

1 Уравнение Переноса

Уравнение переноса в общем случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

Где \vec{u} – векторное поле скоростей, f - переносимая скалярная величина, ∇ – оператор дивергенции. Определим f как функцию Хевисайда, принимающую значения 0 и 1:

$$f(x, t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in liquid \\ 0 & \mathbf{x} \notin liquid \end{cases} \quad (2)$$

В одномерном случае уравнение сводится к виду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(fu_x)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

2 Численное решение

2.1 Численное решение в общем случае

Для численного решения проводится дискретизация:

Отрезок $[0; X]$, на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на $cellCount$ последовательных подотрезков, длиной Δx_i каждый – ячейки сетки. $i=1..cellCount$. Положения $x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_{i+\frac{1}{2}}$ являются узлами данной сетки (ребрами ячеек). $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Для реализации программы была выбрана равномерная сетка с ячейками равной длины Δx . Зададим длину временного шага Δt и построим схему для вычисления средних значений функции $f(x, t)$ в каждой ячейке.

$$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t_n) dx \quad (4)$$

- среднее по ячейке значение функции $f(x, t)$ на i -ом отрезке Δx_i на n -ом временном шаге. В дальнейшем будем обозначать его как просто f_i^n .

Проинтегрируем уравнение переноса в одномерном случае (3) по времени на шаге $[t_n; t_{n+1}]$:

$$(f^{n+1} - f^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d(fu)}{dx} d\tau = 0$$

Для численного дифференцирования используем явную разностную схему 2 порядка:

$$\frac{d(fu)}{dx} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i}$$

В результате уравнение переноса преобразуется к виду:

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} d\tau - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} d\tau = 0 \quad (5)$$

2.2 Поле скоростей твердого тела

Поле скоростей твердого тела связано по формуле Эйлера:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{v}_c(t) + [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)]$$

Рассмотрим составляющие поля скоростей вдоль направлений X,Y,Z:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = (u_x, u_y, u_z)(\vec{r}, t)$$

$$\vec{r}(t) = (x - x_c(t), y - y_c(t), z - z_c(t))$$

Векторы $\vec{v}_c(t)$ и $\vec{\omega}(t)$ считаются заданными.

$$\vec{v}_c(t) = (v_{cx}(t), v_{cy}(t), v_{cz}(t))$$

$$\vec{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$$

$$u_x(t) = v_{cx}(t) + \omega_y(t)z - \omega_y(t)z_c(t) - \omega_z(t)y + \omega_z(t)y_c(t)$$

$$u_y(t) = v_{cy}(t) - \omega_x(t)z + \omega_x(t)z_c(t) + \omega_z(t)x - \omega_z(t)x_c(t)$$

$$u_z(t) = v_{cz}(t) + \omega_x(t)y - \omega_x(t)y_c(t) - \omega_y(t)x + \omega_y(t)x_c(t)$$

Таким образом, можно видеть, что скорости твердого тела вдоль каждого из направлений не зависят от координаты рассматриваемой точки на этом направлении. То есть, например, скорости u_x твердого тела вдоль направления OX не зависят от координаты x , а лишь от положения y и z и от времени t .

В таком случае, при решении уравнения переноса мы можем рассматривать скорость постоянной вдоль каждого из направлений, но зависящей от времени. Поэтому вместо $u_{i-\frac{1}{2}}$, $u_{i+\frac{1}{2}}$ будем рассматривать u , зависящую от времени.

2.3 Численное решение для нестационарного поля скоростей твердого тела

Перепишем уравнение (5), полученное для произвольного поля скоростей, для поля скоростей твердого тела:

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) + \frac{1}{\Delta x_i} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i+\frac{1}{2}} d\tau - \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i-\frac{1}{2}} d\tau \right) = 0$$

Интегралы

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i+\frac{1}{2}} d\tau \quad (6)$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i-\frac{1}{2}} d\tau \quad (7)$$

представляют собой потоки через правую $x_{i+\frac{1}{2}} = x_R$ и левую $x_{i-\frac{1}{2}} = x_L$ грани ячейки $\Delta x_i = \Delta x$ соответственно.

Для вычисления значений $f_{x^*}^{t^*}$ необходимо построить подсеточную реконструкцию решения на соответствующей ячейке. При таком подходе значения $f_{x^*}^{t^*}$ считаются как значения интерполяционной функции, соответствующей методу решения.

$$f_{x^*}^{t^*} = \Psi_0(x^*, t^*)$$

Интерполяционная функция $\Psi_0(x^*, t^*)$:

$$\Psi_0(x^*, t^*) = \begin{cases} \Psi_L(x(x^*, \tau^*)) & \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^\tau d\tau \geq 0 \\ \Psi_R(x(x^*, \tau^*)) & \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^\tau d\tau < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, реализуется метод *upwind*: расчета потоков через грани по направлению переноса. То есть, при вычислении потока Φ_{x^*} для положительной скорости u переноса на грани x^* ячейки в течение шага $[t_n; t_{n+1}]$, будет использована интерполяционная функция $\Psi_j(x(x^*, \tau^*))$, построенная на ячейке j слева от данной грани x^* , а при вычислении потока для отрицательной скорости u будет использована интерполяционная функция $\Psi_j(x(x^*, \tau^*))$, построенная на ячейке j справа от данной грани x^* .

