

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

Курсовая работа

Численное решение уравнения переноса

Студент 521 группы
Сенченков Григорий Антонович.
Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Меньшов Игорь Станиславович.

Введение

- В данной работе рассматривается проблема цифрового представления движения твердого тела.
- Digital Geometry (DG): геометрия тела задается характеристической функцией; ее эволюция описывается уравнением переноса; моделирование движения осуществляется путем численного решения уравнения переноса на сетке.
- Цель работы - численная реализация схемы THINK для расчета DG в одномерном случае, а также сравнение различных схем
- Данная работа является продолжением предыдущей, в которой был реализован Direct Motion – программа точного расчета геометрии.

Digital Geometry и МКЭ

- В промышленных системах расчета (например, CAD) для описания геометрии используется метод конечных элементов: на всей исследуемой области вводится сетка, состоящая из простых элементов: для двумерного случая – это многоугольники, для трехмерного – многогранники. Таким образом происходит точный расчет для большого числа малых конечных элементов, что требует больших вычислительных мощностей для описания каждого примитива и сложного разбиения на эти конечные элементы.

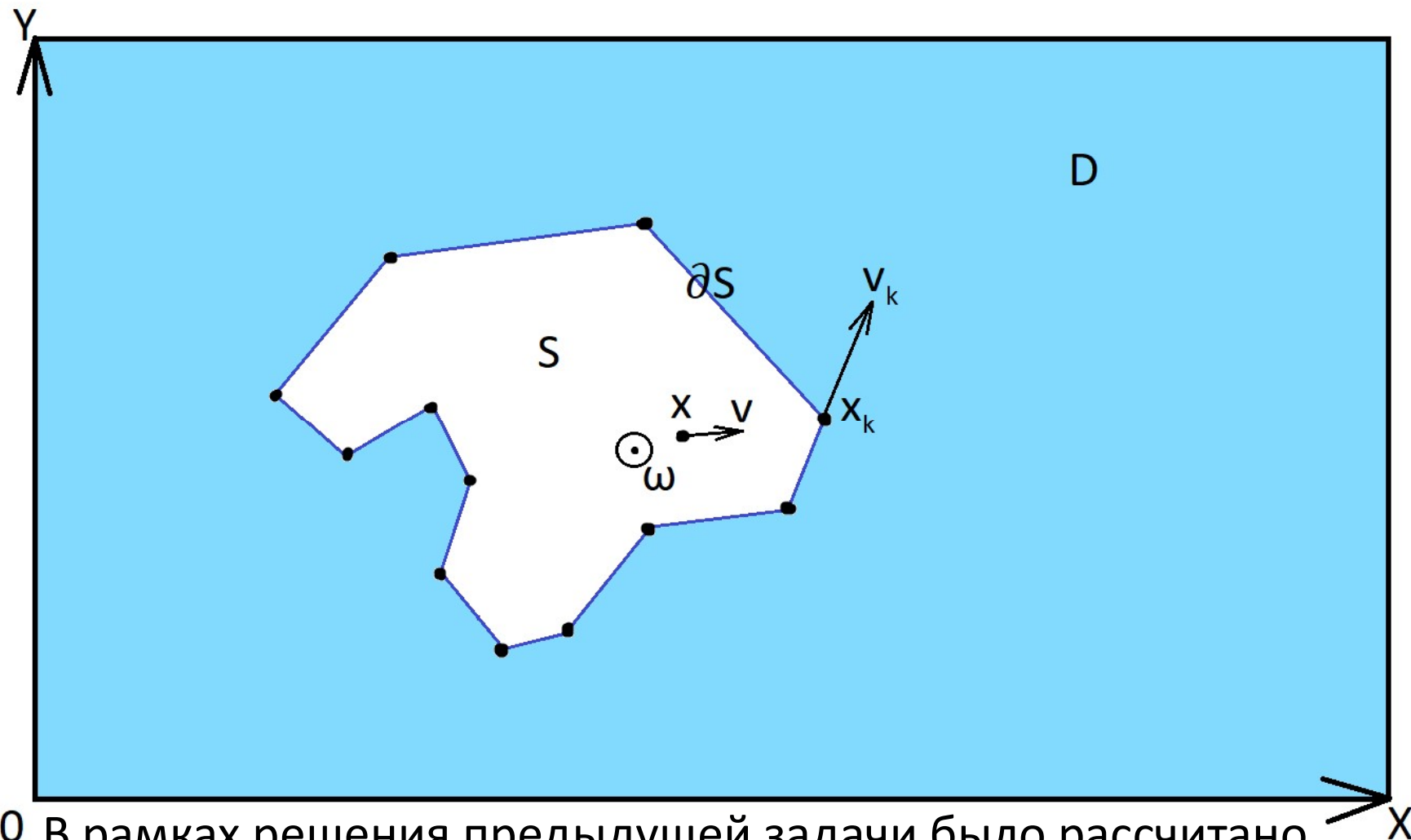
Digital Geometry и МКЭ

- В методе, описанном в данной работе, геометрия тела задается характеристической функцией: так называемая цифровая геометрия, а ее эволюция описывается уравнением переноса. Это сильно упрощает введение сетки и облегчает расчеты, сохраняя при этом точность на достаточно высоком уровне.

Постановка задачи

- По известному распределению функции скалярной величины f в начальный момент времени, а также с заданным полем скоростей на каждом моменте времени необходимо рассчитать характеристическую функцию твердого тела и жидкости (скалярную величину f) в рассматриваемой области на каждом временном шаге

1. Поле скоростей твердого тела



0 В рамках решения предыдущей задачи было рассчитано поле скоростей в области D , индуцированное твердым телом при движении.

2. Характеристическая функция твёрдого тела

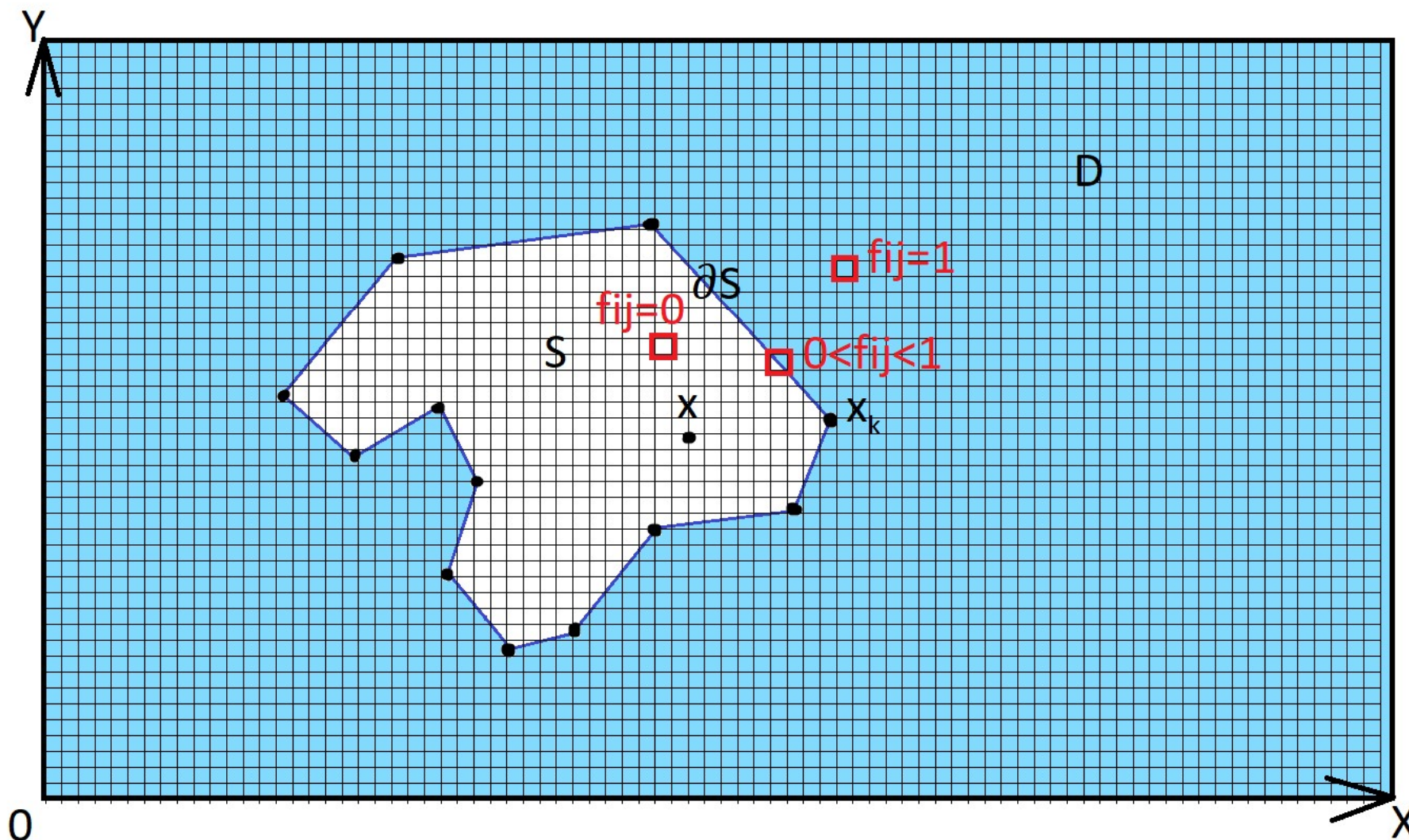
- Характеристическая функция твёрдого тела представляет собой функцию - индикатор:

