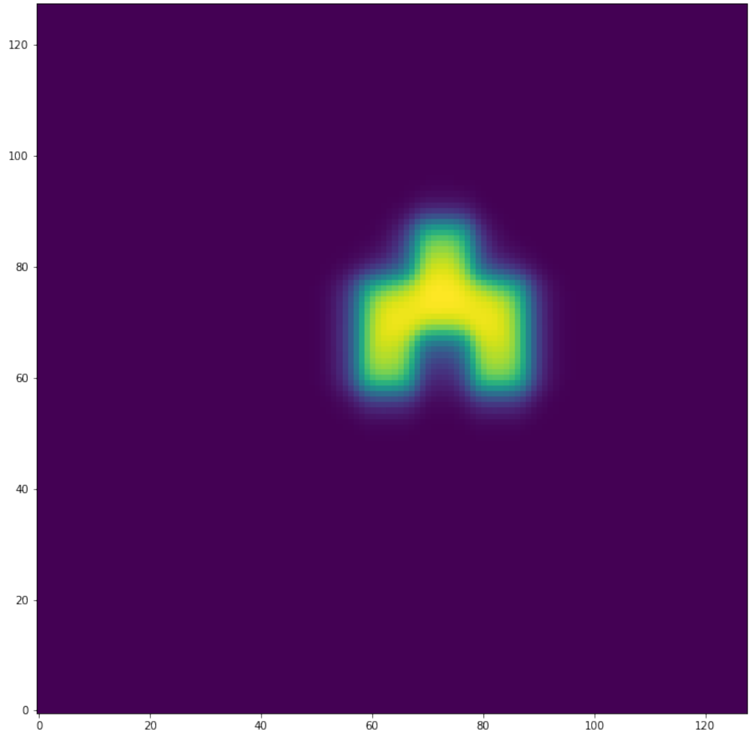
JR

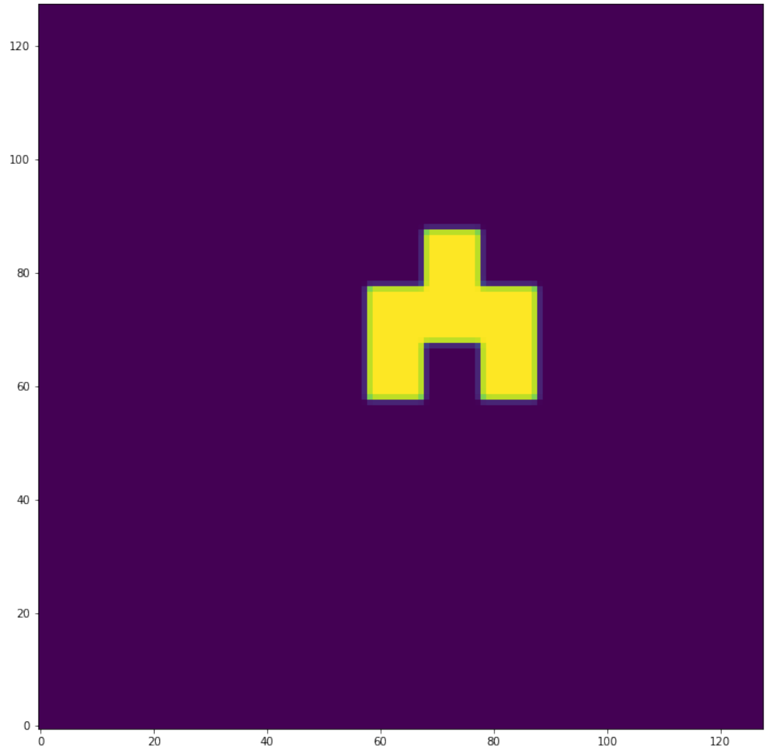

Solver1DJRStripMovementTest_t50
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
f
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