В дальнейшем для выбора интерполяционной функции Ψ_j в исследовании будут рассмотрены такие методы, как метод MUSCL (линейная интерполяция), метод THINC (интерполяция гиперболическим тангенсом) и метод Jump Reconstruction (интерполяция скачком).

Выражение для расчета объемной доли переносимой скалярной величины через потоки в ячейке Δx_i на следующем временном шаге t_{n+1} имеет вид:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{1}{\Delta x_i} (\Phi_{i+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (9)$$

3 Метод характеристик

Рассмотрим решение уравнения переноса с помощью метода характеристик.

$$\frac{df}{dt} + \frac{d(fu)}{dx} = 0 \quad (10)$$

Нам бы хотелось свести это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль соответствующей кривой, то есть получить уравнение вида:

$$\frac{d}{ds} f(x(s), t(s)) = F(f, x(s), t(s))$$

где кривая $(x(s), t(s))$ — характеристика.

Установим, что

$$\frac{d}{ds} f(x(s), t(s)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{ds} \quad (11)$$

Положим, что

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

Следовательно, при $t(0) = 0$, $s = t$. И теперь будем составлять ОДУ, используя метод характеристик в виде:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), t) = F(f, x(t), t)$$

Будем искать решение вдоль характеристик, уравнение которых имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$

В таком случае уравнение (11) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), t) = u(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

таким образом, вдоль характеристики $(x(t), t)$ исходное уравнение в частных производных превращается в ОДУ:

$$f'_t = F(f, x(t), t) = 0$$

Данное уравнение говорит о том, что вдоль характеристик решение постоянное. Таким образом, $f(x, t) = f(x_0, 0)$, где точки (x, t) и $(x_0, 0)$ лежат на одной характеристике. Видно, что для нахождения общего решения достаточно найти характеристики уравнения в виде:

$$\frac{dx}{dt} = u(t) \tag{12}$$

Будем искать решение на временном слое t_n .

τ - время на слое $[t_n; t_{n+1}]$. То есть $\tau = 0 \Leftrightarrow t = t_n$, $\tau = \Delta t \Leftrightarrow t = t_{n+1}$.

Проинтегрируем уравнение (12) по t от t_n до $t_n + \tau$:

$$x(t_n + \tau) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + \tau} u(t)dt + C \tag{13}$$

Что является общим видом характеристической функции для данного уравнения в частных производных.

Найдем такую характеристику, которая в момент времени τ^* проходила через точку x^* . Подставим в характеристическую функцию (13) данные начальные условия:

$$x(t_n + \tau^*) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt + C^*$$

Тогда

$$C^* = x^* - x(t_n) - \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt$$

Подставим C^* обратно в общий вид уравнения характеристической функции (13), чтобы получить характеристику:

$$x(t_n + \tau) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + \tau} u(t)dt + x^* - x(t_n) - \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt$$

$$x(t_n + \tau) = \int_{t_n}^{t_n + \tau} u(t)dt + x^* - \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt \quad (14)$$

Узнаем координату, из которой выходила данная характеристика в момент времени $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} x|_{\tau=0} &= \int_{t_n}^{t_n} u(t)dt + x^* - \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt \\ x|_{\tau=0} &= x^* - \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt \end{aligned} \quad (15)$$

Данное значение необходимо использовать как аргумент интерполяционной функции (8).

4 Аппроксимация интегралов

В зависимости от выбранного метода подсеточной реконструкции, интегралы в потоках и в характеристике могут быть вычислены приближенно, с использованием квадратурных формул в случае непрерывной интерполяции распределения (этот способ использовался для методов MUSCL и THINC), или точно в случае кусочно-постоянной интерполяции распределения (этот способ использовался для методов MUSCL и THINC).

Непрерывное распределение. Рассмотрим непрерывную реконструкцию распределения. Для вычисления интегралов была использована квадратурная формула трапеции.

Интеграл в характеристике (15) был заменен на квадратурную формулу:

$$x|_{\tau=0} = x^* - \int_{t_n}^{t_n + \tau^*} u(t)dt = x^* - \Delta t \frac{u(t_n) + u(t_n + \tau^*)}{2} \quad (16)$$

Для аппроксимации интегралов потоков (6), (7) была использована квадратурная формула трапеции.

Интегралы в потоках были заменены на квадратурные формулы:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i+\frac{1}{2}} d\tau = \frac{\Delta t}{2} (u^{n+1} f_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + u^n f_{i+\frac{1}{2}}^n) \quad (17)$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u f_{i-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{\Delta t}{2} (u^{n+1} f_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + u^n f_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (18)$$

Таким образом, значения потоков (6), (7) будут иметь вид:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} (u^n \Psi_0(x(x_{i+\frac{1}{2}}, 0)) + u^{n+1} \Psi_0(x(x_{i+\frac{1}{2}}, \Delta t))) \quad (19)$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} (u^n \Psi_0(x(x_{i-\frac{1}{2}}, 0)) + u^{n+1} \Psi_0(x(x_{i-\frac{1}{2}}, \Delta t))) \quad (20)$$

Подставляя в них характеристики с координатами соответствующих граней и с нужным шагом по времени, получим окончательный вид уравнений для расчета потоков:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} (u^n \Psi_0(x_R) + u^{n+1} \Psi_0(x^R - \Delta t \frac{u^n + u^{n+1}}{2})) \quad (21)$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2}(u^n \Psi_0(x_L) + u^{n+1} \Psi_0(x^L - \Delta t \frac{u^n + u^{n+1}}{2}))) \quad (22)$$