$$f(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если точка } x \text{ принадлежит ТТ в момент времени } t \\ 1, & \text{если точка } x \text{ не принадлежит ТТ в момент времени } t \end{cases}$$

- Уравнение переноса — дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее изменение скалярной величины в пространстве и времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (uf) - f \nabla \cdot u = 0$$

2. Характеристическая функция твёрдого тела



2. Характеристическая функция твёрдого тела

- Начальные условия для уравнения переноса:
 1. Поле скоростей u
 2. Начальное положение точек границы твёрдого тела
- Необходимо найти:

Характеристическую функцию f в области D на отрезке времени $[0; T]$

Постановка задачи

- Таким образом, задачу можно представить в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + u \nabla \cdot f = 0 \\ \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t) \\ \vec{v}_k(t) = \vec{v}(t) + [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_k(t)] \end{array} \right.$$

- С начальными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} f|_{t=0} = f(x, 0) \\ x|_{t=0} = \vec{x}(0) \\ \vec{x}_k|_{t=0} = \vec{x}_k(0) \end{array} \right.$$

1D-Приближение: Дискретизация

- Отрезок $[0; X]$, на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на cellCount последовательных подотрезков, длиной ΔX_i каждый. $\Delta X_i = X(i+1/2) - X(i-1/2)$. Положения $X(i+1/2)$, $X(i-1/2)$ являются узлами данной сетки.
- Δt – длина шага по времени

Схема THINC

- Для численного решения уравнения переноса была рассмотрена схема THINC (tangent of hyperbola for interface capturing: гиперболический тангенс для отслеживания поверхности)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (uf) - f \nabla \cdot u = 0$$

где u - векторное поле скоростей

f - переносимая скалярная величина

$$f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in S(t) \\ 1, & x \notin S(t) \end{cases}$$

- В одномерном случае, для соленоидального поля скоростей:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- среднее значение функции f на i -ом отрезке Δx_i на n -ом временном шаге:

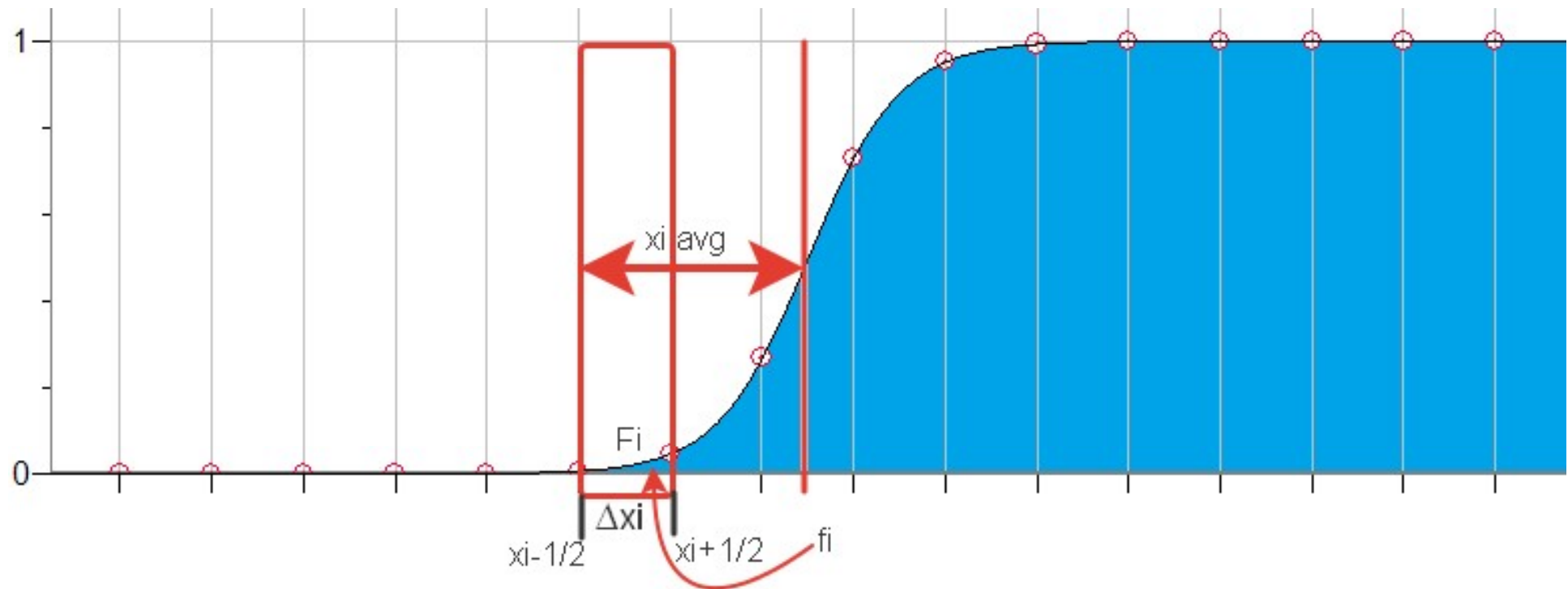
$$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t^n) dx$$

- Аппроксимация $f(i)n$:

$$F_i(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma_i \tanh \left(\beta \left(\frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} - \tilde{x}_i \right) \right) \right)$$

$$\gamma_i = \operatorname{sgn}(\bar{f}_{i+1}^n - \bar{f}_{i-1}^n)$$

- Параметр \tilde{x}_i – относительное расстояние до середины скачка f от левой границы отрезка $X(i-1/2)$.



$$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F_i(x) dx$$

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2\beta} \log \left(\frac{\exp \left(\frac{\beta}{\gamma_i} (1 + \gamma_i - 2\bar{f}_i^n) \right) - 1}{1 - \exp \left(\frac{\beta}{\gamma_i} (1 - \gamma_i - 2\bar{f}_i^n) \right)} \right)$$

Численное решение уравнения переноса в одномерном случае

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$(\bar{f}^{n+1} - \bar{f}^n) + u \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial x} dt = 0$$

$$\bar{f}_i^{n+1} - \bar{f}_i^n + \frac{u}{h} (\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \Delta t = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\bar{f}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}}{h}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F dt = F^{n+\frac{1}{2}} \Delta t$$

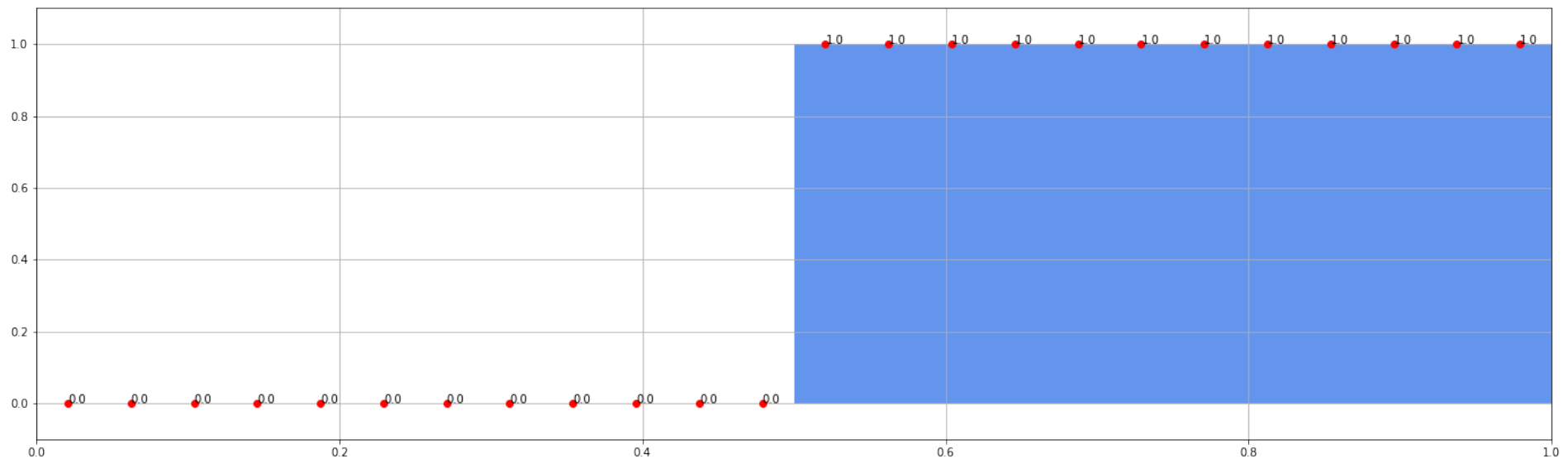
$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^n - \frac{u\Delta t}{h} (\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_i(x_{i+\frac{1}{2}} - u\frac{\Delta t}{2})$$

$$\bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_{i-1}(x_{i-\frac{1}{2}} - u\frac{\Delta t}{2})$$

Применение различных схем для аппроксимации скачка

- Схема Годунова
- Схема MUSCL
- Схемы THINC + Годунов
- Схемы THINC + MUSCL



Исследование ошибки и скорости сходимости методов

Если выполняется неравенствс $||x_n - x^*|| \leq \alpha h^\beta$

То метод имеет порядок сходимости β

+Анимация

Схема Годунова

$$\Psi_i(x) = \bar{f}_i$$

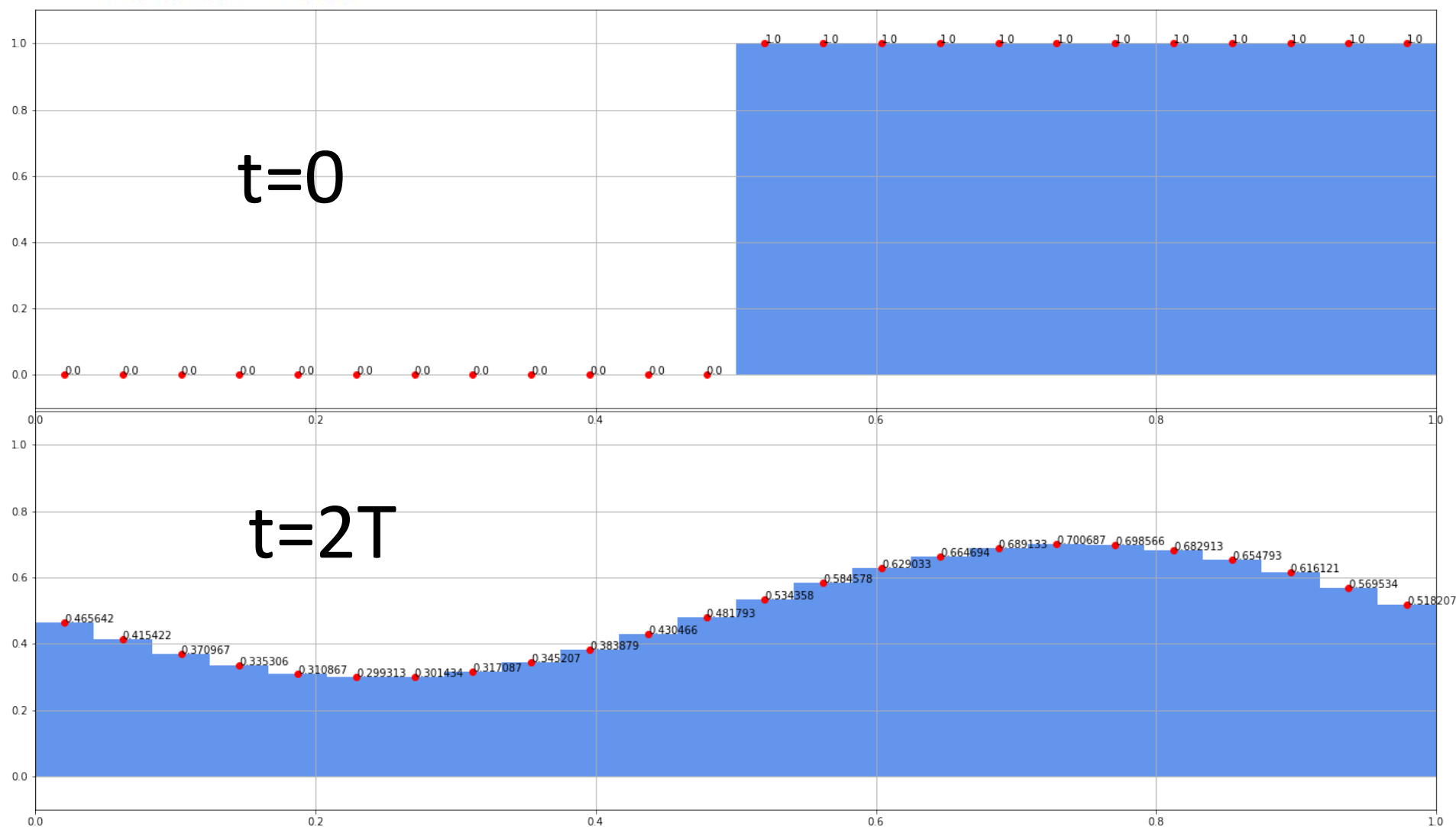


Таблица ошибок для схемы Годунова

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
N24	0.0595699	0.0768529	0.0876215	0.0938853	0.0974552	0.0994732	
N48	0.0343195	0.0422635	0.0489433	0.0543952	0.0586747	0.0619692	
N96	0.0203693	0.024306	0.0272539	0.0299097	0.0323704	0.0346239	
N192	0.0121176	0.0144143	0.015962	0.0171938	0.0182741	0.0192768	
N384	0.0072070	0.0085717	0.0094865	0.0101944	0.0107809	0.0112883	
N768	0.0042858	0.0050971	0.0056409	0.0060617	0.0064095	0.00670845	

Сходимость метода Годунова

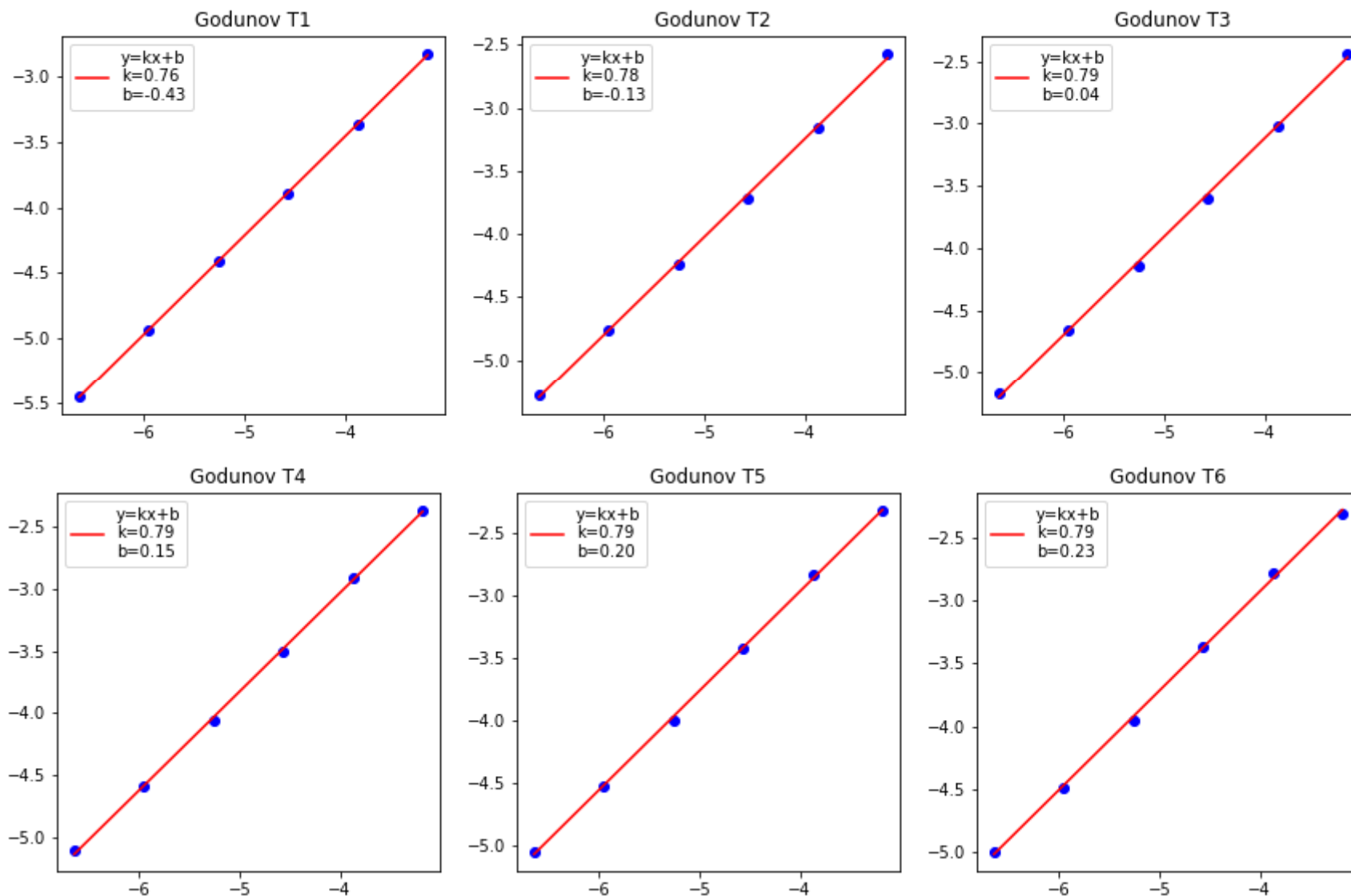


Схема MUSCL

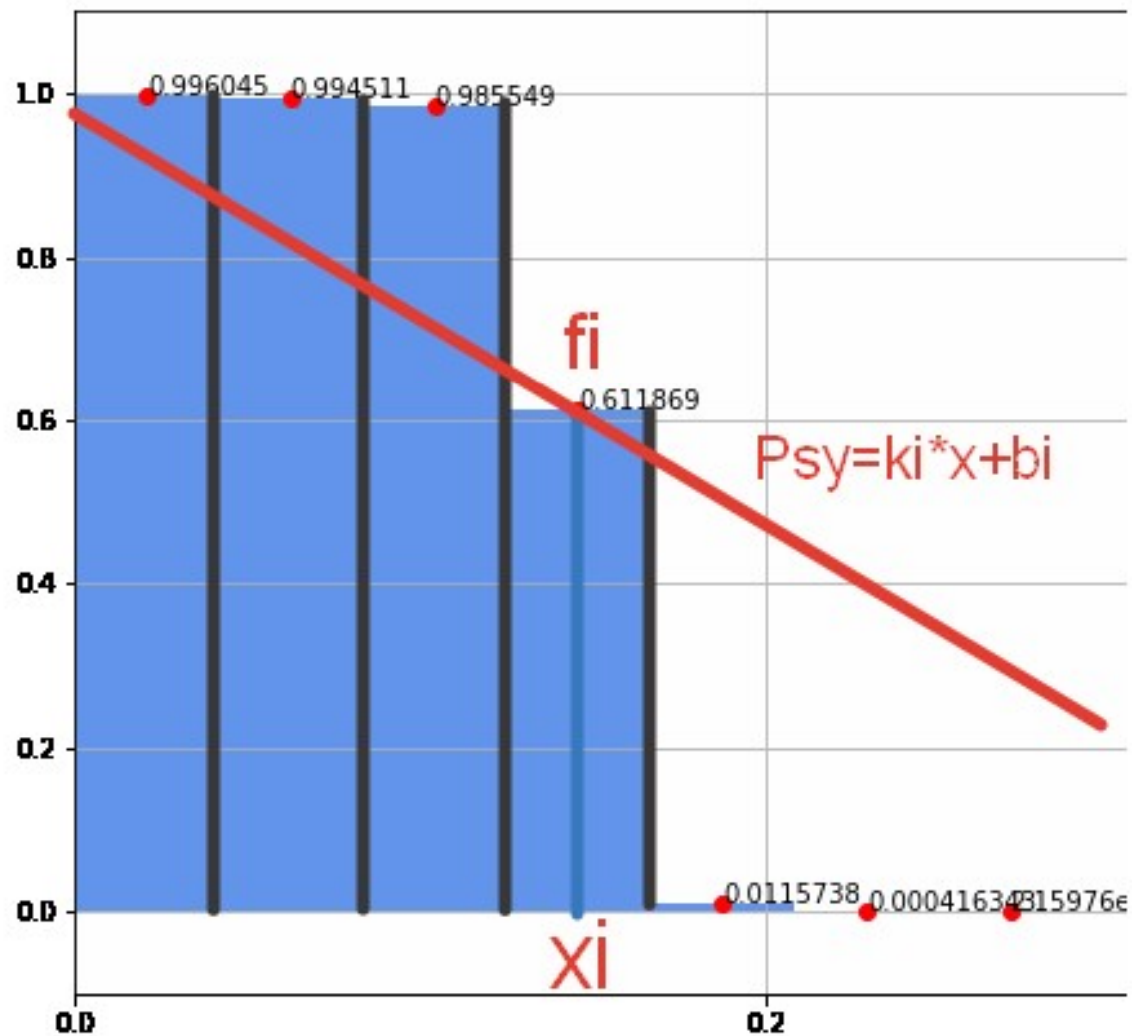


Схема MUSCL

$$\Psi_i(x) = k_i x + b_i$$

$$k_i = \minmod(\tilde{f}_i^R, \tilde{f}_i^L)$$

$$\tilde{f}_i^R = \frac{\bar{f}_{i+1} - \bar{f}_i}{h}$$

$$\tilde{f}_i^L = \frac{\bar{f}_i - \bar{f}_{i-1}}{h}$$

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} 0 & , ab < 0 \\ \operatorname{sgn}(a) \min(|a|, |b|) & , ab \geq 0 \end{cases}$$

