1 Уравнение Переноса

Уравнение переноса в общем случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\overrightarrow{u}) = 0 \tag{1}$$

Где u – векторное поле скоростей, f - переносимая скалярная величина, ∇ – оператор дивергенции. Определим f как функцию Хевисайда, принимающую значения 0 и 1:

$$f(x,t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in liquid \\ 0 & \mathbf{x} \notin liquid \end{cases} \tag{2}$$

В одномерном случае уравнение сводится к виду:

$$\frac{\mathrm{d} f_x}{\mathrm{d} t} + \frac{\mathrm{d}(f_x u_x)}{\mathrm{d} x} = 0 \tag{3}$$

В дальнейшем будем обозначать f_x u_x просто как f и u, подразумевая значения, взятые вдоль направлений соответствующих осей.

2 Численное решение

Для численного решения проводится дискретизация:

Отрезок $[0; X]$, на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на $cellCount$ последовательных подотрезков, длиной Δx_i каждый – ячейки сетки. i=1..cellCount. Положения $x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_{i+\frac{1}{2}}$ являются узлами данной сетки (ребрами ячеек). $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Для реализации программы была выбрана равномерная сетка с ячейками равной длины Δx. Зададим длину временного шага Δt и построим схему для вычисления средних значений функции $f(x,t)$ в каждой ячейке.

$$\overline{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x,t_n)dx \tag{4}$$

- среднее по ячейке значение функции $f(x,t)$ на i-ом отрезке Δx_i на n-ом временном шаге. В дальнейшем будем обозначать его как просто f_i^n.

Проинтегрируем уравнение переноса в одномерном случае (3) по времени на шаге $[t_n; t_{n+1}]$:

$$(f^{n+1} - f^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} d\tau = 0$$

Для численного дифференцирования используем явную разностную схему 2 порядка:

$$\frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i}$$

В результате уравнение переноса преобразуется к виду:

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} d\tau - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} d\tau = 0 \tag{5}$$

3 Поле скоростей твердого тела

Поле скоростей твердого тела связано по формуле Эйлера:

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{v_c}(t) + [\overrightarrow{\omega}(t) \times \overrightarrow{r}(t)]$$

Рассмотрим составляющие поля скоростей вдоль направлений X,Y,Z:

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r},t) = (u_x, u_y, u_z)(\overrightarrow{r},t)$$

$$\overrightarrow{r}(t) = (x - x_c(t), y - y_c(t), z - z_c(t))$$

Векторы $\overrightarrow{v_c}(t)$ и $\overrightarrow{\omega}(t)$ считаются заданными.

$$\overrightarrow{v_c}(t) = (v_{cx}(t), v_{cy}(t), v_{cz}(t))$$

$$\overrightarrow{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$$

$$u_x(t) = v_{cx}(t) + \omega_y(t)z - \omega_y(t)z_c(t) - \omega_z(t)y + \omega_z(t)y_c(t)$$
$$u_y(t) = v_{cy}(t) - \omega_x(t)z + \omega_x(t)z_c(t) + \omega_z(t)x - \omega_z(t)x_c(t)$$
$$u_z(t) = v_{cz}(t) + \omega_x(t)y - \omega_x(t)y_c(t) - \omega_y(t)x + \omega_y(t)x_c(t)$$

Таким образом, можно видеть, что скорости твердого тела вдоль каждого из направлений не зависят от координаты рассматриваемой точки на этом направлении. То есть, например, скорости u_x твердого тела вдоль направления OX не зависят от координаты x, а лишь от положения y и z и от времени t.

В таком случае, при решении уравнения переноса мы можем рассматривать скорость постоянной вдоль каждого из направлений, но зависящей от времени. Поэтому вместо $u_{i-\frac{1}{2}}$, $u_{i+\frac{1}{2}}$ будем рассматривать u, зависящую от времени.

4 Метод характеристик

Рассмотрим решение уравнения переноса с помощью метода характеристик.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(fu)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{6}$$

Нам бы хотелось свести это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль соответствующей кривой, то есть получить уравнение вида:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x(s), t(s)) = F(f, x(s), t(s))$$

где кривая $(x(s), t(s))$ — характеристика.
Установим, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x(s), t(s)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \tag{7}$$

Положим, что

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1$$

Следовательно, при $t(0) = 0$, $s = t$. И теперь будем составлять ОДУ, используя метод характеристик в виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), t) = F(f, x(t), t)$$

Будем искать решение вдоль характеристик, уравнение которых имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(t)$$

В таком случае уравнение (7) можно переписать в виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), t) = u(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

таким образом, вдоль характеристики $(x(t), t)$ исходное уравнение в частных производных превращается в ОДУ:

$$u_t = F(f, x(t), t) = 0$$

Данное уравнение говорит о том, что вдоль характеристик решение постоянное. Таким образом, $u(x, t) = u(x_0, 0)$, где точки (x, t) и $(x_0, 0)$ лежат на одной характеристике. Видно, что для нахождения общего решения достаточно найти характеристики уравнения в виде:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(t) \tag{8}$$

Будем искать решение на слое t_n по времени. τ - время на слое $[t_n; t_{n+1}]$.
То есть $\tau = 0 \Leftrightarrow t = t_n$, $\tau = \Delta t \Leftrightarrow t = t_{n+1}$.
Проинтегрируем уравнение (8) по t от t_n до $t_n + \tau$: