Схема THINC

Для численного решения уравнения переноса была рассмотрена схема THINC. Данный метод описан в статье [1].

В данной работе проводится численное решение уравнения переноса с использованием схемы THINC для одномерного и двумерного случая. Также строится процесс программной реализации и исследование метода THINC для одномерного случая.

Предполагается использовать схему THINC (tangent of hyperbola for interface capturing: гиперболический тангенс для отслеживания поверхности) для численного решения уравнения переноса, представленного в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (uf) - f\nabla \cdot u = 0$$

Где u – векторное поле скоростей, f - переносимая скалярная величина. Определим f как функцию Хевисайда, принимающую значения 0 и 1:

$$f(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если в точке } x \text{ в момент времени } t \text{ нет жидкости} \\ 1, & \text{если в точке } x \text{ в момент времени } t \text{ есть жидкость} \end{cases}$$

∇ – оператор дивергенции.

В одномерном случае данная задача рассматривается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uf) - f\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Также мы предполагаем, что поле скоростей u соленоидально, то есть $\nabla \cdot u = 0$. В этом случае задача рассматривается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Отрезок $[0; X]$, на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на $cellCount$ последовательных подотрезков, длиной Δx_i каждый. $i = 1..cellCount$. Положения $x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_{i+\frac{1}{2}}$ являются узлами данной сетки. $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Для реализации программы была выбрана равномерная сетка с подотрезками равной длины Δx. Зададим длину временного шага Δt и построим схему THINC для вычисления значений функции

Рассмотрим $\bar{f}_i^n$ - среднее значение функции f на -ом отрезке Δx_i на n-ом временном шаге:

$$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t^n) dx$$

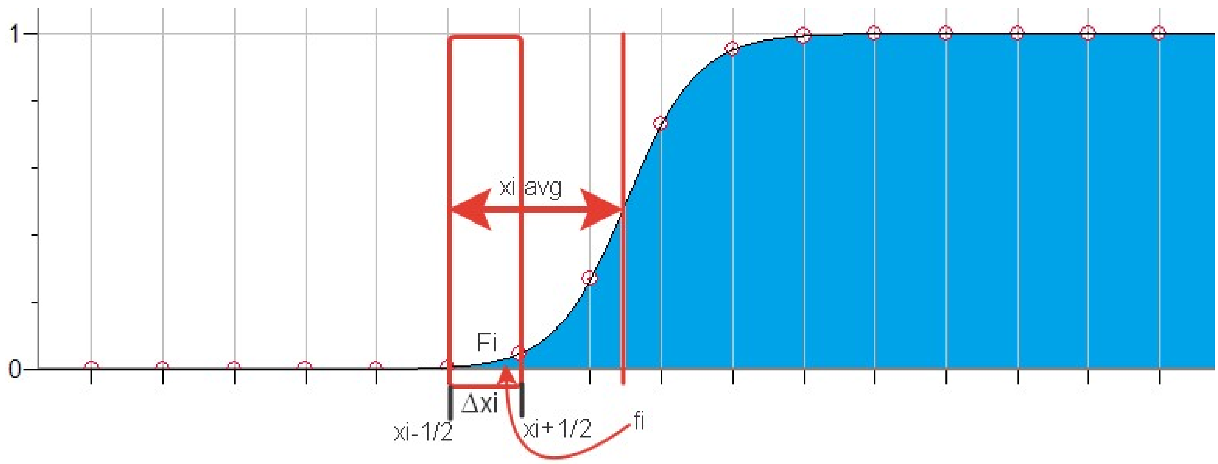
Для аппроксимации функции f на каждом Δx_i отрезке рассчитывается функция:

$$F_i(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_i \tanh(\beta(\frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} - \tilde{x}_i)))$$

Где параметры β, γ_i определяются следующим образом:
$\gamma_i = sgn(\bar{f}_{i+1}^n - \bar{f}_{i-1}^n)$.

β определяет сжатие по оси X – скорость прыжка

Параметр $\tilde{x}_i$ – относительное расстояние до середины прыжка f от левой границы отрезка $x_{i-\frac{1}{2}}$.



$\tilde{x}_i$ определяется из интегрального уравнения:

$$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F_i(x) dx$$

Аналитическое решение данного уравнения:

$$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}(1 + \gamma_i \tanh{(\beta(\frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} - \tilde{x}_i)))} dx$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_i = \frac{1}{2\beta} log(\frac{\exp\left(\frac{\beta}{\gamma_i}(1 + \gamma_i - 2\bar{f}_i^n)\right) - 1}{1 - \exp{(\frac{\beta}{\gamma_i}(1 - \gamma_i - 2\bar{f}_i^n))}})$$

Численное решение уравнения переноса в одномерном случае

Рассмотрим уравнение переноса в одномерном случае и при постоянной скорости:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

После интегрирования данного уравнения по времени на временном шаге $[t_n; t_{n+1}]$:

$$(\bar{f}^{n+1} - \bar{f}^n) + u \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial x} dt = 0$$

Представим производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ в виде разностной схемы первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\bar{f}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}}{h}$$

А интеграл $\int_{t_n}^{t_{n+1}} F\,dt$ в виде квадратурной формулы прямоугольников:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F\,dt = F^{n+\frac{1}{2}}\Delta t$$

После подстановки уравнение примет следующий вид:

$$\bar{f}_i^{n+1} - \bar{f}_i^{n} + \frac{u}{h}(\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})\Delta t = 0$$

Таким образом,

$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^{n} - \frac{u\Delta t}{h}(\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

Значения $\bar{f}^n$ известны на каждом временном шаге, а для интерполяции значений $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ используем схему THINC:

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_\mathrm{i}(\mathrm{x}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}} - u\frac{\Delta t}{2})$$

$$\bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_{\mathrm{i}-1}(\mathrm{x}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}} - u\frac{\Delta t}{2})$$

Конкретное значение функции $\Psi_\mathrm{i}(x)$ зависит от выбора схемы или комбинации схем численного решения.

Исследование сходимости

Метод обладает сходимостью степени β
если $\exists\alpha \in (0;1]: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \ \left||x_n - x^*|\right| < \alpha\left||x_{n-1} - x^*|\right|^{\beta}$

Применение различных схем для численного решения уравнения переноса

Схема Годунова

$$\Psi_\mathrm{i}(x) = \bar{f}_i$$

Схема MUSCL

$$\Psi_\mathrm{i}(x) = k_i x + b_i$$

$$k_i = minmod\left(\tilde{f}_i^R, \tilde{f}_i^L\right)$$

$$\tilde{f}_i^R = \frac{\bar{f}_{i+1} - \bar{f}_i}{h}$$

$$\tilde{f}_i^L = \frac{\bar{f}_i - \bar{f}_{i-1}}{h}$$

$$minmod(a,b) = \begin{cases} 0 & ,ab < 0 \\ sgn(a)\min(|a|,|b|) & ,ab \geq 0 \end{cases}$$

$$b_i = \bar{f}_i - k_i \mathrm{x_i}$$

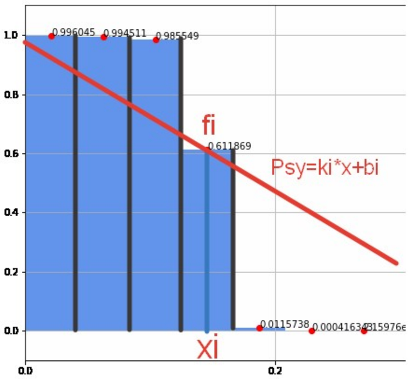


Схема THINC + Годунов/MUSCL

Схема THINC применяется только на тех отрезках, где выполняется условие:

$$\begin{cases} \varepsilon < \bar{f}_i^n < 1 - \varepsilon & \bar{f}_i^n \in (0;1) \\ (\bar{f}_{i+1}^n - \bar{f}_i^n)(\bar{f}_i^n - \bar{f}_{i-1}^n) > \varepsilon & \text{(условие мнотонности на отрезке)} \end{cases}$$

, где ε - малая величина, $\varepsilon = 1e - 4$

Тогда

$$\Psi_\mathrm{i}(x) = \bar{f}_{min} + F_i(x)\Delta\bar{f}_\mathrm{i}$$

$$\bar{f}_{min} = \min(\bar{f}_{i-1}, \bar{f}_{i+1})$$

$$\bar{f}_{max} = \max(\bar{f}_{i-1}, \bar{f}_{i+1})$$

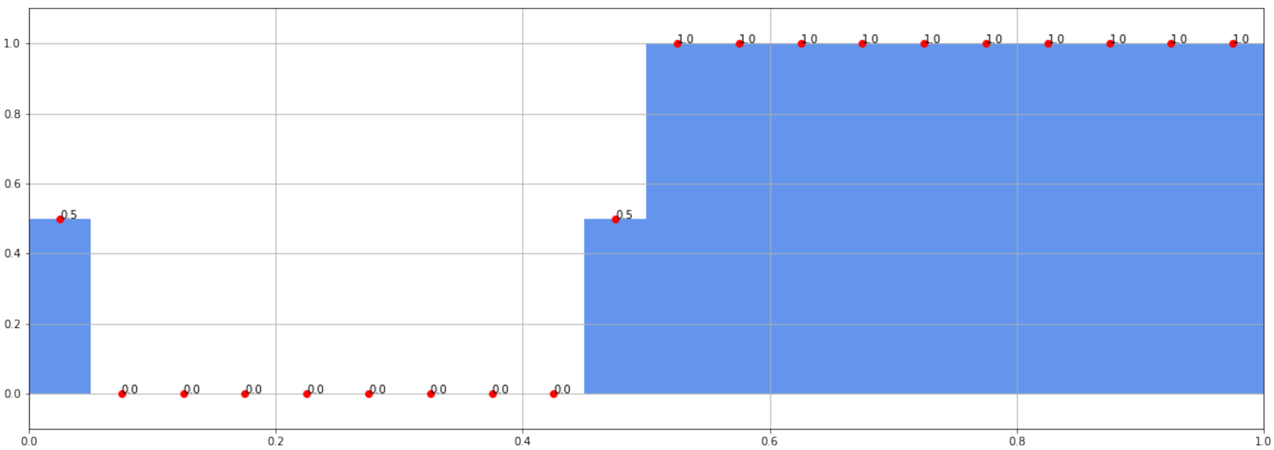
$$\Delta\bar{f}_\mathrm{i} = \bar{f}_{max} - \bar{f}_{min}$$

Здесь $F_i(x)$ - это функция гиперболического тангенса, аппроксимирующая f(x) на отрезке Δx_i.

В тех ячейках, где данное условие не выполняется, используется схема Годунова или MUSCL.

Программа расчета уравнения переноса в одномерном случае с использованием схемы THINC

Начальные условия – значения $\bar{f}_i^n$, которые аппроксимирую скалярную величину f заданы в массиве f.



Исследуемая область построена таким образом, что отрезок $i = cellCount - 1$ - предыдущий для отрезка $i = 0$, наоборот. То есть вся область представляет собой кольцо, и $\forall i \ \exists \ (i+1), (i-1)$.

На каждом шаге по времени происходит вычисление новых значений $\bar{f}_i^{n+1}$. Вычисления проводятся только на тех отрезках, где выполняются неравенства:

$$\begin{cases} \varepsilon < \bar{f}_i^n < 1 - \varepsilon & \bar{f}_i^n \in (0;1) \\ (\bar{f}_{i+1}^n - \bar{f}_i^n)(\bar{f}_i^n - \bar{f}_{i-1}^n) > \varepsilon & \text{(условие мнотонности на отрезке)} \end{cases}$$

, где ε - малая величина, $\varepsilon = 1e-4$

По значениям $\bar{f}_{i-1}^n$ и $\bar{f}_{i+1}^n$ рассчитываются значения $\gamma_i, \bar{f}_{min}, \bar{f}_{max}, \Delta\bar{f}$.

По значениям $\beta, \gamma_i, \bar{f}_i^n$ вычисляется значение $\tilde{x}_i$, необходимое для задания функции $\mathrm{F_i}(x)$.

Теперь готово все необходимое для задания функции $\Psi_\mathrm{i}(x) = \bar{f}_{min} + F_i(x)\Delta\bar{f}_\mathrm{i}$ на отрезке Δx_i.

Для каждого следующего отрезка Δx_{i+1} мы сохраняем функцию $\Psi_\mathrm{i}(x)$, и используем ее в качестве $\Psi_\mathrm{i-1}(x)$.

Значения $\bar{f}_i^{n+1}$ вычисляются по разностной схеме:

$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^n - \frac{u\Delta t}{h}\left(\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right), \qquad \text{, где } \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_\mathrm{i}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}} - u\frac{\Delta t}{2}\right), \quad \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_\mathrm{i-1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}} - u\frac{\Delta t}{2}\right)$$

Таким образом, мы делаем шаг по времени для всех отрезков Δx_i.

Программа на языке программирования C++ численного решения уравнения переноса в одномерном случае находится в Приложении [1].

Визуализация одномерных расчетов схемы THINC

Результаты расчетов были визуализированы с помощью программы на языке Python. Для каждого эксперимента была построена анимация, на которой каждый кадр соответствует шагу по времени.

Программа построения анимации для одномерного расчета уравнения переноса схемой THINC находится в Приложении [2].

Параметры экспериментов:

1) Число разбиений отрезка cellCount.
   Определяет разрешение сетки и количество вычислений на каждом шаге по времени.
2) Число шагов по времени stepN.
3) Число CFL.
   Определяет шаг по времени из условия Куранта по формуле: $CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$
4) Коэффициент β определяет скорость скачка величины f.
   Для текущих экспериментов было выбрано $\beta = 3.5$, как наиболее сбалансированное значение для предотвращения сильного расхождения $\bar{f}_i^n$ при движении, и при этом сохранения «переходных» отрезков, чтобы не допустить разрыва в значениях $\bar{f}_i^n$.

В качестве демонстрации были выбраны несколько вариантов начальных условий, различающихся по количеству разбиений на отрезки, количеству шагов по времени и числу CFL.

Условия 1:

```
int cellCount = 20;
int stepN = 100;
double CFL = 0.3;
```

Условия 2:

```
int cellCount = 20;
int stepN = 100;
double CFL = 0.1;
```

Условия 3:

```
int cellCount = 100;
int stepN = 100;
double CFL = 0.3;
```