$$b_i = \bar{f}_i - k_i x_i$$

Схема MUSCL

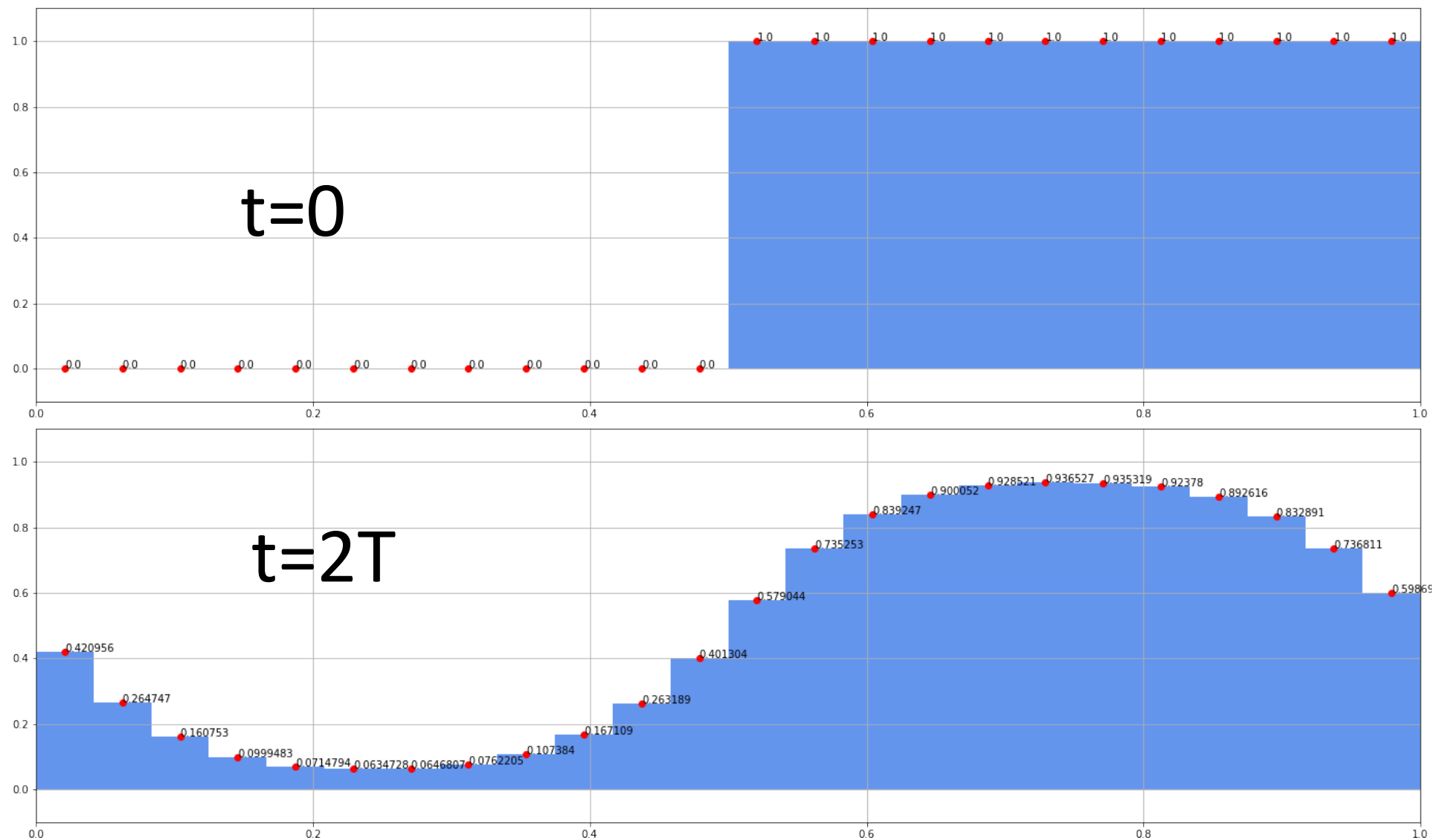


Таблица ошибок для схемы MUSCL

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
N24	0.0392346	0.0445669	0.0490333	0.0534235	0.0576686	0.0616839	
N48	0.0223648	0.0253282	0.0271637	0.028482	0.0295385	0.0304656	
N96	0.0126646	0.0143063	0.0153512	0.0161337	0.0167661	0.0173002	
N192	0.0071531	0.0080667	0.0086490	0.0090856	0.0094384	0.00973635	
N384	0.0040333	0.0045428	0.0048681	0.0051122	0.0053096	0.00547623	
N768	0.0022714	0.0025561	0.0027381	0.0028747	0.0029852	0.00307853	

Сходимость метода MUSCL

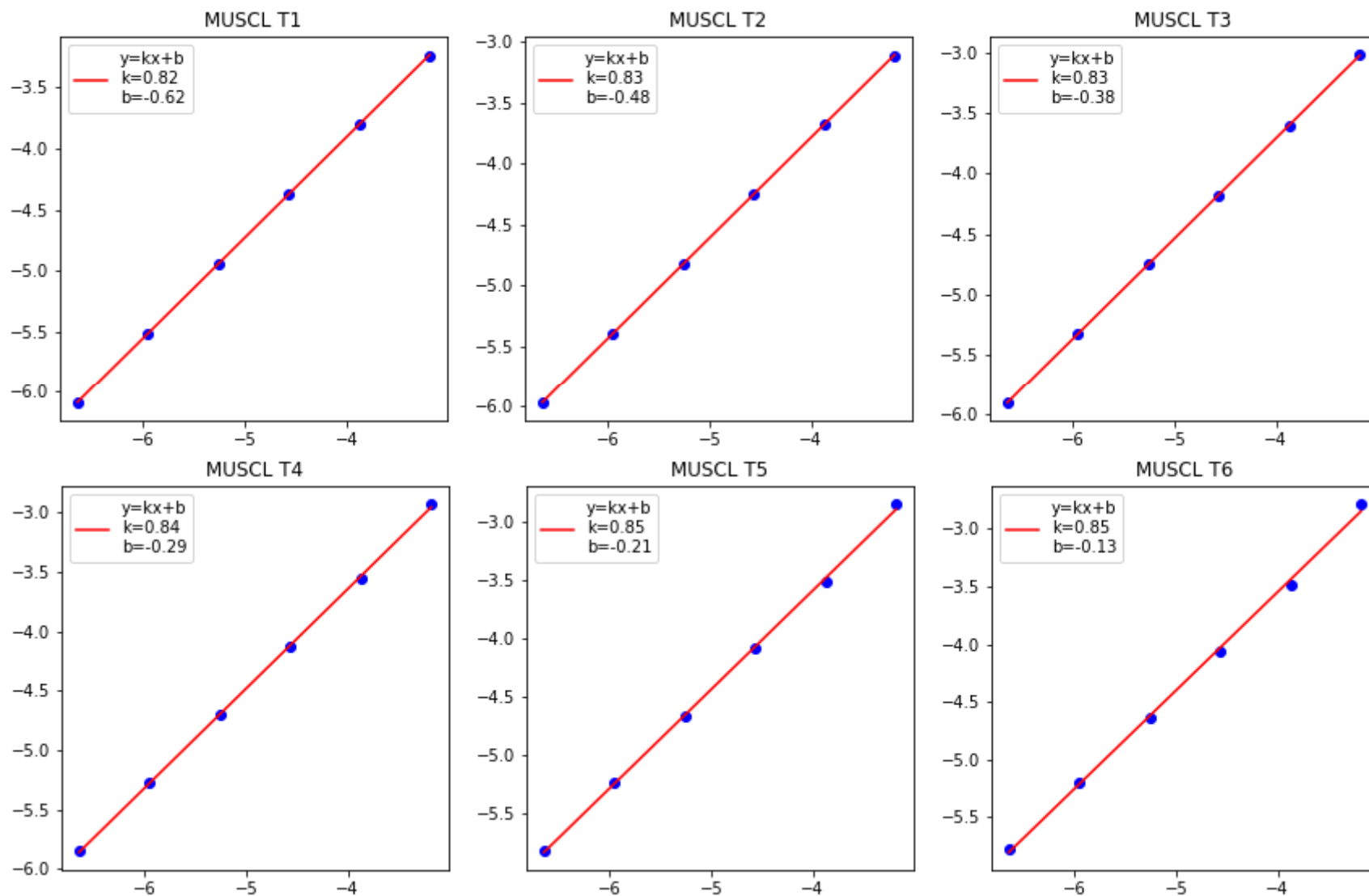


Схема THINC + Годунов/MUSCL

$$\begin{cases} \varepsilon < \bar{f}_i^n < 1 - \varepsilon \\ (\bar{f}_{i+1}^n - \bar{f}_i^n)(\bar{f}_i^n - \bar{f}_{i-1}^n) > \varepsilon \end{cases} \quad \bar{f}_i^n \in (0; 1) \quad (\text{условие монотонности на отрезке})$$

