1 Уравнение Переноса

Уравнение переноса в общем случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \overrightarrow{u}) = 0 \tag{1}$$

Где u – векторное поле скоростей, f - переносимая скалярная величина, ∇ – оператор дивергенции. Определим f как функцию Хевисайда, принимающую значения 0 и 1:

$$f(x,t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in liquid \\ 0 & \mathbf{x} \notin liquid \end{cases} \tag{2}$$

В одномерном случае уравнение сводится к виду:

$$\frac{\mathrm{d} f_x}{\mathrm{d} t} + \frac{\mathrm{d}(f_x u_x)}{\mathrm{d} x} = 0 \tag{3}$$

В дальнейшем будем обозначать f_x u_x просто как f и u, подразумевая значения, взятые вдоль направлений соответствующих осей.

2 Численное решение

Для численного решения проводится дискретизация:

Отрезок $[0; X]$, на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на *cellCount* последовательных подотрезков, длиной Δx_i каждый – ячейки сетки. i=1..cellCount. Положения $x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_{i+\frac{1}{2}}$ являются узлами данной сетки (ребрами ячеек). $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Для реализации программы была выбрана равномерная сетка с ячейками равной длины Δx. Зададим длину временного шага Δt и построим схему для вычисления средних значений функции $f(x,t)$ в каждой ячейке.

$$\overline{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t_n) dx \tag{4}$$

- среднее по ячейке значение функции $f(x,t)$ на i-ом отрезке Δx_i на n-ом временном шаге.

Проинтегрируем уравнение переноса в одномерном случае (3) по времени на шаге $[t_n; t_{n+1}]$:

$$(f^{n+1} - f^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} d\tau = 0$$

Для численного дифференцирования используем явную разностную схему 2 порядка:

$$\frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i}$$