2D реализация

- Метод MUSCL

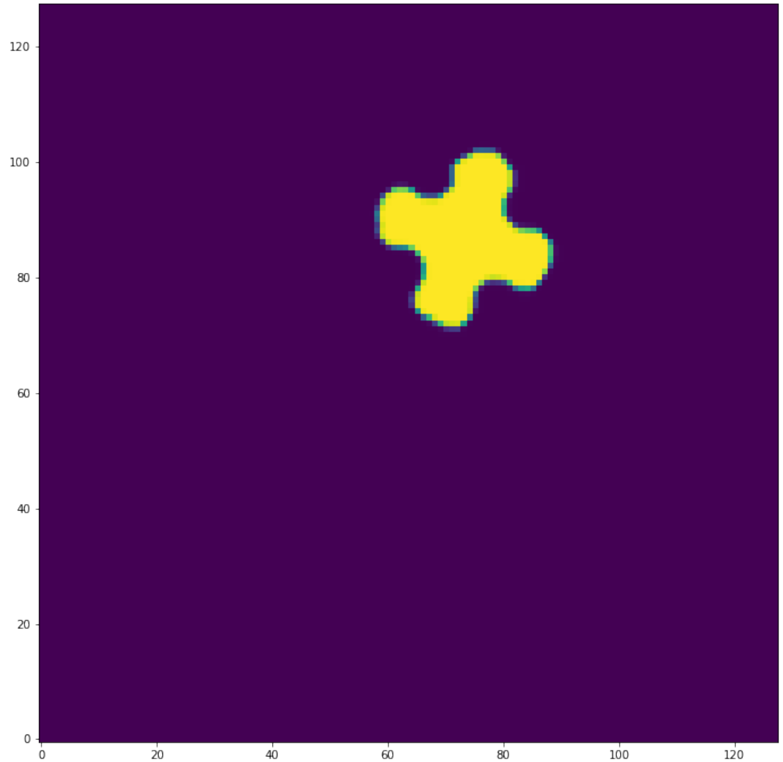
Метод THINC



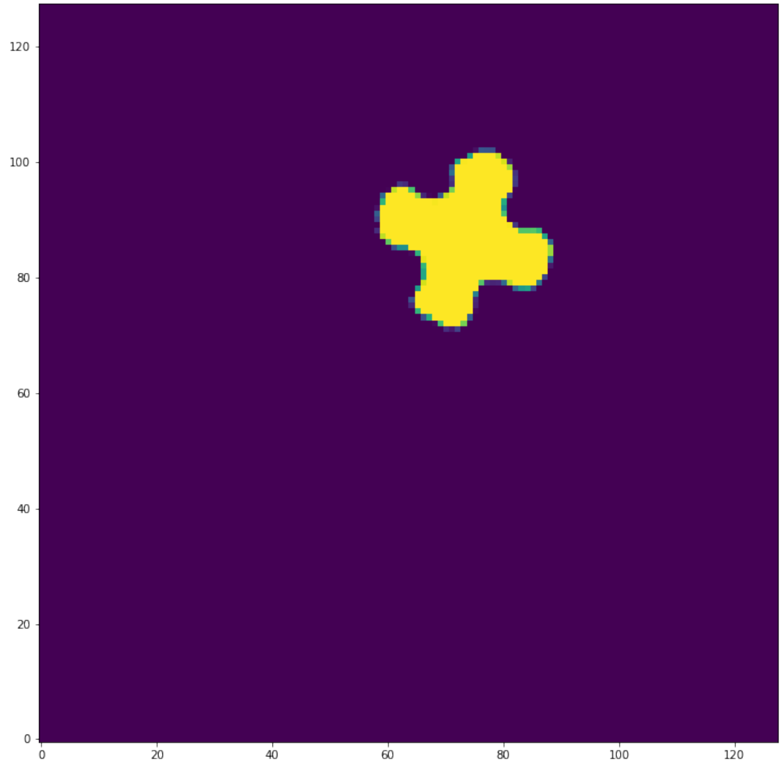


2D реализация

- THINC



JR



2D реализация

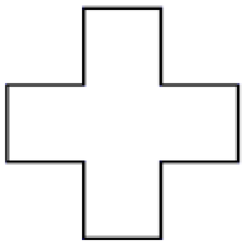


Рис. 66: Initial

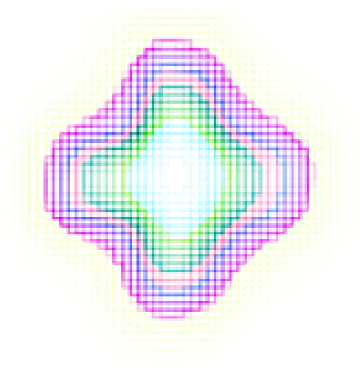


Рис. 67: MUSCL

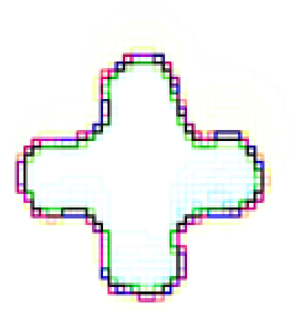


Рис. 68: THINC

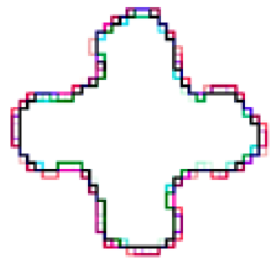


Рис. 69: JR

Заключение:

- Предложен метод цифрового представления пространственной нестационарной геометрии на основе численного решения уравнения переноса

- Построены и исследованы три численные схемы годуновского типа, использующие различные способы подсеточного восполнения решения: известные в литературе линейное (MUSCL), сигмоидное (THINC) и предложенное разрывное (JR)

- Проведено исследование схем на решениях 1D задач. Показано, что схема JR максимально точно воспроизводит положение границы (1 счетная ячейка).

- Проведено обобщение 1D метода на 2D уравнения на основе расщепления по направлениям. Составлен код и проведен сравнительный анализ цифрового представления 2D нестационарной геометрии схемами MUSCL, THINC и JR. Результаты показали преимущество предложенного JR метода перед остальными в точности разрешения границы тела.

Спасибо за внимание!

Основные источники и литература

1. A simple algebraic interface capturing scheme using hyperbolic tangent function. F. Xiao,
2. Y. Honma and T. Kono (2005)
3. Revisit to the THINC scheme: A simple algebraic VOF algorithm. Feng Xiao, Satoshi Ii, Chungang Chen (2011)
4. An Eulerian interface sharpening algorithm for compressible two-phase flow: The algebraic THINC approach. Keh-Ming Shyue, Feng Xiao (2014)
5. Lectures on Methods of Computational Fluid Dynamics by I.Menshov, MSU 2012-2013
6. Interface Sharpening in two-phase flows based on primitive sub-cell reconstructions, Igor Menshov[1], Chao Zhang[2] and Pavel Zakharov[3]