Условие
выполняется

THINC

Условие не
выполняется

Годунов/MUSCL

THINC

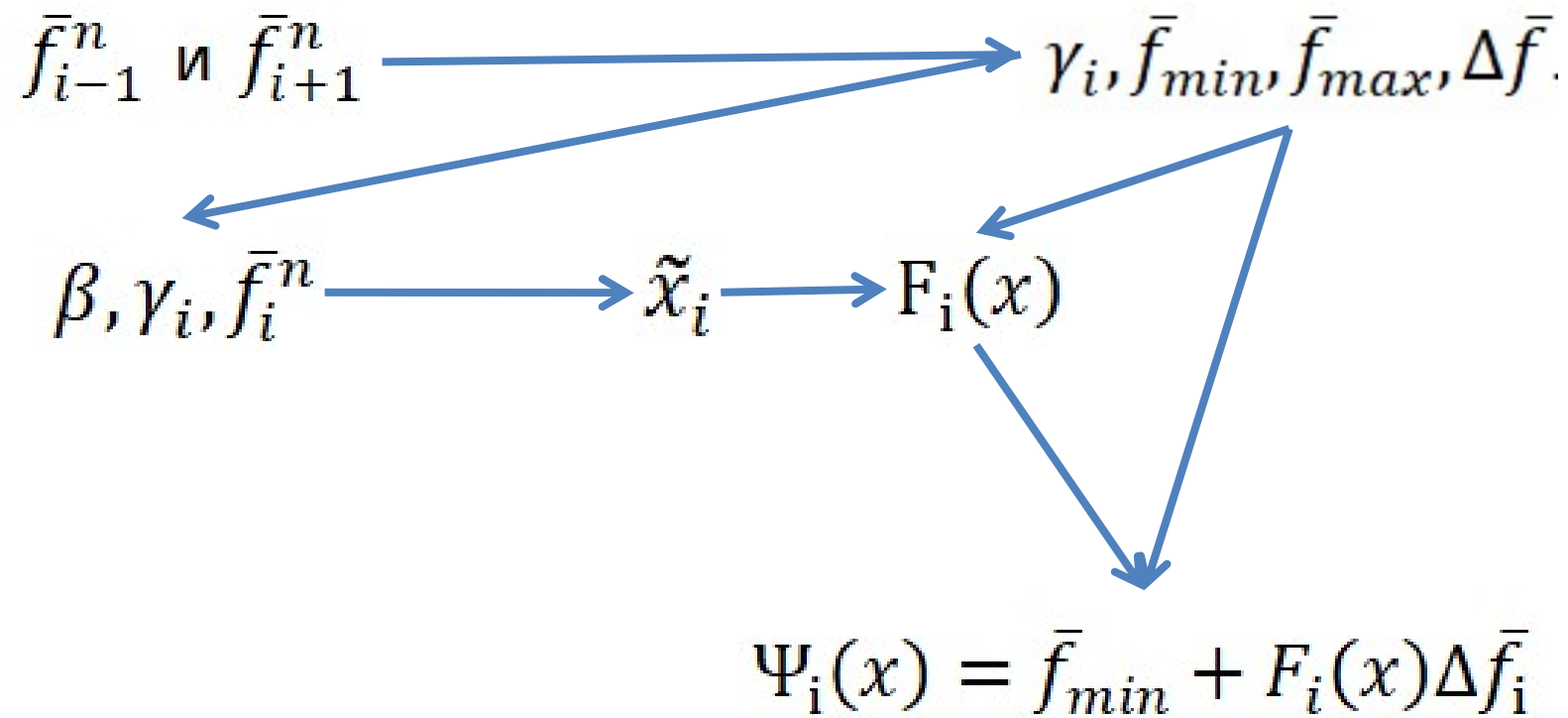
$$\Psi_i(x) = \bar{f}_{min} + F_i(x)\Delta\bar{f}_i$$

$$\bar{f}_{min} = \min (\bar{f}_{i-1}, \bar{f}_{i+1})$$

$$\bar{f}_{max} = \max (\bar{f}_{i-1}, \bar{f}_{i+1})$$

$$\Delta\bar{f}_i = \bar{f}_{max} - \bar{f}_{min}$$

THINC



THINC

$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^n - \frac{u\Delta t}{h} \left(\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$, \text{ где } \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_i \left(x_{i+\frac{1}{2}} - u \frac{\Delta t}{2} \right), \quad \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Psi_{i-1} \left(x_{i-\frac{1}{2}} - u \frac{\Delta t}{2} \right)$$

THINC + Годунов

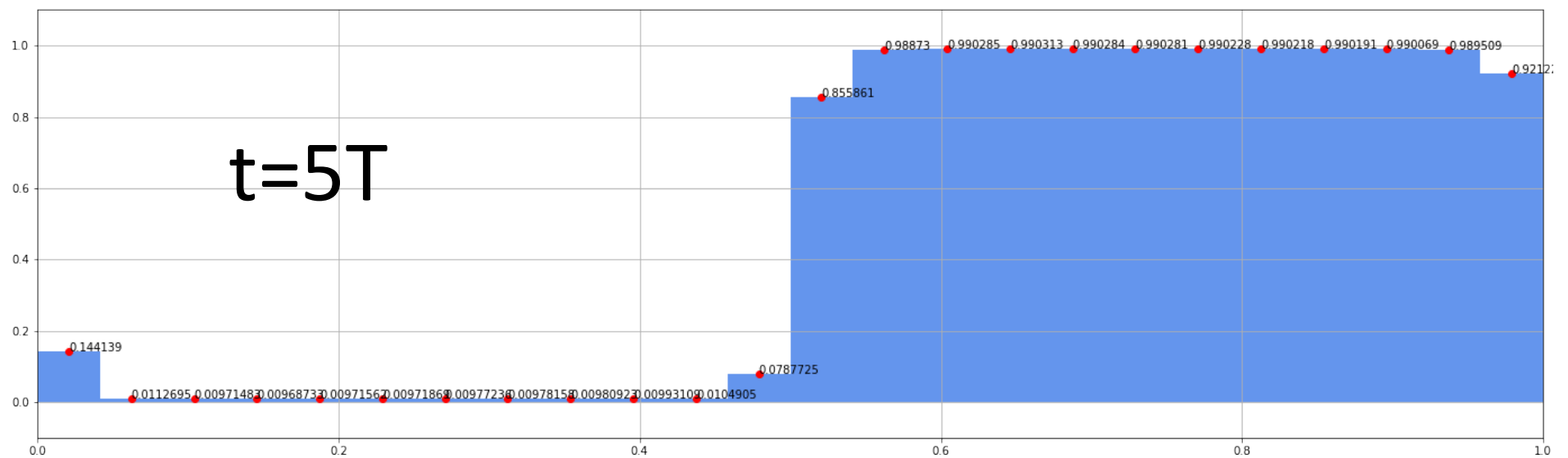
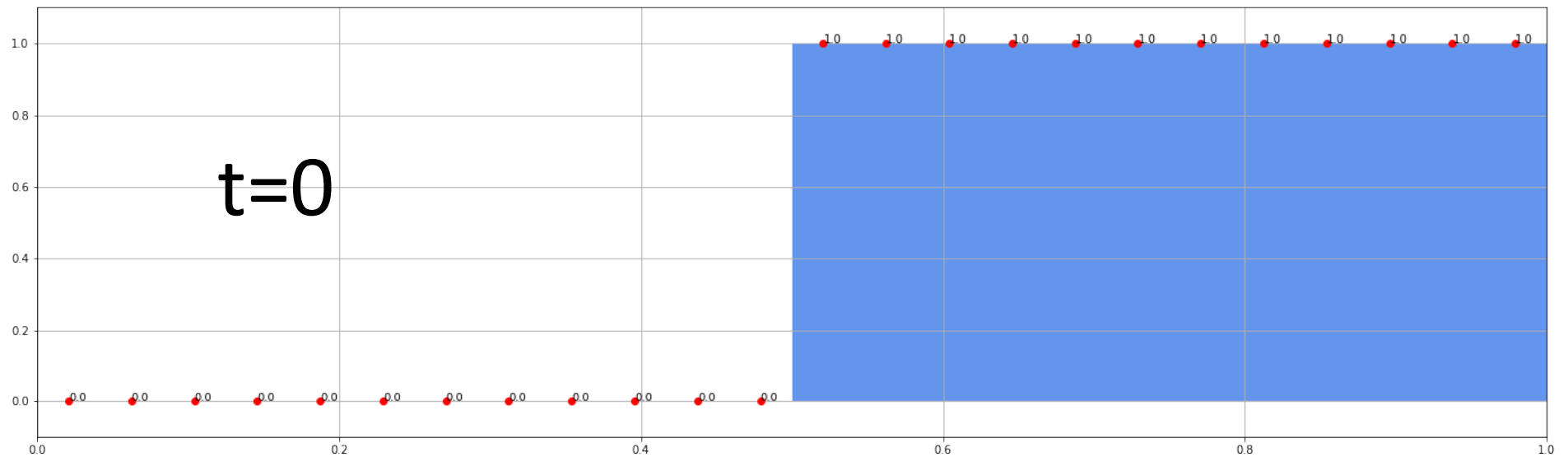
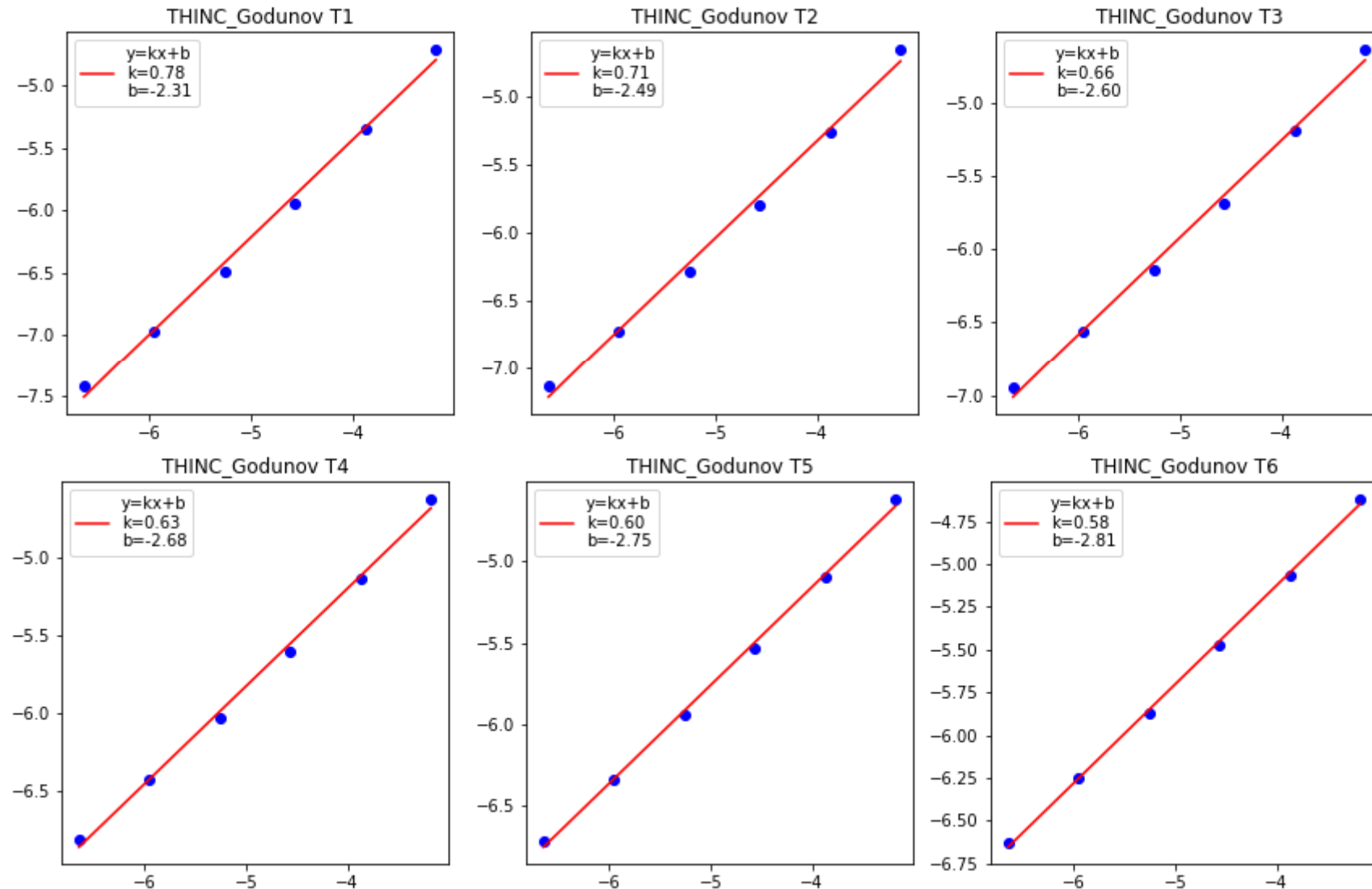


Таблица ошибок для схемы THINC + Годунов

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
N24	0.0090118	0.0094814	0.0097042	0.0098118	0.0098568	0.00987472	
N48	0.00474	0.0051974	0.0055753	0.0058824	0.0061252	0.0063158	
N96	0.0026127	0.0030231	0.0033690	0.0036773	0.0039554	0.00420747	
N192	0.0015160	0.0018619	0.0021515	0.0023975	0.0026185	0.00282078	
N384	0.0009312	0.0012031	0.0014197	0.0016078	0.0017747	0.00192507	
N768	0.0006021	0.0008045	0.0009639	0.0010975	0.0012126	0.00131397	

Сходимость метода THINC + Годунов



THINC + MUSCL

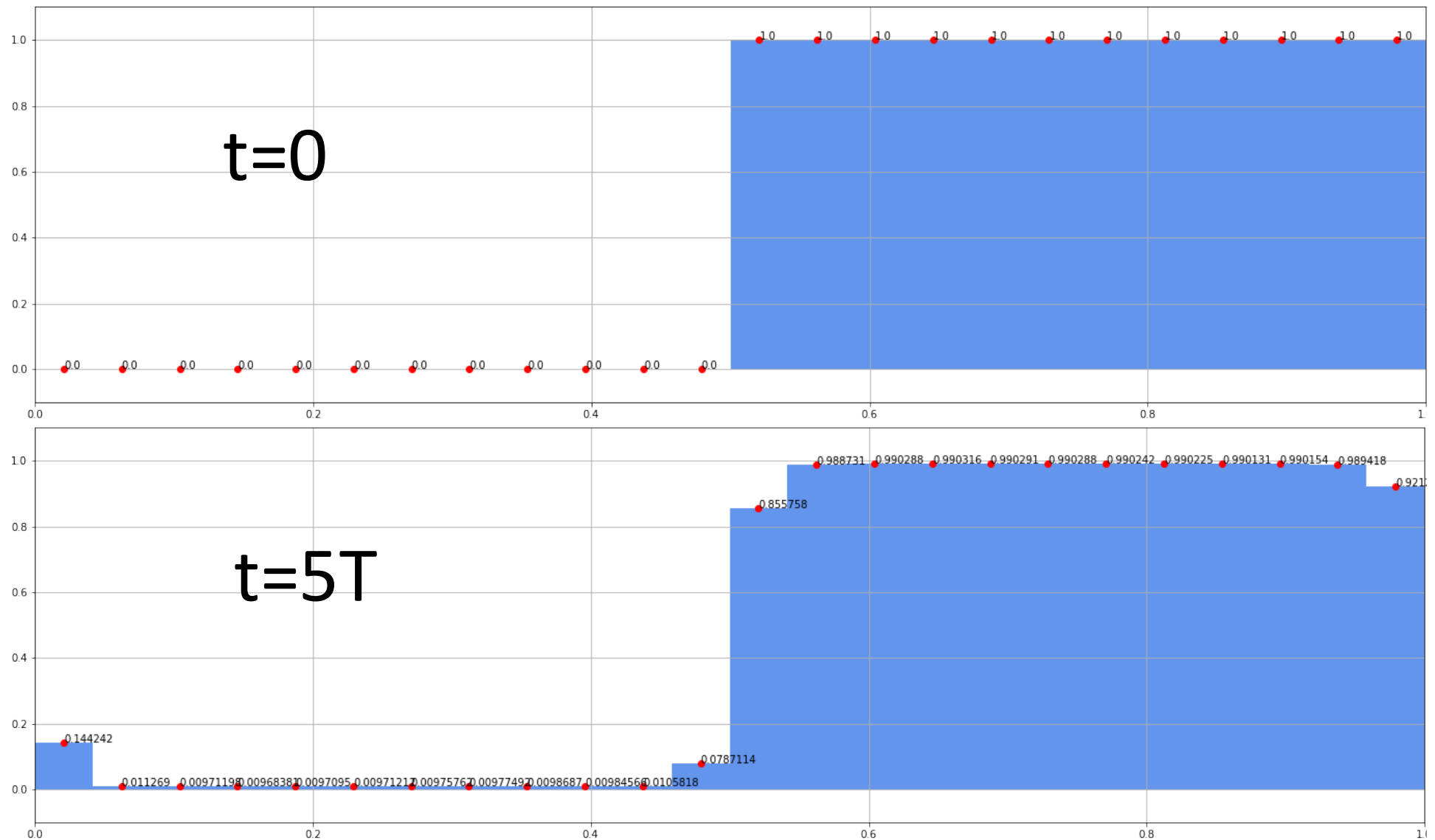
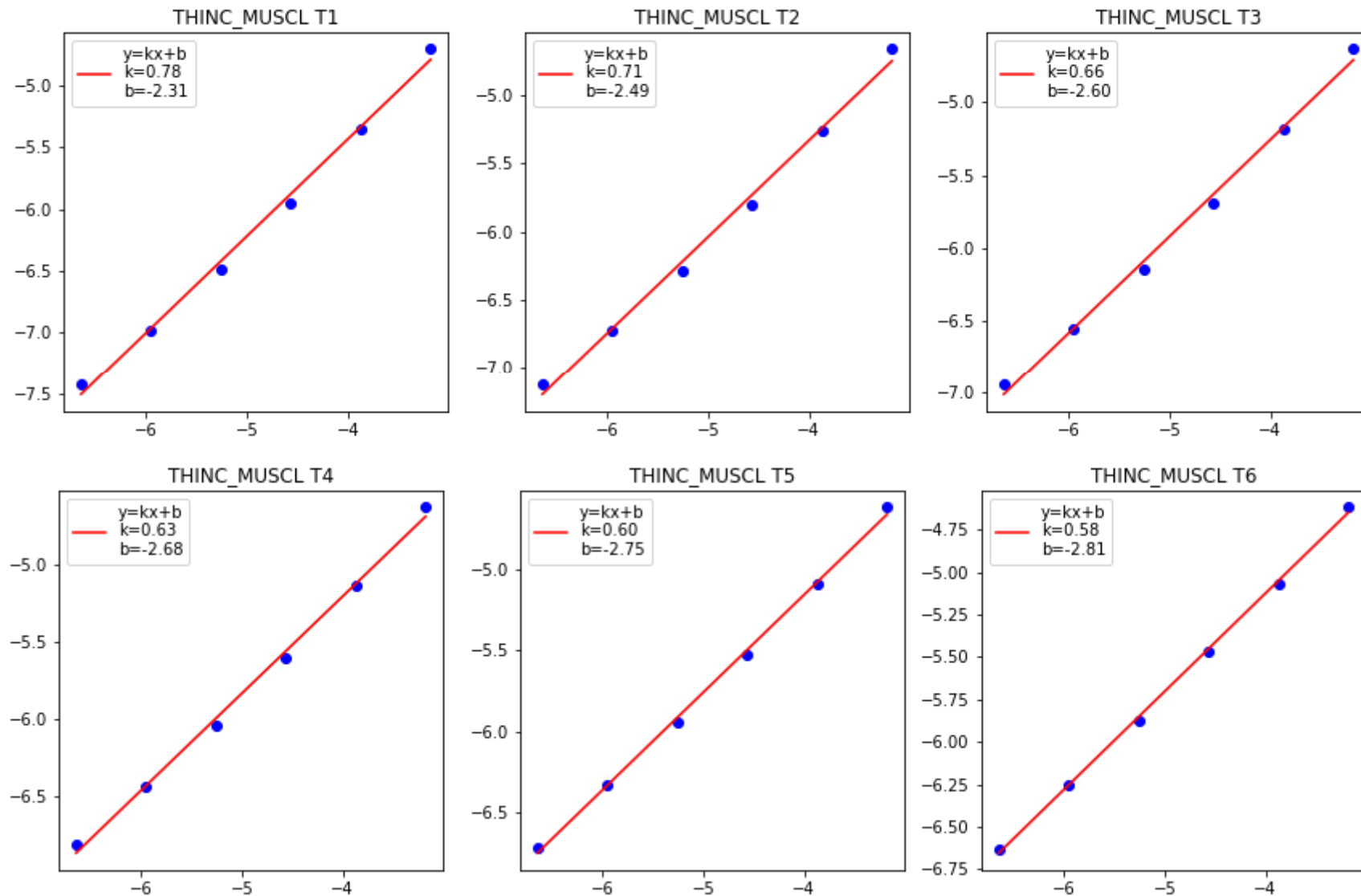


Таблица ошибок для схемы THINC + MUSCL

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
N24	0.0090134	0.0094778	0.0097058	0.0098139	0.0098604	0.009877	
N48	0.0047462	0.0052020	0.0055781	0.0058837	0.0061277	0.00631798	
N96	0.0026114	0.0030223	0.0033697	0.0036791	0.0039584	0.00421094	
N192	0.0015143	0.0018604	0.0021472	0.0023961	0.0026176	0.00282053	
N384	0.0009307	0.0012023	0.0014195	0.0016076	0.0017735	0.00192568	
N768	0.0006008	0.0008038	0.0009629	0.0010975	0.0012133	0.00131483	

Сходимость метода THINC + MUSCL



- Изображения: графики методов

Заключение

- Таким образом, были исследованы методы численного решения уравнения переноса с использованием подхода цифровой геометрии. Был исследован численный метод решения уравнения переноса и реализован его программный алгоритм для одномерного случая.
- Важно отметить, что исследование схем для решения уравнение переноса в одномерном случае позволяет использовать данный подход в двумерном и трехмерном пространстве.
- Для представления цифровой геометрии были исследованы схемы с разным порядком точности, в том числе схема Годунова, MUSCL и THINC.
- Применение схемы THINC в отличие от других схем позволяет с высокой точностью описать поведение геометрии в цифровом виде.
- Программа, написанная для одномерного случая будет использована в дальнейшем как расчетный блок для многомерного случая